

IL PROBLEMA DELL' INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA NELLA MODELLAZIONE DEL COMPORTAMENTO DINÁMICO DELLE DIGHE

Michele Fanelli¹, Pasquale Palumbo²

SOMMARIO: Il problema in oggetto può essere formulato, come ben noto, a diversi livelli di complessità (e di "completezza" per quanto attiene alla rappresentatività fisica dei modelli proposti). Ciò è attestato dai numerosissimi contributi in proposito, a partire dal classico approccio "alla Westergaard" (v. concetto di "masse aggiunte", Westergaard, 1993) con fondo del serbatoio rigido (approccio nel quale, al livello più elementare, si assume anche l' ipotesi di rigidità della struttura e di incomprimibilità del fluido), per arrivare alle formulazioni più recenti in cui si tiene conto, separatamente [8] o congiuntamente, della deformabilità della struttura, della comprimibilità del fluido e della deformabilità del fondo del serbatoio; formulazioni nelle quali in genere il concetto di "masse aggiunte" non è più valido (o va modificato profondamente, ad es. rendendo tali "masse" quantità complesse anziché reali e funzioni della frequenza anziché costanti).

Assai spesso interessa in primo luogo identificare i modi naturali (smorzati o no) di vibrazione della diga, considerata come un sistema elastico lineare, ed in tal caso il problema è direttamente formulato in termini di oscillazioni armoniche (eventualmente con smorzamento: moto "pseudo-armonico"); la risposta ad eccitazioni non periodiche in campo lineare viene allora ricostruita attraverso la nota tecnica dell' analisi modale.

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro, pur se ancora ristretto al comportamento lineare, si segue un approccio più generale. In esso si cerca una espressione delle funzioni di interazione che sia ancora separabile nello spazio e nel tempo, ma che valga nel caso generale in cui il moto del sistema possa essere arbitrariamente complesso nel tempo (cioè anche non periodico o pseudo-periodico). Si includono altresì sin dall' inizio gli effetti della deformabilità della struttura, della comprimibilità del fluido (che è d' altra parte supposto perfetto, cioè non viscoso, e dotato di moto a potenziale) ed infine (anche se in forma alquanto semplificata) della deformabilità del fondo del serbatoio. Grazie ad una particolare scelta della forma di rappresentazione analitica della dipendenza delle pressioni idrodinamiche dai moti dei punti della struttura (e dalle loro successive derivate temporali) si evidenzia allora come l' influenza dell' invaso sia rappresentabile tramite una serie di matrici di interazione, predeterminabili una volta che siano note le caratteristiche geometrico-fisiche del sistema. L' approccio proposto ha il vantaggio di estendere in modo "naturale" il concetto di "masse

aggiunte" e di evidenziare il ruolo di parametri adimensionali [primo tra tutti, nel caso di moti armonici di frequenza $\omega/2\pi$, il rapporto $G = \frac{\omega \cdot H}{c_a}$, legato alla profondità dell' invaso (H) ed alla comprimibilità del fluido (tramite la celerità c_a), dei quali è nota, dagli studi precedenti (Fork e Chopra, 1986), l' influenza sulla determinazione dei modi propri nel caso di moti armonici o pseudo-armonici [tra gli altri parametri influenti evidenziati dall' analisi vi è poi ad es. il rapporto $I = \frac{\rho_a \cdot c_a}{\rho_r \cdot c_r}$ tra le impedenze acustiche del fluido d' invaso e della roccia del fondo].

La presa in conto dei successivi termini nella serie (teoricamente infinita) di matrici di interazione corrisponde all' adozione di un procedimento di successive approssimazioni. In tale ottica la matrice delle masse aggiunte "alla Westergaard" e la matrice di smorzamento già introdotta dagli Autori in una precedente Nota (Fanelli et al., 1995) appaiono in prima approssimazione come i primi due termini del procedimento suddetto.

Infine l' approccio proposto fa emergere, oltre alla possibilità teorica di "modi propri aperiodici" (forse inter-

¹ Ex Direttore del Centro Ricerca Idraulica e Strutturale (CRIS) dett' ENEL SpA - V. L.B. Alberti, 5 - 20149 Milano email: michele.fanelli@icenei.it

² ISMES SpA - V. Pastrengo, 9 - Seriate (Bergamo) email: ppalumbo@ismes.it

Artículo publicado en *Ingeniería del Agua* Vol.5 Num.2 (junio 1998), páginas 43-54, recibido el 20 de enero de 1998 y aceptado para su publicación el 25 de marzo de 1998. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo. En el caso de ser aceptadas, las discusiones serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores en el primer número de la revista que aparezca una vez transcurrido el plazo indicado.

pretabili fisicamente come collegabili a particolari subsidenze o sollevamenti del fondo del serbatoio, e perciò denominati provvisoriamente “bottom subsidence modes” o, rispettivamente, “bottom heaving modes”, v. § 2), una curiosa modifica dell’ordine differenziale delle equazioni del moto, legata probabilmente all’influenza - intuitivamente plausibile - della “storia” passata del moto della struttura sull’andamento nel tempo delle pressioni idrodinamiche (si ricordi che il fluido è supposto perfetto, cioè senza viscosità, e che quindi la “memoria” di un moto preesistente non si dissipa nel tempo).

L’esistenza dell’invaso introdurrebbe, in quest’ottica, un aspetto “ereditario” della risposta del sistema che, a parere degli Autori, riveste interesse se non altro teorico.

1. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA IDRODINAMICO

Si faccia riferimento allo schema di *Figura 1a*, ove è da notare che il liquido copre, presso la diga, una profondità H (“paramento bagnato”) che può coincidere o meno con l’altezza della diga stessa sul piano di fondazione.

Assumiamo che il fluido (comprimibile, con densità media P_a) sia perfetto (cioè non viscoso) e che il suo moto nel serbatoio, definito Eulerianamente da un campo di velocità $V(x,y,z,t)$, sia irrotazionale:

$$\text{rot}V = 0, \text{ ossia si abbia } V = H \cdot \text{grad}\varphi \quad (1.1)$$

ove $\varphi = \varphi(x,y,z,t)$ è il potenziale del moto a meno della lunghezza H (v.oltre).

Il moto può avere origine autonoma (vento, sisma...) e/o essere prodotto dall’interazione fluido-struttura durante il moto di quest’ultima, tramite l’accoppiamento tra il moto dei punti della diga giacenti sul paramento bagnato e il moto delle particelle fluide a contatto del paramento stesso (accoppiamento che, per l’ipotesi fatta di liquido inviscido, si esprime, v. più oltre, nella condizione di continuità, sulla superficie bagnata, delle componenti normali al paramento delle velocità dei punti materiali appartenenti alla diga ed all’invaso).

L’ipotesi di linearità consente di trattare separatamente la componente autonoma del moto del liquido; nel presente lavoro il potenziale è univocamente determinato dal moto dei punti della diga appartenenti al paramento bagnato (considerato per il momento come noto, nonostante esso, come verrà esplicitato più tardi, dipenda in realtà anche dalle pressioni idrodinamiche di interazione). Viene allora naturale di legare il potenziale φ alle velocità, accelerazioni ed eventualmente derivate di ordine superiore degli spostamenti normali $\delta_n(x,y,z,t)$ dei punti della diga appartenenti al paramento bagnato:

$$\varphi(x, y, z, t) = \Phi[\delta_n(x,y,z,t), \delta_n(x,y,z,t), \delta_n(x,y,z,t), \dots],$$

ove Φ indica un opportuno funzionale degli argomenti entro parentesi, ed i punti sovrapposti ai simboli denotano derivazione (dell’ordine indicato dal numero dei punti) rispetto al tempo t .

Normalmente, invero, (ed in particolare nel caso di moti armonici a regime, cioè esclusi eventuali transitori iniziali) si assume che la dipendenza suddetta coinvolga

solo le derivate prime: $\Phi = \Phi[\delta_n(x,y,z)]$ - Ma è intuitivo ammettere che per moti qualsivoglia debbano essere coinvolte anche le derivate di ordine superiore. Infatti, considerando due sistemi diga/serbatoio/invaso geometricamente e fisicamente identici e dotati, ad un certo istante, dello stesso stato di moto δ_n per quanto riguarda le velocità, ma di diverse distribuzioni δ_n per quanto riguarda le accelerazioni del paramento bagnato, i potenziali φ non potranno evidentemente essere gli stessi nei due casi. Escludendo il ragionamento si deduce che devono, in linea di principio, essere coinvolte tutte le derivate di ordine indefinitamente crescente.

Poiché la trattazione ingegneristica del problema si baserà necessariamente su metodi di discretizzazione, supponiamo inoltre che il moto del paramento bagnato sia descritto con sufficiente approssimazione [tramite opportune funzioni interpolanti, o “funzioni di forma” $N_i(x, y, z)$] dalle storie temporali $\delta_i(t)$ degli spostamenti normali (omettiamo il pedice n per brevità) di un numero finito di punti (nodi della mesh della diga) P_i del paramento bagnato, (Si suppone che i nodi P_i della discretizzazione strutturale coincida, no, sul paramento, con nodi appartenenti alla mesh che copre il dominio occupato dal fluido, v.oltre). I $\delta_i(t)$ siano dotati di derivate successive sino all’ordine che riterremo necessario (qui si introduce implicitamente l’ipotesi di continuità delle funzioni-spostamento con tutte le loro derivate temporali). Con questa discretizzazione della definizione del moto del paramento il funzionale Φ viene approssimato da una funzione ordinaria φ (ancorchè di molte variabili $\delta_i, \delta_i, \delta_i$ funzioni a loro volta del tempo):

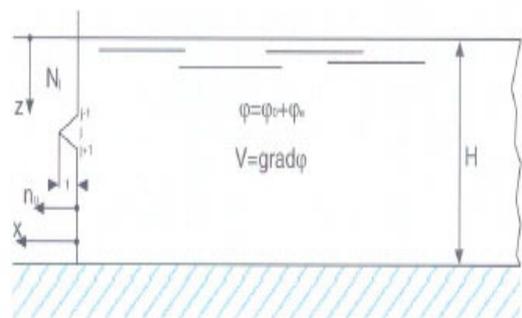


Figura 1a. Spazio fisico

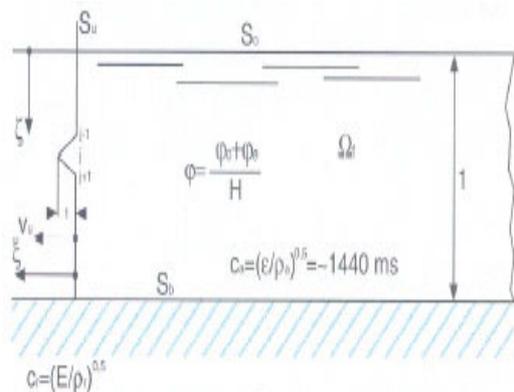


Figura 1b. Spazio ridotto Ω

$$\Phi \left[\dot{\delta}_n(x,y,z,t), \ddot{\delta}_n(x,y,z,t), \dddot{\delta}_n(x,y,z,t), \dots \right] \equiv \varphi \left[\dot{\delta}_j(t), \ddot{\delta}_j(t), \ddot{\delta}_j(t), \dots \right]$$

Per ragioni che risulteranno chiare dagli sviluppi successivi (e che sonó state inizialmente suggerite dall'estensione dei concetti-guida dei lavori precedenti sul caso armónico) postuliamo una separabilitá spazio/tempo della dipendenza cárcala nella forma seguente:

$$\varphi = \varphi_o + \varphi_e \quad , \quad \text{ove} \quad (1.2)$$

$$\varphi_o = \sum_j \left(\varphi_{1j}(x,y,z) \cdot \dot{\delta}_j(t) + \left(\frac{H}{c_a} \right)^2 \varphi_{3j}(x,y,z) \cdot \ddot{\delta}_j(t) + \dots \right) \quad (1.3)$$

funzione delle derivate dispari degli spostamenti (pedice o da "odd"); e

$$\varphi_e = - \sum_j \left(\frac{H}{c_a} \cdot \varphi_{2j}(x,y,z) \cdot \ddot{\delta}_j(t) + \left(\frac{H}{c_a} \right)^3 \cdot \varphi_{4j}(x,y,z) \cdot \ddot{\delta}_j(t) + \dots \right) \quad (1.4)$$

funzione delle derivate pari degli spostamenti (pedice e da "even").

Nelle equazioni precedenti $c_a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho_a}}$ = celeritá del suono

nel liquido ε =comprimibilitá del liquido ; si ricorda che per l'acqua $c_a = 1440 \text{ ms}^{-1}$.

La netta distinzione tra i due potenziali (φ_o e φ_e é motivata dal fatto che il primo produce effetti inerziali, mentre il secondo produce effetti dissipativi.

Le funzioni spaziali φ_{kj} (che un'ispezione delle equazioni mostra essere adimensionali), con k =pari o k =dispari, verranno determinate dal dover soddisfare il potenziale (1.2), nel dominio occupato dal ñuido, all'equazione differenziale alie derivate parziali di tipo Poisson per un moto a potenziale di fluido comprimibile, con le opportune condizioni ai limiti del dominio, come vedremo fra breve.

Con riferimento alia Figura Ib si consideri il dominio adimensionale Ω_f ricavato dal dominio fisico occupato dal liquido (Figura Ia) mediante divisione di tutte le lunghezze per la lunghezza H ("spazio ridotto"). In questo spazio adimensionale le coordínate siano indicate

da $\xi = \frac{x}{H}; \eta = \frac{y}{H}; \zeta = \frac{z}{H}$; la superficie libera a riposo

(orizzontale) del liquido, caratterizzata dalla condizione geométrica $\zeta = 0$, sia indicata con S_o ; la superficie bagnata del paramento (sulla quale giacciono i nodi P_j) sia indicata con S_u , e la relativa nórma (esterna rispetto al dominio fluido), variabile in générale da punto a punto, con V_u ; infine la superficie bagnata del fondo del serbatoio si indichi con S_b , e la relativa nórma (anch'essa esterna rispetto al dominio fluido ed in générale variabile da punto a punto) con V_b .

L' equazione differenziale indefinita alie derivate parziali cui il potenziale φ deve soddisfare nel dominio fisico (Figura Ia) é evidentemente, sotto le ipotesi qui accettate, la classica equazione di Helmholtz (valida per piccole ampiezze e piccole velocità del moto):

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_a^2} \cdot \ddot{\varphi} \quad (1.5)$$

ove il fatto che sia $1/c_a \neq 0$ riflette la comprimibilitá del liquido. Ovviamente nella (1.5) il simbolo ∇^2 sta per l'operatore di Laplace:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Passando alio "spazio ridotto" indichiamo con $\nabla^2 = H^2 \cdot \nabla^2$

l'operatore $\nabla_f^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Con queste posizioni la

(1.5) fornisce la:

$$\begin{aligned} & \sum_j \left[\nabla_f^2 \varphi_{1j} \cdot \dot{\delta}_j - \frac{H}{c_a} \cdot \nabla_f^2 \varphi_{2j} \cdot \ddot{\delta}_j + \left(\frac{H}{c_a} \right)^2 \cdot \nabla_f^2 \varphi_{3j} \cdot \ddot{\delta}_j - \right. \\ & \left. - \left(\frac{H}{c_a} \right)^3 \cdot \nabla_f^2 \varphi_{4j} \cdot \ddot{\delta}_j + \dots \right] = \\ & = \left(\frac{H}{c_a} \right)^2 \cdot \sum_j \left[\varphi_{1j} \cdot \ddot{\delta}_j - \frac{H}{c_a} \cdot \varphi_{2j} \cdot \ddot{\delta}_j + \left(\frac{H}{c_a} \right)^2 \cdot \varphi_{3j} \cdot \ddot{\delta}_j - \right. \\ & \left. - \left(\frac{H}{c_a} \right)^3 \cdot \varphi_{4j} \cdot \ddot{\delta}_j + \dots \right] \quad (1.6) \end{aligned}$$

Se la (1.6) deve valere per moti comunque arbitran (sia per quanto attiene alia distribuzione dei δ su S_u , sia per quanto riguarda le loro variazioni temporali), é evidente dalPispezione della (1.6) stessa che dovranno valere per le $\varphi_{kj} = (\zeta, \eta, \zeta)$ le seguenti equazioni differenziali indefinite (I.D.E.):

$$\nabla_f^2 \varphi_{1j} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_f^2 \varphi_{2j} = 0 \quad (1.7)$$

inoltre (equazioni ricorsive)

$$\nabla_f^2 \varphi_{3j} = \varphi_{1j}$$

$$\nabla_f^2 \varphi_{4j} = \varphi_{2j}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\nabla_f^2 \varphi_{(k+2)j} = \varphi_{kj} \quad :$$

I.D.E. in Ω_f

Le prime due delle (1.7) sonó le stesse del caso in cui il fluido si consideri incomprimibile. Nel presente approccio, tuttavia, le condizioni ai limiti porrebbero problemi numerici qualora si volesse imporre la condizione di incomprimibilitá del liquido assieme a quella di rigidezza finita del fondo del serbatoio (cioé se il rapporto c_a/c_r tendesse all'infinito).

Occorre definiré le condizioni ai limiti (B.C.) per le funzioni $\varphi_{kj} = (\zeta, \eta, \zeta)$:

a. Per $\zeta=0$ (superficie libera S_o) la consueta condizione linearizzata di variazioni di pressione nulle é espressa dall'equazione $\Delta p = -\rho_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, ove ρ_a densitá del liquido; da questa é immediato ricavare la :

$$\dot{\varphi} = 0 \quad (1.8)$$

su S_0 conseguentemente, dalla (1.3), sempre tenendo conto della richiesta arbitrariedad del moto, le B.C. per le φ_{kj} su S_0 :

$$\begin{aligned} \varphi_{1j} &= 0 & \varphi_{2j} &= 0 \\ \varphi_{3j} &= 0 & \varphi_{4j} &= 0 & : \text{B.C. omogenee su } S_0 \\ \varphi_{5j} &= 0 & \varphi_{6j} &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

b. Sulla superficie bagnata della diga S_u la continuita delle componenti normali delle velocita dei punti della struttura e del liquido e espressa dall'equazione $\frac{\partial \delta_{n(t)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial v_u}$, equindi, tenendo conto della discretizzazione, si ricava (v.1.3, 1.4):

$$\begin{aligned} \sum_j N_j(\xi, \eta, \zeta) \cdot \delta_j &= \sum \left[\frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial v_u} \cdot \delta_j - \left(\frac{H}{c_a} \right) \cdot \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial v_u} \ddot{\delta}_j + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{H}{c_a} \right)^2 \cdot \frac{\partial \varphi_{3j}}{\partial v_u} \ddot{\delta}_j - \left(\frac{H}{c_a} \right)^3 \cdot \frac{\partial \varphi_{4j}}{\partial v_u} \ddot{\delta}_j + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

da cui infine, sempre per l'arbitrariedad del moto dei punti P_j , le B.C. su S_u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial v_u} &= N_j(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial v_u} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_{3j}}{\partial v_u} &= 0 & : \text{B.C. su } S_u \\ \frac{\partial \varphi_{4j}}{\partial v_u} &= 0 \\ & \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

c. Infine sul fondo del serbatoio (superficie bagnata S_b) assumiamo una condizione di irraggiamento acustico (tipo Sommerfeld) semplificata nella forma seguente:

$$-\rho_a \cdot H \cdot \dot{\varphi} = \rho_r \cdot c_r \cdot H \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (H \cdot v_b)} \quad (1.12)$$

dove il primo membro esprime le variazioni locali di pressione nel fluido, il secondo membro esprime in forma approssimata (onde acustiche di tipo P localmente piane, senza interazioni di scorrimento tra le "colonne" adiacenti, negli strati rocciosi di fondo; v. Fanelli et al., 1995) le variazioni locali di pressione dovute alia propagazione senza riflessione delle onde elastiche negli strati rocciosi (ρ_r densita della roccia, $c_r = \sqrt{\frac{E_r}{\rho_r}}$ celerita di propagazione delle onde P nella roccia di modulo elastico E). Tenendo conto delle (1.3), (1.4) tale condizione si svilu-ppa come segue, invertendo l'ordine dei due membri della (1.12):

$$\begin{aligned} & \sum \left[\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial v_b} \cdot \dot{\delta}_j - \left(\frac{H}{c_a} \right) \cdot \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial v_b} \ddot{\delta}_j + \right. \\ & \left. + \left(\frac{H}{c_a} \right)^2 \cdot \frac{\partial \varphi_{3j}}{\partial v_b} \ddot{\delta}_j - \left(\frac{H}{c_a} \right)^3 \cdot \frac{\partial \varphi_{4j}}{\partial v_b} \ddot{\delta}_j + \dots \right] \\ & = -\frac{H}{c} \sum \left[\varphi_{1j} \cdot \ddot{\delta}_j - \left(\frac{H}{c_a} \right)^3 \cdot \varphi_{2j} \ddot{\delta}_j + \right. \\ & \left. + \left(\frac{H}{c_a} \right)^2 \cdot \varphi_{3j} \cdot \ddot{\delta}_j - \left(\frac{H}{c_a} \right)^3 \cdot \varphi_{4j} \cdot \ddot{\delta}_j + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

ove si e posto $c = \frac{\rho_r \cdot c_r}{\rho_a}$.

Analogamente a quanto visto per le altre B.C., dall'ispezione della (1.13) si evince che, affinche la (1.13) stessa sia soddisfatta per ogni arbitrario moto della diga, e necessario imporre alie funzioni φ_{kj} le seguenti B.C. su S_b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial v_b} &= 0 & \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial v_b} &= \frac{c_a}{c} \cdot \varphi_{1j} \\ \frac{\partial \varphi_{3j}}{\partial v_b} &= \frac{c_a}{c} \cdot \varphi_{2j} & \frac{\partial \varphi_{4j}}{\partial v_b} &= \frac{c_a}{c} \cdot \varphi_{3j} & : \text{B.C. su } S_b \\ \frac{\partial \varphi_{5j}}{\partial v_b} &= \frac{c_a}{c} \cdot \varphi_{4j} & \frac{\partial \varphi_{6j}}{\partial v_b} &= \frac{c_a}{c} \cdot \varphi_{5j} \\ & \dots & & \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

Anche queste B.C., come le equazioni differenziali indefinite (1.7), sono di tipo ricorsivo; mentre pero le (1.7) legano ricorsivamente tra loro le successive funzioni di pedice pari e, separatamente, tra loro quelle di pedice dispari, le (1.14) legano ricorsivamente le funzioni di pedice pari a quelle di pedice dispari, e viceversa.

Si noti che $I = \frac{c_a}{c} = \frac{\rho_a \cdot c_a}{\rho_r \cdot c_r}$ = rapporto delle impedenze

acustiche del liquido e della roccia. Normalmente tale rapporto e sensibilmente minore dell'unita; cio comporta che le funzioni φ_{ij} decrescano rapidamente al crescere del pedice k .

Si noti altresì che, date le deboli pendenze frequentemente presenti sul fondo del serbatoio, e spesso lecito confondere la direzione della normale v_b con quella dell'asse ζ .

Le equazioni differenziali indefinite (1.7) valide in Ω_f , assieme alie B.C. (1.9) su S_0 , (1.11) su S_u , (1.14) su S_b permettono di determinare numericamente in ogni caso specifico le funzioni di pedice dispari φ_{oj} . e quelle di pedice pari φ_{ej} .

Ad es. si potranno usare a tale scopo metodi di discretizzazione agli E.F.: le equazioni matriciali

$$\begin{aligned} [T] \cdot \{\varphi_i\}_{oj} &= \{tn\}_{oj} \\ [T] \cdot \{\varphi_i\}_{ej} &= \{tn\}_{ej} \end{aligned}$$

forniranno i valori delle funzioni in questione nei nodi "i" della mesh coprente il dominio Ω . Nelle (1.15) la matrice $[T]$ è la matrice di pseudo-trasmittività che origina dalla discretizzazione in Ω_f dell'operatore di Laplace ∇_f^2 i vettori $\{tn\}_{ef}$, $\{tn\}_{ei}$ derivano dalla discretizzazione dei termini sorgente nelle (1.7) e delle B.C. (1.9), (1.11), (1.14). Data la natura ricorsiva, già sopra evidenziata, delle (1.7) e delle (1.14), il set di equazioni matriciali (7.75) è a sua volta un set ricorsivo, che può essere risolto in ogni caso particolare (e per ogni valore del pedice "j") seguendo lo schema di Figura 2 (v.oltre, §3).

Nel seguito si suppone che tale set sia stato risolto e che da tali soluzioni siano state costruite, per ogni valore del pedice dispari "o" e per ogni valore del pedice pari "e", le matrici $[\varphi_{ij}]_0$ $[\varphi_{ij}]_1$, ognuna con tante righe (pedice "i") quanti sono i nodi della mesh coprente Ω_f e con tante colonne (pedice "j") quanti sono i nodi P_j su S_u . Dalla conoscenza dei valori suddetti si può ricostruire agevolmente, nell'ambito delle approssimazioni falte, l'andamento delle sovrappressioni idrodinamiche in funzione degli spostamenti dei nodi del paramento bagnato e delle loro derivate temporali successive:

$$\Delta p = -\rho_a \cdot H \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_a \cdot H \cdot \sum \left[-\varphi_{1j} \ddot{\delta}_j + \frac{H}{c_a} \cdot \varphi_{2j} \ddot{\delta}_j - \left(\frac{H}{c_a}\right)^2 \cdot \varphi_{3j} \ddot{\delta}_j + \dots \right] \quad (1.16)$$

sovrappressioni di cui interesseranno nel seguito i valori nei nodi del paramento bagnato S_u .

Da questi infatti, interpolad su tutta la superficie bagnata della diga tramite le funzioni di forma $N_f(x, y, z)$, si potrà ricavare la distribuzione delle pressioni idrodinamiche prodotte per interazione con l'invaso, sul paramento di monte, dal movimento della struttura. Con ciò risulta costruibile la soluzione (che è unica) del problema fisico-matemático propostoci all'inizio; resta da ve-dere in dettaglio, nel seguito, a quale tipo di formulazione numérica conduca l'approccio qui scelto (e quali ne siano i vantaggi e gli svantaggi).

Si noti sin d'ora che i termini a pedice dispari e pari entro parentesi sotto il segno di sommatoria nella (1.16) corrispondono rispettivamente: ad un effetto tipo "masse aggiunte" alia Westergaard (termini contenenti φ_{1j} , φ_{3j} ...) e ad un effetto tipo "bottom damping" analogo a quello ricavato in Fanelli et al., 1995 (termini contenenti φ_{2j} , φ_{4j} ...).

2. FORMULAZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA STRUTTURALE CON INTERAZIONE STRUTTURALE-INVASO

Le forze nodali $\{F_{hj}\}$ corrispondenti ai termini sopra visti di sovrappressioni da reazione idrodinamica del liquido contenuto nel serbatoio ai movimenti della diga si ricavano per integrazione pesala di superficie della (1.16) con pesi pari, per ogni nodo "j" di S_u alla

rispettiva funzione di forma $N(\zeta, \eta, \zeta)$; sarà perianto:

$$\{F_h\} = -\rho_a \cdot H^3 [\cos(v_{ij} a)] \cdot \{[m_1] \cdot \{\delta\} + \frac{H}{c_a} \cdot [m_2] \cdot \{\delta\} + \left(\frac{H}{c_a}\right)^2 \cdot [m_3] \cdot \{\delta\} + \dots\} \quad (2.1)$$

dove gli elementi delle matrici adimensionali $[m_1]$ $[m_2]$, $[m_3]$...derivano dall'integrazione sopra richiamata (sopra S_u nello "spazio ridotto" di Figura 1b) rispettivamente delle funzioni φ_{1j} , φ_{2j} , φ_{3j} , ...:

$$[m_1] = \int_{S_u} \{N\} \cdot \{N\}^T \cdot [\varphi_{1j}]^T \cdot dS_u$$

(e simili, a parte il segno - per k pari), ove la riga i-esima della matrice $[\varphi_{ij}]$ (e simili) contiene (nelle successive colonne) i potenziali nodali (nei nodi successivi di S_u) corrispondenti alla soluzione φ_{ij} (e simili) del set di equazioni matriciali viste nel §1 con pedice $j=1$; infine la matrice $[\cos(v_{ij} a)]$ contiene, a gruppi diagonali di 3 righe per una colonna, i coseni direttori delle normal i ad S_a nei successivi nodi, rispetto agli assi coordinati a .

Il vettore a 1° membro, e le matrici a II° membro, nella (2.1), il cui ordine è rispettivamente quello dei gradi di libertà dei nodi di S_a e del numero dei nodi di S_u , possono poi essere portati formalmente all'ordine dei gradi di libertà del set completo di nodi della mesh strutturale della diga mediante postmultiplicazione delle matrici per $[\cos(v_{ij} a)]^T$ (come è facile rendersi conto, quest'ultima operazione ha lo scopo di ottenere le componenti normali ad S_u degli spostamenti dei punti P_f che sono que-lle che figurano nella (2.1), dal vettore completo che ne include tutte le componenti Cartesiane) e successiva aggiunla sia al vettore che alle matrici di termini nulli in oportuna posizione. Intenderemo d'ora innanzi che tali operazioni (come pure la premultiplicazione per $[\cos(v_{ij} a)]$ che figura nella 2.1) siano inglobate nei simboli del vettore e delle matrici $[m_k]$ anzidette (matrici di interazione, adimensionali, dipendenti solo dalla forma e dalle caratteristiche fisiche del sistema vaso-serbatoio), senza variare, per semplicità, la scrittura simbolica delle matrici e dei vettori.

Con queste avvertenze, siamo in grado di scrivere formalmente l'equazione matriciale di equilibrio dinámico della struttura nella formulazione ad E.F.:

$$\{K\} \cdot \{\delta\} + \{C\} \cdot \{\dot{\delta}\} + \{M\} \cdot \{\ddot{\delta}\} = \{F_e\} + \{F_h\} = \{F_{ext}\} - \rho_a \cdot H^3 \cdot \left\{ [m_1] \cdot \{\delta\} + \frac{H}{c_a} \cdot [m_2] \cdot \{\dot{\delta}\} + \left(\frac{H}{c_a}\right)^2 \cdot [m_3] \cdot \{\ddot{\delta}\} + \dots \right\}$$

dove $\{F_{ea}\} = \{F_{ea}(t)\}$ è il vettore delle forze nodali esterne, eventualmente nulle (vibrazioni libere, caso che trattiamo nel seguito), e in base a quanto visto sopra $\{\delta\} = \{\delta(t)\}$ è ora il vettore di tutte le componenti degli spostamenti nodali di tutti i nodi della mesh strutturale. L'ispezione visiva della (2.2) evidenzia una curiosa caratteristica. L'ordine differenziale del problema, che normalmente si considera essere 2, appare nel presente

approccio tanto elevato quanto lo è il massimo ordine (D) delle derivate temporali non nulle (o almeno di tutte quelle considerate nella modellazione dell'interazione struttura-invaso) degli spostamenti.

Naturalmente, in modo perfettamente corrispondente saranno ora necessarie, a definire il problema delle vibrazioni libere non ristrette al caso periodico o pseudo-periodico, condizioni iniziali riguardanti non solo posizioni e velocità dei nodi, ma anche le derivate successive degli spostamenti sino all'ordine $D-1$.

Il significato fisico di ciò non è immediatamente apparente. Gli Autori congetturano che questo peculiare aspetto sia la conseguenza analitica dell'aver considerato un liquido perfetto, che conserva indefinitamente "memoria" di tutti gli stati precedenti (di contro, quando si restringa l'indagine ai soli modi periodici o pseudoperiodici si fa implicitamente l'ipotesi che ogni componente del moto di diverso tipo, eventualmente preesistente, sia stata completamente smorzata dai meccanismi dissipativi).

Evidentemente infatti la conoscenza di tutte le derivate consente, nell'ipotesi di continuità implicitamente ammessa, di ricostruire (con sviluppo in serie temporale di Taylor) lo stato di moto dell'invaso nel passato, che in genere influirà sul moto susseguente della struttura (effetti "ereditari"), in quanto in grado di condizionare la distribuzione delle sovrappressioni idrodinamiche.

Vediamo ora come il presente approccio possa includere la determinazione dei "modi propri".

Questi sono definiti ponendo: $\{\delta(t)\} = \{\Delta\} \cdot e^{\sigma t}$, con σ (e conseguentemente $\{\Delta\}$) in genere complessi, e ricercando quei valori σ_1, σ_2 (autovalori) e corrispondenti vettori $\{\Delta_1\}, \{\Delta_2\}, \dots$ (autovettori) che soddisfano alia (2.2).

Sostituendo $\{\delta(t)\} = \{\Delta\} \cdot e^{\sigma t}$ nella (2.2) con $\{F_{ext}\} = \{0\}$ si ottiene con semplici manipolazioni l'equazione agli autovalori/autovettori:

$$\left([K] + \sigma \cdot [c] + \sigma^2 \cdot [M] + \rho_a \cdot H^3 [M^*] \right) \cdot \{\Delta\} = \{0\} \quad (2.3)$$

dove:

$[M^*] = [M^{odd}] + [M^{even}]$ con gli sviluppi in serie (a segni alterni per $\sigma = i \cdot \omega$):

$$[M^{odd}] = [m_1] + \left(\frac{\sigma \cdot H}{c_a} \right)^2 \cdot [m_3] + \dots$$

($\sigma = i \cdot \omega \rightarrow$ matrice di masse aggiunte),

$$[M^{even}] = \frac{\sigma \cdot H}{c_a} \cdot [m_2] + \left(\frac{\sigma \cdot H}{c_a} \right)^2 \cdot [m_4] + \dots$$

Per dimensioni medie della diga, il gruppo adimensionale $\frac{\sigma \cdot H}{c_a}$ è dell'ordine al più dell'unità per

iprimi autovalori, e gli elementi della matrice $[m]$ sono (nel caso tridimensionale e per $I < 1$) di circa due ordini di grandezza inferiori quelli di $[m_1]$. Se tale andamento decrescente si mantiene passando da ogni matrice di interazione alla successiva, è possibile fermarsi ad un ordine di derivazione abbastanza basso senza commet-

tere gravi errori, almeno per quegli autovalori per cui il gruppo adimensionale ora citato è inferiore a 1.

Ad esempio, se si trascurano tutti i termini contenenti matrici $[m_k]$ con $k > 2$, ci si ritrova con una classica matrice di masse aggiunte ($[m_1]$) ed una matrice di "bottom damping" ($[m_2]$); quest'ultima risulta diversa dalla matrice nulla solo se il fondo non è rigido, ossia se $I \neq 0$.

La struttura di $[M^*]$ esplicitata nelle (2.3) evidenzia la dipendenza degli effetti di interazione dalla frequenza ($= \omega/2n$, con $i \cdot \omega$) = parte immaginaria di σ) nel caso di comprimibilità finita del liquido ($I/c_u \neq 0$), e più precisamente il ruolo del parametro adimensionale

$$G = \frac{\sigma \cdot H}{c_a} \quad (G \cong \frac{i \cdot \omega \cdot H}{c_a} \text{ per piccoli smorzamenti}).$$

E' evidente altresì, data la presenza, nei rispettivi termini, di potenze di diversa parità del gruppo G , che $[M^{od}]$ rappresenta effetti inerziali dell'interazione con l'invaso, mentre $[M^{ev}]$ ne rappresenta gli effetti dissipativi.

Il mutato carattere della (2.2) rispetto a quello delle trattazioni "classiche" porta a non escludere in linea di principio la possibilità che, accanto agli autovalori complessi poco differenti da quelli usuali, possano rinvenirsi in casi particolari anche autovalori reali, corrispondenti a moti aperiodici decrescenti (per smaltimento dell'energia cinetica immagazzinata nel sistema attraverso radiazione acustica dal fondo del serbatoio) nel tempo.

Questi modi, evidentemente di scarso interesse pratico, possono pensarsi fisicamente associati a "subsidenze" del fondo del serbatoio che avvengano con costanti di tempo (autovalori reali) coerenti con la dinamica/idrodinamica del sistema struttura/invaso/serbatoio.

Tali modi, ove esistano, potrebbero essere denominati "bottom subsidence modes".

Qualora nella B.C. (I.12) su S_b (e nelle BC. (I.14) per le funzioni φ che ne derivano) si cambi sistematicamente il segno di uno dei membri in tutte le rispettive equazioni, si verrebbe con ciò a considerare un input energetico dall'infinito (verso il basso) al fondo del serbatoio, da questo all'invaso e infine, attraverso interazione idrodinamica, alla diga.

Con le matrici di interazioni calcolate in questo modo, si verrebbero a determinare autovalori a parte reale positiva (periodici ed eventualmente anche aperiodici) che potrebbero avere un significato fisico interessante. Le loro parti immaginarie (nel caso usuale di autovalori complessi) potrebbero essere interpretate infatti come frequenze circolari di onde sismiche P , provenienti da un ipocentro profondo direttamente solloslante all'invaso, e di ampiezza esponenzialmente crescente nel tempo, alie a mettere in risonanza il sistema (e quindi come frequenze sismiche particolarmente pericolose).

Gli eventuali modi aperiodici ad autovalore positivo corrisponderebbero invece a moli, esponenzialmente crescenti nel tempo, di sollevamento del fondo del serbatoio

che avvengano con costanti di tempo coerenti con la dinamica/idrodinamica del sistema diga/invaso/serbatoio. Tali modi, ove esistano, potrebbero essere denominati "bottom heaving modes".

3. UNO SCHEMA DI PROCEDURA NUMÉRICA CON RISOLUZIONE RICORSIVA DI EQUAZIONI MATRICIALI

Con riferimento alio schema di *Figura 2*, una effettiva procedura numérica di implementazione dell'approccio sin qui esposto potrebbe essere agevolmente realizzata mediante progressiva risoluzione di sistemi lineari in cui i risultati di un passo del procedimento concatenato alimentano sistemáticamente i passi successivi. Una volta acquisite le soluzioni (operazione da ripetersi per tutti i valori del pedice "j" relativo ai punti P_i del paramento bagnato), le operazioni di integrazione dellagiate nel § 2 fornirebbero le matrici di interazione $[m_k]$ sino all'ordine k desiderato. Queste ultime permetterebbero infine di costruire l'equazione matriciale dinámica (2.2) del sistema discretizzato e la ricerca dei modi propri secondo la (2.3).

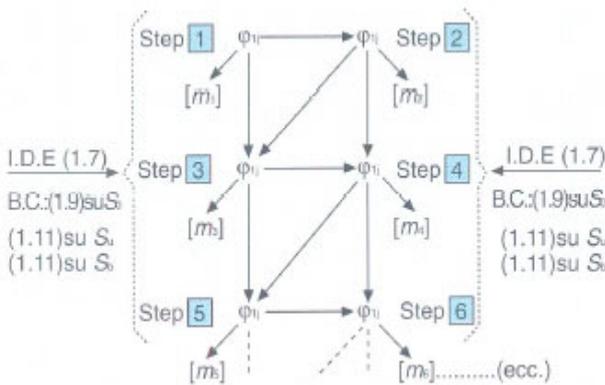


Figura 2. Schema soluzioni concatenate. I.D.E.= equazioni differenziali indefinite; B.C.= condizioni ai limiti. Lo schema di *Figura 2* va eseguito per tutti i pedici "j" corrispondenti ai punti P_i del paramento bagnato S_u . A partire da tutte le soluzioni si potranno costruire le matrici di interazione. Gli step 1 e 2 corrispondono — grosso modo — alio schema di interazione con "masse aggiunte" e "matrice di smorzamento"

Dalla conoscenza dei valori nodali delle ϕ_{kj} , sui nodi del paramento bagnato S_u , é agevole ricavare le matrici $[w_j]$, $[m_1]$, $[m_2]$, $[m_3]$, ..., v. § 2. Gli elementi di tali matrici, come già osservato, decrescono rápidamente al crescere del pedice, se il rapporto delle impedenze acustiche $I = \frac{\rho_a \cdot c_a}{\rho_r \cdot c_r}$

del liquido e della roccia é, come di solito, sensibilmente minore di 1; in tal caso il procedimento si può troncare una volta determinate le prime 4 o 6 matrici (purché il rapporto $G = \frac{\omega_{max} \cdot H}{c_a}$, ove ω_{max} = massima frequenza circolare dei modi che interessano, non sia superiore a 1).

Aspetti realizzativi delicati del procedimento concettuale qui sviluppato riguardano da un lato la convergenza degli sviluppi in serie nelle ultime due equazioni di (2.3), specie

per $G > 1$, dall'altra l'impegno, in termini di potenza HW e durata, dei calcoli numerici.

Circa il primo punto, da quanto sopra i fattori che governano la convergenza appaiono essere i due appena citati rapporti adimensionali J e G .

Per quanto attiene al secondo punto, é ragionevole ritenere che l'approccio in questione non ponga seri problemi quando la situazione del sistema si lasci schematizzare in forma bidimensionale (cioé essenzialmente per le dighe a gravita; si noti che in tal caso, per un assegnato andamento geométrico del paramento della diga e del fondo del serbatoio, nonché per un assegnato valore del rapporto delle impedenze acustiche del liquido e della roccia, sonó precostruibili "funzioni universali" di interazione in base ad una suddivisione prestabilita, ad es. in intervalli uguali, del paramento bagnato; v. Appendice). Nelle situazioni decisamente tridimensionali (es. dighe a volta) la necessità di discretizzare il serbatoio appesantisce notevolmente (ma, riteniamo, non in misura inaccettabile) gli oneri di calcolo [a meno di far ricorso al método dei "boundary elements" che richiederebbe solo la discretizzazione delle superfici delimitanti il volume d'invaso; é da considerare pero che la presenza di termini sorgente "di volume" funzione del posto nelle I.D.E. (1.7) rende dubbio l'applicabilità del método in questione].

Resta comunque il fatto che la formulazione qui proposta, con la netta separazione delle componenti spaziali e temporali dei termini di interazione, riesce a mettere in evidenza in maniera didatticamente perspicua i fattori che influenzano l'accoppiamento fluido-struttura, nonché a chiarire, anche in termini quantitativi, la relativa importanza delle correzioni da apportare alle approssimazioni più radicali (fluido incompressibile, fondo rigido) via via che si cerca di approssimare più da presso la "realità fisica".

4. ESEMPIO ELEMENTARE DI APPLICAZIONE NUMÉRICA

Nelle *Figure 3, 4* e nelle *Tabelle 1, 2* sonó riportati l'andamento ed i valori nodali delle funzioni di interazione ϕ_{ij} e ϕ_{2j}/I , determinad come da eq. (1.7)...(1.14), nel caso piano con paramento della diga verticale e fondo orizzontale. La discretizzazione del paramento bagnato é realizzata suddividendolo in 10 intervalli uguali (11 nodi, numerad da 1 a 11 pariendo da 1 sul pelo libero).

Le figure esemplificano la possibilità (limitatamente a $k=1$ e a $k=2$) di cosluire tali funzioni per via gráfica, sfruttando le nole proprietà geometriche delle linee $\phi = \cos i$, $\psi = \cos i$, di una funzione $\phi + i\psi$ della variabile complessa $\xi + i\zeta$. In particolare, una volta costruita nel dominio Ω la funzione ϕ_{ij} ($J=8$ in *Figura 3*) sfruttando la prima delle (1.7), la condizione al contorno dala dalla prima delle (1.11) su S_u , la prima delle (1.9) e la prima delle (1.14), i valori ottenuti per ϕ_{ij} sul contorno S_b consentono di conoscere l'andamento quanlilativo

della seconda delle B.C. (1.14) lungo esso contorno; la seconda delle (1.7), la seconda delle (1.9) e la seconda delle (7.11) consentono allora di tracciare gráficamente (Figura 4) la mappa della φ_{2j} (sempre per $j=8$) a meno del fattore $I/I = c/c_a$, che potrà variare a seconda delle impedenze acustiche del liquido e della roccia del fondo. In tal senso, e limitatamente alia geometría del sem-plice caso bidimensionale in esame, le finzioni cosí determinate sonó “universali”.

Le Tabelle 1 e 2 compendiarlo invece i valori numerici

degli elementi delle matrici dei valori nodali $[\varphi/I]$, $[(\varphi_2/I)]$ calcolati con una discretizzazione ad E.F. del dominio Ω (v. la forma discretizzata (1.15) delle equazio-ni(1.7)conleloroB.C.).

Osservare la quasi simmetria delle matrici private della prima riga e della prima colonna, salvo il fatto che gli elementi dell’ultima riga sonó pari a circa la meta di quelli dell’ultima colonna; ciò é dovuto alia linearitá del sistema e alia definizione delle finzioni di forma.

j ↓

	Effetto in 1	Effetto in 2	Effetto in 3	Effetto in 4	Effetto in 5	Effetto in 6	Effetto in 7	Effetto in 8	Effetto in 9	Effetto in 10	Effetto in 11
Causa 1	0.0000	-0.0153	-0.0054	-0.0038	-0.0029	-0.0024	-0.0021	-0.0019	-0.0018	-0.0017	-0.0017
Causa 2	0.0000	-0.0666	-0.0405	-0.0232	-0.0176	-0.0144	-0.0125	-0.0113	-0.0106	-0.0102	-0.0101
Causa 3	0.0000	-0.0405	-0.0898	-0.0581	-0.0376	-0.0301	-0.0257	-0.0231	-0.0215	-0.0207	-0.0204
Causa 4	0.0000	-0.0232	-0.0581	-0.1040	-0.0706	-0.0490	-0.0407	-0.0359	-0.0332	-0.0317	-0.0313
Causa 5	0.0000	-0.0176	-0.0376	-0.0706	-0.1160	-0.0812	-0.0592	-0.0508	-0.0461	-0.0438	-0.0430
Causa 6	0.0000	-0.0144	-0.0301	-0.0490	-0.0812	-0.1260	-0.0912	-0.0693	-0.0614	-0.0574	-0.0563
Causa 7	0.0000	-0.0125	-0.0257	-0.0407	-0.0592	-0.0912	-0.1360	-0.1020	-0.0807	-0.0739	-0.0719
Causa 8	0.0000	-0.0113	-0.0231	-0.0359	-0.0508	-0.0693	-0.1020	-0.1470	-0.1140	-0.0951	-0.0914
Causa 9	0.0000	-0.0106	-0.0215	-0.0332	-0.0461	-0.0614	-0.0807	-0.1143	-0.1617	-0.1319	-0.1183
Causa 10	0.0000	-0.0102	-0.0207	-0.0317	-0.0438	-0.0574	-0.0739	-0.0951	-0.1319	-0.1849	-0.1724
Causa 11	0.0000	-0.0050	-0.0102	-0.0156	-0.0215	-0.0281	-0.0359	-0.0457	-0.0592	-0.0862	-0.1260

← $-\varphi_{18}$ v. Fig.3

Tabella 1. Valori di $-\varphi_{18}$ (soluz ad E.F.). Caso piano, paramento verticale (10 suddivisioni uguali). Fondo orizzontale

j ↓

	Effetto in 1	Effetto in 2	Effetto in 3	Effetto in 4	Effetto in 5	Effetto in 6	Effetto in 7	Effetto in 8	Effetto in 9	Effetto in 10	Effetto in 11
Causa 1	0.00000	0.00009	0.00021	0.00033	0.00042	0.00054	0.00067	0.00079	0.00094	0.00106	0.00125
Causa 2	0.00000	0.00064	0.00128	0.00195	0.00262	0.00329	0.00402	0.00479	0.00561	0.00649	0.00744
Causa 3	0.00000	0.00128	0.00256	0.00390	0.00524	0.00665	0.00808	0.00964	0.01130	0.01310	0.01500
Causa 4	0.00000	0.00195	0.00390	0.00588	0.00793	0.01000	0.01220	0.01460	0.01710	0.01980	0.02280
Causa 5	0.00000	0.00262	0.00524	0.00793	0.01070	0.01350	0.01650	0.01970	0.02310	0.02680	0.03090
Causa 6	0.00000	0.00329	0.00665	0.01000	0.01350	0.01710	0.02100	0.02500	0.02940	0.03420	0.03950
Causa 7	0.00000	0.00402	0.00808	0.01230	0.01650	0.02100	0.02570	0.03070	0.03610	0.04210	0.04880
Causa 8	0.00000	0.00479	0.00964	0.01460	0.01970	0.02500	0.03070	0.03670	0.04340	0.05070	0.05920
Causa 9	0.00000	0.00561	0.01130	0.01710	0.02310	0.02940	0.03610	0.04340	0.05140	0.06050	0.07120
Causa 10	0.00000	0.00649	0.01310	0.01980	0.02680	0.03420	0.04210	0.05070	0.06050	0.07190	0.08640
Causa 11	0.00000	0.00356	0.00717	0.01090	0.01470	0.01880	0.02320	0.02810	0.03360	0.04030	0.04970

← $\varphi_{28/I}$ v. Fig.4

Tabella 2. Valori di $\varphi_{28/I}$ (soluz ad E.F.). Caso piano, paramento verticale (10 suddivisioni uguali). Fondo orizzontale

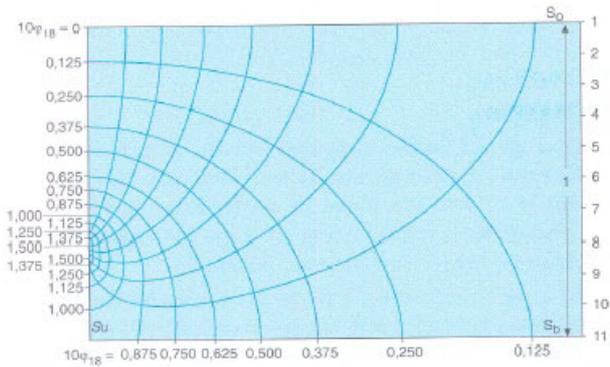


Figura 3. Valores de φ_{18} (soluz. gráfica). Caso plano, paramento verticale (10 suddivisioni uguali). Fondo orizzontale

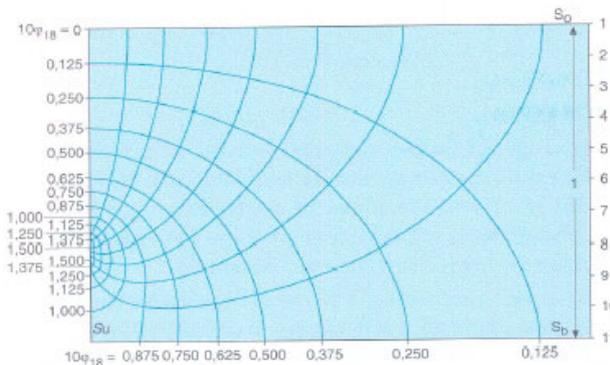


Figura 4. Valores di $1/(1-\varphi_{28})$ (soluz. gráfica). Caso plano, paramento verticale (10 suddivisioni uguali). Fondo orizzontale

Si può notare (e ciò è stato verificato per tutti i valori di j) un soddisfacente accordo tra i valori determinati per via grafica (valori letti sul paramento verticale dalle mappe tracciate graficamente) e quelli ottenuti numericamente tramite l'applicazione del método degli E.F. E' da ricordare (v. Fanelli et al., 1995) che le frequenze ed i coefficienti di smorzamento del primo modo proprio, calcolati (col método semplificato) illustrato in Fanelli (1990), Fanelli e Fanelli (1992), Fanelli et al. (1993) e Fanelli et al. (1994) con queste matrici in un caso reale per diversi valori delle profondità H di invaso, sono risultati in linea con i corrispondenti valori sperimentali.

APPENDICE: FUNZIONI "UNIVERSALI" DI INTERAZIONE. INFLUENZA DELLA VISCOSITÀ DEL FLUIDO. ECCITAZIONE DELLA DIGA DOVUTA AIMOTIAUTONOMIA DEL FONDO

(1) Può accadere che si voglia, per una data geometria, parametrizzare le funzioni di interazione prendendo come variabile indipendente il rapporto /

Tale parametrizzazione appare particolarmente comoda nel caso schematico piano con paramento verticale (a suddivisioni uniformi, in numero prefissato, ad es. 10) e fondo orizzontale; tale schema geometrico in effetti costituisce una accettabile prima approssimazione per le dighe a gravita. La sola grandezza che allora può variare da caso a caso (a parte l'altezza H che è già stata

eliminala riducendosi al dominio adimensionale di Figura 1b) è per l'appunto il rapporto delle impedenze acustiche del liquido e della roccia, cioè /.

Soltó tali assunzioni restrittive per la geometria è possibile una ulteriore scomposizione delle funzioni di interazione tale da permellere il precalcolo una volta per tutte di matrici universali di coefficienti numerici alli a ricostruire, per ogni particolare valore di /, le funzioni stesse. Moslreremo ora come ciò sia possibile.

Inlenderemo nel seguito coslruire la soluzione relativa al nodo generico/, ossia $\varphi_k(j) = \varphi_{kj}$ omellendo il relativo pedice per semplicità di scrittura (φ_k al posto di φ_{kj} . = $\varphi_k(j)$) Inoltre adoteremo la simbologia abbreviata:

$$L = \nabla^2 f \text{ nel dominio } \Omega_f$$

Op = condizione omogenea sul pelo libero S_0

$$D' = \frac{\partial}{\partial v_u} \text{ su } S_u$$

$$D'' = \frac{\partial}{\partial v_b} \text{ su } S_b$$

Coslruiamo le funzioni universali $\varphi_1; \chi_2; \chi_{3a}; \chi_{3b}; \chi_{4a}; \chi_{4b}$, definite come segue:

$$\left. \begin{matrix} L\varphi_1 = 0 \\ Op(\varphi_1) \\ D'\varphi_1 = N \\ D''\varphi_1 = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \varphi_1 \quad \left. \begin{matrix} L\chi_2 = 0 \\ Op(\chi_2) \\ D'\chi_2 = 0 \\ D''\chi_2 = \varphi_1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \chi_2$$

sarà ; $\varphi_2 = I \cdot \chi_2$

$$\left. \begin{matrix} L\chi_{3a} = 0 \\ Op(\chi_{3a}) \\ D'\chi_{3a} = 0 \\ D''\chi_{3a} = \chi_2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \chi_{3a} \quad \left. \begin{matrix} L\chi_{4b} = \chi_2 \\ Op(\chi_{3b}) \\ D'\chi_{3b} = 0 \\ D''\chi_{4b} = \chi_{3b} \end{matrix} \right\} \rightarrow \chi_{4b}$$

sarà ; $\varphi_2 = I^2 \cdot \chi_{3a} + \chi_{3b}$

$$\left. \begin{matrix} L\chi_{4a} = 0 \\ Op(\chi_{4a}) \\ D'\chi_{4a} = 0 \\ D''\chi_{4a} = \chi_{4a} \end{matrix} \right\} \rightarrow \chi_{4a} \quad \left. \begin{matrix} L\chi_{4b} = \chi_2 \\ Op(\chi_{4b}) \\ D'\chi_{4b} = 0 \\ D''\chi_{4b} = \chi_{3b} \end{matrix} \right\} \rightarrow \chi_{4b}$$

sarà ; $\varphi_4 = I^3 \cdot \chi_{4a} + I \cdot \chi_{4b}$

Costruiamo poscia le funzioni universali $\chi_{5a}; \chi_{5b}; \chi_{5c}; \chi_{6a}; \chi_{6b}; \chi_{6c}$ definite come segue:

$$\left. \begin{matrix} L\chi_{5a} = 0 \\ Op(\chi_{5a}) \\ D'\chi_{5a} = 0 \\ D''\chi_{5a} = \chi_{4a} \end{matrix} \right\} \rightarrow \chi_{5a} \quad \left. \begin{matrix} L\chi_{5b} = \chi_{3a} \\ Op(\chi_{5b}) \\ D'\chi_{5b} = 0 \\ D''\chi_{5b} = \chi_{4b} \end{matrix} \right\} \rightarrow \chi_{5b}$$

$$\left. \begin{matrix} L\chi_{5c} = \chi_{3b} \\ Op(\chi_{5c}) \\ D'\chi_{5c} = 0 \\ D''\chi_{5c} = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \chi_{5c}$$

sarà ; $\varphi_5 = I^4 \cdot \chi_{5a} + I^2 \cdot \chi_{5b} + \chi_{5c}$

$$\left. \begin{array}{l} L\chi_{6a} = 0 \\ Op(\chi_{6a}) \\ D'\chi_{6a} = 0 \\ D''\chi_{6a} = \chi_{5a} \end{array} \right\} \rightarrow \chi_{6a} \quad \left. \begin{array}{l} L\chi_{6b} = \chi_{4a} \\ Op(\chi_{6b}) \\ D'\chi_{6b} = 0 \\ D''\chi_{6b} = \chi_{5b} \end{array} \right\} \rightarrow \chi_{6b}$$

$$\left. \begin{array}{l} L\chi_{6c} = \chi_{4b} \\ p(\chi_{6c}) \\ D'\chi_{6c} = 0 \\ D''\chi_{6c} = \chi_{5c} \end{array} \right\} \rightarrow \chi_{6c}$$

sarà ; $\varphi_6 = I^5 \cdot \chi_{6a} + I^3 \cdot \chi_{6b} + I \cdot \chi_{6c}$

Nel seguito si procederà ricorsivamente, aumentando pero via via il numero dei termini /"• χ_{pq} nell'espressione di φ_k (che contiene potenze di I decrescenti di 2 in 2 partendo da $n=k-1$) in modo che compaia sempre il termine con $n=1$ per k pari e il termine con $=0$ per k dis-pari; ad es.:

$$\left. \begin{array}{l} L\chi_{7a} = 0 \\ Op(\chi_{7a}) \\ D'\chi_{7a} = 0 \\ D''\chi_{7a} = \chi_{6c} \end{array} \right\} \rightarrow \chi_{7a} \quad \left. \begin{array}{l} L\chi_{7b} = \chi_{5a} \\ Op(\chi_{7b}) \\ D'\chi_{7b} = 0 \\ D''\chi_{7b} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \chi_{7b}$$

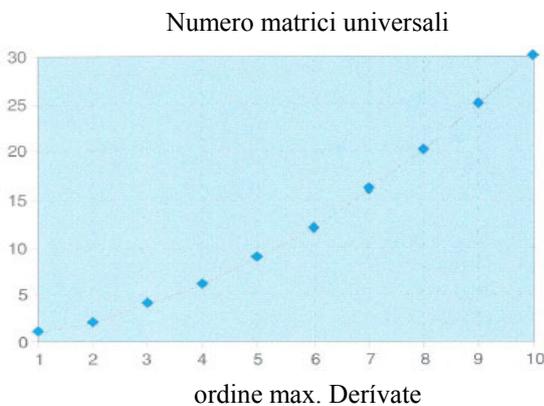
$$\left. \begin{array}{l} L\chi_{7c} = \chi_{5b} \\ Op(\chi_{7c}) \\ D'\chi_{7c} = 0 \\ D''\chi_{7c} = \chi_{6c} \end{array} \right\} \rightarrow \chi_{7c} \quad \left. \begin{array}{l} L\chi_{7d} = \chi_{5c} \\ Op(\chi_{7d}) \\ D'\chi_{7d} = 0 \\ D''\chi_{7d} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \chi_{7d}$$

sarà ; $\varphi_7 = I^6 \cdot \chi_{7a} + I^4 \cdot \chi_{7b} + I^2 \cdot \chi_{7c} + \chi_{7d}$

ecc.

E' facile verificare che le funzioni $\varphi_k (j) = \varphi_{kj}$ cosi costruite per ogni nodo j del paramento bagnato soddisfano alie I.D.E. (1.7) ed alie susseguenti B.C. sino alia (1.14), e quindi sonó le soluzioni del problema di interazione fluido-struttura proposto.

E' facile anche mostrare che, se ci si vuole fermare alie derivate di ordine D negli sviluppi, il numero totale N(D) di matrici "universali" da calcolare vale:



$$N(D) = \text{int} \left(\frac{D+1}{2} \right)^2$$

(v. gráfico).

(2) Tra i meccanismi dissipativi presenti nel sistema fisico non é stata sin qui considerála la viscosità del liquido; in effetti una presa in contó della viscosità sembrerebbe a prima vista in contrasto con l'ipotesi di fluido perfetto dotato di moto a potenziale.

Si sa pero che un moto a potenziale costituisce una soluzione ammissibile delle equazioni complete di Navier-Stokes (inclusi quindi i termini nascenti dal tensore non isotropo di sforzi tangenziali e normali legato alia viscosità, che nel caso di moti a potenziale di fluido incompressibile costituirebbero un sistema ovunque in equilibrio con forze di massa nulle), salvo il fatto che tale soluzione permette di soddisfare solo una condizione al contorno presso le pared solide: perciò le componenti tangenziali del moto relativo del fluido rispetto alia párete non possono generalmente essere poste uguali a zero, come richiesto dalla condizione fisica di aderenza. E' noto comunque che spesso si può ancora ammettere che il moto "al largo" (lontano dalla párete) sia a potenziale, e che questo si raccordi presso la párete con un sottile "strato limite" viscoso che permette di soddisfare la condizione al contorno lócale di velocità tangenziali relative nulle.

Se in quest'ottica si volesse introdurre nel nostro modello la viscosità del fluido senza abbandonare la cómoda ipotesi del moto a potenziale, accantonando per il momento (v. App. §3) la pur importante circostanza della presenza degli strati limite, si giungerebbe, dalle equazioni di Navier-Stokes per un fluido viscoso comprimibile (sempre trascurando i termini cinetici delle variazioni di pressione, cioè nell'ipotesi di piccole velocità: formulazione linearizzata), ad una I.D.E. per il potenziale del tipo seguente:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_a^2} \cdot \left(\ddot{\varphi} - \frac{4}{3} \cdot v \cdot \nabla^2 \varphi \right)$$

con v = viscosità cinemática del fluido (dimensioni fisiche $I^2 \cdot t^{-1}$) in luogo della (1.7).

Evitando di complicare ulteriormente la formulazione della soluzione générale, ci limitiamo ad accennare come si potrebbe tener contó in modo approssimato del termine addizionale a secondo membro della I.D.E. sopra scritta nella ricerca degli autovalori (ed autovettori relativi) senza cambiare sostanzialmente l'impostazione sin qui seguita.

Poiché per effettuare questa ricerca occorre supporre $\varphi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) \cdot e^{\sigma \cdot t}$ risulterà $\Delta^2 \varphi = \sigma \Delta^2 \varphi$. La I.D.E. pocanzi scritta porge allora:

$$\nabla^2 \phi \cdot \left(1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{\sigma \cdot v}{c_a} \right) = \left(\frac{\sigma}{c_a} \right)^2 \cdot \phi$$

ossia

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\sigma}{c_a^*} \right)^2 \cdot \phi$$

sostituendo formalmente nella (1.7) alia celerità reale c_a un valore di "celerità complessa" c_a dato (si ricordi che c_a è complessa) da:

$$(c_a^*)^2 = c_a^2 + \frac{4}{3} \cdot \sigma \cdot v$$

Adottando allora in prima approssimazione per ogni autovalore σ il valore determinato per $v = 0$ si può correggere il valore relativo della celerità e , con procedimento iterativo, ottenere autovalori ed autovettori che includano l'effetto della viscosità (a parte, come evidenziato sopra, l'influenza degli strati limiti presso le pareti solide), purché sia $|\sigma| \cdot V \ll c_a^2$, condizione che si può ritenere senz'altro ampiamente soddisfatta nel caso delle dighe (per l'acqua $v = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; $|a| = \omega$ è dell'ordine al più di $10^2 \div 10^3 \text{ s}^{-1}$; c_a^2 è dell'ordine di $2 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$).

(3) Da quanto esposto nel § precedente si vede che l'influenza della viscosità è certamente trascurabile per quanto attiene alia propagazione delle perturbazioni acustiche nella massa del liquido di invaso (a meno che, per un preesistente moto turbulento di base, non si debba adottare un valore di "viscosità equivalente" di molti ordini di grandezza maggiore della viscosità molecolare). Vogliamo ora sviluppare alcune considerazioni euristiche sull'influenza dello strato limite viscoso sul paramento bagnato (l'influenza dell'analogo strato limite sul fondo bagnato è più difficile da mettere in conto senza modificare l'impostazione del presente studio, v. oltre). Per far ciò, stabiliamo idealmente (nel dominio Ω_f), in ogni punto del paramento S_u , oltre al versore normale v_a , due versori mutuamente ortogonali nel piano tangente localmente alia superficie della diga: siano questi θ_1 e θ_2 . Le velocità tangenziali (ad una distanza dal paramento dell'ordine dello spessore 2λ , dello strato limite a profilo parabolico, v. oltre, spessore che consideriamo trascurabile rispetto ad H) saranno date approssimativamente, nelle ipotesi fatte, da:

$$\left. \begin{aligned} V_{\theta 1} &= \frac{\partial(H \cdot \varphi)}{\partial(H \cdot \theta)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \\ V_{\theta 2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} \end{aligned} \right\}$$

(derivate valutate 'alia parete'), e le tensioni tangenziali alia parete saranno allora date (sempre approssimativamente) da:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\mu}{\lambda} \cdot (V_{\theta 1} - \dot{\delta}_{\theta 1}) = \frac{\rho_a \cdot v}{\lambda} \cdot \left[-\dot{\delta}_{\theta 1} + \sum_j \left(\frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial \theta_1} \cdot \dot{\delta}_{nj} - \frac{H}{c_a} \cdot \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial \theta_1} \cdot \ddot{\delta}_{nj} + \left(\frac{H}{C_a} \right)^2 \cdot \frac{\partial \varphi_{3j}}{\partial \theta_1} \cdot \ddot{\delta}_{nj} - \dots \right) \right] \\ \tau_2 &= \frac{\mu}{\lambda} \cdot (V_{\theta 2} - \dot{\delta}_{\theta 2}) = c.s. \text{ con sostituzione del pedice 2 al pedice 1} \end{aligned} \right\}$$

mentre la pressione Δp su S_a continuerà ad essere data dall'espressione (1.16) sin qui usata.

La generica forza idrodinamica nodale esercitata dal liquido sulla diga sarà allora data da:

$$\{F_{hi}\} = H^2 \int_{S_u} \begin{bmatrix} \cos \theta_{1x} & \cos \theta_{2x} & \cos V_{ux} \\ \cos \theta_{1y} & \cos \theta_{2y} & \cos V_{uy} \\ \cos \theta_{1z} & \cos \theta_{2z} & \cos V_{uz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \Delta p \end{Bmatrix} \cdot N_{i(x,y,z)} \cdot dS_u$$

e quindi esprimibile in funzione delle componenti cartesiane degli spostamenti dei nodi di S_a e delle loro derivate temporali, tenuto conto che:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{\theta 1} \\ \delta_{\theta 2} \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1x} & \cos \theta_{2x} & \cos V_{ux} \\ \cos \theta_{1y} & \cos \theta_{2y} & \cos V_{uy} \\ \cos \theta_{1z} & \cos \theta_{2z} & \cos V_{uz} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix}$$

Si consideri ora che l'ordine di grandezza dello spessore 2λ dello strato limite può essere valutato imponendo che si giunga dalla velocità relativa zero alia parete alia velocità relativa V_{rel} corrispondente al campo di moto a potenziale tramite un profilo parabolico tale che il prodotto:

$$\frac{V_{rel} \cdot 4\lambda}{v} = 2000$$

(condizione di Reynolds): ne consegue:

$$\lambda \cong \frac{500 \cdot v}{V_{rel}}$$

e quindi

$$\tau = \frac{\rho_a \cdot v \cdot V_{rel}}{\lambda} \cong \frac{\rho_a \cdot V_{rel}^2}{500}$$

Poiché, nei limiti della presente trattazione linearizzata, abbiamo trascurato nell'espressione di Δp gli effetti del

Tipo $\frac{\rho_a \cdot V^2}{2}$ proporzionali al quadrato delle velocità del fluido, è evidente che le forze idrodinamiche tangenziali sul paramento bagnato sono anch'esse, a maggior ragione, da trascurare.

Resterebbe da valutare l'effetto delle tensioni tangenziali nello strato limite aderente al fondo bagnato. Come accennato, questo effetto è di più difficile valutazione poiché occorrerebbe tener conto della propagazione di onde acustiche tipo S

negli strati rocciosi sottostanti all'invaso, imponendo condizioni analoghe alia (1.12), che dobbiamo peraltro mantenere, su S_h . Sappiamo però che su tale superficie non possiamo imporre più di una condizione, nell'ambito dell'assunzione iniziale di moto a potenziale di velocità.

Euristicamente potremmo pensare di imporre una condizione mista ricavata da una somma pesata delle due (o meglio tre, tenendo conto delle due direzioni tangenziali alia superficie del fondo bagnato), con pesi proporzionali, ad es., all'entità delle rispettive componenti tensionali. Con ragionamenti analoghi ai precedenti si riconosce però che ciò farebbe intervenire, come termini addizionali, ancora dei quadrati delle velocità [del campo di moto a potenziale] relative al

fondo e perianto riteniamo legittimo il trascurare anche tale effetto nei limiti della presente trattazione.

(4) Infine, sostituendo negli sviluppi precedenti al moto dei punti nodali di S_u il moto (= velocità e successive derivate temporali) dei punti nodali di S_h , il procedimento proposto si può estendere, con ovvie modifiche (saran-no da cambiare le B.C. su S_u e su S_h : p.es. si dovranno ora imporre su S_u condizioni di superficie impermeabili, e su S_h condizioni simili a quelle viste prima su S_u), alla determinazione di un vettore di forze esterne $\{F_{ca}(b)\}$ da espressioni analoghe alla (1.16), rappresentante l'eccitazione dinamica causata alla diga dalle sovrappressioni idrodinamiche generate da moti "autonomi" del fondo, purchè ovviamente questi siano noti in funzione del tempo.

Si deve intendere che il moto definito a tale scopo —per ogni nodo giacente sul fondo bagnato— sia il moto quale si realizzerebbe a invaso vuoto, o meglio in assenza di reazioni da parte del sistema diga-invaso; infatti tali reazioni sono rappresentate automaticamente dall'ultimo termine a secondo membro della (2.2) nel modo visto sopra in dettaglio.

CONCLUSIONI

L'approccio qui delineato permette di trattare in modo "naturale" la dinamica accoppiata del sistema diga/invaso/ fondo elastico del serbatoio, con condizioni iniziali di moto arbitrarie.

Corrispondentemente l'ordine differenziale dei termini di accoppiamento nell'equazione matriciale dinamica cresce in misura indefinita. Mentre il significato fisicomatematico di tale fatto merita ulteriori riflessioni, si ritiene che dal punto di vista pratico esso abbia tutto sommato non eccessiva rilevanza, nei limiti che sono stati illustrati in precedenza.

Le equazioni terza e quarta delle (2.3) illustrano in termini assai compendiosi la dipendenza dalle frequenze modali e la natura in genere complessa delle matrici di "masse aggiunte" e di "smorzamento". Di più, esse

chiariscono l'importanza del rapporto $G = \frac{\omega \cdot H}{c_0}$ e

quindi della comprimibilità del liquido (questione analizzata in innumerevoli studi), nonché della profondità di invaso H .

A loro volta le B.C. (1.14) evidenziano il ruolo fondamentale del rapporto delle impedenze acustiche del liquido e della roccia del fondo nel determinare l'entità dello smorzamento delle vibrazioni naturali per

irraggiamento acustico verso l'infinito (cioè senza riflessione) dalla parte bagnata del fondo del serbatoio.

Infine si intravede la possibilità (almeno in casi particolari) dell'esistenza di "modi propri aperiodici". Quantunque l'importanza pratica di tali modi sia in ogni caso scarsa, essi completano il quadro delle possibili interazioni idrodinamico-meccaniche del sistema.

BIBLIOGRAFIA

- Antes H., von Estorff, G., (1987) *Analysis of absorption effects on the dynamic response of dam-reservoir systems by boundary element methods*, Earthquake Eng. Str. Dyn. Vol. 15
- Fanelli M., (1990) *Rapid preliminary analysis of arch dams: The Ritter method revisited*, Dam Engineering Vol.I, Issue 2
- Fanelli M., Fanelli A., (1992) *Optimal proportioning of archgravity dams: the automatic generation of a simplified starting geometry*, Dam Engineering Vol.III, Issue 4
- Fanelli M, Fanelli A., Salvaneschi R, (1993) *A neural network approach to the definition of near optimal arch dam shape*, Dam Engineering, Vol. IV, Issue 2;
- Fanelli M., Fanelli A., Bonetti R, (1994) *Non linear analysis in the preliminary evaluation of arch dam design*, Hydropower & Dams Vol.I, Issue 6
- Fanelli M., Fanelli A., Galimberti C., Palumbo P., (1995) *The role of the reservoir in the seismic analysis of concrete dams*, Hydropower & Dams Vol. 11, Issue 6
- Fork., Chopra A.K., (1986) *Earthquake analysis of arch dams including dam-water interaction, boundary absorption and foundation flexibility*, Earth-quake Eng. Str. Dyn. Vol. 14
- Kashiwayanagi M., Ohmachi T., (1992) *Observed effects of reservoir water on dynamic characteristics of an arch dam*, Proceedings. International Symposium on Arch Dams. Univ. Press, Nanjing, China
- Proceedings of the Benchmark-Workshops on Numerical Analysis of Dams: Bergamo, May 1991; Bergamo, July 1992; Paris, September 1994; Madrid, September 1996
- Westergaard, H.M., (1993) *Water pressures on dams during earthquakes*, Transactions of ASCE, Vol. 98, 418