

# EVALUACIÓN DE ECUACIONES DE RESISTENCIA AL FLUJO SOBRE ESCOLLERA

Raúl López Alonso, Javier Barragán Fernández y M<sup>a</sup> Ángels Colomer Cugat

## Resumen:

Uno de los principales problemas que surgen a la hora de diseñar o analizar hidráulicamente cauces revestidos de escollera es la incertidumbre asociada a la estimación de los coeficientes de resistencia al flujo. El presente trabajo tiene por objeto contribuir a mejorar la capacidad predictiva del factor de fricción de Darcy-Weisbach ( $f$ ), mediante la evaluación (ajuste, validación y comparación) de seis modelos de resistencia al flujo circulante sobre escollera. Los modelos evaluados se fundamentan en leyes de distribución vertical de velocidad del flujo sobre lechos granulares: la ley logarítmica de Prandtl-Karman, su alternativa potencial y cuatro ecuaciones propuestas para flujo macrorrugoso. La base empírica se halla integrada por 236 datos tomados en canales de campo y de laboratorio que reúnen características hidráulicas y granulométricas identificables con revestimientos de escollera. Se concluye que las ecuaciones para flujo macrorrugoso logran el mejor ajuste global, aunque sin destacar excesivamente del resto; mientras que los resultados de la validación permiten avalar la precisión de la capacidad predictiva de los modelos ajustados.

**Palabras clave:** Resistencia al flujo, factor de fricción, escollera.

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo se entenderá por escollera (o enrocado) la agrupación de elementos pétreos naturales cuya estabilidad frente a la acción del flujo se fundamente en el peso propio de los escollos y en su imbricación, sin la intervención de ligantes. La escollera constituye uno de los materiales más habituales en obras hidráulicas. Por ejemplo, a principios de la última década del siglo pasado el 60% de la longitud de las márgenes fluviales defendidas en EUA se encontraba protegida con escollera (Martín-Vide, 2002). Una de las técnicas que más uso hace de la escollera es el revestimiento de cauces, tanto de las márgenes como del lecho, a fin de evitar que la capacidad tractiva de la corriente erosione el material subyacente. Las principales ventajas de la escollera son: flexibilidad, lo que le confiere capacidad de adaptación a movimientos del terreno de apoyo sin pérdida de integridad del conjunto; permeabilidad, lo que permite el drenaje a través de la obra; posibilidad de crecimiento de vegetación, útil desde la perspectiva paisajística, y fácil mecanización de su puesta en obra.

Entre los problemas que surgen a la hora de calcular el tamaño y distribución granulométrica de la escollera o bien al analizar hidráulicamente una protección dada, cabe destacar el que representa la estimación del coeficiente de resistencia al flujo. De acuerdo con Bathurst (1993), las diferentes componentes que contribuyen a la resistencia al flujo pueden agruparse en tres conjuntos. El primero corresponde a la denominada resistencia de contorno, en la que, a su vez, cabe distinguir entre la resistencia ejercida por las partículas que conforman el cauce, ya se encuentren éstas en reposo o en movimiento, y la que ejercen las formas de fondo y la vegetación. Al segundo conjunto pertenecen las componentes relacionadas con la resistencia de cauce, que contemplan los efectos de la forma de la sección transversal y de la irregularidad longitudinal de sección, pendiente (del cauce y de la superficie libre) y alineación. El tercero concierne a la resistencia de superficie libre, que involucra la pérdida de energía debida a distorsiones de la superficie del agua provocadas por ondas superficiales o resaltes hidráulicos.

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Agroforestal. Universidad de Lleida. Av. Alcalde Rovira Roure, 191. 25198 Lleida. Tel: 973 70 28 20, rlopez@eagrof.udl.es. Tlf: 973 70 28 32, barragan@eagrof.udl.es

<sup>2</sup>Departamento de Matemática. Universidad de Lleida. C/ Jaume II, 69 Campus Capponet. 25001, Lleida. Tlf: 973 70 25 26, colomer@matematica.udl.es

Artículo recibido el 17 de septiembre de 2004, recibido en forma revisada el 19 de agosto de 2005 y aceptado para publicación el 11 de abril de 2006. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

Con arreglo al análisis dimensional, el factor de fricción de Darcy-Weisbach,  $f$ , de un tramo de cauce de contorno granular grueso, prismático y de pendiente constante, de alineación recta, carente de vegetación y obstáculos por el que circula un flujo permanente y uniforme en régimen turbulento e hidráulicamente rugoso sin transporte de sedimentos ni presencia de ondas de superficie, es función de la aspereza relativa (relación entre la profundidad del flujo y la aspereza equivalente ( $h/k_s$ )). Una opción tradicional en lechos granulares es adoptar una relación de proporcionalidad entre la aspereza equivalente y un tamaño ( $d_i$ ) característico de las partículas que conforman el cauce ( $k_s = \alpha \cdot d_i$ ), aceptando que el efecto de las propiedades morfológicas del sedimento (distribución granulométrica, estructura del lecho, forma y orientación de las partículas, empaquetado, distribución espacial, etc.) sobre la resistencia al flujo queda incorporado adecuadamente en dicha relación. Además, diversas experiencias han puesto de manifiesto que, si bien se detecta influencia de las propiedades morfológicas del agregado en la resistencia al flujo, su relevancia explicativa es de segundo orden y la aproximación que relaciona linealmente aspereza equivalente y diámetro característico de las partículas describe de forma satisfactoria la variación del factor de fricción (p. ej. Ferro y Giordano, 1991; Wiberg y Smith, 1991). Por el contrario, otra línea argumental cuestiona que únicamente a través del diámetro característico puedan incluirse los efectos de la morfología del conjunto granular, especialmente cuando el calado del flujo sea reducido en relación con el tamaño del sedimento (flujo macrorrugoso). En este sentido, Smart *et al.* (2002) y Aberle y Smart (2003) hallaron que si la aspereza equivalente se expresaba en función de la desviación típica de las elevaciones de la superficie de un lecho granular los modelos resultantes pronosticaban con mayor exactitud y precisión el factor de fricción que si se adoptaba un diámetro característico. Conviene señalar, que esta opción actualmente se encuentra restringida en la práctica al ámbito investigador; dado el coste de las técnicas disponibles para la obtención de la información geométrica necesaria en campo, aunque es cierto que dicho coste está siendo reducido a un fuerte ritmo.

En el presente trabajo se ha aceptado la primera aproximación ( $k_s = \alpha \cdot d_i$ ), adoptando, no obstante, la precaución de que la base empírica de análisis refleje con suficiente aproximación las propiedades de la escollera, evitando incluir datos correspondientes a ríos de grava que pudieran

representar características muy contrastadas con las del enrocado. En efecto, los ríos de material tamaño grava, canto o bolo, exhiben con frecuencia características morfológicas del sedimento muy diferentes de las de un revestimiento artificial formado por escollos, que generalmente resulta de propiedades más homogéneas. A título de ejemplo, la distribución granulométrica de la escollera suele ser generalmente más uniforme (menos extendida) que la del sedimento de un lecho fluvial de grava. Mientras que para la primera no se recomiendan valores de  $d_{90}/d_{50}$  superiores a 1,8 (incluso a 1,4-1,6) en ríos de grava el citado cociente alcanza, en general, valores entre 2,5 y 2,7. En consecuencia, respecto al mismo valor de sumersión la escollera tiende a ofrecer menos resistencia al flujo, ya que conforma una superficie en la que el nivel de cresta de las partículas es más homogéneo, con menor abundancia de elementos descollantes, siendo la densidad de tales elementos influyente en la pérdida de energía (p. ej. O'Loughlin y McDonald, 1964; Ferro, 2003)

A continuación se expondrán los fundamentos teóricos de diferentes modelos de resistencia al flujo para lechos granulares de material grueso.

### Expresiones de resistencia al flujo de cauces con contorno granular grueso

Habitualmente en cauces en lámina libre con régimen permanente y uniforme con el propósito de expresar la velocidad media en la sección ( $V$ ) en función de su geometría hidráulica se emplean las ecuaciones de Darcy-Weisbach o Manning, ecuaciones (1) y (2) respectivamente:

$$V = \sqrt{\frac{8}{f}} \sqrt{gRS} \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (2)$$

denotando  $f$  el factor de fricción de Darcy-Weisbach,  $g$  la constante de aceleración de la gravedad,  $R$  el radio hidráulico de la sección,  $S$  la pendiente longitudinal del cauce y  $n$  el coeficiente de Manning. Las ecuaciones (1) y (2) pueden relacionarse como:

$$\frac{V}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (3)$$

donde  $v_*$  es la velocidad de corte, valiendo

$v_* = \sqrt{gRS}$ . La ecuación (3) permite relacionar  $f$  con  $n$ . Nótese que  $n$  y  $f$  no se relacionan linealmente y que mientras que  $f$  es adimensional las dimensiones de  $n$  son  $[T \cdot L^{-1/3}]$ .

Por otra parte, si se considera un cauce formado por partículas granulares por el que circula un flujo unidireccional turbulento e hidráulicamente rugoso de calado muy superior al tamaño de dichas partículas y, además, se admite que la ley de distribución de velocidad en un plano vertical paralelo al flujo es de tipo logarítmico y rige en toda la profundidad, puede obtenerse la ecuación de Prandtl-Karman:

$$\frac{V}{v_*} = \frac{2,303}{\kappa} \log\left(\frac{h}{z_0}\right) + B \quad (4)$$

siendo  $V$  la velocidad media en el plano vertical analizado,  $\kappa$  el coeficiente de von Karman,  $h$  el calado en dicho plano,  $B$  un coeficiente y  $z_0$  la longitud de fricción hidráulica del contorno sólido, representando la distancia desde el lecho para la cual la distribución logarítmica vale cero. Dicha longitud puede relacionarse linealmente con la aspereza equivalente ( $k_s$ ), (p. ej.  $k_s \approx 30 \cdot z_0$  o  $k_s \approx 33 \cdot z_0$ ) y ésta, a su vez, puede sustituirse por una relación lineal con un diámetro característico de las partículas ( $d_i$ ). Consecuentemente, la ecuación (4) puede escribirse:

$$\frac{V}{v_*} = \frac{2,303}{\kappa} \log\left(\frac{h}{d_i}\right) + D \quad (5)$$

donde  $D$  es un coeficiente.

En flujo bidimensional el perfil vertical de velocidad no se ve afectado por la presencia de las márgenes, con lo que  $V$  en las ecuaciones (4) y (5) representaría la velocidad media en la sección y sería aceptable sustituir  $h$  por el calado medio ( $y$ ) o  $R$ . Por otra parte, a partir de los trabajos de, entre otros, von Karman y Nikuradse el coeficiente  $\kappa$  se ha considerado constante, con un valor aproximado de 0,40. Sin embargo, posteriormente numerosos autores han obtenido empíricamente valores diferentes de  $\kappa$ , pudiéndose explicar, entre otras causas, por: la imposición de una relación constante entre  $z_0$  y  $k_s$  (p. ej. Pyle y Novak, 1981), la variación en la concentración de los elementos de rugosidad más descollantes (p. ej. O'Loughlin y Macdonald, 1964; Ferro y Giordano, 1991), el efecto que provocan en la distribución de veloci-

dad el transporte de sedimento, tanto en suspensión como de fondo (p. ej. Wang y Larsen, 1994; Nikora y Goring, 2000), y la sumersión reducida del flujo (Aberle y Smart, 2003). En este trabajo no se ha interpretado el coeficiente de von Karman como una constante universal, sino que se ha optado por considerarlo como un parámetro susceptible de ajuste. Dadas las consideraciones precedentes y teniendo presente que a partir de la ecuación (5) puede determinarse el factor de fricción,  $f$ , si se iguala el miembro derecho de ésta con  $\sqrt{8/f}$ , tal como permite la expresión (3), la ecuación (5) puede escribirse como:

$$\frac{V}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = A_1 \log\left(\frac{R}{d_i}\right) + A_2 \quad (6)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son los coeficientes.

Alternativamente a las leyes logarítmicas existen otras familias de funciones que pueden definir la distribución de velocidad con la profundidad bajo los mismos condicionantes de turbulencia, bidimensionalidad y sumersión del flujo. Usualmente se utilizan leyes potenciales (p. ej. Chen, 1991) que pueden expresarse como:

$$\frac{V}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = B_1 \left(\frac{R}{d_i}\right)^{B_2} \quad (7)$$

donde  $B_1$  y  $B_2$  son coeficientes.

Cuando el calado medio de la corriente o el radio hidráulico son del orden del tamaño de las partículas dispuestas en el cauce, el flujo puede calificarse como macrorrugoso o de sumersión ( $y/d_i$  o  $R/d_i$ ) reducida. En tales condiciones la validez de la ecuación (6) es cuestionable, especialmente si se han ajustado  $A_1$  y  $A_2$  basándose en datos con sumersiones elevadas. Thompson y Campbell (1979) modificaron la ecuación (4) para aplicarla a flujos en los que el calado o radio hidráulico fuera del orden de la aspereza equivalente. Partiendo de experiencias con túneles de viento y de resultados en canales de laboratorio de baja sumersión propusieron la expresión:

$$\frac{V}{v_*} = \frac{2,303}{\kappa} \log\left(\frac{12R}{k_s}\right) \left(1 - \frac{0,1k_s}{R}\right) \quad (8)$$

Si al igual que en la ecuación logarítmica se acepta que  $\kappa$  no tiene un valor constante y que  $k_s$  puede relacionarse linealmente con un diámetro

característico de las partículas,  $d_i$ , la ecuación (8) puede escribirse como:

$$\frac{V}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = C_1 \log \left( \frac{12R}{C_2 d_i} \right) \left( 1 - \frac{0,1 C_2 d_i}{R} \right) \quad (9)$$

siendo  $C_1$  y  $C_2$  los coeficientes.

Por otra parte, Aguirre-Pe y Fuentes (1990) contemplan que en flujos de sumersión reducida sobre lechos granulares la distribución vertical de velocidad en las proximidades de la cresta de las partículas se desvía notablemente de la ley logarítmica. La ley de distribución que proponen dichos autores consta de dos zonas. La primera, cercana a la cresta de las partículas y conteniendo las estelas generadas por éstas, se establece de velocidad constante en la dirección del flujo. En la segunda zona, localizada sobre la primera, la distribución de velocidad sigue una ley logarítmica. El flujo en la zona inferior al nivel determinado por la cresta de las partículas se desprecia. La velocidad media del flujo se puede expresar entonces como:

$$\frac{V}{v_*} = \frac{2,303}{\kappa} \log \left( \frac{h}{\alpha d_i} \right) + B - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \frac{\beta d_i}{h} \quad (10)$$

denotando  $d_i$  el diámetro característico de las partículas,  $\beta$  el factor de estela y  $B$  un término numérico. Si considerando flujo bidimensional se imponen  $\kappa$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $B$  como parámetros de ajuste, puede escribirse:

$$\frac{V}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = D_1 \log \left( \frac{R}{d_i} \right) + D_2 + D_3 \frac{d_i}{R} \quad (11)$$

donde  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  son coeficientes.

Si se plantea que la distribución vertical de velocidad sigue un perfil logarítmico en toda la profundidad, en un flujo turbulento, hidráulicamente rugoso y bidimensional que cubre la totalidad de las partículas pero en el que  $z_o$  no es despreciable frente  $R$ , de acuerdo con Smart *et al.* (2002) puede escribirse:

$$\frac{V}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \left( \left( \frac{R}{R - z_o} \right) \ln \left( \frac{R}{z_o} \right) - 1 \right) \quad (12)$$

Aceptando la variación de  $\kappa$  y la relación lineal de  $z_o$  con  $d_i$ , la ecuación (12) puede expresarse como:

$$\frac{V}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = E_1 \left( \left( \frac{R}{R - E_2 d_i} \right) \ln \left( \frac{(1/E_2)R}{d_i} \right) - 1 \right) \quad (13)$$

donde  $E_1$  y  $E_2$  son coeficientes.

A partir de la constatación de que en flujos de sumersión reducida la distribución vertical de velocidad se aparta sensiblemente de la ley logarítmica e incorporando avances recientes en el conocimiento de la turbulencia atmosférica sobre cubierta vegetal, Katul *et al.* (2002) proponen una distribución de dos zonas separadas por un punto de inflexión: una primera que corresponde al flujo que discurre bajo el nivel de cresta de las partículas de diámetro característico  $d_i$ , de velocidad reducida y más homogénea, y una segunda situada sobre la anterior y con una velocidad superior. Al integrar para flujo bidimensional dicha distribución, que sigue una ecuación de tangente hiperbólica, se obtiene:

$$\frac{V}{v_*} = C_u \cdot \left( 1 + \frac{\alpha_o d_i}{R} \ln \left( \frac{\cosh \left( \frac{1}{\alpha_o} - \frac{R}{\alpha_o d_i} \right)}{\cosh(1/\alpha_o)} \right) \right) \quad (14)$$

donde  $C_u$  es el denominado coeficiente de similitud y  $\alpha_o$  es un coeficiente de proporcionalidad entre el tamaño característico de los remolinos de turbulencia y  $d_i$ . Según Katul *et al.* (2002) si se impone  $d_i = d_{84}$ ,  $C_u$  toma valores aproximadamente entre 5 y 7 para flujos de alta sumersión y valores inferiores para flujo macrorrugoso, mientras que  $\alpha_o \leq \approx 1,0$ . Cuando  $\alpha_o \gg 1,0$ , lo que podría suceder con transporte sólido de fondo intenso, la distribución de velocidad propuesta podría no ser válida. Como primera aproximación, para su aplicación a flujos de baja sumersión en ríos de grava, recomiendan  $C_u = 4,5$  y, al aceptar que la magnitud de los remolinos sea del orden del tamaño del diámetro característico,  $\alpha_o = 1,0$ . El contraste gráfico del ajuste de la ecuación propuesta a un conjunto de datos de ríos y canales de laboratorio, empleando los valores anteriormente referidos de los parámetros, lleva a considerar a los autores citados que el modelo da resultados satisfactorios para sumersiones ( $R/d_{84}$ ) comprendidas aproximadamente entre 0,2 y 7,0. La ecuación (14), por tanto, puede expresarse como:

$$\frac{V}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = F_1 \cdot \left( 1 + \frac{F_2 d_i}{R} \ln \left( \frac{\cosh \left( \frac{1}{F_2} - \frac{R}{F_2 d_i} \right)}{\cosh(1/F_2)} \right) \right) \quad (15)$$

denotando  $F_1$  y  $F_2$  los coeficientes.

## Objetivos

El objetivo de este trabajo es el ajuste, validación y comparación de diferentes modelos de resistencia al flujo, basados en la distribución vertical de velocidad, utilizando a tal fin el mayor número de datos disponibles en la bibliografía que correspondan a las características hidráulicas y granulométricas comunes en una escollera. Con ello se persigue disponer de un conjunto de ecuaciones con una capacidad predictiva superior a la de las fórmulas desarrolladas hasta la actualidad (por ejemplo, las derivadas por Abt *et al.* (1988) o Maynard (1991)), ya sea porque las anteriores se ajustaron con un menor número de datos, ya sea porque éstos fueran menos representativos de las características de la escollera, entre otras causas.

## MATERIAL Y MÉTODOS

### Criterios para la selección del conjunto de datos de ajuste

A continuación se exponen y justifican los requisitos establecidos con el objeto de seleccionar los datos de ajuste de entre los registros disponibles en la bibliografía.

En el tramo de cauce analizado el flujo debe ser permanente y uniforme, sin transporte de sedimentos, de alineación recta, sin presencia de vegetación ni obstáculos. Dicho tramo debe estar revestido de material granular, mineral y no cohesivo, de tamaño grava o superior. El revestimiento debe ser estable frente a la erosión para los caudales analizados. Las partículas pétreas pueden ser sedimento fluvial o proceder de machaqueo y trituración en cantera, pero en cualquier caso la relación  $d_{90}/d_{50}$  no debe superar el valor de 1,80. La imposición de estas condiciones permite aceptar que la resistencia al flujo se debe prácticamente en su totalidad al efecto de las partículas.

Asimismo, el flujo debe ser turbulento ( $Re > 2.000$ ) e hidráulicamente rugoso ( $Re_* > 70$ ), lo que permite suponer que las fuerzas viscosas son despreciables en la explicación de la resistencia al flujo. Estos requisitos corresponden a la práctica totalidad del flujo establecido sobre ríos o canales revestidos de escollera, por lo que en caso de utilizar datos tomados en canales de laboratorio, aunque éstos no sean el modelo reducido de un cauce prototipo en concreto, es de capital importancia asegurar que el flujo sea turbulento e hidráuli-

camente rugoso, pues de lo contrario la fricción se vería influenciada por las fuerzas viscosas lo que provocaría un efecto de escala (Martín-Vide, 2002).

### Cálculo de variables hidráulicas

La selección de datos entre los disponibles en la bibliografía y la determinación del coeficiente de fricción para cada uno de ellos hace necesario el establecimiento de un método de cálculo de cada variable que sea común para todos los datos. En la tabla 1 se muestran las expresiones de cálculo de aquellas variables que se derivan de las directamente experimentales.

Tabla 1. Expresiones de cálculo de variables hidráulicas.

Variable	Fórmula	Nº	Observaciones
$Re$	$Re = \frac{V \cdot R}{\nu}$	(16)	$\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$Re_*$	$Re_* = \frac{v_* \cdot d_{50}}{\nu}$	(17)	$\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$v_*$	$v_* = \sqrt{gRS}$	(18)	$g = 9,81 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
$F$	$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{V}{v_*}$	(19)	
$F$	$F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot y}}$	(20)	$g = 9,81 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Quando se estudia la resistencia al flujo de escollera mediante canales de laboratorio, debe tenerse en cuenta si el material de las paredes es diferente que el del lecho. En efecto, en general, mientras que el lecho se encuentra revestido con el material granular, las márgenes son de vidrio, plástico o metal. En ese caso, dado que las paredes ejercen una fricción muy inferior a la solera, se hace necesario separar los efectos que sobre la resistencia al flujo global tienen las márgenes y el lecho. En este trabajo, se ha adoptado el método propuesto por Smart y Jaeggi (1983), basado en un procedimiento original de Einstein, que también utilizó Rickenmann (1990). A fin de comprobar la concordancia de este método con la expresión empírica de Williams (1970), se ha calculado el cociente del radio hidráulico asociado al lecho por ambos métodos. El valor promedio de dividir el

resultado del primero por el segundo es de 0,95 y su coeficiente de variación es del 3,1%, lo que avala los resultados obtenidos en la separación de la influencia de las márgenes.

Conviene señalar que en situaciones en las que el material del lecho ofrece mucha más resistencia al flujo que el de las márgenes y, además, la relación ancho-calado es muy elevada la influencia de las márgenes en el factor de fricción de la sección global es despreciable, lo que lleva a algunos autores a obviar la corrección de dicha influencia (p. ej. Bathurst *et al.*, 1981; Maynord, 1991). En cualquier caso, en este trabajo se ha optado por corregir los datos tomados en canales del laboratorio.

### Conjunto de datos seleccionados

Se ha podido seleccionar un conjunto total de 236 datos, pertenecientes a nueve referencias bibliográficas (tabla 2), que cumplieran con los requisitos expuestos anteriormente. Predomina ampliamente el número de datos obtenidos en canales de laboratorio, 221, frente a los 15 de cauces de campo revestidos. El material de revestimiento de éstos consistía en grava redondeada mientras que la de aquéllos se repartía entre grava redondeada y angulosa proveniente de cantera, para el lecho, y vidrio, plástico o metal para las paredes. Puesto que para la mayoría de los datos de laboratorio no se especifica en las publicaciones originales el carácter redondeado o anguloso de las partículas, no ha sido posible investigar en el presente trabajo la relevancia explicativa del grado de angulosidad de los elementos en la resistencia al flujo de la escollera.

En la tabla 2 se muestra el intervalo de las variables hidráulicas adimensionales más significativas, especificado para cada referencia y para el conjunto total. La sumersión, evaluada como  $R/d_{90}$ , oscila entre flujo macrorrugoso o de baja sumersión (perteneciente en su mayor parte a los datos de Bathurst *et al.* (1981)) y flujo de alta sumersión, aunque en este último caso el valor máximo resulta moderado como consecuencia del criterio de estabilidad del lecho. En lo referente a la pendiente cabe destacar lo elevado del límite superior, representativo de revestimientos de ríos de montaña o de tramos de canal de fuerte pendiente.

Para números de Froude elevados el flujo deviene inestable por la aparición de ondas superficiales con tránsito hacia aguas abajo, produciéndose una pérdida de energía adicional. El valor del número de Froude umbral de inestabilidad para flujo turbulento hidráulicamente rugoso depende principalmente del número de Reynolds y de la relación ancho-calado y, de acuerdo con Rosso *et al.* (1990), puede suponerse que es superior a 2,0. En el conjunto de datos seleccionados existe un claro predominio del flujo subcrítico (el 79%), siendo, como se puede apreciar en la tabla 2, 1,8 el máximo valor de  $F$ . Consiguientemente, en este trabajo se ha considerado inexistente el incremento de resistencia al flujo ocasionado por inestabilidad del flujo uniforme supercrítico.

### Modelos empleados. Criterios para su ajuste, validación y comparación

Los modelos escogidos para su análisis son los correspondientes a las expresiones (6), (7), (9),

Tabla 2. Conjunto de datos seleccionados.

Referencia	Nº datos	C/L	$\sqrt{8/f}$ (-)	$R/d_{90}$ (-)	S (%)	F (-)
Kellerhals (1967)	11	C	7,24-12,44	1,72-19,02	0,14-0,97	0,46-0,73
Bathurst et al. (1981)	58	L	1,29-5,75	0,23-2,06	2,00-8,00	0,19-1,20
Cao (1985)	42	L	2,87-11,88	0,70-8,01	0,50-9,00	0,43-1,52
Abt et al. (1988)	6	L	3,11-14,99	0,99-6,36	1,00-10,00	0,98-1,84
Hicks y Mason (1991)	4	C	12,48-14,10	7,16-8,45	0,03-0,04	0,21-0,25
Maynord (1991)	95	L	7,47-14,42	2,03-20,84	0,04-2,00	0,19-1,43
Song et al. (1994)	15	L	8,38-11,08	4,17-9,15	0,25-1,50	0,48-1,03
Wang et al. (1998)	2	L	12,05-12,89	6,75-9,31	0,35	0,72-0,77
Ferro (2003)	3	L	4,25-6,03	2,07-4,67	0,06-0,55	0,17-0,31
Base de datos total	236	C-L	1,29-14,99	0,23-20,84	0,03-10,00	0,17-1,84

C: datos de cauces de campo revestidos. L: datos de canales de laboratorio.

(11), (13) y (15). Dado que la sumersión relativa es la variable independiente de las ecuaciones enumeradas, atendiendo al intervalo de sumersión relativa del conjunto de datos seleccionados y a los fundamentos teóricos de cada una se puede justificar su inclusión en el análisis objeto de este artículo. Efectivamente, el empleo de la ecuación (6), a pesar de su teórico mal comportamiento en flujo macrorrugoso, se justifica por ser un modelo de gran difusión práctica, lo que facilita la comparación con ajustes precedentes de otros autores, ya sea en cauces revestidos o naturales. Por otro lado, con arreglo a la teoría, los modelos con mayor capacidad de predicción serán aquellos que modelen satisfactoriamente la resistencia al flujo tanto de alta sumersión como macrorrugoso (ecuaciones (9), (11) y (13)). En este sentido, aun cuando la ecuación (15) únicamente se recomienda para sumersiones reducidas  $R/d_{84}$  entre 0,2 y 7,0), se ha considerado pertinente su análisis dado que buena parte de los datos están en este intervalo y los que lo superan lo hacen moderadamente, así como por el interés intrínseco que presenta el ajuste experimental de una ecuación propuesta recientemente.

El diámetro característico,  $d_i$ , escogido para el ajuste ha sido  $d_{90}$ , es decir, el diámetro para el que el 90% de la muestra es inferior; correspondiendo, por tanto, a uno de los tamaños más gruesos de la agrupación de partículas. La elección de este diámetro característico se basa en numerosos estudios previos (p. ej. Limerinos, 1970, Burkham y Dawdy, 1976, Ferro y Giordano, 1991, Maynard, 1991) en los que se obtenía mejor ajuste de las ecuaciones evaluadas cuando se expresaba la sumersión con diámetros gruesos  $d_{90}$  o  $d_{84}$  que con  $d_{50}$  o inferiores. La causa de lo anterior radicaría en la mayor contribución de los elementos más descollantes en el proceso de pérdida energética.

Un aspecto que es necesario remarcar es la elección del factor de fricción de Darcy-Weisbach (expresado de la forma  $\sqrt{8/f}$ ) como variable dependiente, en lugar del coeficiente  $n$  de Manning. Lo anterior se explica porque  $f$  es adimensional mientras que  $n$  tiene dimensiones de  $[T \cdot L^{-1/3}]$ , lo que supone una ventaja fundamental del primero sobre el segundo en el caso de reunir un conjunto de datos generados en prototipo y modelo. En efecto, en modelos no distorsionados (aquellos en los que se aplica únicamente una escala geométrica para cualquier dimensión) con semejanza de Froude (que garanticen una correcta reproducción de las fuerzas de gravedad) al ser  $f$  adimensional su escala de semejanza vale 1, es decir,  $f$  tiene el

mismo valor en modelo y prototipo; mientras que la escala de semejanza de  $n$  equivale a la escala del modelo elevada a 1/6, por lo que el coeficiente de Manning es mayor en el prototipo que en el modelo (Martín-Vide, 2002). Aun cuando los canales de laboratorio en los que se experimentó para obtener parte de los datos empleados en este trabajo no son réplicas en modelo reducido de ningún canal o río prototipo en concreto, sus dimensiones y caudal circulante no son en absoluto equiparables a los de aquellos cauces en la práctica objeto de encauzamiento o canalización, por lo que se justifica plenamente la elección del factor  $f$  como coeficiente de resistencia al flujo en detrimento del coeficiente  $n$  de Manning. Es de notar que anteriormente otros autores (p. ej. Maynard, 1991; Abt *et al.*, 1988) han ajustado expresiones del coeficiente  $n$  de Manning empleando conjuntos de datos integrados por datos de ríos o canales de campo y distintos canales de laboratorio, lo que permite cuestionar la validez de dichas expresiones.

En este artículo la evaluación de modelos se contempla en tres niveles: el primero denominado de ajuste o calibración, el segundo de validación o verificación y un tercero de comparación de los modelos entre sí. En los párrafos siguientes se expone detenidamente el procedimiento y criterios que se han empleado en cada uno.

La primera fase ha consistido en ajustar mediante la técnica de mínimos cuadrados los parámetros de las ecuaciones (6), (7), (9), (11), (13) y (15), utilizando el programa estadístico SPSS (SPSS, 2003) y empleando los 236 datos recabados. Excepcionalmente, dada su estructura potencial, los parámetros de la ecuación (7) se han ajustado en su transformación logarítmica.

Con objeto de evaluar la bondad de ajuste de los modelos seleccionados se calculó el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) y el error relativo medio porcentual ( $P$ ). La expresión de cálculo y el intervalo de valores de estos índices se encuentran en la tabla 3.  $R^2$  es el cuadrado del coeficiente del momento de correlación del producto Pearson, y se puede interpretar como la proporción de la variancia total en los datos observados que puede explicar el modelo.  $P$  es el error promedio que existe entre cálculo y registro respecto al valor de registro, por lo que al expresarse en función del error relativo asigna el mismo peso al error de cada dato, independientemente de su magnitud. También se analizó gráficamente, para cada dato, la relación entre valor registrado y calculado de la

variable dependiente. Conviene precisar que en el caso de la ecuación (7) se calcularon los estadísticos de ajuste anteriormente referidos con la versión antilogarítmica de la expresión resultado de la calibración.

En la segunda fase se han validado los modelos mediante validación cruzada en su modalidad de conjuntos alternados (*switch set validation*) (Esbensen *et al.*, 1994). A tal fin, y utilizando el programa SPSS, se ha dividido aleatoriamente el conjunto de ajuste en dos conjuntos (A y B) integrados cada uno por el 50% del número total de datos. Posteriormente, de forma independiente para cada conjunto de validación A y B se ha repetido la fase de ajuste para cada uno de los modelos evaluados, obteniendo, en consecuencia, dos ecuaciones de cada modelo. Por último, para la ecuación ajustada con el conjunto de datos A se calculan los índices de bondad de ajuste pero empleando los datos del conjunto B, y viceversa. El valor final de los índices estadísticos de validación se obtiene como el promedio de los obtenidos en cada conjunto de validación.

A efectos de comparar las ecuaciones ajustadas con arreglo a los distintos modelos, y en ocasiones con el propósito de desestimar o rechazar alguna de ellas, en ciertos casos es pertinente la adopción como condición necesaria la congruencia del valor de los coeficientes ajustados con el que se deriva del estado del conocimiento en la materia. No obstante, el estado del conocimiento acerca de la resistencia al flujo de lechos granulares constituidos por partículas de grueso calibre da

lugar a un intervalo de variación de los coeficientes de los diferentes modelos adoptados en este trabajo demasiado amplio. Por añadidura, en el caso de algunos modelos, no existen experiencias previas con las que comparar los valores de los coeficientes ajustados. Todo ello invalida, para el presente caso, la adopción, como criterio prevalente de comparación y selección de ecuaciones, la concordancia teórica de los coeficientes ajustados, puesto que es no posible juzgar con suficiente precisión el valor que éstos debieran adoptar.

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las ecuaciones de los modelos ajustados se muestran en la tabla 4 y se han trazado en la figura 1 sobre el plano  $R/d_{90} - \sqrt{8/f}$ , donde también se han representado los 236 puntos correspondientes a los datos seleccionados. Asimismo, en la figura 2 se muestra para cada ecuación la relación entre valor registrado y calculado de la variable dependiente. En ambas figuras se ha distinguido entre datos de campo y de laboratorio. Sobre los parámetros ajustados interesa reseñar la obtención de valores de  $\kappa$  en todos los casos inferiores a 0,40, oscilando entre 0,29 y 0,37, y que el exponente de la ecuación potencial, próximo a 0,50, es muy superior a 1/6, valor al que tiende dicho exponente cuando la sumersión es elevada. Por lo que respecta a los parámetros de la ecuación ajustada de acuerdo con el modelo desarrollado por Katul *et al.* (2002) cabe señalar que éstos alcanzan valores moderadamente superiores a los propuestos por los citados autores.

Tabla 3. Índices estadísticos de ajuste.

Índice de ajuste	Nº	Intervalo de variación
Coeficiente de determinación ( $R^2$ ) $R^2 = \left( \frac{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})(R_i - \bar{R})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2}} \right)^2$	(21)	$0,0 \leq R^2 \leq 1,0$
Error relativo medio porcentual (P) $P = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{ R_i - C_i }{R_i}$	(22)	$0,0 \leq P \leq \infty$

Por otra parte, en la tabla 5 se presentan los valores de los índices de ajuste definidos en la tabla 3, lo que permite una comparación de los modelos en lo referente a su comportamiento global en el intervalo estudiado. De forma general, se observa que la variancia explicada por  $R/d_{90}$  como única variable independiente varía, para las seis ecuaciones ajustadas, entre el 81 y el 89% (expresada en función de  $R^2$ ), lo que resulta elevado si se tiene en cuenta la complejidad del fenómeno estudiado. El resto de variancia no explicado cabe atribuirlo principalmente a la falta de inclusión de variables explicativas relativas a la descripción con mayor detalle de la morfología del agregado de partículas (p. ej. clasificación granulométrica; forma, angulosidad y orientación de las partículas; distribución espacial, etc.) y a los errores de medida. Como se ha señalado con anterioridad, la estimación de  $k_s$  en función de la desviación típica del campo de elevaciones del lecho se configura como el método del futuro a la hora de reducir la variancia no explicada por los modelos analizados.

Conforme al índice  $R^2$  se observa que las ecuaciones (23), (25), (26) y (27) muestran un ajuste idéntico, mientras que la ecuación (28) es la primera en la clasificación, aunque con un valor escasamente superior al de las anteriores. Por el contrario, la ecuación (24) es la que ofrece peor resultado. Si se compara el valor del índice  $P$  se llega a conclusiones equiparables, aunque en este caso el ajuste de las ecuaciones (23), (25), (26) y (27) es ligeramente más contrastado, siendo mejor para las ecuaciones (26) y (27).

Si bien es cierto que la ecuación (24) muestra unos resultados de ajuste global moderadamente peores que el resto de los cinco modelos evaluados, debe tenerse presente que mientras el valor de sus parámetros de ajuste se obtuvo mediante transformación logarítmica de la ecuación (7), el cálculo de los índices estadísticos se efectuó sobre las variables sin transformar de la ecuación calibrada (ecuación (24)). Lo anterior puede explicar su peor comportamiento, sobre todo en el caso del índice que penaliza más las desviaciones respecto de los datos de mayor magnitud ( $R^2$ ) frente al relacionado con el error relativo ( $P$ ).

Analizando los gráficos de las figuras 1 y 2 puede compararse el ajuste de los modelos evaluados para diferentes intervalos de las variables involucradas, más allá del comportamiento global que reflejan los índices estadísticos. En primer lugar, debe destacarse que la ecuación (28), que es la

que consigue un mejor ajuste general, manifiesta una tendencia a predecir valores inferiores que los registrados cuando la sumersión es mayor que 10, rango en el que se ajusta peor que las ecuaciones de tipo logarítmico, dada su tendencia asintótica para sumersiones elevadas (figura 1). Asimismo, la ecuación (28) tiende a predecir valores superiores a los registrados, con un peor ajuste que el resto de ecuaciones, cuando la sumersión es inferior a 0,5. Lo anterior, queda patente también en el gráfico de la figura 2 para los valores extremos, inferiores y superiores, de la variable independiente. Por consiguiente, a la luz de los resultados obtenidos, y a pesar de su buen ajuste global, la ecuación (28) no debe aplicarse fuera del intervalo de sumersión 0,5-10, lo que concuerda aproximadamente con la recomendación de Katul *et al.* (2002) en lo referente al límite superior de 7,0. Con el propósito de evaluar la influencia que pudieran ejercer aquellos puntos con sumersión superior a dicho límite, se ajustó nuevamente la ecuación (15) a un conjunto de 206 datos que resultó de eliminar todos aquellos con  $R/d_{90} > 7,0$ . Si bien el valor de  $C_u$  se redujo ligeramente, hasta 6,40,  $\alpha_0$  experimentó un ligero incremento, llegando a 1,23, siendo, además, los valores de los índices estadísticos prácticamente idénticos. En consecuencia, la inclusión de datos con sumersión superior a 7,0 no permite explicar la obtención de valores de los parámetros de ajuste de la ecuación (28) superiores que los propuestos por defecto por Katul *et al.* (2002). En todo caso, es necesario remarcar que los autores citados analizaron sólo de forma gráfica la bondad de ajuste de la ecuación (14) a un conjunto de datos de ríos y canales, después de deducir teóricamente el valor de sus parámetros y sin ajustar numéricamente su valor.

Por lo que respecta a las ecuaciones (23), (25), (26) y (27), que mostraban un comportamiento general muy homogéneo, la figura 1 desvela un trazado menos similar para flujo macrorrugoso, en particular cuando la sumersión es inferior a 0,5. Efectivamente, en ese caso pueden distinguirse dos parejas, por un lado, las ecuaciones (26) y (27) con comportamiento prácticamente idéntico y, por otro, las ecuaciones (23) y (25) con trayectorias muy semejantes. El primer par pronostica valores de  $f$  inferiores que el segundo. Por último, la ecuación (24), de forma similar a lo que acontecía con la fórmula (28), se ajusta peor cuando la sumersión adopta valores fuera del intervalo 0,5-10, aunque a diferencia de esta última presenta una tendencia predominante a predecir valores superiores en ambos extremos, tal como se aprecia en las figuras 1 y 2.

Por otra parte, en las figuras citadas no se aprecia para los datos de campo y de laboratorio un comportamiento diferencial en cuanto a la bondad de ajuste de las seis ecuaciones evaluadas.

A partir de la base de datos global, se constituyeron dos conjuntos de validación, que denominaremos A y B, integrados ambos por 118 datos seleccionados aleatoriamente. Para las variables  $\sqrt{8/f}$ ,  $R/d_{90}$ ,  $S$  y  $F$  se comprobó que dichos conjuntos fueran equiparables en tal grado que las diferencias que pudieran existir entre las ecuaciones de regresión de un mismo modelo para los conjuntos A y B únicamente fueran atribuibles a la disimilitud de la base empírica de ajuste en un grado muy reducido. Para ello se efectuó la prueba  $t$  (distribución  $t$  de Student (Peña, 1987)) de diferencia de promedios de dos muestras independientes a los conjuntos A y B. Para cada una de variables analizadas la diferencia de promedios de los conjuntos A y B no era significativa para un nivel de significación de 0,05. Cabe recordar, además, que dicha prueba requiere la verificación mediante la prueba  $F$  (distribución  $F$  de Fisher-Snedecor (Peña, 1987)) de la igualdad de variancias poblacionales de ambas muestras.

Tabla 5. Valor de los índices estadísticos en la fase de calibración y validación.

Ecuación		Índices de ajuste	
		R <sup>2</sup>	P
(23)	C	0,88	15,3
	V	0,88	15,4
(24)	C	0,81	16,1
	V	0,81	16,4
(25)	C	0,88	15,1
	V	0,88	15,2
(26)	C	0,88	14,6
	V	0,88	15,2
(27)	C	0,88	14,6
	V	0,88	14,7
(28)	C	0,89	14,0
	V	0,89	14,2

C: fase de calibración. V: fase de validación.

El valor promedio de los índices estadísticos resultado de su aplicación cruzada a los conjuntos de validación A y B se presenta en la tabla 5. En todos los casos se obtienen valores muy semejantes

Tabla 4. Ecuaciones ajustadas.

Ecuación	Número
$\sqrt{\frac{8}{f}} = 6,855 \log\left(\frac{R}{d_{90}}\right) + 4,821$	(23)
$\sqrt{\frac{8}{f}} = 4,217 \left(\frac{R}{d_{90}}\right)^{0,485}$	(24)
$\sqrt{\frac{8}{f}} = 6,223 \log\left(\frac{7,989R}{d_{90}}\right) \left(1 - \frac{0,150d_{90}}{R}\right)$	(25)
$\sqrt{\frac{8}{f}} = 7,310 \log\left(\frac{R}{d_{90}}\right) + 4,423 + 0,307 \frac{d_{90}}{R}$	(26)
$\sqrt{\frac{8}{f}} = 3,425 \left( \left( \frac{R}{R - 0,124d_{90}} \right) \ln \left( \frac{8,065R}{d_{90}} \right) - 1 \right)$	(27)
$\sqrt{\frac{8}{f}} = 6,474 \left( 1 + \frac{1,221 d_{90}}{R} \ln \left( \frac{\cosh \left( \frac{1}{1,221} - \frac{R}{1,221 d_{90}} \right)}{\cosh (1/1,221)} \right) \right)$	(28)

# EVALUACIÓN DE ECUACIONES DE RESISTENCIA AL FLUJO SOBRE ESCOLLERA

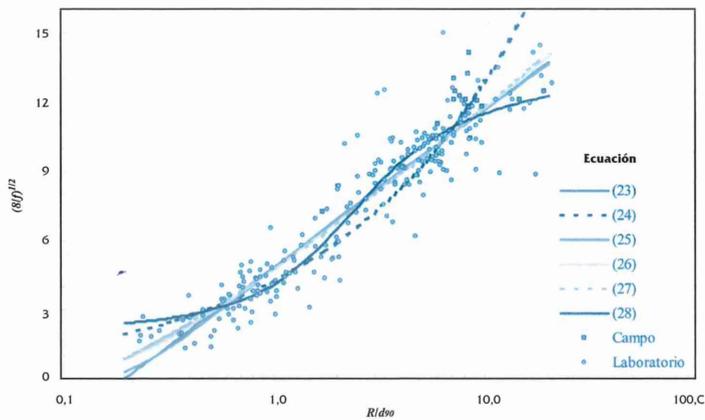


Figura 1. Datos seleccionados y ecuaciones de ajuste.

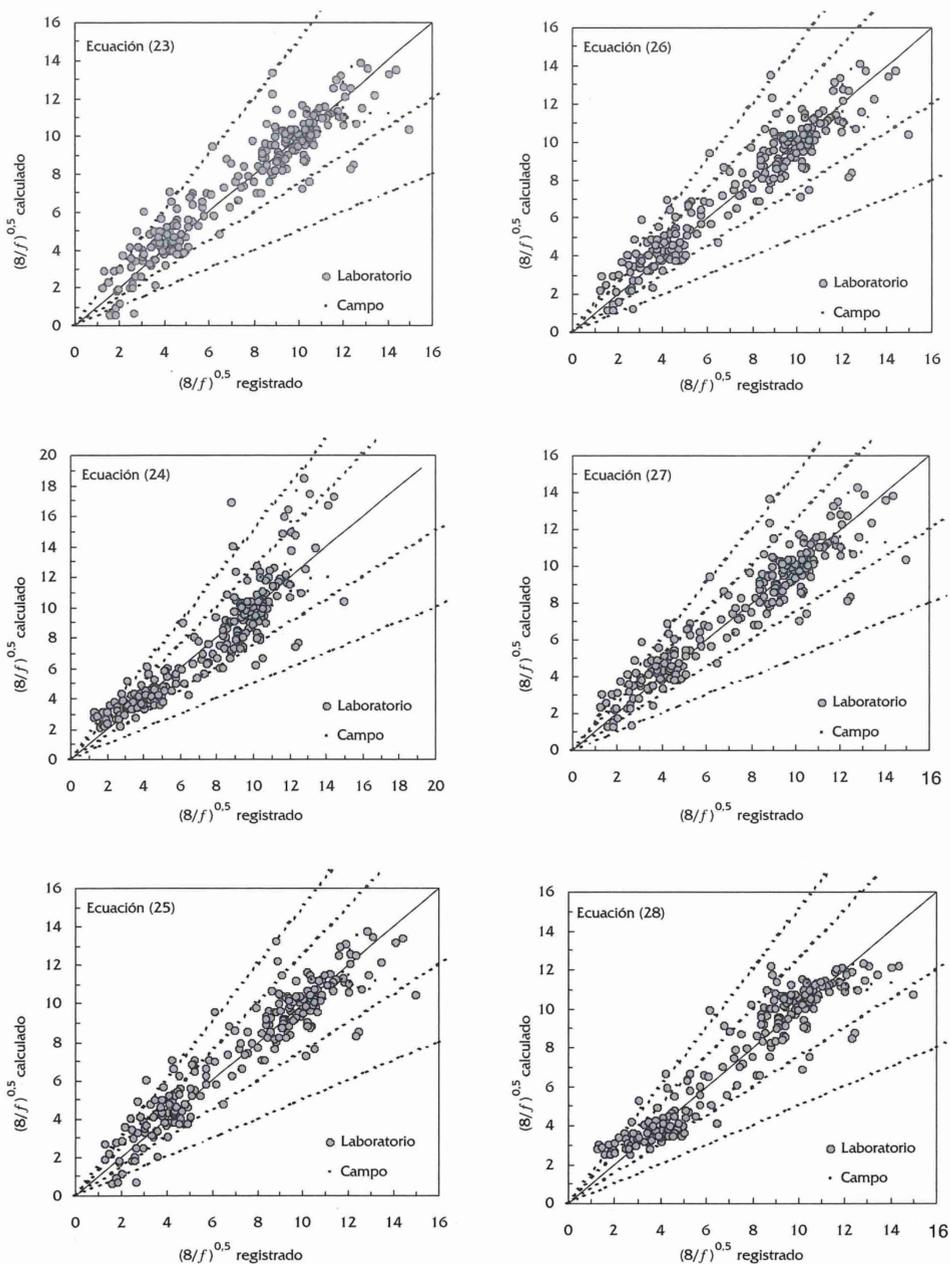


Figura 2. Relación entre  $\sqrt{8/f}$  registrado y calculado. Se han representado la línea de ajuste perfecto y las líneas  $\pm 25\%$  y  $\pm 50\%$  de error.

a los obtenidos en la fase de regresión, sin que se puedan apreciar diferencias importantes en la validación de los seis modelos. Lo anterior avala la precisión de la capacidad predictiva de los modelos ajustados cuando se aplican a datos no incluidos en la calibración. Conviene reparar en que el valor del índice  $P$  resultado de la validación puede servir de guía a la hora de fijar un intervalo de variación para un análisis de sensibilidad de  $\sqrt{8/f}$ .

## CONCLUSIONES

A continuación se exponen las conclusiones del ajuste, validación y comparación de seis modelos de resistencia al flujo en lámina libre, fundamentados en leyes de distribución vertical de velocidad, tomando como base empírica un conjunto de 236 datos correspondientes a condiciones hidráulicas y granulométricas de escollera.

La ecuación (28) presenta el mejor resultado de ajuste global, aunque sólo ligeramente superior al resto. No obstante, no se recomienda su empleo fuera del intervalo de sumersión ( $R/d_{90}$ ) 0,5-10,0, ya que en ese caso su comportamiento es peor que el de la mayoría de ecuaciones analizadas.

Las ecuaciones (23), (25), (26) y (27) muestran un ajuste global muy similar, ligeramente mejor el de las ecuaciones (26) y (27) si se atiende al índice estadístico relacionado con el error relativo. Las mayores divergencias entre las cuatro ecuaciones citadas se aprecian para flujo macrorrugoso, en particular para sumersiones ( $R/d_{90}$ ) inferiores a 0,5, en las que las dos primeras, (23) y (25), pronostican valores de  $f$  superiores que el segundo par, (26) y (27).

La ecuación (24) muestra unos resultados de ajuste moderadamente peores que el resto de los cinco modelos evaluados, aunque debe tenerse presente el hecho que mientras el valor de los parámetros de ajuste se obtuvo mediante transformación logarítmica, el cálculo de los índices estadísticos se efectuó sobre la versión antilogarítmica de la ecuación calibrada.

Los valores de los índices estadísticos obtenidos en la fase de validación cruzada mediante conjuntos alternos son en los seis modelos sensiblemente semejantes a los resultantes en la fase de calibración, lo que refrenda la precisión de la capacidad predictiva de los modelos ajustados.

## LISTA DE SIMBOLOS

$d_i$ :	diámetro intermedio de la partícula para el que el $i\%$ de la muestra es inferior
$f$ :	factor de fricción de Darcy-Weisbach
$g$ :	constante de aceleración de la gravedad
$h$ :	profundidad del flujo
$k_s$ :	aspereza equivalente
$n$ :	coeficiente de Manning
$v_*$ :	velocidad de corte o de fricción
$y$ :	calado medio del flujo
$z_0$ :	longitud de fricción hidráulica
$C_u$ :	coeficiente de similitud
$F$ :	número de Froude
$P$ :	error relativo medio porcentual
$R$ :	radio hidráulico
$R^2$ :	coeficiente de determinación
$Re$ :	número de Reynolds
$Re_*$ :	número de Reynolds de partícula
$S$ :	pendiente longitudinal del cauce
$V$ :	velocidad media del flujo
$\alpha_0$ :	coeficiente de proporcionalidad
$\beta$ :	factor de estela
$\kappa$ :	coeficiente de von Karman
$\nu$ :	viscosidad cinemática del agua

## REFERENCIAS

- Aberle, J., Smart, G.M. (2003). The influence of roughness structure on flow resistance on steep slopes. *Journal of Hydraulic Research*. 41, 3: 259-269.
- Abt, S.R., Wittler, R.J., Ruff, J.F., Khattak, M.S. (1988). Resistance to flow over riprap in steep channels. *Water Resources Bulletin*. 24, 6: 1193-1200.
- Aguirre-Pe, J., Fuentes, R. (1990). Resistance to flow in steep rough streams. *Journal of Hydraulic Engineering*. 116, 11: 1374-1386.
- Bathurst, J.C., Li, R.M., Simons, D.B. (1981). Resistance equation for large-scale roughness. *Journal of the Hydraulics Division*. 107, 12: 1593-1613.
- Bathurst, J.C. (1993). Flow resistance through the channel network. Beven, K., Kirkby, M.J. (Eds.) *Channel network hydrology*. Wiley, pp 69-98.
- Burkham, D.E., Dawdy, D.R. (1976). Resistance equation for alluvial-channel flow. *Journal of the Hydraulics Division*. 102, 10: 1479-1489.
- Cao, H.H. (1985). *Résistance hydraulique d'un lit de gravier mobile à pente raide; étude expérimentale*. Thèse n° 589 (1985). École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Chen, C.L. (1991). Unified theory on power laws for flow resistance. *Journal of Hydraulic Engineering*. 117, 3: 371-389.
- Esbensen, K., Midtgaard, T., Schönkopf, S. (1994). *Multivariate Analysis in Practice*. CAMO AS.

- Ferro, V., Giordano, G. (1991). Experimental study of flow resistance in gravel-bed rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*. 117, 10: 1239-1246.
- Ferro, V. (2003). Flow resistance in gravel-bed river channels with large-scale roughness. *Earth Surface Processes and Landforms*. 28: 1325-1339.
- Hicks, D.M., Mason, P.J. (1991). *Roughness characteristics of New Zealand rivers*. New Zealand Water Resources Survey, DSIR Marine and Freshwater, Wellington.
- Katul, G., Wiberg, P., Albertson, J., Hornberger, G. (2002). A mixing layer theory for flow resistance in shallow streams. *Water Resources Research*. 38, 11: 32(1-8).
- Kellerhals, R. (1967). Stable channels with gravel-paved beds. *Journal of the Waterways and Harbors Division*. 93, 1: 63-84.
- Limerinos, J.T. (1970). Determination of the Manning coefficient from measured bed roughness in natural channels. *Water Supply Paper 1898-B*, U.S. Geological Survey, Washington.
- Martín-Vide, J. (2002). *Ingeniería de ríos*. Edicions Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona.
- Maynard, S. (1991). Flow resistance of riprap. *Journal of Hydraulic Engineering*. 117, 6: 687-696.
- Nikora, V., Goring, D. (2000). Flow turbulence over fixed and weakly mobile gravel beds. *Journal of Hydraulic Engineering*. 126, 9: 679-690.
- O'Loughlin, E.M., McDonald, E.C. (1964). Some roughness concentration effects on boundary resistance. *La Houille Blanche*. 7: 773-785.
- Peña, D. (1987). *Estadística. Modelos y métodos*. Alianza Universidad. Madrid.
- Pyle, R., Novak, P. (1981). Coefficient of friction in conduits with large roughness. *Journal of Hydraulic Research*. 19, 2: 119-139.
- Rickenmann, D. (1990). *Bedload transport capacity of slurry flows at steep slopes*. Mitteilung VAW 103. Zürich.
- Rosso, M., Schiara, M., Berlamont, J. (1990). Flow stability and friction factor in rough channels. *Journal of Hydraulic Engineering*. 116, 9: 1109-1118.
- Smart G.M., Jaeggi, M. (1983). *Sediment transport on steep slopes*. Mitteilung VAW. 64. Zürich.
- Smart, G.M., Duncan, M.J., Walsh, J.M. (2002). Relatively rough flow resistance equations. *Journal of Hydraulic Engineering*. 128, 6: 568-578.
- Song, T., Graf, W.H., Lemmin, U. (1994). Uniform flow in open channels with movable gravel bed. *Journal of Hydraulic Research*. 32, 6: 861-875.
- SPSS (2003). *SPSS 11.5 Syntax reference guide: base system, regression models, advanced models*. SPSS Inc.: Chicago.
- Thompson, S.M., Campbell, P.L. (1979). Hydraulics of a large channel paved with boulders. *Journal of Hydraulic Research*. 17, 4: 341-354.
- Wang, Z.Y., Larsen, P. (1994). Turbulent structure of water and clay suspensions with bed load. *Journal of Hydraulic Engineering*. 120, 5: 577-600.
- Wang, Z.Y., Larsen, P., Nestmann, F., Dittrich, A. (1998). Resistance and drag reduction of flows of clay suspensions. *Journal of Hydraulic Engineering*. 124, 1: 41-49.
- Wiberg, P.L., Smith, J.D. (1991). Velocity distribution and bed roughness in high-gradient streams. *Water Resources Research*. 27, 5: 825-838.
- Williams, G.P. (1970). Flume width and water depth effects in sediment transport experiments. *Geological Survey Professional Paper*. 562-H. Washington.