

*Modelización matemática en la educación
secundaria: manual de uso*
*Mathematical Modeling in Secondary
Education: A User's Manual*

C. Gallart

UNIVERSITAT CEU CARDENAL HERRERA
gallartcesar@uchceu.es.

L. M. García-Raffi

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
lmgarcia@mat.upv.es.

I. Ferrando

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Irene.Ferrando@uv.es.

Abstract

Uno de los principales problemas que surgen al trasladar una tarea de modelización matemática al aula de secundaria es la falta de una descripción detallada, desde la perspectiva de la didáctica, que ayude y oriente al profesor en servicio en la implementación de este tipo de actividad y que le permita identificar cuáles son los objetivos de aprendizaje que se persiguen; su encaje dentro del currículo oficial; el tipo de tareas que permiten alcanzar estos objetivos; cómo realizar su evaluación o qué metodología utilizar. En este artículo abordaremos todos estos aspectos a partir de una experiencia de aula, detallando cada una de las fases implicadas en la implementación de una actividad de modelización.

One of the main problems that arise when implementing a mathematical modeling task to the secondary classroom is the lack of a detailed description, from the didactic perspective, that helps and guides the in-service teachers in the implementation of this type of activity and that allows them to identify which are the learning objectives being pursued; if this kind of activities fit within the official curriculum; the type of tasks that allow these objectives to be achieved; how to carry out their evaluation or what methodology to use. In this article we will address all these aspects from the perspective of a classroom experience, detailing each of the phases involved in the implementation of a modeling activity.

Palabras clave: Tarea de modelización, Educación secundaria, Profesores en activo, experiencia de aula.
Keywords: [Modeling task](#), [secondary level classroom](#), [in-service teachers](#), [classroom experience](#).

1. Problemática

La demanda de actividades que potencien el desarrollo de competencias es cada vez mayor en las aulas de secundaria. Se trata de buscar tareas que potencien el papel del alumno en la construcción del conocimiento, el aprendizaje significativo conectado a la realidad, al tiempo que muestren la aplicabilidad y funcionabilidad de las matemáticas. Es en este sentido donde la modelización matemática puede jugar un papel importante.

Las ventajas de introducir la modelización en las aulas, junto a la aplicación de las matemáticas y la resolución de problemas, han sido ya reflejadas en diversos artículos (Blum y Niss, 1991, Burkhardt, 2006), proporcionándose numerosos argumentos en su favor: pragmáticos, la enseñanza de las matemáticas debe servir para ayudar a los alumnos a entender, analizar, evaluar y juzgar situaciones y problemas del mundo real, para los que la modelización es indispensable; formativos, la modelización, la aplicación de las matemáticas y la resolución de problemas son los medios adecuados para desarrollar competencias en los alumnos; culturales, la modelización, las aplicaciones y la resolución de problemas constituyen una categoría fundamental en todos los procesos creativos matemáticos; y psicológicos, la incorporación de la modelización puede ayudar a tener una comprensión más profunda y facilitar la retención de los conceptos, nociones, métodos y resultados matemáticos.

Pese a estas ventajas, también encontramos en la literatura una serie de dificultades asociadas a la modelización (Blum y Niss, 1991, Burkhardt, 2006, Cabassut y Ferrando, 2016): desde el punto de vista de la enseñanza, falta de tiempo para tratar la resolución de problemas, las aplicaciones y la modelización, además de la gran cantidad de contenidos obligatorios incluidos en los programas oficiales; desde el punto de vista del alumno, la resolución de problemas, la modelización y las aplicaciones a otras disciplinas hacen que las clases sean más exigentes y menos predecibles que las clases tradicionales; y desde el punto de vista del profesor, la resolución de problemas y las referencias al mundo real que implica la modelización hacen que las clases sean más abiertas y por tanto, más difíciles de preparar, dirigir y finalmente, evaluar.

A todas estas dificultades podríamos añadirles otras, como la falta de una formación continua y de un material concreto para el profesorado en servicio en este campo (una tendencia que parece ir cambiando, gracias, entre otras, a las Jornadas de Modelización y a los Congresos CTEM), las inercias que imponen estilos tradicionales de enseñanza (Burkhardt, 2006), o que el conocimiento de la teoría matemática no garantiza que se transfiera a la capacidad de resolver problemas de la vida real (Niss, 1999). Con todo esto, en base a la experiencia realizada durante los últimos seis años en un centro de la Comunitat Valenciana, nos proponemos hacer en este artículo un breve repaso por todos aquellos aspectos relevantes que debemos tener presentes a la hora de introducir la modelización en nuestras aulas.

2. Objetivos

Es posible que al profesor en servicio le asalten numerosas dudas cuando se decida a implementar por primera vez una actividad basada en la modelización. Estas dudas, directamente relacionadas con las dificultades identificadas en los estudios previamente citados, se pueden reformular en preguntas que los profesores a menudo se plantean con respecto a la modelización:

- ¿Encaja la modelización en el diseño curricular de nuestra materia?
- ¿Qué objetivos persigue la introducción de la modelización en el aula de secundaria?
- ¿Qué tipo de tareas puedo utilizar? ¿Qué características deben cumplir?

- ¿Qué metodología debo utilizar para dirigir una actividad basada en la modelización?
¿Cómo secuenciar y estructurar esta actividad?
- ¿Cómo debo evaluarla? ¿Qué herramientas pueden ayudarme en esta evaluación?

No es nuestra intención dar una respuesta detallada a todas estas cuestiones, ni elaborar una guía completa y exhaustiva sobre como introducir la modelización en nuestras clases de secundaria, pero sí pretendemos, desde nuestra experiencia (descrita en Gallart, 2016), responder a estas cuestiones para intentar ayudar y orientar al profesor novel a dar sus primeros pasos en la modelización.

3. ¿Encaja la modelización en el diseño curricular de nuestra materia?

Ciertamente, esta puede ser una pregunta principal, especialmente cuando el cumplimiento de los programas oficiales, ya sea debido a la presión de los órganos de dirección de los centros, ya sea impuesto por el propio profesor (recordemos la figura del profesor “prisionero”, citado por Claudi Alsina y Carme Burgués en su conferencia “Buenos, mejorables e incorregibles”, en las JAEM de 2017), se convierte en uno de los objetivos principales de la enseñanza. Sin embargo, podemos encontrar referencias a la modelización matemática en el currículo de nuestra materia, junto a referencias sobre la importancia del enfoque competencial o el uso de ejemplos basados en el mundo real y las aplicaciones matemáticas, que dan respuesta a esta pregunta y respaldan las propuestas de modelización en el aula. Así, extraemos, a modo de ejemplo, la siguiente referencia a la modelización en nuestra legislación:

El Bloque 1, “*Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, es el eje vertebrador del resto de bloques [...]*”. Se presentan en este bloque los contenidos relacionados con la resolución de problemas, la realización de proyectos de investigación matemática, la modelización, las actitudes hacia las matemáticas?” (Decreto 87/2015).

La modelización queda pues enmarcada dentro de ese bloque denominado “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, no como una unidad con entidad propia dentro de los bloques temáticos tradicionales (Números, álgebra, Funciones y Gráficas, Geometría, Estadística y Probabilidad), sino como un contenido a tratar dentro de todos y cada uno de estos bloques, un contenido vertebrador y transversal a todos ellos y a lo largo de todos los cursos de la educación secundaria obligatoria.

Pero también encontramos referencias a la modelización si examinamos el marco teórico del programa de evaluación de la calidad educativa PISA de la OCDE (OCDE, 2017), con gran repercusión e influencia a nivel educativo y político. El informe PISA centra su dominio de estudio en lo que denomina “alfabetización matemática” (*mathematical literacy*, término traducido en nuestro país como competencia matemática): “Este dominio se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas matemáticos en una variedad de situaciones y dominios” (Rico, 2006, p. 49), relacionado pues con la evaluación de las competencias necesarias para resolver problemas reales (de las que hablaremos en el apartado siguiente).

Por todo ello, la modelización puede estar presente en nuestra práctica docente, avalada, no solo por las ventajas señaladas en la literatura y que hemos apuntado en la introducción, sino también por los propios programas oficiales, con objetivos y perspectivas distintas según nuestros propios intereses educativos, tal y como vamos a detallar a continuación.

4. ¿Qué objetivos de aprendizaje se persiguen con la modelización?

Como hemos comentado, la modelización matemática está relacionada con la resolución de problemas en contextos reales. Así, la modelización puede ayudar a desarrollar competencias, fomentando las capacidades de exploración, creación y resolución de problemas en nuestros alumnos. Por otro lado, los contenidos matemáticos se pueden motivar o consolidar por medio de adecuados ejemplos de modelización (Blum y Niss, 1991, Blum, 1993). De este modo, podemos encontrar dos perspectivas distintas, no excluyentes y complementarias, sobre el uso y los objetivos que la modelización matemática persigue (ver Julie y Mundalay, 2007, Calabuig et al., 2015):

- Como vehículo para introducir un conocimiento matemático concreto.
- Como vía para desarrollar la competencia en resolución de problemas reales.

Desde la primera perspectiva, se buscan actividades contextualizadas que ayuden a introducir los diferentes contenidos matemáticos que aparecen detallados en los programas oficiales, o que amplíen y conecten la realidad con estos contenidos, dotándoles así de sentido y significatividad (y dando de paso respuesta a aquella pregunta tan recurrente de los alumnos de, ¿y esto para qué sirve?). Este contenido será pues utilizado en los procesos matemáticos involucrados en la resolución de la tarea propuesta (ver un ejemplo en la Figura 1), dando la oportunidad a nuestros alumnos de desarrollar una comprensión más profunda, además de poder generar un mayor nivel de implicación y participación (Maaß, 2006 y 2010, Zbiek y Conner, 2006).

Al finalizar el verano puedes ver en algunos campos enormes cilindros de paja que producen las cosechadoras. Los cilindros de la imagen están apilados de manera que en la línea inferior hay cinco, en la siguiente cuatro, luego tres, dos y uno en la parte superior. ¿Cuál es la altura de esta montaña de cilindros de paja?



Figura 1: “Al finalizar el verano puedes ver en algunos campos enormes cilindros de paja que producen las cosechadoras. Los cilindros de la imagen están apilados de manera que en la línea inferior hay cinco, en la siguiente cuatro, luego tres, dos y uno en la parte superior. ¿Cuál es la altura de esta montaña de cilindros de paja?”. Esta tarea, tomada de Borromeo-Ferri (2007, p. 2084), puede utilizarse para introducir la medida, la estimación y el teorema de Pitágoras.

Para hablar de la segunda perspectiva será necesario volver a revisar el propio proceso de modelización. La modelización implica un doble proceso de matematización, vertical y horizontal, entre la realidad y las matemáticas (Treffers, 1987). Este proceso de matematización se describe en la literatura mediante fases, que pueden variar según autores o intereses (ver Borromeo-Ferri, 2006), y que constituyen, desde un punto de vista teórico e idealizado, el denominado ciclo de modelización (ver Figura 2). Para transitar por este ciclo los alumnos ponen en marcha una serie de competencias, englobadas en la llamada competencia en modelización (ver Maaß, 2006). Son estas competencias, necesarias para resolver con éxito un problema real, y que están relacionadas a su vez con las restantes competencias matemáticas del proyecto danés KOM (como puede verse en Gallart, 2016), las que la modelización puede ayudar a trabajar. Por tanto, y desde esta segunda perspectiva, el objetivo sería desarrollar en nuestros alumnos, dentro de una unidad didáctica propia, las competencias necesarias para enfrentarse a la resolución de problemas reales en los que las matemáticas pueden jugar un papel importante. Se trataría de una unidad en la que se trabajarían competencias, y no contenidos concretos, pero también actitudes y creencias hacia las matemáticas a través de las tareas propuestas.

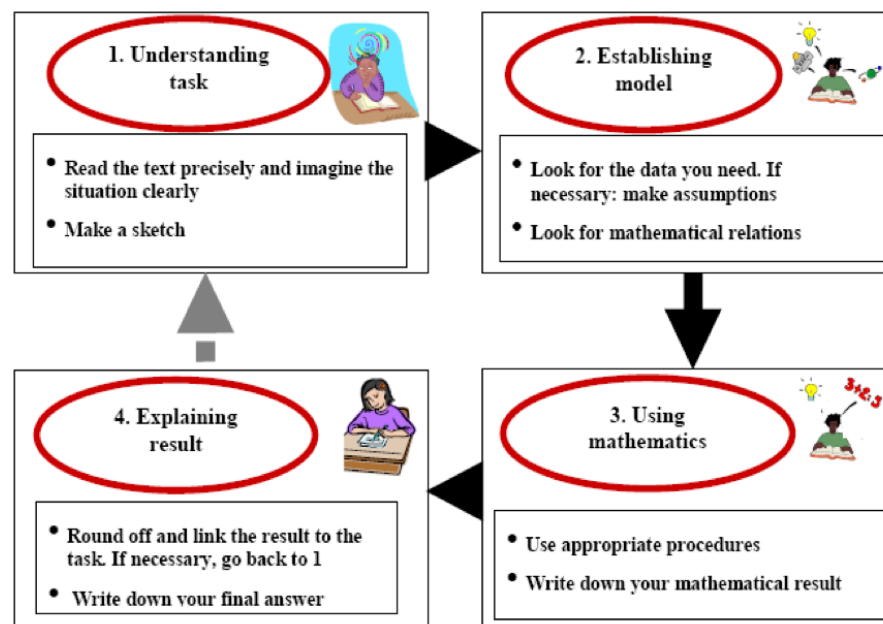


Figura 2: Ciclo de modelización propuesto como “guía” para los alumnos, en Blum y Borromeo-Ferri (2009, p. 54).

Es en esta última perspectiva en la que hemos centrado nuestra propia investigación y experiencia, y será por tanto de la que hablaremos en los próximos apartados.

5. ¿Qué tareas usar?

La modelización matemática, como hemos indicado anteriormente, engloba el proceso completo de resolución de un problema real, donde la construcción de un modelo a partir de una situación o contexto determinado se convierte en una parte fundamental (Gravemeijer, 2007). Las tareas de modelización deben promover todas las fases del denominado ciclo de modelización, aunque, y según los objetivos educativos, pueden centrarse también en algunas fases concretas de este ciclo. Blomhøj y Kjeldsen (2006) y Maaß (2006) caracterizan este tipo de tareas:

- (a) Que ofrezcan un reto adecuado para los alumnos, independientemente del apoyo de su profesor.
- (b) Que sean auténticas o que incluyan datos auténticos, es decir, que sean relevantes en alguna situación real y puedan propiciar el uso de conocimiento tanto matemático como extra-matemático.
- (c) Que sean abiertas, en el sentido de que pueda haber más de una vía de resolución o solución posible.
- (d) Que sean complejas, en el sentido de que el proceso de resolución no sea conocido de antemano, sino que requiera de un proceso previo de reflexión.
- (e) Que se abran a la crítica del modelo y de los resultados.
- (f) Que desafíen a los alumnos a trabajar apropiadamente con los conceptos y métodos que son relevantes para su aprendizaje de las matemáticas. Pueden encontrarse en la literatura diferentes ejemplos de tareas basadas en la modelización matemática, que siguen los criterios anteriores, pero desde perspectivas un tanto distintas, como veremos a continuación.

5.1. Problemas de estimación de grandes cantidades (Fermi)

Englobados en los llamados problemas de Fermi, en este tipo de tareas se pide al alumno que estime una determinada cantidad a partir de pocos o ningún dato inicial (ver algunos ejemplos en la Figura 3). La simplificación de la situación real de partida, que permitirá la selección de las variables relevantes que darán respuesta al problema, así como la adecuada estimación de estas variables, se convierte en parte principal de su proceso de resolución, cuya solución podrá ser un único número o un intervalo numérico.

¿Cuánta gente cabe en el patio del instituto?

¿Cuántos árboles hay en Central Park?

Figura 3: Ejemplos de problemas de estimación de grandes cantidades, tomados de Ferrando et al. (2017).

Estas tareas pueden resolverse de forma individual o en pequeño grupo de trabajo (dos o tres miembros) y son de corta duración (pueden resolverse en una única sesión de trabajo).

5.2. Modelling Eliciting Activities (MEAs)

En este tipo de tareas se presenta una situación en la que un “cliente” demanda a los alumnos un “producto”. Este producto es en realidad el propio modelo, que debe ser además generalizable y aplicable a otras situaciones similares (Lesh y Doerr, 2003). Dentro de este tipo de tareas podemos encontrar los llamados “problemas de obtención de estructuras” (Lesh, 1997), donde se debe cuantificar cierta información (cualitativa y cuantitativa) para tomar una decisión razonada que dé respuesta a la demanda del cliente (ver Figura 4).

Atendiendo a estos datos (o cualquier otro que te parezca relevante) debéis elaborar un procedimiento para establecer la clasificación de estos Colegios (desde el mejor Colegio para estudiar hasta el peor).

	Nº de aulas de desdoble	Ordenadores por alumno	Nº de alumnos por aula	Superficie en metros cuadrados	Nota media del expediente	Nota media en las PAU	Porcentaje de repetidores (por curso)	Presupuesto para el próximo curso
Colegio Chuli	7	0.6	24	13.200	7.7	6.7	5.4%	Menos
Colegio Guay	9	0.4	25	12.600	7.3	7.0	6.1%	Menos
Colegio Mola	11	0.2	20	10.500	7.5	7.1	4.7%	Menos
Colegio Tope	12	0.3	28	9800	7.0	6.5	5.2%	Mismo
Colegio Diver	13	0.2	22	18.100	7.2	6.4	5.3%	Mismo
Colegio Super	14	0.3	29	10700	7.1	6.6	6.9%	Más

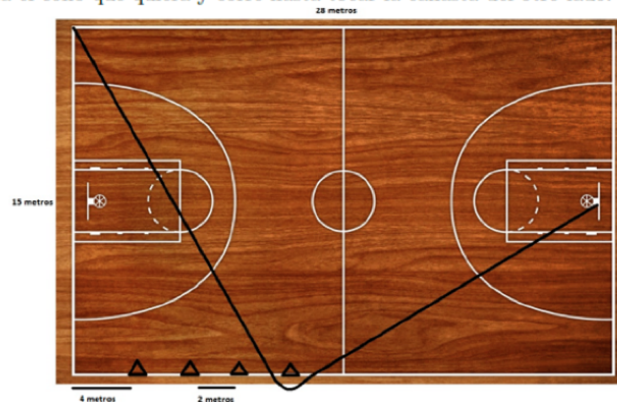
Figura 4: Tarea basada en las MEAs, tomada de Gallart, Ferrando y García-Raffi (2017).

Estas tareas pueden platearse para ser resueltas en pequeño grupo, durante una o dos sesiones de trabajo en el aula.

5.3. Problemas basados en situaciones (LEMA)

LEMA¹ es un proyecto financiado por la Unión Europea, desarrollado entre el año 2006 y 2009, cuyo objetivo es incluir las actividades de modelización en la enseñanza de las matemáticas (Maaß y Gurlitt, 2011). A partir de un determinado contexto, lo que denominan “la situación”, se proponen varias preguntas relacionadas, que deben ser resueltas en pequeños grupos de trabajo, durante una o dos sesiones de trabajo (ver Figura 5).

La profesora de Educación Física ha preparado una nueva prueba de velocidad que consiste en lo siguiente: coloca 10 conos a lo largo de la línea lateral de la cancha de baloncesto, empezando a 4 metros de la línea de fondo y separados entre sí 2 metros. Cada corredor sale desde la esquina opuesta, rodea el cono que quiera y corre hasta tocar la canasta del otro lado.



¿Tiene alguna importancia el cono que decidamos rodear en la carrera? ¿Qué haríais vosotros para intentar ganarla? Si pudierais añadir un nuevo cono, ¿dónde lo pondríais?

Figura 5: Tarea basada en el proyecto LEMA, tomada de Gallart, Ferrando y García-Raffi (2017).

¹<http://www.lemma-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php>

5.4. Proyectos matemáticos realistas (PMR)

En este tipo de tareas se propone un determinado contexto, y son los propios alumnos, trabajando en pequeño grupo, los que (y a diferencia de los problemas anteriores), deben concretar un problema y plantear sus propias preguntas de investigación. Se trata de tareas pensadas como proyectos de investigación de larga duración (pueden realizarse durante toda una evaluación o incluso un curso completo), en las que el alumno toma un especial protagonismo en su formulación (Sol, 2008). En la Figura 6 podemos ver un ejemplo?

Deporte: *¿Sabes cuánto terreno tiene para moverse un futbolista? ¿Y un jugador de baloncesto? ¿Y uno de balonmano? Te proponemos que midas el área de los campos de diferentes deportes y calcules que área de terreno debe controlar cada jugador en cada caso. Compara los resultados obtenidos y tendrás características que quizás nunca habías pensado en tus deportes favoritos.*

Figura 6: Proyecto matemático realista, tomado de Vilatzara (2001).

Estos ejemplos nos pueden servir de referencia a la hora de seleccionar las tareas con las que implementar una actividad de modelización, pero también podemos diseñar nuestras propias tareas buscando en contextos cercanos al alumno, en sus intereses y aficiones, en la actualidad, en las noticias,... En la Figura 7 podemos ver un ejemplo de una tarea de modelización basada en una situación real y cercana a los alumnos.

¿Cómo elegir la cola más rápida en el supermercado? ¿Qué criterios utilizarías para escoger una cola u otra? ¿Cómo podríamos optimizar y mejorar las colas que se hacen en los supermercados a la hora de pagar?

Figura 7: Ejemplo de tarea tomada de una situación real y cotidiana que puede encontrarse en algunos artículos periodísticos.

Ante la disyuntiva de qué tipo de tareas elegir, los problemas de estimación de grandes cantidades (tipo Fermi), los problemas de obtención de estructuras (tipo MEAs), y los problemas basados en situaciones (de LEMA), son más estructurados y cerrados, indicados para trabajar con alumnos (y profesores) sin experiencia previa en modelización, ya que parten de una pregunta concreta y tienen una finalización más evidente, centradas en las acciones relacionadas con la construcción y resolución matemática del modelo. Sin embargo, los proyectos matemáticos realistas (PMR) son tareas más abiertas, dirigidas a alumnos (y profesores) con cierta experiencia en modelización, donde se transita, de forma global y completa, por todo el ciclo de modelización (en Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2017, puede verse algunos ejemplos de resolución). En nuestra experiencia, optamos por seleccionar y diseñar una pequeña colección de problemas del primer tipo, con los que introducir a nuestros alumnos en la modelización.

En el siguiente apartado nos centraremos en la metodología a seguir, y en concreto, en el papel que profesor y alumno deben asumir durante el desarrollo de la actividad.

6. ¿Qué metodología utilizar?

La introducción de la modelización en el aula supone un cambio metodológico importante: es recomendable promover el trabajo en pequeño grupo (en nuestra experiencia se forman grupos de 2 o 3 miembros) y las estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje cooperativo (como las descritas en Borromeo-Ferri, 2018, p. 6). Los alumnos deben asumir el protagonismo y trabajar de forma autónoma en la resolución de la tarea planteada (Blum y Borromeo-Ferri, 2009, Blum, 2011). Mientras, el profesor debe asumir un papel “facilitador” (Burkhardt, 2006), en el que su principal objetivo será apoyar a los alumnos en la superación de sus bloqueos y dificultades, manteniendo un permanente equilibrio entre su guía, que debe ser mínima, y la independencia de sus alumnos, que debe ser máxima. En este sentido, las intervenciones del profesor deberán realizarse, en mayor medida, a través de preguntas (¿Qué has hecho?, ¿Qué has logrado hasta ahora?, ¿Qué desconoces todavía?, ¿Son los resultados adecuados?), que propicien la reflexión y les permitan alcanzar sus propias conclusiones, fomentando en todo momento el debate y evitando juicios de valor, promoviendo que los alumnos tengan la posibilidad de aprender de sus errores y también la flexibilidad en las resoluciones. En efecto, es habitual que algunos grupos intenten resolver los problemas propuestos usando procedimientos alternativos a los que nosotros podemos anticipar, esto sin duda es un elemento enriquecedor del proceso de resolución que conviene no evitar.

El debate, entendido como la confrontación argumentada de diversas estrategias de resolución para una misma tarea, juega pues un papel principal en el desarrollo de la actividad modelizadora. Este debate, según el momento en que se produzca, puede ser de dos tipos: el “debate intragrupo”, que es el que se produce entre los miembros del grupo cuando exponen, consensuan o reflexionan sobre su proceso de resolución; y el “debate intergrupo”, que se produce con alumnos de otros grupos que han realizado, de forma independiente, la misma tarea, con el fin de intercambiar ideas y contrastar soluciones y estrategias (ver Gallart et al., 2015). El papel que el profesor asume en cada uno de estos momentos puede verse en detalle en la Tabla 1:

Papel del profesor	Objetivo	Momento	Desencadenante
Observador	Documentar el estado actual del proceso de resolución de los alumnos.	Debate intragrupo	Iniciativa del profesor.
Gestor de recursos	Proporcionar nuevas vías de resolución. Ayudar a centrar el problema.	Debate intragrupo	Demanda directa de los alumnos o iniciativa del profesor.
Asesor	Aconsejar y resolver dudas.	Debate intragrupo	Demanda directa de los alumnos.
Moderador	Moderar y conducir el debate.	Debate intergrupo	Iniciativa del profesor.
Experto	Emitir juicios. Completar la información. Comparar los modelos. Formalizar el conocimiento.	Debate intergrupo	Demanda directa de los alumnos o iniciativa del profesor.

Tabla 1: Papel del profesor durante una actividad de modelización.

Es pues una parte importante del éxito de la actividad reconducir al alumno (especialmente si se viene de una clase tradicional) hacia posturas más activas y participativas, promoviendo el debate como elemento catalizador. Esto no es fácil, pues existen inercias muy arraigadas respecto al papel del profesor y alumno (el contraste entre los distintos papeles que alumnos y profesor asumen en una clase tradicional versus clase basada en la modelización, puede verse en

Burkhardt, 2006), e incluso el temor de que sin una adecuada guía el alumno acabe fracasando (Blomhøj y Jensen, 2006). Sin embargo, la clarificación de los distintos papeles que el profesor asume (recogidos en la Tabla 1), puede servir de ayuda al profesor novel a la hora de delimitar que tipo de intervenciones son apropiadas durante la actividad modelizadora de sus alumnos.

Esta metodología nos impone una cierta planificación/secuenciación de la actividad modelizadora en la que distinguimos tres momentos principales: la presentación a los alumnos de los objetivos, metodología y criterios de evaluación de la actividad; la propia resolución de la tarea propuesta en pequeño grupo y a través del debate intragrupo; y la comunicación final de los resultados y el posterior debate intergrupo. Estos tres momentos se recogen en la Tabla 2, donde se propone un ejemplo de secuenciación y temporalización (que puede variar según la naturaleza de las tareas propuestas).

Sesión	Organización	Actividad
1	Grupo clase	Presentación actividad. Selección de la tarea y formación de grupos de trabajo.
2-3	Grupos de trabajo	Resolución de la tarea escogida.
4	Grupo clase	Exposición de cada grupo de su resolución y debate en gran grupo.

Tabla 2: Estructura de la secuencia didáctica de una actividad de modelización.

Durante la primera sesión, dedicada a presentar la actividad (nuestra puesta en escena), es importante también que se muestre a los alumnos un modelo simplificado del ciclo de modelización (ver de nuevo la Figura 2), que pueda servirles de guía durante su proceso de resolución. Será el momento también de formar los grupos de trabajo y decidir qué tareas van a resolver (la formación de los grupos y la elección de las tareas puede dejarse a elección de los propios alumnos, para que se sientan protagonistas de la actividad desde su mismo comienzo, u optar por una formación de grupos y/o asignación de tareas más dirigida, según los intereses del profesor). Toda esta información (objetivos, metodología, criterios de evaluación, colección de tareas) puede recogerse en un dossier de trabajo que se entregará a cada grupo.

En las sesiones dedicadas a la resolución de la tarea, como hemos comentado anteriormente, los alumnos deben trabajar en grupo, de forma autónoma, observados por el profesor, que se limitará a ayudarles cuando así se lo pidan o cuando se encuentren ante un auténtico bloqueo, sin dar más información de la necesaria. Durante la última sesión, los distintos grupos deberán comunicar y exponer al resto de compañeros la resolución de su tarea, ayudándose, si así lo desean, de diapositivas digitales. Será el momento de revisar el modelo presentado y validar los resultados a través del debate intergrupo, pero será el profesor, en último lugar y como experto, el encargado de formalizar e institucionalizar el conocimiento que se ha generado durante todo el proceso de resolución.

7. ¿Cómo debo evaluarla?

La evaluación de una actividad basada en la modelización es una tarea difícil, debido a diversos condicionantes que hemos ido comentando ya a lo largo de este artículo. Se trata de tareas abiertas, en muchos casos sin una solución única (incluso el tipo de solución presentada puede ser de naturaleza distinta), en la que siempre habrá la posibilidad de revisar y mejorar el modelo planteado (si es que queda tiempo), con procesos de resolución enrevesados, no lineales (recordar que el ciclo de modelización es una idealización canónica de este proceso) y por tanto difíciles de seguir por parte del profesor.

Si hablamos de la evaluación formativa, los dos tipos de debates señalados anteriormente permiten establecer mecanismos de comunicación, no solo entre alumnos del mismo grupo de trabajo y entre ellos con el profesor, sino también con alumnos de distintos grupos. Esta comunicación conducirá a la confrontación de ideas, estrategias, modelos y soluciones, cuya validez, así como sus limitaciones y alcances, podrá establecerse mediante su aceptación entre iguales.

Si nos referimos a la evaluación sumativa, es posible encontrar en la literatura diferentes modelos de rúbricas que pueden ayudar en este tipo de evaluación. Así, ésta puede basarse:

- En el ciclo de modelización, como ocurre en el proyecto LEMA, que proporciona una rúbrica de evaluación con cinco categorías (divididas en cuatro niveles), que se corresponden a la transición entre las distintas fases del ciclo: Establecer el Modelo; Trabajar con Precisión; Interpretación; Validar y Reflexionar; Informes².
- En el producto final, como ocurre en las MEAs, a través de las respuestas dadas a un par de cuestiones: ¿Cómo de útil es la herramienta para el cliente que la demanda? ¿Puede ser reutilizable en otras situaciones similares pero con datos distintos? (en Lesh y Clarke, 2000, apéndice A).

En nuestra experiencia, y basándonos en estas dos rúbricas, diseñamos la nuestra propia, buscando que resultara sencilla de manejar por el profesor y de comprender por los alumnos, estableciendo tres categorías: Planteamiento y resolución, destinada a evaluar, de forma global, el proceso completo de modelización, y no centrada en las fases individuales del ciclo (muchas veces, difíciles de delimitar, y que, como hemos comentado anteriormente, no se dan de forma lineal); Iniciativa y autonomía, que tendría como objetivo valorar la iniciativa y la autonomía del grupo y la participación activa de todos sus miembros; y por último, Presentación y comunicación, cuyo propósito sería evaluar aspectos relacionados con la presentación y comunicación final del proceso, las argumentaciones y justificaciones aportadas, y la corrección en el uso del lenguaje matemático y sus representaciones.

Independientemente de la rúbrica utilizada, una herramienta muy útil para la evaluación (y casi que indispensable) es la elaboración de un diario por parte de cada uno de los grupos de alumnos, donde se describa su resolución en el día a día del aula (ver Figura 8), además de la presentación final (que puede ser incluso una presentación en diapositivas digitales).

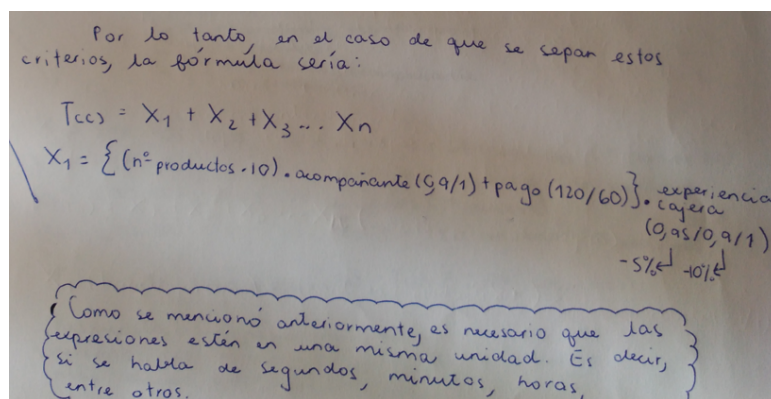


Figura 8: Extracto de la resolución presentada por un grupo de alumnos de 3^o ESO a la tarea “La cola en el supermercado” (ver Figura 7).

²http://www.lemma-project.org/web.lemaproject/web/dvd_2009/spain/assessment.html




En todo caso, la evaluación supone para el profesor asumir el papel de observador, durante las sesiones dedicadas a la resolución de las tareas en el aula, que documente de primera mano el estado del proceso de resolución de sus alumnos y el grado de participación de los mismos dentro del grupo.

8. Conclusiones










No hay duda de las ventajas de la modelización en el aula, y así se recogen en numerosas investigaciones (desde el punto de vista del trabajo por competencias y la resolución de problemas, desde el metodológico, con dinámicas más activas y participativas, desde el propio papel de las matemáticas en la realidad, etc.), pero también es cierto que su introducción supone un importante reto para el profesor. Debe previamente tener claros los objetivos que pretende alcanzar con ella (¿Introducir de forma significativa un contenido matemático? ¿Trabajar competencias relacionadas con la resolución de problemas reales?), seleccionar y diseñar tareas apropiadas (¿Más abiertas o más cerradas y estructuras? ¿Qué abarquen todo el ciclo de modelización o solo una parte del mismo?), los criterios de evaluación (¿Basados en el ciclo de modelización o centrados en el producto final?), así como su secuenciación y temporalización. También es bien cierto que el éxito de la actividad recae especialmente en la propia importancia que le dé el profesor en su puesta en escena, dotándola (o no) de entidad: un número adecuado de sesiones de trabajo (y no precisamente en sesiones de “relleno”, olvidándonos de la sensación de estar perdiendo el tiempo que pueden tener algunos profesores atezados por el currículo), con peso en las calificaciones (ya se sabe que lo que no se califica, no importa, al menos, a una parte importante del alumnado) e incluida en la propia programación (y a ser posible consensuada y compartida por los restantes profesor del departamento, y por qué no, por profesores de otros departamentos afines y que pueden aportar su granito de arena a la actividad).





En cualquier caso, introducir nuevos elementos en nuestra práctica docente que nos lleven a explorar nuevas vías en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, supone una gran satisfacción personal y también un desafío (y así lo ha sido en nuestra experiencia), y la modelización puede ser, precisamente, uno de estos nuevos elementos.

Referencias

-  Blomhøj, M., Jensen, T.H. (2006).
What's all the fuss about competencies?
 En W. Blum, P.L. Galbraith, y M. Niss (eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, Heidelberg: Springer, pp. 45–56.
-  Blomhøj, M., Kjeldsen, T. (2006).
Teaching Mathematical Modelling through project work.
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), pp. 163–177.
-  Blum, W (2011).
“Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research”.
 En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.*
 Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer (pp. 15–30).

-  Blum, W., Borromeo-Ferri, R. (2009).
Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?
Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), pp. 45–58.
-  Blum, W., Niss, M. (1991).
*Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications,
and Links to other Subjects?*
State, Trends and Issues in Mathematics Instruction.
Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 37–68.
-  Borromeo-Ferri, R. (2006).
Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process.
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 41, pp. 453–465.
-  Borromeo-Ferri, R. (2007).
*Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence
factor on modelling routes of pupils.*
En D. Pitta-Pantzi y Philippou (Eds.), CERME 5–Proceedings of the Fifth
Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.
Larnaca: University of Cyprus (pp. 2080–2089).
-  Borromeo-Ferri, R. (2018).
Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.
Springer.
-  Burkhardt, H. (2006).
*Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past
developments and the future.*
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), pp. 178–195.
-  Cabassut, R., Ferrando, I. (2017).
Difficulties in Teaching Modelling: A French-Spanish Exploration.
In Mathematical Modelling and Applications. Springer. Cham. (pp. 223–232).
-  Calabuig, J.M., Ferrando, I., Gallart, C., García-Raffi, L.M.,
Hurtado, D., Sierra, L. (2005).
La modelización como competencia transversal en el sistema educativo español.
UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 69, pp. 44–51.
-  Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., Gorgorió, N. (2017).
*Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución
de problemas de Fermi.*
Bolema, 31(57), pp. 220–242.
-  Gallart, C. (2016).
La modelización como herramienta de evaluación competencial.
Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de València.
-  Gallart C., Ferrando I., García-Raffi, L.M. (2015).
El profesor ante la actividad modelizadora en el aula de secundaria.
SUMA, 79, pp. 9–16.

-  Gallart C., Ferrando I., García-Raffi, L. M. (2017).
Análisis de los procesos de resolución de tres tareas de modelización.
MSEL, 10(2), pp. 137–152.
-  Gravemeijer (2007).
Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling.
En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* (pp.138–144).
Heidelberg: Springer.
-  Julie, C., Mudalay, V. (2007).
Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa.
En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.),
Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study (pp. 503–510). Heidelberg: Springer.
-  Lesh, R. (1997).
Matematización: La necesidad “real” de la fluidez en las representaciones.
Enseñanza de las ciencias, 15(3), pp. 377–391.
-  Lesh, R., Doerr, H. M. (2003).
Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem-solving.
En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates (pp. 3–34).
-  Lesh, R., Clarke, D. (2000).
Formulating Operational Definitions of Desired Outcomes of Instruction in Mathematics and Science Education.
En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.*
Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates (pp. 591–645).
-  Maaß, K. (2006).
What are modeling competencies?
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), pp. 113–142.
-  Maaß, K. (2010).
Classification scheme for modeling task.
Journal für Mathematik-Didaktik 31, pp. 285–311.
-  Maaß, K., Gurlitt, J. (2011).
LEMA–Professional development of teachers in relation to mathematical modelling.
En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer. (pp. 629–639).

-  Niss, M. (1999).
Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education.
Educational Studies in Mathematics, 40, pp. 1–24.
-  OCDE (2017).
PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving, PISA,
OECD Publishing, Paris.
<https://doi.org/10.1787/9789264281820-en>
-  Rico, L. (2006).
La competencia matemática en PISA.
PNA, 1(2), pp. 47–66.
-  Sol, M. (2009).
Anàlisi de les competències i habilitats en el treball de projectes matemàtics amb alumnes de 12-16 anys a una aula heterogènia.
Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona
https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/1324/MSP_TESI.pdf?sequence=1
-  Treffers, A. (1987).
Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction?
The Wiskobas Project. Springer. Dordrecht: Reidel.
-  Vilatzara, Grup (2001).
Proyectos matemáticos en la ESO: una actividad rica.
UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 27, pp. 21–36.
-  Zbiek, R., Conner, A. (2006).
Beyond motivation: exploring mathematical modelling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics.
Educational Studies in Mathematics, 63, pp. 89–112.

Modelling in Science Education and Learning
<http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>