

Orientaciones didácticas para introducir la modelización matemática temprana en Educación Infantil
Teaching guidelines for introducing early mathematical modelling in Early Childhood Education

Ángel Alsina
UNIVERSIDAD DE GIRONA
angel.alsina@udg.edu

María Salgado
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
maria.salgado@usc.es

Abstract

Se describen y ejemplifican diversas orientaciones didácticas para introducir la modelización matemática temprana en Educación Infantil y, así, promover una enseñanza basada en interpretar y trabajar matemáticamente con el entorno, en contraposición a una enseñanza más descontextualizada y procedimental. Con esta finalidad, el artículo se estructura en tres partes: en la primera parte, se describen diversas ideas clave para el profesorado de infantil en torno a la modelización matemática; en la segunda parte, se describen orientaciones para el diseño, implementación y evaluación de actividades de modelización matemática temprana en infantil; y, finalmente, en la tercera parte se muestra un ejemplo de actividad de modelización matemática temprana implementada con un grupo de 21 niños de 5 años. Se concluye que la realización de actividades de modelización a lo largo de la escolaridad puede contribuir a que el alumnado dé sentido a las matemáticas, además de tomar conciencia de su diversidad de aplicaciones en el mundo real.

Various teaching guidelines are described and exemplified to introduce early mathematical modelling in Early Childhood Education, thus promoting teaching based on interpreting and working mathematically with the environment, as opposed to a more decontextualised and procedural teaching. To this end, the article is structured in three parts: in the first part, several key ideas for early mathematical modelling are described; in the second part, guidelines for the design, implementation and evaluation of early mathematical modelling activities in Early Childhood Education are described; and finally, in the third part, an example of an early mathematical modelling activity implemented with a group of 21 5-year-old children is shown. It is concluded that the implementation of modelling activities throughout schooling can help students to make sense of mathematics, as well as to become aware of its diversity of applications in the real world.

Palabras clave: Modelización matemática temprana, enseñanza de las matemáticas, orientaciones didácticas, resolución de problemas, Educación Infantil

Keywords : Early mathematical modelling, mathematics teaching, didactic orientations, problem solving, Early Childhood Education

1. Introducción

En los últimos años ha ido aumentando el interés por la modelización matemática, debido a su importancia tanto en aplicaciones del mundo real como en la propia educación matemática (i.e, Ferrando, 2019; Schukajlov et al., 2018; Trelles-Zambrano y Alsina, Á., 2017; Vorhölter et al., 2014): por un lado, la modelización matemática contribuye a comprender e interpretar mejor fenómenos asociados a la medicina, la física, la ingeniería, etc.; y, por otro, implica una enseñanza de las matemáticas basada en interpretar y trabajar matemáticamente con el entorno, en contraposición a una enseñanza más descontextualizada y procedimental (Alsina, Á., 2020).

Desde esta perspectiva, y asumiendo que este enfoque de la enseñanza de las matemáticas debe promoverse ya desde la Educación Infantil (NCTM, 2003), dentro de la línea de investigación en educación matemática del Grup de Recerca en Educació Científica i Ambiental (GRECA, por su acrónimo en catalán) de la Universitat de Girona (España), se ha desarrollado una sublínea de trabajo con el propósito de indagar acerca de la introducción de la modelización matemática en Educación Infantil (3-6 años). La modelización matemática es un proceso que utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real (Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borromeo Ferri, 2009). Con el objeto de distinguir la modelización matemática propiamente dicha de las actividades que permiten introducir este proceso matemático en las primeras edades, Alsina, Á. y Salgado (2021a, 2021b) han acuñado el término “Modelización Matemática Temprana”, que enfatiza los primeros conocimientos en el proceso de traducción entre contextos del mundo real y las matemáticas. En concreto, estos autores definen la modelización matemática temprana como un proceso que, en el marco de la resolución de problemas reales, ayuda a crear los primeros modelos para analizar, explicar y comprender la realidad, a partir de un proceso de reflexión que implica idas y venidas constantes entre los contextos reales y las matemáticas que los niños de los primeros niveles movilizan.

En este marco, dentro del grupo GRECA-matemáticas se han desarrollado diversas investigaciones, inicialmente con tres propósitos: 1) analizar la presencia de la modelización matemática en los currículos de diversos países, para conocer el panorama contemporáneo acerca de su incorporación en la legislación educativa (Trelles-Zambrano y Alsina, Á., 2017); 2) diseñar y validar una rúbrica para analizar procesos de modelización matemática a lo largo de la escolaridad (Toalongo-Guamba et al., 2020); 3) diseñar, implementar y analizar actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil (Alsina, Á. y Salgado, 2021a, 2021b, en prensa; Alsina, Á. et al., 2021; Toalongo-Guamba et al., 2021).

A partir de los datos obtenidos en estos estudios previos, la finalidad de este nuevo trabajo es proporcionar diversas orientaciones didácticas al profesorado de infantil para introducir la modelización matemática temprana en sus prácticas de enseñanza. Con este propósito, el artículo se estructura en tres partes: en la primera parte, se describen algunas ideas clave en torno a la modelización matemática; en la segunda parte, se describen orientaciones para el diseño, implementación y evaluación de actividades de modelización matemática temprana en infantil; y, finalmente, en la tercera parte se muestra un ejemplo de actividad de modelización matemática temprana con un grupo de 21 niños de 5 años.

2. Ideas clave para el profesorado de infantil en torno a la modelización matemática

La modelización matemática, como se ha indicado, utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas (Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borromeo-Ferri, 2009), partiendo de la base que:

... no se trata solo de aplicar la matemática a la realidad sino de influir creativamente en la realidad a través de ella y de paso dar sentido (significado) a lo que se aprende matemáticamente, que puede ser interesante en sí, al margen de su uso directo (Alsina, C., 2011, p. 2).

Greefrath et al. (2013) han caracterizado las habilidades o subcompetencias relacionadas con la modelización (Tabla 1):

Subcompetencias	Indicadores
Construir	Los estudiantes construyen su propio modelo mental a partir de un problema dado y así formulan una comprensión de su problema.
Simplificar	Los estudiantes identifican la información relevante e irrelevante de un problema real.
Matematizar	Los estudiantes traducen situaciones reales concretas y simplificadas en modelos matemáticos (por ejemplo, términos, ecuaciones, figuras, diagramas y funciones).
Interpretar	Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos de la manipulación dentro del modelo con la situación real y así obtienen resultados reales.
Validar	Los estudiantes juzgan los resultados reales obtenidos en términos de plausibilidad.
Exponer	Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos en el modelo situacional con la situación real y obtienen así una respuesta al problema.

Tabla 1: Subcompetencias relacionadas con la modelización matemática (Greefrath et al., 2013, p. 19).

Desde esta perspectiva genérica, se destacan tres ideas clave sobre la modelización: la presencia de la modelización matemática en el currículo, los ciclos de modelización matemática y la evaluación de la modelización matemática. La primera idea clave que hay que tener en cuenta es que la modelización matemática está cada vez más presente en las orientaciones curriculares. En Estados Unidos, por ejemplo, los Estándares Comunes para las Matemáticas (CCSSI, 2010) describen ocho prácticas matemáticas para todas las etapas, que han sido adaptadas de los cinco estándares de procesos matemáticos propuestos por el NCTM (2003) y de los cinco aspectos de competencia descritos en el informe Adding It Up, del NRC (2001): 1) la resolución de problemas con sentido y la perseverancia para resolverlos; 2) el razonamiento abstracto y cuantitativo; 3) la construcción de argumentos viables y la escucha crítica del razonamiento de los demás; 4) la modelización matemática; 5) el uso estratégico de herramientas apropiadas; 6) la atención a la precisión; 7) la búsqueda y el uso de la estructura; y 8) la búsqueda y la expresión de la regularidad en los razonamientos. El currículo de matemáticas de Singapur (Ministry of Education Singapore, 2012), cuyo eje es la resolución de problemas, considera que los procesos matemáticos son imprescindibles y, entre ellos, menciona también la modelización matemática.

Teniendo en cuenta que tanto en los estándares americanos para las prácticas matemáticas como en las bases para la enseñanza de las matemáticas de Singapur la modelización se considera como un elemento más, Alsina, Á. y Salgado (en prensa) refuerzan el papel de la modelización matemática en el contexto del currículo de matemáticas y subrayan que, ya desde

infantil, la modelización matemática debe ser considerada como una habilidad que aglutina las demás prácticas o procesos, puesto que cuando se propone una actividad de modelización matemática “se ponen en juego el conjunto de prácticas o procesos matemáticos, como por ejemplo la resolución de un problema real o realista, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones o la representación”. En este sentido, estos autores consideran que la modelización matemática es un marco idóneo para llevar a cabo prácticas de enseñanza de las matemáticas a partir de una visión integrada de los conocimientos matemáticos (Alsina, Á., 2012) ya que, durante un ciclo de modelización, los niños movilizan contenidos matemáticos de distinta naturaleza y gestionan el conocimiento, las habilidades y las emociones a través de los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación, para conseguir un objetivo a menudo más cercano a situaciones funcionales y en contextos de vida cotidiana que a su uso académico (Figura 1).

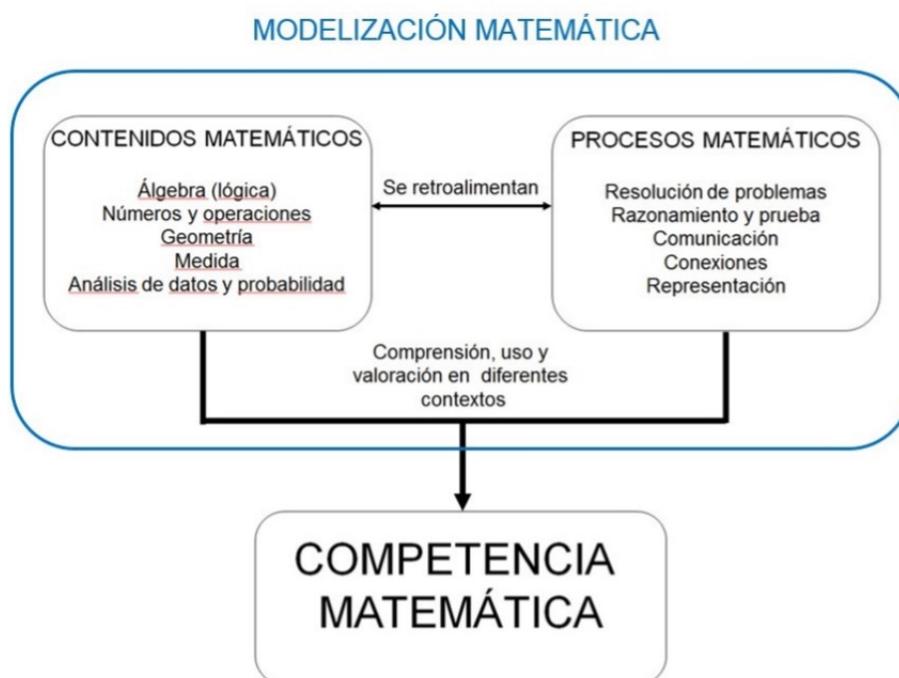


Figura 1: Papel de la modelización matemática en el desarrollo del pensamiento matemático infantil. Fuente: Alsina, Á. y Salgado (en prensa).

La segunda idea clave es que la modelización matemática es un proceso no lineal e iterativo, por lo que los procesos de modelización matemática se desarrollan a través de ciclos (i.e., Borromeo-Ferri, 2018; Carreira et al., 2011; Geiger, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Greefrath, 2011; Kaiser, 1995). Actualmente, no existe todavía un consenso en la literatura sobre las fases que intervienen en un ciclo de modelización, por lo que coexisten diversos modelos (Figura 2):

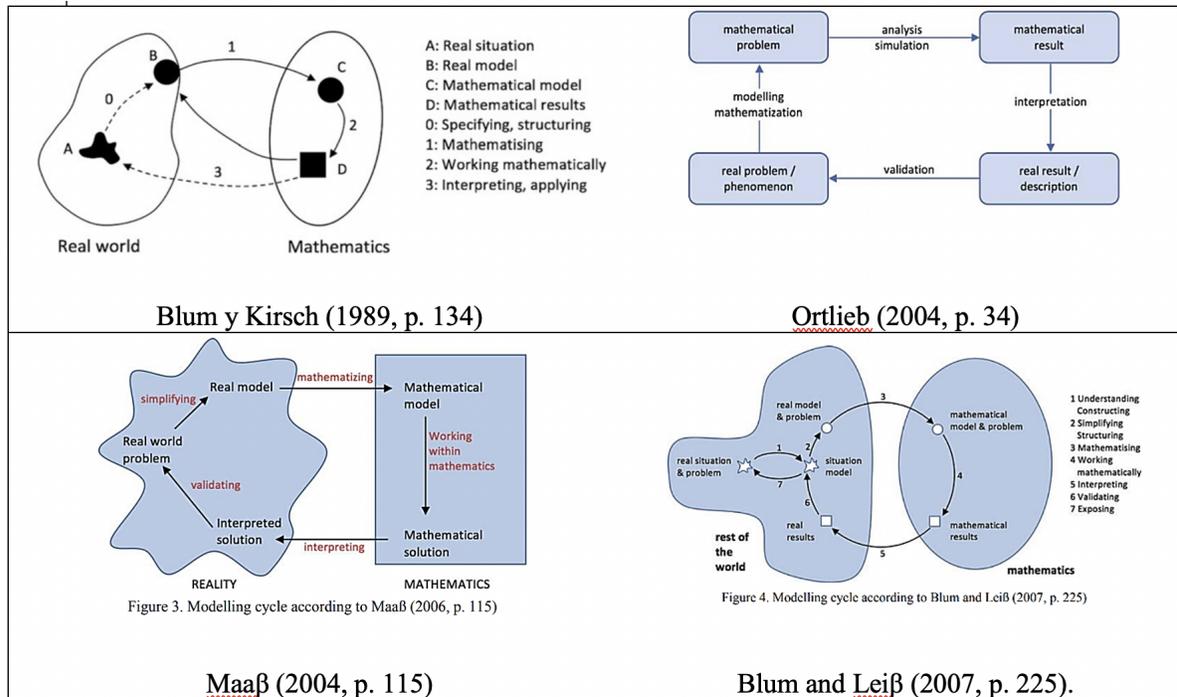


Figura 2: Distintos ciclos de modelización matemática. Fuente: Greefrath, 2019.

Para implementar actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil y ayudar a los niños a crear sus primeros modelos, en nuestros estudios (Alsina, Á. y Salgado, 2021a, 2021b, en prensa; Alsina, Á. et al., 2021; Toalongo-Guamba et al., 2021) se ha considerado el ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007), que considera siete fases: comprensión, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación, exposición/presentación. Esta elección se debe a dos motivos principales:

1. Los niños pueden partir de un punto del ciclo sin necesidad de seguir un orden establecido. Este ir y venir es lo que les permite perfeccionar progresivamente el modelo buscado.
2. En la fase final del ciclo (*Exposing*) los niños socializan el modelo con sus compañeros, pueden recoger las observaciones pertinentes y realizar los ajustes necesarios con el objetivo de mejorar/afinar progresivamente el modelo. Esta es una característica especialmente relevante en la Educación Infantil, donde los procesos de interacción, negociación, diálogo están muy presentes para la co-construcción y reconstrucción del conocimiento matemático.

Finalmente, la tercera idea clave se refiere a la evaluación de actividades de modelización matemática temprana. La revisión sistemática de la literatura realizada por Frejd (2013) respecto a la evaluación de la modelización matemática identificó que los instrumentos más usados son las pruebas escritas, los proyectos, las pruebas prácticas, los portafolios y los concursos. Más adelante, en el documento Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education (COMAP y SIAM, 2019), se han incluido las listas de comprobación (checklist) y las rúbricas. En nuestro equipo de investigación se ha optado por el diseño, construcción y validación de una rúbrica denominada “Rubric for the Evaluation of Mathematical Modeling Processes” (REMMP, por su acrónimo en inglés). Se trata de una rúbrica instruccional (Andrade, 2000) y, en consecuencia, tiene dos funciones: sirve tanto para dar a conocer cómo se desarrolla la modelización matemática como para evaluar los procesos de modelización matemática a lo largo de las distintas etapas educativas, desde los 3 hasta los 18 años (Toalongo-Guamba et al.,

2020). En el subapartado de orientaciones didácticas para la evaluación de actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil (3-6 años) se presentan los indicadores específicos para esta etapa educativa (Figura 3).

3. Orientaciones didácticas para el diseño, implementación y evaluación de actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil (3-6 años)

Una de las organizaciones que más ha impulsado la introducción de la modelización es The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA), que se creó en 1983 con el objetivo de fomentar la investigación y la enseñanza de la modelización matemática y sus aplicaciones en los diferentes niveles educativos a nivel internacional. Un aspecto relevante es que ICTMA reúne tanto a educadores como a profesionales de la modelización matemática a nivel científico, hecho que se convierte en una fortaleza ya que el diálogo entre matemáticos y educadores matemáticos es una necesidad cada vez más latente. Desde este punto de vista, progresivamente se han establecido parámetros generales para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática: los objetivos de aprendizaje, las razones fundamentales para alcanzar estos objetivos en los diferentes niveles educativos, ideas probadas sobre cómo apoyar al profesorado en la implementación de objetivos de aprendizaje y los reconocidos retos y dilemas didácticos relacionados con diferentes formas de organizar la enseñanza, junto con análisis teóricos y empíricos de las dificultades de aprendizaje relacionadas con la modelización e ideas sobre diferentes formas de evaluar el aprendizaje en las actividades de modelización y los obstáculos relacionados (Kaiser et al., 2006; Kaiser et al., 2011; Stillman et al., 2013; Stillman et al., 2015; Stillman et al., 2017; Stillman et al., 2020). Sin embargo, en estos estudios no se ha considerado la etapa de Educación Infantil, a pesar de ser un momento clave en el aprendizaje. Por esta razón, en esta sección se describen diversas estrategias y recursos que se pueden utilizar para introducir progresivamente la modelización matemática temprana en el aula de infantil (3-6 años) y, con ello, contribuir al desarrollo profesional del profesorado de estos niveles. Las orientaciones, fundamentadas en los datos previos de la investigación, se organizan en tres grupos: 1) el diseño de actividades; 2) la implementación de actividades; y 3) la evaluación de actividades.

3.1. Orientaciones sobre el diseño de actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil

Para diseñar actividades de modelización matemática temprana es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos: la motivación inicial, la situación problemática que va a plantearse y otras cuestiones organizativas como la distribución del alumnado, la preparación del material necesario, la documentación de la actividad, etc.

La motivación inicial

De forma previa a la presentación de una situación problemática o un reto, es recomendable elegir un recurso que permita contextualizar el reto y generar en los niños curiosidad e interés. En el caso de la Educación Infantil, las situaciones reales del entorno cercano pueden ser un punto de partida muy adecuado: p. ej., las comidas favoritas del alumnado (Alsina, Á. y Salgado, 2021a); un temporal de frío (Toalongo-Guamba et al., 2021); etc. Otro recurso muy útil son los cuentos, puesto que vincular la enseñanza de la matemática con la literatura infantil no

solo motiva a los niños y genera interés, sino que también ayuda a conectar con experiencias personales, provee de contextos en que la matemática es útil para resolver problemas y promueve el pensamiento crítico (Haury, 2001). A modo de ejemplo, Alsina, Á. y Salgado (2021b) utilizan el cuento disponible online “Isabella y las manzanas de caramelo” para motivar a los niños en el rol de vendedores de manzanas, Alsina, Á. y Salgado (en prensa) utilizan el cuento clásico “Los Tres Cerditos” para introducir los elementos que debe tener la construcción de una casa, etc.

La situación problemática

Una característica esencial de las situaciones que se plantean en el contexto de la modelización matemática temprana es que sean reales o realistas en las mentes de los niños, ya que estas situaciones permiten desarrollar una verdadera conexión de significados de los objetos matemáticos y su utilidad en la vida cotidiana. En este sentido, Reeuwijk (1997) expone cinco motivos para utilizar contextos reales:

- En primer lugar, pueden motivar a los niños. Asimismo, pueden ayudarles a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias. Pueden aclarar por qué ciertos ámbitos de las matemáticas revisten importancia y pueden contribuir a que los estudiantes entiendan el modo en que se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.
- En segundo lugar, el uso de contextos puede favorecer que los propios niños aprendan a usar las matemáticas en la sociedad, además de descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores.
- En tercer lugar, los contextos pueden incrementar el interés de los niños por las matemáticas y la ciencia en general.
- En cuarto lugar, los contextos pueden despertar la creatividad de los niños, impulsarlos a utilizar estrategias informales y de sentido común al afrontar, por ejemplo, la resolución de una situación problemática o de un juego.
- Y, en quinto lugar, un buen contexto puede actuar como mediador entre la situación concreta y las matemáticas abstractas.

Se trata, en definitiva, de plantear problemas reales en los que las matemáticas sean la clave para dar una solución. A modo de ejemplo, se presenta un problema que desencadena el ciclo de modelización matemática descrito por Alsina, Á. y Salgado (2021b, p. 6):

“Sois agricultores de manzanas y debéis clasificar las manzanas de vuestra cesta para varios compradores: distribuidores de cestas de regalo de alta calidad (las “mejores” manzanas); supermercados (“manzanas que se pueden vender”); comedores escolares (“manzanas más pequeñas para el almuerzo”); y las manzanas menos atractivas que se pueden utilizar para hacer purés y zumos. Cada grupo tiene herramientas para medir, pesar... y un papel en blanco para escribir los resultados. Tenéis que clasificar vuestras manzanas para los diferentes compradores y luego explicar cómo habéis decidido clasificar las manzanas y por qué. Para ello, cada grupo tiene que preparar una presentación para los demás agricultores para ayudarles a entender cómo clasificar las manzanas para los posibles compradores. Al final, pondremos en común todas vuestras explicaciones”. (Alsina, Á. y Salgado, 2021b, p. 6)

Otras cuestiones organizativas

Para poder implementar una actividad de modelización en infantil, previamente es necesario pensar cómo se van a organizar los niños, preparar el material necesario, planificar la documentación de la actividad a través de fotografías y/o vídeos, etc. En relación a la organización del alumnado, en las actividades de modelización matemática es altamente recomendable que los niños trabajen cooperativamente, por parejas o en pequeños equipos de 4-5 niños, preferiblemente, para que aprendan a ayudarse entre ellos y tomar decisiones colectivas. En este sentido, diversos organismos y autores destacan la importancia de la interacción, la negociación y el diálogo como fuente de aprendizaje en el aula de matemáticas, desde las primeras edades de escolarización (i.e., Alsina y Planas, 2008; Alsina y Salgado, 2019; NCTM, 2003). Otra cuestión muy importante es que, lógicamente, debe prepararse con antelación el material necesario para poder implementar la actividad (cestas con manzanas, troncos de madera, instrumentos de medición, etc.). Asimismo, debe planificarse también la documentación de la actividad, es decir, la recogida y exposición sistemática de los procesos educativos a través de escritos, imágenes, paneles, vídeos, palabras de los niños, productos gráficos, etc. En este sentido, Hoyuelos (2007), señala que, a través de la documentación, se muestra una escuela que quiere argumentar su trabajo más allá de las palabras, una escuela que piensa, que reflexiona, que aprende en el camino. Para planificar la documentación, es recomendable preguntarse ¿qué se va a documentar?, ¿por qué se va a documentar?, ¿cómo se va a documentar?, ¿cuándo se va a documentar?, etc.

3.2. Orientaciones para la implementación de actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil

Para ayudar al profesorado de infantil a comprender los elementos involucrados en un proceso de modelización matemática, en los estudios previos de Alsina, Á. y Salgado (2021a, 2021b, en prensa), Alsina, Á. et al. (2021) y Toalongo-Guamba et al. (2021) se han identificado las acciones que realizan los niños de infantil en las distintas fases del ciclo de modelización de Blum y Lei? (2007): comprensión, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación, exposición/presentación. A continuación, se describen estas acciones y se ofrecen diversas orientaciones didácticas para guiar a los niños y ayudarles en cada una de las fases, recordando que pueden partir de un punto del ciclo sin necesidad de seguir un orden establecido.

Comprensión

Los datos de los estudios realizados hasta ahora han evidenciado que, durante esta primera fase del ciclo de modelización, los niños vinculan el contenido del problema con sus conocimientos previos. Además, plantean preguntas sobre el problema, expresan el tipo de solución que generaría, representan las características principales y, progresivamente, expresan el problema a sus compañeros y al maestro, además de comunicar qué aporta la solución a su entorno. Para ayudar a los niños durante esta fase, es recomendable una gestión de la enseñanza a través de los procesos matemáticos de razonamiento y prueba y comunicación, principalmente. Algunas cuestiones relevantes a tener en cuenta para llevar a cabo prácticas de enseñanza a partir de estos procesos son las siguientes (Alsina, Á., 2014):

- En las primeras edades el razonamiento es sobre todo intuitivo e informal y la prueba implica principalmente comprobar.
- Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones.

- Las preguntas deben servir para argumentar (“¿por qué piensas que es verdad?”); descubrir (“¿qué piensas que pasará ahora?”); justificar proposiciones (“¿por qué funciona esto?”); etc.
- La comunicación se tiene que distinguir de la información.
- La comunicación requiere integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los conocimientos matemáticos y su gestión.

Como puede apreciarse, una de las estrategias docentes más eficaces, sin ser la única, es saber plantear buenas preguntas, ya que permiten que los niños avancen desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles superiores. En este sentido, se pueden tener en cuenta los ocho consejos propuestos por EduGAINS (2011) para plantear preguntas efectivas a los niños en la clase de matemáticas:

1. Anticipar el pensamiento de los niños.
2. Vincular con los objetivos de aprendizaje.
3. Plantear preguntas abiertas.
4. Plantear preguntas que realmente necesitan ser contestadas.
5. Incorporar verbos que estimulan el pensamiento y la comprensión, como conectar, elaborar, evaluar y justificar.
6. Plantear preguntas que abren una conversación para incluir a todos, en el marco de una comunidad de aprendizaje.
7. Mantener las preguntas neutrales, evitando calificativos como “fácil” o “difícil”, ya que pueden condicionar las respuestas de los niños.
8. Proporcionar tiempo de espera entre las preguntas y las respuestas de los niños.

Estructuración

Durante esta fase y, siempre que tengan la ayuda necesaria por parte del profesorado, los niños son capaces de identificar los datos de la situación problemática y, progresivamente, identifican también los que se pueden conocer y los desconocidos; además, hacen propuestas para simplificar el problema. Para guiar a los niños a realizar estas acciones, pueden ser útiles algunas orientaciones proporcionadas por Pólya (1979) acerca de la resolución de problemas. En concreto, este autor propuso un método organizado en cuatro pasos: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás, y se pueden extraer orientaciones muy útiles de los dos primeros pasos: Para ayudar a los niños a entender el problema, puede ser aconsejable plantearles preguntas que sirvan para identificar si en el problema se encuentran los datos necesarios para resolverlo y si existe alguna información irrelevante: p. ej., ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿es insuficiente?, ¿redundante?, ¿contradictoria? Estas preguntas, lógicamente, deben adaptarse al nivel de los niños, usando un lenguaje que sea comprensible para ellos. Para ayudar a los niños a simplificar el problema y configurar un plan, se pueden plantear también preguntas que les ayuden a orientar el proceso: ¿te has encontrado con un problema semejante?, ¿has visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoces algún problema relacionado con este?, ¿puedes decir el problema de otra forma?, ¿puedes expresarlo con tus propias palabras? Adicionalmente, puede ser muy útil explicar a los

niños cómo desarrollar algunas estrategias para que ellos puedan utilizarlas en caso de que sea necesario: ensayo y error; resolver un problema similar más simple; hacer un diagrama; hacer una lista; etc.

Matematización

Los datos de los estudios realizados revelan que, durante esta fase del ciclo de modelización, los niños de 3 a 6 años sustituyen los elementos del contexto real por objetos matemáticos y explican su uso; además, progresivamente, justifican dicho uso a partir de las características del problema e identifican todos los parámetros matemáticos presentes en el problema y las relaciones entre ellos. Así, pues, los niños empiezan a ejecutar un plan en el que usan sus conocimientos matemáticos (p. ej., conocimientos de los números, las figuras o los atributos mensurables, entre otros) para empezar a resolver la situación. Es recomendable que, durante este paso del ciclo de modelización, el profesorado conceda un tiempo razonable para que los niños puedan activar sus conocimientos matemáticos y, si no se alcanza el éxito, deben ofrecerse ayudas a partir de preguntas, más que explicaciones, para guiarlos en el camino adecuado. Si aun así los niños no logran avanzar, se puede dejar temporalmente el problema a un lado hasta que no se disponga de los conocimientos necesarios para poder abordarlo. Este proceso requiere, por parte del profesorado, tener un conocimiento profundo de las matemáticas que los niños de los diferentes niveles de infantil pueden movilizar. En este sentido, por ejemplo, Alsina, Á. (2006) propone una organización de los contenidos matemáticos por edades (3-6 años), que ha sido actualizada en Alsina, Á. (en prensa) a partir de nuevos datos que provienen de la investigación en educación matemática infantil. Estos contenidos están organizados en cinco bloques: álgebra temprana, números y operaciones, geometría, medida y estadística y probabilidad.

Trabajo matemático

En esta fase, los niños usan objetos matemáticos y estrategias para proponer soluciones del problema y obtener un modelo matemático inicial. Además, en función de la edad, operan con estos objetos para conseguir dicho propósito. Dadas las características del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en infantil, para llevar a cabo estas acciones los niños tienden a interactuar con material, por lo que es imprescindible dejar espacio para la manipulación y experimentación. Desde este punto de vista, Alsina, Á. y Planas (2008) indican que la manipulación es una necesidad básica de las personas, puesto que establece los fundamentos que han de permitir desde la infancia ir construyendo progresivamente los conceptos matemáticos, que son abstractos. Cabe señalar que, desde inicios del siglo XX, la manipulación de materiales como herramienta para desarrollar el conocimiento matemático y científico ha sido un campo muy investigado por numerosos expertos del ámbito de la psicología del aprendizaje, la pedagogía, la matemática y la ciencia, como por ejemplo Montessori, Piaget, Decroly, Freinet, Freudenthal, Dienes y Mialaret, entre otros. Alsina, Á. y Planas (2008) subrayan que, para todos estos autores, la manipulación es mucho más que una manera divertida de desarrollar aprendizajes. La manipulación de materiales es en ella misma una manera de aprender que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje sin hacerlo necesariamente más rápido. Por otra parte, el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz ya que se limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del proceso de aprendizaje. Con base en estos criterios, en el marco de los itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años), Alsina, Á. (en prensa) presenta una exhaustiva selección de materiales para trabajar los distintos bloques de contenidos.

Interpretación

Los análisis preliminares de diversos ciclos de modelización que han llevado a cabo niños entre 3 y 6 años revelan que, en términos generales, son capaces de comparar la solución con el problema inicial y argumentar la validez de los resultados obtenidos. Progresivamente, también comprueban la coherencia de la solución matemática llevada al contexto real inicial e identifican las posibles limitaciones o restricciones. Como se puede observar, pues, durante esta fase los niños ponen en juego diversas habilidades asociadas a la argumentación en la matemática escolar infantil. Cornejo-Morales et al. (2021) indican que el desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas desde las primeras edades forma parte de una educación de calidad y de la formación de personas críticas, reflexivas e intelectualmente autónomas, capaces de comprender y construir la sociedad a la que pertenecen. En este sentido, proponen el modelo denominado Situación Argumentativa (SA), para caracterizar y analizar la argumentación en la educación matemática infantil. De forma muy sintética, la SA propone una forma integrada de entender la argumentación en las matemáticas de las primeras edades que considera las características del aula de infantil y de los niños de estas edades a partir de cinco componentes: 1) argumento (¿qué se argumenta? y ¿por qué?); 2) interacción (¿quiénes argumentan?); 3) función (¿para qué se argumenta?); 4) carácter (¿cómo se argumenta?); y 5) matemática (¿sobre qué se argumenta?). Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca la argumentación en las primeras edades implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones; favorecer la interacción y el contraste; e incentivar la indagación y el aprendizaje autónomo con la guía del adulto, con el propósito de que progresivamente los niños aprendan a: verificar, cuando se establece el valor epistémico de una afirmación dentro de un sistema compartido de conocimientos; explicar, cuando se busca dar a comprender las nociones y relaciones matemáticas que están detrás de una afirmación a partir de ideas conocidas; comunicar, cuando se dan a conocer ideas (razonamientos, procedimientos, estrategias, técnicas o definiciones) sobre un tema matemático para dialogar; descubrir, cuando se llegan a establecer nuevas relaciones o comprensiones a nivel local (asociado a la tarea específica que se está resolviendo); sistematizar, cuando se llegan a establecer nuevas relaciones o comprensiones a nivel global (cuando la idea se generaliza y aplica a otros casos posibles); y refutar, una acción de carácter complejo que se relaciona con discutir, negociar y contrastar ideas matemáticas o bien rechazar las razones dadas por otro, que son las principales funciones de la argumentación las matemáticas escolares de los primeros niveles (Cornejo-Morales et al., 2021).

Validación

En esta fase del ciclo de modelización, los niños de infantil justifican el modelo propuesto mediante argumentos válidos y valoran si proporciona una solución parcial o total al problema inicial; además, algunos pueden empezar a identificar si el modelo es siempre válido o se requieren cambios para que sea generalizable a nuevas situaciones. Se trata, en definitiva, de mirar hacia atrás (Pólya, 1979), lo cual es muy importante ya que los niños tienen la posibilidad de revisar su trabajo y asegurarse de no haber cometido algún error al construir sus modelos iniciales. Para orientar este proceso se pueden plantear preguntas: p. ej.; ¿vuestra respuesta satisface lo establecido en el problema?, ¿podéis pensar cómo extender vuestra solución a un caso general? En relación a la generalización, hay que tener en cuenta que el desarrollo cognitivo de los niños de Educación Infantil condiciona en buena medida la posibilidad de llegar a la abstracción, ya que su pensamiento es eminentemente concreto y, por lo tanto, los modelos que son capaces de crear también lo son, razón por la cual Alsina, Á. et al. (2021) los denominan modelos concretos.

Exposición/presentación

Los datos de los estudios preliminares han puesto de manifiesto que, con una gestión adecuada por parte del profesorado de infantil, los niños son capaces de comunicar las decisiones tomadas a lo largo del proceso de modelización y el modelo obtenido aplicado al contexto real, usando distintos lenguajes y/o representaciones en función del nivel (dibujos, esquemas, tablas de valores, gráficos, símbolos); además, también escuchan observaciones y/o sugerencias de los compañeros y/o del maestro, las analizan críticamente y responden adecuadamente. Asimismo, a medida que avanzan de nivel, reflexionan sobre las estrategias usadas cuando no consiguen obtener una solución y lo socializan. En esta última fase, pues, a partir de las aportaciones de todos se afina el modelo inicial propuesto y se plantea un modelo común mejorado para dar solución al reto planteado. Esto implica una gestión experta por parte del profesorado, primero, planificando un escenario en el que sea posible el intercambio de modelos iniciales (p. ej., a través de una asamblea, una puesta en común, etc.); segundo, creando un ambiente de aula basado en la interacción, la negociación y el diálogo, de modo que todos los equipos puedan compartir sus modelos iniciales, explicar las estrategias utilizadas, comunicar puntos de vista contrarios, escuchar las posibles críticas que les llegan de otros compañeros, decidir entre todos qué estrategias/modelos son más eficaces; etc.; y, tercero, haciendo una gestión que invite a los niños a usar diversos tipos de representaciones para comunicar el modelo consensuado por todos.

3.3. Evaluación de actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil

Como se ha indicado, se pueden utilizar diversos instrumentos para la evaluación de las actividades de modelización matemática (COMAP y SIAM, 2019; Frejd, 2013). Aquí se propone la rúbrica instruccional REMMP (Toalongo-Guamba et al., 2020), que sirve tanto para dar a conocer cómo se desarrolla la modelización matemática como para evaluar los procesos de modelización matemática en un nivel determinado. En la Figura 3 se presentan los indicadores de Educación Infantil:

Componentes	Indicadores de Educación Infantil (3-6 años)
1. Comprensión	1.1 Relaciona el contenido de la situación problemática con sus conocimientos previos.
	1.2 Plantea preguntas referentes a la situación problemática.
	1.3 Enuncia el tipo de solución que generaría la situación problemática, por ejemplo: un patrón, un número, un gráfico, etc.
	1.4 Representa a través de dibujos las características principales de la situación problemática.
2. Estructuración	2.1 Identifica los principales elementos de la situación problemática.
	2.2 Propone ideas y/o supuestos que contribuyen a la simplificación de la situación problemática.
3. Matematización	3.1 Sustituye los elementos reales por objetos matemáticos.
	3.2 Explica la utilización de objetos matemáticos.
4. Trabajo matemático	4.1 Emplea diversas estrategias acordes a su edad que permitan proponer soluciones a la situación problemática.
	4.2 Utiliza objetos matemáticos acordes a su edad para solucionar la situación problemática.
	4.3 Obtiene un modelo matemático inicial como consecuencia del trabajo previo.
5. Interpretación	5.1 Compara la solución con la situación problemática inicial.
	5.2 Argumenta la validez de los resultados obtenidos.
6. Validación	6.1 Justifica el modelo propuesto mediante argumentos válidos.
	6.2 Valora si el modelo obtenido proporciona una solución parcial o total a la situación problemática inicial.
7. Exposición/ presentación	7.1 Explica el porqué de las decisiones tomadas a lo largo de cada una de las fases del proceso.
	7.2 Explica el modelo obtenido aplicado en la situación del contexto real, sus alcances y limitaciones mediante un lenguaje acorde a su edad.
	7.3 Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, esquemas, dibujos, gráficas, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc.
	7.4 En caso de uso de tecnología en alguna o varias fases del proceso expone claramente en qué momento, cómo y para qué la utilizó.
	7.5 Escucha observaciones y/o sugerencias planteadas por compañeros y/o profesor.
	7.6 Responde a las observaciones y/o sugerencias de compañeros y profesor utilizando un lenguaje acorde a su edad.

Figura 3: Indicadores del instrumento REMMP para la Educación Infantil. Fuente: Toalongo-Guamba et al. (2020).

Para evaluar la modelización matemática temprana en infantil a partir del instrumento REMMP, se trata de analizar la presencia o ausencia de los distintos indicadores de cada fase del ciclo de modelización, a partir de evidencias que pueden ser en forma de transcripciones de secuencias, imágenes, etc. Ello permite identificar en qué punto se encuentran los niños de un determinado nivel, y también como van desarrollando sus habilidades a medida que se van diseñando e implementado actividades de modelización matemática en el aula.

4. Descripción de la actividad “Somos lecheros”

4.1. Contextualización de la actividad

La actividad se ha desarrollado en un colegio público de Sigüeiro, en Oroso (A Coruña), con un total de 21 niños de 5 años y dos maestras (la maestra tutora y la maestra de apoyo). Ha sido registrada en vídeo por una de las maestras para su análisis posterior y se puede ver en el siguiente enlace <https://youtu.be/ZpHnJEK8aw4>. En concreto, la maestra lleva al aula cuatro envases de 500 ml, pero de distinta apariencia externa (uno más ancho, otro más alto,...) con la intención de que el alumnado observe las distintas características y adquieran un criterio para poder determinar cuál es mejor para envasar el medio litro de leche para vender en el mercado. Con este fin, la maestra establece un diálogo con el alumnado para que expresen las diferencias y semejanzas que observan. Además, durante este diálogo plantea preguntas orientadas a que el alumnado exprese sus opiniones y criterios de elección: p. ej., ¿por qué un envase y no otro si son del mismo grosor?, etc. Una vez finalizado el diálogo, los niños se organizan en equipos de 4-5 miembros y las maestras les proponen la situación problemática siguiente:

Sois lecheros y vais al mercado a vender leche. Para poder vender la leche, antes tenéis que embotellarla en envases de plástico de medio litro (500 ml). Tenemos cuatro envases de diferentes formas (una más alta, otra más ancha, etc.): ¿cuál de los envases es el mejor para embotellar la leche?

Con este planteamiento, se pretende que cada grupo explore y experimente con uno de los envases elegido al azar y formule una respuesta al problema inicial, un primer modelo; y finalmente, en una puesta común de todos los equipos, refinar el modelo con todas las aportaciones. Las principales habilidades y saberes que se trabajan son el desarrollo de hábitos de trabajo en equipo y de esfuerzo, la iniciativa personal, la curiosidad, el desarrollo de habilidades de resolución de problemas reales, la identificación y comparación de capacidades, la discriminación de conceptos de medida (alto, bajo, ancho, estrecho...) y la utilización de unidades de medida estandarizadas y unidades de medida informales en situaciones reales. La actividad se desarrolla en dos días con un total de seis fases: el primer día (fases 1 y 2) es de motivación y se lleva a cabo en una sesión que dura aproximadamente 1h; el segundo día (fases 3, 4, 5 y 6), donde transcurre la actividad propiamente de modelización matemática temprana, se desarrolla en tres sesiones durante 2h y 30m aproximadamente.

4.2. Descripción de la actividad

Día 1. Motivación

Se desarrolla en dos fases: una fase inicial para explicar un cuento en gran grupo para contextualizar el problema que se pretende plantear y, a continuación, otra fase de experimentación en pequeño grupo.

Fase 1. Lectura del cuento “A leiteira”. La actividad se inicia con la lectura del cuento en gallego “A leiteira” (La lechera), que se utiliza con elemento motivador del tema a tratar, como se ha indicado (Figura 4). Después de la lectura del cuento, a partir de preguntas de las maestras se reflexiona en gran grupo sobre el envase donde lleva la leche la lechera, su tamaño, el tipo de material, etc.

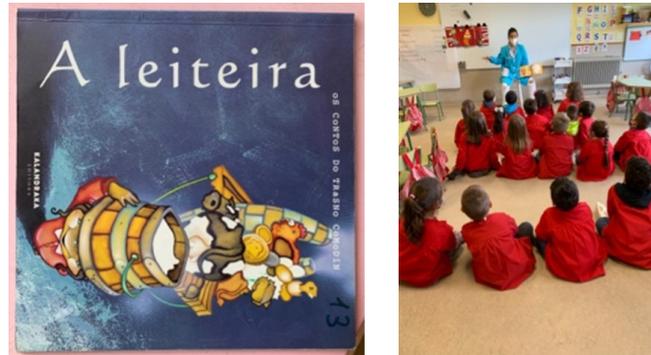


Figura 4: Lectura del cuento y diálogo. Fuente: elaboración propia.

Fase 2. Sesión de experimentación: ¿ordeñamos?. Se propone a los niños ¿ordeñar? leche para poder vender a posteriori en el mercado. Para ello, el alumnado se divide en equipos de 4-5 niños, y con agua y leche en polvo, disuelven dos cucharas de polvo en un vaso con agua, removiendo hasta conseguir la leche. A continuación, se junta la leche de los cuatro equipos y en una jarra medidora se observa la cantidad de leche que se ha ¿ordeñado? para vender en el mercado



Figura 5: Leche ¿ordeñada?. Fuente: elaboración propia.

4.3. Día 2. Ciclo de modelización

Se desarrolla en cuatro fases: comienza con una asamblea en gran grupo en la que se recuerda la actividad del día anterior y se plantea el problema expuesto; a continuación, en pequeño grupo, se experimenta con el material y, a través de un ciclo de modelización, se extrae un primer modelo; en la siguiente fase cada equipo presenta sus resultados al grupo-aula y, por último, en asamblea con todo el grupo se establece un diálogo a partir de todas las aportaciones, se extraen conclusiones y se genera un modelo más afinado.

Fase 3. Asamblea. Todo el alumnado, con la ayuda de las maestras, recuerdan la tarea del día anterior y la cantidad de leche ordeñada. A partir de preguntas formuladas por una de las maestras se invita al alumnado a reflexionar sobre los envases (tipo de material, tamaño,

forma...) necesario para llevar la leche a vender al mercado. Entre todos deciden que deben ser duros, que no se calienten, con tapadera, gordos y anchos.

Fase 4. Planteamiento del problema real “Envasando leche”. En un primer momento la maestra presenta los envases (Figura 6): cuatro botellas duras, que no se calientan, con tapadera, gordas y anchas. A partir de preguntas, invita al alumnado a observarlos y expresar en voz alta sus creencias. Además, a través de la manipulación y la comparación de aspectos físicos de las botellas, extraen algunas conclusiones: todos coinciden en que las botellas no son iguales; algunos dicen que la leche sólo cabe en las botellas que son altas o grandes, pero no en las que son pequeñas; otros dicen que cabe en todas, porque todas son grandes?

Maestra: Imaginaros que sois lecheros, y que habéis ordeñado la leche que hicimos ayer. ¿Os acordáis de cuánta leche hicimos? Dime Aa Na.

Aa Na: Cincuenta mililitros.

Maestra: ¿Cincuenta?, ¿estáis seguros?, dime Eva.

Aa E: Cincuenta mil gramos.

Maestra: ¿Alguien tiene otra idea? (Silencio?) Era un cinco, un cero? pero había otro cero más.

Ao H: Eran dos ceros.

Maestra: Entonces? (silencio) se llama quinientos mililitros, medio litro. Y la lechera si la quisiera llevar al mercado, ¿qué tendría que hacer con esta leche?

Ao H: Echarla en un tarro.

Maestra: ¿Para qué?

Ao H: Para que no se le caiga.

Maestra: Pero, ¿vale cualquier tarro para meter la leche?

Aa Na: No.

Maestra: ¿Cómo debe ser el tarro?

Aa C: De cristal.

Aa E: No, de cristal no.

Maestra: ¿Por qué no puede ser de cristal?

Aa E: Porque si cae rompe y se cae la leche.

...

Ao N: Grande.

Maestra: Grande sí, pero ¿cómo de grande?, ¿cuánta leche tenemos?, ¿alguien se acuerda? Dime Hugo.

Ao H: Quinientos mililitros.

Maestra: ¿Y tú sabes cómo son los tarros de quinientos mililitros?

Ao H: Así? (y con una mano abajo y otra encima, pero separada unos 20 cm. aproximadamente, señala que es alto).

Maestra: ¿Y como sabes que es así?

Ao H: Porque mi padre me lo dijo.

Maestra: ¿Alguien tiene otra idea de cómo es el tarro para llevar esta leche?

Aa Na: Así? (y con una mano a la derecha y otra a la izquierda separa unos 20 cm. aprox. señala que ancho), gordo.

Maestra: Ah? vale, un tarro grande, alto, gordo, ancho,?

Aa E: Con tapa.

Ao G: Y también de metal.

Aa E: Sin agujeros.

Ao M: Que sea muy duro.

- Maestra: ¿Por qué muy duro?
 Ao M: Porque si no lo rompe la leche.
 Ao H: Y si es muy duro y se cae no se rompe.
 Aa E: y por adentro que no sea de metal, sino la leche se calienta.
 Ao H: De hierro no puede ser porque se oxida.

Durante el diálogo anterior se observan diversos indicadores del ciclo de modelización:

- Comprensión: hacen uso de sus conocimientos previos (indicador 1.1.a). Por ejemplo: “Maestra: ¿Y como sabes que es así?”; Ao H: porque mi padre me lo dijo?.
- Estructuración: proponen supuestos que contribuyen a simplificar el problema (indicador 2.2.a). Por ejemplo: “Ao M: que sea muy duro; Maestra: ¿Por qué muy duro?; Ao M: Porque si no lo rompe la leche”.
- Matematización: empiezan a explicar el uso de objetos matemáticos (3.2.a). Por ejemplo: “Maestra: ¿Alguien tiene otra idea? (Silencio) Era un cinco, un cero... pero había otro cero más; Ao H: Eran dos ceros”. En este fragmento se observa que todavía no hay una comprensión del significado de 500; sino que, como se ve después, este número termina siendo una “señal” para comparar si hay más leche o menos (tiene la misma función que si se hubiera puesto una marca roja, por ejemplo).



Figura 6: Tipos de envases. Fuente: elaboración propia.

En un segundo momento de esta misma fase, la maestra formula la situación problemática indicada, en la que el alumnado adquiere un rol de lecheros. Para iniciar la resolución, reparte un envase a cada equipo junto con una tina de agua, un embudo y una jarra medidora. A partir de estos objetos y la manipulación, los cuatro equipos tratan de averiguar si su botella podría envasar toda la leche para vender en el mercado. En este primer momento, deciden utilizar agua para no perder la leche (Figura 7).



Figura 7: Midiendo la capacidad de los envases.

- Maestra: Como no son todas iguales, los cuatro envases son distintos, ¿creéis que ahí cabe nuestra leche?
- Aa Na: Sí.
- Maestra: ¿Por qué?
- Aa Na: Porque son altos.
- Maestra: Pero no son iguales, dime Ao H.
- Ao H: Son largos.
- Maestra: Y tú piensas que cabe, porque son largos.
- Aa E: Una es pequeña.
- Maestra: ¿En cuál crees que no cabe?
- Aa E: En el pequeño.
- Maestra: ¿Cuál es el pequeño?
- Aa E: El azul.
- Maestra: Ven y dime cual.
- Aa E: Este?
- Maestra: ¿Y en el resto?
- Aa E: En el resto (señalando las restantes) caben.
- Maestra: Que os parece si numeramos las botellas? (numeramos las botellas de 1 al 4).
- Maestra: Si somos lecheros, la leche que hicimos, nos cabrá en todos, en uno sí y en otros no, ¿por qué?, ¿qué opináis?
- Aa Na: En este si (la 3) porque es más alto.
- Maestra: Y en las otras? ¿no?
- Aa Na: Bueno, en estas dos sí.
- Maestra: Que números tienen.
- Aa Na: La 3 y la 4.
- Maestra: Entonces, Aa Na dice que nuestra leche cabe en la 3 y 4, ¿por qué?, ¿qué les pasa a esas botellas con respecto a la 1 y la 2?
- Aa Na: Que estos (cogiéndolos) son más altos.
- Maestra: Aa Nu, ¿tú qué opinas?
- Aa Nu: Coge (la 3 y 4), y dice en estos porque son más grandes.
- Maestra: Y en los otros, ¿por qué no?
- Aa Nu: Porque son pequeños.
- Maestra: Y, ¿por qué son pequeños?, cuéntame.
- Aa Nu: Porque tienen rayas las botellas.
- Maestra: ¿Tú qué opinas Ao M?
- Ao M: Opino que en todos cabe la leche.
- Maestra: ¿Por qué crees eso?
- Ao M: Porque todos son más grandes.
- Ao H: Pero la botella 1 no puede ser grande (indicando con las manos que es baja).
- Ao M: El 3 lo veo el más estirado. Y el 1 el más pequeño.
- Maestra: ¿Y tú Ca?
- Aa Ca: En este, este y este (no señala 1).
- Maestra: En todos menos el 1, ¿por qué?
- Aa Ca: Porque son más grandes.
- Maestra: ¿Y qué le pasa al 1 con respecto a los otros?
- Aa Ca: (Junta las botellas 3 y 1, y comparándolas una es más alta? señala) Mira?

En el diálogo anterior se puede apreciar evidencias correspondientes a la matematización y al trabajo matemático que empieza a realizar el alumnado:

- Matematización: sustituyen elementos reales por objetos matemáticos (indicador 3.1). Por ejemplo: “Aa Na: La 3 y la 4” (refiriéndose a dos de las botellas); explican el uso de objetos matemáticos (indicador 3.2.). Por ejemplo: “Maestra: Aa Nu, ¿tú qué opinas?; Aa Nu: Coge (la 3 y 4), y dice en estos porque son más grandes; Maestra: Y en los otros, ¿por qué no?; Aa Nu: Porque son pequeños...”
- Trabajo matemático: usan estrategias y objetos acordes a su edad para empezar a solucionar el problema (indicadores 4.1.a. y 4.1.b). Por ejemplo: “Aa Ca: En este, este y este (no señala 1); Maestra: En todos menos el 1, ¿por qué?; Aa Ca: Porque son más grandes; Maestra: ¿Y qué le pasa al 1 con respecto a los otros?; Aa Ca: (Junta las botellas 3 y 1, y comparándolas una es más alta... señala) Mira...”

Seguidamente, por equipos, siguen explorando e investigando:

Equipo azul

- Maestra: ¿Ya llenasteis toda la botella?
 Aa C: Sí.
 Maestra: Y que tenemos que hacer para saber ¿cuánta agua cabe ahí?
 Aa C: La jarra, la echamos a la jarra.
 Maestra: Pues cogedla, ¿y qué tenéis que hacerla?
 Aa E: Abrirla (botella) y meterla.
 Maestra: Y ahora, para saber cuánta hay, ¿qué hay que hacer?
 Aa E: (Indicando los dedos los números de donde llega la raya)
 Aa C: Hasta aquí.
 Aa E: Un cinco, un cero y un cero.
 Aa C: Un cinco y dos ceros.
 Maestra: ¿Entonces?
 Aa C: Cabrá la leche.
 Maestra: ¿Sí?, ¿por qué?
 Aa C: Porque es el mismo número.

Equipo verde

- Maestra: Llegó al final, ¿ya llenasteis?
 Ao M: No, un poquito más.
 Maestra: Pues venga, ¿lo añadís?
 Ao Ru: Cinco, cero, cero.
 Maestra: Y eso que significa, ¿cabe o no cabe?
 Ao M: Cabrá un poco?
 Maestra: ¿Por qué un poco?, ¿cuánta leche teníamos?
 Ao M: La misma.
 Maestra: Entonces?
 Ao M: Cabrá.

Equipo Rojo

- Ao H: Tú sujeta AaNu y yo cojo agua.
 Maestra: ¿Está llena?
 Ao Ma: Sí.
 Maestra: Y entonces ahora, ¿qué hay que hacer?
 Aa Ma: Echarla en la jarra.
 Ao Hu: Vamos a ver el número. Un cinco y dos ceros.
 Maestra: ¿Cabe o no cabe?
 Ao Hu: Sí que cabe.

Equipo amarillo

- Ao D: (coge agua y de tanto que echa, vierte la botella).
 Aa Na: Se acabó la botella.
 Maestra: ¿Qué está pasando?
 Aa Na: Ya no cabe más leche.
 Maestra: ¿Está llena?
 Aa Na: Sí.
 Maestra: Y ahora, ¿qué tenéis que hacer para saber cuánta hay?
 Aa Na: Meterla aquí (señalando la jarra medidora).
 Maestra: ¿Cuánta capacidad tiene esa botella entonces?
 Aa Na: Ah, está en cincuenta mililitros.
 Maestra: ¿Está en cincuenta?
 Ao H: Un 5 y dos 0.
 Maestra: Entonces, ¿qué número es?
 Ao H y AaNu: Quinientos mililitros.
 Maestra: Cabe o no cabe entonces la leche.
 Aos: Sí.

Como se puede apreciar, en los distintos equipos se observan evidencias correspondientes al trabajo matemático (indicador 4.2.a), la interpretación (indicador 5.2.a) y la validación (indicador 6.1.a) que llevan a cabo durante el proceso de modelización. Por ejemplo: “*Maestra: Y ahora, para saber cuánta hay, ¿qué hay que hacer?; Aa E: (Indicando los dedos los números de donde llega la raya); Aa C: Hasta aquí; Aa E: Un cinco, un cero y un cero; Aa C: Un cinco y dos ceros; Maestra: ¿Entonces?; Aa C: Cabrá la leche?. Maestra: ¿Sí?, ¿por qué?; Aa C: Porque es el mismo número*”.

Fase 5. Presentación de resultados.

Cada equipo presenta al grupo aula sus resultados:

Maestra: Teníamos cuatro envases distintos, y no sabíamos si podríamos llevar o no nuestra leche al mercado, porque igual no nos cabía, perdíamos leche, y no podíamos venderla toda. Entonces, después de que hayáis comprobado con el agua, cada equipo va a contarnos que capacidad tiene su envase, cuánta leche cabe en su envase; y si cree o no cree que cabe nuestra leche, y que pueden ser los mejores lecheros, porque la venderán toda y ganarán más dinero.

Equipo azul (botella 1)

- Maestra: La leche cabría en vuestro envase.
 Aa E: Si porque llega a un 5 y dos 0.
 Maestra: Y ¿cuánta leche teníamos?
 Aa E: Dos 0 y un 5.

Equipo verde (botella 2)

Maestra: Vosotros creéis que la leche cabe en vuestro envase?
 Ao Ma: Pues claro.
 Maestra: ¿Por qué?
 Ao Ru: Aquí 5, 0, 0 y allí (señalando leche) 5, 0, 0.
 Ao Ma: La jarra más grande (señalando ancho) y más baja; y el envase más pequeño, pero llega hasta lleno.

Equipo rojo (botella 3)

Maestra: Y en esta botella, ¿se puede envasar la leche?, ¿por qué?
 Aa Nu: Si, porque mide 500 mililitros.
 Maestra: Y cuanta leche tenemos.
 Aa Nu: 500 mililitros.
 Maestra: Que bien, iguales.

Equipo amarillo (botella 4)

Aa Lu C: Sí cabe, porque cabe 500 ml. de agua y tenemos 500 ml de leche.
 Maestra: Ah cabe, y os ¿sobra espacio?, ¿os sobra algo?
 Aa Lu C: No.
 Maestra: ¿Por qué?
 Aa Lu C: 500 y 500.
 Maestra: Lo mismo.
 Aa Na: La podemos llevar.
 Maestra: En la botella 3 cabe, en la botella 4 cabe, en la 2 cabe, en la 1 cabe,? entonces, ¿qué ocurre?
 Ao Hu: Que están bien.
 Maestra: Eran todas distintas, diferentes, pero en todas cabe la leche, ¿qué ocurre en las botellas?
 Aa Na: Que la 1 es más baja pero también más gorda.
 Maestra: ¿Comprobamos si caben nuestros 500 ml. de leche?

De nuevo, durante la presentación de los resultados por equipos, se evidencian indicadores correspondientes al trabajo matemático (indicador 4.3.a), la interpretación (indicador 5.2.a) y la validación principalmente (indicador 6.1.a). Además, la maestra provoca que los niños valoren si el modelo obtenido proporciona una solución parcial o total (indicador 6.2.a) y, finalmente, que expliquen el modelo obtenido (indicador 7.2.a), lo cual corresponde a la exposición/presentación. Por ejemplo: “*Maestra: En la botella 3 cabe, en la botella 4 cabe, en la 2 cabe, en la 1 cabe,... entonces, ¿qué ocurre?; Ao Hu: Que están bien; Maestra: Eran todas distintas, diferentes, pero en todas cabe la leche, ¿qué ocurre en las botellas?; Aa Na: Que la 1 es más baja pero también más gorda*”.

Seguidamente, por equipos, comprueban con el embudo, si la totalidad de leche cabe en sus respectivos envases (botellas). Y comprueban que todas tienen 500 ml de capacidad, porque en todas cabe la leche (Figura 8).

Fase 6. Conclusiones.

En asamblea, una vez que han observado y escuchado los resultados de los cuatro equipos, a través de preguntas formuladas por la maestra se invita a todo el alumnado a refinar el modelo.



Figura 8: Comprobando resultados con la leche..

- Maestra: Teníamos cuatro envases distintos y estábamos buscando el mejor, el más adecuado para llevar los 500 ml de leche. Pero comprobamos, a través del agua que, aunque el aspecto fuera distinto, ¿qué le ocurre a la capacidad?
- Ao Hu: Que podía haber toda la leche.
- Maestra: Claro, la 1 era baja, pero es ancha.
- Aa C: Y la 4 es alta, pero delgada. Por eso cabe en todas.
- Maestra: Entonces, que podemos concluir.
- Aa C: Que cabe en todas.
- Aa E: Porque medimos y cabe en todas.
- Aa Na: Todas tienen la misma cantidad, aunque sea distintas.
- Maestra: Todas tienen la misma capacidad.
- Aa Lu C: Hay que medir.
- Aa E: Tenemos que fijarnos en todo.
- Ao H: Y todos los equipos las podríamos llevar al mercado.
- Aa A: Todos podemos ser los “más mejores” lecheros y ganar el dinero.
- Maestra: Muy bien, la capacidad no atiende solo a la altura, sino también al ancho. Por eso al principio no teníamos claro que envase era el mejor, pero genial, ahora ya sabemos que hay que fijarse no solo en un aspecto, sino en dos.

Por último, de modo individual, cada niño registra el modelo obtenido (Figura 9).



Figura 9: Registro individual del modelo obtenido. Fuente: elaboración propia.

Se observa que, durante la obtención de conclusiones, los niños consiguen afinar el modelo concreto que les permite ir a vender la misma cantidad de leche en el mercado con los

distintos envases, evidenciándose además diversos indicadores del proceso de modelización correspondientes a la exposición/presentación: explican el modelo obtenido (indicador 7.2.a), usan representaciones (indicador 7.3.a) y escuchan observaciones de los compañeros y la maestra (indicador 7.5.a). Por ejemplo: *“Maestra: Efectivamente, en todas cabe... Y nosotros al principio no creíamos eso. ¿Qué nos pasaba?; Aa C: Que solo nos fijábamos en lo alto que es; Maestra: Claro; Aa C: Pero también hay que fijarse en si es gordo, ancho; Maestra: Claro; Aa C: Entonces, aunque sea distintas, puede caber en todos”*.

5. Consideraciones finales

En este artículo se han descrito diversas ideas clave y orientaciones didácticas para que el profesorado de infantil pueda diseñar e implementar actividades de modelización matemática temprana. Por un lado, este propósito responde a la necesidad de que, desde las primeras edades, los niños lleven a cabo actividades cuyo eje sea interpretar y trabajar matemáticamente con el entorno a través de la resolución de problemas reales, en contraposición a una enseñanza más descontextualizada y procedimental (Alsina, Á., 2020); por otro lado, teniendo en cuenta que la resolución de problemas tiene un papel relevante en los currículos de infantil de diversos países, es preciso proporcionar ayudas al profesorado de esta etapa para evitar que este proceso matemático se entienda exclusivamente como un marco para hacer ejercicios de aplicación y, en su lugar, se interprete como un escenario para construir nuevo conocimiento matemático, tal como relató muy bien Puig (1996). En este sentido, por ejemplo, en el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil se indican, para el segundo ciclo (3-6 años), diversos saberes básicos en torno a la resolución de problemas: “estrategias para proponer soluciones: creatividad, diálogo, imaginación y descubrimiento” o “Procesos y resultados. Hallazgos, verificación y conclusiones” (p. 14586), refiriéndose a la resolución de problemas como un medio para lograr otros fines o como un fin en sí mismo. Tomando como punto de partida el ciclo de modelización matemática de Blum y Leiss (2007) y los hallazgos obtenidos a partir del análisis de los procesos de modelización matemática temprana realizados por niños de infantil (Alsina, Á. y Salgado, 2021a, 2021b, en prensa; Alsina, Á. et al., 2021; Toalongo-Guamba et al., 2021) se han descrito orientaciones didácticas para el diseño, implementación y evaluación de actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil (3-6 años):

- Diseño de actividades de modelización matemática temprana: se han descrito diversos aspectos como por ejemplo cómo provocar la motivación inicial, qué características debería tener la situación problemática que pretende plantearse o bien otras cuestiones organizativas como la distribución del alumnado, la preparación del material necesario, la documentación de la actividad, etc.
- Implementación de actividades de modelización matemática temprana: se han descrito algunas recomendaciones para guiar a los niños durante las distintas fases del ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007), recordando que pueden partir de un punto del ciclo sin necesidad de seguir un orden establecido: comprensión, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación, exposición/presentación.
- Evaluación de actividades de modelización matemática temprana: se ha propuesto el uso de los indicadores de infantil de la rúbrica instruccional REMMP (Toalongo-Guamba et al., 2020), que sirve tanto para dar a conocer cómo se desarrolla la modelización matemática como para evaluar los procesos de modelización matemática, teniendo en cuenta que también es posible utilizar otros instrumentos (COMAP y SIAM, 2019; Frejd, 2013).

Con el propósito de ejemplificar estas orientaciones didácticas, se ha descrito y analizado la actividad de modelización matemática temprana “Somos lecheros”, implementada en un grupo de 21 niños de 5 años. A partir de una motivación inicial mediante un cuento y el planteamiento de un reto en el que los niños han adquirido un rol de vendedores de leche, se ha evidenciado el proceso de construcción de un modelo concreto durante el proceso de traducción entre contextos del mundo real y las matemáticas, a través de las fases del ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007): comprensión, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación, exposición/presentación.

En el futuro será necesario diseñar e implementar nuevas actividades de modelización matemática temprana con el propósito tanto de determinar con más precisión las habilidades de los niños de infantil como para proporcionar nuevas orientaciones al profesorado no sólo de esta etapa, sino también de etapas educativas posteriores, puesto que la continuidad de estas actividades de modelización a lo largo de la escolaridad puede contribuir a que el alumnado dé sentido a las matemáticas y tome conciencia de su diversidad de aplicaciones en el mundo real.

Bibliografía

-  [Alsina Á. \(2006\).](#)
Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.
Barcelona: Editorial Octaedro–Eumo.
-  [Alsina Á. \(2012\).](#)
Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil.
Edma 0–6: Educación Matemática en la Infancia, 1(1), 1–14.
-  [Alsina Á. \(2014\).](#)
Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave.
Números 86, 5–28.
-  [Alsina Á. \(2020\).](#)
Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos.
Saber & Educar, 28, 1–13.
-  [Alsina Á. \(en prensa\).](#)
Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años).
Graó.
-  [Alsina Á., Toalongo-Guamba X., Trelles-Zambrano C., y Salgado M. \(2021\).](#)
Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: un análisis comparativo en 3 y 5 años.
Cuadrante, 30(1), 74–93.
<https://doi.org/10.48489/quadrante.23654>
-  [Alsina Á. y Planas N. \(2008\).](#)
Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible.
Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

-  [Alsina Á. y Salgado M. \(2019\).](#)
Descubriendo la medida en un contexto de interacción, negociación y diálogo: un estudio de caso en Educación Infantil. PNA.
Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 14(1), 1–21.
<https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.8722>
-  [Alsina Á., y Salgado M. \(2021a\).](#)
Introduciendo la Modelización Matemática Temprana en Educación Infantil: un marco para resolver problemas reales.
Modelling in Science Education and Learning, 14(1), 33–56.
<https://doi.org/10.4995/mse.2021.14024>
-  [Alsina Á., y Salgado M. \(2021b\).](#)
Understanding early mathematical modelling: First steps in the process of translation between real-world contexts and mathematics.
International Journal of Science and Mathematics Education.
<https://doi.org/10.1007/s10763-021-10232-8>
-  [Alsina Á., y Salgado M. \(en prensa\).](#)
Iniciando la modelización matemática temprana en Educación Infantil: ¿cómo piensan y qué hacen los niños de 3 años?
Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia.
-  [Alsina C. \(2011\).](#)
Modelización para formar ciudadanos.
Modelling in Science Education and Learning, 4(1), 5–14.
<https://doi.org/10.4995/mse.2011.3051>
-  [Andrade H. G. \(2000\).](#)
Using rubrics to promote thinking and learning.
Educational Leadership, 57(5), 13–18.
-  [Bliss K. y Libertini J. \(2019\).](#)
What is mathematical modeling?
En S. Garfunkel & M. Montgomery (Eds.), Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education (pp. 7–21).
Consortium for Mathematics and Its Applications and Society for Industrial and Applied Mathematics.
-  [Blum W. y Borromeo-Ferri R. \(2009\).](#)
Mathematical Modelling: Can I Be Taught and Learn?
Journal of Mathematical Modeling and Application, 1(1), 45–58.
-  [Blum W. y Kirsch A. \(1989\).](#)
The problem of the graphic artist.
En W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser-Meßner, y L. Profke (Eds.), Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics (pp. 129–135). Ellis Horwood.
-  [Blum W. y Leiß D. \(2007\).](#)
How do students and teachers deal with modelling problems?
En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics (pp. 222–231).
Ellis Horwood.

-  [Borromeo-Ferri R. \(2018\).](#)
Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.
Springer.
-  [Carreira S., Amado N. y Lecoq F. \(2011\).](#)
Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge.
En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling (pp. 199-210). Springer.
-  [Common Core State Standards Initiative \[CCSSI\] \(2010\).](#)
Common Core State Standards for Mathematics.
http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf
-  [Consortium for Mathematics and its applications \[COMAP\] y Society for industrial and applied mathematics \[SIAM\]. \(2019\).](#)
Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education.
S. Garfunkel, & M. Montgomery, Edits.
-  [Cornejo-Morales C., Goizueta M., y Alsina Á. \(2021\).](#)
La Situación Argumentativa: un modelo para analizar la argumentación en matemática infantil.
PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 15(3), 159–185.
-  [EduGAINS \(2011\).](#)
Asking effective questions.
http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/cbs_askingeffectivequestions.pdf
-  [Ferrando I. \(2019\).](#)
Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.
En J.M^a. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M^a. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.).
Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 43–64). SEIEM.
-  [Fredj P. \(2013\).](#)
Modes of modelling assessment-a literature review.
Educational Studies in Mathematics, 84(3), 413–438.
-  [Geiger V. \(2011\).](#)
Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling.
En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling ICTMA 14 (pp. 305–314). Springer.
-  [Girnat B., y Eichler A. \(2011\).](#)
Secondary Teacher's Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics.
En Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling ICTMA 14 (pp. 75–84). Springer.
-  [Greefrath G. \(2011\).](#)
Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling – Overview.
En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling ICTMA 14 (pp. 301–304). Springer.

-  [Greefrath G. \(2019\).](#)
Mathematical modelling – Background and current projects in Germany.
En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.),
Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 23–41). SEIEM.
-  [Greefrath G., Kaiser G., Blum W., & Borromeo Ferri R. \(2013\).](#)
Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe.
In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe.* Wiesbaden: Springer Spektrum.
-  [Haury D. \(2001\).](#)
Literature-Based Mathematics in Elementary School.
Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1, 1–2.
-  [Hoyuelos A. \(2007\).](#)
Documentación como narración y argumentación.
Aula de Infantil, 39, 5–9.
-  [Kaiser G. \(1995\).](#)
Realitätsbezüge im Mathematikunterricht - Ein Überblick über die aktuelle und.
En G. Graumann, T. Jahnke, G. Kaiser, y J. Meyer (Eds.), *Materialen für einen realitätsbezogenen* (pp. 64–84). Franzbecker.
-  [Kaiser G., Blomøj M. y Sriraman B. \(2006\).](#)
Towards a didactical theory for mathematical modeling.
ZDM Mathematics Education, 38(2), 82–85.
-  [Kaiser G., Blum W., Borromeo Ferri R. y Stillman G. \(Eds.\) \(2011\).](#)
Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.
Springer.
-  [Maaß K. \(2004\).](#)
Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie.
Franzbecker.
-  [Ministry of Education Singapore \(2012\).](#)
Mathematics Syllabus. Primary One to Six.
Curriculum Planning and Development Division.
-  [National Council of Teachers of Mathematics \[NCTM\] \(2003\).](#)
Principios y estándares para la educación matemática.
Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.
-  [National Research Council \[NRC\] \(2001\).](#)
Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.
The National Academies Press.
-  [Ortlieb C. P. \(2004\).](#)
Mathematische Modelle und Naturerkenntnis.
Mathematica didactica, 27(1), 23–40.
-  [Pólya G. \(1979\).](#)
Cómo plantear y resolver problemas.
Trillas.

-  Puig L. (1996).
Elementos de resolución de problemas.
Comares.
-  Reeuwijk M.V. (1997).
Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas.
UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 12, 9–16.
-  Stillman G. A., Blum W. y Biembengut M. S. (Eds.) (2015).
Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences.
Springer.
-  Stillman G. A., Blum W. y Kaiser G. (Eds.) (2017).
Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education.
Springer.
-  Stillman G. A., Kaiser G, Blum W. y Brown J. P. (Eds.) (2013).
Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice.
Springer.
-  Stillman G. A., Kaiser G. y C.E. (Eds.) (2020).
Sense-making in Mathematical Modelling and Applications Educational Research and Practice.
Springer.
-  Schukajlow S., Kaiser G. y Stillman G. (2018).
Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: A survey on the current state-of-the-art.
ZDM, 50, 5–18.
-  Toalongo-Guamba X., Alsina Á., Trelles-Zambrano C. y Salgado M. (2021).
Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil.
CADMO, Giornale Italiano di Pedagogia Sperimentale 1/2021, 81–98.
<https://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>
-  Toalongo-Guamba X., Trelles-Zambrano C. y Alsina Á. (2020).
Design, construction and validation of a rubric to evaluate mathematical modeling in the different educational stages.
Artículo entregado para la publicación.
-  Trelles-Zambrano C. y Alsina Á. (2017).
Nuevos conocimientos para una educación matemática del S. XX1: panorama internacional de la modelización en el currículo.
Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 51, 140–163.
-  Vorhölter K., Kaiser G. y Borromeo Ferri R. (2014).
Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics education.
En Y. Li, E. A. Silver, y S. Li (Eds.), *Transforming Mathematics Instruction* (pp. 21–36). Springer.