

# Análisis de la implementación de un modelo hidrodinámico tridimensional al flujo de un cauce natural

## *Analysis of the implementation of a three-dimensional hydrodynamic model in the flow of a natural channel*

Ochoa, S.<sup>a1</sup>, Reyna, T.<sup>a2</sup>, García, M.<sup>b1</sup>, Herrero, H.<sup>b2</sup>, Díaz, J. M.<sup>b3</sup> y Heredia, A.<sup>b4</sup>

<sup>a</sup>Universidad Nacional de Córdoba, Gómez Clara 1191 B° Rogelio Martínez X5000HFE.  
E-mail: <sup>a1</sup> saog2105@hotmail.com, <sup>a2</sup> teresamaria.reyna@gmail.com

<sup>b</sup>Centro de Estudios y Tecnología del Agua (CETA), Av. Filloy S/N Ciudad Universitaria X5016CGA.  
E-mail: <sup>b1</sup> cgarcia2mjc@gmail.com, <sup>b2</sup> hsherrero@yahoo.com.ar, <sup>b3</sup> jmdiazlozada@gmail.com, <sup>b4</sup> aheredil@hotmail.com

Recibido: 18/11/2016

Aceptado: 05/04/2017

Publicado: 28/04/2017

**Citar como:** Ochoa, S., Reyna, T., García, M., Herrero, H., Díaz, J.M. y Heredia, A. 2017. Analysis of the implementation of a three-dimensional hydrodynamic model in the flow of a natural channel. *Ingeniería del agua*, 21(2), 103-117. <https://doi.org/10.4995/la.2017.6885>

---

## RESUMEN

En el análisis de la hidrodinámica fluvial están presentes una gran cantidad de variables, que al ser consideradas en la solución de las ecuaciones de estado describen el comportamiento del flujo. En este trabajo, se presenta la solución tridimensional de las ecuaciones de Navier Stokes promediadas por Reynolds con un modelo de cierre para la turbulencia  $K-\xi$ ; solución aplicada en el flujo del río Tercero o Ctlamochita de la provincia de Córdoba, Argentina. La herramienta de cálculo para la solución de las ecuaciones de estado es el modelo SSIIM, un software libre orientado a la mecánica de fluidos computacional desarrollado en la Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología. La importancia de analizar el flujo en forma tridimensional contrasta con la dificultad de su solución numérica, por lo que se ha descrito el algoritmo SIMPLE aplicado en este trabajo para la solución de las ecuaciones de estado.

**Palabras clave** | SSIIM; método SIMPLE; ADCP.

---

## ABSTRACT

*In the analysis of river hydrodynamics a great quantity of variables are present, this variables when considered in solving the state equations describe the flow behavior. In this work is presented the three-dimensional solution of the equations of Navier Stokes averaged by Reynolds with a model of closing for the turbulence  $K-\xi$ ; solution applied in the flow of the river Tercero or Ctlamochita in the province of Córdoba, Argentina. The calculation tool for solving equations of state is the SSIIM model, a free software oriented to the computational fluid dynamics developed at the Norwegian University of Science and Technology. The importance of analyzing the flow in three-dimensional form contrasts with the difficulty of their numerical solution, therefore was described the SIMPLE algorithm applied in this work for the solution of the equations of state.*

**Key words** | SSIIM; SIMPLE method; ADCP.

## INTRODUCCIÓN

Estudios de cauces naturales se han llevado a cabo por la humanidad durante siglos para tratar de predecir las variables de las corrientes y en forma conjunta con la construcción de distintas obras hidráulicas extraer beneficios de los sistemas fluviales en busca del desarrollo de las sociedades. Es así que las ciudades más prósperas en el mundo han sido fundadas cerca de las riberas (Julien, 2002).

Debido a que los fenómenos en flujos a superficie libre que ocurren en la naturaleza son de una complejidad tal que difícilmente pueden ser resueltos con métodos analíticos exactos; se busca aplicar modelos y simulaciones con la utilización de técnicas experimentales y numéricas que permitan la determinación de las variables que caracterizan el flujo en ríos. El flujo libre se presenta cuando los líquidos fluyen por la acción de la gravedad y solo están parcialmente confinados por un contorno sólido.

La mecánica de fluidos computacional aplicada a la hidrodinámica de ríos precisa del uso de la teoría hidráulica del flujo en lámina libre y de los métodos numéricos para resolver las ecuaciones de conservación de masa y momento. Dado que los modelos numéricos son una representación simplificada de la realidad, un aspecto fundamental de la simulación numérica del flujo en ríos es la representación adecuada de la batimetría del cauce y sus llanuras de inundación. Existen herramientas de modelización numérica que, a partir de la discretización espacial adecuada, permiten realizar simulaciones con una aproximación unidimensional (1D), bidimensional (2D) o tridimensional (3D).

Dentro del contexto de aplicar técnicas matemáticas y numéricas para describir y analizar el comportamiento hidráulico de un cauce natural, se planteó modelar en forma tridimensional la hidrodinámica de un tramo de río en la provincia de Córdoba, Argentina. El estudio se centra en el tramo medio del río Tercero o Ctalamochita ubicado en la localidad de Villa María al sur-este de la provincia.

## Presentación de Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es implementar un modelo hidrodinámico tridimensional (SSIIM) para representar el comportamiento hidráulico del río Tercero o Ctalamochita en su paso por la ciudad de Villa María. De este objetivo principal se desprenden los siguientes objetivos complementarios:

- Construir un modelo digital de terreno para reproducir el dominio en forma de celdas tridimensionales por medio de una malla estructurada que permita realizar la discretización espacial de las ecuaciones de estado que representan el flujo.
- Validar el flujo del río Tercero implementado al modelo hidrodinámico tridimensional SSIIM, la validación se realizará con el respaldo de variables obtenidas en campañas de medición con un instrumento ADCP en el dominio de aplicación correspondiente al tramo medio del río Tercero en su paso por la ciudad de Villa María.
- Analizar las variables hidráulicas del flujo tridimensional en el modelo validado y documentar que al no incluir procesos relevantes en la simulación hidrodinámica de un cauce natural se verán directamente afectados los resultados para las distintas condiciones de flujo.

## PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO Y NUMÉRICO

### Modelo Hidrodinámico SSIIM

El esquema de cálculo seleccionado para la investigación es el basado en el algoritmo SSIIM (*Sediment Simulation In Intakes with Multiblock Option*). SSIIM es una herramienta de mecánica de fluidos computacional para la simulación de variables de flujo tridimensional y transporte de sedimentos en flujos con superficie libre. El software es de libre distribución y tiene algunas librerías en código abierto para el desarrollo de metodologías de cálculo diferentes a las presentadas en el algoritmo SSIIM original.

El modelo SSIIM calcula las variables del flujo y transporte de sedimentos en ríos, canales y embalses. El algoritmo de cálculo fue desarrollado por el Dr. Nils Reidar Olsen, profesor de la Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología (NTNU: Norwegian University of Science and Technology). Las ecuaciones tridimensionales de Navier Stokes promediadas por Reynolds son planteadas con un modelo de cierre de la turbulencia  $K-\zeta$ , en total seis ecuaciones diferenciales son resueltas (ecuación de continuidad, tres ecuaciones de conservación del momento para el caso tridimensional y las dos ecuaciones para el cierre de la turbulencia):

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i + \bar{u}_j \bar{u}_i')}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\} + E_T - \zeta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right\} + C_1 \frac{\zeta}{K} E_T - C_2 \frac{\zeta^2}{K} \quad (4)$$

Donde las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) están escritas en forma tensorial y representan la ecuación de conservación de la masa, las ecuaciones de conservación del momento para las tres direcciones del eje cartesiano ( $x - y - z$ ), la ecuación de cierre de la difusión molecular de la turbulencia y la ecuación de cierre de la disipación de la energía cinética turbulenta. En las ecuaciones presentadas,  $\bar{u}_j$  representa las variables de velocidad promedio en las tres direcciones ( $\bar{u}_1 = u, \bar{u}_2 = v, \bar{u}_3 = w$ ),  $x_j$  representan las coordenadas de los ejes tridimensionales ( $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ),  $\partial t$  el paso de tiempo,  $\bar{u}_j'$  las fluctuaciones de la velocidad debidas a la turbulencia del flujo,  $\rho$  la densidad del agua,  $\partial \bar{p}$  el término de la presión piezométrica del flujo,  $\nu$  la viscosidad cinemática del agua,  $K$  la energía cinética turbulenta del flujo,  $\nu_t$  la viscosidad cinemática debida a los vórtices,  $\sigma_K$  el coeficiente de Schmidt,  $E_T$  la tasa de producción de energía cinética turbulenta desde el flujo debido a su interacción con los esfuerzos de Reynolds,  $\zeta$  la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta,  $C_1$  y  $C_2$  son constantes empíricas que presentan valores calibrados de aproximadamente  $C_1 = 1.44$  y  $C_2 = 1.92$  (García y Niño, 2003).

El modelo SSIIM se divide en tres módulos para el cálculo: El de ingreso y visualización de datos de entrada (*Pre-Processor*), el de cálculo del flujo (*Solver*) y el de visualización y análisis de resultados (*Post-Processor*). En el módulo de ingreso y visualización de datos de entrada se tiene una herramienta gráfica para la construcción y edición de la malla de cálculo, así como, una herramienta gráfica para el ingreso de las condiciones de contorno del flujo (caudal de entrada, profundidad de agua en los contornos, condiciones de pared y rugosidad) (Olsen, 2014).

## Solución Numérica

El modelo SSIIM resuelve las ecuaciones promediadas por Reynolds con un modelo de cierre de la turbulencia  $K-\zeta$  usando el Método de Volúmenes Finitos con un esquema de cálculo SIMPLE. Las siglas SIMPLE vienen de la abreviación en idioma inglés de Método Semi-Implicito para Ecuaciones Vinculadas a la Presión (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*). El propósito del método es encontrar un campo de presiones desconocido. El planteamiento principal es calcular un valor de presión inicial para que junto con el error en la continuidad obtener una ecuación para la corrección del campo de presiones y cálculo de las incógnitas. Cuando esta corrección vinculada al campo de presión del flujo es adherida, la ecuación de continuidad es satisfecha (Olsen, 2012).

Para derivar las ecuaciones de corrección vinculadas a la presión se usará una notación especial. Las variables calculadas inicialmente y que no satisfacen la continuidad del flujo son escritas con el índice \*, las variables de corrección son escritas con el índice ' y las variables después de la corrección no tendrán ningún superíndice:

$$P = P^* + P' \quad (5)$$

$$U_j = U_j^* + U_j' \quad (6)$$

El subíndice  $j$  de la velocidad, en la ecuación (6), representa la dirección con respecto a los ejes cartesianos; siendo  $j=1=x$ ,  $j=2=y$ ,  $j=3=z$ . Tomando en cuenta los valores supuestos del campo de presión, la versión en forma discreta de la ecuación de momento de Navier Stokes es:

$$a_p U^* = \sum_{nb} a_{nb} U^*_{nb} + B_{u_j} - \left( A_j^i \frac{\partial P^*}{\partial \chi} \right) \quad (7)$$

En la ecuación (7),  $U^*$  representa la velocidad supuesta asociada al campo de presiones que se desea resolver,  $a_p$  es el factor de peso de los términos difusivos-convectivos de la ecuación de Navier Stokes en la celda de cálculo,  $\sum_{nb} a_{nb} U^*_{nb}$  representa la sumatoria del factor de peso asociado a la influencia de los términos difusivos-convectivos de las celdas vecinas, en el término  $B_{u_j}$  se encuentran los términos de presión y difusos de la ecuación de momento,  $A_j^i$  representa el área de la superficie de una cara de la celda asociada a los índices "j i" y  $\chi$  es el índice que representa un sistema de ejes locales no ortogonales. De forma similar, la versión en forma discreta de la ecuación de momento de Navier Stokes para las variables corregidas es:

$$a_p U = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + B_{u_j} - \left( A_j^i \frac{\partial P'}{\partial \chi} \right) \quad (8)$$

Al restar la ecuación (7) con la ecuación (8), y tomando en cuenta la ecuación (6); se obtiene la ecuación para la corrección de la velocidad asociada al campo de presiones supuesto:

$$U_j' = \left( \frac{A_j^i}{(a_p - \sum_{nb} a_{nb})} \frac{\partial P'}{\partial \chi^i} \right) \quad (9)$$

En la ecuación (9), el término de la corrección de la presión es desconocido, por lo que se usa la ecuación de continuidad en forma discreta para obtener la corrección de velocidad en cada elemento de la malla:

$$\sum_{nb} A_j^i U_j' = 0 \quad (10)$$

Si se resuelve la ecuación (9) con la ecuación (10), se obtiene la ecuación en forma discreta para la corrección de la presión:

$$a_p P' = \sum_{nb} a_{nb} P'_{nb} + b \quad (11)$$

En la ecuación (11),  $b$  representa el término de diferencial de la corrección de velocidad que se calcula a partir de la continuidad del flujo. La ecuación se resuelve con los términos de velocidad hasta que la diferencia del término  $b$  tienda a cero. Se observa que el método SIMPLE no resuelve una ecuación de presión en forma directa, solamente resuelve una ecuación para la corrección de esta presión y la variable del campo de presión se obtiene por acumulación iterativa de los términos de la corrección. A menudo, el método SIMPLE puede ser inestable al calcular el campo de presión del flujo, por lo que, el término de la corrección de la presión suele ser multiplicado por un valor menor a la unidad que es conocido como un coeficiente de relajación del método. El coeficiente de relajación óptimo depende del patrón del flujo considerado y puede ser calibrado para mejorar las tasas de convergencia en la solución de las ecuaciones diferenciales del flujo (Patankar, 1980).

Para el cálculo de la altura de la superficie de agua se emplea un algoritmo de ajuste de la malla de cálculo; que a partir de una interpolación lineal de la profundidad en función de la condición de borde, realiza un ajuste de la profundidad del flujo en función a la variable de presión corregida al plantear la continuidad con el método SIMPLE (Olsen, 2012).

## APLICACIÓN

### Descripción del Dominio de Aplicación

Para el cálculo hidrodinámico, se seleccionó el dominio del río Tercero o Ctlamochita en su paso por la ciudad de Villa María, por la importancia de esta urbe y la por la calidad de resultados de la experimentación en este tramo. Para implementar modelos hidrodinámicos tridimensionales en un cauce natural es necesario contar con la batimetría detallada de la zona, que fue obtenida de estudios previos (Díaz Lozada, 2014). Con la información de campo se procedió a procesar los datos de las condiciones hidráulicas del río en el tramo de interés. Las mediciones fueron realizadas con un instrumento Perfilador de Corriente Acústico

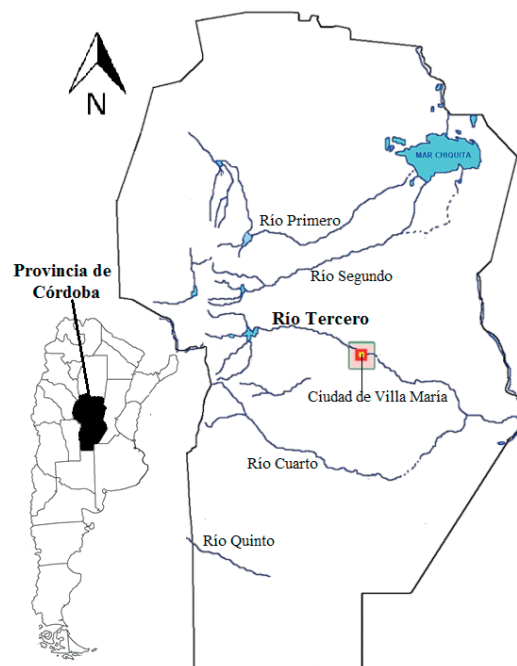
Doppler (ADCP: *Acoustic Doppler Current Profiler*) y se obtuvieron campos de velocidad cuasi instantáneas en secciones para diferentes condiciones de flujo y los resultados de la caracterización evidenciaron la existencia de transporte de flujo de sedimentos en el fondo del cauce, el transporte de fondo podría ser un parámetro de importancia en el análisis de resistencia al flujo ejercida por las fronteras del modelo para diferentes condiciones hidráulicas del río.

La cuenca del río Tercero abarca un área aproximada de 9500 km<sup>2</sup>, nace en la zona montañosa conocida como las Sierras Grandes de la Provincia de Córdoba, los principales tributarios del río Tercero en la cuenca alta son los ríos Santa Rosa, Grande y Quillín en el sector que contempla los cerros Champaquí y Comechingones (Martínez, 2010). La cuenca alta está regulada por una serie de embalses antes de formarse el río Tercero, estos embalses que pertenecen al sistema de generación eléctrica de la provincia; desde aguas arriba se menciona el embalse Cerro Pelado, Arroyo Corto, Río Tercero, Ingeniero Cassaffousth, Ing. Benjamín Reolín y finalmente el de embalse de Piedras Moras. A continuación en la Tabla 1 se presentan algunas características de los embalses de la cuenca alta del río Tercero:

**Tabla 1** | Características de los embalses construidos en la cuenca alta del río Tercero o Ctlamochita.

Embalse	Altura (m)	Espejo de Agua (ha)	Volumen (hm <sup>3</sup> )	Potencia Hidroeléctrica Instalada (MW)
Cerro Pelado	104	1240	370	750
Arroyo Corto	44	357	35	
Río Tercero	50	4600	560	10.5
Ing. Cassaffousth	35	86	10	17.28
Ing. Benjamín Reolín	47	160	13	33
Piedras Moras	57	589	47	6

El cauce del río Tercero tiene su nacimiento en el embalse de Piedras Moras y recorre la cuenca que lleva su mismo nombre hasta que vierte sus aguas en el río Carcarañá recorriendo una longitud aproximada de 300 kilómetros desde el oeste en sentido al este. Con un ancho promedio de 40 m, en las márgenes del río Tercero se localizan importantes centros poblados como Almafuerde, Río Tercero, Villa Ascasubi, Pampayasta, Villa María y Bell Ville, entre otras. En la Figura 1 se puede ver la ubicación geográfica general del río Tercero:



**Figura 1** | Esquema de la ubicación geográfica del río Tercero o Ctlamochita.

Las inundaciones ocurridas en los ríos de la Provincia de Córdoba en el primer trimestre de los años 2014, 2015 y 2016 motivaron al estudio del comportamiento de los principales cauces naturales de la Provincia; es así que, para la investigación

del río Tercero o Ctalamochita se cuenta con el apoyo logístico de autoridades locales y universitarias para la caracterización de este cauce a través de la implementación de técnicas experimentales y numéricas.

## Datos Experimentales

Se han recolectado, procesado y analizado datos de las campañas de aforo realizadas para cuantificar y caracterizar experimentalmente los tributarios del río Tercero, las campañas han sido organizadas y llevadas a cabo en los últimos años por instituciones de las Provincias de Córdoba y Santa Fe (CETA de la Universidad Nacional de Córdoba, CIFASIS CCT Rosario y la Secretaría de Recursos Hídricos del Gobierno de la Provincia de Córdoba), el instrumento utilizado para llevar a cabo los aforos en esta zona es el Perfilador de Corriente Acústico Doppler (ADCP: *Acoustic Doppler Current Profiler*) (Díaz Lozada, 2014).

El ADCP determina la velocidad del flujo utilizando el principio Doppler. El instrumento emite una onda acústica a una determinada frecuencia, la cual es luego reflejada por partículas en el flujo (sedimentos, plancton, algas, fondo, etc.). La onda acústica reflejada es detectada por el instrumento y la misma posee una frecuencia diferente con la que fue emitida. Los datos seleccionados para la validación, que fueron procesados a partir de los resultados de las campañas de aforo en campo, están en el rango de caudal del río de 9.64 m<sup>3</sup>/s hasta 121.22 m<sup>3</sup>/s y la sección de medición está aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi de la ciudad de Villa María (Coordenadas UTM: 476974 m. S, 6412773 m. E). A continuación en la Figura 2 se presenta una imagen de la sección de aforo y en la Tabla 2 un resumen de los datos procesados:



**Figura 2** | Sección de aforo aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi de la ciudad de Villa María en el río Tercero.

**Tabla 2** | Resumen de los resultados de las campañas de aforo correspondientes a la sección del río Tercero en el puente Juan Bautista Alberdi de la ciudad de Villa María.

Fecha	Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Ancho (m)	Prof. Med. (m)	Prof. Máx. (m)	Vel. Med. (m/s)	Vel. Máx. (m/s)	Froude	Reynolds
19-11-13	9.640	27.570	0.510	0.840	0.704	1.400	0.315	367726
08-09-15	12.856	37.833	0.503	1.080	0.676	1.688	0.304	345602
23-10-15	13.180	29.600	0.589	0.829	0.715	1.227	0.297	404011
18-11-14	17.216	34.903	0.585	1.050	0.843	1.619	0.352	574893
09-09-14	22.814	34.774	0.745	1.190	0.880	1.817	0.325	691288
09-06-15	24.354	37.342	0.774	1.490	0.843	1.807	0.306	657220
10-06-14	25.641	33.144	0.810	1.339	0.956	1.938	0.339	783423
28-04-15	29.195	33.550	0.901	1.350	0.965	1.946	0.325	864453
17-11-15	50.271	38.344	1.279	2.180	1.026	2.112	0.290	1260760
08-04-16	65.840	36.264	1.430	2.280	1.146	2.174	0.306	1564117
22-12-15	78.090	40.814	1.567	2.450	1.221	2.321	0.311	1809279
11-02-16	85.092	39.325	1.788	2.656	1.212	2.243	0.289	2236865
08-03-16	91.905	42.193	1.876	2.766	1.162	2.201	0.271	2052459
18-04-16	98.723	40.325	1.730	2.690	1.234	2.471	0.300	2330004
16-03-16	113.850	41.035	1.970	3.470	1.233	2.363	0.280	2474078
08-04-14	121.220	37.459	2.223	3.088	1.456	2.550	0.312	2823743

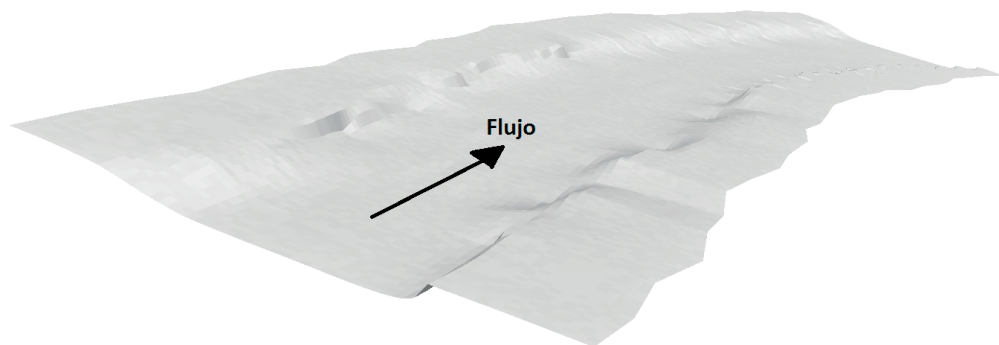


La profundidad máxima correspondiente al caudal de  $121.22 \text{ m}^3/\text{s}$  es de  $3.088 \text{ m}$  y se determinó en estudios previos que no existen efectos de desborde para estos caudales (Ochoa *et al.*, 2016); esta selección de eventos fue llevada a cabo con el criterio de que en este trabajo no se tiene como objetivo modelar efectos de mojado y secado en áreas fuera del cauce (riberas de inundación). También se ha calculado el número adimensional de Reynolds, para la serie de caudales considerada y con base a las variables medidas en las campañas, el rango de Reynolds va desde  $370000$  hasta  $2800000$  que pertenece a un flujo en régimen turbulento ( $\text{Reynolds} \gg 100000$ ). También en la Tabla 2, se ha calculado a partir de los datos el número adimensional de Froude, el valor está alrededor de  $0.3$ , por lo que el flujo es subcrítico ( $\text{Froude} < 1$ ). Por lo tanto, se puede concluir que el flujo en el tramo estudiado del río Tercero presenta un flujo en régimen turbulento-subcrítico para los eventos considerados (Julien, 2002). Para la solución de las ecuaciones de estado es importante conocer el régimen del flujo del cauce natural, esto ayudará a plantear de manera correcta las ecuaciones de cierre de la turbulencia y las condiciones de contorno del modelo numérico implementado.

## Discretización Espacial

Un tratamiento básico en la mecánica de fluidos computacional es dividir la geometría del flujo en elementos o celdas para resolver las ecuaciones de estado en cada uno de estos elementos. Las mallas pueden clasificarse en estructuradas o no estructuradas dependiendo de la forma de sus elementos, en las mallas estructuradas, normalmente, todos los elementos son rectangulares y en las mallas no estructuradas, comúnmente, se combina elementos rectangulares y triangulares. Estudios previos (Olsen, 2012) recomiendan el uso de mallas estructuradas que verifican con facilidad la calidad de ortogonalidad y forma de la malla en el dominio espacial, tendiendo a resultados numéricos con precisión, convergencia y estabilidad adecuada; por lo que en este estudio se optó por realizar la discretización tridimensional con mallas estructuradas.

El primer paso fue construir una superficie en el espacio que represente el dominio seleccionado. La superficie fue construida a partir de la batimetría detallada de la zona, que fue obtenida de estudios previos (Díaz Lozada, 2014) y afinada en campañas de recolección de puntos topográficos para mejorar su resolución. En total se tomó en cuenta  $479$  puntos de  $30$  secciones en  $300 \text{ m}$  de longitud del río y con la sección inicial a aproximadamente  $6 \text{ m}$  de distancia aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi de la ciudad de Villa María. A continuación en la Figura 3 puede visualizarse la superficie que representa la batimetría de la zona estudiada:



**Figura 3 |** Superficie sólida que representa la batimetría del dominio de estudio del río Tercero aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi en la ciudad de Villa María.

A partir de la representación de la batimetría y con la herramienta de mallado del modelo SSIIM se procedió a construir la malla de cálculo con elementos rectangulares. La malla final tiene  $176410$  elementos, para lo cual se han trazado  $300$  secciones transversales a lo largo de la longitudinal del río,  $60$  secciones longitudinales en dirección transversal y se realizaron  $11$  divisiones a lo largo de la vertical hasta la altura máxima de  $3 \text{ m}$ . A continuación en la Figura 4 se presenta la malla final de dominio de cálculo seleccionado en el río Tercero.

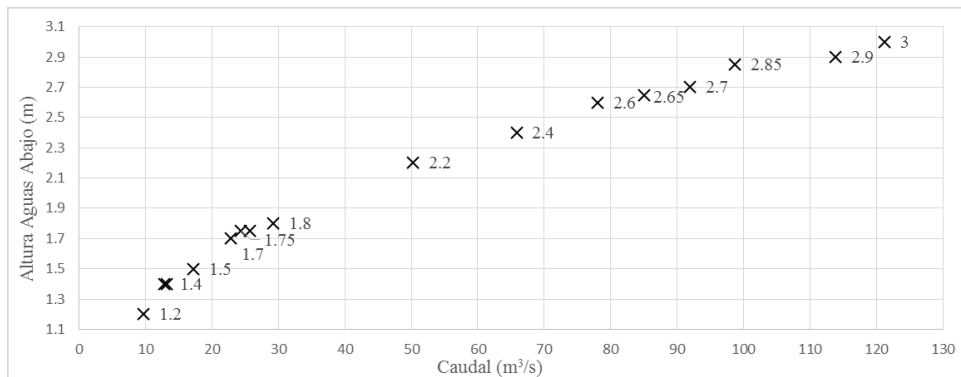


**Figura 4** | Malla de cálculo del dominio de estudio del río Tercero aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi en la ciudad de Villa María.

La malla de cálculo que se muestra en la Figura 4 ha sido examinada, presentando calidad adecuada para el cálculo de las variables respecto a la ortogonalidad y forma de los elementos. Los elementos hexaédricos de la malla tienen una longitud promedio de 1 m, altura promedio de 0.3 m y ancho promedio de 0.5 m.

### Implementación y Validación de la Solución de Flujo Tridimensional del río Tercero

En este punto, se describen las condiciones que se toman en cuenta para la implementación y validación del río Tercero en el modelo tridimensional de flujo en lámina libre SSIIM. A partir de la construcción de la malla de cálculo, se definen las condiciones de contorno para las condiciones de flujo presentadas en la Tabla 2. Si el flujo es subcrítico, la condición de borde a usar es aguas abajo; si el flujo es supercrítico, la condición de borde a usar es aguas arriba. En un tramo sólo es necesario conocer una condición de borde, a menos que el flujo sea mixto, en tal caso se debe contar con una condición de borde aguas arriba y otra aguas abajo (Chaudhry, 2008). En base al número de Froude, calculado para las condiciones de flujo estudiadas y presentadas en la Tabla 2; se concluyó que el flujo es subcrítico ( $Froude < 1$ ), por lo que se propuso una condición de altura de superficie libre en la sección final del dominio con relación al caudal de tránsito dado por las condiciones hidráulicas examinadas. A continuación en la Figura 5 se presentan las condiciones de borde para los eventos examinados:



**Figura 5** | Condición de borde de altura de agua para la implementación del flujo del río Tercero en el dominio considerado.

La variable de resistencia sobre el flujo ejercida por las paredes en un cauce, que puede ser definida como una variable de rugosidad, es fundamental para implementar la simulación numérica de un río. Se despreciarán los efectos de resistencia sobre el flujo ejercidas por el aire en la superficie libre, por ser mínimas comparadas con la resistencia que ejercen las fronteras sólidas; por lo que en la superficie libre se define una condición de borde de gradiente cero. Para la definición de la variable de rugosidad en las fronteras sólidas del modelo, se deben estudiar los factores que ejercen mayor influencia como lo son la rugosidad superficial o de la pared del revestimiento, la presencia de vegetación, la irregularidad de la sección, la alineación del canal en planta, la sedimentación

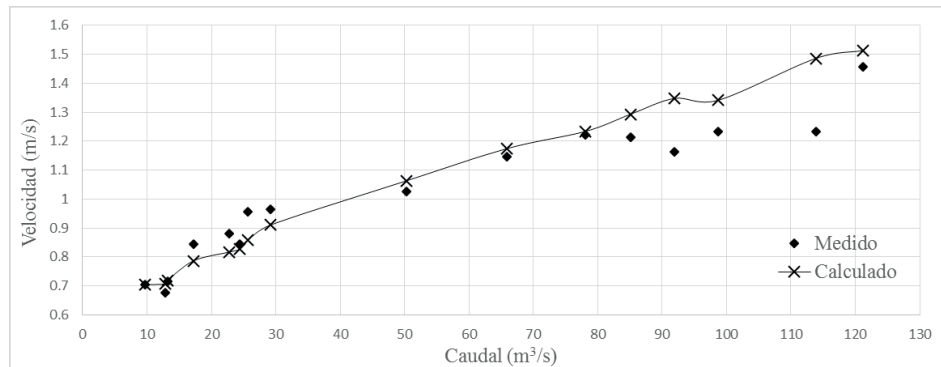


o socavación, obstrucciones, el tamaño y forma del canal, el calado y caudal, el material en suspensión, carga de fondo y formas en el lecho (Chow, 1994).

La variable de resistencia al flujo ha sido definida a través de un coeficiente de rugosidad de Strickler basado en la fórmula de Manning, con este coeficiente de Manning-Strickler se define una altura de rugosidad en las paredes sólidas (Olsen, 2014):

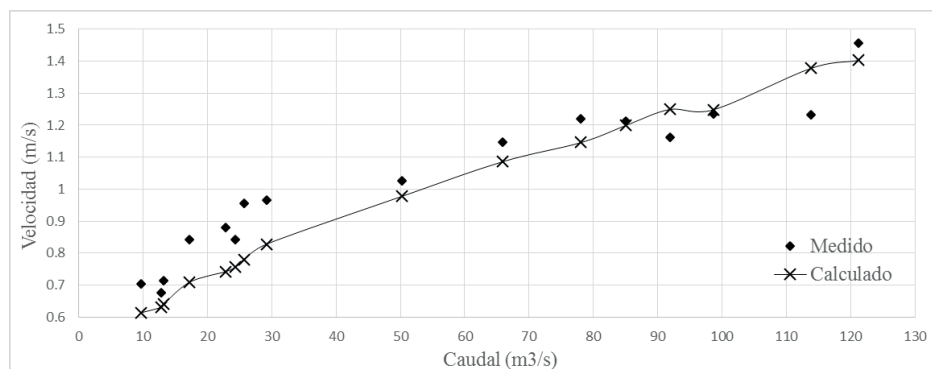
$$k_s = \left(\frac{26}{M}\right)^6 \quad (12)$$

En la ecuación (12),  $k_s$  representa la altura de rugosidad de las paredes sólidas del modelo expresada en milímetros y  $M$  el coeficiente de rugosidad de Strickler, que es el valor inverso del coeficiente de rugosidad de la fórmula de Manning ( $n$ ). Para el dominio estudiado se definió un valor de la rugosidad de Strickler  $M=20$ , un valor razonable para las fronteras sólidas de un flujo en cauces naturales con lecho arenoso, resultando valores aceptables de las variables calculadas con el modelo tridimensional SSIIM en contraste a las medidas en campañas mediante un instrumento ADCP. A continuación, en la Figura 6 se presentan los valores de velocidad media calculada y medida en el tramo estudiado:



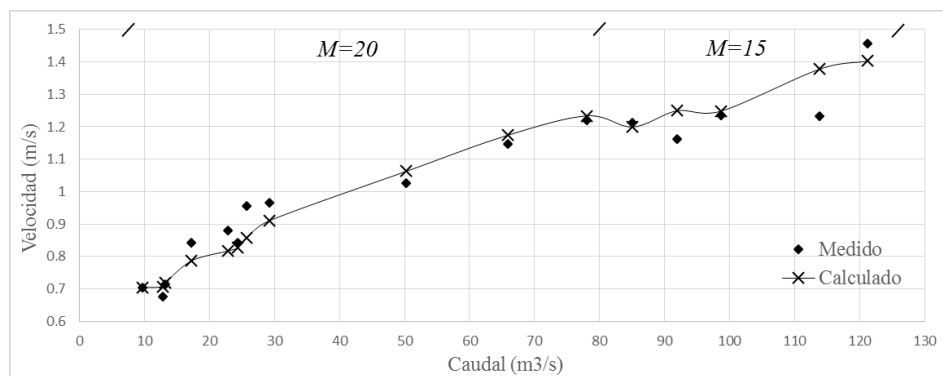
**Figura 6 |** Caudal vs. velocidad media con los resultados de la implementación del flujo del río Tercero en la ciudad de Villa María al modelo tridimensional SSIIM con un coeficiente de rugosidad de Strickler  $M=20$ .

El error promedio absoluto, al ser contrastadas las variables de velocidad media calculadas a través del modelo tridimensional SSIIM con las variables de velocidad medidas con ADCP y promediadas en la sección; es de 6.24% con un valor de rugosidad de Strickler definido de  $M=20$ . Este valor corresponde a una altura de rugosidad de las paredes de 5 mm y aunque el valor de error promedio absoluto de las variables calculadas respecto a las medidas es aceptable, en la Figura 6 se puede observar que para los valores de caudal mayores a  $80 \text{ m}^3/\text{s}$  no se obtuvo una correspondencia cualitativamente correcta de los valores calculados respecto a los datos medidos en campañas; razón por la cual, en la Figura 7 se presentan los resultados de la simulación para un valor supuesto del coeficiente de rugosidad de Strickler de  $M=15$ , que corresponde según la ecuación (12), a una altura de rugosidad en las paredes de 27 m:



**Figura 7 |** Caudal vs. velocidad media con los resultados de la implementación del flujo del río Tercero en la ciudad de Villa María al modelo tridimensional SSIIM con un coeficiente de rugosidad de Strickler .

En la Figura 7 se puede observar que se presenta una mejor correspondencia en los resultados de velocidad media modelados respecto a los medidos con ADCP en condiciones de caudal mayores a  $80 \text{ m}^3/\text{s}$  cuando el coeficiente de rugosidad de Strickler se define con un valor  $M=15$ , mientras que, para caudales menores a  $80 \text{ m}^3/\text{s}$  los resultados de velocidad media tienen una muy buena tendencia con un valor del coeficiente de Strickler  $M=20$ . Para el caso en el que se impuso una mayor rugosidad ( $M=15$ ), el error promedio absoluto se elevó levemente a un valor de 9.1%, que también es aceptable para los resultados modelados (<10%). Se plantea una combinación de los coeficientes de rugosidad en función del caudal, suponiendo que en el caso de los eventos con gastos menores a  $80 \text{ m}^3/\text{s}$  la influencia de las formas de fondo no afectaría el valor del coeficiente de rugosidad, mientras que; para eventos con caudales de mayor magnitud este coeficiente de rugosidad tendrá en cuenta, además de la rugosidad superficial de las paredes, los efectos que la posible formación de formas de fondo puedan influenciar a las paredes sólidas en la simulación del flujo en este cauce natural. Un análisis con mayor detalle de este tema se realizará más adelante en el apartado de Discusión. En la Figura 8 se presenta los resultados de la calibración final tomando en cuenta los coeficientes de rugosidad de Strickler  $M=20$  de y  $M=15$ :

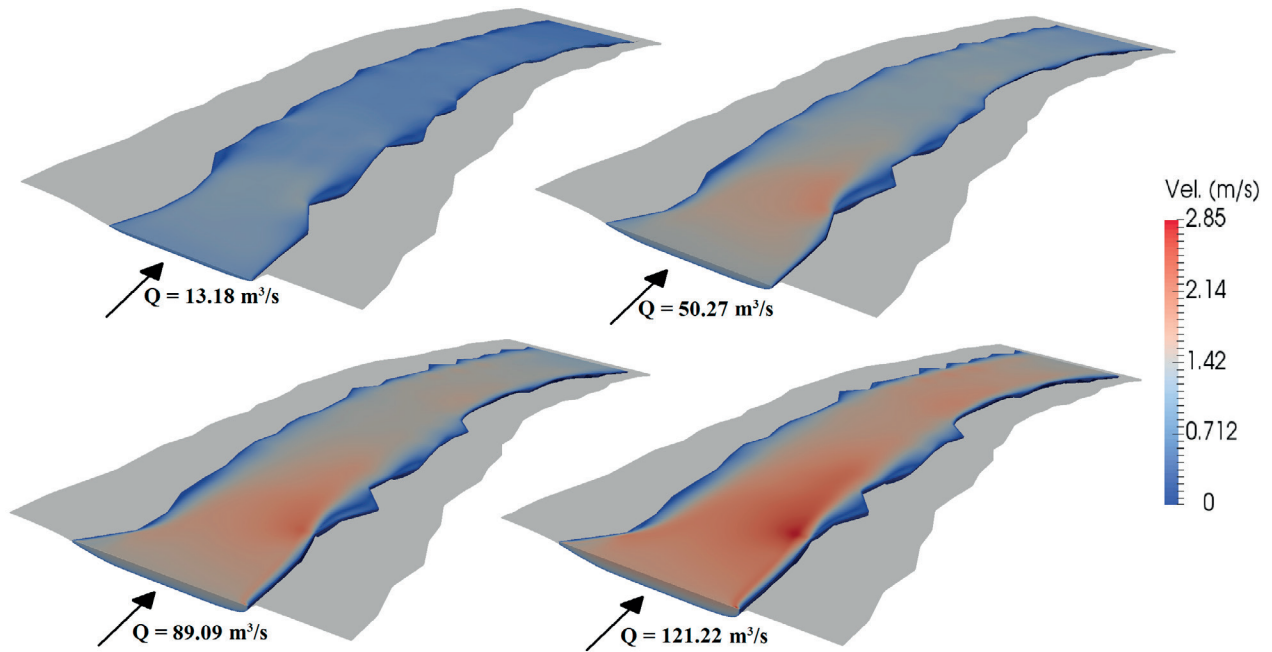


**Figura 8** | Caudal vs. velocidad media con los resultados de la implementación del flujo del río Tercero en la ciudad de Villa María al modelo tridimensional SSIIM con un coeficiente de rugosidad de Strickler  $M=20$  y  $M=15$ .

En la Figura 8 se puede observar una tendencia satisfactoria de los resultados de velocidad media de la simulación del flujo tridimensional en SSIIM, en contraste con los resultados de velocidad media obtenida de la caracterización del río Tercero mediante un instrumento ADCP. El error promedio absoluto al combinar los valores del coeficiente de rugosidad de Strickler es de 4.32%, tomando en cuenta los resultados de velocidad media calculados frente a los observados. Se ha mejorado el índice respecto al error de 6.24% con un solo coeficiente de rugosidad de Strickler de  $M=20$  y un error de 9.1% con un coeficiente  $M=15$  para toda la serie.

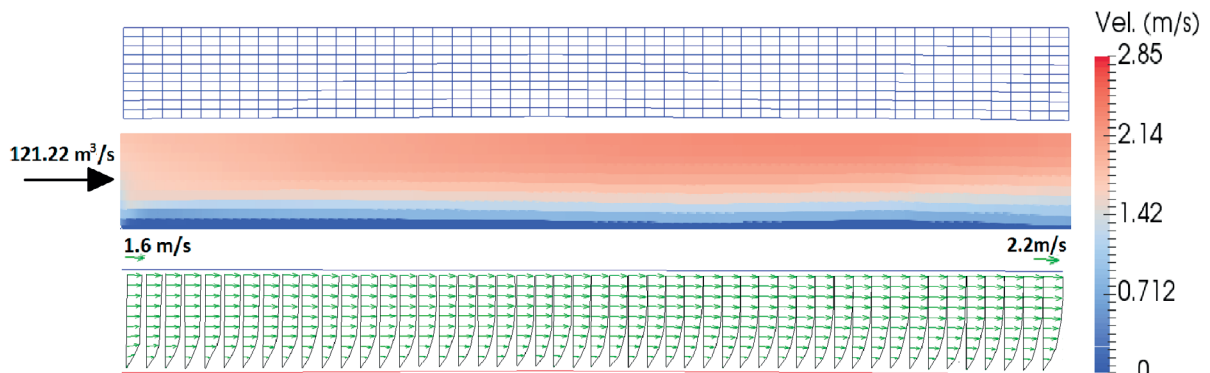
## RESULTADOS

Se implementó y validó satisfactoriamente el flujo del río Tercero en su paso por la ciudad de Villa María aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi en el modelo hidrodinámico tridimensional SSIIM. El rango de caudales seleccionados para la modelación va de  $9.64 \text{ m}^3/\text{s}$  hasta  $121.22 \text{ m}^3/\text{s}$ , los eventos seleccionados no presentan desborde o flujo fuera del cauce principal. Unas de las ventajas del modelo hidrodinámico SSIIM son las diferentes opciones para la visualización y análisis de resultados. Se puede observar algunos de los resultados principales en la ventana de pre-procesamiento y cálculo de las variables; se puede realizar un análisis gráfico de los resultados con el uso de la herramienta OpenGL que es un anexo al módulo principal de SSIIM, y también se pueden exportar los resultados a otros entornos, como por ejemplo al software libre ParaView, donde se puede analizar y exportar las tablas y gráficos de las variables de flujo. A continuación en la Figura 9 se presentan esquemas de la velocidad media en el río Tercero en su paso por la ciudad de Villa María calculados en el modelo SSIIM para caudales de  $13.18 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $50.27 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $89.09 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $121.22 \text{ m}^3/\text{s}$ ; respectivamente:



**Figura 9** | Esquema de velocidad media en el río Tercero en su paso por la ciudad de Villa María calculados en el modelo SSIIM para caudales de 13.18 m<sup>3</sup>/s, 50.27 m<sup>3</sup>/s, 89.09 m<sup>3</sup>/s y 121.22 m<sup>3</sup>/s.

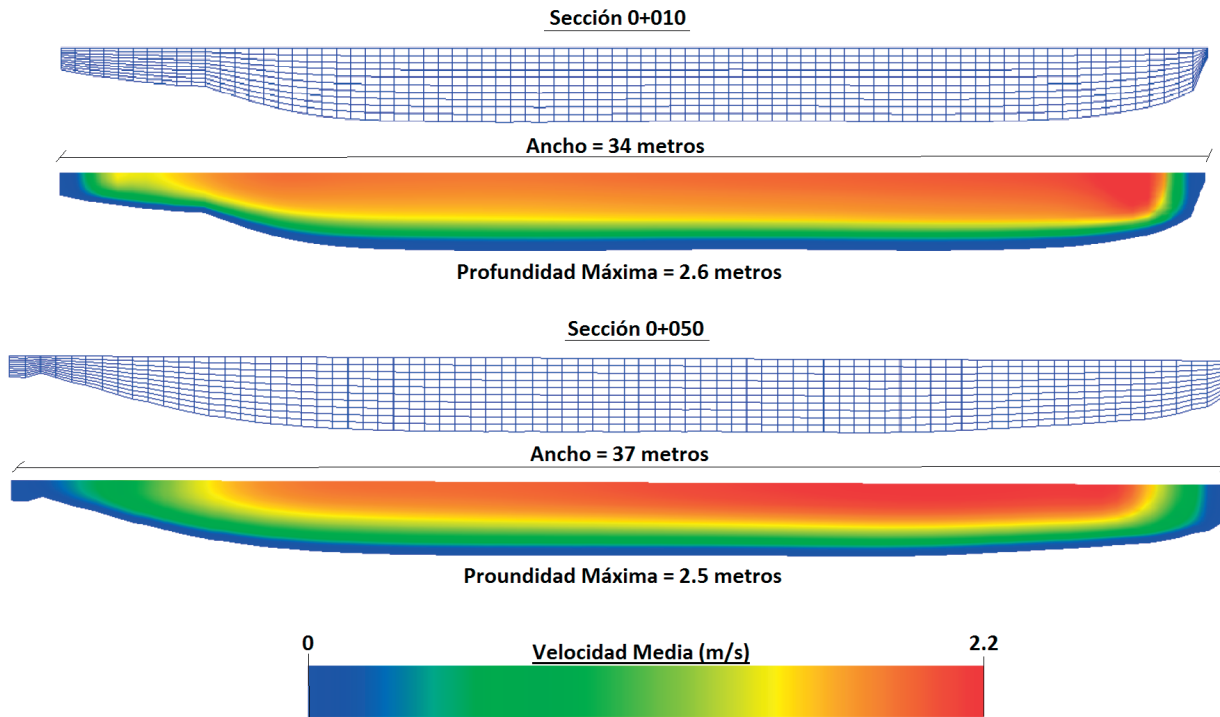
En la Figura 9 se observan las variables de velocidad media superficial del flujo del río Tercero, se pueden notar las zonas de estancamiento en los bordes y las zonas de aceleración del flujo conforme aumenta la magnitud del caudal. La velocidad máxima simulada es de 2.85 m/s que se presenta con un caudal de 121.22 m<sup>3</sup>/s y el ancho promedio del cauce del río Tercero en la zona de estudio es de 40 m. En la Figura 9 se observa la velocidad media superficial del flujo, pero se modeló un flujo tridimensional, por lo que se podría haber presentado la velocidad media en cualquier plano horizontal conforme a la discretización espacial, también se puede representar cualquier plano longitudinal o plano transversal de las variables del flujo. A continuación, en la Figura 10 se presenta en un plano longitudinal el esquema de velocidad media y los perfiles de velocidad de flujo ubicado en la mitad del cauce para los 50 m iniciales del dominio para un caudal de 121.22 m<sup>3</sup>/s:



**Figura 10** | Corte longitudinal de la simulación en SSIIM de los primeros 50 m del río Tercero en el centro del cauce aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi de la ciudad de Villa María para un caudal de entrada de 121.22 m<sup>3</sup>/s.

En la Figura 10, en la parte superior se presenta la malla de cálculo en un corte longitudinal correspondiente al centro del cauce, en la mitad de la Figura 10 se presenta un esquema de velocidades medias calculadas en la simulación con la herramienta

SSIIM para un caudal de  $121.22 \text{ m}^3/\text{s}$ ; y en la parte inferior de la Figura 10, los perfiles verticales que representan la magnitud de velocidad media en cada celda de la malla de cálculo. Los esquemas presentados en la Figura 10 son la vista de un corte en el tramo longitudinal de los primeros 50 m del dominio implementado al modelo SSIIM del río Tercero aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi. A continuación en la Figura 11 se presentan los resultados de velocidad media calculada con SSIIM en las secciones a 10 y 50 m de distancia del inicio del dominio del modelo implementado del río Tercero en la ciudad de Villa María:



**Figura 11** | Secciones a 10 y 50 m de distancia inicial del dominio de la simulación implementada en SSIIM del río Tercero aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi de la ciudad de Villa María para un caudal de entrada de  $121.22 \text{ m}^3/\text{s}$ .

En la Figura 11, se observan bien definidas las zonas de estancamiento en los bordes de la secciones para un caudal de  $121.22 \text{ m}^3/\text{s}$ ; así como velocidades que tienden a cero en el fondo, esto por el efecto de “no deslizamiento” en las fronteras sólidas.

## DISCUSIÓN

En la simulación numérica de la hidrodinámica de cauces naturales, se debería realizar esfuerzos para incluir explícitamente cada proceso físico que sea relevante y no considerar aquellos con menor significancia en la solución de las variables de interés. Sin embargo, debido a la complejidad de los fenómenos del flujo en ríos, algunos procesos relevantes como los efectos de irregularidades en el fondo del cauce, vegetación, cambios de pendiente repentinos; entre otros, se obvian y se pretende considerar su efecto a través de un único parámetro, como por ejemplo, un valor de la rugosidad que incluye efectos de curvatura y formas de fondo del cauce (Morvan *et al.*, 2008).

En el apartado de Implementación y Validación de la Solución de Flujo Tridimensional del río Tercero se propuso la variable de resistencia de las paredes sobre el flujo representada a través de un coeficiente de rugosidad de Strickler que varía de acuerdo al caudal en el cauce. Se definió un valor del coeficiente de rugosidad  $M=20$  para caudales que va desde  $9.64 \text{ m}^3/\text{s}$  hasta los  $80 \text{ m}^3/\text{s}$ ; y un coeficiente de rugosidad  $M=20$  para caudales desde  $80 \text{ m}^3/\text{s}$  hasta los  $121.22 \text{ m}^3/\text{s}$  de la serie simulada con la herramienta de cálculo hidrodinámico tridimensional SSIIM. Aunque los resultados modelados mostraron excelente tendencia respecto a los

medidos por ADCP (Error Porcentual Promedio Absoluto <5%), es necesario justificar la suposición de dos valores de la variable definida para representar la resistencia al flujo en el mismo tramo. Como se expuso en párrafos previos, se plantea una combinación de los coeficientes de rugosidad en función del caudal, suponiendo que en el caso de los eventos con gastos menores a 80 m<sup>3</sup>/s la influencia de las formas de fondo no afectará, en mayor medida, el valor del coeficiente de rugosidad, mientras que; para eventos con caudales de mayor magnitud este coeficiente de rugosidad tendrá en cuenta, además de la rugosidad superficial de las paredes, los efectos que la posible formación de formas de fondo puedan influenciar a las paredes sólidas en la simulación del flujo. El planteamiento expuesto se puede explicar con ayuda de la siguiente expresión para el cálculo de la rugosidad efectiva (van Rijn, 1984):

$$k_s = 3D_{90} + 1.1\Delta \left(1 - e^{-\frac{25\Delta}{\lambda}}\right) \quad (13)$$

Donde en la ecuación (13),  $k_s$  representa la altura de rugosidad de las paredes sólidas del modelo y  $D_{90}$  el diámetro por el que pasa el 90% de las partículas a partir de la curva granulométrica del material del lecho del río.  $\Delta$  representa la altura de las formas de fondo y  $\lambda$  la longitud de las formas de fondo que pueden ser estimadas a partir de la siguientes expresiones (van Rijn, 1987) (Yalin, 1963):

$$\Delta = 0.11H \left(\frac{D_{50}}{H}\right) \left(1 - e^{-\frac{\tau - \tau_c}{2\tau_c}}\right) \left(25 - \frac{\tau - \tau_c}{2\tau_c}\right) \quad (14)$$

$$\lambda = 7.3H \quad (15)$$

En las ecuaciones (14) y (15),  $H$  representa la profundidad media del flujo,  $D_{50}$  el diámetro por el que pasa el 50% de las partículas a partir de la curva granulométrica del material del lecho del río,  $\tau$  el esfuerzo cortante en el fondo del flujo y  $\tau_c$  el esfuerzo cortante crítico de las partículas en el flujo calculado a partir del diagrama de Shields (Olsen, 2012).

En la ecuación (13) la altura de rugosidad se divide en dos componentes: el primer término que representa la rugosidad superficial de la pared que está en función del diámetro del material que lo compone y un segundo término, que supone, que las formas de fondo de tipo dunas con altura  $\Delta$  y longitud  $\lambda$  contribuyen a la resistencia al flujo de los contornos sólidos del modelo. Es una tarea interesante igualar las ecuaciones (12) y (13):

$$\left(\frac{26}{M}\right)^6 = 3D_{90} + 1.1\Delta \left(1 - e^{-\frac{25\Delta}{\lambda}}\right) \quad (16)$$

De esta forma, a partir de la ecuación (16) se puede estimar que porcentaje de la altura de rugosidad es supuesto por cada término de la ecuación (13) en base a la suposición de un coeficiente de rugosidad para representar procesos de resistencia de las paredes sobre el flujo dado por la ecuación (12), es decir, que fracción está dada por los efectos de rugosidad superficial en función de un diámetro característico de las partículas de lecho y que fracción por las formas de fondo en un cauce simulado con un único factor de rugosidad  $M$  basado en la formulación de Manning- Strickler.

Para llevar a cabo el análisis, se procesó la granulometría del material de fondo del río Tercero en el dominio seleccionado que fue obtenida de estudios previos (Díaz Lozada, 2014). Según estos datos, el diámetro por el que pasa el 50% de las partículas corresponde a  $D_{50} = 0.55$  mm y el diámetro por el que pasa el 90% de las partículas corresponde a  $D_{90} = 3.5$  milímetros.

Cuando se ha supuesto un coeficiente de rugosidad  $M=20$ , la altura de rugosidad de fondo calculada por la ecuación (12) tiende al primer término de la ecuación (13)  $3D_{90}$ , por lo que se puede argumentar que los efectos de las formas de fondo son mínimos en la resistencia de los contornos en contra del flujo y la altura de rugosidad se puede estimar a partir del diámetro característico del sedimento. En el caso en que se supone un coeficiente de rugosidad de  $M=15$ , dos tercios de la rugosidad superficial de las paredes corresponde al segundo término de la ecuación (13), en base a la altura de rugosidad calculada con la ecuación (12); por lo que las dimensiones de las formas de fondo toman importancia en la estimación de la variable de resistencia al flujo en la modelación del flujo del río Tercero en su paso por la ciudad de Villa María en eventos con caudal mayor a 80 m<sup>3</sup>/s. A continuación en la Tabla 3 se

presentan una estimación de la geometría de las formas de fondo de tipo dunas con la ayuda de las ecuaciones (12), (13), (14) y (15) para un coeficiente de rugosidad supuesto de  $M=15$  y una profundidad media de flujo de 2 m correspondiente a un caudal de 121.22 m<sup>3</sup>/s:

**Tabla 3** | Estimación de la longitud y altura de las formas de fondo en el río Tercero para un caudal de 121.22 m<sup>3</sup>/s.

$M = 15 ; k_s(m) = 0.027$ *ecuación (12)	
$\lambda(m) = 14.6$ *ecuación (15)	$\rightarrow \rightarrow \Delta(m)^* = 0.257$ *ecuación (12) y (13)
$\Delta(m) = 0.272$ *ecuación (14)	$\rightarrow \rightarrow \lambda(m) = 16.332$ *ecuación (12) y (13)

En la Tabla 3, se estima la longitud de las formas de fondo con la ecuación (15) y a partir de las ecuaciones para calcular la altura de rugosidad del fondo (12) y (13) se estima la altura de las formas de fondo; de forma inversa se puede estimar la altura de las formas de fondo con la ecuación (14) y con las ecuaciones (12) y (13) calcular la longitud de las formas de fondo. Se puede verificar la consistencia de la formulación presentada para estimar la geometría de las formas de fondo al obtener resultados del mismo orden para las variables de la longitud ( $\lambda \approx 15$  m) y altura ( $\Delta \approx 0.26$  m) de las dunas evaluadas.

Con el análisis realizado, se ha planteado un precedente sobre las investigaciones llevadas a cabo sobre el río Tercero en la provincia de Córdoba, Argentina; con el agregado de la importancia de estudiar las variables de transporte de sedimentos para evaluar las posibles formas de fondo en este cauce natural. La importancia de estas variables de transporte de partículas, viene dada a partir de la hipótesis de que para este caso la formación de formas de fondo en el cauce altera los resultados de la solución en la simulación que ha sido implementada en el modelo tridimensional SSIIM. Es así que, la comunidad científica de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba realiza esfuerzos para simular la hidrodinámica de este cauce natural con variables de transporte de partículas, formas de fondo y aplicar metodologías para la caracterización de las variables de transporte de sedimentos en las campañas de medición que se llevan a cabo en los ríos de la provincia.

## CONCLUSIONES

Se construyó a partir de 479 puntos de 30 secciones en 300 m de longitud del río Tercero, y con la sección inicial a aproximadamente 6 m de distancia aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi de la ciudad de Villa María, una malla estructurada para la discretización del dominio espacial que se implementó al modelo hidrodinámico tridimensional SSIIM. La malla tiene 176410 elementos hexaédricos, para lo cual se han trazado 300 secciones transversales a lo largo de la longitudinal del río, 60 secciones longitudinales en dirección transversal y se realizaron 11 divisiones a lo largo de la vertical hasta la altura máxima de 3 m. Los elementos hexaédricos de la malla, que han presentado buena calidad respecto a los índices de ortogonalidad y forma de los elementos, tienen una longitud promedio de 1 metro, altura promedio de 0.3 m y ancho promedio de 0.5 m.

Se implementó y validó satisfactoriamente el flujo del río Tercero en su paso por la ciudad de Villa María aguas abajo del puente Juan Bautista Alberdi en el modelo hidrodinámico tridimensional SSIIM. La variable de resistencia al flujo, que fue representada a través de un coeficiente de rugosidad de Strickler; varía de acuerdo al gasto del flujo en el cauce, y fue definida con un valor del coeficiente de rugosidad  $M = 20$  para caudales que va desde 9.64 m<sup>3</sup>/s hasta los 80 m<sup>3</sup>/s; y un coeficiente de rugosidad  $M = 15$  para caudales desde 80 m<sup>3</sup>/s hasta los 121.22 m<sup>3</sup>/s. Los resultados simulados de velocidad media fueron contrastados con los medidos con el instrumento ADCP, mostrando índices en magnitud y forma satisfactorios que reflejan un error porcentual promedio absoluto <5% al comparar estas variables medidas con las simuladas. Las condiciones iniciales de los 16 eventos simulados fueron el caudal volumétrico en la sección inicial asociado a la altura de superficie de agua al final del tramo (condición de flujo subcrítico). El tiempo de simulación para alcanzar un flujo permanente es de 4000 segundos con un paso de tiempo de 1 segundo y con las condiciones de discretización espacial presentadas en el tramo analizado, de aproximadamente 300 m, el tiempo de cálculo es cercano a 4 horas.

Del análisis de la implementación hidrodinámica tridimensional al flujo de un cauce natural de tramo medio, con características de profundidad de agua pequeña respecto al ancho de la sección y transporte de partículas en el fondo; se ha determinado que los



resultados de la simulación con la suposición de un único valor de rugosidad de las paredes del cauce no representa la totalidad de los eventos observados, es así que se ha definido coeficientes de rugosidad para diferentes rangos de caudal. Se planteó que, el diámetro característico de las partículas y los efectos de la formación de formas de fondo por los procesos de transporte de sedimentos son variables dependientes para el cálculo de la resistencia de las paredes sobre el flujo. En este contexto, se propone la importancia de considerar el transporte de sedimentos y la evolución de las formas de fondo como procesos relevantes al modelar el flujo de cauces naturales con las características aquí estudiadas.

---

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece el financiamiento dado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba (SECyT) y la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación de la República de Ecuador (SENESCYT) para llevar a cabo esta investigación. Se agradece al equipo del Laboratorio de Hidráulica de la Universidad Nacional de Córdoba por todo el apoyo brindado.

---

## REFERENCIAS

- Chaudhry, M. H. 2008. *Open-Channel Flow*. Springer Science+Business Media, LLC. University of South Carolina, USA. doi:10.1007/978-0-387-68648-6
- Chow, V. T. 1994. *Hidráulica de Canales Abiertos*. McGraw Hill, Illinois, USA.
- Díaz-Lozada, J. M. 2014. *Cuantificación y Caracterización del Escurrimiento Superficial en el Sistema Fluvial del Río Carcaraña*. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba.
- García, M. H., Niño Y. 2003. *Flow and Transport Equations in Surface Waters*. CEE 498 Environmental Hydrodynamics. Spring Sem, New York, USA.
- Julien, Y. P. 2002. *River Mechanics*. Cambridge University Press, New York, USA. doi:10.1017/CBO9781139164016
- Martínez, S. J. 2010. *Cuenca del Río Carcaraña*. Subsecretaría de Recursos Hídricos de la República Argentina.
- Morvan, H., Knight, D., Wright, N., Tang, X., Crossley, A. 2008. The Concept of Roughness in Fluvial Hydraulics and its Formulation in 1D, 2D and 3D Numerical Simulation Models. *Journal of Hydraulic Research*, 46(2), 191-208. doi:10.1080/00221686.2008.9521855
- Ochoa, S., Reyna, T., Reyna, S., García, M., Labaque, M., Díaz, J. M. 2016. Modelación Hidrodinámica del Tramo Medio del Río Ctalamochita, Provincia de Córdoba. *Revista Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 3(2), 95-101.
- Olsen, N. R. B. 2012. *Numerical Modelling and Hydraulics*. Department of Hydraulic and Environmental Engineering, Norwegian University of Science and Technology. ISBN 82-7598-074-7.
- Olsen, N. R. B. 2014. *A Three-Dimensional Numerical Model for Simulation of Sediment Movements in Water Intakes with Multiblock Option*. Department of Hydraulic and Environmental Engineering, Norwegian University of Science and Technology.
- Patankar, S. V. 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw Hill, New York, USA.
- Van Rijn, L. 1984. Sediment Transport Part iii: Bed Forms and Alluvial Roughness. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(12) 1733-1754. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1984)110:12(1733)
- Yalin, M. S. 1963. An Expression for Bed-load Transportation. *Journal of the Hydraulic Division, American Society of Civil Engineers (ASCE)*. 89(3), 221-250.