MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 12 (1), 2019 doi: 10.4995/msel.2019.10938.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Análisis de redes sociales mediante cadenas de Markov
Social network analysis by means of Markov chains

A. Carreño, E. Sanabria-Codesal
Universitat Politècnica de València
amcarsan@iqn.upv.es, esanabria@mat.upv.es.

Abstract

El objetivo de este trabajo es mostrar un modelo matemático sencillo, aplicado al análisis de las redes sociales, que potencie el interés de los alumnos en la asignatura Matemáticas I. El planteamiento y la resolución de este modelo, basado en las cadenas de Markov, nos permiten ilustrar la aplicabilidad los sistemas de ecuaciones discretas y reforzar los conceptos de autovalores, autovectores y diagonalización. Utilizaremos el software de cálculo Mathematica, al que tienen acceso los estudiantes de la asignatura, para resolver el problema, lo que facilitará trabajar con diversos modelos y dimensiones grandes.

The main aim of this paper is shown a mathematical model about the social networks that enhances the interest of the Mathematics' students that are in first course. This model is based on Markov chains. Its approach and resolution permit to illustrate the applicability of the discrete equation systems and to emphasize the concepts studied about eigenvalue problems and diagonalization. Furthermore, all results are computed with the Mathematica software.

Palabras clave: Cadenas de Markov, Análisis redes sociales, Aplicaciones del programa Mathematica, Modelización.
Keywords: Markov Chain, Social Network Analysis, Mathematica Software Applications, Modelling.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

1. Introducción

Una de las competencias que los alumnos del Grado de Ingeniería Electrónica Industrial y Automática, que se imparte en la Universitat Politècnica de València (UPV), deben adquirir es la capacidad para la resolución de problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería, más concretamente, adquirir la aptitud para aplicar los conocimientos de las distintas ramas de las matemáticas, en particular del álgebra lineal.

Con la asignatura de Matemáticas I, que se cursa de forma anual en este grado, cubrimos esta competencia en las áreas de álgebra lineal y cálculo diferencial, dejando para asignaturas de cursos posteriores el resto. Dentro de los objetivos de aprendizaje de álgebra lineal se encuentra el cálculo matricial y, en este contexto, se analizan las cadenas de Markov cuya resolución abordamos usando la diagonalización de matrices. De esta manera, usando modelos sencillos, pero con temáticas actuales y cercanas a los intereses del alumnado, podemos trabajar una aplicación de la diagonalización de matrices y a la vez aumentar su motivación por la asignatura.

Existen infinidad de problemas, que en una versión simplificada, pueden servirnos para mostrar la aplicabilidad de las cadenas de Markov en el aula. Algunas de la más conocidas son la modelización de los juegos de mesa (Bilisoly, 2014, Calabuig et al., 2013), la generación de mapas de videojuegos (Hartley et al., 2004) o el famoso algoritmo PageRank de Google (Barriola, 2014, Gleich, 2015, Langville y Meyer, 2011, Langville y Meyer, 2014, Page et al., 1999). En este artículo, abordaremos un ejemplo relacionado con el creciente interés por las redes sociales y la actual preocupación por tener la mayor repercusión posible en las plataformas digitales de moda. Más concretamente, nos centraremos en analizar cuál es la mejor estrategia a seguir para aumentar el número de seguidores Youtube. Este problema, al igual que los anteriores, posee la ventaja que pueden complicarse y aumentar el tamaño de las matrices, tanto como se desee, por lo que es importante para resolverlo disponer de un software informático avanzado, como por ejemplo el programa Mathematica (Inc., 2018).

El artículo se ha estructurado de la siguiente forma. En la Sección 2 se presentan los conceptos teóricos básicos acerca de las cadenas de Markov para contextualizar el trabajo. Seguidamente, en la Sección 3 se presenta el modelo para estudiar la fidelidad de los seguidores en las redes sociales. En la Sección 4 se muestran las dos metodologías que se proponen para resolver el modelo. Los resultados numéricos se analizan y se discuten en la Sección 5. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las principales conclusiones de este trabajo.

2. Teoría básica

Definición 2.1 *Un proceso o cadena de Markov discreta es una ecuación en diferencias matricial*

$$x_{n+1} = Ax_n, \tag{1}$$

donde $x_n \in \mathbb{R}^p$ *es el vector en el tiempo* $n \in \mathbb{N}$, x_0 *el estado inicial, y* $A \in \mathbb{R}^p$ *la matriz de transición que cumple que*

1. *cada estado* $(n+1)$ *depende exclusivamente del estado anterior* n*, es decir, es una ecuación en diferencias de primer orden,*
2. *la matriz de transición* A *tiene todas sus entradas mayores o iguales que cero,*
3. *la suma elementos de cada columna de la matriz* A *es igual a 1.*

Proposición 2.2 *Dado un sistema discreto de primer orden la solución del sistema viene dada por*

$$x_n = A^n x_0, \tag{2}$$

donde A^n es la potencia n-ésima de la matriz A.

Demostración. La demostración se obtiene aplicando la definición del sistema de forma recurrente

$$x_n = Ax_{n-1} = A^2 x_{n-2} = \cdots = A^n x_0.$$

□

En los sistemas de ecuaciones discretas de primer orden, como por ejemplo en las cadenas de Markov, y usando la proposición anterior, puede calcularse la solución en un estado arbitrario x_n, utilizando la potencia n-ésima de la matriz de transición. Del mismo modo, que el comportamiento a largo plazo, de dicho sistema, haciendo el límite de x_n cuando n tiende a infinito. El valor de equilibro de un sistema se caracteriza por permanecer invariante aunque aumente el valor de n y se denomina estado estacionario del sistema.

Nótese que la potencia n-ésima de la matriz de transición no se calcula realizando un producto de matrices, que no sería eficiente para valores altos de n, sino mediante la diagonalización de A. Sin embargo, debido a las propiedades que tienen las matriz de las cadena de Markov, se pueden obtener directamente el comportamiento estacionario del sistema, sin necesidad de calcular la potencia de A (Meyn y Tweedie, 2012), como se deduce de la siguiente proposición.

Proposición 2.3 *Sea A una matriz de transición de la cadena de Markov $x_n = A^n x_0$, entonces:*

1. *$\lambda = 1$ es un valor propio de A.*
2. *Si $\lambda \neq 1$ es un valor propio de A, entonces $|\lambda| < 1$. Además si x es su vector propio asociado, entonces las componentes de x suman 0.*
3. *Si α es el resultado de la suma de las componentes del estado inicial x_0, el valor estacionario del sistema determinado por (1), es $\alpha\, v$ donde v es el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$.*

De esta última propiedad, se deduce que en una cadena de Markov, el comportamiento a largo plazo y el estado estacionario coinciden.

3. Estrategia propuesta para el número de seguidores en Youtube

En la actualidad, una de las preguntas que más se hacen los jóvenes, que desean convertirse en *influencers* o *youtubers*, o los departamentos de marketing de cualquier empresa que gestione redes sociales, es cómo conseguir más seguidores en menos tiempo en plataformas como Instagram, Youtube o Facebook.

Algunas de las estrategias más conocidas son, comprar seguidores o "likes" cuando se busca un crecimiento rápido, incluir hashtags tipo #followme or #followforfollow, realizar sorteos o simplemente buscar al público objetivo con hashtags o con tendencias del sector. Esta última estrategia conocida como "Social Engagement" será en la que nos basaremos para crear el modelo del artículo.

Nuestro objetivo principal es intentar aumentar el número de seguidores en nuestros canal de Youtube, lo que nos llevará a tener una mayor influencia en el público y un mayor número de ingresos publicitarios por nuestros vídeos. Para ello nos apoyamos en la premisa de que

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

orientar nuestros contenidos a temas con más seguidores, o donde estos son más fieles, es decir, mantienen su subcripción durante más tiempo, nos llevará a conseguir un aumento de seguidores en nuestro canal. Por tanto, el modelo que planteamos se basa principalmente en que la cantidad y fidelidad de los seguidores en los temas donde publicamos contenidos será la clave para aumentar nuestro número de seguidores, ya que damos por hecho que la calidad de nuestro trabajo es adecuada y suficientemente atractiva.

El análisis de este modelo nos dará la mejor estrategia seguir, según nuestra premisa, indicándonos los temas donde debemos crear contenidos para obtener un mayor número potencial de seguidores en la red social que queramos posicionarnos, en nuestro caso Youtube. Planteamos así modelos con las categorías y parámetros, adecuados a cada caso, de manera que variando el valor de éstos podemos analizar las distintas predicciones en la proporción de seguidores de nuestro canal. Como cada tema tiene un número de seguidores distintos, así como distinta fidelidad en sus subscriptores, podemos experimentar con varios tipos de estrategias hasta llegar a la que nos hará alcanzar un mayor incremento en el número de seguidores.

Supongamos, simplificando el problema, que podemos dividir todos los intereses de los subscriptores de una red social en n categorías disjuntas entre sí, de forma que consideramos categorías más directamente relacionadas que otras, obteniendo de estas relaciones la matriz de transición del modelo. Para establecer estas afinidades consideramos el porcentaje de usuarios que siguen los contenidos de ambas categorías a la vez. Una forma de obtener los datos de afinidad entre categorías sería utilizar sondeos entre los usuarios de cada red social y observar la fluctuación y distribución, entre el número de seguidores de las distintas categorías, a lo largo el tiempo. De esta manera podremos establecer algún tipo de correlación en las variaciones observadas utilizando los datos de nuestro sondeo. Otra opción es buscar en Socialblade (`https://socialblade.com`) datos de las distintas redes, ya que esta web nos ofrece gran cantidad de información que podemos filtrar por categorías (como proponemos en este caso), países, canales, además de ordenar los datos por número de seguidores, número de visualizaciones o utilizando la métrica propia de la red social. Para crear el modelo de la cadena de Markov, definimos la variable x_n como el número de seguidores que tenemos de la categoría x en el tiempo $t = t_n$ y basamos la matriz de transición en la fidelidad o "engagement" que tienen los seguidores por un cierto tema y en la afinidad entre las distintas categorías.

Para crear nuestro modelo-ejemplo, que se muestra a continuación, nos basamos en la red YouTube, hacemos la división en las categorías principales que nos ofrece la plataforma (que corresponden a las que más subscriptores tienen) y utilizamos datos orientativos, no reales.

Para el caso de YouTube, los datos en que nos basamos se pueden obtener, por ejemplo, entrando en su página principal. Si pulsamos el icono con tres barras horizontales ($\equiv$), aparece una ventana como la de la Figura 1, donde se muestran los principales temas de la página. Marcando la pestaña de 'Explorar Canales' encontramos los principales temas y el número de subscriptores que tiene cada uno de ellos. Una visión de esta última pantalla se muestra en la Figura 2. Estas categorías son las siguientes: música, deportes, noticias, juegos, películas y humor que denotaremos como M, D, N, J, P y H, respectivamente.

En la Figura 3 está representado el grafo de fidelidad en cada uno de los temas, así como las afinidades consideradas entre ellos para el ejemplo. En la figura podemos observar como existen categorías con cuyos seguidores son más fieles y otras que no 'enganchan' tanto y por consiguiente, sus seguidores visualizan vídeos de otras temáticas relacionadas de forma habitual.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

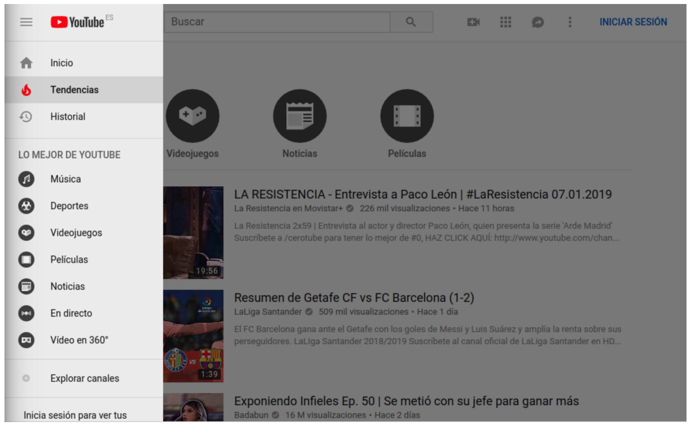

Figura 1: Captura de la página web Youtube donde se muestran las principales categorías.

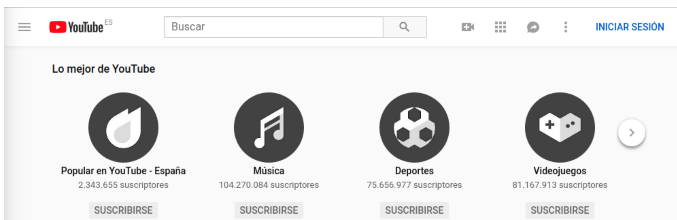

Figura 2: Captura de la página web Youtube donde se muestran algunos de las principales categorías y el número de seguidores de estas.

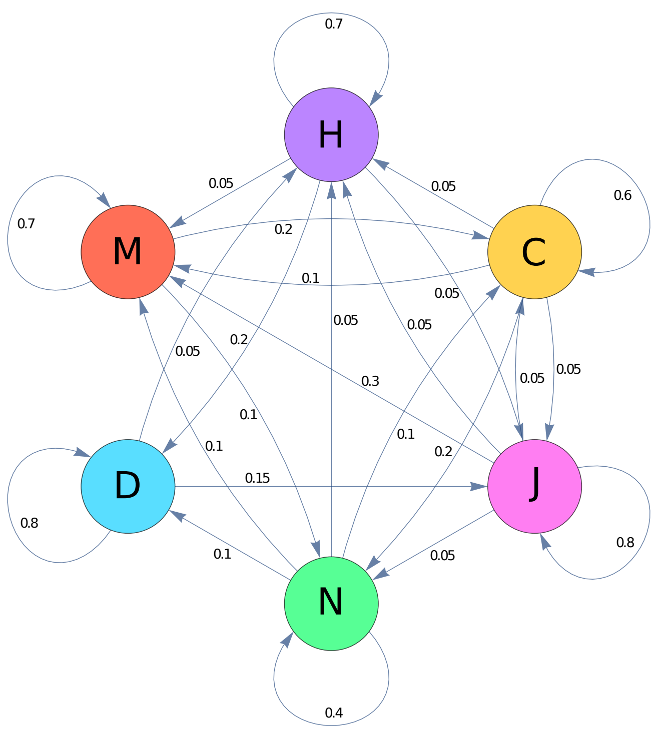

Figura 3: Grafo para el modelo de fidelidad entre 6 categorías.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

En forma matricial se expresaría como

$$\begin{pmatrix} M_{n+1} \\ D_{n+1} \\ N_{n+1} \\ J_{n+1} \\ P_{n+1} \\ H_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.1 & 0.05 & 0.1 & 0.05 \\ 0 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.4 & 0.05 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0.8 & 0.05 & 0.05 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.05 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.3 & 0.05 & 0.05 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_n \\ D_n \\ N_n \\ J_n \\ P_n \\ H_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Este modelo tan simple, se puede extender tanto como se desee o incluso se puede orientar a varios grupos relacionados con una sola temática. Por ejemplo, nos podríamos centrar en la música y se podría estudiar la fidelidad de los seguidores en los distintos tipos de música.

En la Figura 4 aparece representado un modelo más próximo a la realidad con 11 categorías: Viajes (Via), Deportes (De), Animales (An), Religión (Re), Actualidad (Ac), Música (Mu), Videojuegos (Vid), Ciencia (Ci), Ocio (Oc), Estilo (Es), Cocina (Co). De manera análoga, que considerando 6 categorías, se construiría la matriz de paso, cuyos datos no incluimos por simplificar el artículo.

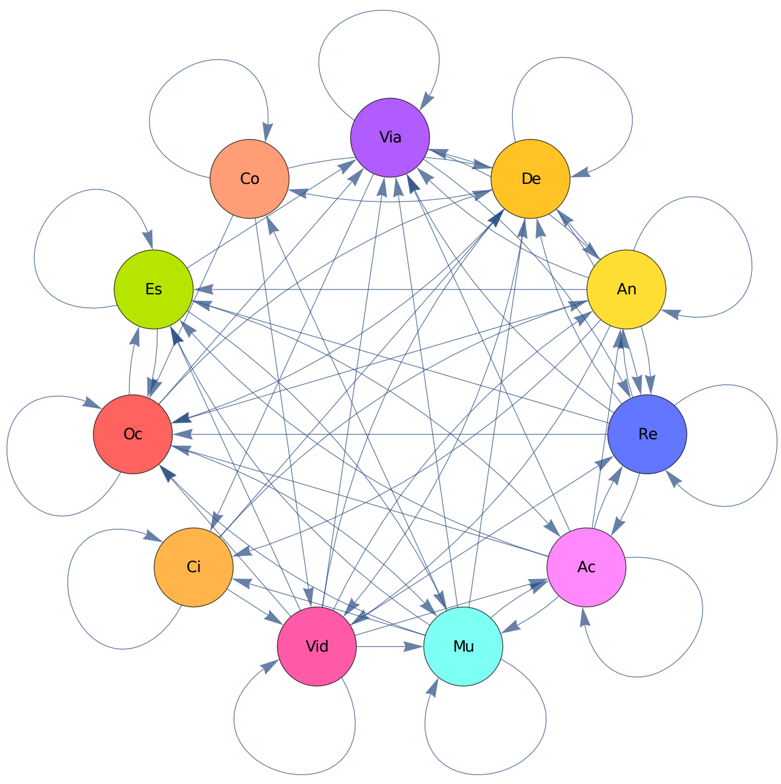

Figura 4: Grafo para el modelo de fidelidad entre 11 categorías.

Obviamente, cuanto más variables añadamos al modelo, más nos acercaríamos a la realidad y más se complicaría el problema. Mientras que el modelo con 6 categorías lo podríamos resolver realizando los cálculos a mano, este modelo con 11 requiere herramientas informáticas para su rápida resolución. Este hecho, es interesante para incentivar que los alumnos se impliquen activamente presentando sus propios modelos, de manera individual o en grupo, con temas de su interés y construyan de forma orientativa la matriz de paso. De esta forma, se familiarizan en la construcción de sistemas discretos y observan la importancia de una buena modelización.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Otra manera de añadir realismo a estos modelos, sería incluir en la matriz de transición un cierto grado de aleatoriedad en la relación entre los canales, como hace el PageRank. Esto correspondería a la realidad de entrar en canales que, aunque a priori no están relacionados directamente con nuestros intereses, puedan interesarnos puntualmente, o acabemos entrando por las recomendaciones personalizadas que nos hace la red social o por la influencia de la publicidad, entre otros motivos.

En este caso, si consideramos n categorías, la nueva matriz de transición sería de la forma $A' = \alpha A + (1-\alpha)E$, donde $\alpha \in [0,1]$ y $E = (1/n)Id$ es una matriz que nos indica, con un factor de aleatoriedad α, que partiendo de un tema podemos llegar a n cualquier otro, independientemente de la relación existente entre ambos. En el caso que $\alpha = 1$ volvemos al modelo anterior.

4. Solución del problema

Para resolver el problema enseñamos al alumnos dos vías posibles. La primera se basa en los resultados teóricos presentados en la Sección 2 en los que se realiza la diagonalización de la matriz de transición. La segunda posibilidad es usar directamente los comandos de Mathematica diseñados para trabajar con los procesos discretos de Markov. Aunque esta última sea más sencilla de ejecutar, es interesante que los alumnos también sepan poner en práctica los resultados teóricos. El objetivo es que conozcan ambas posibilidades de resolución y realicen una comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos.

4.1. Usando las propiedades de las cadenas de Markov

Como veíamos en la teoría de las cadenas de Markov, el comportamiento a largo plazo y el estado estacionario son siempre iguales. Por tanto, basándonos en la Proposición 2.3, veremos a continuación, los pasos que tenemos que realizar para calcular dicho estado.

1. Sabemos que el estado estacionario es un vector propio, asociado al valor propio 1, de la matriz de transición A. Calculamos los autovectores de A usando el comando `Eigenvectors[A]`. Indicamos a los alumnos que calculen, también, los valores propios de la matriz A con el comando `Eigenvalues[A]`, para asegurarse de que efectivamente el valor propio $\lambda = 1$ aparece entre ellos y que el resto de valores propios en módulo son menor estrictamente que 1. Otra alternativa es usar `Eigensystem[A]`, que permite calcular los autovalores y autovectores a la vez.

2. Tras obtener el vector propio asociado a 1, cualquier otro vectores múltiplo de esta también será un vectores propios asociado. Por tanto, el siguiente paso consiste en es saber cual de todos estos vectores es el estado estacionario. Para ello usamos la deducción de que los elementos que intervienen en el estado inicial debe ser iguales a los del estado final, lo que nos indica que la suma de las componentes del estado inicial ha de ser la misma que la suma de las componentes del estado estacionario. Para hacer esto realizamos la siguientes declaraciones en Mathematica

```
suma_inicial=Sum[x0[[i]], {i, 1, Length[x0]}];
suma_final=Sum[v[[i]], {i, 1, Length[v]}];
v = v*suma_inicial/suma_final;
```

siendo $x0$ el vector con el estado inicial y v el vector propio asociado al valor propio 1.

4.2. Usando directamente el comando de Mathematica

Por otro lado, el programa Mathematica ofrece un comando para trabajar directamente con cadenas de Markov,

```
proceso=DiscreteMarkovProcess[x0,A],
```

al que es necesario introducir la condición inicial $x0$ y la matriz de transición A. Una vez que está definido, podemos dibujar el grafo asociado usando el comando

```
Graph[proceso]
```

y obtener múltiples propiedades usando el comando

```
MarkovProcessProperties[proceso,"propiedad"]
```

En nuestro caso estaremos interesados en obtener la "LimitTransitionMatrix", que dará directamente el valor el estado estacionario.

5. Resultados numéricos

En esta sección analizaremos y compararemos los resultados numéricos obtenidos para dos modelos de fidelidad: el modelo con 6 categorías y el modelo con 11 categorías. En ambos casos partimos de una condición inicial, X^0, que representa de forma vectorial el contenido que subimos inicialmente en la red social, asumiendo que el porcentaje de videos que subamos en cada tema, implicará tener inicialmente ese porcentaje de seguidores en las diferentes categorías.

Empezamos analizando el modelo de 6 categorías propuesto. Para ello, utilizamos la condición inicial

$$X^0 = (0, 0.5, 0, 0.3, 0, 0.2),$$

que representa, de forma vectorial, que inicialmente subimos a nuestro canal un 50 % de contenido de Deportes, un 30 % en Juegos y un 20 % en Videos de humor.

Como cada categoría tiene un número de seguidores diferente que podemos consultar, al ser esta una información pública, analizando estos datos a lo largo de un determinado período, obtenemos una predicción del número de seguidores que se mantienen en cada categoría, así como una estimación de las migraciones de los subscriptores que se producen entre ellas. Con esta información construimos la correspondiente matriz de transición.

Usando cualquiera de los dos métodos de resolución obtenemos que, a largo plazo, el porcentaje de seguidores que tendremos en cada categoría será aproximadamente de 14 % en Música, 22 % en Deportes, 8 % en Noticias, 24 % en Juegos, 12 % en Cine y 18 % en Humor, de manera que, según este modelo, nos interesará reorientar nuestros contenidos a estos porcentajes, para conseguir un mayor impacto entre los usuarios.

Como en una cadena de Markov, el resultado a largo plazo depende del vector propio de la matriz de transición, se puede comprobar, fácilmente, que cambiar la condición inicial no varía el resultado final. Por lo tanto, para variar el número de seguidores en cada categoría es necesario estudiar el modelos que hemos planteado, no cambiar la condición inicial del sistema.

Para observar las diferencias entre distintos tipos de modelos, ahora observamos el comportamiento a largo plazo considerando el modelo con 11 categorías. Utilizamos el grafo que muestra la Figura 4. Introducimos como condición inicial un 100 % de contenido en la categoría

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Estilo. Tras realizar los pasos necesarios para la resolución, obtenemos que para este modelo las categorías que más seguidores tendrían son, por orden descendente: Cine, Videojuegos, Estilo y Viajes. Vemos, por tanto, que si consideramos más categorías, cambian las preferencias, así como la fidelidad de los seguidores en cada categoría, y por consiguiente, los resultados obtenidos. Vemos así, que para describir la realidad, es fundamental estudiar de la forma más realista posible, tanto las categorías existentes, como los parámetros de fidelidad de sus seguidores.

Como ejercicio en clase, cada alumno o grupo, podría exponer su modelo, explicando en que se ha basado para obtener la matriz de transición propuesta y comparar las diferentes soluciones que obtiene cada uno. Por otro lado, se les puede proponer que analicen si los resultados obtenidos son realistas llevándolos a la práctica. Si no lo son, es interesante analizar que cambios podrían realizar en la matriz inicial que han propuesto, para ajustar su modelo a la evolución observada en la realidad.

6. Conclusiones

En este trabajo se propone, mediante el planteamiento de un sistema lineal de ecuaciones de primer orden discreto, un modelo sencillo para analizar el comportamiento de los seguidores en las redes sociales, con el objetivo de potenciar el interés de los alumnos por la asignatura Matemáticas I en los grados de ingenieríaa. El modelo planteado se basa en las cadenas de Markov y su resolución permiten ilustrar la aplicabilidad de los sistemas de ecuaciones discretas, así como reforzar los conceptos de autovalores y diagonalización, estudiados en álgebra. Además, este problema tiene la ventaja de tratar un tema de actualidad que interesa a los alumnos, y contribuye positivamente en su motivación hacia las matemáticas, ya que pueden plantear, sin mucha dificultad, distintos modelos de acuerdo a sus intereses y necesidades. La posterior puesta en común de las diferentes ideas y planteamientos obtenidos, con el objetivo de observar como con diferentes modelos y asignación de parámetros influye en el resultado final, es un aspecto clave que consideramos muy interesante para su formación en la competencia de análisis y resolución de problemas de la vida real.

Como ejemplo se han propuesto dos modelos, el primero con 6 categorías para ilustrar el procedimiento y la elección de parámetros (fiabilidad), y otro más complejo y realista con 11 categorías. Para la resolución se han propuesto dos vías: una teórica aplicando directamente las propiedades de las cadenas de Markov y otra más directa usando el programa Mathematica. El uso de este software nos permite extender o complicar el problema todo lo que se desee. Por último, como posible extensión a este trabajo, se puede realizar el tratamiento posterior del modelo, considerando, en este caso, las distintas categorías como conjuntos no disjuntos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad bajo los proyectos BES-2015-072901 y MTM2015-64013-P.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Referencias

Barriola, J. M. (2014).
¿Cómo funciona Google?
El algoritmo pagerank, diagramas de grafos y cadenas de Markov.
PhD thesis, Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Buenos Aires.
http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/?a=d&c=rimmage&d=rimmage_v3_n1_01

Bilisoly, R. (2014).
Using board games and mathematica to teach the fundamentals of finite stationary markov chains.
Section on Statistical Education.
https://arxiv.org/abs/1410.1107

Calabuig, J. M., García-Raffi, L. M., Sánchez Pérez, E. A. (2013).
Álgebra lineal y juegos de mesa.
Modelling in Science Education and Learning 6(2), No 15.

Gleich, D. F.(2015).
Page Rank beyond the Web.
SIAMReview,57(3):321–363.
https://epubs.siam.org/doi/10.1137/140976649.

Hartley T., Mehdi Q., Gough N. (2004).
Applying markov decision processes to 2d real time games.
https://wlv.openrepository.com/handle/2436/31518

Inc., W. R. (2018).
Mathematica,Version 11.3.Champaign, IL.
http://www.wolfram.com/mathematica/

Langville, A. N., Meyer, C. D. (2004).
Deeper inside pagerank.
Internet Mathematics 1(3):335–380.
https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15427951.2004.10129091

Langville, A. N., Meyer, C. (2011).
Google's Page Rank and beyond: The science of search engine rankings.
Princeton University Press.
https://wlv.openrepository.com/handle/2436/31518

Meyn S. P., Tweedie R. L. (2012).
Markov chains and stochastic stability.
Springer Science & Business Media.
http://probability.ca/MT/BOOK.pdf

Page, L., Brin, S., Motwani, R., Winograd, T. (1999).
The Page Rank citation ranking: Bringing order to the web.
Technical report, Stanford InfoLab.