

MODELO DO ESCOAMENTO SUPERFICIAL EM MALHAS TRIANGULARES IRREGULARES. RESOLUÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO EXPLÍCITO DE EULER E POR UM MÉTODO IMPLÍCITO

Maria Manuela Pórtela, João Reis Hipólito¹

RESUMO: Apresenta-se o modelo matemático que se desenvolveu para simular a propagação do escoamento superficial em condições de cheia natural em bacias hidrográficas representadas por malhas triangulares irregulares. O modelo utiliza os fundamentos da teoria da onda cinemática e considera a equação da continuidade expressa em termos de volumes e variações de volumes. As equações diferenciais ordinárias a que conduz são resolvidas por diferenças finitas, com recurso ao método explícito de Euler e a um método implícito deduzido a partir do método de Preissmann. Antecedendo a aplicação do método de Euler, estabeleceu-se uma condição de estabilidade que se considera representar a condição de Courant para malhas triangulares irregulares. A aplicação do modelo do escoamento superficial a duas bacias hidrográficas portuguesas conduziu a hidrogramas com forma adequada ou com bom ajustamento a hidrogramas observados. Comparativamente ao método explícito, o método implícito permitiu uma redução de tal modo significativa do tempo de processamento computacional do modelo do escoamento superficial que deixa antever a possibilidade da sua aplicação à análise em tempo real.

INTRODUÇÃO

Tendo por base a representação de uma bacia hidrográfica por meio de um modelo digital do relevo estruturado numa malha triangular irregular, TIN (triangulated irregular network), apresenta-se um modelo matemático para a simulação do escoamento superficial com vista à obtenção de hidrogramas de cheia do escoamento directo em secções de redes hidrográficas, quer seja a secção terminal para que foi definida a bacia hidrográfica, quer sejam secções a montante, sem especificação explícita das respectivas bacias hidrográficas.

Nos modelos do tipo TIN as superfícies topográficas são modeladas, Fowler e Little, 1979, por meio de conjuntos de triângulos contínuos e não sobrepostos, definidos no plano xy e com vértices apoiados nas projecções horizontais de pontos com coordenadas (planimétricas e altimétricas) conhecidas e dispostos irregularmente por forma a caracterizar as singularidades topográficas das superfícies a modelar. A partir dos modelos digitais do relevo são gerados os modelos das redes de drenagem, constituídos por redes descontínuas de elementos lineares rectilíneos —segmentos de recta correspondentes a arestas comuns a triângulos contíguos dois a dois e a que se atribuiu a designação de arestas colectoras—, que

promovem a captação e o transporte longitudinal para jusante das aflúências provenientes de montante sob a forma de caudais concentrados nas extremidades das arestas colectoras ou uniformemente distribuídos ao longo das mesmas.

O modelo de simulação desenvolvido, a que se atribuiu a designação de modelo do escoamento superficial, utiliza as equações de Saint-Venant com as simplificações que decorrem da teoria da onda cinemática (Lighthill e Whitham, 1955) e é suportado, na componente de escoamento à superfície do terreno, pelo modelo digital do relevo e, na componente de escoamento canalizado, pelo modelo da rede de drenagem que se deduz do modelo digital do relevo.

A apreciação da validade da aplicação da teoria da onda cinemática à modelação, no caso geral, de escoamentos em superfície livre e, no caso específico, de ondas de cheias naturais, tem merecido a atenção de numerosos autores, destacando-se Lighthill e Whitham, 1955, Hendersen, 1966, Woolhiser e Liggett, 1967, Miller e Cunge, 1975, Ponce e Simons, 1978, e Singh, 1996. No âmbito da utilização de modelos digitais do relevo em associação com outros modelos, entre os quais se incluem hidrológicos, Moore *et al.*, 1991, mencionam a

¹ Instituto Superior Técnico, Lisboa

Artículo publicado en *Ingeniería del Agua*. Vol.6 Num.2 (junio 1999), páginas 163-178, recibido el 22 de diciembre de 1998 y aceptado para su publicación el 25 de marzo de 1999. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo. En el caso de ser aceptadas, las discusiones serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores en el primer número de la revista que aparezca una vez transcurrido el plazo indicado.

utilização da teoria da onda cinemática para a modelação do escoamento suportada por modelos digitais do relevo estruturados em malhas triangulares irregulares e em isolinhas de altitude, embora não explicitem as respectivas formulações.

A síntese apresentada por Goodrich *et al.*, 1991, referente à modelação do escoamento sobre malhas triangulares irregulares, contempla unicamente modelos inseridos no âmbito da teoria da onda cinemática na qual se fundamenta também o modelo que desenvolveram, já anteriormente referido em Goodrich e Woolhiser, 1989. Aqueles autores propõem a modelação bidimensional do escoamento (segundo duas direcções ortogonais) suportada por uma discretização espacial baseada no método dos elementos finitos aplicado a cada triângulo da malha. Goodrich *et al.*, 1991, incluem a apresentação dos resultados da aplicação do modelo que propõem à modelação do escoamento sobre uma malha triangular irregular constituída por 15 triângulos e englobando 3 trechos de canal.

Palacios-Veléz e Cuevas-Renaud, 1992, aplicam a teoria da onda cinemática à formulação do escoamento sobre cada triângulo de uma malha triangular irregular para o que utilizam as correspondentes equações considerando o escoamento segundo uma única direcção: a de maior declive do plano do triângulo. Para o efeito, admitem que o escoamento sobre cada triângulo ocorre ao longo de um comprimento médio segundo a direcção de maior declive do triângulo, comprimento que, contudo, não explicitam. Por consideração deste comprimento e de uma largura, contida no plano do triângulo e normal à direcção de maior declive, definem um rectângulo com área igual à do triângulo a que respeita. Deste modo, Convertem cada triângulo da malha num rectângulo equivalente. O escoamento sobre este rectângulo é analisado em sucessivas secções transversais, distantes entre si de incrementos de espaço definidos ao longo do comprimento médio. Tal análise utiliza a equação da continuidade expressa em função de volumes e de variações de volume. Os autores apresentam resultados da aplicação do seu modelo a uma malha triangular irregular constituída por 81 triângulos e 14 arestas colectoras. Regista-se que, até à data de elaboração do presente artigo, não se teve acesso a outros trabalhos científicos desenvolvendo o tema.

As equações utilizadas pelo modelo do escoamento superficial, aplicado a um elemento do modelo digital do relevo (triângulo) ou da rede de drenagem (aresta colectora), são dadas pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = I - O \\ J = i \end{cases} \quad (1)$$

em que a segunda equação se obtém por simplificação da equação da dinâmica de acordo com a teoria da onda cinemática e exprime a igualdade entre o declive do fundo do elemento, i , e a perda de carga unitária do escoamento no mesmo, J ; a primeira equação traduz o

princípio da continuidade em termos da variação do volume armazenado, V , no elemento sendo, também, designada por equação de armazenamento (Yevjevich, 1975); I e O representam os caudais, respectivamente, entrado na secção de montante do elemento (caudal afluente a que, eventualmente, se adiciona a contribuição da precipitação efectiva) e saído na sua secção de jusante (caudal efluente). Tais caudais são variáveis ao longo do tempo.

HIPÓTESE SIMPLIFICATIVAS. EXPRESSÃO GERAL DO MODELO DO ESCOAMENTO SUPERFICIAL

A formulação matemática do modelo do escoamento superficial pressupõe as seguintes hipóteses simplificadoras, para além das admitidas na teoria cinemática:

- O escoamento em cada elemento dos modelos é unidimensional e ocorre segundo a respectiva direcção de maior declive, se o elemento pertencer ao modelo digital do relevo, ou longitudinalmente, tratando-se de um elemento do modelo da rede de drenagem;
- O declive do elemento é pequeno pelo que o coseno do ângulo que o define é aproximadamente unitário; consequentemente, o escoamento é analisado em secções verticais, apoiadas nos lados dos triângulos ou nas extremidades das arestas colectoras;
- Em cada instante admitem-se constantes a altura e a velocidade do escoamento no elemento.

Considera-se que os modelos digital do relevo e da rede de drenagem que suportam o modelo do escoamento superficial não exibem elementos de nível nem depressões, singularidades a cuja remoção automática se procedeu previamente por aplicação dos procedimentos computacionais descritos em Silva, 1996, (p. 62 a 90 e p. 137 a 155), e em Portela e Hipólito, 1997^a. Admitese, ainda, que se dispõe de hietogramas da precipitação efectiva pelo que a bacia hidrográfica é interpretada como impermeável.

As discontinuidades e ramificações do modelo da rede de drenagem não são consideradas singularidades pelo facto de não se incompatibilizarem com a formulação matemática do modelo do escoamento superficial. De facto, as discontinuidades do modelo da rede de drenagem representam apenas a transferência de escoamento sob a forma canalizada para escoamento à superfície do terreno o qual, mais a jusante, retoma aquela forma inicial. Nesta óptica, o escoamento proveniente de uma aresta colectora descontínua é entendido como um caudal concentrado num vértice coincidente com a extremidade de jusante da aresta de um dos triângulos nele apoiados. No caso de ramificações, admite-se a repartição equitativa do caudal em cada nó de jusante de uma aresta colectora pelos nós de montante das arestas colectoras nele apoiadas.

A cada elemento a que é aplicado, o modelo do escoamento superficial combina, fundamentalmente, expressões que traduzem os caudais efluentes do próprio elemento e dos elementos que lhe são contíguos e que

Fórmula de resistência do escoamento uniforme		
	Manning-Strickler	Chézy
Triângulo N	$\xi_{j,N}^* = \frac{(\text{sen } \theta_N)^{1/2}}{A_N^{5/3}} \cdot K_N \cdot (\vec{d}_N \cdot \vec{n}_{j,N}) \cdot I_{j,N}$ $[\xi_{j,N}^*] = [L^{-2} \cdot T^{-1}]$	$\xi_{j,N}^* = \frac{(\text{sen } \theta_N)^{1/2}}{A_N^{3/2}} \cdot C_N \cdot (\vec{d}_N \cdot \vec{n}_{j,N}) \cdot I_{j,N}$ $[\xi_{j,N}^*] = [L^{-3/2} \cdot T^{-1}]$
	$n_R = 5/3$	$n_R = 3/2$
Aresta colectora R	$\xi_R = \frac{(\text{sen } \theta_R)^{1/2} \cdot K_R}{2^{2/3} \left(\frac{1}{m_R} + m_R \right)^{1/3} I_R^{4/3}}$ $[\xi_R] = [L^{-1} \cdot T^{-1}]$	$\xi_R = \frac{(\text{sen } \theta_R)^{1/2} C_R}{2^{1/2} \left(\frac{1}{m_R} + m_R \right)^{1/4} I_R^{5/4}}$ $[\xi_R] = [L^{-3/4} \cdot T^{-1}]$
	$n_R = 4/3$	$n_R = 5/4$

Quadro 1. Parâmetros e expoentes intervenientes nas fórmulas de cálculo do caudal efluente do triângulo N da superfície e da aresta colectora R da rede de drenagem.

para ele drenam, caudais que, adicionados à contribuição da precipitação efectiva, são responsáveis pela variação de volume no elemento.

As expressões que fornecem o caudal efluente, respectivamente, do triângulo N, O_N , e da aresta colectora R, O_R , são dadas por:

$$O_N = \sum_{j=1}^{\leq 2} \xi_{j,N}^* \cdot \nabla_N^{n_N} \quad (2)$$

$$O_R = \xi_R \cdot \nabla_R^{n_R} \quad (3)$$

em que ∇ representa o volume de água armazenado no elemento referenciado em índice; $\xi_{j,N}^*$ e ξ_N são parâmetros relativos, o primeiro, ao lado j do triângulo N sobre o qual existe escoamento para o exterior do triângulo e, o segundo, ao conjunto dos lados (no máximo em número de dois) nas anteriores condições ($\xi_{j,N}^*$ e ξ_N são iguais se escoamento sobre o triângulo N for dirigido para o seu exterior através de apenas um lado) e \hat{I}_R é também um parâmetro, mas referente à aresta colectora R. Tais parâmetros dependem das características geométricas do elemento, da rugosidade da sua superfície e da lei adoptada para traduzir a resistência do escoamento. Admitindo que é constante o coeficiente que, na fórmula de resistência adoptada, decorre da natureza da superfície em contacto com o escoamento, os parâmetros em questão serão também constantes e característicos do elemento a que se referem.

No Quadro 1 apresentam-se as fórmulas de cálculo e as dimensões dos parâmetros x , bem como os valores dos expoentes n_N e n_R que também figuram nas equações (2) e (3), para as hipóteses de adopção das leis de resistência de Manning-Strickler e de Chézy. Conforme

esquematizado na Figura 1, admite-se que a secção transversal apoiada na aresta R é triangular e com taludes inclinados at 1:m_R (V:H).

O significado, ainda não referido, das variáveis intervenientes nas fórmulas do anterior quadro é o que seguidamente se apresenta, em que, não ocasionando

confusão, se omitiram os índices N e R relativos, respectivamente, ao triângulo N e à aresta colectora R (Figura 1)

K e C coeficientes de Manning-Strickler e de Chézy

- θ relativos ao escoamento no elemento;
- θ ângulo que define o declive do elemento;
- A_N área em planta do triângulo N;
- \vec{d}_N versor da direcção de maior declive do plano do triângulo N;
- $\vec{N}_{j,N}$ versor da normal horizontal exterior ao lado j do triângulo N (o lado j é tal que existe escoamento para o exterior do triângulo sobre o mesmo);
- $I_{j,N}$ comprimento da projecção horizontal do lado j do triângulo N;
- I_R comprimento da projecção horizontal da aresta colectora R.

Introduzindo as expressões (2) e (3) que definem caudais efluentes de elementos na primeira equação do sistema (1) e designando por $NTRI$ e $NRIO$ o número total, respectivamente, de triângulos do modelo da superfície e de arestas colectoras do modelo da rede de drenagem, obtém-se, após simplificação, a seguinte expressão geral para o modelo do escoamento superficial aplicado ao elemento genérico k :

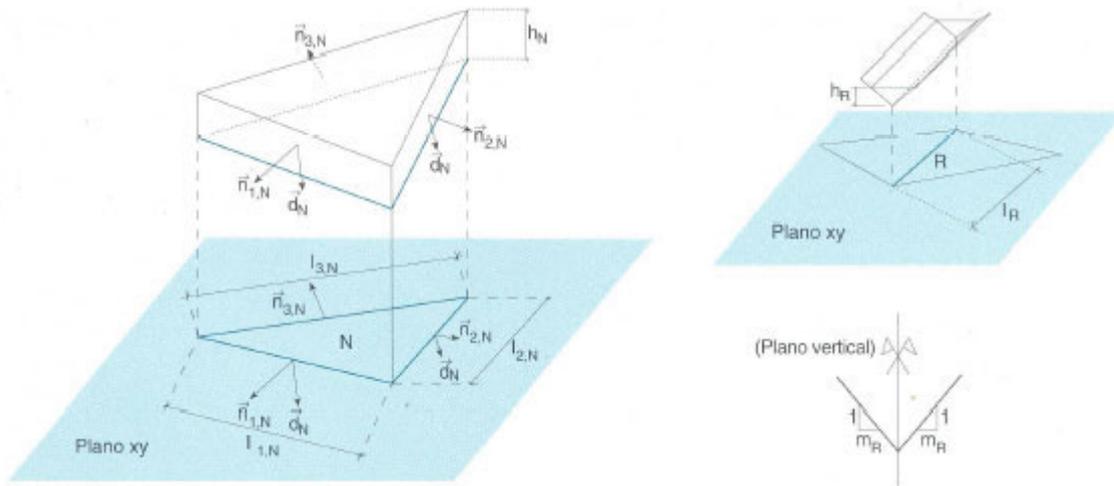


Figura 1. Variáveis associadas ao triângulo N da superfície e à aresta colectora R da rede de drenagem.

$$\frac{dV_k}{dt} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NTRI+NRIO} (\psi_j \cdot \nabla_j^{nj}) - \xi_k \cdot \nabla_k^{nk} + \sigma \cdot PA_k \quad (4)$$

O primeiro termo do segundo membro da anterior expressão refere-se ao caudal afluente ao elemento proveniente de elementos contíguos, pelo que o parâmetro ψ restringe o parâmetro ξ a cada um dos elementos contíguos a k e dos quais, em condições de disponibilidade hídrica, provém caudal para k (ψ é nulo se o elemento não é contíguo a k e igual a ξ se o elemento é contíguo e drena para k); o segundo termo do mesmo membro quantifica o caudal efluente do elemento k e o último, a contribuição da precipitação efectiva, com intensidade P , sendo o unitario se k for um triângulo da superfície ($n_s = n_k$) com área em planta A_k e nulo, se k for uma aresta colectora da rede de drenagem ($n_k = n_R$). A aplicação da expressão (4) a todos os elementos dos molos digital do relevo e da rede de drenagem conduz a um sistema com $NTRI+NRIO$ equações.

Em Hipólito e Portela, 1995, e Portela e Hipólito, 1997^b, apresentam-se generalizações semelhantes a (4) e que adquirem a aplicação das formulações desenvolvidas à modelação do escoamento superficial suportada também por modelos digitais do relevo do tipo raster.

O modelo do escoamento superficial que resulta da associação dos modelos digital do relevo e da rede de drenagem e da equação (4) é um modelo distribuído que utiliza os princípios da teoria da onda cinemática. A variação espacial figura na formulação matemática por meio do índice k que especifica os sucessivos elementos a que, em cada instante, a equação é aplicada e de cuja localização depende o caudal ao longo do tempo.

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO MODELO DO ESCOAMENTO SUPERFICIAL

Introdução

A aplicação do modelo do escoamento superficial aos elementos do modelo digital do relevo e do modelo da rede de drenagem origina um sistema de $NTRI+NRIO$ equações diferenciáveis ordinárias do primeiro grau. A re-

solução numérica de tal sistema assenta na resolução das equações que o constituinte para o que se aplicaram dois esquemas de diferenças finitas, um explícito, designadamente o método de Euler, e outro implícito, estabelecido a partir do método de Preissmann.

A resolução do sistema de equações do modelo do escoamento progride ao longo do tempo, a partir de condições iniciais conhecidas, por incrementos ou passos de cálculo temporais sucessivos. Em cada novo instante de cálculo fornece os volumes armazenados nos elementos dos modelos, a partir dos quais são calculados os correspondentes caudais efluentes, expressões (2) e (3). Obtém-se, deste modo, os hidrogramas do caudal efluente em secções apoiadas em lados de triângulos ou em secções de jusante das arestas colectoras e, neste último caso, em particular na secção que define a bacia hidrográfica.

Método explícito de Euler. Condição de Courant

A integração numérica, de acordo com o método de Euler, do modelo do escoamento superficial aplicado ao elemento genérico k é dada por:

$$\nabla_{k_{i+1}} = \nabla_{k_i} + \Delta t \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NTRI+NRIO} (\psi_j \cdot \nabla_j^{nj}) - \xi_k \cdot \nabla_k^{nk} + \sigma P_j A_k \right] \quad (5)$$

em que os valores das variáveis nos dois instante consecutivos $i\Delta t$ e $(i+1)\Delta t$ foram referenciados pelos índices i e $i+1$, representando Δt o incremento de tempo ou passo de cálculo da discretização temporal. Em cada novo passo de cálculo, a resolução pelo método de Euler utiliza, portanto, volumes antecedentes conhecidos que decorrem do passo de cálculo precedente ou das condições iniciais. A ordem pela qual o sistema de equações é resolvido isto é, pela qual são determinados os volumes armazenados, é arbitrária.

A forma matricial do sistema de equações que se obtém da aplicação de (5) a todos os elementos dos modelos pode ser dada por:

$$[\nabla_{i+1}] = [\nabla_i] + \Delta t \cdot [T_i] \quad (6)$$

em que $[\nabla_{i+1}]$ representa o vector contendo às incógnitas, ou seja, os volumes armazenados no instante $(i+1)\Delta t$; $[\nabla_i]$, o vector contendo os volumes armazenados que resultaram da iteração precedente (ou das condições iniciais, para $i = 0$) e $[T_j]$, o vector que, de acordo com os valores de v , se obtém da especificação para todos os triângulos e arestas colectoras do segundo termo do segundo membro de (5). O método de Euler é convergente e, para incrementos de tempo suficientemente pequenos, estável (Conte e de Boor, 1983, p. 361 e 391). A condição necessária de estabilidade que limita o passo de cálculo dos métodos explícitos é dada pela condição de Courant (Courant *et al*, 1928, e Liggett e Cunge, 1975) que, aplicada à teoria da onda cinemática, toma a forma (Chow *et al*, 1988, p. 293):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta s}{c} \quad (7)$$

em que Δt e Δs são os incrementos, respectivamente, de tempo e de espaço e c , a celeridade da onda cinemática.

A relação entre a velocidade média do escoamento, v , calculada de acordo com a fórmula de resistência de Manning-Strickler, e a celeridade da onda cinemática é dada por (Ponce, 1989, p. 147 e 287):

$$c_N = \frac{5}{3} \cdot v_N \quad e \quad c_R = \frac{4}{3} \cdot v_R \quad (8)$$

referindo-se, a primeira das anteriores expressões, ao escoamento sobre o triângulo N e, a segunda, ao escoamento ao longo da aresta colectora R , elementos estes identificados pelos índices. As expressões correspondentes às anteriores para o caso de aplicação da fórmula de resistência de Chézy são, respectivamente, dadas por (Silva, 1996, p. 215 e 216):

$$c_N = \frac{3}{2} \cdot v_N \quad e \quad c_R = \frac{5}{4} \cdot v_R \quad (9)$$

De acordo com as hipóteses simplificativas adoptadas, o escoamento é analisado em secções verticais a que se referem v_N e v_R . Introduzindo na condição (7) as expressões que, para a aplicação da lei de resistência de Manning-Strickler, fornecem a velocidade média do escoamento através das anteriores secções, obtém-se:

a. Para o triângulo N :

$$\Delta t \leq \frac{3}{5} \cdot \frac{\Delta s}{(\text{sen } \theta_N)^{1/2} \cdot K_N \cdot h_N^{2/3}} \quad (10)$$

b. Para a aresta colectora R :

$$\Delta t \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{\Delta s^{4/3}}{(\text{sen } \theta_R)^{1/2} \cdot K_R \cdot \nabla_R^{1/3} \cdot 2^{2/3} \left(\frac{1}{m_R} + m_R \right)} \quad (11)$$

em que h_N é a altura, medida na vertical, do escoamento sobre o triângulo N (Figura 1) e às restantes variáveis têm significado já apresentado.

As inequações (10) e (11) particularizam, portanto, a condição de Courant para o escoamento sobre o triângulo genérico N do modelo digital do relevo ou ao longo da aresta colectora R do modelo da rede de drenagem, no caso de se aplicar a fórmula de resistência de Manning-Strickler. Tais inequações admitem que, em cada instante, é aproximadamente constante a altura do escoamento no elemento.

Se na expressão geral do método de Euler —expressão (5)— figurasse o incremento de espaço, Δs , seria fácil combinar o mesmo com o incremento de tempo Δt , por forma a observar a condição de Courant correspondente a cada um dos tipos de elementos do modelo, expressões (10) e (11). Contudo, em (5) não surge a discretização espacial por a mesma ser implicitamente fornecida pelo elemento a que, individualmente, tal expressão é aplicada.

Por forma a alcançar uma definição para Δt que permitisse aplicar o método de Euler, procedeu-se, com base em hipóteses simplificativas, a uma análise mais detalhada do procedimento de cálculo que se pode considerar subjacente ao mesmo, análise que seguidamente se apresenta.

Para o efeito, considerou-se que o modelo do escoamento superficial aplicado a cada elemento descreve um sistema que se admite aproximadamente linear. Nestas circunstâncias, o anterior sistema é estável se "responde de modo limitado a estímulos de grandeza limitada. Em particular, um sistema é estável quando responde a qualquer entrada constante com uma saída que, pelo menos assintoticamente, tende para um valor constante. Dir-se-ia em Hidráulica que um sistema seria estável quando, mantendo-se o caudal que nele entra, pudesse atingir um estado de regime permanente" (Hipólito, 1988, p. 2).

Se tal sistema for sujeito a uma entrada, I , —caudal afluente e, eventualmente, precipitação efectiva— constante por tempo indeterminado, a primeira equação do sistema (1) aplicada ao elemento genérico k toma a forma:

$$\frac{d\nabla_k}{dt} = I_k - \xi_k \cdot \nabla_k^{n_k} \quad (12)$$

do que, sendo I_k constante, resulta para o método de Euler:

$$\nabla_{k_{i+1}} = \nabla_{k_i} + \Delta t \cdot \left(I_k - \xi_k \cdot \nabla_{k_i}^{n_k} \right) \quad (13)$$

O desenvolvimento de tal método a partir do volume armazenado, ∇_{k_0} , no elemento no instante inicial, t_0 conduz à sucessão $\{\nabla_{k_i}\} = \{\nabla_{k_0}, \nabla_{k_1}, \dots, \nabla_{k_{i-1}}, \nabla_{k_i}, \nabla_{k_{i+1}}, \dots\}$ em que cada dois volumes consecutivos (desfasados de Δt , portanto) verificam (13). Esta última expressão pode ainda ser escrita por meio de:

$$\nabla_{k_{i+1}} = g(\nabla_{k_i}) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

em que g é a função correspondente ao seu segundo membro.

As expressões (13) e (14) traduzem também a relação recursiva do método iterativo do ponto fixo ou das substituições sucessivas para a resolução de uma equação não linear a uma variável (Carnahan *et al.*, 1969, p. 168). Perto do ponto fixo ou da raiz, ∇_k , é condição necessária para garantir a convergência da sucessão $\{\nabla_{k_0}\}$ que se verifique:

$$|g'(\nabla_k)| < 1 \tag{15}$$

em que g' representa a derivada de g em ordem a ∇_k , ou seja:

$$g'(\nabla_k) = 1 - n_k \cdot \xi_k \cdot \Delta t \cdot \nabla_k^{n_k} - 1 \tag{16}$$

As condições de convergência monótona ou alternada são, respectivamente, dadas por:

$$0 < g'(\nabla_k) < 1 \tag{17}$$

$$-1 < g'(\nabla_k) < 0 \tag{18}$$

Se, em cada elemento k dos modelos, se pretender assegurar a convergência monótona do método iterativo (que parece melhor adequar-se à convergência nos elementos contíguos) e se, conseqüentemente, se introduzir (16) em (17), obtém-se a seguinte condição para o passo de cálculo, Δt :

$$\Delta t < \frac{1}{n_k \cdot \xi_k \cdot \nabla_k^{n_k} - 1} \tag{19}$$

Para a hipótese de aplicação da fórmula de resistência de Manning-Strickler, compara-se a explicitação da anterior expressão para um triângulo da superfície e para uma aresta colectora da rede de drenagem com a correspondente inequação que traduz a condição de Courant.

Para o efeito e considerando primeiramente o triângulo N do modelo digital do relevo, atenda-se ao desenvolvimento da expressão de cálculo do parâmetro ξ_N , Quadro 1 e expressão (2):

$$\xi_N = \frac{(\text{sen } \theta_N)^{1/2}}{A_N^{5/3}} \cdot K_N \cdot \left[\sum_{j=1}^{\leq 2} (\vec{d}_N \cdot \vec{n}_{j,N}) \cdot I_{j,N} \right] \tag{20}$$

Para a hipótese admitida do declive do elemento ser pequeno, pode aproximar-se o somatório que figura na anterior expressão pela soma, I_N , dos comprimentos das

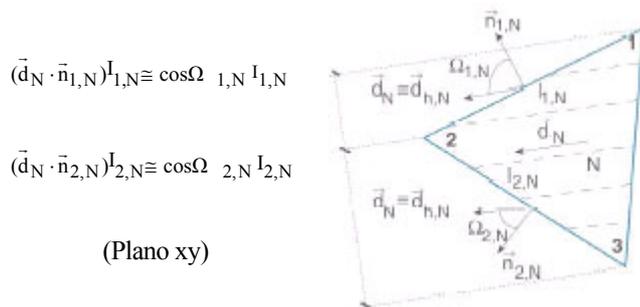


Figura 2. Aproximação do comprimento $(\vec{d}_N \cdot \vec{n}_{j,N})I_{j,N}$ pelo comprimento da projecção de $I_{j,N}$ segundo a normal a $d_{h,N}$

projectões segundo a direcção normal à projecção horizontal do vector de maior declive, \vec{d}_N , dos lados do triângulo N sobre os quais existe escoamento para o exterior do triângulo, Figura 2:

$$I_N = \cos \Omega_{1,N} \cdot I_{1,N} + \cos \Omega_{2,N} \cdot I_{2,N} \tag{21}$$

e, portanto:

$$\xi_N \cong \frac{(\text{sen } \theta_N)^{1/2}}{A_N^{5/3}} \cdot K_N \cdot I_N \tag{22}$$

Introduzindo (22) em (19) e atendendo a que $n_k = n_s = 5/3$ (Quadro 1) e que $\nabla_N = A_N h_N$, obtém-se, após simplificação:

$$\Delta t < \frac{3}{5} \cdot \frac{\left(\frac{A_N}{I_N} \right)}{(\text{sen } \theta_N)^{1/2} K_N \cdot h_N^{2/3}} \tag{23}$$

Como representado na Figura 3, assimile-se o quociente A_N/I_N que aparece na expressão (23) ao comprimento do lado de um rectângulo, contido no plano do triângulo N , com área em planta igual à área, também em planta, deste triângulo e tal que o outro lado tem comprimento I_N dado por (21). O escoamento sobre este rectângulo ocorre segundo a direcção de maior declive, d_N , do plano do triângulo N , ao longo do comprimento A_N/I_N .

Para as hipóteses simplificativas admitidas, a aplicação da condição de Courant ao escoamento sobre tal rectângulo é, também, dada por (10). Considerando para a discretização espacial, Δs , o comprimento A_N/I_N ao longo do qual ocorre o escoamento, a inequação (10) conduz, a menos do sinal de igualdade, à inequação (23).

Verifica-se, assim, que, em termos do escoamento e da definição da condição de Courant, é possível estabelecer uma analogia entre o escoamento sobre o triângulo N e sobre o rectângulo da Figura 3 e que o incremento de tempo que, para o triângulo N , se obtém da condição de convergência monótona do processo iterativo associado ao método de Euler está contido na condição de Courant estabelecida para o rectângulo da Figura 3.

Considerando que o escoamento sobre cada triângulo é equivalente ao escoamento sobre o rectângulo que, de acordo com a assimilação apresentada, lhe corresponde pode, assim, admitir-se que a verificação da inequação

Linhas de maior declive do plano do triângulo
 $\vec{d}_{h,N}$ projecção horizontal do vector de maior declive do triângulo
 $\vec{n}_{2,N}$ normal horizontal exterior ao lado 2 (entre os vértices 2 e 3) do triângulo N
 $l_{2,N}$ comprimento da projecção horizontal do lado 2
 $\Omega_{2,N}$ ângulo entre $\vec{d}_{h,N}$ e $\vec{n}_{2,N}$

referente à condição de convergência monótona do processo iterativo associado ao método de Euler assegura a verificação da condição de Courant.

Para o escoamento ao longo da aresta colectora genérica R , estabelece-se, em seguida, a equivalência entre os passos de cálculo que resultam da condição

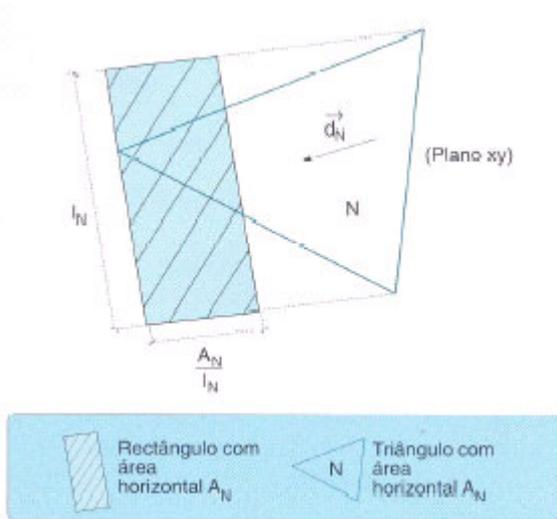


Figura 3. Retângulo horizontal definido a partir do triângulo N

de convergência monótona do processo iterativo associado ao método de Euler e da condição de Courant, também para a aplicação da fórmula de resistência de Manning-Strickler.

Para o efeito, introduza-se em (19) o valor de n_k ($n_k = n_R$) e a fórmula de cálculo de ξ_R , apresentados no Quadro 1:

$$\Delta t < \frac{3}{4} \cdot \frac{I_R^{4/3}}{(\text{sen } \theta_R)^{1/2} \cdot K_R \cdot \nabla_R^{1/3}} \cdot 2^{2/3} \cdot \left(\frac{1}{m_R} + m_R \right)^{1/3} \quad (24)$$

Adoptando para o incremento espacial, Δs , que figura em (11) o comprimento da projecção horizontal, I_R , da aresta colectora R, obtém-se, a menos do sinal de igualdade, a expressão (24). Verifica-se, assim, que também (19) está estreitamente contido no passo de cálculo fornecido por (11).

Tanto para um triângulo da superfície, como para uma aresta colectora do modelo da rede de drenagem, conclui-se, assim, que, para as hipóteses simplificativas admitidas, a verificação da condição estabelecida para a convergência monótona do processo iterativo associado ao método explícito — expressão (19) particularizada por (23) e (24) — assegura a verificação da condição de estabilidade de Courant permitindo especificar o valor limite do passo de cálculo e, conseqüentemente, aplicar o método de Euler ou outro método explícito de diferenças finitas à modelação do escoamento superficial suportado por malhas triangulares irregulares. Se, em vez da fórmula de resistência de Manning-Strickler, se tivesse utilizado a de Chézy alcançava-se análoga conclusão.

Método implícito

O esquema implícito aplicado à resolução numérica do modelo do escoamento superficial foi estabelecido a partir do método de Preissmann (Preissmann, 1961) atendendo ao facto de a variável espaço não figurar nas

equações do modelo por ser explicitamente fornecida pelos elementos a que tais equações são sucessivamente aplicadas.

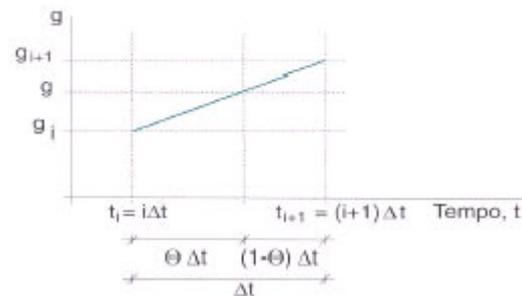
Com efeito, a aplicação do método em causa à discretização por diferenças finitas de uma função contínua, $g = g(t)$, e da sua única derivada em ordem ao tempo, dg/dt , conduz a

$$g = \Theta \cdot g_{i+1} + (1 - \Theta) \cdot g_i \quad (25)$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g_{i+1} - g_i}{\Delta t} = \frac{\Delta g}{\Delta t} \quad (26)$$

em que o coeficiente Θ é um factor de ponderação para o tempo, com valores entre zero e um e que define o ponto em torno do qual se procede à discretização da função g e da sua derivada.

Embora, em rigor, as equações (25) e (26) não definam o método de Preissmann para uma função incógnita de duas variáveis independentes, decorrem directamente da sua adequação às características de uma função g de uma variável independente e traduzem um método implícito com ponderação para o tempo. Na Figura 4 esquematiza-se a discretização temporal da função g em dois instantes consecutivos, $i \Delta t$, com condições conhecidas, e $(i+1) \Delta t$, com condições desconhecidas, desfasados do



passo de cálculo, Δt .

Figura 4. Método implícito apenas com factor de ponderação para o tempo: discretização e factor de ponderação

Se, de acordo com os procedimentos do método de Preissmann, se aplicarem as expressões (25) e (26) à expressão (1) do modelo do escoamento superficial obtém-se, Cunge *et al.*, 1986, (p. 92 a 96), e Silva, 1996, (p. 235 e 236):

$$\frac{\Delta \nabla_{k_{i+1}}}{\Delta t} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NRI + NRIO} \left\{ \psi_j \cdot \left[\Theta \nabla_{j_{i+1}}^{n_j} + (1 - \Theta) \cdot \nabla_{j_i}^{n_j} \right] - \right. \\ \left. - \xi_k \cdot \left[\Theta \nabla_{k_{i+1}}^{n_k} + (1 - \Theta) \cdot \nabla_{k_i}^{n_k} \right] + \right. \\ \left. + \sigma \cdot A_k \cdot \left[\Theta P_{i+1} + (1 - \Theta) \cdot P_i \right] \right\} \quad (27)$$

Para além do índice de elemento que surge nas variáveis n , ψ , e $\Delta \nabla$, indicam-se, por meio dos índices i e $i+1$, os instantes entre os quais ocorre a variação de volume ou os instantes de cálculo das variáveis. A anterior equação

pressupõe que o valor da precipitação efectiva, embora conhecido e espacialmente uniforme, também varia no intervalo de tempo em causa.

Desenvolvendo as potências de volume no instante $(I+i)\Delta t$ em série de Taylor a partir do instante $i\Delta t$ e re- tendo apenas os dois primeiros termos do desenvolvi- mento resulta, para o elemento genérico m :

$$\begin{aligned} \nabla_{m_{i+1}}^{n_m} &= \nabla_{m_i}^{n_m} + \Delta t \cdot n_{mi} \nabla_{m_i}^{n_{m-1}} \cdot \frac{\Delta \nabla_{m_i, i+1}}{\Delta t} = \quad (28) \\ &= \nabla_{m_i}^{n_m} + n_m \cdot \nabla_{m_i}^{n_{m-1}} \cdot \Delta \nabla_{m_i, i+1} \end{aligned}$$

em que se aproximou a derivada total pela relação in- cremental (26). Introduzindo a expressão precedente em (27) e simplificando e reorganizando o resultado assim alcançado, obtém-se, Silva, 1996, (p. 236):

$$\begin{aligned} & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NTRI+NRIO} \left(n_j \cdot \Psi_j \cdot \nabla_{j_i}^{n_{j-1}} \cdot \Delta \nabla_{j_i, j+1} \right) + \left(\frac{1}{\Theta \Delta t} + n_k \cdot \xi_k \cdot \nabla_{k_i}^{n_{k-1}} \right) \Delta \nabla_{k_i, i+1} = \\ & = \frac{1}{\Theta} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{NTRI+NRIO} \left(\Psi_j \cdot \nabla_{j_i}^{n_j} \right) - \xi_k \cdot \nabla_{k_i}^{n_k} + \sigma A_k [\Theta \cdot P_{i+1} + (1-\Theta) \cdot P_i] \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

A equação precedente é linear nas incógnitas em $\Delta \nabla$ e traduz a aplicação do método implícito com ponderação para o tempo à resolução numérica da equação (1) do modelo do escoamento superficial aplicado ao elemento k .

A aplicação de (29) a todos os triângulos do modelo da superfície e a todas as arestas colectoras do modelo da rede de drenagem conduz a um sistema de equações li- neares algébricas com $NTRI+NRIO$ incógnitas, referentes às variações de volume naqueles elementos entre dois instantes consecutivos. Supondo os triângulos e as arestas colectoras ordenados sequencialmente e designando por $(a_{\alpha\beta})_i$ os coeficientes das incógnitas e por $b_{\beta i}$, os termos independentes, o sistema a resolver pode ser escrito na forma matricial por:

$$[(a_{\alpha\beta})_i] \cdot [\Delta \nabla \alpha_{i, i+1}] = [b_{\alpha i}] \quad (30)$$

em que, por meio dos índices i e $i+1$ se manteve a indi- cação do intervalo ou do instante de cálculo; $[(a_{\alpha\beta})_i]$, $[\Delta \nabla \alpha_{i, i+1}]$ e $[b_{\alpha i}]$ designam, respectivamente, a matriz quadrada dos coeficientes das incógnitas, o vector das incógnitas e o vector dos termos independentes. O índice α identifica o elemento α que se aplica a equação (29) e o índice β , o elemento que contribui para a variação de volume no elemento α (incluindo o próprio elemento α devido ao caudal dele efluente).

Conhecido o hietograma da precipitação efectiva e fixa- dos o passo de cálculo, Δt , e o coeficiente de ponderação, Θ , a resolução do sistema (30) fornece as variações de volume em todos os triângulos e arestas colectoras entre cada dois instantes consecutivos. Os volumes sobre os elementos dos modelos no instante $t+ \Delta t$ obtêm-

se a partir dos resultados do sistema (30) por meio de:

$$\nabla_{k_{i+1}} = \nabla_{k_i} + \Delta \nabla_{k_i, i+1} \quad 1 \leq k \leq NTRI + NRIO \quad (31)$$

Por aplicação das equações que fornecem os caudais efluentes dos elementos do modelo em função dos vo- lumes armazenados nos mesmos —equações (2) e (3)— são calculados aqueles caudais.

Em cada instante, os termos independentes, b_{α} , do sistema (30) são dados pelo segundo membro da equação (29). Os elementos dos modelos digital do relevo e da rede de drenagem que, sendo contíguos ao elemento genérico α , intervêm no cálculo dos coeficientes $a_{\alpha\beta}$ intervêm também no cálculo do termo independente b_{α} para cujo valor final contribui ainda a precipitação efectiva, se α for um triângulo.

Embora cada linha da matriz $[(a_{\alpha\beta})_i]$ contenha um nú- mero de coeficientes que, igualando $NTRI+NRIO$, pode ser muito elevado, o número de coeficientes não nulos é muito pequeno por estar associado aos elementos que, por razões de contiguidade, podem contribuir para a variação do volume no elemento com número de ordem igual ao daquela linha. A matriz dos coeficientes das incógnitas é, portanto, muito esparsa. Além deste aspecto, apresenta, ainda, características de antisimetria: se um elemento — triângulo ou aresta colectora— pode receber caudais de outro elemento contíguo, a este último não podem afluir caudais provenientes daquele primeiro, ou seja, se o elemento $a_{\alpha\beta}$ for não nulo o elemento $a_{\beta\alpha}$ será necessariamente nulo Como é evidente, se o elemento $a_{\alpha\beta}$ for nulo o elemento $a_{\beta,\alpha}$ poderá ou não ser nulo.

O carácter esparso e a grande dimensão de $[(a_{\alpha\beta})_i]$ tor- nam esta matriz particularmente adequada à técnica de armazenamento proposta por Key, 1973. De acordo com a anterior técnica, a matriz dos coeficientes é decom- posta em duas matrizes, que se designam por A^* e $ICOL$, a primeira contendo os valores não nulos dos coeficientes das incógnitas sequencialmente armazenados e a se- gunda, os índices de coluna em $[(a_{\alpha\beta})_i]$ daqueles elementos, índices estes, também sequencialmente ar- mazenados.

Dado que o elemento genérico $a_{\alpha\beta}$ de $[(a_{\alpha\beta})_i]$ e o res- pectivo índice de coluna, β , ocupara nas matrizes $ICOL$, $[(a_{\alpha\beta})_i]$ e A^* a mesma linha, em $ICOL$ é apenas retido aquele índice. Deste modo, A^* e $ICOL$ têm tantas linhas quanto a matriz $[(a_{\alpha\beta})_i]$ e tantas colunas quanto o número máximo de coeficientes das incógnitas não nulos nas linhas de $[(a_{\alpha\beta})_i]$. As linhas de A^* e de $ICOL$ com um número de elementos não nulos inferior àquele máximo são completadas por zero.

Para o exemplo de aplicação incluído neste artigo, o ar- mazenamento anteriormente descrito permitiu substituir a matriz dos coeficientes das incógnitas com dimensão 19958×19958 , contendo, portanto, cerca de 398 mil- hões de elementos, por duas matrizes com dimensão de 19958×9 , ou seja, cada uma constituída por cerca de 180 mil elementos, alcançandose, deste modo, uma eco-

nomia significativa na capacidade de armazenamento computacional requerida. Além do mais, supondo que todas as contribuições, em termos de caudais afluentes aos elementos dos modelos ou efluentes destes últimos, existem, a matriz *ICOL* é única, contemplando todas as possíveis contiguidades entre elementos e podendo ser constituída previamente à aplicação do método implícito. Ao longo dos sucessivos passes de cálculo deste método, a pesquisa dos coeficientes das incógnitas não nulos fica, assim, restringida aos elementos cujo posicionamento consta de *ICOL*, obtendo-se uma sensível economia também no tempo de processamento computacional.

RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO DO ESCOAMENTO SUPERFICIAL

Bacias hidrográficas seleccionadas. Condições gerais das aplicações

Para exemplificar a aplicação do modelo do escoamento superficial seleccionaram-se as bacias hidrográficas do rio Alenquer, afluente da margem direita do rio Tejo, cerca de 8.5 km a montante da ponte Marechal Carmo-na, nas estações hidrométricas de Penedos de Alenquer e de Ponte de Barnabé com áreas de, respectivamente, 5,7 km² e 113,6 km², *Figura 5*.

O modelo do escoamento superficial com resolução numérica pelo método explícito de Euler foi aplicado somente à primeira das anteriores bacias hidrográficas, pois o elevadíssimo tempo de processamento computacional requerido por tal método não foi compatível com a sua utilização na bacia hidrográfica da estação hidrométrica de Ponte de Barnabé. A aplicação do modelo do escoamento superficial com resolução numérica pelo método implícito foi efectuada apenas para esta última bacia hidrográfica.

Os resultados que se apresentam nos itens seguintes admitiram precipitação efectiva uniforme sobre qualquer uma das bacias hidrográficas consideradas e ocorrendo após um longo período sem precipitação, pelo que os volumes armazenados nos triângulos e nas arestas colectoras nos instantes iniciais foram considerados nulos.



Figura 5. Localização esquemática das bacias hidrográficas do rio Alenquer analisadas.

Considerou-se, ainda, que a secção transversal triangular apoiada nas arestas colectoras do modelo da rede de drenagem teria taludes com inclinação constante, definida por $m_R = 1.5 (1V:1.5H)$, *Figura 1*.

As aplicações do modelo do escoamento superficial foram sempre seguidas pelo cálculo de erros na verificação da continuidade dos sistemas. Para o instante genérico τ , o erro em causa, ϵ_τ , foi avaliado de acordo com:

$$\epsilon_\tau = \frac{\left(\sum_{j=1}^{NTRI} A_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\tau} P_j \cdot \Delta t_j \right) + \sum_{j=1}^{NTRI+NRIO} \forall j_0 - \sum_{j=1}^{NTRI+NRIO} \forall j_\tau - \sum_{j=1}^{\tau} \frac{Q_{j-1} + Q_j}{2} \cdot \Delta t_j}{\left(\sum_{j=1}^{NTRI} A_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\tau} P_j \cdot \Delta t_j \right)} \tag{32}$$

A anterior expressão transcreve o facto de o volume da precipitação efectiva (sobre a área em planta do modelo digital do relevo) verificada desde o início da contagem do tempo, t_0 , até ao instante, τ , acrescido do volume armazenado sobre os triângulos e nas arestas colectoras naquele instante inicial igualar, a menos do erro ϵ_τ o volume total armazenado em τ nos elementos dos modelos, acrescido do volume do escoamento saído através da secção terminal da rede hidrográfica entre os instantes t_0 e τ ; $\forall j_0$, representa o volume armazenado sobre o elemento j no instante inicial, t_0 , e Θ , o caudal efluente na secção terminal da bacia hidrográfica, tendo sido já apresentado o significado das restantes variáveis. Observa-se que a expressão (32) fornece o erro ϵ_τ como fracção do volume total da precipitação efectiva ocorrida até ao instante τ .

A análise da série temporal dos valores de ϵ_τ permite, não só detectar eventuais incorrecções na implementação computacional dos métodos, mas também aceder à precisão dos resultados alcançados.

Resultados do método explícito de Euler

Na *Figura 6*, apresentam-se os modelos digital do relevo e da rede de drenagem da bacia hidrográfica da estação hidrométrica de Penedos de Alenquer (área de 5,7 km²) constituídos, respectivamente, por 1027 triângulos e por 285 arestas colectoras, estas últimas perfazem do o comprimento de cerca de 30 km.

Na aplicação do modelo do escoamento superficial considerou-se a ocorrência de uma precipitação efectiva, uniforme sobre a bacia hidrográfica, com intensidade de 0.01 mm s⁻¹ e com duração suficientemente longa para se alcançarem condições de escoamento na bacia hidrográfica praticamente permanentes. Nestas condições, o caudal máximo em regime permanente na secção terminal da bacia hidrográfica de Penedos de Alenquer é de 57 m³ s⁻¹.

Para os coeficientes de Manning-Strickler arbitraram-se os valores $k_s = 15 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ e $k_R = 30 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$, relativos ao escoamento, respectivamente, à superfície do terreno e na rede de drenagem.

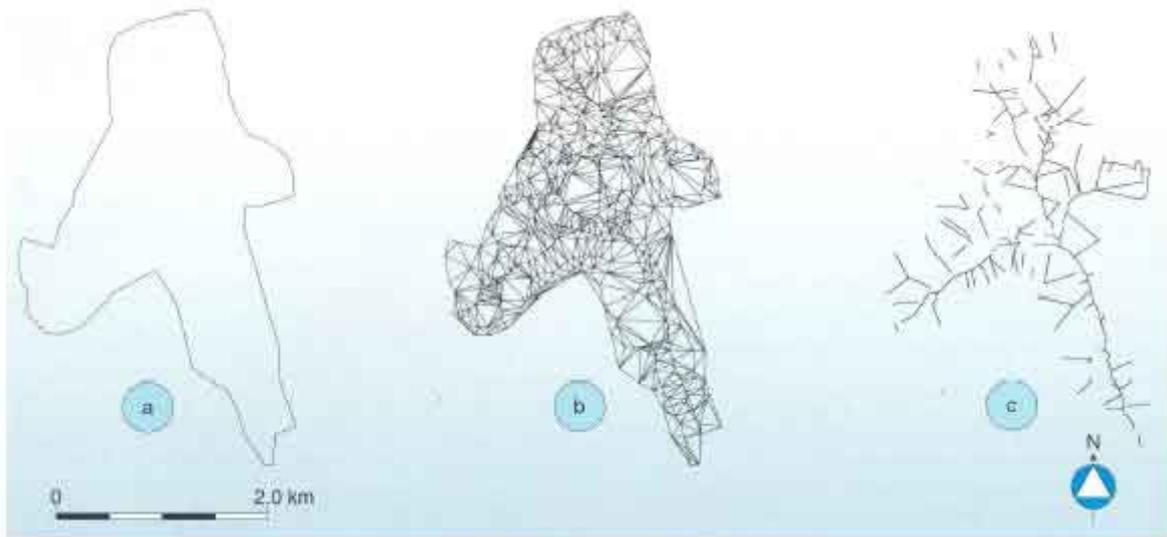


Figura 6. Bacia hidrográfica do rio Alenquer na estação hidrométrica de Penedos de Alenquer: a. Limite da bacia hidrográfica; b. Modelo digital do relevo; c. Modelo da rede de drenagem.

Por forma a diminuir o tempo de resolução computacional do modelo, embora continuando a assegurar a estabilidade do método explícito, desenvolveram-se dois procedimentos para o método de Euler, um com passo de cálculo variável e outro com passo de cálculo fixo. O primeiro dos anteriores procedimentos utiliza, em cada novo instante de cálculo, o menor dos passos de cálculo resultantes da aplicação da condição de Courant a todos os triângulos e arestas colectoras. Considerando a numeração destes elementos sequencial e designando por Δt_{k_i} o passo de cálculo que decorre da condição de Courant aplicada ao elemento k e por Δt_i o passo de cálculo efectivamente adoptado entre os instante i e $i+1$, obtém-se para a expressão do método de Euler:

$$[V_{i+1}] = [V_i] + \Delta t_i \cdot [T_i] \quad (33)$$

em que:

$$\Delta t_i = \text{MIN} \{ \Delta t_{k_i} \} \quad \text{com } 1 \leq k \leq \text{NTRI} + \text{NRIO} \quad (34)$$

A resolução do anterior sistema progride ao longo do tempo por incrementos de tempo que variam entre passos de cálculo, embora em cada passo de cálculo tenham um valor único para toda a malha, definido pela expressão (34).

No decurso da aplicação do anterior procedimento verificou-se, contudo, que a generalidade dos triângulos e arestas colectoras permitiam, quando encarados isoladamente, passos de cálculo algumas centenas de vezes superiores aos passos de cálculo efectivamente adoptados de acordo com (34) pelo que não se afigurou razoável (pelo maior tempo de cálculo computacional que determina) efectuar o cálculo adoptando como incrementos de tempo em cada instante os fornecidos por aquela expressão.

Desenvolvea-se, assim, o procedimento alternativo que utiliza um passo de cálculo, Δt , arbitrado e fixo. Tal pas-

so é aplicado sempre que for inferior aos passos de cálculo que resultam da condição de Courant. Se, num dado instante, existir um elemento k para o qual o passo de cálculo, Δt_{k_i} , que decorre da condição de Courant é inferior ao passo de cálculo Δt ($\Delta t_{k_i} < \Delta t$) procede-se, para o elemento em causa, à subdivisão do intervalo de tempo Δt no menor número exacto de intervalos de tempo com amplitude Δt_{k_i} , inferior a Δt_{k_i} , ou seja:

$$\begin{cases} \Delta t_{k_i}^* \leq \Delta t_{k_i} \\ \frac{\Delta t}{\Delta t_{k_i}^*} = 9 \end{cases} \quad (35)$$

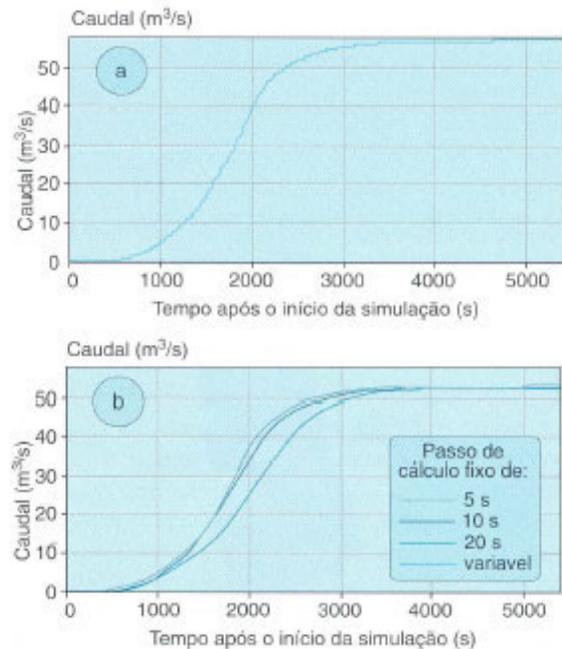


Figura 7. Hidrogramas do caudal efluente na secção da estação hidrométrica de Penedos de Alenquer obtidos pelo método de Euler: a) Com passo de cálculo variável e b) Com passos de cálculo variável e fixos de 5, 10 e 20 s.

em que ϑ é um número inteiro. Para o anterior elemento k , o método explícito progride por meio de ϑ iterações com amplitude $\Delta t_{k\vartheta}$, ao longo das quais o caudal afluente ao elemento é considerado constante e igual ao calculado para o instante t . No final das iterações obtém-se, assim, o volume armazenado no elemento k no instante $t+\Delta t$ e, conseqüentemente, o caudal efluente do mesmo.

Na Figura a 7 apresentam-se os hidrogramas do caudal efluente na secção da estação hidrométrica de Penedos de Alenquer obtidos pelo método de Euler com passo de cálculo variável, Figura a 7, a, e com passos de cálculo fixos de 5, 10 e 20 s, Figura a 7, b. Para comparação, incluíram-se nesta última Figura a os resultados da precedente.

Na Figura a 8, a., ampliada na Figura a 8, b. para o método de Euler com passo de cálculo variável e fixo de 5 s, apresenta-se o erro na verificação da continuidade no sistema global, avaliado por aplicação da expressão (32).

As Figura as 7 e 8 permitem concluir que, não só é verosímil a configuração dos hidrogramas do caudal efluente na secção terminal da bacia hidrográfica—traduzindo a tendência assintótica para o caudal máximo de $57 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ —, como também o erro inerente aos cálculos é muito pequeno: cerca de 0.01%, para passo de cálculo variável, e sensivelmente 8% para o maior dos passos de cálculo fixos ensaiados (20 s).

A Figura a 9 fornece uma caracterização sintética, quer dos valores dos passos de cálculo variáveis, quer da utilização pelos elementos dos modelos dos passos de cálculo fixos arbitrados.

Com base na figura a precedente conclui-se que os pequenos passos de cálculo exigidos pelo método de Euler com passo de cálculo variável associados ao relativamente modesto número de elementos não compatíveis com a utilização de passos de cálculo fixos, justificam, por si só, o interesse da utilização do método de Euler com passo de cálculo fixo.

A finalizar, indica-se, no Quadro 2, o tempo de CPU inerente às aplicações do modelo de escoamento com resultados nas Figura as 7 a 9. Anota-se que, não obstante se terem apresentado estes resultados apenas para 1.5 h de simulação, o intervalo de tempo total simulado foi de 2.0 h, conforme consta do Quadro 2.

Método de Euler com passo de cálculo	Tempo de CPU num computador	
	Digital DEC AXP 7620	Workstation IBM RS6000/320H
Variável	20 min 30.70 s	1 h 51 min 12.69 s
Fixo	5s	1 min 30.92 s
	10s	46.24 s
	20s	24.06 s

Quadro 2. Método explícito com passos de cálculo variável e fixos de 5, 10 e 20 s.

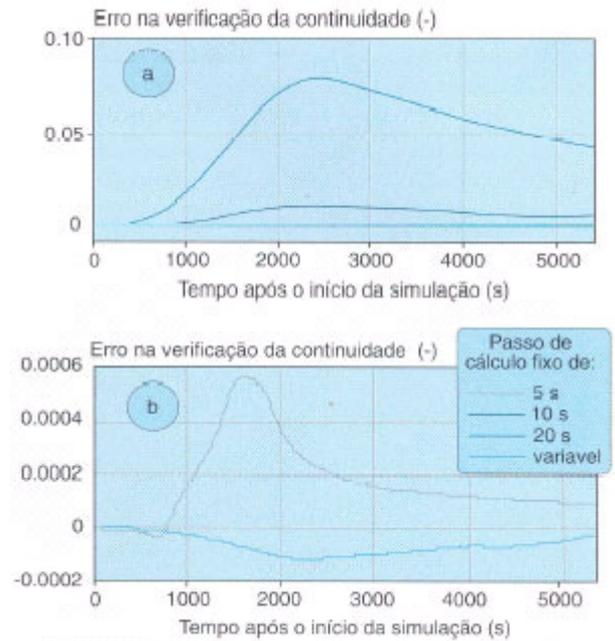


Figura 8. Erro na verificação da continuidade do modelo do escoamento superficial: a) Para passos de cálculo variável e fixos de 5, 10 e 20 s e b) Ampliação para passos de cálculo variável e fixo de 5.

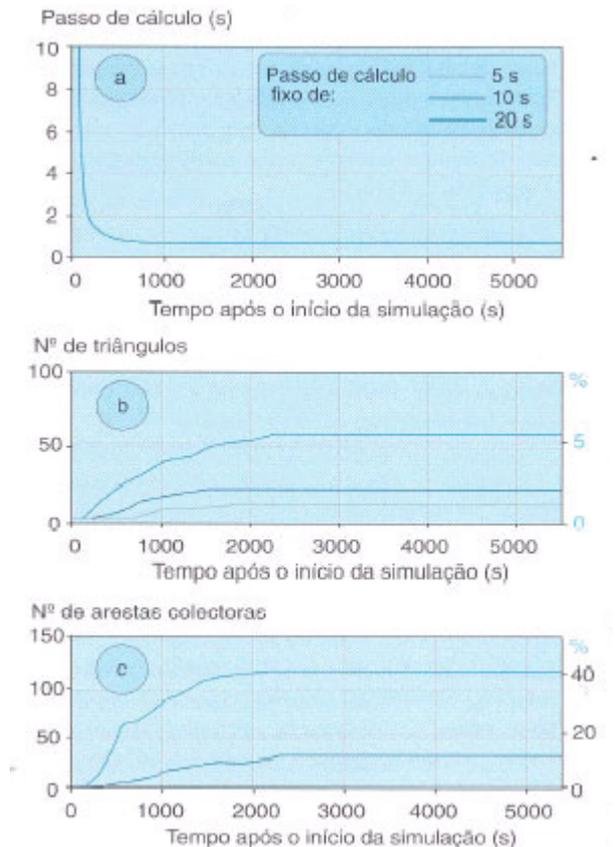


Figura 9. a. Passos de cálculo utilizados no método de Euler com passo de cálculo variável. Número e respectiva percentagem: b. De triângulos e c. De arestas colectoras em que não é utilizado o passo de cálculo fixo arbitrado

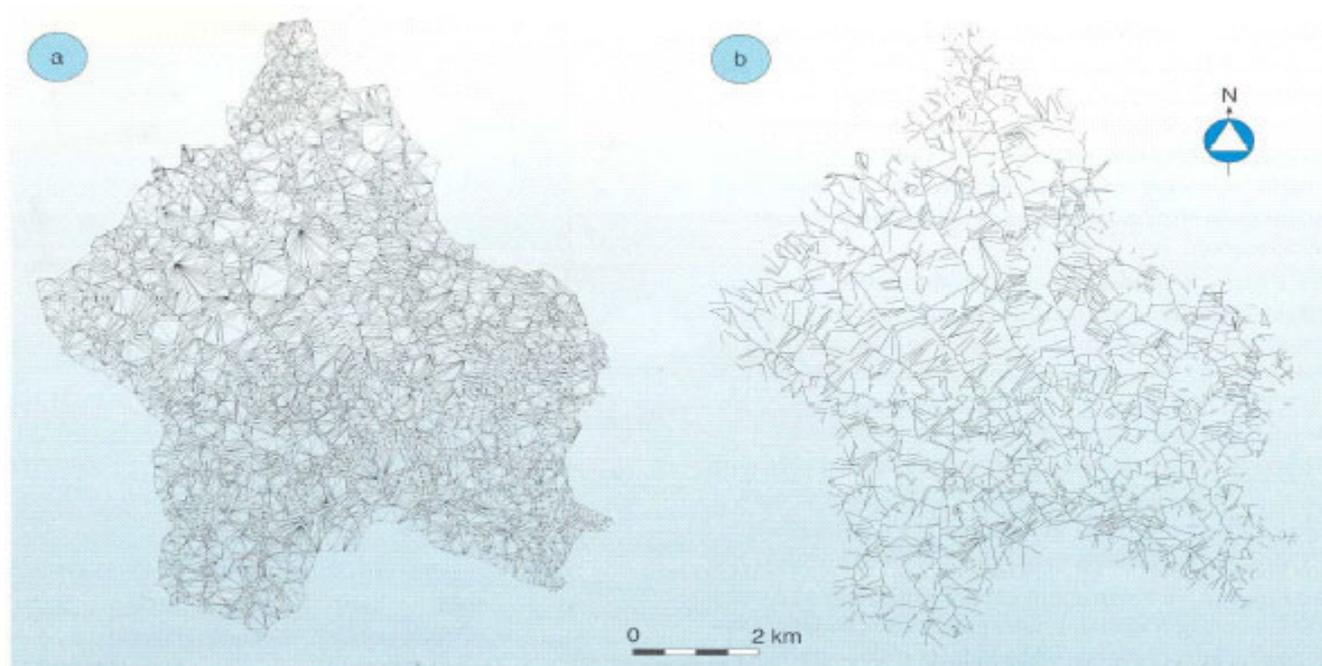


Figura 10. Bacia hidrográfica do rio Alenquer na estação hidrométrica de Ponte de Barnabé: a. modelo digital do relevo e b. modelo da rede de drenagem

Os valores do anterior quadro e os representados nas Figuras 7 e 8, evidenciam que o método explícito com passo de cálculo fixo conduz, para o passo de cálculo de 5 s e também de 10 s, a resultados próximos dos fornecidos pelo método explícito com passo de cálculo variável e, simultaneamente, reduz muito substancialmente o tempo de CPU.

Resultados do método implícito

Na Figura 10 apresentam-se os modelos digital do relevo e da rede de drenagem da bacia hidrográfica do rio Alenquer em Ponte de Barnabé, constituídos, respectivamente, por 15 254 triângulos e por 4 704 arestas colectoras, estas últimas perfazendo o comprimento (no plano horizontal) de cerca de 765 km.

A aplicação do modelo desenvolvido à simulação do escoamento superficial na anterior bacia hidrográfica foi efectuada em simultâneo com a optimização dos valores dos parâmetros do modelo. Tal foi possível dada a grande rapidez de cálculo a que utilização do método implícito conduziu. No presente artigo, incluem-se resultados obtidos a partir do acontecimento pluviométrico que teve lugar em 11 de Fevereiro de 1991, relativamente ao qual se especificaram, previamente, os hietogramas da precipitação efectiva na bacia hidrográfica e o correspondente hidrograma do escoamento directo na secção terminal da bacia.

Os resultados agora apresentados contemplam duas alternativas de definição do conjunto de parâmetros com valores a optimizar. A primeira alternativa tem como parâmetros A^*_M , K_T , e K_R . O parâmetro K_T representa o valor do coeficiente de Manning-Strickler aplicável ao escoamento sobre os triângulos da superfície e ao longo

das arestas colectoras, estas últimas com área a montante inferior ou igual a A^*_M ; K_R respeita ao valor daquele coeficiente para as arestas colectoras com área a montante superior a A^*_M representando, portanto, A^*_M o valor limite da área a montante das arestas colectoras que diferencia entre a adopção de K_T ou de K_R .

A anterior definição do conjunto de parâmetros pretendeu adequar as condições de escoamento traduzidas pelo modelo às que se julgam ocorrer na realidade. De facto, afigurou-se que, como nas redes de drenagem reais, as condições de escoamento nas arestas colectoras poderiam ser muito diversas, aproximando-se, nas arestas colectoras com área a montante muito pequena, das do escoamento à superfície do terreno e representando a ocorrência de uma cheia num trecho de um curso de água bem definido, nas arestas colectoras com significativa área a montante. Consequentemente, o valor do coeficiente de Manning-Strickler mais adequado à forma incipiente do escoamento canalizado nas primeiras das anteriores arestas colectoras não deveria diferir significativamente do valor referente ao escoamento sobre os triângulos.

Contudo, em consequência das discontinuidades do modelo da rede de drenagem, verificou-se que surgem triângulos que, recebendo caudal de arestas colectoras descontínuas, apresentam áreas a montante significativamente elevadas. Por forma a que, em termos da propagação do escoamento, se possa considerar que os triângulos nestas condições preenchem as discontinuidades do modelo da rede de drenagem, afigurou-se que se lhes deveria atribuir um valor do coeficiente de Manning-Strickler idêntico ao aplicável ao escoamento canalizado em trechos também com significativa área a montante.

Deste modo, ensaiou-se uma segunda alternativa para o conjunto de parâmetros constituída pelos três parâmetros, A^*_M , $K <$ e $K >$. O primeiro parâmetro respeita também ao valor limite da área a montante do elemento, embora independentemente de tal elemento ser um triângulo da superfície ou uma aresta colectora da rede de drenagem, e é tal que, consoante a área em causa é inferior ou igual a A^*_M ou é maior do que A^*_M , assim o coeficiente de Manning-Strickler toma o valor $K <$ ou o valor $K >$.

Para determinar a área a montante de cada elemento, sujeitou-se o modelo do escoamento superficial a uma precipitação uniforme, com duração indefinida e intensidade P . Quando, em consequência desta precipitação, as condições de escoamento possam ser consideradas praticamente permanentes, a área que contribui para o escoamento em cada secção transversal iguala a área localizada a montante de tal secção, A_M , verificando-se, portanto:

$$A_M = \frac{Q}{P} \tag{36}$$

em que Q é o caudal efluente do elemento. As áreas a montante dos elementos, assim obtidas, passaram a fazer parte também dos dados do modelo do escoamento superficial.

Na optimização do ajustamento entre valores observados e simulados pelo modelo do escoamento superficial considerou-se como função-objectivo, FO , a minimizar, o somatório do quadrado da diferença entre caudais deduzidos a partir dos caudais observados na estação hidrométrica de Ponte de Barnabé, Q^* , e calculados pelo modelo do escoamento superficial, Q , ou seja:

$$FO = \sum(Q^* - Q)^2 \tag{37}$$

Diskin e Simon, 1977, identificam a anterior função-objectivo como a mais vulgarmente empregue em modelos de simulação hidrológica e, de acordo com os resultados alcançados por tais autores por meio da comparação de doze função-objectivo, também como a que pode conduzir aos melhores ajustamentos.

A estratégia de optimização implementada considera a anterior função-objectivo e utiliza o programa de cálculo automático desenvolvido por Monro, 1971, fundamentado no método de pesquisa directa do tipo local. Este tipo de pesquisa é bastante robusto, sendo a sua aplicação ao modelo do escoamento adequada pois verificouse que a função-objectivo é bem comportada e a zona de pesquisa do ponto óptimo facilmente localizável (Silva, 1996, p.286 a 292).

A Figura 11 contém, a título de exemplo, desenvolvido para A^*_M com valor fixo de 20 km², a caracterização da função-objectivo no espaço dos dois parâmetros K_T e

O Quadro 3 contém os valores dos parâmetros resultantes da optimização do ajustamento obtidos para o passo de cálculo de 360 s, mediante a utilização de um computador Digital DEC AXP 7260.

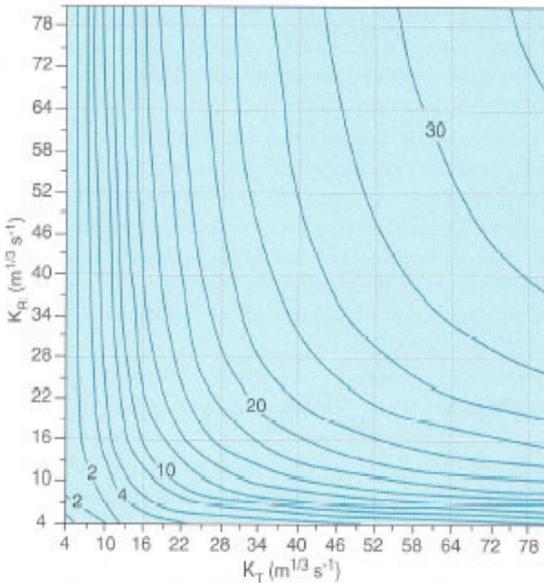


Figura 11. Isolinhas (103 m⁶ s⁻²) da função-objectivo calculada para $A^*_M=20$ km² em pontos do espaço ($K_T K_R$) equidistantes de 4 m^{1/3} s⁻¹ (equidistância entre isolinhas: 2.000 m⁶ s⁻²).

Parâmetro		
Identificação	Valor optimizado	Valor da função-objectivo
A^*_M	12.50 km ²	113m ⁶ s ⁻²
K_T	3.25 m ^{1/3} s ⁻¹	
K_R	46.00m ^{1/3} s ⁻¹	
A^*_M	26.50 km ²	81 m ⁶ s ⁻²
$K <$	3.50 m ^{1/3} s ⁻¹	
$K >$	8.50m ^{1/3} s ⁻¹	

K_T Nas arestas colectoras com área a montante inferior a A^*_M e nos triângulos
K_R Nas arestas colectoras com área a montante superior a A^*_M
$K <$ Nas arestas colectoras e nos triângulos com área a montante inferior a A^*_M
$K >$ Nas arestas colectoras e nos triângulos com área a montante superior a A^*_M

Quadro 3. Valores optimizados dos parâmetros do modelo do escoamento superficial

Para as duas alternativas consideradas para o conjunto de parâmetros do modelo do escoamento superficial e para o anterior passo de cálculo, apresentam-se na Figura 12 os hidrogramas simulados correspondentes ao escoamento directo, Figuras 12. a, e os erros na verificação da continuidade, avahados por aplicação da expressão (32), Figuras 12.b. Para comparação, incluíram-se, também, os hidrogramas do escoamento directo deduzidos a partir dos caudais observados. O tempo após o inicio da simulação foi explicitado em relação ao respectivo instante inicial da aplicação do modelo (inicio da precipitação efectiva).

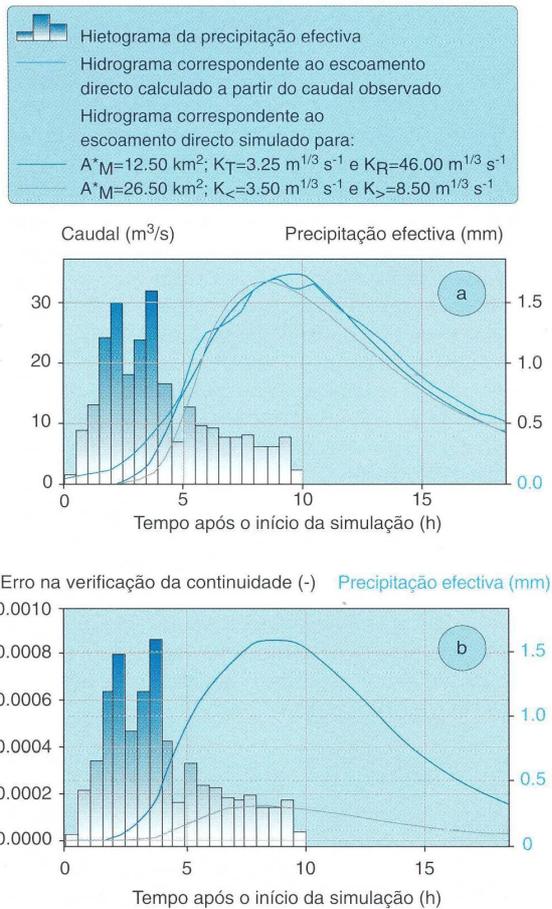


Figura 12. a. Hidrogramas correspondentes ao escoamento directo observado e simulados e b. Erro na verificação da equação da continuidade

A Figura 12 evidencia, que não obstante o relativamente elevado passo de cálculo adoptado (360 s), existe bastante proximidade entre os hidrogramas observado e simulados e que são reduzidos os erros na verificação da continuidade.

Por fim, explicitam-se no Quadro 4 os tempos médios de CPU em dois tipos de computadores referentes à obtenção, directamente a partir dos valores otimizados dos parâmetros, dos resultados apresentados na figura anterior (não incluindo, portanto, o tempo necessário à optimização do ajustamento).

Condições da aplicação do modelo		Tempo de CPU num computador	
Passo de cálculo	Intervalo de tempo simulado	TDigital DEC AXP 7620	Workstation IBM RS6000/320H
360 s	18 h 30 min	3 min 38 s	6 min 36 s

Quadro 4. Modelo do escoamento com resolução numérica pelo método implícito. Tempos médios de CPU.

Observa-se que o tempo computacional necessário à resolução numérica do modelo do escoamento superficial aplicado à bacia hidrográfica em Ponte de Barnabé é, em consequência do elevado número de incógnitas que o modelo contém, fortemente dependente do tempo de resolução do sistema de equações lineares algébricas simultâneas dado por (29) e (30). Consequentemente, é importante aplicar um procedimento de resolução que atenda à especificidade daquele sistema, concretamente à especificidade da respectiva matriz dos coeficientes das incógnitas, por forma a diminuir o tempo em questão. Após comparação de procedimentos, optou-se por utilizar a biblioteca de subrotinas MA48 da Harwell Subroutine Library, 1993, destinada à resolução, por meio da eliminação de Gauss, de sistemas esparsos e anti-simétricos de equações lineares. A anterior biblioteca foi aplicada na versão de dupla precisão.

RESUMO E CONCLUSÕES

Apresenta-se o modelo matemático que se desenvolveu com base na teoria da onda cinemática para simular o escoamento superficial em bacias hidrográficas representadas por malhas triangulares irregulares, com vista à obtenção de hidrogramas de cheia em condições naturais. Incluem-se as expressões que permitem a resolução numérica do modelo pelo método explícito de Euler e por um método implícito estabelecido a partir do método de Preissmann.

Por forma a permitir a aplicação do método de Euler, propõe-se uma condição que se considera representar a condição de estabilidade de Courant aplicada a malhas triangulares irregulares e que permitiu especificar o passo de cálculo a adoptar.

Incluem-se resultados da aplicação do modelo do escoamento superficial a duas bacias hidrográficas com áreas de 5.7 km² e com 113.6 km². A primeira bacia hidrográfica foi representada por 1027 triângulos e por 285 arestas colectoras e a segunda, por 15 254 triângulos e por 4 704 arestas colectoras.

Devido ao maior tempo de processamento computacional requerido pelo método de Euler, a sua aplicação foi exemplificada para a menor das anteriores bacias hidrográficas. Propõem-se dois procedimentos para fixação do passo de cálculo do método explícito, um dos quais permitiu reduzir muito significativamente o tempo de cálculo, mantendo a boa qualidade dos hidrogramas simulados.

O modelo do escoamento superficial com resolução numérica pelo método implícito foi aplicado à maior das bacias analisadas. Não obstante a grande dimensão da malha de cálculo, o tempo de processamento computacional do modelo foi de tal modo reduzido que, não só tornou possível a optimização dos valores dos parâmetros do modelo, como deixa antever o interesse da aplicação do mesmo à análise de cheias em tempo-real.

Os resultados obtidos pelo método implícito para duas possíveis constituições do conjunto de parâmetros evidenciam o bom ajustamento entre hidrogramas simula-

dos e observados, sendo muito próximos os caudais de ponta de cheia e os tempos correspondentes às suas ocorrências.

Regista-se, contudo, que, não obstante os valores obtidos por otimização para o coeficiente de Manning-Strickler se enquadrarem entre os que outros autores registaram (Foster *et al*, 1980, e Williams *et al*, 1990, p. 29), carecem de sistematização suplementar, designadamente mediante a aplicação do modelo do escoamento superficial a outros acontecimentos pluviométricos associados, também, a outras bacias hidrográficas. De tal sistematização deverá resultar a identificação do conjunto de parâmetros mais adequado, bem como propostas para os seus valores.

Resta, aliás, um amplo campo de investigação, em que se destacam a comparação de resultados do modelo do escoamento superficial com soluções teóricas, a inclusão na formulação matemática do mesmo de mais termos da equação de Saint-Venant e a sistematização, anteriormente referida, do conjunto de parâmetros tendo em vista possibilitar a aplicação do modelo à síntese de cheias em bacias hidrográficas sem estações hidrométricas.

BIBLIOGRAFIA

- Carnahan, B., Luther, H. A. e Wilkes, J. O. (1969) Applied Numerical Methods. John Wiley and Sons, Inc., USA.
- Chow, V. T., Maidment, D. R. e Mays, L. W. (1988) Applied hydrology. McGraw-Hill International Editions, Singapore.
- Conte, S. D. e de Boor, C. (1983) Elementary numerical analysis. An algorithmic approach. McGraw-Hill International Book Company, International Student Edition, Singapura.
- Courant, R., Friedrichs, K. O. e Lewy, H. (1928) Über die partiellen differentialgleichungen der mathematischen physik. Mathematical Ann., Londres, Inglaterra, Vol. 100.
- Cunge, J. A., Holly, F. M. e Verwey, A. (1986) Practical aspects of computational river hydraulics. Iowa Institute of Hydraulic Research (re-impressão do livro de 1980 publicado por Pitman Advanced Publishing Program).
- Diskin, M. H. e Simon, E. (1977) A procedure for the selection of objective functions for hydrologic simulation models. Journal of Hydrology. Vol. 34, p. 129-149.
- Foster, G. R., Lane, L. J., Nowlin, J. D., Laflen, J. M. e Young, R. A. (1980), A model to estimate sediment yield from field sized areas: development of model, in CREAMS: A field scale model for Chemicals, Runoff and Erosion from Agricultural Management Systems. Editado por W. G. Knisel. USDA Soil Cons. Res. Rep. N° 26, p. 36-64.
- Fowler, R. J. e Little, J. J. (1979) Automatic extraction of irregular network digital terrain models. ACM Computer Graphics. Vol. 13 (2), p. 199-207.
- Goodrich, D. C. e Woolhiser, D. A. (1989) Routing on a Triangular Irregular Network (TIN) using 2-D kinematic equations with finite elements (abstract). Trans. Am. Geophys. Union. Vol. 70, p. 1091.
- Goodrich, D. C., Woolhiser, D. A. e Keefer, T. O. (1991), Kinematic routing using finite elements on a triangular irregular network. Water Resources Research. Vol. 27 (6), p. 995-1003.
- Harwell Subroutine Library. Release 11 (1993) Specifications. Volume 1. AEA, SERC, p. 385-396.
- Henderson, F. M. (1966) Open Channel Hydraulics. Macmillan Publishing Co., Inc., New York.
- Hipólito, J. N. (1988) Introdução à análise e síntese de séries temporais. Apontamentos da disciplina de Hidrologia Complementar e Recursos Hídricos do curso de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico. Lisboa.
- Hipólito, J. R. e Portela, M. M. (1995) Radar, GIS and surface water hydrology. III International Symposium on Hydrological Applications of Weather Radars. São Paulo, Brasil, p. 557-567.
- Key, J. E. (1973) Computer program for solution of large, sparse, unsymmetric systems of linear equations. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 6, p. 497-509.
- Liggett, J. A. e Cunge, J. A. (1975) Numerical methods of solution of the unsteady flow equations, in Unsteady Flow in Open Channels. Ed. K. Mahmood e V. Yevjevich, Vol. 1, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA, p. 89-182.
- Lighthill, M. J. e Whitham, G. B. (1955) On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 229, p. 281-316.
- Miller, W. A. e Cunge, J. A., (1975) Simplified equations of unsteady flow, in Unsteady Flow in Open Channels. Ed. K. Mahmood e V. Yevjevich, Vol. 1, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA, p. 183-257.
- Monro, J. C. (1971), Direct search optimization in mathematical modelling and a watershed application. NOAA Tech. Mem. NWS HYDRO - 12.
- Moore, I. D., Grayson, R. B. e Ladson, A. R. (1991) Digital terrain modelling: a review of hydrological, geomorphological and biological applications. Hydrological Processes. Vol. 3, p. 3-30.
- Palacios-Vélez, O. L. e Cuevas-Renaud, B. (1992) SHIFT: a distributed runoff model using irregular triangular facets. Journal of Hydrology. Vol. 134 (1-4), p. 35-55.
- Ponce, V. M., (1989) Engineering Hydrology. Principles and Practices. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Ponce, V. M., Li, R. M. e Simons, D. B. (1978) Applica-

- bility of kinematic and diffusion models. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 104, p. 353-360.
- Portela, M. M. e Hipólito, J. N. (1997a) *Tratamento automático das singularidades exibidas por modelos digitais do relevo do tipo TIN (Malhas Triangulares Irregulares)*. Recursos Hídricos, Vol. 18, n° 1.
- Portela, M. M. e Hipólito, J. N. (1997b) *Modelo hidrológico distribuído utilizando modelos digitais do relevo do tipo raster e do tipo TIN. 3° Simpósio de Hidráulica e Recursos Hídricos dos Países de Língua Oficial Portuguesa (3° SILUSBA)*, Maputo, Moçambique, Vol.II.
- Preissmann, A. (1961) *Propagation des intumescences dans les canaux et les rivieres. 1er Congres de l'Association Francaise de Calcule*, Grenoble, France, p. 433-442.
- Silva, M.M. Portela (1996) Modelo distribuído de simulação do escoamento superficial. Dissertação de Doutorado, Instituto Superior Técnico.
- Singh, V. P. (1996) Kinematic wave modeling in water resources: surface-water hydrology. John Wiley and Sons, Inc. USA.
- Yevjevich, V. (1975) *Introduction*, in Unsteady Flow in Open Channels. Ed. K. Mahmood e V. Yevjevich, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA, p. 1-27.
- Williams, J. R., Dyke, P. T., Fuchs, W. W., Benson, V. W., Rice, O. W. e Taylor, E. D. (1990) EPIC - Erosion/Productivity Impact Calculator: 2. User Manual. U. S. Department of Agriculture Technical Bulletin Number 1768, Editores A. N. Sharpley and J. R. Williams.
- Woolhiser, D. A. e Liggett, J. A. (1967) *Unsteady, one-dimensional flow over a plane - the rising hydrograph*. Water Resources Research, Vol. 3(3), p.753-771.