

ANÁLISIS COMPARATIVO DEL TRANSPORTE DE SEDIMENTOS CON CAMBIO GRANULOMÉTRICO

Fabián Rivera Trejo¹ y Gabriel Soto Cortés²

Resumen:

La mayor parte de los modelos de fondo móvil existentes son aplicados a un diámetro representativo del material del fondo. Esta consideración puede no ser la más recomendable, ya que si la muestra de sedimentos es no uniforme, se genera un error sustancial en la estimación del transporte y depósito de partículas en el fondo. En estos casos lo más conveniente es dividir la muestra en fracciones con un diámetro representativo para cada una y calcular el transporte de sedimento por partes. En el presente trabajo se desarrolla un modelo numérico unidimensional de fondo móvil, que pronostica los procesos de erosión y depósito y determina el cambio granulométrico asociado al movimiento del fondo. Las ecuaciones hidrodinámicas se resuelven por el método de pasos fraccionados y las ecuaciones de sedimentos a través de un esquema explícito. Ambos sistemas se acoplan en el tiempo. El cambio granulométrico se determina adoptando el concepto de capa activa. Se comparan y analizan los resultados obtenidos al modelar empleando la fórmula de transporte en sus posibles variantes: a) empleando un diámetro representativo de la muestra, b) dividiendo la muestra en fracciones y c) dividiendo en fracciones y asociando el cambio granulométrico. Los resultados muestran una mejor representación y caracterización del fondo al considerar el cambio granulométrico durante la simulación, de manera que el modelo desarrollado proporciona criterios útiles que se pueden emplear en estudios posteriores.

Palabras clave: Capa activa, transporte de sedimentos, evolución del fondo, modelación numérica, cambio granulométrico.

INTRODUCCIÓN

El flujo en ríos consiste en el movimiento simultáneo de agua y sedimentos; por tanto, un cambio en las condiciones del flujo puede asociarse a una variación en el transporte de partículas en el fondo y, consecuentemente, en una modificación del relieve del cauce. Por tradición, prevalece la práctica de realizar modelos matemáticos predictivos del nivel del fondo y las condiciones del flujo que separan ambos aspectos en dos componentes: sedimentos y agua. Tal consideración se basa en los distintos tiempos de respuesta de los movimientos del agua y sedimentos, como explican Berezowsky y Jiménez (1995). La hipótesis principal en la mayoría de estos modelos llamados no acoplados, considera al fondo fijo durante la solución de las ecuaciones hidrodinámicas y al flujo con gasto constante durante el cálculo del fondo móvil. En muchos casos prácticos, se justifica el uso de

sistemas de ecuaciones no acoplados debido a que la respuesta dinámica del fondo es mucho más lenta que la del líquido; dicho de otra forma, en tramos largos, el fondo se ajusta a caudales medios mensuales y casi no le afectan las variaciones diarias u horarias en el flujo. En un tramo más o menos corto de un río, modificaciones bruscas en su régimen de flujo pueden causar un cambio rápido en los niveles del fondo y en la capacidad de transporte, lo cual magnifica la importancia de la vinculación entre los movimientos del agua y del sedimento. En este caso no se recomienda emplear un modelo no acoplado ya que puede subestimarse la predicción del movimiento del fondo. Holly y colegas (Holly y Rahuel, 1989, 1990 a y b; Rahuel et al, 1989; van-Nicker, 1992; Keh-Chia et al, 1993) han trabajado en el mejoramiento de los modelos acoplados y semiacoplados. La escuela de estos autores considera que la distribución granulométrica cambia con el tiempo; suponen una capa activa o capa de mezcla-

Universidad Autónoma Metropolitana – Azcapotzalco. Apdo. Postal 75-437. C.P. 07301, México, D.F. México, D.F.

(1) Tel.. (52 5)318 90 65. Fax (52 5)394 73 78. E-mail : jrt@pumas.iingen.unam.mx

(2) Tel. (52 5)318 95 39. Fax (52 5)394 73 78. E-mail: gsc@correo.azc.uam.mx

Artículo recibido y aceptado para su publicación el 4 de octubre de 2001. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

do la cual se define como el lugar en el espacio donde se llevan a cabo los fenómenos de erosión, depósito, acorazamiento, etc., o sea el sitio donde el material del fondo es susceptible de moverse. En este tipo de modelos, se resuelven las ecuaciones para el agua y los sedimentos de manera simultánea, lo cual permite minimizar el error que se produce en una solución no acoplada. Aunque en ambos enfoques, acoplados y no acoplados, se resuelven las ecuaciones para ríos de planicie constituidos principalmente por arenas y gravas, algunos autores como López y Falcón (1999) han trabajado en ríos de montaña aplicando procedimientos análogos con buenos resultados. En el presente trabajo se adopta el concepto de capa activa y se desarrolla un modelo de transporte semiacoplado en el tiempo, aplicable a problemas de escala media y ríos de planicie donde las ecuaciones promediadas en la profundidad sean aplicables.

PROCESOS FÍSICOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES

Los procesos de erosión y depósito en cauces han motivado e incrementado la demanda de modelos numéricos capaces de predecir la hidrodinámica, la evolución del fondo y la distribución granulométrica asociada. Dichos modelos se fundamentan en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento del agua y sedimentos.

Ecuaciones hidrodinámicas

Las ecuaciones hidrodinámicas unidimensionales aquí utilizadas, que se derivan de las hipótesis de Saint-Venant para aguas poco profundas y que no consideran el efecto de esfuerzos cortantes en la superficie, ni la componente debida a la aceleración de Coriolis son las siguientes:

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$U_t + (uU)_x + ghH_x + \frac{\tau_{bx}}{\rho} - v_t(U_{xx}) = 0 \quad (1)$$

Ecuación de continuidad:

$$H_t + U_x = 0 \quad (2)$$

donde: g es la aceleración de la gravedad, h el tirante, H la elevación de la superficie libre, τ_{bx} el esfuerzo cortante en el fondo, u la componente de velocidad en la dirección del flujo, ρ la densidad del agua, U el gasto por unidad de ancho en la dirección del flujo, u es la componente de velocidad, t el

tiempo y v_t la viscosidad turbulenta. El esfuerzo cortante en el fondo, se escribe en función de la pendiente de fricción S_f

$$\tau_{bx} = \rho gh S_f \quad (3)$$

Las variables dependientes en las ecuaciones anteriores son $U = uh$ y $h = H - z_b$, donde z_b corresponde a la cota de fondo.

Ecuaciones de sedimentos

Por su parte, la mezcla de sedimentos en ríos se representa por n tamaños de clase, así que en el transporte de sedimentos y en la evolución del fondo, las incógnitas principales son: la distribución granulométrica en la superficie β_i y la elevación del fondo z_b . El sistema de ecuaciones se adopta del trabajo de Spasojevic y Holly (1990).

Con este fin, se define el volumen elemental finito completo como se muestra en la Figura 1. Donde el volumen elemental se define con un espesor igual al espesor de la capa activa, E_m . Siempre que las partículas son adicionadas o removidas de la superficie dentro del volumen elemental, su distribución granulométrica cambia. Δl representa la longitud del volumen elemental finito, mientras que q_{se} y q_{ss} son el gasto de sedimentos a la entrada y a la salida respectivamente.

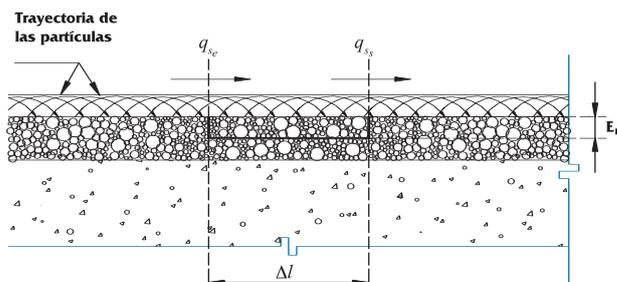


Figura 1. Volumen elemental del fondo

Si ΔV representa el volumen elemental que contiene a la capa activa y p es la porosidad, entonces $(1-p) \Delta V$ es el volumen de todas las partículas contenidas en ΔV . La fracción β en la capa activa de un tamaño en particular, se define como la razón del volumen de partículas de tamaño n , entre el volumen total de partículas contenidas en ΔV .

Una vez definido el volumen elemental, se aplica la ecuación de continuidad correspondiente a cada tamaño de clase:

$$(1-p) \frac{\partial(\beta_i E_m)}{\partial t} + \nabla \cdot q_{si} + S_{ei} = 0 \quad (4)$$

donde:

$$\sum \beta_i E_m = Z_b \quad (5)$$

sumando todas las fracciones se tiene la ecuación de continuidad global del fondo:

$$(1-p) \frac{\partial Z_b}{\partial t} + \sum (\nabla \cdot q_{si}) = 0 \quad (6)$$

donde: q_{si} el transporte volumétrico de sedimentos de tamaño i por unidad de ancho, β_i la fracción volumétrica en la capa activa para un tamaño i , mientras que S_{ei} es el término fuente de intercambio de sedimentos entre estratos del fondo. El espesor de la capa activa E_m depende de los n gastos sólidos q_{si} . El término fuente del fondo S_{ei} depende del tirante h , de la velocidad u y de las incógnitas principales de los sedimentos (z_b y β).

Capa activa

La capa activa y su espesor durante los procesos de erosión y depósito no son iguales. Durante la erosión la capa activa queda definida de acuerdo a la fórmula de Bennet y Nordin (1977) y es proporcional al grado de erosión que ocurre durante el paso de tiempo:

$$E_m = -(Z_b^{n+1} - Z_b^n) \quad (7)$$

donde n representa al instante de tiempo actual y $n+1$ el siguiente.

Si el fondo se aproxima a la condición de acorazamiento, el espesor de la capa activa tiende a cero, por lo que se usa la siguiente aproximación:

$$E_m = 2D_{90} \quad (8)$$

Durante el depósito el espesor de la capa activa se define por la siguientes expresión:

$$E_m^{n+1} = E_m^n + (Z_b^{n+1} - Z_b^n) \quad (9)$$

Transporte de sedimentos

Como ecuación representativa del transporte total de sedimentos se adoptó la formula desarrollada por Karim (1998), la cual describe el gasto de sedimentos (q_s) en función de: la velocidad del flujo (u), la velocidad al esfuerzo cortante (u^*), la velocidad de caída de la partícula (W), la gravedad específica de las partículas (s) y el diámetro medio (D_{50})

$$\frac{q_s}{\sqrt{g(s-1)D_{50}^3}} = 0.00139 \left(\frac{u}{\sqrt{g(s-1)D_{50}}} \right)^{2.97} \left(\frac{u^*}{W} \right)^{1.47} \quad (10)$$

Al considerar que la muestra de sedimentos esta dividida en n fracciones, con (D_i) representando el diámetro medio de cada fracción de tamaño i , entonces el gasto total de sedimentos de tamaño i queda representado por:

$$q_{si} = q_s (D_i) \phi_i \quad (11)$$

Donde ϕ_i representa una función de peso de la fracción i , $q_s(D_i)$ se deriva de (10) sustituyendo a D_{50} por D_i y a la velocidad de caída W por la velocidad de caída de la fracción i (W_i).

Al considerar que las partículas no están igualmente expuestas en el fondo, se supone un factor de corrección (P_{ai}) del área de la superficie cubierta por partículas de sedimentos de tamaño D_i y con fracción volumétrica β_i :

$$P_{ai} = \frac{\beta_i / D_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i / D_i} \quad (12)$$

El efecto de cobertura de las partículas más pequeñas por las más grandes se representa por el factor de ocultación (γ) y se define como:

$$\gamma_i = C_1 \left(\frac{D_i}{D_{50}} \right)^{C_2} \quad (13)$$

donde C_1 y C_2 son exponentes empíricos que se pueden expresar como funciones de las variables del flujo: velocidad al cortante (u^*) y la velocidad de caída para el diámetro medio D_{50} (W). Karim determinó las siguientes expresiones a partir del análisis de datos experimentales de Einstein y Chien (1953).

$$C_1 = 1.15 \left(\frac{W}{u^*} \right) \quad (14)$$

$$C_2 = 0.60 \left(\frac{W}{u^*} \right) \quad (15)$$

A partir de las expresiones anteriores la función de peso ϕ_i , queda definida como:

$$\phi_i = P_{ai} \gamma \quad (16)$$

por lo que la ecuación de transporte de sedimentos por fracciones se obtiene a partir de (11), (12) y (13) y se escribe:

$$\frac{q_{s_i}}{\sqrt{g(s-1)D_i^3}} = 0.00139 \left(\frac{u}{\sqrt{g(s-1)D_i}} \right)^{2.97} \left(\frac{u^*}{W_i} \right)^{1.47} P_{ai} \gamma \quad (17)$$

ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS Y DE SEDIMENTOS

El sistema de ecuaciones total queda formado en la parte hidrodinámica por: la ecuación de cantidad de movimiento y la ecuación de continuidad (ecs. 1 y 2). En la parte de sedimentos: n ecuaciones de continuidad para cada tamaño de fracción i (ec. 4) y una ecuación de continuidad global de sedimentos (ec. 6).

En las ecuaciones hidrodinámicas, se representa la superposición de tres procesos físicos elementales llamados: advección, difusión y propagación (Benqué et al, 1982). La naturaleza de estas ecuaciones hace posible el considerar el método de solución numérica más conveniente en cada caso. El método de pasos fraccionados desarrollado por Yanenko et al. (1971) es particularmente aplicable a este tipo de problemas; suponiendo que el estado del sistema se conoce al tiempo n Δt, el nuevo estado al instante (n+1)Δt se calcula con la aplicación sucesiva de las etapas advectiva, difusiva y propagativa (Soto, 2000).

El método de solución disocia el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales en un grupo lineal-tridiagonal. La advección se calcula con un esquema explícito en diferencias finitas; la difusión de cantidad de movimiento se calcula de manera semi-implícita y para tomar en cuenta los esfuerzos turbulentos de Reynolds se incorpora un coeficiente de viscosidad turbulenta constante. La etapa de propagación se resuelve de manera semi-implícita.

Por otra parte, el sistema formado por las ecuaciones de sedimentos, llamado módulo de sedimentos se resuelve a través de un esquema explícito. Partiendo de los valores calculados en el módulo hidrodinámico se estiman las relaciones auxiliares como son: la velocidad de caída de las partículas, el espesor de la capa activa, el esfuerzo cortante debido a los granos, el gasto sólido, etc. Con estos valores se forma el sistema de ecuaciones de sedimentos, el cual relaciona al porcentaje de mate-

rial contenido en la capa activa y su gasto sólido para cada tamaño representativo de partículas en el fondo.

Para visualizar la solución del sistema de ecuaciones, se puede pensar que las incógnitas de sedimentos son los componentes de un vector S en un punto, de la siguiente manera:

$$\vec{S}^{n+1} = (z_b^{n+1}, \beta_1, \dots, \beta_i) \quad (18)$$

De manera más compacta se puede escribir como:

$$\vec{S}^{n+1} = (S_1, S_{k+1}) \quad k=1, i \quad (19)$$

donde k se introduce para denotar al tamaño i-ésimo de la mezcla de sedimentos en consideración.

La ecuación de continuidad global de sedimentos (6), simbólicamente se puede escribir como:

$$F_1(\vec{S}^{n+1}) = 0 \quad (20)$$

La ecuación de continuidad por fracciones (4)

$$F_{k+1}(\vec{S}^{n+1}) = 0 \quad (21)$$

Las ecuaciones 20 y 21 forman un sistema algebraico de ecuaciones no lineales. En su solución se aplica el método de Newton-Raphson donde al sistema a resolver es de la forma:

$$J(\vec{S}) \Delta \vec{S}^{n+1} = f \quad (22)$$

donde J representa al jacobiano. Rescribiendo las ecuaciones que forman el sistema algebraico se tiene:

$$a_{1,1} \Delta s_1 + a_{1,k+1} \Delta s_{k+1} = f_1 \quad (23)$$

$$a_{k+1,1} \Delta s_1 + a_{k+1,k+1} \Delta s_{k+1} = f_{k+1} \quad (24)$$

donde $a_{1,1}, \dots, a_{k+1,k+1}$ representan a los coeficientes del jacobiano, Arreglándolo en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,k+1} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_1 \\ \Delta s_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_{k+1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Las correcciones de las variables de sedimentos se escriben como:

$$\Delta \vec{S} = (\Delta S_1, \Delta S_{k+1}) \quad k=1, i \quad (26)$$

o de manera explícita:

$$\vec{\Delta S} = (\Delta z_b, \Delta \beta_1, \dots, \Delta \beta_k) \quad k=1, i \quad (27)$$

Una vez obtenidas las correcciones de las variables de sedimentos, el valor actualizado de la iteración se calcula por medio de:

$${}^{m+1}\vec{S} = {}^m\vec{S} + \vec{\Delta S} \quad (28)$$

Las iteraciones continúan hasta que un criterio de convergencia previamente establecido se alcanza, es decir:

$$\vec{\Delta S} < \varepsilon \quad (29)$$

donde ε es el vector de convergencia.

Una vez finalizado el módulo de sedimentos, se fijan los nuevos valores de la distribución granulométrica y cotas del fondo. Estos valores ingresan al módulo hidrodinámico como datos para el siguiente paso de tiempo. Se hace notar que la fricción en el fondo cambia debido a variaciones en la granulometría y cotas del fondo, por lo que ésta se recalcula cada vez que se modifican estas condiciones. Es interesante comentar que debido a las diferentes escalas morfológicas entre el agua y los sedimentos, es posible realizar varios pasos de tiempo hidrodinámicos y después acoplarlos al módulo de sedimentos sin originar un error sustancial en los resultados. Este proceso se repite y avanza, hasta que se alcanza el tiempo máximo de simulación.

CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

Las condiciones iniciales están representadas por las características geométricas del cauce, la topografía inicial, las características del material (composición), los parámetros hidrodinámicos y las capacidades de transporte de sedimentos. Las condiciones de frontera son aguas arriba: el gasto líquido U y el gasto de sedimentos q_s , aguas abajo: el nivel del agua; además, se considera la hipótesis de deslizamiento nulo en las márgenes.

SIMULACIÓN NUMÉRICA

El modelo matemático descrito se utiliza para simular numéricamente los cambios morfológicos y sedimentológicos generados por un flujo líquido constante a la entrada y un nivel constante a la salida y para estudiar los cambios granulométricos asociados a los procesos de erosión y depósito.

La composición granulométrica propuesta se muestra en la tabla 1:

Numero de clase i	1	2	3	4	5
Diámetro medio (mm)	0.02	0.16	0.21	3.5	7.5
Porcentaje contenido (%)	20	20	20	20	20
Porcentaje acumulado (%)	20	40	60	80	100

Tabla 1. Composición granulométrica

Las condiciones propuestas fueron las siguientes:

Gasto líquido aguas arriba: $U = 13.8$ l/s
 Gasto sólido aguas arriba: $Q_s = 0.0$ m³/s
 Pendiente: $S_o = 0.0$
 Tiempo de modelación: $t = 3$ h
 Tirante aguas abajo: $h = 0.104$ m
 Fórmula de fricción aplicada: Engelund
 Fórmula de transporte: Karim
 Paso de tiempo hidrodinámico: 0.1s
 Paso de tiempo de sedimentos: 5s

Se consideró un tramo esquemático de 5.5 m de longitud que simula la curvatura de un río como se muestra en la Figura 2.

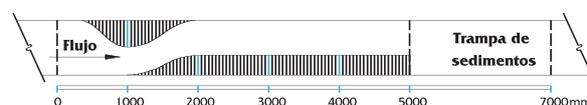


Figura 2. Modelo propuesto (vista en planta)

A continuación se grafican los resultados obtenidos durante la simulación. En la Figura 3 se gráfica la evolución del fondo modelada con los diferentes criterios. La Figura 4 esquematiza el cambio granulométrico del fondo.

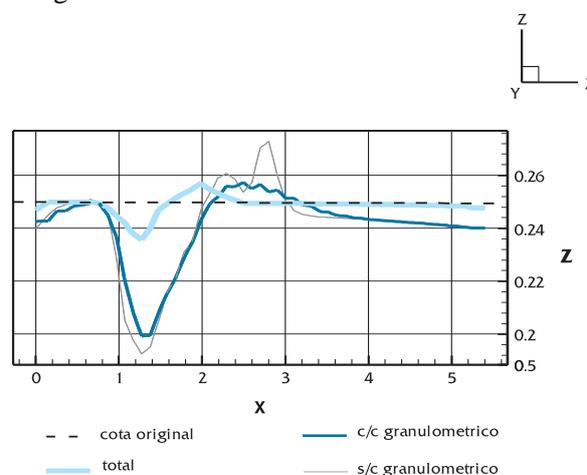


Figura 3. Movimiento del fondo ($t = 1$ h)

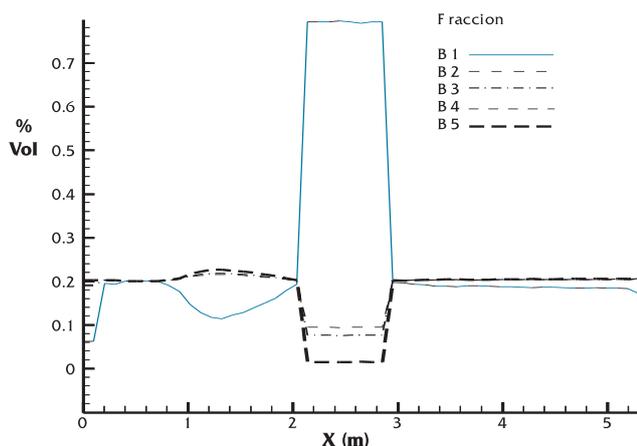


Figura 4. Cambio granulométrico al final de la modelación

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En la Figura 3 se puede apreciar que existe una diferencia muy marcada entre modelar el movimiento del fondo utilizando una fórmula de transporte total, una por fracciones y una con cambio granulométrico. Se nota que en el modelo de transporte total se tiene una menor variación en la cota del fondo (línea gruesa), debido principalmente a que domina el efecto del diámetro mayor sobre el promedio total de la muestra. En cambio en el modelo de transporte por fracciones se tiene mayor movilidad de los granos finos y por eso se calcula una variación mayor del nivel del fondo (línea fina). Sin embargo, se sabe que a medida que el fondo se va erosionando van apareciendo los granos de mayor diámetro por lo que considerar que no cambian implica cierto error. De igual manera, durante el depósito se va adicionando material con distinta granulometría que la original, lo cual tiene el mismo efecto que estimar el transporte sin tener en cuenta este cambio. Esta es la causa principal que origina la diferencia que se encuentra al aplicar la fórmula de transporte por fracciones con y sin cambio granulométrico. Se observa que cuando se considera cambio granulométrico (línea media) la erosión es menor, esto se debe a la aparición de partículas de mayor diámetro en el fondo; mientras que durante el depósito, las partículas finas son arrastradas con más facilidad que el resto y por ello el nivel no se eleva tanto como cuando no existe variación granulométrica.

Los cambios granulométricos asociados con la variación del fondo se grafican en la Figura 4, donde B_1 , B_2 , B_3 , B_4 y B_5 son las fracciones granulométricas asociadas a los respectivos diámetros re-

presentativos d_1 , d_2 , d_3 , d_4 y d_5 . En ella se muestra la cantidad en fracción volumétrica de material contenido en la superficie del fondo.

Partiendo de la hipótesis de que todas las muestras se encontraban en la misma proporción (20 %), en la Figura 4 se aprecia, cómo se va acorazando el fondo en la parte donde se tiene mayor erosión y cómo en el tramo donde se tiene depósito aumenta la proporción de partículas finas.

Se hace la aclaración que esta nueva granulometría obtenida se encuentra solamente en una pequeña capa superficial, y por consiguiente, una variación brusca de las condiciones iniciales puede dejar al descubierto la granulometría inicial. Este tipo de cambio se encuentra considerado dentro de la modelación.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló un modelo numérico unidimensional que incorpora en su cálculo la variación granulométrica asociada al movimiento del fondo por medio del concepto de capa activa o capa de mezclado. Se hace un análisis comparativo entre las diferentes maneras de aplicar la fórmula de transporte: a) transporte total, b) por fracciones y c) con cambio granulométrico.

Se encontraron diferencias significativas al modelar el movimiento de fondo por medio de la fórmula de transporte de sedimentos en sus distintas variantes. De la discusión previa se puede concluir que al aplicar la fórmula de transporte con cambio granulométrico, se tiene una mejor representación y caracterización del fondo, debido a la consideración del cambio de granulometría durante la simulación.

Se considera que el desarrollo planteado es una buena alternativa para el estudio del movimiento de fondo; además, proporciona algunos criterios útiles, que se pueden emplear en estudios posteriores donde el cambio de granulometría juegue un papel importante durante la modelación.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al CONACYT, al Instituto de Ingeniería de la UNAM y a la Universidad Autónoma Metropolitana por el apoyo económico y moral otorgado para la realización de este trabajo.

LISTA DE SIMBOLOS

$a_{1,1}, a_{k+1,k+1}$	coeficientes del jacobiano
C_1, C_2	exponentes empíricos
D_{50}	Diámetro 50
D_i	Diámetro de tamaño i
E_m	espesor de la capa activa
g	aceleración de la gravedad
H	elevación de la superficie libre
h	tirante
J	Jacobiano
k	tamaño i-ésimo de la mezcla de sedimentos
L_{ec}	escala de estudio corta
L_{el}	escala de estudio larga
L_{em}	escala de estudio media
L_h	escala de adaptación hidrodinámica
L_s	escala de adaptación sedimentológica
n	número de tamaños de clase
P_{ai}	fracción del área de la superficie cubierta por partículas de la fracción i-ésima del tamaño D_i
P_i	fracción volumétrica.
q_s	transporte global volumétrico de sedimentos por unidad de ancho
q_{si}	transporte volumétrico de sedimentos de tamaño i por unidad de ancho
s	gravedad específica de las partículas
S_{ei}	término fuente de intercambio de sedimentos en el fondo
S_f	pendiente de fricción
\vec{S}	vector de sedimentos
t	tiempo
u	componente de velocidad
U	gasto por unidad de ancho
u^*	velocidad al cortante
W	velocidad de caída de partículas con tamaño medio D_{50}
W_i	velocidad de caída de partículas de tamaño i
z_b	cota de fondo
β_i	fracción volumétrica de tamaño i en la capa activa
Δ	incremento
\vec{e}	vector de convergencia
γ_i	factor de ocultamiento para partículas de tamaño i
ρ	densidad del agua
τ_{bx}	esfuerzo cortante en el fondo
ν_t	viscosidad turbulenta

REFERENCIAS

- BEREZOWSKY M., A. JIMÉNEZ (1995), "Flujo no permanente en ríos", Capítulo 6 del Manual de Ingeniería de Ríos. Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- BENNET, J.P., C.F. NORDIN, (1977), "Simulation of sediment transport and armoring", Hydrological Sciences Bulletin, XXII, Vol.4, No.12, pp. 555-569
- BENQUÉ, J.P, J.A. CUNGE, J. FEUILLET, A. HAUGUEL & F.M. HOLLY. (1982), "New method for tidal current computation". J. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., ASCE, Vol. 108, No. WW3, 396-417.
- EINSTEIN, H.A., N. CHIEN, (1953). "Transport of sediment mixtures with large ranges of grain sizes." Univ. of Calif. Inst. of Engrg. Res., Berkeley, Calif., M.R.D. Series No. 2.
- HOLLY F., J. RAHUEL (1990)., "New numerical/physical framework for mobile-bed modeling", Journal of Hydraulics Research, Vol 28, No. 5, pp. 545-564
- HOLLY F., J. RAHUEL (1989), "Advances in Computational Mobil-Bed Hydraulics", Sediment Transport Modeling, Proceedings of the International Symptom. ASCE, pp. 58-63.
- KARIM F. (1998) "Bed Material Discharge Prediction for Nonuniform Bed Sediments", Journal of Hydraulic Engineering, Vol 124, No. 6 June, pp. 597-604.
- LÓPEZ J. And M FALCÓN. (1999) "Calculation of bed changes in mountain streams", Journal of Hydraulic Engineering, Vol 125, No. 3 March, pp. 263-270.
- KEH-CHIA YEH, C WU, J. YANG, S. LI (1993) "Nonuniform Transient Sediment Transport Modeling" Procc. Nat. Conference on Hydraulic Engrg. ASCE. New York. NY. Vol.2, pp. 893-898.
- RAHUEL J., HOLLY F, CHOLLET J, BELLEUDY P. and YANG G. (1989) "Modeling of Riverbed Evolution for Bedload sediment Mixtures" Journal of Hydraulics Engineering. Vol 115, No. 11, November, pp. 1521-1542
- RIVERA F. (2001), "Modelo bidimensional de fondo móvil". Tesis doctoral DEPFI, UNAM, México. (2001).
- SOTO. G., (2001). "Mallas adaptables para la solución de la hidrodinámica de cuerpos de agua", Tesis doctoral. DEPFI, UNAM.
- SPASOJEVIC M. F HOLLY (1990)., "2-D Bed Evolution in Natural Watercourses – New Simulation Approach", Journal of Waterway, Port and Ocean Engineering, Vol 116, No. 4 July/August, pp. 425-443.
- TARELA P., A. MENÉNDEZ, F. BOMBARDELLI, P JAIME P. (1998), "Metodología para la predicción de la evolución bidimensional de lechos fluviales". XVIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Oaxaca, México .
- VAN NICKERK A., K. VOGEL, R. SLINGERLAND, J. BRIDGE (1992), "Routing of Heterogeneous Sediment over Movable Bed: Model Development", Journal of Hydraulic Engineering, Vol 118, No. 2 February, pp. 246-261.
- YANENKO. J.N. (1971), "The method of fractional steps". Springer-