MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

Modelling in Science Education and Learning
Volume 5, No. 4, 2012.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Modelo de selección de cartera con Solver

P. Fogués Zornoza
Universitat Católica de València.
jose_fogues@hotmail.com

E. Jiménez Fernández[1]
Universitat Politècnica de València
edjimfer@mat.upv.es

Abstract

En este trabajo se presenta un ejemplo de como contextualizar la optimización lineal en cursos avanzados de grados de económicas o administración y dirección de empresas. Mostramos técnicas que permiten al alumno profundizar e investigar con problemas reales que posteriormente modelizan utilizando la plataforma Excel. El modelo que aquí se muestra, es el trabajo desarrollado por un alumno de estos cursos y que consiste en minimizar las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad media esperada de una cartera de valores bursátiles, utilizando la herramienta solver que nos proporciona la hoja de cálculo.

In this paper, we present an example of linear optimization in the context of degrees in Economics or Business Administration and Management. We show techniques that enable students to go deep and investigate in real problems that have been modelled using the Excel platform. The model shown here has been developed by a student and it consists in minimizing the absolute deviations over the average expected return of a portfolio of securities, using the solver tool that it is included in this software.

Keywords: Modelización, Optimización, Solver.

[1]Support of the Ministerio de Educación y Ciencia, under project #MTM2009-14483-C02-02 (Spain) is gratefully acknowledged.

1 Introducción.

La modelización matemática en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas nos permite reforzar los planteamientos constructivistas, en el que el alumno se convierte en actor principal de su propio aprendizaje y por otro lado, poner en un marco conceptual común conceptos propios de ciencias distintas de las matemáticas, Física, Económicas, Ingeniería que hacen más significativo y duradero el conocimiento matemático ver [3]. El ejemplo que aquí se expone, pone de relieve la importancia que tiene desarrollar herramientas que permiten al alumno profundizar en temas relacionados con su formación y contextualizar las matemáticas dentro de esta. Son cada vez más, los experimentos en aula que proporcionan otra forma de aprendizaje. Diversos estudios que se están llevando a cabo, demuestran que esta forma de entender el trabajo, permiten al alumno centrarse en el aprendizaje por un lado y por otro dar una mayor robustez estructural a los estudios cursados por nuestros estudiantes e incentivar la adquisición de habilidades como la creatividad, el trabajo en equipo, la búsqueda y el compartir información, etc, que son centrales y comunes a todas las metodologías basadas en la modelización.
La experiencia que aquí presentamos se enmarca en una asignatura del último curso de Administración y Dirección de Empresas, que lleva por nombre Investigación Operativa. Parte de este curso tiene como objetivo enseñar a los alumnos a como optimizar diferentes problemas que pueden surgir en el ámbito de la empresa. Lejos de analizar y desarrollar analíticamente las propiedades que se necesitan para el planteamiento matemático de este tipo de problemas, utilizamos la modelización matemática como instrumento de aprendizaje. Hacemos uso de la hoja de cálculo Excel por su universalidad, y por ser un programa de uso cotidiano en todas las empresas. Esta plataforma nos proporciona los recursos necesarios para resolver los distintos modelos que van surgiendo a lo largo del curso. La experiencia se centra en plantear diferentes situaciones que surgen en el desarrollo profesional y que se desean analizar con el fin de obtener resultados óptimos. En el ejemplo que en este trabajo se presenta, el alumno escoge un modelo que pretende minimizar las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad media esperada de una cartera de valores bursátiles, este modelo lineal es conocido por el nombre de Konno y Yamazaki (ver [1]), y pretende simplificar el modelo original de Markowitz (ver [2]). El modelo de Markowitz es la base de la mayoría de los modelos de selección de cartera, sin embargo su utilización en la práctica es bastante reducida debido a que presenta serias dificultades de cálculo. Este necesita calcular un número de covarianzas de algo menos del cuadrado del número de activos financieros que hay en la cartera, y resolver un programa cuadrático con un número de términos en la función objetivo superior a $n^2/2$ donde n es el número de activos considerados a optimizar. Por otro lado las soluciones obtenidas en el modelo de Markowitz son muy inestables dependiendo sobre todo de las previsiones sobre las rentabilidades esperadas. Los anteriormente citados Konno y Yamazaki obtubieron una simplificación del modelo anterior transformándolo a otro modelo equivalente lineal. Este resultado tiene la enorme ventaja porqué puede ser resuelto mediante programación lineal en lugar de hacerlo mediante programación cuadrática con el consiguiente ahorro de tiempo de cálculo y simplificación. De esta forma el enunciado se presenta mucho más accesible para alumnos de esta licenciatura. Elegido el problema que se quiere abordar, los alumnos recaban la información necesaria para plantear el modelo y obtener conclusiones de las cuestiones que inicialmente se plantean. En este caso se recopilan las rentabilidades históricas de diferentes compañías que cotizan en el IBEX35 para crear una cartera de valores. Con esta información se calcularan todos los elementos necesarios para construcción del modelo lineal, y que posteriormente se resolverán utilizando el programa solver que está disponible en la hoja de cálculo Excel. Una vez que se obtienen las soluciones, se realiza un análisis de los resultados, permitiendo al alumno realizar un juicio crítico de la

idoneidad o no de tomar una selección de cartera u otra.

2 El modelo de Konno y Yamazaki para la seleción de carteras.

Históricamente el desarrollo de muchas técnicas matemáticas se fundamenta en el concepto constructivista, en la parte que a nosotros nos implica, se basa en que los alumnos vayan adquiriendo y construyendo sus propios conocimientos a través de un patrón o ruta que nosotros previamente hemos facilitado, y dando lugar a que estos se impliquen en una actividad investigadora. La experiencia se desarrolla en la asignatura de Investigación Operativa que se imparte en el último curso de la licenciatura de Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Católica de Valencia. Los alumnos tienen suficientes conocimientos para aplicar de forma transversal las diferentes técnicas que se les van a proporcionar de forma que puedan adaptar los modelos a estructuras aprendidas a lo largo de su formación académica. A estos se les facilita un material teórico adaptado a la formación que han recibido. Durante las sesiones presenciales se resuelven distintos ejemplos donde los alumnos aprenden a aplicar los distintos conceptos que se les ha proporcionado. Posteriormente, se les facilita un listado de enunciados que representan casos reales, que deben modelizar. Estas sesiones se trabajan formando grupos de dos o tres alumnos, donde finalmente realizan una exposición de los resultados obtenidos.

2.1 El modelo de Konno y Yamazaki

En 1991 Konno y Yamazaki platearon un modelo que aplicaron a la bolsa de Tokio, que minimiza las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad media esperada de una cartera y que esta sujeta a las mismas restricciones que aperecen en el modelo de Markowitz (ver [2]). El modelo que plantean resuelve los problemas de cálculo del modelo original de Markowitz, obteniendo soluciones que son equivalentes al citado modelo. Sean x_j el tanto por uno invertido en el activo financiero j si $j = 1, ..., n \in \mathbb{N}$, r_{jt} la tasa de rentabilidad del activo financiero j en el periodo t, donde $t \in \{1, 2, .., T\}$. Denotamos por R_j la tasa retorno aleatoria de los activos j y r_j la rentabilidad media esperada media del activo financiero x_j

$$r_j := \sum_{t=1}^{T} \frac{r_{jt}}{T}.$$

Denominamos ρ a la tasa de rentabilidad deseada parametrizable, M a la cantidad económica disponible para la inversión y μ_j al máximo tanto por uno que deseamos invertir en el activo finaciero j. Definimos el conjunto

$$S := \{(x_1, ..., x_n) : \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = M, \quad 0 \leq x_j \leq \mu_j, \quad j = 1, ..., n\}$$

El modelo de Konno y Yamazaki pretende optimizar

$$F(x_1, ..., x_n) := E\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)\right| \quad (x_1, ..., x_n) \in S \qquad (4.1)$$

Debido a que la función objetivo anterior no es lineal, el modelo de Konno y Yamazaki expresa el problema anterior de la siguiente forma

Consideramos una nuevas variables y_t que representan las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad esperada de la cartera. Entonces

$$F(y_1, ..., y_T) := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \tag{4.2}$$

sujeto a las restricciones

$$y_t \geq \sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)x_j, \quad t = 1, ...T, \tag{4.3}$$

$$y_t \geq -\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)x_j, \quad t = 1, ...T, \tag{4.4}$$

$$(x_1, ..., x_n) \in S.$$

se convierte en problema de optimización lineal que podemos implementar y resolver.

2.2 Un ejemplo de optimización con una cartera de valores del IBEX

El modelo escogido pretende minimizar las desviaciones absolutas respecto de la rentabilidad media esperada de una cartera formada por cinco valores del IBEX35, el banco de Santander, BBVA, Bankinter, banco Popular y Banco Sabadell, por tanto en este caso el subíndice j tomará valores en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. La cuestión que aquí se plantea, pretende obtener conclusiones de cuales tienen que ser los porcentajes que se deben tomar de cada valor con el fin de minimizar una función objetivo. Esta función depende de unas variables y_t que representan las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad esperada de la cartera.
Para esta tarea se toman todos las cotizaciones en bolsa desde la fecha 30/12/2005 hasta el 30/12/2010. El alumno necesita realizar una tarea de búsqueda que le permita encontrar todos esos datos necesarios para el cálculo de todos los parámetros incluidos en el modelo. En este punto, se ha de estudiar con detalle el modelo proporcionado por Konno y Yamazaki para poder adaptar toda la información recopilada y realizar los cálculos necesarios que nos permitan aplicar las fórmulas de forma adecuada. En este caso será necesario calcular las tasas de rentabilidad de cada activo financiero r_{jt} en cada periodo t. En el ejemplo hemos tomado periodos anuales, de forma que tendremos los intervalos que comprenden desde el año 2006 hasta el año 2010, así $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Por otro lado será necesario calcular la rentabilidad media esperada r_j para cada activo financiero determinada por la fórmula $r_j := \sum_{t=1}^{T} \frac{r_{jt}}{T}$. Se fija una tasa de rentabilidad requerida $\rho = -1$. Es importante resaltar que en el periodo elegido la situación bursátil atraviesa un periodo de caídas notables y resulta razonable desear que la perdida sea algo negativa en lugar de positiva, ya que los registros durante esos años dan valores con medias no positivas.
En segundo plano, introducimos al alumno en el uso de un programa sencillo de optimización que proporciona la hoja de cálculo Excel. El hecho de que este programa este tan extendido y resulte tan familiar nos proporciona un elemento de fácil accesibilidad, de forma que nos permite simplificar aún más si cabe los problemas que aquí se plantean. En la figura 1 se muestran los cálculos que ha elaborado el alumno siguiendo el modelo de Konno y Yamazaki. Es necesario calcular todos los parámetros que hemos introducido, así en la fila 3 aparecen los promedios r_j desde el 30 de diciembre de 2005 hasta el 30 de diciembre de 2010, de los cinco valores que conforman la cesta que queremos estudiar. En las filas 7-11 aparecen las los promedios inter-anuales r_{jt} de cada valor desde el año 2006 hasta el 2010 (necesarios para poder calcular las

diferencias $(r_{jt} - r_j))$. En la columna $X15 : X19$ se realizan las operaciones proporcionadas por el programa Excel $SUMAPRODUCTO(Sj : Wj; S23 : W23)$ para $j \in [15, 19]$ y en la columna $Y15 : Y19$ se computan los productos $SUMAPRODUCTO(Sj : Wj; S23 : W23)$ para $j \in [15, 19]$. Estas operaciones representan productos escalares y proporcionan las restricciones del modelo de Konno y Yamazaki asociadas a 4.3 y 4.4. Las celdas $S22 : W22$ corresponden a las variables que queremos minimizar, es decir las desviaciones absolutas respecto de la rentabilidad media esperada, y las celdas $S23 : W24$ el tanto por uno asociado a cada valor bursátil fijado previamente. La última fila $S25 : W25$, se han generado unas celdas que permiten obtener diferentes distribuciones de los activos que forman la cartera. En ellas se obtienen de forma aleatoria, es decir utilizando la sentencia de Excel $ALEATORIO()$, diferentes porcentajes para cada activo que conforman la cesta. Así podemos observar como obteniendo diferentes distribuciones se pueden obtener distintas desviaciones absolutas. Para cada distribución, se calcula la mínima desviación absoluta respecto de la rentabilidad media esperada de la cartera utilizando el programa SOLVER.

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1		RENTABILIDAD DE LOS ACTIVOS rj							
2		Ibex 35	SAN	BBVA	BKT	POP	SAB		
3		7,6572E-05	4,35798E-05	-0,00025894	-0,00035055	-0,00048776	-0,00034875		
4									
5	RENTABILIDAD DEL PERIODO rjt								
6	Periodo	Ibex 35	SAN	BBVA	BKT	POP	SAB		
7	Periodo 2006	0,00112326	0,00099699	0,00081239	0,00105113	0,00117778	0,00172209		
8	Periodo 2007	0,00033174	0,000266742	-0,00024901	0,000426	-0,00055968	-0,00045716		
9	Periodo 2008	-0,00166693	-0,002521182	-0,00209894	-0,002201	-0,00201697	-0,00142888		
10	Periodo 2009	0,00115413	0,002530132	0,00188567	0,00078246	-0,00030697	-0,00070909		
11	Periodo 2010	-0,00055771	-0,001051073	-0,00163576	-0,00179845	-0,00073633	-0,00086926		
12									
13	RENTABILIDAD DE LOS ACTIVOS - RENTABILIDAD DEL PERIODO ajt								
14	Periodo	Ibex 35	SAN	BBVA	BKT	POP	SAB		
15	Periodo 2006	0,00104669	0,000953411	0,00107133	0,00140168	0,00166554	0,00207084	0,0014250659	-0,0014250659
16	Periodo 2007	0,00025517	0,000223162	9,932E-06	0,00077654	-7,1916E-05	-0,00010841	0,0001840113	-0,0001840113
17	Periodo 2008	-0,0017435	-0,002564762	-0,00183999	-0,00185045	-0,00152921	-0,00108012	-0,0019129707	0,0019129707
18	Periodo 2009	0,00107756	0,002486552	0,00214461	0,00113301	0,00018079	-0,00036033	0,0012995820	-0,0012995820
19	Periodo 2010	-0,00063428	-0,001094653	-0,00137682	-0,0014479	-0,00024857	-0,0005205	-0,0009907932	0,0009907932
20									
21								Minimizar las desviaciones absolutas	
22		Y/Periodo	0,001456197	0,0001447	0,00173628	0,00103133	0,00089169	0,00105204	Total presupuesto
23		X/activo fin.	0,23	0,23	0,21	0,26	0,12	1	100%
24			19%	23%	21%	26%	11,50%		
25			0,676655189	0,81952162	0,74792803	0,93076035	0,41268248	3,587547674	
26									
27		Tasa de rentabilidad del inversor							
28		-0,00028894	-1						

Figura 1: Hoja Excel.

El programa SOLVER es una herramienta que nos proporciona Excel y nos permite encontrar soluciones de un problema lineal o no lineal sujeto a ciertas restricciones. Para activar este programa es necesario acceder la menu herramientas y activarlo en los complementos de Excel. Una vez que lo tenemos disponible es necesario seleccionar las celdas que corresponden a las variables del problema, en nuestro caso seleccionaremos el rango S22:W22 en el campo "Cambiando las Celdas". Seguidamente tenemos que introducir en el campo "Sujeta a las siguientes restricciones" aquellas celdas que hemos configurado para simular las restricciones. En la figura 2 se puede apreciar las condiciones que hemos introducido en el ejemplo que muestra este trabajo.

Figura 2: Solver: variables, función objetivo y restricciones.

En la ventana de los parámetros de Solver aparece el botón Options que nos permite seleccionar determinados criterios de convergencia de los métodos implementados para encontrar la soluciones del problema que se pretende optimizar, ver la figura 3.

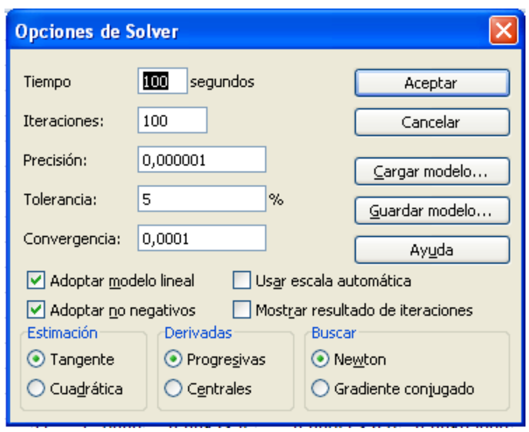

Figura 3: Opciones del Solver.

3 Conclusiones

A través de esta experiencia, se constata que el alumno pone en práctica conocimientos adquiridos en otras materias, y utiliza las matemáticas como herramienta de cálculo que le permite tomar decisiones y analizar resultados obtenidos de una modelización. En este ejemplo se muestra como el alumno ha realizado un ejercicio de investigación con el fin de optimizar un problema real que está directamente relacionado con su formación. Ha interiorizado el sentido de la optimización y es capaz de distinguir los diferentes grados de complejidad que se presentan en función de que tipo de ecuaciones y restricciones se pueden plantear y de aquí extraer una utilidad imprescindible de las matemáticas que han sido contextualizadas en el ámbito que a ellos les afecta. Por otra parte han aprendido utilidades informáticas de fácil uso que les permite realizar cálculos iterativos que revisten cierta complejidad matemática.

Referencias

[1] Konno, H. and Yamazaki, H. *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market*, MAnagement Sciencie, **37**, 5 (1991), pp 77-91.

[2] Markowitz, H.M *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investment*, Journal of Finance, March (1952), pp 77-91.

[3] Sánchez-Pérez J.V., Garcia Raffi L.M. y Sánchez Pérez E.A., *Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los cursos de las carreras técnicas*, Enseñanza de las Ciencias, 1999, 17(1), 119-129.

[4] D. Villalba Vilá, *Un modelo de selección de cartera con escenarios y función de riesgo asimétrica*, Rev. Española de Financiación y Contabilidad, Vol. XXVII **96**, 1998, pp 613-637.