

La modelización matemática en cuarto de la ESO

L. Sierra

IES MOIXENT. MOIXENT (VALÈNCIA)

losiegal@doctor.upv.es

L.M. Garcia-Raffi

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

lmgarcia@mat.upv.es

Joan Gómez i Urgellés

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

joang@ma4.upc.edu

Abstract

En este trabajo se presenta un ejemplo de cómo enseñar las matemáticas desde una perspectiva diferente y motivadora para los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). La realización de modelos matemáticos es una actividad creativa que, dirigida de forma adecuada, se puede introducir de forma sencilla. Esto implica una renovación tanto de las metodologías en el aula como del tipo de habilidades evaluadas en los estudiantes, especialmente dentro de unos objetivos genéricos que van desde la formación de ciudadanos competentes matemáticamente, hasta los primeros pasos en la formación de los futuros científicos, técnicos y matemáticos. La modelización matemática es una forma diferente de presentar y trabajar las matemáticas en el aula, que permite, además, acercarlos al universo de sus intereses, influyendo en los resultados conseguidos. En este trabajo se presenta la experiencia que ha empezado a llevarse a término en el IES Moixent y el trabajo ya desarrollado hasta ahora.

In this paper we present an example of teaching mathematics from a different and motivating point of view for students of Compulsory Secondary Education (ESO). Mathematical modelling is a creative activity that properly directed, it could be introduced in the classroom in a easily and effectively way. This implies a renovation of both methodologies in the classroom and the type of skills evaluated on students. Mathematical modelling is a different way of presenting and working mathematics in the classroom, closer to the students interest, that has influence in the results achieved. This paper presents the experience that took place in the IES Moixent and the work already developed so far.

Keywords: Modelización Matemática, Funciones, Competencias Básicas, Trabajo Cooperativo, Educación Secundaria Obligatoria.

1 Introducción

Desde que se elaboran los informes PISA[19, 20] (desde 1997 hasta 2009), existe cada vez más una preocupación social por el nivel de competencia en las diferentes disciplinas que tiene los jóvenes españoles y europeos. Una de las disciplinas que se considera esencial en la formación de un ciudadano (Alsina, II Jornadas i-Math de Modelización Matemática, 2010) y que sirven de referencia para medir el grado de desarrollo de una sociedad, es la de Matemáticas. Mucho se ha avanzado en los últimos años respecto a qué se entiende por competencia matemática, cuál es la mejor forma de introducir los conceptos, cuál es el papel que deben jugar los problemas, etc. Desde el ICMI XIV[5], la modelización se ha establecido como una herramienta útil para aproximar las Matemáticas al ciudadano. La modelización, además de ser la herramienta de la Ciencia y la Tecnología, se ha convertido en una herramienta muy útil para trabajar desde las Matemáticas el binomio Ciencia-Sociedad así como afianzar la dimensión cultural y antropológica de esta disciplina. Las Matemáticas se establecen, así, como una producción humana que sirve, junto con el lenguaje, para describir el mundo que nos rodea. Además en el último informe PISA 2009[19] se *“incorpora la evaluación del concepto de competencia básica que tiene que ver con la capacidad de los estudiantes para extrapolar lo que han aprendido y aplicar sus conocimientos ante nuevas circunstancias y su relevancia para el aprendizaje a lo largo de la vida”*. Se ha hecho hincapié en la medida en cómo los alumnos aplican el conocimiento adquirido, que es una de las piedras de toque en la estrategia de enseñanza-aprendizaje usando la modelización. En particular, se afirma en el informe español de 2009 que *“PISA evalúa competencias básicas de acuerdo con la definición y selección de competencias clave adoptada por OCDE (Rychen & Salganik, 2003). Es decir, PISA trata de valorar hasta qué punto los alumnos son capaces de usar los conocimientos y destrezas que han aprendido y practicado en la escuela cuando se ven ante situaciones en las que esos conocimientos pueden resultar relevantes”*.

Sin embargo, resulta muy llamativo el hecho de que sólo existen intentos aislados de usar la modelización dentro del aula para ayudar a nuestros alumnos a aprender los conceptos matemáticos, a interiorizar las ideas que hay detrás de ellos, a comprender que las matemáticas son también un lenguaje para describir y entender la realidad que nos rodea. Existen experiencias a nivel universitario (Ll. García [26], J. Gómez[14], J.A. Montero[21] entre otros) y también a nivel de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (Grup ZERO[3], grupo CERO[7], Grup VILATZARA[17], M. Sol[27], Ll. Albarracín[1] entre otros).

Éste es un trabajo donde se van a plantear los elementos para una renovación tanto en las metodologías utilizadas en el aula, como en el tipo de habilidades evaluadas en los estudiantes, utilizando como herramienta fundamental la modelización. Observando los resultados obtenidos hasta ahora y el nivel de motivación alcanzado por los alumnos, podemos considerar la modelización como una herramienta didáctica más, en el campo de las matemáticas.

1.1 Modelización Matemática

Se pueden encontrar muchas definiciones de lo que es la modelización matemática y todas ellas comparten un punto en común, acceder y explicar el mundo real a través de las matemáticas.

Según el ICMI XIV[5], la Comisión Internacional de Enseñanza Matemática define la modelización como:

- *We use the term “Applications and modelling” to denote any relation whatsoever between*

the real world and mathematics

Se usa el término “Aplicaciones y Modelización” para indicar cualquier relación, sea la que sea, entre el mundo real y las matemáticas.

Es una definición con carácter muy general, puesto que ha de considerarse válida en todos los países y todos los ámbitos culturales.

Una definición que muestra muy bien el tipo de modelización que se ha llevado a cabo en esta experiencia es la de Joan Gómez que afirma que:

- *MODELATGE MATEMÀTIC: consisteix a formular un problema real en termes matemàtics, resoldre'l si és possible i interpretar-ne els resultats en termes del problema i de la situació estudiada.*

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: consiste en formular un problema real en términos matemáticos, resolverlo si es posible e interpretar los resultados en los términos del problema y de la situación estudiada.

Esta definición aparece en la página 11, del libro “*Per un nou ensenyament de les matemàtiques*” de Joan Gómez (2000) [13], que define de forma breve pero concisa qué es la modelización matemática.

Y, finalmente, Morgen Niss (1989) define, de una manera casi poética, la modelización como el arte de aplicar las matemáticas a la vida real.

- “*La modelización es el arte de aplicar las matemáticas en la vida real*”.

1.2 Objetivos

Los objetivos que queremos conseguir con las prácticas de modelización son los siguientes:

- Crear un vínculo entre el mundo real y las matemáticas que los alumnos están o han estudiado. Aplicación práctica de las matemáticas.
- Aprendizaje activo. El alumno es el protagonista y tiene que tomar sus propias decisiones.
- Realizar trabajo cooperativo (grupos reducidos). Compartir opiniones y estrategias entre ellos.
- Aprender a buscar información y distinguir la que es relevante para resolver el problema, de la que no lo es.
- Saber obtener conclusiones del problema, basándose en los resultados matemáticos obtenidos.
- Desarrollar la motivación y el interés por las matemáticas.
- Aprender de los errores.
- Aprender a reproducir los resultados conseguidos por otros y, a partir de ellos, generar nuevos.

1.3 Competencias básicas de secundaria desde el punto de vista de la modelización

Una vez definida la modelización, hay que valorar el papel que tiene la modelización matemática en la adquisición de las competencias básicas de secundaria, entendiendo el término competencia como la capacidad de poner en práctica e integrar los conocimientos, habilidades y actitudes adquiridas para resolver problemas y situaciones en contextos diversos.

Las competencias básicas aparecen por primera vez en nuestro sistema educativo con la implantación de la LOCE (Ley Orgánica de Calidad de la Enseñanza) en el año 2002, donde se habla de competencias valoradas a través de una prueba diagnóstica, sin efectos académicos, sólo con carácter informativo y orientador. Con la aparición de la LOE (Ley Orgánica de Educación) en el 2006, las competencias pasan a ser una parte evaluable del currículo como son los objetivos o los contenidos del curso.

Así pues, podemos determinar de qué manera la modelización guarda relación con dichas competencias:

- **Competencia matemática:** A través de la modelización se desarrolla la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con el fin de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella formando parte del propio aprendizaje.
- **Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico:** La distinción de formas, relaciones y estructuras como herramientas básicas para desarrollar representaciones abstractas del mundo.

En el artículo “*Cuatro métodos para medir la altura del campanario de Moixent*” (L. Sierra, 2011) de este mismo volumen, los alumnos han pasado de una forma concreta, el campanario, a una interpretación en abstracto, lado de un triángulo, para poder realizar las mediciones.

- **Competencia digital y tratamiento de la información:** La búsqueda y selección de la información necesaria para cada trabajo, tanto en medios escritos como en digitales.
- **Competencia aprender a aprender:** A través de las prácticas de modelización, los alumnos, primero aprenden qué deben hacer y después lo aplican a nuevas situaciones, descubriendo y aprendiendo de cada uno de los caminos a los que les ha dirigido la práctica.
- **Competencia en comunicación lingüística:** Se utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de ideas. Aprender a transmitir, ayuda a la comprensión. Convencer con argumentos científico-matemáticos.
- **Competencia de autonomía e iniciativa personal:** Planificar estrategias, asumir retos y controlar los procesos en la toma de decisiones. Interpretar la información a través de las matemáticas, de forma numérica o funcional.

Un ejemplo sería el caso de una factura telefónica y el consumo realizado en relación con el coste de la línea.

- **Competencia social y ciudadana:** En muchas experiencias de aula basadas en la modelización, se utiliza el trabajo en grupo que crea una interrelación entre los estudiantes, compartiendo y escuchando las diferentes opiniones de los miembros del grupo.

En modelización, esta competencia tiene especial importancia porque aprenden a trabajar en grupos, a argumentar sus propias decisiones y escuchar la de los demás (habilidades muy útiles para desenvolverse en la vida laboral realicen el trabajo que realicen).

- **Competencia artística y cultural:** Introducir las Matemáticas en el ámbito cultural. Un ejemplo de ello se muestra en el artículo “*Cuatro métodos para medir la altura del campanario de Moixent*” (L.Sierra, 2011) de este mismo volumen, donde se trabaja un elemento de la cultura del pueblo de Moixent desde el punto de vista matemático, calculando su altura, empleando diferentes métodos matemáticos.

2 Experiencia en el IES Moixent, curso 2009-2010

2.1 Tema elegido: Funciones

A la hora de plantearnos la actividad de modelización, hemos elegido un tema que está presente en todos los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria. Este tema es el de funciones. En los primeros cursos, se comienza con la construcción de tablas de valores y la interpretación de datos y gráficos, y se acaba en los últimos, con el estudio de funciones no lineales y su interpretación en el mundo real[8]. Este hecho, nos proporciona perspectiva y comparación a la hora de evaluar los objetivos y contenidos que nuestros alumnos han ido adquiriendo a lo largo de toda la etapa.

Este tema en concreto, en el curso de cuarto de la ESO, se da en la tercera evaluación, lo cual nos proporciona algunas ventajas como el hecho de que los alumnos ya se han acostumbrado al ritmo de las clases, a lo que cada profesor exige en su asignatura o la conexión creada entre los alumnos a la hora de trabajar y convivir en la clase. Todos estos aspectos son importantes a la hora de llevar a cabo un trabajo en equipo como es el nuestro.

En las prácticas de modelización los contenidos curriculares que se han trabajado son los siguientes:

- Construcción de una tabla de valores.
A partir de una situación real, los alumnos tienen que entender el problema y encontrar cuáles son las variables que necesitan para poder empezar a buscar datos y construir las tablas.
- Definición de una función de forma explícita.
Una vez construidas las tablas y analizadas las variables que intervienen en el problema, llegar a la definición explícita de una función lineal.
- Uso de las TIC. Utilización de una hoja de cálculo para construir tablas y gráficas.
Ayudándose de los programas informáticos adecuados, los alumnos calculan los valores de las funciones que han definido y pueden realizar su representación gráfica.
- Representación gráfica de las funciones.
Esta representación ha sido realizada por parte de los alumnos tanto a mano como utilizando los ordenadores.

Para la realización de estas prácticas, los alumnos necesitan procedimientos de cálculo y conceptos que se han dado en este curso o en cursos anteriores, como son:

- Resolución de ecuaciones con dos incógnitas, por tanteo o expresando una variable en función de las otras.

- Construcción de tablas de valores. Utilización de una hoja de cálculo para la construcción de tablas y gráficas de funciones.
- Concepto de mínimo absoluto, crecimiento y continuidad.
- Cálculo de la ecuación de una recta a partir de dos puntos dados.
- Concepto y cálculo de la media aritmética.
- Uso de procesadores de textos para la presentación de los trabajos.

2.2 Material utilizado

Las prácticas de modelización requieren un guión que introduzca a los alumnos en las diferentes partes del proceso, especialmente para poder separar las habilidades:

- Reconocimiento de los elementos importantes de un problema.
- Selección de la información relevante para la resolución.
- Formalización matemática: definición de variables y construcción de las ecuaciones que resuelven el modelo.
- Resolución del problema matemático.
- Interpretación del resultado y validación del modelo.

Uno de los objetivos de este proyecto es establecer la modelización como una herramienta práctica, que sea posible llevar a cabo en el aula en condiciones estándar y equiparable a cualquier otra de las que habitualmente se desarrollan en ella, como son la clase magistral, las sesiones de resolución de problemas (bien individuales o bien grupales), la clase dialogada,...

La modelización tiene que poderse implantar por cualquier profesor de matemáticas de secundaria. Es en base a estas dos premisas por lo que se ha desarrollado un "Material del profesor" y también un "Material del alumno". Y, además, diseñar herramientas que nos permitan conocer los resultados obtenidos.

- a) Test de modelización.
- b) Cuestionario de intereses.
- c) Cuestionario de opinión.

A continuación se mostrará cuál ha sido el material elaborado, de forma detallada, para llevar a cabo las prácticas de modelización en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Material del profesorado

Uno de los principales objetivos de este trabajo, es producir un material didáctico que sea accesible a todo el profesorado de secundaria, de tal forma que las prácticas de modelización se conviertan en un elemento más dentro del aula y la actividad, una más de las que se puedan realizar. En ese caso debemos de definir cuidadosamente el tipo de material con el que vamos a apoyar el desarrollo de la misma. Es por ello que hemos considerado que debía de existir una guía didáctica del profesorado. En ella se especifican cuáles son los objetivos que los alumnos deberían alcanzar a través de la modelización y los diferentes puntos que se han de tener en cuenta a la hora de poner la actividad en marcha. Estos puntos se detallan a continuación:

1. Presentación del problema que se quiere estudiar: buscar preguntas que despierten el interés de los alumnos sobre el tema a tratar, para, a continuación, presentar los problemas que se plantean en las prácticas, relacionándolos con las preguntas que se les han realizado.
2. Organización de la actividad: se cuenta a los alumnos cómo se va a llevar a cabo la actividad, en grupos reducidos de dos o tres personas como máximo, donde una parte del trabajo se realizará en sesiones colectivas dentro del horario escolar y otra parte, fuera de este horario.
3. Recursos con los que cuentan los alumnos: en este trabajo los alumnos van a tener que buscar información y para ello, tendrán que utilizar todos los recursos que encuentren a su alcance, como internet, revistas, facturas,...
4. Metodología: es un trabajo en grupo, como se ha comentado anteriormente, donde contarán con la ayuda del profesor. El trabajo se divide en tres partes: una, el seguimiento del guión de prácticas, familiarizándose con el lenguaje empleado, así como, entendiendo cada tabla o cada resultado obtenido; dos, creación de un trabajo escrito, donde se mostrará el tipo de investigación y el modelo que han empleado; y, por último, una exposición oral del trabajo.
5. Evaluación de las prácticas: a partir de la plantilla de evaluación, de la cual, hablaremos en los párrafos siguientes.

También se elaboró la guía didáctica específica de cada una de las prácticas que se realizaron. En ésta se recogen cada uno de los puntos mencionados anteriormente, haciendo referencia a los contenidos específicos en cada una. Esto es, en la guía general se añadirían los contenidos y la temporalización particulares de cada práctica y un anexo donde aparecería la práctica resuelta. Con este material, lo que se pretende es facilitar la tarea del profesorado que se enfrenta por primera vez a este tipo de trabajos en el aula.

Para realizar un seguimiento detallado de cada una de las sesiones empleadas en las prácticas de modelización, se ha elaborado un diario del profesor, donde se anotan las dificultades que sesión a sesión los alumnos van encontrando a la hora de realizar el trabajo. Además, este diario recoge también los errores que se van detectando y las propuestas de mejora que surgen para la elaboración de futuras prácticas. M. Aravena y J. Giménez [2] utilizan también un diario del profesor en sus trabajos de modelización.

La evaluación no es una tarea sencilla. De hecho es la parte que menos gusta a la mayoría del profesorado, como afirman Millis y Cottell(1998), ya que requiere dos cosas fundamentales, objetividad y justicia. La objetividad se puede conseguir seleccionando desde el principio cuáles van a ser los puntos que se van a evaluar del trabajo. Así pues, para la evaluación de las prácticas se ha elaborado una plantilla de evaluación, donde se recogen todos los puntos que se van a tener en cuenta a la hora de evaluar los trabajos, tanto a nivel grupal como individual.

En otros trabajos de modelización, como podrían ser los de Manel Sol o Joan Gómez, aparecen materiales similares para la evaluación de las prácticas.

Esta plantilla se les proporciona también a los alumnos, ya que conocer el qué y el cómo de lo que se les va a evaluar, sirve para orientarlos y centrarlos en la elaboración de sus trabajos.

Material del alumno

Para la realización de las prácticas, se ha elaborado un material específico para los alumnos de manera que les facilite la realización de las mismas. Se les proporciona el guión de las prácticas

de modelización, donde en la portada aparece el título de la práctica y el índice con su contenido. A continuación, se muestra de una manera atractiva, un ejemplo de una modelización sencilla, que les sirva a los alumnos para la construcción de su propio modelo. A lo largo de la práctica, se van mostrando datos y resultados que los alumnos tienen que ser capaces de reproducir. También aparecen preguntas relacionadas con los resultados obtenidos que tienen que contestar. Para finalizar la práctica, se les presenta un cuestionario relacionado con todo lo que han hecho a lo largo de ella. Además, se les hacen propuestas para ampliar el trabajo y se muestran opciones de prácticas similares donde poder aplicar el mismo modelo.

El guión de prácticas, también llamado, práctica de modelización, es utilizado por otros profesores (L. García [9, 26], Joan Gómez [14], ...) en sus trabajos de modelización matemática.

Al igual que se ha elaborado un diario del profesor para llevar un seguimiento detallado de las prácticas, también se ha confeccionado un diario del alumno, donde cada grupo anota todo el trabajo realizado en cada sesión, las dificultades que han ido encontrado, los contenidos que han trabajado y las conclusiones que han obtenido. Esto les sirve, tanto como reflexión sobre el trabajo que han ido realizando, como de asentamiento de los contenidos y metodologías utilizadas.

En un artículo de M. Aravena y J. Giménez (2002)[2], se muestra un material similar, ellos lo llaman “Tabla de análisis de tareas realizada”, donde los alumnos han de contestar también a una serie de preguntas planteadas en cada uno de los talleres realizados.

Los alumnos no están habituados a realizar trabajos en grupo y menos en la asignatura de matemáticas, así que les proporciona la plantilla de evaluación de la que se ha hablado anteriormente para que tengan un conocimiento a priori de qué es lo que se espera de ellos a nivel de evaluación, de adquisición de contenidos y habilidades.

Test de modelización

La metodología propuesta depende de la capacidad que tienen los alumnos de relacionar situaciones reales de la vida cotidiana con el conocimiento previo en matemáticas. Es por ello que, antes de pasar por las prácticas de modelización se elaboró un test de modelización donde se realizaban preguntas sencillas relacionadas con su vida cotidiana que tenían que contestar, aplicando las matemáticas que hasta ese momento conocían (Katja Maaß, 2006 [18]).

Algunas de las preguntas del test estaban relacionadas con el uso de la proporcionalidad. Por ejemplo, se les preguntaba cuánto tiempo estaban hablando por el móvil en un día con el objeto de que ellos hicieran un cálculo aproximado del tiempo que invertían en un día y lo multiplicaran por 7 para contestar al tiempo invertido en una semana o por 30 en el caso de un mes. También aplicaron este mismo criterio cuando se les preguntó por las medidas de un pupitre para un solo alumno, dos, tres, cuatro o cinco. Tomaron las medidas de un pupitre (largo y ancho) y debían calcular el doble, el triple, y así sucesivamente.

Una de las preguntas hacía referencia al cálculo de una estimación: “*La altura del campanario de Moixent*”. La respuesta dada por la mayoría de los alumnos fue de 45 metros y todos coincidieron en esta cifra. La dieron sin dar explicación alguna de cómo había sido hecho su cálculo. Así pues, se les preguntó que cómo lo habían averiguado y unos contestaron que lo habían buscado por internet, pero la mayoría contestó que habían ido a preguntarle al sacerdote del pueblo, y él les había dicho que medía aproximadamente 45 metros. De aquí surgió un *trabajo de campo* (L. Sierra, 2011) muy interesante, sobre todo para los alumnos.

Cuestionario de intereses

Antes de comenzar las prácticas, se elaboró un cuestionario que contaba con una serie de preguntas, a través de las cuales, se quería obtener la información necesaria acerca de cuáles eran los intereses y motivaciones de nuestro alumnado, para así, después, poder elaborar unas prácticas de modelización, con temáticas cercanas a ellos, que pudieran conectar con sus intereses. **Motivar**, es uno de los los ejes principales de nuestra propuesta metodológica.

Cuestionario de opinión

Una vez finalizadas las prácticas de modelización se elabora un cuestionario donde se pregunta a los alumnos qué les han parecido las prácticas, qué dificultades han encontrado o si los temas que se han tratado les han resultado interesantes o no, así como cuáles proponen ellos para futuras prácticas.

La información proporcionada por este cuestionario es útil a la hora de volver a poner en práctica una metodología como ésta, ya que, refleja lo que ha funcionado bien y lo que no. También nos puede aportar nuevas ideas para la elaboración de futuras prácticas de modelización, de manera que conecten mejor con los intereses de nuestros alumnos.

2.3 Realización de la experiencia

Durante toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria, la asignatura de Matemáticas tiene un carácter obligatorio con unos contenidos que son prácticamente los mismos a lo largo de toda la etapa. Esto nos lleva a plantearnos la utilización de nuevas metodologías que ayuden a nuestros estudiantes a adquirir las habilidades y conceptos que durante toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria tenían que haber ido adquiriendo.

En cuarto de la ESO, las matemáticas presentan una peculiaridad: están divididas en dos opciones y son los alumnos los que eligen cuál de las dos quieren cursar. En la opción A, las matemáticas son más aplicadas y tienen un carácter terminal, es decir, los estudiantes que las eligen no deberían volver a cursarlas en cursos posteriores; y en la opción B, el grado de formalización y profundización de los contenidos es mayor. Esta última debe ser elegida por aquellos alumnos que pretenden continuar sus estudios de bachillerato en una opción científico-técnica.

El grupo elegido para la realización de la experiencia objeto de este trabajo, fue un curso de cuarto de la ESO, opción A, del IES Moixent. Éste estaba formado por 27 alumnos, de los cuales cinco tenían las matemáticas de tercero pendientes, había un alumno repetidor de tercero y dos repetidores de primero, entre todos representaban casi un 30% de la clase. Estos datos dan una visión general de las características del grupo donde se realizó la experiencia. Se eligió este curso porque tenía los conocimientos y las habilidades necesarias a priori para poder llevar a cabo las prácticas. Estas prácticas se plantearon como una actividad complementaria de clase evaluable y puntuable en la nota final de curso.

El desarrollo de la actividad se realizó en grupos reducidos de dos o tres alumnos. Esto permitiría el trabajo y la colaboración entre ellos a la hora de enfrentarse al problema planteado (es lo que se conoce como trabajo cooperativo (E.F.Barkley y otros, 2007) [4]). Esta forma de trabajar les permite la opción de debatir, intercambiando puntos de vista, comparar y elaborar los resultados conjuntamente, facilitando de esta manera la integración de alumnos que tienen diferentes niveles académicos y socioculturales. John Dewey (1938) afirma *“que se aprende*

haciendo". Los alumnos se convierten en los protagonistas de su propio aprendizaje.

La formación de los grupos se realiza libremente, según la elección de los alumnos. El profesor podrá orientar a los alumnos para que los grupos sean heterogéneos, y que la elección de compañeros se rija por criterios realistas:

1. Tener disponibilidad de horario y además que los horarios de todos los miembros del grupo sean compatibles.
2. Considerar la situación geográfica de los domicilios de los miembros del grupo, de manera que todos puedan reunirse en un mismo lugar sin demasiadas dificultades.
3. Responsabilidad frente al trabajo.
4. Atender a condicionamientos del tipo cultural y socioeconómico (valorar la concentración cultural). Esto podría llevarlos a un trabajo enriquecedor culturalmente.

Una vez constituidos los grupos, se explica a los alumnos en qué consiste el trabajo que van a desarrollar, presentando las dos prácticas de modelización que pueden elegir; una, sobre las tarifas de los móviles y la otra, sobre las calorías consumidas durante la realización de algún tipo de deporte. Esta presentación se realiza de la manera más atractiva posible para los alumnos y de forma que capte su atención. Una buena forma de comenzar es plantear preguntas personales sobre los temas a tratar, como: *¿Tenéis móvil? ¿Sabéis si la tarifa que tenéis actualmente es la que más os interesa? ¿Practicáis algún deporte? ¿Cuántas calorías pensáis que consumís durante su realización?...* Para captar su atención, se presentan los problemas a estudiar mediante situaciones reales y materiales obtenidos a través de recursos cercanos a los alumnos, como son; internet, medios de comunicación, publicidad, etc.

Una vez presentadas las temáticas se les proporciona a cada grupo el guión de las prácticas (del cual ya se ha hablado en el apartado anterior), para que de este modo los alumnos puedan elegir la que les resulta más interesante observando la organización y el trabajo presentados en cada una.

La formación de los grupos de trabajo y la presentación de las prácticas, necesita una sesión entera para poder llevarse a cabo. Durante las sesiones siguientes se trabaja de un modo más específico sobre cada práctica y en cada grupo en particular. A los alumnos se les ha proporcionado el material necesario (el guión de la práctica) para iniciar el trabajo. A través de este material, deben ir familiarizándose con el lenguaje utilizado, ir entendiendo la información mostrada y deduciendo como se ha ido obteniendo. En esta primera fase, se trata de reproducir e interpretar los datos y resultados que se van mostrando. Esto les servirá para entender un ejemplo sencillo de modelo y a partir de éste, ir creando el suyo propio, ya sea basándose en el mostrado en la práctica o creando uno totalmente diferente.

La finalización de las prácticas concluye con una presentación escrita de los trabajos y una exposición oral por parte de los miembros del grupo. Para la elaboración de dichas prácticas, se facilita a los alumnos una plantilla de evaluación, de la cuál ya se ha hablado en el apartado anterior, donde quedan recogidos todos los puntos evaluables de las mismas. Con esto se consigue que los alumnos se organicen el trabajo, sabiendo en cada momento qué se les va a exigir. Los alumnos no están acostumbrados a trabajar de esta manera, y menos en la asignatura de matemáticas. Así pues, necesitan mucha ayuda y orientación.

Las prácticas de modelización se han organizado mediante sesiones de cuatro tipos: sesiones colectivas, sesiones de tutoría, sesiones grupales y exposiciones orales, de ellas hablaremos de

forma específica a continuación.

Sesiones colectivas

Se realizan dentro del horario lectivo, semanalmente y con todos los alumnos de la clase presentes. Las sesiones comentadas anteriormente se consideran sesiones colectivas.

En estas sesiones se resuelven dudas de carácter general que van surgiendo en cada grupo, de manera que si una duda se generaliza, se puede comentar para toda la clase. Si no es así, la duda se resuelve de forma individual dentro del grupo. Una parte de las sesiones se realiza en el aula y otra, en la sala de informática, donde los alumnos pueden realizar la búsqueda de la información necesaria para realizar sus trabajos y además preguntar las dudas que les surgen a la hora de utilizar los diferentes programas informáticos (procesador de textos, hojas de cálculo,...). Esto confiere a la actividad de modelización un carácter horizontal, ya que implica a otras materias del mismo curso. Durante estas sesiones, también se les explica a los alumnos cómo se les evalúa el trabajo, cuáles son los puntos a considerar y se les proporciona la plantilla de evaluación que los recoge (de esta plantilla se ha hablado en el apartado anterior).

Todas estas sesiones se graban en video recogiendo de esta forma la información sobre el desarrollo de la actividad, las dudas surgidas en cada grupo y el proceso de elaboración de los trabajos de modelización.

La duración de estas sesiones es de aproximadamente dos meses, desde el inicio hasta el comienzo de las exposiciones orales.

El objetivo final es resolver dudas particulares surgidas a cada grupo de manera general, es decir, las dudas surgidas a otros compañeros pueden ayudar a los demás. También se consigue de esta manera hacer una puesta en común de los trabajos, orientar a los grupos y crear un hábito semanal, es decir, todas las semanas tienen que dedicar un tiempo de trabajo y reflexión a las prácticas y además tienen a un profesor con ellos para resolver cualquier problema que surja.



Figura 1: Fotos tomadas durante una de las sesiones colectivas.

En la figura 1 se muestran dos fotos tomadas durante una de las sesiones colectivas realizadas en el aula de cuarto de la ESO.

Sesiones de tutoría

Estas sesiones se realizan también dentro del horario escolar, pero tienen un carácter menos colectivo, trabajando de forma personalizada el grupo directamente con el profesor. En estas tutorías, cada grupo debe mostrar cómo lleva el trabajo, las dudas que le han surgido hasta el momento y se realiza un análisis de cuál es el enfoque que ellos quieren dar a la práctica. De esta manera, si el grupo está atascado, se le ayuda planteando posibles caminos para poder solucionar el problema en cuestión. Estas sesiones no tienen lugar en el aula, sino en el departamento de matemáticas.

Sesiones grupales

Éstas se realizan fuera del horario escolar, es decir, cada grupo se reúne cuando quiere y en el lugar elegido por sus miembros. De este tipo de sesiones, es complicado realizar un seguimiento, pero gracias a la elaboración del diario del alumno, comentado en el apartado anterior, el profesor puede saber cuántas veces se han reunido y qué han trabajado en cada sesión. La entrega de este diario es obligatoria para todos los grupos.

Exposición oral

Los alumnos tienen que realizar un trabajo escrito de las prácticas, pero este trabajo se tiene que presentar mediante una exposición oral, la cual se realiza delante de los compañeros y del profesor. Estas sesiones tienen lugar en el aula de informática o en el salón de actos, donde se dispone de un ordenador y de un cañón para poder proyectar los trabajos. En cada sesión exponen tres grupos y después de cada exposición, se dedica un tiempo para las preguntas realizadas por los compañeros.

Todas las exposiciones son grabadas en video, ya que en ellos se recoge perfectamente cada exposición y a la hora de evaluar a cada grupo, se puede consultar cómo fue su exposición y el turno de preguntas.

Con estas exposiciones se quiere conseguir que los alumnos sean capaces de defender delante de sus compañeros y su profesor, el trabajo que han estado realizando durante dos meses, argumentando las conclusiones y defendiendo los resultados obtenidos. Esto se consigue con mucho esfuerzo y confianza en lo que se está haciendo (véase figura 2).

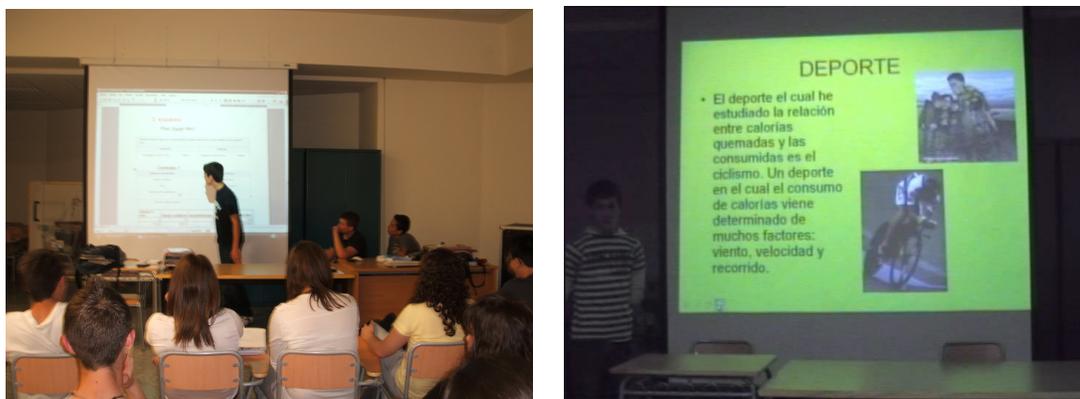


Figura 2: Exposiciones de dos prácticas de modelización.

A través de este tipo de trabajo se quiere conseguir que los alumnos descubran cómo a través de las matemáticas, se pueden resolver problemas de la vida cotidiana. Al trabajar las matemáticas

de un modo diferente al ordinario (clases magistrales), se pretende despertar motivación e interés. (M. Aravena y J. Giménez, 2002 [2]).

3 Resultados alcanzados hasta ahora

Como ya se ha dicho en apartados anteriores, esta experiencia se inició durante el curso 2009-2010, en un grupo de 27 alumnos de cuarto de la ESO. Nuestro objetivo era realizar un primer acercamiento de los estudiantes de secundaria a la modelización matemática, es decir, diseñar las herramientas adecuadas que nos permitan analizar las actividades de modelización en términos de los objetivos que deseamos alcanzar, expuestos en el apartado 1.2. En este sentido se crearon diferentes materiales, algunos para conocer cuáles eran los intereses de los alumnos (cuestionario), otros para la realización de la experiencia (las prácticas de modelización) y por último unos de control del trabajo (diarios).

Con todo esto, se consiguió generar, primero, material para llevar la modelización a las aulas y segundo, la realización de un estudio exploratorio, a partir del cual, extraer datos sobre cómo ha funcionado la experiencia.

En este apartado, realizaremos un análisis de la experiencia y de la puesta en práctica de algunos de los materiales creados.

El **cuestionario de intereses** se realizó a todos los alumnos de cuarto (tanto los de la opción A como los de la B) y también a los de primero de la ESO. Esto proporcionó perspectiva comparativa respecto de las motivaciones e intereses de los alumnos a lo largo de toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

En cuarto de la ESO, el cuestionario fue realizado por 28 alumnos de la opción A y 19 de la opción B. De entre todas las preguntas que constituían el test, hay dos cuyas respuestas llaman especialmente la atención; *quina assignatura us agrada més?* i *quina era l'assignatura a la que li trobaven major aplicació a la vida real?*. Respecto a las respuestas a la primera pregunta, de todos los alumnos de la opción A, ninguno de ellos seleccionó a las matemáticas como su preferida. Cuando se les preguntó a los de la opción B, el 63% de los alumnos la eligieron como su asignatura favorita. Ésta era una respuesta esperada puesto que los alumnos de la opción A son los que probablemente cursarán bachilleratos de letras mientras que los de la opción B, cursarán bachilleratos de ciencias.

En la figura 3 se muestran los porcentajes obtenidos por cada una de las asignaturas para ambos colectivos.

Las respuestas a la segunda pregunta, muestran, cuando menos, un resultado llamativo. Ante la cuestión de *“quina és l'assignatura a la que li trobaven major aplicació a la vida real?”*, el 39% de los alumnos de la opción A contestaron las matemáticas frente al 21% de la opción B. De esta forma se deduce que a los alumnos de la opción B les gustan las Matemáticas pero no les encuentran mucha utilidad en su entorno diario, mientras que a los de la opción A no les gustan pero sí que son capaces de reconocer que tienen utilidad dentro de su vida cotidiana. Una posible explicación que nosotros hemos dado a estas respuestas, es por el enfoque dado a las Matemáticas en la opción B, donde se las consideran necesarias en la aplicación de otras asignaturas de ciencias más que en la vida diaria y muestran las matemáticas como una herramienta de trabajo para utilizar en otras disciplinas. Mientras, en la opción A,

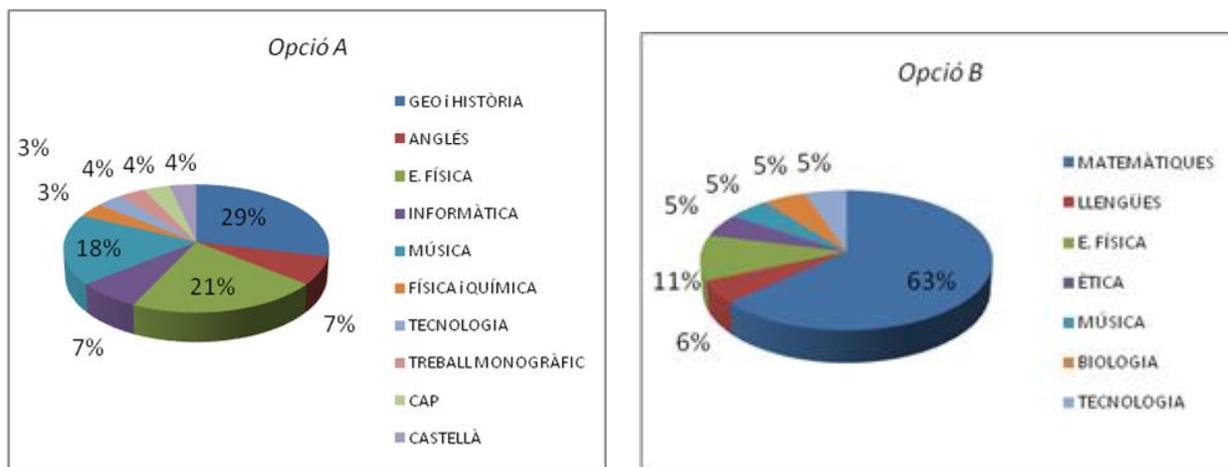


Figura 3: Quina assignatura us agrada més?

dato las dificultades que estos alumnos encuentran en la asignatura, descubren las limitaciones que tienen a la hora de desenvolverse en situaciones cotidianas que requieren algún cálculo matemático.

A continuación (véase figura 4), se muestran los gráficos que recogen las respuestas dadas por los alumnos de las dos opciones a la pregunta comentada en el párrafo anterior.

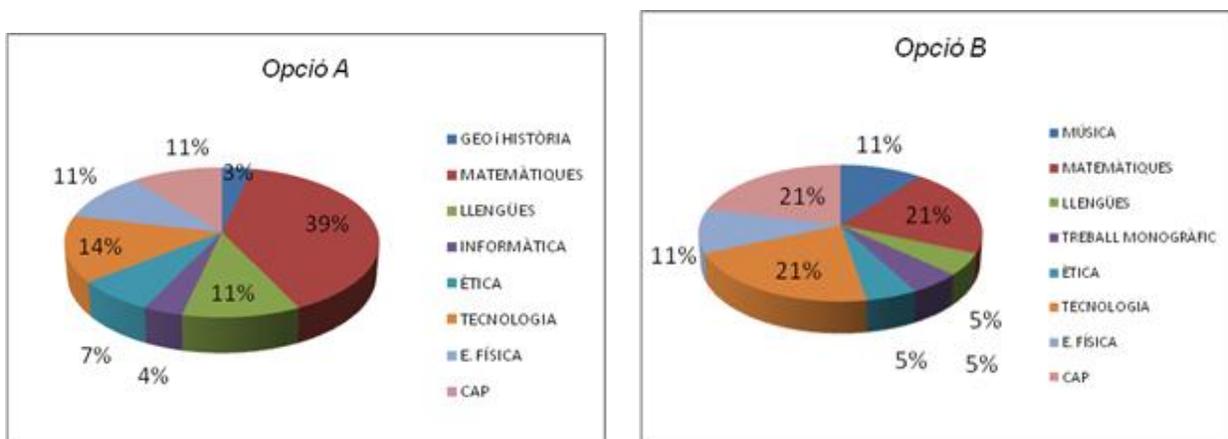


Figura 4: Quina és l'assignatura a la que li trobeu major aplicació a la vida real?

Como se ha comentado antes, este mismo cuestionario se realizó a 53 alumnos de primero de la ESO del mismo instituto y las respuestas obtenidas fueron también muy sorprendentes. Un 24% de los alumnos, eligieron las matemáticas como la asignatura que más les gustaba y además el 64% las consideraban la asignatura que más aplicación tenía dentro de su vida diaria. Estos estudiantes son los mismos que después llegan a cuarto y su percepción de las matemáticas ha cambiado por completo.

Estos resultados, aunque parciales y con una muestra pequeña, parecen indicar que existe una disfunción, ya sea en la metodología utilizada, o en el enfoque dado a las matemáticas a lo largo de toda la Educación Secundaria Obligatoria. Estudios similares encontrados en la literatura, apoyarían estas conclusiones (Gavilán, 2002)[10].

Por tanto, se deben buscar respuestas a algunas preguntas como: *¿Qué ha pasado a lo largo de esta etapa educativa? ¿Qué hace que los alumnos cambien de opinión respecto de las matemáticas?* La vía de acción que se propone en este trabajo es la realización de actividades dentro del aula que refuercen el binomio matemáticas-realidad y muestren su potencial en la interpretación de situaciones propias de la vida diaria, ayudando a tomar decisiones y a la búsqueda de soluciones prácticas basadas en criterios objetivables.

Los **trabajos escritos** presentados por los alumnos fueron, en general, buenos, es decir, estaban bien escritos, llegaban a resultados interesantes y, además, en algunos casos, incluso habían modificado la práctica propuesta. A modo de ejemplo mostraremos la práctica de “*L’esport de forma científica*”, donde se proponía a los alumnos que compararan las calorías consumidas, con las ingeridas durante la práctica de algún deporte. Un grupo decidió contar las calorías ingeridas cada día dentro de una dieta concreta (se mostraba en la práctica una tabla semanal donde se especificaba la alimentación seguida) y las calorías consumidas según el deporte o el ejercicio que realizaba cada día. Otro grupo la modificó, comparando dos deportes, la natación y el ciclismo, de manera que realizaron un estudio de las calorías consumidas en cada uno y a parte estudiaron, cuál de los dos deportes resultaba más económico si empezaban a practicarlos desde el principio, es decir, sin ningún tipo de equipamiento para su realización. Esto muestra como el guión de prácticas proporcionado a los alumnos tiene un carácter orientador y abierto a cualquier modificación. Manel Sol[27], en sus trabajos con proyectos matemáticos realistas en secundaria, no proporciona un guión de prácticas como en nuestro trabajo, pero el resultado final es el mismo, los alumnos acaban creando sus propias prácticas. La mayoría de los estos trabajos se presentaron escritos utilizando un procesador de textos.

Otra cosa que captó nuestra atención, fueron los recursos utilizados en las presentaciones orales de las prácticas, la incorporación de música, dibujos e incluso fotografías hechas por ellos mismos. De este modo podemos afirmar que la competencia en modelización, genera motivaciones hacia otras competencias, como podría ser este caso la competencia artística y cultural. Además, demostraron tener una gran soltura a la hora de presentar sus trabajos en público. Utilizaron también con gran habilidad el PowerPoint en sus presentaciones.

El resultado final ha sido muy gratificante, tanto para los alumnos (puesto que a pesar de las dificultades con las se encontraron al principio, consiguieron sacar adelante el trabajo) como para nosotros, por conseguir captar su interés por las matemáticas y observar la soltura con la que se desenvolvían durante las **exposiciones orales** de sus trabajos.

Un comentario realizado por un alumno al finalizar su trabajo fue: “*Ha segut el treball més complicat que he fet durant aquest curs*”, realmente les resultó complicado, pero al final todos los grupos consiguieron acabarlo y presentarlo.

4 Conclusiones

Esta experiencia ha resultado motivadora y creativa para los estudiantes y gratificante para nosotros pues hemos visto en ellos un grado de interés que no habían mostrado hasta ahora por la asignatura. También se han creado interrelaciones entre las diferentes asignaturas que estudian, como informática y biología.

Al analizar el trabajo realizado hasta el momento y los resultados que se han ido obteniendo, llegamos a las siguientes conclusiones:

1. La mayoría de las herramientas diseñadas, las sesiones establecidas y los materiales de evaluación utilizados, se han mostrado en general útiles para un investigación futura más exhaustiva, que incluya un número mayor de estudiantes y profesores participantes.
2. En las prácticas de modelización en Secundaria, es necesario un **seguimiento exhaustivo** del trabajo que los alumnos van realizando semanalmente. Aunque estamos hablando de estudiantes de cuarto de la ESO, son adolescentes que todavía no tienen la autonomía ni los hábitos adquiridos para realizar trabajos en grupo, sobre todo en la asignatura de matemáticas. Por este motivo tenemos que orientarlos y ayudarlos en todo lo necesario para el desarrollo de estas habilidades. La modelización es una de las herramientas, a través de la cual, se fomenta la adquisición de dichas habilidades.
3. Este trabajo ha sido **motivador y creativo** para los alumnos, abandonan la rutina de todos los días en las clases de matemáticas y exploran un terreno desconocido, las matemáticas dentro de su vida diaria.
4. Los alumnos dejan de ver las matemáticas como una simple herramienta de trabajo aplicada a otras ciencias y comienzan a verla como un lenguaje que pueden utilizar en cualquier momento y situación de su vida diaria, pudiendo explicar fenómenos que ocurren a su alrededor. Las matemáticas se han convertido en una **actividad humana** como afirma Freudenthal.

Se ha creado un **vínculo de unión** entre el mundo real y el mundo matemático.

5. Las prácticas de la modelización crean **interrelaciones** entre diferentes **asignaturas**, se trabaja de manera horizontal. Por ejemplo, en la realización y presentación de los trabajos los alumnos han aprendido a utilizar diversos programas informáticos (procesadores de texto, hojas de cálculo,...), además de necesitar información facilitada por otras asignaturas como; biología, física o educación física.
6. Todos los objetivos que los alumnos adquieren a través de la modelización están incluidos en los objetivos de área, así pues, podemos considerar la modelización matemática como una **herramienta didáctica**.
7. La modelización matemática se puede considerar un **instrumento evaluador** de las competencias básicas, como se ha argumentado en el apartado 1.3. de este artículo.

5 Líneas de futuro

Este estudio podría formar parte de otros futuros estudios relacionados con los siguientes puntos:

- Evaluar la mejora en la competencia matemática, así como algunas de las competencias básicas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, a través del uso de la modelización como herramienta en el aula.
- Analizar el papel de la modelización matemática como un elemento:
 - a) Vertebrador de un planteamiento curricular integral.
 - b) Motivador en la formación matemática y su papel en la recuperación del alumnado con dificultades y desinterés académico.
 - c) Potenciador en la adquisición de conceptos matemáticos.

- d) Integrador de otras competencias más básicas, como por ejemplo, la resolución de problemas.
- Diseñar prácticas de modelización que se adapten a todos los niveles de la Educación Secundaria Obligatoria.

Agradecimientos. Los autores agradecen la colaboración del equipo directivo y el claustro de profesores del IES Moixent por la colaboración recibida y a los alumnos de cuarto de la ESO por la ilusión y dedicación que pusieron en el desarrollo de la actividad. Y agradecer especialmente la colaboración de la profesora Ana Verdejo.

Referencias

- [1] Ll. Albarracín, *“Sobre les estratègies de resolució de problemes d’estimació de magnituds no abastables”*, Tesis Doctoral, 2011.
- [2] M. Aravena y J. Giménez, *“Evaluación de procesos de modelización polinómica mediante proyectos”*, UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 31, Ed. GRAO, pp.44-56, julio 2002.
- [3] C. Azcárate, J.M. Castelló y C. Lladó, *“El Grup Zero”*, UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 55, Ed. GRAO, pp.16-26, julio 2010.
- [4] E. F. Barkley, K. P. Cross, J. Marín y J. C. Major, *“Técnicas de aprendizaje colaborativo”*, Ed. Morata, Ministerio de Educación y Ciencia, 2007.
- [5] W. Blum, *“ICMI STUY 14; APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS EDUCATION-DISCUSSION DOCUMENT”*, Education Studies in Mathematics, 51, pp. 149-171, 2002.
- [6] W. Blum y N. Morgens, *“Mathematical problems solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction”*, Sixth Internacional Congress on Mathematical Education, 1988.
- [7] E. Borrás y V. Calixto, *“El Grupo Cero”*, UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 55, Ed. GRAO, pp.9-15, julio 2010.
- [8] Decreto 112/2007, del 20 julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana, DOGV 5562 (24-07-07).
- [9] L. García, E. A. Sánchez y J. V. Sánchez, *“Las prácticas de modelización físico-matemáticas: innovación universitaria desde el punto de vista internacional”*, UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 31, Ed. GRAO, pp.24-33, julio 2002.
- [10] P. Gavilán, *“Comparación de modelos de resolución de problemas en una clase tradicional y en una clase cooperativa. Una experiencia con estudiantes de tercero de ESO”*, UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 31, Ed. GRAO, pp. 34-43, julio 2002.
- [11] D. Gil, *“La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria”*, Ed. Horsori, ICE. Universitat de Barcelona, 1991.
- [12] J. Gómez, *“La Matemática: reflejo de la realidad”*, Ed. REDINED, 2008.
- [13] J. Gómez, *“Per un nou ensenyament de les matemàtiques”*, Ed. CEAC, Barcelona, 2000.

- [14] J. Gómez, “*Contribució a l’estudi dels processos de modelització a l’ensenyament/aprenentatge de les Matemàtiques a nivell universitari*”, Tesis Doctoral, 1998.
- [15] J. Miñ $\frac{1}{2}$. Goñi, “*El currículum de las matemáticas en los inicios del siglo XXI*”, Ed. GRAO, Barcelona, 2000.
- [16] N. Gorgorió, “*Matemáticas y educación*”, Ed. GRAO, Barcelona, 2000.
- [17] Grup Vilatzara, “*Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria*”, Números. Revista de didáctica de las matemáticas. Vol. 46, pp. 29-47, 2001.
- [18] K. Maaß, “*What are modelling competencies?*”, Z.M.D., Vol 38(2), 2006.
- [19] Ministerio de Educación, “*PISA 2009*”, OCDE, Informe Español.
- [20] Ministerio de Educación, “*PISA 2006*”, OCDE, Informe Español.
- [21] J.A. Montero, “*Hacia una metodología docente basada en el aprendizaje activo del estudiante presencial de ingeniería, compatible con las exigencias del E.E.E.S.*”, Tesis Doctoral, 2008.
- [22] M. Niss, “*Las matemáticas en la sociedad*”, UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. Num. 6, pp. 45-58, 1995.
- [23] N. Planas y A. Alsinar, “*Educación matemática y buenas prácticas*”, Ed. GRAO, Barcelona, 2009.
- [24] S. Ríos, “*Modelización*”, Ed. Alianza, Madrid, 1995.
- [25] S. Romero y F. Castro, “*Modelización Matemática en secundaria desde el punto de vista superior: EL PROBLEMA DE DOBOGÓKÓ*”, Modelling in Science Education and Learning (MSEL), vol. 1, num. 2, 2008.
- [26] E. A. Sánchez, L. M. García y J. V. Sánchez, “*Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas*”, Enseñanza de las Ciencias, 17(1), pp. 119-129, 1999.
- [27] M. Sol, “*Projectes matemàtics a l’Educació Secundària Obligatòria*”, Tesis Doctoral, 2008.
- [28] M. Sol, “*Proyectos Matemáticos en la ESO: cómo los evaluamos*”, UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. Num. 17, pp. 105-111, 1998.

