

# *Laboratorio virtual para la interpretación de las cargas en vuelo*

## *Virtual lab for the interpretation of flight loads*

**Mario Lázaro, Guillermo García**  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
[malana@upv.es](mailto:malana@upv.es), [guigarol@etsid.upv.es](mailto:guigarol@etsid.upv.es)

**Jesús Barrera**  
AIRBUS DEFENSE & SPACE  
[jesus.barrera-rodriguez@airbus.com](mailto:jesus.barrera-rodriguez@airbus.com)

---

### Abstract

*La asignatura “Cargas en Vuelo” enmarcada en el Máster en Ingeniería Aeroespacial se basa en los conceptos vistos en los cursos de Mecánica del Vuelo y Análisis Estructural del Grado en Ingeniería Aeroespacial. Por un lado, las ecuaciones involucradas no pueden resolverse por métodos tradicionales pero por otro necesitamos que nuestros estudiantes adquieran competencias específicas derivadas de la interpretación de dichas ecuaciones. En el presente artículo proponemos una herramienta numérica en forma de laboratorio virtual, sencilla e intuitiva, desarrollada en el entorno del software Mathematica que permite resolver interactivamente las ecuaciones de la Mecánica del Vuelo simétrico de un avión y obtener resultados directamente relacionados con el diseño estructural. Se muestra el funcionamiento del modelo con algunos ejemplos.*

*The subject “Flight Loads” framed in the Master in Aerospace Engineering is based largely on the concepts seen in courses like Flight Mechanics or Structural Analysis of the Degree in Aerospace Engineering. On the one hand, the equations involved can not be solved by traditional methods but on the other hand we need our students to acquire specific competences derived from the interpretation of these equations. In the present article we propose a simple numerical and graphic tool developed in the Mathematica software environment that allows interactively solving the Flight Mechanics equations of an airplane and obtain results directly related to the structural design. Several examples show how the presented model works.*

---

Palabras clave: Laboratorio Virtual, Mecánica del Vuelo, Análisis Estructural, Factor de Carga, Mathematica, Ecuaciones de la Dinámica, Cargas en Vuelo

Keywords: Virtual Lab, Flight Mechanics, Structural Analysis, Load Factor, Mathematica, Dynamic Equations, Flight Loads

## 1. Introducción

La Mecánica del Vuelo y el Análisis Estructural son dos materias fundamentales en cualquier titulación actual de Ingeniería Aeronáutica. Dentro del Máster en Ingeniería Aeronáutica por la Universitat Politècnica de València existe una asignatura denominada “Cargas en Vuelo. Ensayos Estáticos y Dinámicos en una Aeronave” en la que ambas materias cobran especial importancia. El objetivo de la primera parte de la asignatura, titulada “Cargas en Vuelo” es la interacción entre la Mecánica del Vuelo y el Cálculo de Estructuras Aeroespaciales, asignaturas pertenecientes al 4º curso del Grado de Ingeniería Aeroespacial de la misma Universidad. En este curso se ponen en común conceptos de ambas asignaturas y se explica de dónde salen los esfuerzos que permiten diseñar la estructura. Un porcentaje importante de los mismos tiene su origen en un fenómeno que aparece como consecuencia de las maniobras del avión: las aceleraciones. De ahí la enorme importancia de conocer cómo se mueve el avión y comprender las relaciones de causa-efecto en la dinámica del vuelo.

Como referencia en español, el tratado (Tierno, Cortés, & Márquez, 2012) recoge de forma muy didáctica los fundamentos de un curso de Mecánica del Vuelo. El libro de Cook (Cook, 2007) es muy interesante por su exposición clara y concisa de las ecuaciones. Cuando buscamos bibliografía que fusione mecánica de vuelo con análisis estructural el abanico se reduce. Por ejemplo, un libro muy didáctico es el de Wright y Cooper (Wright & Cooper, 2007) en el que se presentan los problemas acoplados de dinámica de vuelo y deformabilidad estructural sin recurrir a la rigurosidad de otros tratados, como por ejemplo (Schmidt, 2012). Con ello, Wright y Cooper permite una lectura amena y fluida de sus capítulos y una interpretación y comprensión de los fenómenos involucrados. Éste último libro (Wright & Cooper, 2007) hace múltiples referencias a dos tratados clásicos sobre análisis cargas en vuelo (maniobras y turbulencias) y en tierra (aterriaje y rodaje entre otras): Lomax (Lomax, 1996) y Howe (Howe, 2004). Estos libros explican con detalle cómo aplicar las normativas de certificación al diseño estructural (CS-25, 2015; FAR-25, n.d.).

La motivación que subyace detrás de este artículo es presentar una herramienta computacional o laboratorio virtual que sea sencilla que ayude a poner en común los conceptos de las materias de Mecánica del Vuelo y Análisis Estructural. Para ello, proponemos una interfaz gráfica sencilla desarrollada con el programa Wolfram Mathematica (Mathematica, n.d.; Wolfram, 2003) implementado como un *Documento de Formato Computable* (CDF Technology, 2015). El uso de laboratorios virtuales permite de forma interactiva asimilar modelos matemáticos teóricos de gran complejidad. Permiten visualizar resultados gráficos directamente y manipular parámetros con resultados inmediatos. Algunos ejemplos de su aplicación a la docencia son las referencias (Mocholí, Giménez-Palomares, Lapuebla-Ferri, 2013; Lázaro, 2015). En nuestro caso, la herramienta se pone a disposición de los alumnos en las asignaturas indicadas más arriba. El objetivo principal es visualizar directamente el efecto de una maniobra en la estructura del avión y para ello se facilita el laboratorio a los alumnos para que practiquen de forma simultánea al estudio de la teoría. Por el momento, esta aplicación debe mejorarse y ampliarse para poder formar parte de una práctica de laboratorio informático, algo que esperamos hacer en el futuro. Por un lado se analiza la trayectoria de un avión bajo ciertas condiciones y por otro evalúa (en función del tiempo) un parámetro denominado *factor de carga*, fundamental para el cálculo estructural del avión. A lo largo del artículo se presentan las ecuaciones fundamentales de la dinámica del vuelo en el plano de simetría del avión, intentando hacerla comprensible para lectores con conocimientos en Ingeniería no necesariamente procedentes del mundo aeroespacial. Para ello se han obviado detalles rigurosos del modelo y hemos enfatizado la naturaleza y procedencia de las ecuaciones, dejando que sea el lector inquieto e interesado el que indague en las referencias facilitadas para encontrar respuestas más profundas.

## 2. Ecuaciones del modelo

Cuando hablamos de establecer las ecuaciones de la mecánica del vuelo de un avión y no tenemos una formación aeronáutica sólida, la primera sensación (perfectamente lógica) podría ser de rechazo. Sin embargo, consideramos que no es necesario tener sólidos conocimientos en Ingeniería Aeronáutica para poder seguir las explicaciones que expondremos a continuación, pues el objetivo es precisamente llegar a un lector más general, con un nivel de Grado o Máster en cualquier rama de Ingeniería. De hecho, las ecuaciones que subyacen detrás del fenómeno son de naturaleza bien conocida: la 2ª ley de Newton y las ecuaciones cinemáticas (aquellas que relacionan aceleraciones y velocidades con posiciones) en función del tiempo. El conjunto de ecuaciones que se obtienen son un sistema de ecuaciones diferenciales. Por lo que estrictamente para seguir las explicaciones de este artículo bastará con conocer las ecuaciones de la dinámica de Newton junto con conocimientos a nivel

de grado sobre análisis matemático y ecuaciones diferenciales (dados en cualquier titulación de ingeniería). Eso sí, cuando se trate de establecer los vínculos entre campos puramente aeronáuticos (como la aerodinámica y propulsión) con nuestro problema, trataremos de hacer una presentación didáctica que permita asumir la veracidad de algunos conceptos sin, por ello, dificultar el desarrollo matemático

## 2.1. Definición de fuerzas actuantes

Consideraremos un avión convencional volando a cierta altitud  $z_0$ . Las ecuaciones de la dinámica de Newton se basan en conocer en cada instante el conjunto de fuerzas y momentos en un cuerpo para predecir el comportamiento en el futuro. Asumiremos que nuestro avión está sometido a 4 fuerzas que pasaremos a describir a continuación.

**Peso (Weight),  $W$ .** Todos los elementos del avión con masa obviamente tienen un peso asociado y como es sabido, su resultante o peso total del avión pasa por un punto característico: el centro de gravedad (CDG). El peso siempre estará orientado hacia el centro de la tierra. Desde un punto de vista estático se dice que el momento de todas las fuerzas de peso respecto al CDG es nulo.

**Empuje (Thrust),  $T$ .** Los motores del avión son capaces de desarrollar una fuerza o empuje que (se puede asumir) lleva la dirección del cuerpo del avión y pasa por el CDG. Por tanto desde un punto de vista dinámico, no produce ningún momento en dicho punto. Su valor  $T$  depende de las características del sistema de propulsión pero a efectos del presente documento basta con saber que va a depender de la altitud  $z$  a la que nos encontremos, de la velocidad de vuelo  $V$  y de un parámetro de control  $\delta_p$  que maneja el piloto: la palanca de gases (o si se desea llamar de otra forma, el acelerador). Este parámetro tiene un recorrido entre 0 y 1 ( $0 \leq \delta_p \leq 1$ ).  $\delta_p = 0$  significa motor parado y  $\delta_p = 1$  significa máxima potencia. Así en general podemos escribir  $T = T(z, V, \delta_p)$ .

**Sustentación (Lift),  $L$ .** El avión es capaz de volar gracias a esta fuerza. Se denomina sustentación porque su dirección es perpendicular a la velocidad del objeto. Aparece en objetos con forma aerodinámica como el ala principal y el estabilizador horizontal (a veces también llamado timón o empenaje horizontal). Para entender bien esta fuerza serían necesarios conceptos de aerodinámica y no es nuestro objetivo entrar en este campo y simplemente daremos una idea intuitiva de su naturaleza. Diremos que el origen de esta fuerza está en el cambio de dirección (sutil pero clave) que experimentan las partículas de aire al rodear el ala. Como cambian de dirección (léase cambio en la cantidad de movimiento), necesariamente aparece una fuerza (proporcional a dicho cambio de velocidad o aceleración). La fuerza resultante resulta tener la siguiente expresión general

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S_w C_L, \quad (1)$$

donde  $\rho(z)$  es la densidad del aire a la altitud  $z$  (se asume que dicha densidad es variable con la altitud como ocurre en la realidad, recordemos que a medida que ascendemos el aire es más ligero);  $V$  es la velocidad de vuelo,  $S_w$  es la superficie del ala principal del avión.  $C_L$  es el llamado coeficiente de sustentación del que hablaremos un poco más abajo. Esta fuerza aparece en todas las superficies de sustentación (ala y timón horizontal) por lo que el momento de éstas alrededor del CDG del avión será

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 S_w c_w C_M, \quad (2)$$

donde  $c_w$  es la denominada como cuerda media aerodinámica, un valor representativo del ancho del ala (cuerda), aunque no entraremos en su definición estricta, para lo cual puede consultarse la referencia (Tierno et al., 2012). Los coeficientes  $C_L$  y  $C_M$  del avión dependen de la incidencia de las alas respecto a la velocidad (ángulo de ataque  $\alpha$ ) y de una magnitud controlada por el piloto,  $\delta_E$  o deflexión del timón horizontal (ver fig. 1) que tiene la misma función que el timón en una embarcación: desviar el flujo de aire para controlar la dirección del avión. Bajo ciertos coeficientes que dependen de la geometría del avión y de la forma del ala se tiene que ambos parámetros pueden ser linealizados en términos del ángulo de ataque y de la deflexión del alerón (recordemos que ésta última es impuesta por el piloto)

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha + C_{L\delta_E} \delta_E \\ C_M &= C_{M0} + C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta_E} \delta_E \end{aligned} \quad (3)$$

**Resistencia (Drag),  $D$ .** El aire en el que se encuentra inmerso el avión es un fluido y como cualquier objeto dentro de un fluido, va a experimentar una resistencia al avance fruto del rozamiento. Este rozamiento se manifiesta en todos los puntos de la superficie del avión y por tanto se trata de una fuerza distribuida a lo largo de todo el fuselaje y alas. Su resultante o valor total  $D$  es en general opuesta a la velocidad y (asumiremos) que pasa por el CDG del avión y por tanto no produce momento en él. La modelización de esta fuerza es muy complicada y para su correcta evaluación son necesarios ensayos en túnel de viento. Es un campo de investigación abierto y muy importante pues afecta directamente al consumo de combustible. En general, su expresión se presenta con la siguiente forma

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S_w C_D, \quad (4)$$

y  $C_D$  es el coeficiente de resistencia que en general se puede expresar (bajo las hipótesis del presente trabajo) como una función cuadrática del coeficiente de sustentación como

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2, \quad (5)$$

donde  $C_L$  es el coeficiente de sustentación,  $C_{D0}$  y  $K$  son dos parámetros que dependen de la forma del avión.

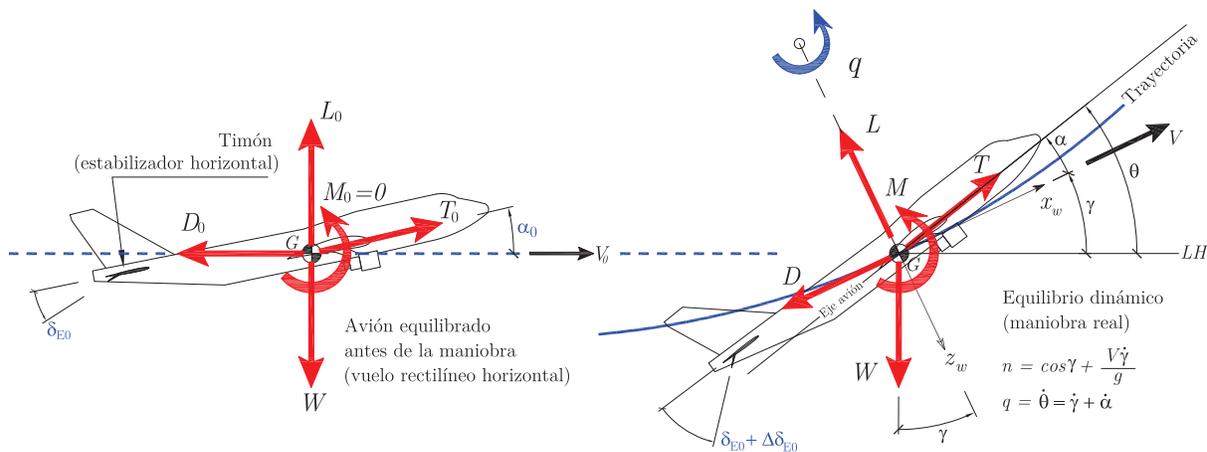


Figura 1 – Diagrama de fuerzas en el plano vertical. Las magnitudes con subíndice  $(\bullet)_0$  hacen referencia a parámetros antes de modificar nuestros controles para realizar una maniobra

## 2.2. Situación de equilibrio inicial (*Trim*)

En la definición de las fuerzas anteriores se han asumido implícitamente algunas hipótesis que nos ayudan a entender mejor el problema, como por ejemplo el hecho de que empuje y resistencia pasan por el CDG del avión (produciendo momento nulo). Además la linealización vista en la Ec. (2) es equivalente a asumir que los ángulos de incidencia de las alas sobre el flujo de aire son pequeños  $\alpha, \delta_E \ll 1$ . Describiremos a continuación otra hipótesis fundamental del problema relacionado con la forma en la que comienza nuestra maniobra.

El objetivo fundamental es describir una herramienta computacional elaborada en el software Mathematica sencilla e intuitiva que nos ayudará a entender el comportamiento del avión en vuelo simétrico (vuelo en el plano de simetría del avión). Veremos que el problema requiere la modificación de los controles del avión a través de los parámetros  $\delta_E$  (deflexión del timón) y  $\delta_p$  (palanca de gases del motor). Estas variables serán nuestro *input* y activarán una maniobra. Veremos más adelante cuáles serán todas las variables a calcular, pero desde luego dentro de éstas deberá estar la trayectoria, la velocidad y la inclinación del avión, entre otras. Como solución de una ecuación diferencial, necesitaremos unas condiciones iniciales y éstas serán dadas por el denominado equilibrio inicial o *trim*. Asumiremos que antes de modificar nuestros controles para realizar una maniobra ( $\delta_E, \delta_p$ ), nuestro avión está volando en una trayectoria horizontal a una altitud dada  $z_0$  bajo cierta velocidad constante

$V_0$ . La inclinación del eje del avión no tiene que ser horizontal (ver fig. 1). De hecho el avión estará ligeramente inclinado estableciendo el pequeño ángulo entre el cuerpo y la horizontal de avance (ver fig. 1) que ya hemos introducido como ángulo de ataque y se representa por  $\alpha$  (menor en general a  $5^\circ$ ) por lo que apenas es notado dentro del avión por los pasajeros.

En su trayectoria horizontal y rectilínea el avión no está sometido a ninguna fuerza ni momento en su centro de gravedad, por lo que la suma de fuerzas y momentos en G es nula. Esto no significa que no existan fuerzas ni momentos aplicados en el CDG avión, pero sí garantiza que unas fuerzas se equilibran con otras. Tendremos entonces que en dicho vuelo rectilíneo y uniforme se verifica el equilibrio

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\rightarrow T(z_0, V_0, \delta_p) \cos \alpha = D(z_0, V_0, \alpha, \delta_E) \\ \sum F_z = 0 &\rightarrow T(z_0, V_0, \delta_p) \sin \alpha + L(z_0, V_0, \alpha, \delta_E) = W \\ \sum M_y = 0 &\rightarrow M(z_0, V_0, \alpha, \delta_E) = 0\end{aligned}\quad (6)$$

Dado que conocemos la altitud  $z_0$  y la velocidad  $V_0$ , la resolución de estas tres ecuaciones nos permite conocer los valores los controles ( $\delta_{p0}$ ,  $\delta_{E0}$ ) a imponer así como el ángulo de ataque resultante  $\alpha_0$  compatibles con un vuelo horizontal a esa altitud y velocidad. Dicho de otra forma, si queremos volar en línea recta a la altitud  $z_0$  y a la velocidad  $V_0$  entonces tenemos que deflectar el timón del estabilizador horizontal una magnitud  $\delta_{E0}$  y tirar de la palanca de cases un valor  $\delta_{p0}$ . Bajo estas condiciones nuestro avión avanzará con un ángulo de ataque de valor  $\alpha_0$ . Las fuerzas de sustentación, resistencia y empuje asociadas a estos valores serán entonces  $L_0$ ,  $D_0$  y  $T_0$  y el momento de las fuerzas aerodinámicas alrededor del CDG será  $M_0 = 0$  (ver fig. 1).

### 2.3. Ecuaciones del movimiento

El avión será considerado como un sólido rígido y como tal su movimiento está gobernado por las ecuaciones de Newton. Al tratarse de movimiento plano (plano de simetría del avión) necesitaremos 3 grados de libertad para definir la posición del avión en cada instante:

$x(t)$ ,  $z(t)$  Coordenadas del CDG del avión en el instante  $t$ . Inicialmente consideramos  $x(0) = 0$  y  $z(0) = z_0$ .

$\theta(t)$  Ángulo de asiento del avión (ángulo del fuselaje con la horizontal). Inicialmente  $\theta(0) = \alpha_0$ .

Las fuerzas aerodinámicas no dependen directamente del ángulo de asiento  $\theta$  sino del ángulo de ataque  $\alpha$  por lo que éste último debe ser expresado en función de aquel. Esto es muy sencillo introduciendo el concepto de pendiente de la trayectoria que todos conocemos. En efecto, la curva de la trayectoria definida por el vector posición  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), z(t) \rangle$  tiene en cada punto a la velocidad (vector)  $\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$  como su vector tangente de magnitud  $V(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$ . El ángulo entre dicho vector y la horizontal es la pendiente  $\gamma(t) = \arctan[\dot{z}(t)/\dot{x}(t)]$ . Inicialmente se tiene vuelo horizontal de pendiente nula por lo que  $\gamma(0) = 0$ . Después de comenzada la maniobra, la relación entre  $\alpha$ ,  $\theta$  y  $\gamma$  se obtiene de inmediato observando la fig. 1,

$$\theta(t) = \alpha(t) + \gamma(t).\quad (7)$$

Destacar que no hay restricción sobre  $\theta$  o  $\gamma$ , ambos ángulos pueden ser muy grandes; eso sí, su diferencia  $\alpha = \theta - \gamma$  debe mantenerse acotada en valores pequeños de lo contrario el avión podría entrar en pérdida (excesivos ángulos de ataque) y perder toda la sustentación, siendo esto causa de accidente.

Por último, introduciremos una última variable en el problema: la velocidad de rotación del avión como  $q(t) = \dot{\theta}(t)$ , cuyo valor inicial es  $q(0) = 0$  al comenzar desde un vuelo rectilíneo. Resulta útil escribir y contar todas las variables estado del sistema en un vector

$$\mathbf{E}(t) = \{x(t), z(t), V(t), \alpha(t), \theta(t), q(t)\}^T.\quad (8)$$

### Ecuaciones dinámicas

Veamos en primer lugar las 3 ecuaciones de la dinámica que relacionan fuerzas y momentos con aceleraciones. Estableceremos estas ecuaciones en los ejes que forman las direcciones tangente y normal a la trayectoria

$$\sum F_t = m a_t \rightarrow T(z, V, \delta_p) \cos \alpha - D(z, V, \alpha, \delta_E) - W \operatorname{sen} \gamma = m \frac{dV}{dt} \quad , \quad (\text{tangente}) \quad (9)$$

$$\sum F_n = m a_n \rightarrow T(z, V, \delta_p) \operatorname{sen} \alpha + L(z, V, \alpha, \delta_E) - W \operatorname{cos} \gamma = m V \frac{d\gamma}{dt} \quad , \quad (\text{normal}) \quad (10)$$

$$\sum M_y = I_{yy} \dot{q} \rightarrow M(z, V, \alpha, \delta_E) = I_{yy} \frac{dq}{dt} \quad , \quad (\text{momentos}) \quad (11)$$

donde se  $a_t = \dot{V}$  es la aceleración lineal (en dirección tangente) y  $a_n = V^2/R = V \dot{\gamma}$  representa la aceleración centrífuga (dirección normal).

### Ecuaciones cinemáticas

Las tres ecuaciones anteriores se completan con un conjunto de relaciones cinemáticas, algunas de las cuales ya han sido presentadas

$$\frac{dx}{dt} = V \operatorname{cos} \gamma \quad , \quad (\text{trayectoria vs pendiente vs velocidad}) \quad (12)$$

$$\frac{dz}{dt} = V \operatorname{sen} \gamma \quad , \quad (\text{trayectoria vs pendiente vs velocidad}) \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = q \quad , \quad (\text{velocidad de rotación vs ángulo de asiento}) \quad (14)$$

$$\gamma = \theta - \alpha \quad , \quad (\text{pendiente-asiento-áng. de ataque}) \quad (15)$$

Las 7 ecuaciones mostradas (9)–(15) permiten resolver las 7 incógnitas del problema: las 6 mostradas en  $\mathbf{E}(t)$  más  $\gamma(t)$ . De hecho, eliminando  $\gamma(t)$  se puede construir un sistema de ecuaciones diferenciales con la forma de problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{E}) \quad , \quad \mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0 = \{0, z_0, V_0, \alpha_0, \alpha_0, 0\}^T \quad , \quad (16)$$

donde  $\mathbf{f}(t, \mathbf{E})$  es una función vectorial cuya dependencia explícita en  $t$  se presenta a través de los controles del piloto  $\delta_E(t)$  y  $\delta_p(t)$ , cuyas funciones asumiremos como datos y serán de hecho las perturbaciones que permitirán construir la maniobra y evaluar los efectos de ésta. Antes de pasar a explicar las herramientas computacionales usadas para resolver este sistema de ecuaciones explicaremos con algo más de detalle una variable derivada de las anteriores con gran importancia en el cálculo estructural del avión, el factor de carga.

## 2.4. El factor de carga en una maniobra

La Ec. (10) define el equilibrio dinámico en la dirección normal al avión. En general el término  $T \operatorname{sen} \alpha$  es muy pequeño respecto al resto de términos de dicha ecuación y es aceptado (Wright & Cooper, 2007) escribirla de forma aproximada como

$$L - mg \operatorname{cos} \gamma \approx m V \frac{d\gamma}{dt} \quad . \quad (17)$$

Llevando la parte proporcional a la masa  $m = W/g$  a la parte derecha la ecuación se puede escribir como

$$L(t) = W \left( \operatorname{cos} \gamma + \frac{V}{g} \frac{d\gamma}{dt} \right) \quad . \quad (18)$$

El término dinámico (dependiente del tiempo) que aparece multiplicando al peso se define como *factor de carga*

$$n(t) = \operatorname{cos} \gamma + \frac{V}{g} \frac{d\gamma}{dt} \quad . \quad (19)$$

Así, en general se puede escribir que en todo instante el factor de carga relaciona la sustentación del avión y el peso,  $L(t) = n(t) W$ . El factor de carga  $n(t)$  (adimensional) tiene un significado físico interesante: nos está

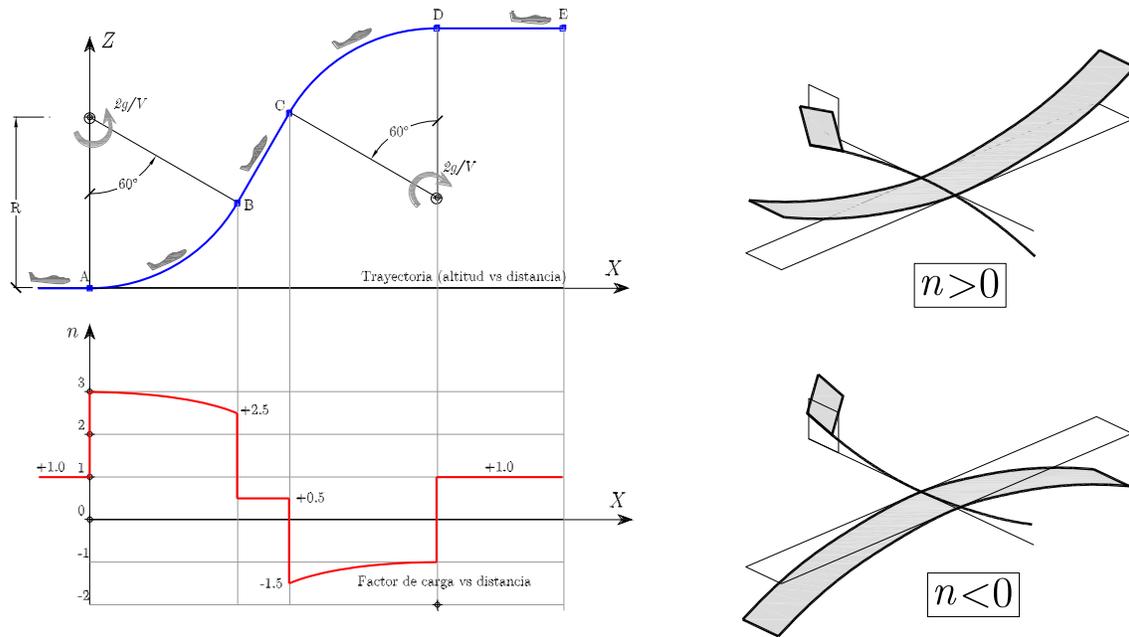


Figura 2 – Izquierda: Evolución del factor de carga en una trayectoria formada por tramos curvos (círculos) y rectas. Derecha: Efecto del factor de carga en la deformación del avión (escala exagerada).

diciendo de alguna forma la *cantidad de gravedad dentro del avión*. Así, si  $n = 0$  la situación es de gravedad cero y si estuviéramos dentro tendríamos sensación de ingravidez. Si  $n < 0$ , nuestro cuerpo asciende respecto al avión y nos golpearíamos contra el techo del fuselaje interior. Por contra, si  $n > 0$  nuestro cuerpo pesará (o tendremos la sensación de que pesa)  $n$  veces más que nuestro peso normal en tierra. Para un vuelo horizontal y rectilíneo se verifica  $\gamma = 0$  y  $\dot{\gamma} = 0$ , luego  $n = 1$ , es decir como si estuviéramos en tierra. Físicamente lo que está ocurriendo es que los objetos se ven alterados por aceleraciones inducidas por la maniobra. De la misma forma que los objetos no sujetos o apoyados tenderán a moverse dentro de la cabina (hacia arriba con  $n < 0$  o pesarán más con  $n > 1$ ). Desde un punto de vista estructural, también las componentes del avión (alas y fuselaje) tienden a deformarse y en consecuencia a sufrir sobre-esfuerzos como consecuencia de estas aceleraciones. Estos esfuerzos son proporcionales al factor de carga y se pueden evaluar para cada punto de la maniobra. Desde una perspectiva del diseño, deben estar acotados para evitar la rotura o aparición de grietas.

En la fig. 2 (Izda) se ha representado la evolución del factor de carga en un vuelo simétrico formado por dos tramos circulares y un tramo recto en pendiente. El recorrido se realiza a velocidad constante y los radios de curvatura de cada tramo circular son  $R = V^2/2g$  y se asume que el ángulo de ataque es constante por lo que la velocidad de rotación es  $\dot{\gamma} = \dot{\theta} = V/R = 2g/V$ . Con estos datos se puede determinar cómo evoluciona el factor de carga a lo largo del recorrido sabiendo la pendiente y la velocidad de rotación. Tanto a la entrada como a la salida el factor de carga es la unidad. Al realizar la primera ascensión el factor de carga asciende hasta  $n = 3$ . Los saltos (finitos) el gráfico del factor de carga  $n(X)$  son debidos al segundo término de la Ec. (19), correspondiente a la fuerza centrífuga: en un tramo curvo este término es finito constante en todo el tramo, pero al entrar a un tramo recto, su valor automáticamente desciende a cero, produciéndose los saltos (discontinuidades de orden finito) en la gráfica.

Durante todo el recorrido con  $n > 0$  alas y fuselaje sufrirán una deformación como la mostrada en el esquema de la fig. 2 (Decha). A partir del punto C el avión entra en una zona de factor de carga negativo; durante el trayecto CD los pasajeros deberán llevar el cinturón abrochado pues de lo contrario saldrían disparados hacia el techo de la cabina. Los vuelos que se usan para experimentar la ingravidez realizan maniobras de este tipo ajustando el factor de carga en el tramo CD a cero proporcionando durante unos segundos la sensación de levitar como astronautas. La deformación de los elementos estructurales (alas y fuselaje) cambia de sentido ahora

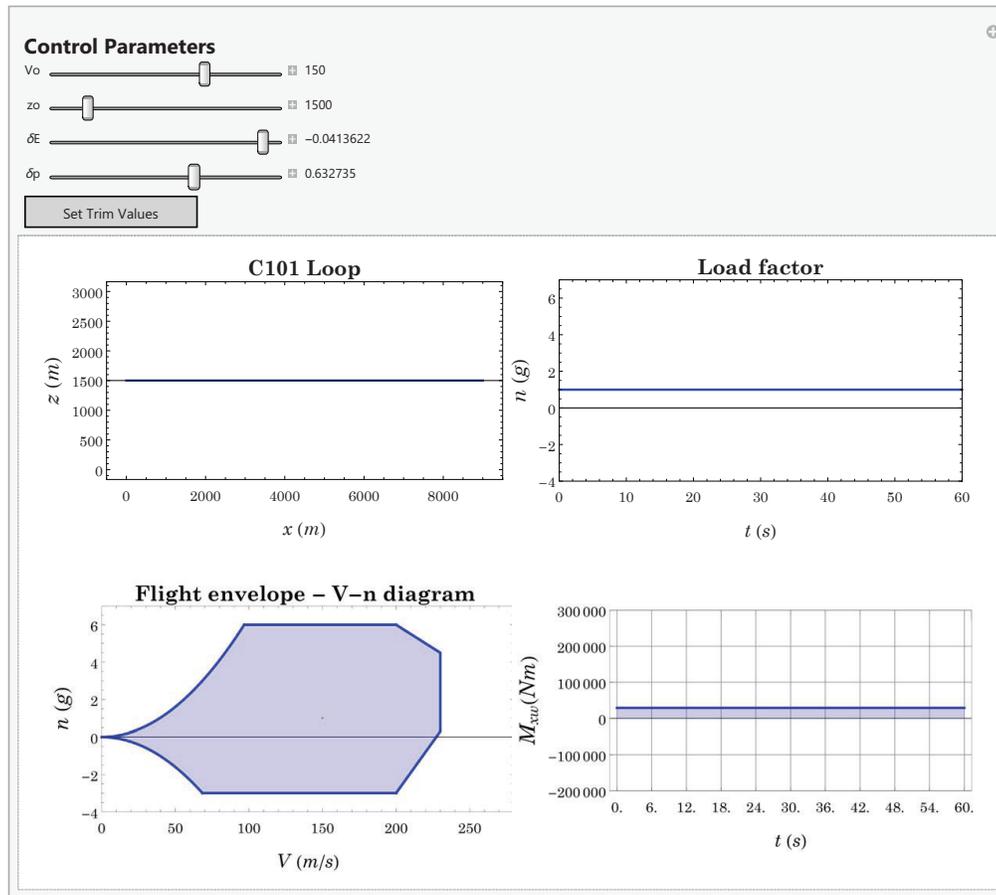


Figura 3 – Interfaz gráfica generada haciendo uso del Documento de Formato Computable (CDF) de *Mathematica*.

respecto al tramo anterior, de acuerdo con el croquis de la derecha. La explicación a la curvatura adoptada por cada elemento está en la dirección que adoptan las fuerzas en cada componente. Las alas sufren mayoritariamente sustentación (fuerza aerodinámica) y esta va “hacia arriba” en maniobras con  $n > 0$  mientras que el peso se concentra en el fuselaje y este tiende a deformarlo hacia abajo. En una maniobra con  $n < 0$  ocurre lo contrario: las direcciones de las fuerzas se invierten y la sustentación va “hacia abajo” y las fuerzas de inercia, localizadas en el fuselaje se dirigen “hacia arriba”

Como curiosidad, esquemas gráficos como el mostrado en la fig. 2 (Izda) son elaborados para calcular el factor de carga sufrido en las montañas rusas a lo largo de su recorrido. El nivel de mareo y malestar (o adrenalina, depende de cómo se mire) depende del factor de carga sufrido. Factores de carga por encima de 5 (coloquialmente hablamos de 5 g’s) durante varios segundos podrían hacernos perder el conocimiento. En los aviones comerciales un orden de magnitud del intervalo al que se limitan los factores de carga es  $-1 \leq n \leq 2.5$ . Mientras que en aviones acrobáticos puede llegar a  $-2.5 \leq n \leq 6$ . Los aviones deben ser capaces de resistir estructuralmente todas las *embestidas* en términos de factor de carga, tanto negativas como positivas.

### 3. Desarrollo del laboratorio virtual

En la sección anterior, se han presentado las ecuaciones (9)–(15) que modelizan el giro de una aeronave en el plano vertical. Estas ecuaciones se pueden linealizar alrededor de un punto de equilibrio, veáse por ejemplo la referencia Cook 2007). De esta linealización se deducen condiciones para la estabilidad del sistema. Si el grado de perturbación introducido por las funciones  $\delta_E(t)$  y por  $\delta_p(t)$  no es relevante, la respuesta se puede



Figura 4 – Avión CASA-101 AVIOJET. Superficie alar,  $S_w = 20 \text{ m}^2$ . Envergadura  $b = 10.6 \text{ m}$ . Peso  $W = 49 \text{ kN}$ .

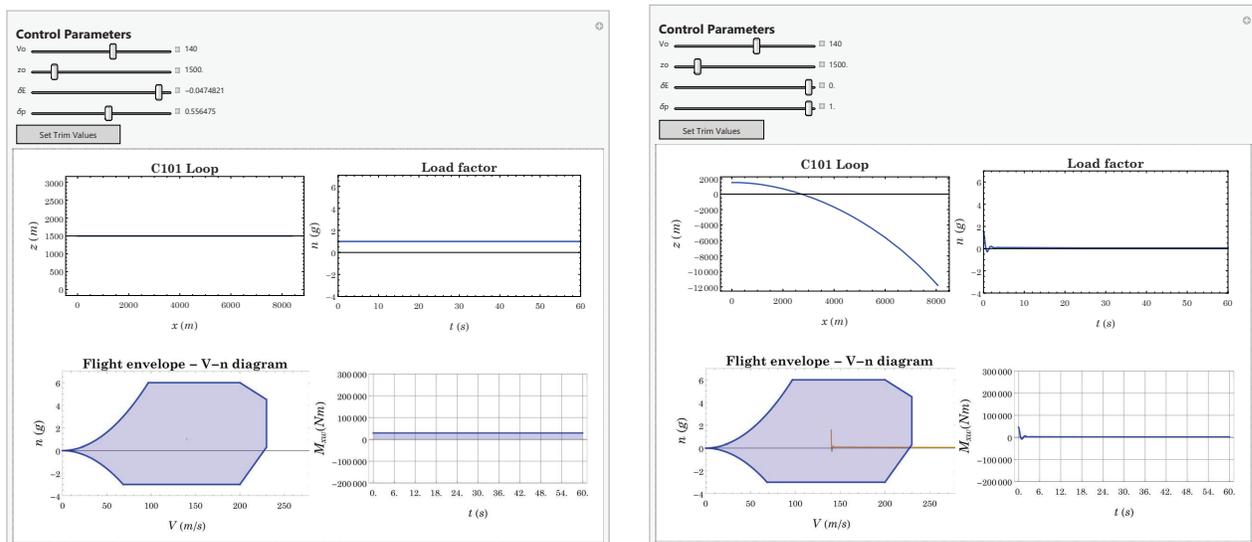


Figura 5 – (Arriba): Caso 1. Vuelo nivelado. (Abajo): Caso 2. Empuje máximo desde la configuración anterior de vuelo equilibrado y ángulo de deflexión del estabilizador horizontal nulo -  $\delta_p = 1$ ,  $\delta_E = 0$ .

obtener con aproximación razonable mediante la integración del sistema linealizado. Sin embargo, cuando se desea predecir la respuesta del avión en un rango más amplio de las variables, la respuesta es fuertemente no-lineal y es necesario integrar paso a paso las ecuaciones. Para ello se pueden usar procedimientos numéricos basados el método de Runge-Kutta. El tipo de respuesta considerado en este artículo entra dentro este último tipo.

Así, cada condición inicial de vuelo requiere la resolución del sistema de ecuaciones no lineales, produciendo unos resultados que pueden llegar a ser muy diferentes. Esta complejidad matemática puede dificultar la comprensión de los fenómenos físicos involucrados en la maniobra. Por este motivo, se ha diseñado una interfaz gráfica que resuelve el sistema de ecuaciones en tiempo real según el usuario modifica los parámetros de entrada. Desde un punto de vista didáctico, esta interfaz gráfica es de gran utilidad para el usuario debido a que permite entender e interiorizar, de una manera sencilla, las relaciones existentes entre cada uno de los parámetros de entrada y salida.

Dicha interfaz gráfica ha sido diseñada e implementada en el software *Mathematica* (Mathematica, n.d.), el cual proporciona un único sistema integrado, en continua expansión, que cubre todos los ámbitos de la computación. Además, destaca por la posibilidad de trabajar en lenguaje simbólico, lo que proporciona al usuario enormes posibilidades.

Dentro del software *Mathematica*, la interfaz gráfica ha sido diseñada haciendo uso del *Documento de Formato Computable* (CDF) (CDF Technology, 2015). Tal y como se indica en la página web de *Mathematica* (Mathematica, n.d.), el estándar de CDF es un recipiente computable de conocimiento tan ordinario como un documento, pero tan interactivo como una aplicación. De esta manera, CDF ofrece a los creadores de contenido interactividad fácil de aplicar y prácticas opciones de implementación que alientan a los lectores a manipular el contenido y a generar resultados en vivo.

La figura 3 muestra la interfaz gráfica generada con CDF en *Mathematica*, en la que se puede observar la estructura que se ha implementado.

Como se puede observar en la figura 3, las variables de entrada con las que puede interactuar el usuario son los parámetros de control que definen la trayectoria de la aeronave:

- $V_0$ : Velocidad inicial de vuelo
- $z_0$ : Altura inicial de vuelo
- $\delta_E$ : Deflexión del estabilizador horizontal
- $\delta_p$ : Potencia suministrada por la palanca de gases

Por otro lado, se ha incorporado un botón denominado *Set Trim Values* que permite al usuario equilibrar la aeronave para cualquier condición de vuelo seleccionada.

Finalmente, como parámetros de salida se han implementado cuatro gráficas que ofrecen la siguiente información:

- Trayectoria de la aeronave: Permite visualizar fácilmente si la aeronave mantiene un vuelo nivelado, descendiente, ascendente o si es capaz de realizar un *loop*.
- Factor de carga: Muestra la evolución temporal del factor de carga a lo largo de la trayectoria.
- Diagrama  $V-n$ : Grafica la envolvente de vuelo de la aeronave considerada. Se trata de una envolvente cerrada en el plano  $V-n$  (velocidad vs factor de carga) que determina las posibles maniobras caracterizadas (por una velocidad  $V$  y un factor  $n$ ) compatibles con la seguridad estructural. En esta gráfica se monitoriza la evolución del factor de carga en función de la velocidad de vuelo a lo largo de la trayectoria para cada caso. De esta manera, se puede verificar si los parámetros de control seleccionados producen un fallo estructural en la aeronave.
- Evolución del momento en el encastre alar: Representa la evolución temporal del momento en el encastre alar a lo largo de la trayectoria. Es una medida de los esfuerzos de diseño en el ala.

## 4. Casos de estudio y resultados obtenidos

A continuación, se irán presentando diferentes casos analizados, indicando los parámetros de control que se han tomado para cada uno de ellos, así como los resultados obtenidos en los mismos. Se partirá desde una posición de vuelo nivelado y se irá incrementando el ángulo de deflexión del estabilizador trasero progresivamente, manteniendo la potencia del motor al máximo con  $\delta_p = 1$ .

Cabe destacar que todos los parámetros aerodinámicos, modelos de empuje, estructurales, de masas y de medidas se han tomado del avión *CASA-101* (ver fig. 4), una aeronave ampliamente conocida de la cual se dispone de una gran cantidad de información, realmente útil para la realización del presente documento.

### Caso 1: Vuelo nivelado

Tal y como se ha indicado, el primer caso analizado corresponde a un vuelo nivelado desde las siguientes condiciones iniciales:

$$V_0 = 140 \text{ m/s} ; z_0 = 1500 \text{ m} , \tag{20}$$

la aeronave ha sido equilibrada haciendo uso del botón *Set Trim Values* obteniendo los valores de  $\delta_E$  y  $\delta_p$  mostrados en la figura 5. Los resultados obtenidos son los esperados en un vuelo equilibrado, la figura 5 muestra como el factor de carga es constante e igual a 1 a lo largo de la trayectoria, la cual es por supuesto constante, y el momento en el encastre alar muestra también un valor constante a lo largo de toda la trayectoria.

**Caso 2: Empuje máximo desde la configuración anterior de vuelo equilibrado y ángulo de deflexión del estabilizador horizontal nulo -  $\delta_p = 1, \delta_E = 0$**

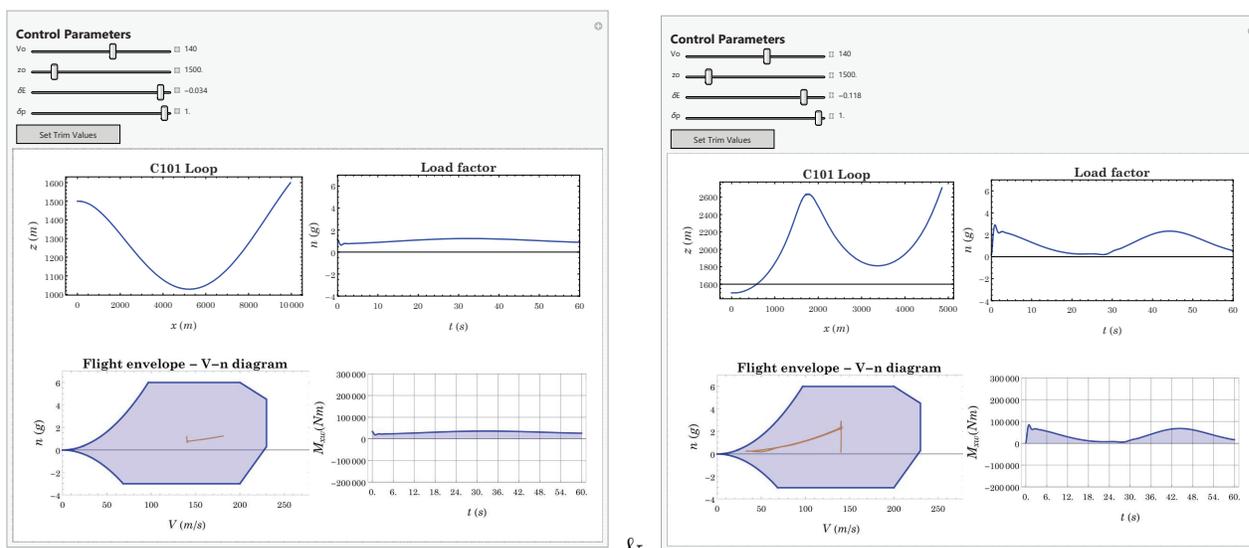


Figura 6 – (Arriba): Caso 3. Incremento leve del ángulo de deflexión del estabilizador horizontal -  $\delta_E < \delta_{ETrim}$ . (Abajo): Caso 4: Incremento del ángulo de deflexión del estabilizador horizontal -  $\delta_E > \delta_{ETrim}$ .

La figura 5 (abajo) muestra el segundo caso considerado, donde se puede ver que el piloto tiene la palanca de gases al máximo, con la intención de obtener también la máxima sustentación posible. Sin embargo, el ángulo de deflexión del empenaje es cero, lo que produce que el avión sea incapaz de mantener un vuelo equilibrado, produciéndose un giro sobre el eje transversal de la aeronave que aumenta en sentido negativo el ángulo de ataque. Como consecuencia, la aeronave acaba estrellándose contra el terreno, con un resultado claramente catastrófico.

**Caso 3: Incremento leve del ángulo de deflexión del estabilizador horizontal -  $\delta_E < \delta_{ETrim}$**

Si se aumenta progresivamente el ángulo de deflexión del empenaje, pero se sitúa todavía por debajo del valor que mantendría la aeronave en un vuelo equilibrado, se puede observar como la aeronave es capaz de recuperar altura antes de estrellarse contra el terreno, tal y como muestra la figura 6 (arriba). Esto es debido a que cuando la aeronave desciende inicialmente convierte la energía potencial en energía cinética, aumentando la velocidad de la aeronave hasta que es capaz de recuperar altura y volar ascendentemente.

Durante esta maniobra, se observa como el factor de carga evoluciona suavemente, manteniéndose todo el tiempo dentro de la envolvente de vuelo y lejos de los límites estructurales.

**Caso 4: Incremento del ángulo de deflexión del estabilizador horizontal -  $\delta_E > \delta_{ETrim}$**

A continuación, se sigue aumentando el ángulo de deflexión del estabilizador horizontal, superando en este caso el valor correspondiente a  $\delta_{ETrim}$ , con el fin de incrementar el ángulo de ataque de la aeronave.

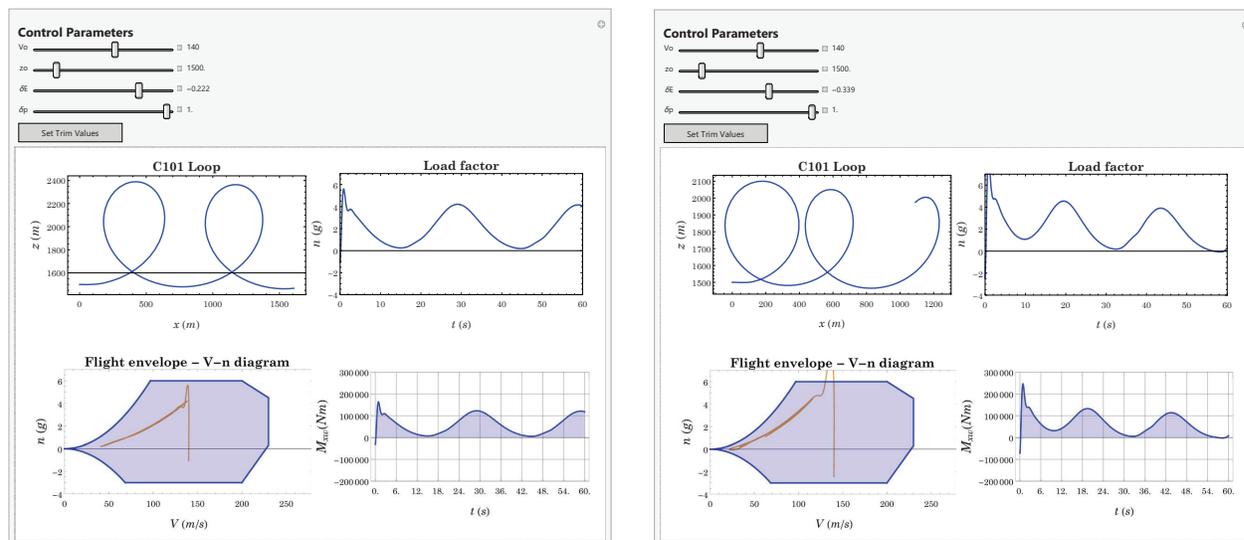


Figura 7 – (Arriba): Caso 5. Incremento notable del ángulo de deflexión del estabilizador horizontal -  $\delta_E > \delta_{ETrim}$ . (Abajo): Caso 6. Ángulo de deflexión del estabilizador horizontal que produce un fallo catastrófico en la estructura-  $\delta_E \gg \delta_{ETrim}$ .

Se puede observar en la figura 6 (abajo) como tras aumentar el ángulo de deflexión del empenaje por encima de  $\delta_{ETrim}$ , la aeronave gana altura progresivamente, al contrario de lo que sucedía en los casos 2 y 3. Sin embargo, el incremento es tan pequeño que la aeronave no es capaz de conseguir la sustentación suficiente para completar el *loop* de un modo satisfactorio. En lugar de eso, empieza a ganar altura por el incremento de sustentación, pero a continuación pierde altura y comienza a descender por la falta de sustentación hasta que gana velocidad, se estabiliza y vuelve a ascender de nuevo.

Por otro lado, se verifica, tal y como se podía intuir en un primer momento, el comportamiento oscilante del factor de carga durante la maniobra. Se puede observar cómo el factor de carga adquiere valores más elevados cuando el avión se encuentra en pendiente de ascenso y de descenso. Sin embargo, los valores alcanzados son relativamente pequeños. El pequeño incremento en el ángulo del estabilizador produce unos incrementos reducidos en el ángulo de ataque, conllevando factores de carga que no son relevantes para la estructura. Nótese como el valor mayor se produce en el primer 'pico', tras introducirse el escalón en el estabilizador, a partir de ahí el valor del mismo empieza a relajarse, pareciendo incluso que oscila alrededor del factor de carga unitario.

Además, y tal y como sucede en los otros casos analizados, se puede observar que la evolución del momento en el encastre alar sigue en gran medida la forma obtenida por el factor de cargas en la maniobra. En los puntos de mayor carga, se llega a momentos en el encastre de casi 100 kNm.

### Caso 5: Incremento notable del ángulo de deflexión del estabilizador horizontal - $\delta_E > \delta_{ETrim}$

Se continúa incrementando el ángulo de deflexión del empenaje hasta que finalmente la aeronave es capaz de realizar el deseado *loop*, tal y como se observa en la figura 7 (arriba).

Las limitaciones estructurales y de maniobra que se imponen en muchos aviones vienen dadas por el factor de carga que pueden alcanzar los mismos. En este caso, los valores de factor de carga alcanzados son considerablemente superiores al caso anterior, dándose el valor máximo tras introducirse el escalón en el estabilizador. Estos valores podrían suponer fallos estructurales catastróficos, sin embargo, se verifica sobre la envolvente de vuelo que no se superan en ningún momento los valores máximos, por lo que la aeronave no sufre daño estructural.

### Caso 6: Ángulo de deflexión del estabilizador horizontal que produce un fallo catastrófico en la estructura- $\delta_E \gg \delta_{ETrim}$

Finalmente, se sigue incrementando el ángulo de deflexión del empenaje trasero hasta que el factor de carga supera el valor máximo que es capaz de soportar la estructura de la aeronave. Tal y como se puede observar en la figura 7 (abajo), el ángulo introducido en el estabilizador es tan pronunciado que la aeronave es capaz de realizar dos *loop* en el mismo intervalo espacial en el que realizaba un único *loop* en el caso anterior. Como es de esperar, las cargas a las que se verá sometido el encastre serán más que notables.

La figura 7 (abajo) muestra que los valores alcanzados por el factor de carga al principio de la maniobra, son enormes, con un valor máximo de casi 8 g's al comenzar la maniobra. La representación del diagrama V-n muestra como el factor de carga sobrepasa los límites de la envolvente de vuelo, indicando el fallo estructural de la aeronave al superarse el factor de carga máximo. Después del primer pico, los valores oscilantes posteriores siguen siendo muy grandes, por lo que se comprueba que la maniobra es la más perjudicial posible. Con todo esto, el valor del momento en el encastre alcanza un valor máximo de aproximadamente 250 kNm.

## 5. Conclusiones

La modelización de las ecuaciones en el plano vertical es un paso totalmente necesario para tener en cuenta los efectos que pueden tener maniobras de este tipo en el conjunto estructural del aeronave. La simplificación de las ecuaciones del avión equilibrado es más que necesaria para obtener las condiciones de vuelo previas a cualquier maniobra en el plano vertical, sin las cuales no se podrían resolver las ecuaciones. La alta no-linealidad de las ecuaciones del plano vertical hace que para poder obtener resultados de manera eficiente sea necesario el uso de software informáticos y computadoras, pues de otro modo sería imposible obtener resultados precisos sin asumir hipótesis importantes. La automatización de las ecuaciones en *Mathematica* ha permitido la obtención de resultados de una manera rápida, visual y eficiente, siendo realmente intuitivo realizar cambios en las mismas y ver los efectos producidos por dichos cambios. La posibilidad de realización del *Documento de formato computable* ha facilitado mucho la integración del archivo que resuelve las ecuaciones en un entorno gráfico manejable, interactivo e intuitivo. La fácil implementación de este tipo de archivos en contenidos web, ha sido un impulso extra para el desarrollo del trabajo en dicho formato y puede servir como referencia para futuros trabajos.

## Referencias

-  CDF technology. (2015).  
<http://www.wolfram.com/cdf/>.
-  Cook, M. V. (2007).  
*Flight dynamics principles*.  
Elsevier Publisher.
-  CS-25. (2015).  
*Certification specifications and acceptable means of compliance for large aeroplanes (cs-25)*.  
European Aviation Safety Agency.
-  FAR-25. (n.d.) (2018).  
*Federal aviation regulations. part 25: Airworthiness standards: Transport category airplanes*.  
Federal Aviation Administration.
-  Howe, D. (2004).  
*Aircraft loading and structural layout*.  
Wiley.
-  Lázaro, M. (2015).  
*Learning mechanical vibrations with Wolfram Mathematica*.  
Modelling in Science Education and Learning, 8(2), 93–108.

-  **Lomax, T. L. (1996).**  
*Structural loads analysis for commercial transport aircraft: Theory and practice.*  
(J. P. (Editor), Ed.). AIAA Education Series.
-  **Mathematica, W. (n.d).**  
<https://www.wolfram.com/mathematica/>.
-  **Mocholí, A. J. J., Giménez-Palomares, F., Lapuebla-Ferri, A. (2013).**  
*Círculos de Mohr: un laboratorio virtual para la enseñanza y el aprendizaje de estados tensionales planos.*  
Modelling in Science Education and Learning, 6, 157–171.
-  **Schmidt, D. K. (2012).**  
*Modern flight dynamics.*  
McGraw-Hill.
-  **Tierno, M. A. G., Cortés, M. P., Márquez, C. P. (2012).**  
*Mecánica del vuelo (2nd ed.).*  
Garceta GrupoEditorial.
-  **Wolfram, S. (2003).**  
*The Mathematica Book.*  
Wolfram Media, Inc.
-  **Wright, J. R., Cooper, J. E. (2007).**  
*Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads.*  
John Wiley & Sons.