MSEL

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

Modelling in Science Education and Learning
Volumen 6(2), No. 18, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Modelos emergentes en un primer curso de economía y administración

Francisco Infante
Universitat de València & Universidad Santo Tomás. Colombia
pachojfi@gmail.com

Luis Puig
Universitat de València
luis.puig@uv.es

Abstract

En este artículo presentamos un esbozo de una investigación en curso en la que se pretende indagar sobre la enseñanza del proceso de modelización y de las familias de funciones en el contexto de un curso de Economía y Administración. En concreto, introducimos algunos de los fundamentos teóricos que sustentan la investigación y presentamos un ejemplo de una de las actividades que estamos diseñando para la enseñanza.

In this paper we present an outline of an ongoing research in which we intend to investigate on the teaching of the modelling process and families of functions in the context of a course in Economics and Management. Specifically, we introduce some of the theoretical foundations that support the research and we present an example of one of the activities that we are designing for teaching.

Keywords: Modelización, funciones, matemática realista, economía, administración.
Modelling, functions, realistic mathematics, economics, management

1 Introducción

En este artículo presentamos un esbozo de una investigación en curso en la que se pretende indagar sobre la enseñanza del proceso de modelización y de las familias de funciones elementales en el contexto de un curso de Economía y Administración en el sistema educativo universitario colombiano. En concreto, introducimos algunos de los fundamentos teóricos que sustentan la investigación y presentamos un ejemplo de una de las actividades que estamos diseñando para la enseñanza.

Este trabajo se enmarca en la serie de estudios que uno de nosotros lleva realizando desde hace años, por un lado, sobre el análisis fenomenológico de las matemáticas escolares ([10]), y, por otro, sobre el proceso de resolución de problemas, tanto considerado en el aspecto general que es propio de la heurística ([9]), como en el caso de clases de problemas particulares, o en el caso de los problemas reales que se modelizan con familias de funciones ([11]). En particular, este trabajo desarrolla la idea, ya tratada en [12], del papel crucial que desempeña el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones en el proceso de modelización.

2 Matemática Realista

La importancia de las aplicaciones y modelos en la Educación Matemática se hace explícita en las diferentes conferencias de la ICTMA (International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications) así como en el ICMI Study 14, Modelling and Applications in Mathematics Education ([1]).

Uno de los enfoques educativos que reconoce esta importancia es la Matemática Realista (RME, Realistic Mathematics Education), en la que se enmarca este trabajo ([15, 2]). Ésta es una teoría de instrucción que tiene sus orígenes en los Países Bajos como una reacción a la corriente conocida como Matemática Moderna.

La RME se basa en la Fenomenología Didáctica de Freudenthal (1983) y en su visión de que las matemáticas son una actividad humana y que la realidad puede ser utilizada como fuente para la matematización.

> *La diferencia entre la instrucción matemática de acuerdo con un enfoque realista versus un enfoque de procesamiento de la información [EPI] es más palpable en la forma en que se tratan las aplicaciones. El EPI ve las matemáticas como un sistema ya hecho con aplicabilidad general y la instrucción matemática como un disgregar el conocimiento matemático formal en aprendizajes de procedimientos y luego aprendizajes de cómo aplicarlos. Dentro del enfoque realista, el énfasis es en [la] matematización. [Las] Matemáticas son vistas como una actividad, una forma de trabajo. Aprender matemáticas significa hacer matemáticas, de lo cual resolver problemas de la vida diaria es una parte esencial ([5, p.91]).*

Podemos precisar seis principios básicos de la RME: el principio de actividad, el de realidad, el de reinvención guiada, el principio de interconexión, el de interrelación y el de niveles ([16, 18]). En este último se enmarca en gran medida el enfoque de modelización de la RME, los Modelos Emergentes ([6, 7]).

Ampliemos este último principio: ya Freudenthal (1983) y luego Treffers (1987), habían indicado cómo en el proceso de matematización se iban sucediendo una irrestricta progresión de microniveles. Más recientemente Van den Heuvel-Panhuizen (2003) y Gravemeijer (1994, 1999, 2007) han visto una gama de niveles desde lo situacional hasta lo formal (Figura 1), que indican una progresión en el desarrollo, aunque no estrictamente una jerarquía. Los cambios entre ellos se expresan en la progresiva matematización horizontal y vertical y en la construcción de modelos.

3 Matematización Horizontal y Vertical

El núcleo de la actividad matemática en la RME es la matematización. Treffers (1987) la define como la actividad de organizar y estructurar, en la que el conocimiento y las habilidades adquiridas son llamadas a ordenar y descubrir regularidades, conexiones y estructuras hasta ahora desconocidas.

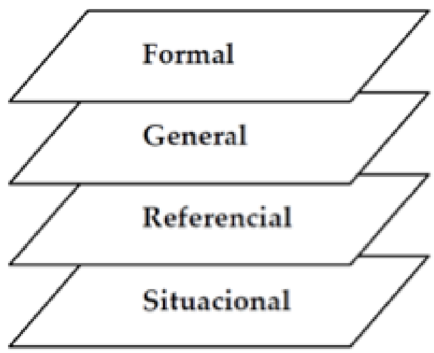


Figura 1: Niveles en el proceso de actividad en la matematización ([5]).

Podemos distinguir dos tipos de matematización: la horizontal y la vertical. El primero implica convertir un problema contextual en un problema matemático Treffers (1987): es aquí donde los alumnos generalizan herramientas matemáticas, las cuales los ayudan a organizar y a solucionar una situación problemática presentada dentro de un contexto real; identificar o describir la matemática relevante dentro de un contexto; esquematizar, formular y visualizar un problema de diversas maneras; descubrir relaciones y regularidades, etc.

La matematización vertical es el proceso de reorganización dentro del mismo sistema matemático. Representar una relación como fórmula, probar regularidades, mejorar, ajustar, combinar e integrar modelos, formular un modelo matemático y generalizar son ejemplos de las actividades de matematización vertical. Por esta razón se dice que la matematización vertical es tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción ([4, 8]). Para Freudenthal, la matematización horizontal implica ir "del mundo de la *vida* al mundo de los *símbolos*" ([4, p. 41]), mientras que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos matemáticos. La representación de este proceso de matematización se puede ver en la Figura 2.

4 Los modelos emergentes

Una de las herramientas del proceso de matematización es la creación de modelos: a distintos niveles y con diferentes características, como lo explica Gravemeijer (2007), los estudiantes comienzan modelando su propia actividad matemática informal. Y, en el proceso, el carácter del modelo va cambiando gradualmente para el estudiante, convirtiéndose en un modelo más formal de su razonamiento matemático, pero enraizado en el conocimiento experiencial del estudiante.

Según Gravemeijer:

> *La denominación emergente se refiere tanto al carácter del proceso por el cual los modelos emergen dentro de la RME, como al proceso por el cual estos modelos soportan la emergencia de las formas de conocimiento matemático formal. De acuerdo con el diseño heurístico del modelamiento emergente, el modelo primero se manifiesta como un* **modelo de** *las estrategias informales de un estudiante específico situado. Luego con el tiempo el modelo gradualmente va tomando vida por sí mismo, hasta convertirse en una entidad por propio derecho y comienza a servir como* **modelo para** *un razonamiento matemático más formal, todavía personalmente significativo ([7, p.139]).*

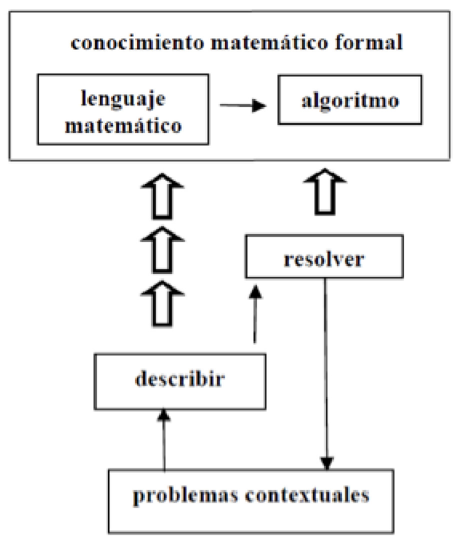


Figura 2: Matematización vertical ([5]).

El progreso de la situación, pasando por el modelo de y el modelo para, hasta el conocimiento formal, se puede relacionar, según Santamaría (2006), con los cuatro niveles de actividad que establece Gravemeijer (1994): situacional, referencial, general y de pensamiento matemático formal (Figura 3).

Figura 3: Relación niveles de actividad y modelación([13]).

5 La Situación: la historia de Tim y Tom

En este apartado presentamos una situación paradigmática siguiendo el enfoque de la RME para un primer curso de matemáticas de la carrera de economía y administración.

Tim y Tom eran gemelos idénticos. Los dos comenzaron a trabajar a los 20 años en puestos de trabajo idénticos, con salarios idénticos, y al final de cada año recibían bonificaciones idénticas de 2000€. Sin embargo, no eran idénticos en todos los aspectos.

Desde muy temprano en la vida, **Tim** fue conservador y estuvo preocupado por su futuro. Cada año, invertía su bono de 2000€ en un programa de ahorro con interés que ganaba un 9% compuesto anual. Tim decidió a la edad de 30 años tener algo de diversión en la vida y comenzó a gastar sus bonos de 2000€ en vacaciones y viajes. Esto continuó hasta que cumplió los 65 años de edad.

Tom, por su parte, creía en su juventud que la vida era demasiado corta para estar preocupado por ahorrar para el futuro. Durante diez años, gastó sus bonos de 2000€ en vacaciones en las Bahamas. A los 30 años, comenzó a darse cuenta de que algún día podría no ser capaz de trabajar y entonces necesitaría fondos para poderse sostener. A partir de ese momento, él comenzó a invertir sus bonos de 2000€ en un programa de ahorros que ganaba 9% de interés compuesto anual. Esto continuó así hasta sus 65 años.

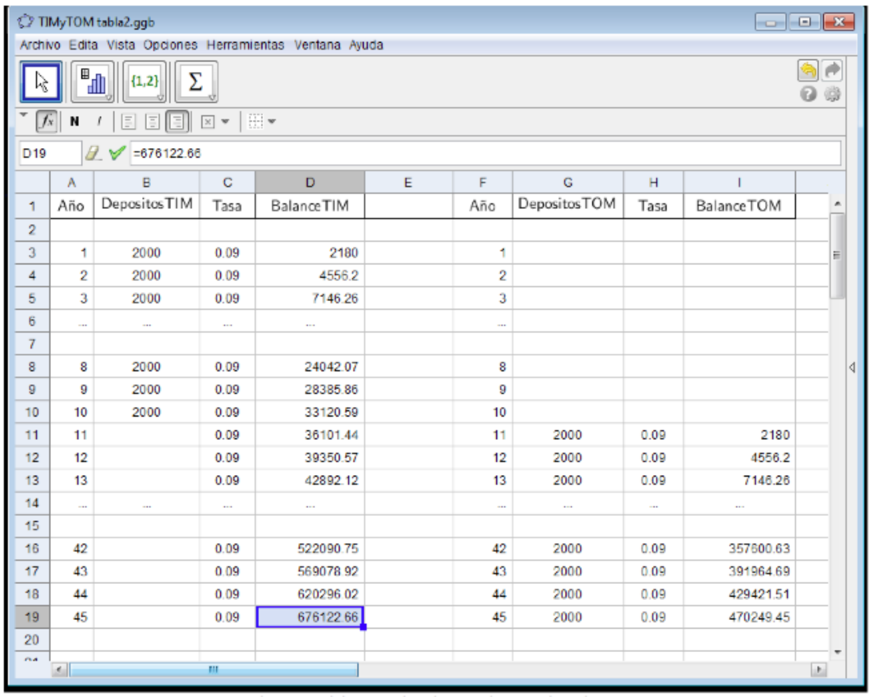
A través de los años, los hermanos se separaron. Sin embargo, se encontraron con alegría a los 65 años en una reunión familiar e intercambiaron muchas historias de los acontecimientos en sus vidas. Finalmente, la conversación giró en torno a los planes de jubilaciones y programas de ahorro. Cada hermano estaba orgulloso de sus ahorros y mostró al otro una hoja de cálculo describiendo sus actividades de ahorro, plazos, y los acumulados. Los hermanos compararon sus cuentas ampliamente y quedaron sorprendidos.

1. ¿Qué los sorprendió tanto?
2. ¿Cuál de estos dos planes crees que es mejor?
3. ¿Cuál de los dos planes preferirías seguir como programa de ahorro para toda la vida?

Esta situación que se publicó originalmente en [14], la hemos retomado y modificado en nuestro trabajo, para convertirla en el pretexto para realizar el proceso de modelización con ayuda del GeoGebra© (GG), de manera que a partir de ella se construye todo un itinerario de trabajo con varios momentos.

El primero, después de presentar la actividad y generar la inquietud con las preguntas, es un ejercicio de análisis cualitativo ([12]), donde se solicita a los estudiantes que realicen un bosquejo de las gráficas de las funciones que podrían modelizar el fenómeno. Luego se les pide elaborar una tabla en GG con los datos de los ahorros de los dos hermanos a lo largo de su vida laboral, lo que brinda la posibilidad de hacer un primer intento de modelización utilizando la hoja de cálculo del GG y sus propiedades recursivas.

A partir de esta tabla, se revisan las preguntas, y se puede entender la sorpresa de los hermanos con los resultados (Figura 4), porque Tim, que invirtió sus bonos solamente diez años, pero ganando interés desde el comienzo, ha alcanzado un ahorro total de 676.122,66€, que es superior al de Tom, que sólo tiene en su balance 470.249,45€ a pesar de haber invertido sus bonos durante 35 años.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Año	DepositosTIM	Tasa	BalanceTIM		Año	DepositosTOM	Tasa	BalanceTOM
2									
3	1	2000	0.09	2180		1			
4	2	2000	0.09	4556.2		2			
5	3	2000	0.09	7146.26		3			
6	...	...	...	...		...			
7									
8	8	2000	0.09	24042.07		8			
9	9	2000	0.09	28385.86		9			
10	10	2000	0.09	33120.59		10			
11	11		0.09	36101.44		11	2000	0.09	2180
12	12		0.09	39350.57		12	2000	0.09	4556.2
13	13		0.09	42892.12		13	2000	0.09	7146.26
14	...	...	...	...		...	...	...	...
15									
16	42		0.09	522090.75		42	2000	0.09	357600.63
17	43		0.09	569078.92		43	2000	0.09	391964.69
18	44		0.09	620296.02		44	2000	0.09	429421.51
19	45		0.09	676122.66		45	2000	0.09	470249.45
20									

Figura 4: Tabla con las inversiones de Tim y Tom.

A partir de esta situación se realiza un segundo momento de análisis cualitativo, donde se generan nuevas preguntas sobre las funciones en cuestión tratando de precisar sus características y las del fenómeno mismo que se está modelando.

Desde la tabla y con la ayuda del GG se construyen las gráficas discretas de las dos funciones que representan los ahorros de Tim y Tom (Figura 5).

A partir de las características del fenómeno y con el uso de la tabla y las gráficas elaboradas, utilizamos el menú estadístico del GG en busca de una regresión conveniente que se ajuste a las características del fenómeno y nos permita modelizarlo. Así probamos algunas de estas regresiones, siempre bajo la perspectiva del análisis cualitativo realizado, lo que nos lleva a enfocarnos en las regresiones exponenciales y de potencia con que cuenta el GG. En las figuras 6 y 7 se pueden ver estas regresiones para el caso del ahorro de Tom.

Sin embargo, el uso de las regresiones del GG no ha sido suficiente para lograr modelizar adecuadamente las funciones que representan el fenómeno, lo cual nos lleva de nuevo a las gráficas y a la tabla: con ellas y nuestro cuaderno de notas intentaremos modelizar las funciones en cuestión.

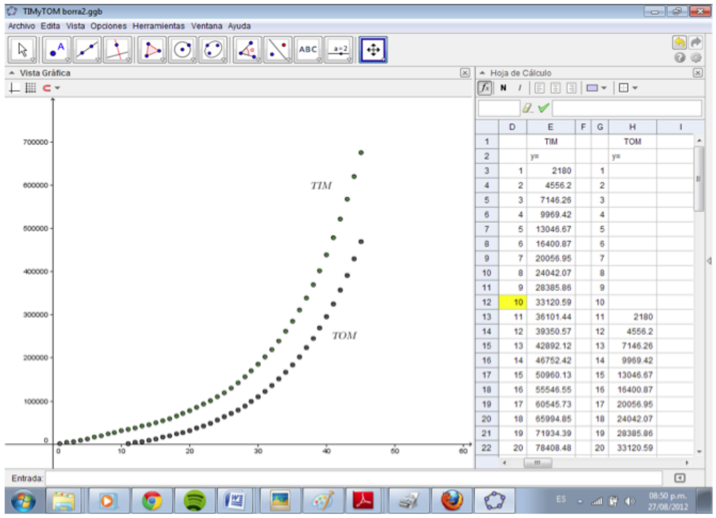


Figura 5: Gráficas de los ahorros de Tim y Tom.

Veamos esto con más detalle. El comportamiento de los ahorros de Tim está determinado por dos reglas diferentes: lo que ocurre en los primeros 10 años y lo que sucede en los siguientes 35. Esto definirá una función a trozos con dos partes. Por otro lado, el comportamiento de los ahorros de Tom sigue una sola regla que tiene gran semejanza con la primera parte de la función de Tim.

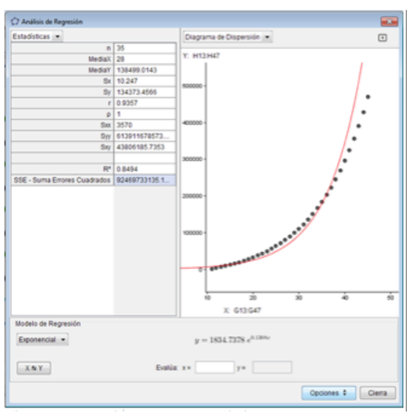


Figura 6: Regresión Exponencial Tom.

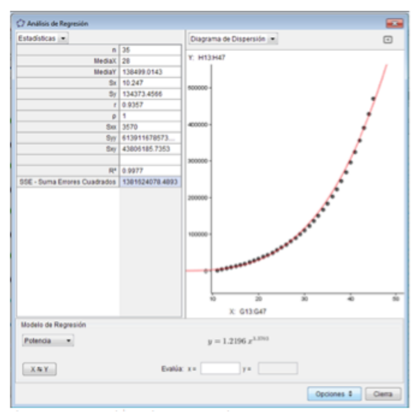


Figura 7: Regresión de Potencia Tom.

Comencemos por la situación de Tim, y de las dos partes por la última. Aquí lo que sucede es que la cantidad ahorrada hasta el décimo año a ($a = 33.120, 59€$) continúa ganando interés a una tasa r cada año, en este caso $r = 9\%$, que luego se vuelve a invertir $(1 + r)$, con lo que tenemos una función exponencial de la forma $y = a(1+r)^x$, que aquí sería $y = 33.120, 59(1, 09)^x$. Ahora bien, esta función hay que desplazarla, pues es el comportamiento después del décimo año. Para ello podemos utilizar los deslizadores del GG (ver Figura 8 donde el parámetro para el deslizador es $h = 10$) con lo que obtenemos:

$$f(x) = 33.120, 59 \cdot (1, 09)^{x-10}, \quad x > 10. \tag{1}$$

La primera regla que rige la función de Tim, en la que se invierte cada año los 2000€ y sobre ellos se gana un interés del 9%, que se reinvierte, más los 2000€ del nuevo bono, va generando una serie geométrica, de la cual se puede deducir la fórmula de su suma (sin embargo aquí por la limitación de espacio no lo haremos). Esta expresión, conocida como la fórmula de la suma de la anualidad, es de la forma:

$$S_x = a\Big(\frac{(1+r)^x - 1}{r}\Big)(1+r), \tag{2}$$

donde	para nuestro caso,
a es el valor inicial que se invierte,	$a = 2000$€.
r es la tasa anual a la que se invierte,	$r = 9\%$.
x es el número de años de la inversión,	x, $0 \leq x \leq 10$.

Sustituyendo, simplificando y cambiando S_x por $f(x)$ en (2) nos queda:

$$f(x) = 22.222,22(1,09)(1,09)^x - 24.222,22. \tag{3}$$

De esta manera, reuniendo (1) y (3) tenemos la función de los ahorros de Tim, con sus dos partes:

$$f(x) = \begin{cases} 22.222,22(1,09)(1,09)^x - 24.222,22 & 0 \leq x \leq 10 \\ 33.120,59(1,09)^{x-10} & x > 10 \end{cases} \tag{4}$$

La función $p(x)$, que corresponde al ahorro de Tom, sigue las mismas características que (3), pero con una necesaria traslación, pues Tom comenzó su ahorro en el decimo año. Esto varía el exponente de la función, como es fácil de apreciar con el deslizador del GG (Figura 8).

$$p(x) = 22.222,22(1,09)(1,09)^{x-10} - 24.222,22, \quad x \geq 10. \tag{5}$$

La Figura 8 muestra las funciones $f(x)$ y $p(x)$ que hemos encontrado como modelos del fenómeno.

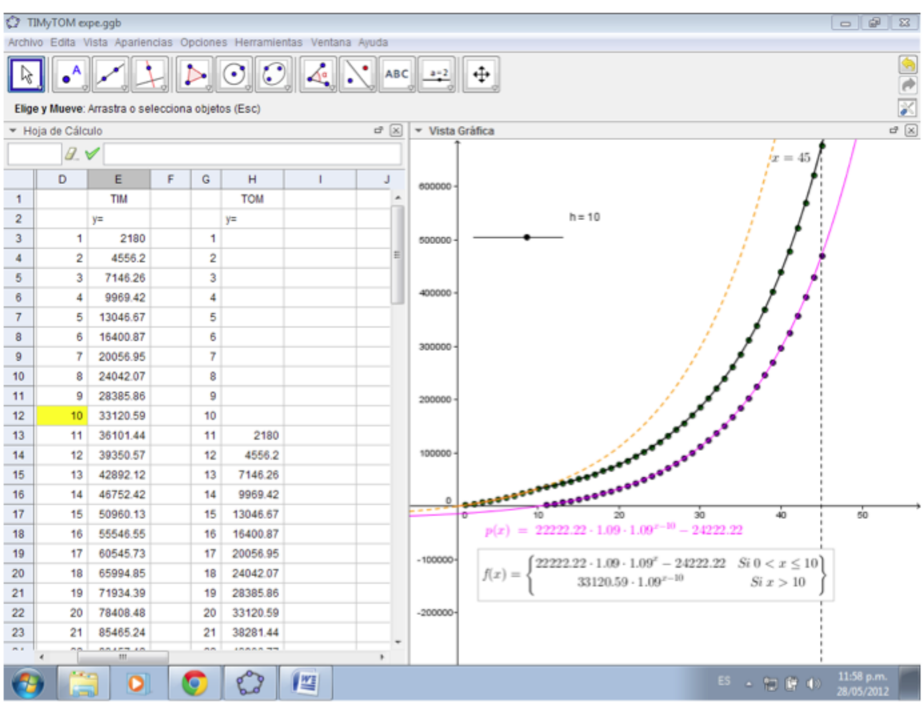


Figura 8: Ecuaciones de las funciones de ahorro de Tim y Tom.

6 Algunas posibles extensiones

El problema que nos ha servido de pretexto puede brindar otras posibilidades para explorar en el ámbito de la modelización y en el aprovechamiento de las características del programa. Por ejemplo, podríamos plantearnos:

- ¿El comportamiento de las funciones de los ahorros de Tim y Tom se mantiene sin importar la tasa a la que se invierta, conservando las demás condiciones? O, en otros términos, ¿siempre ganará más Tim?

- ¿A qué tasa deben invertir Tim y Tom –manteniendo las otras condiciones– para que tengan el mismo dinero al final de los 45 años de ahorro?

- ¿Las funciones mantienen el comportamiento que favorece a Tim, si se cambian los periodos de tiempo de ahorro de los hermanos?

Varias de estas situaciones se pueden estudiar aprovechando la herramienta deslizador del GG, pues esta nos brinda la posibilidad de ajustar los parámetros de las funciones que se modelizan de manera sencilla, permitiéndonos visualizar los cambios inmediatamente en la gráfica del modelo.

En este sentido, es ilustrativa la solución a la primera de estas situaciones, donde, al incluir un deslizador para parametrizar la tasa de inversión r e irla variando, se descubren situaciones interesantes, pues, en la medida en que disminuye la tasa, se puede ver cómo las dos funciones se acercan. Así, para $r = 0.07$, se nota cómo se cruzan, aunque con un tiempo de inversión superior a los 45 años (Figura 9, las dos líneas continuas representan las funciones ajustadas).

Si se continúa disminuyendo la tasa, se puede ver cómo las funciones se cruzan antes de los 45 años de inversión y el balance final del ahorro de Tom es superior al de Tim. En la Figura 10 se aprecia este comportamiento para $r = 0.06$.

Responder a la segunda situación es entonces cuestión de ajustar el deslizador para saber con qué tasa las dos funciones se cruzan cuando el tiempo de inversión es de exactamente 45 años.

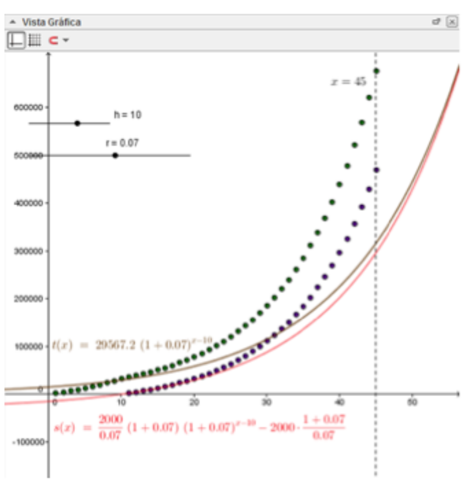


Figura 9: Gráfica fenómeno con r=7%.

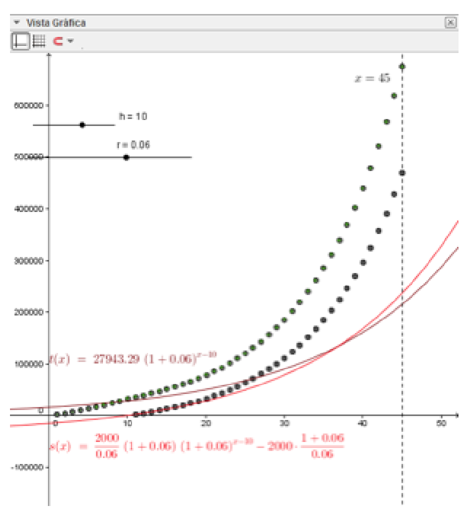


Figura 10: Gráfica fenómeno con r=6%.

7 Los Modelos Emergentes y la situación

Veamos con un poco de detalle la relación entre nuestra situación, la RME y los Modelos Emergentes.

Como esta actividad se enmarca en un modelo de enseñanza mayor, y en un contexto de educación superior en el que los estudiantes ya han tenido alguna formación en el estudio de funciones y sus gráficas, así como en el manejo de sus parámetros y en nociones estadísticas, es importante hacer algunas precisiones en el modelo teórico.

Veamos primero que hemos escogido una situación realista, en la que los estudiantes se pueden sentir inmersos, y donde los datos se apoyan en la realidad.

A partir de esta situación realista poco a poco se irá construyendo un proceso de matematización, guiado por la perspectiva de los modelos emergentes y el análisis cualitativo de las familias de funciones. Así, en un primer momento, ante la situación planteada se pide a los estudiantes que realicen el análisis del fenómeno, buscando identificar las características de éste y de las funciones que lo pudieran modelizar. Un primer ejercicio en este sentido es hacer un bosquejo de las gráficas de las funciones. Este bosquejo y las características del fenómeno y de las funciones, son un primer modelo en un nivel referencial (MOD REF), que nace de las concepciones que los estudiantes tienen sobre las familias de funciones.

A continuación, volviendo a la situación, se pide a los estudiantes que completen la tabla, y que construyan la gráfica a partir de ella con la ayuda del GG. Estos dos ejercicios son actividades de matematización horizontal de manera que el lenguaje realista de la situación se está trasladando al lenguaje matemático, en este caso, a una tabla de valores y unas gráficas funcionales. Estas dos construcciones constituyen un segundo modelo, en este caso, en un nivel situacional (MOD SITU) del fenómeno.

La existencia de estos dos modelos conlleva su necesaria confrontación en busca de un modelo más refinado a través de un proceso de matematización vertical, en donde se precisan las características.

El uso de los modelos de regresión del GG es otro ejercicio de matematización vertical, buscando, por un lado, nuevas herramientas matemáticas y, por otro, unir los MOD SITU y REF en un nuevo modelo en un nivel más general (MOD GNL). Pero este intento, aunque aporta características más precisas, no brinda modelizaciones adecuadas para las funciones del fenómeno, lo que nos lleva a intentar encontrar el modelo de otra manera.

De nuevo, apoyándonos en los MOD SITUA Y REF, analizamos con cuidado qué sucede en cada nueva iteración en la tabla, hasta llegar a formular las ecuaciones que representen el fenómeno. Esta construcción de las ecuaciones ha sido nuevamente un proceso de matematización vertical.

Las preguntas que hacen las extensiones nos llevan a utilizar el modelo obtenido en nuevas situaciones a través de los deslizadores del GG, en donde estamos variando los parámetros, obteniendo así un MOD GNL, que recoge nuevos fenómenos.

8 Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto una situación paradigmática de modelización desde una perspectiva realista, a través del estudio de las familias de funciones y del análisis cualitativo de los fenómenos y las funciones involucradas. Creemos que este tipo de situaciones podrían favorecer la comprensión por parte de los estudiantes de los procesos de modelización y de los conceptos relacionados con las familias de funciones. Esperamos poder formalizar pronto las conclusiones de esta propuesta ya con los resultados de su pilotaje e implementación.

Referencias

[1] W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, M. Niss. (Eds.). *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*. New York: Springer. (2007).

[2] J. De Lange. *Mathematics, Insight and Meaning: Teaching, Learning and testing of Mathematics for the Life and Social Sciences*. Utrecht: Freudenthal Institute. (1987).

[3] H. Freudenthal. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.(1983).

[4] H. Freudenthal. *Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Mathematics education library*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. (1991).

[5] K. Gravemeijer. *Developing Realistic Mathematics Education: Ontwikkelen Van RealistischReken/Wiskundeonderwijs: Met EenSamenvatting in Het Nederlands*. CD-B Series on research in education. Utrecht. (1994).

[6] K. Gravemeijer. *How emergent models may foster the constitution of formal mathematics*. Mathematical Thinking and Learning. **1**(2), 155-177. (1999).

[7] K. Gravemeijer. *Emergent Modelling as a precursor to Mathematical Modelling*. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn, M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study (pp. 137–144). New York: Springer. (2007).

[8] K. Gravemeijer, J. Terwel. *Hans Freudenthal, a mathematician on didactics and curriculum theory*. Journal of Curriculum Studies, **32**(6), 777–796. (2000).

[9] L. Puig. *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares. (1996).

[10] L. Puig. *Análisis fenomenológico*. En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la enseñanza secundaría (pp. 61–94). Barcelona: Horsori; ICE. (1997).

[11] L. Puig, O. Monzó. *Competencias algebraicas en el proceso de modelización*. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris, (Eds.) El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana (142–158). Castellón: SEMCV. (2008).

[12] L. Puig, O. Monzó. *Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones*. En T. Rojano (Ed.), Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas (pp. 9-35). México: Trillas. (2013).

[13] F. I. Santamaria. *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda (Tesis de Maestría)*. Universidad Nacional del Comahue, Argentina. (2006).

[14] K. Smith, F. Vest, F. Tim. *Tom's Financial Adventure*. Pull-Out, Consortium. Lexington, M.A.: COMAP, Inc. (1991).

[15] A. Treffers. *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction, the Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel. (1987).

[16] M. Van den Heuvel-Panhuizen. *Realistic Mathematics Education in the Netherlands*, en J. Anghileri (Ed.). Principles and Practices in Arithmetic Teaching. Innovative Approaches for the Primary Classroom (pp. 49–63). Buckingham: Open University Press. (2001).

[17] M. Van den Heuvel-Panhuizen. *The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage*. Educational Studies in Mathematics, **54**(1), 9–35. (2003).

[18] M. Van den Heuvel-Panhuizen. *Reform under attack? Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way!* En L. Sparrow, B. Kissane, C. Hurts, (Eds.), Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (2–25). Fremantle: MERGA. (2010).