

INTERPRETAZIONE MULTIFRATTALE DEI TRATTI VALLIVI DEI CORSI D'ACQUA CALABRESI

Samuele G. De Bartolo, Antonino D'Ippolito y Massimo Veltri

Resumen:

Se realiza una investigación sobre el comportamiento multifractal en la parte final de algunos cursos fluviales de Calabria (sur de Italia).

Esta investigación se ha llevado a cabo mediante la utilización del Método de la Integral de Correlación Generalizada. Los datos derivan de los sistemas de los cauces trenzados extraídos de cartografía a escala 1:10000. Particularmente, se han estimado los espectros de las dimensiones fractales generalizadas, D_q , la secuencia de los exponentes de masa, τ_q , los espectros de las singularidades, α_q , y los espectros multifractales, $f(\alpha_q)$.

Los análisis multifractales hechos sobre las configuraciones estáticas de sistemas de cauces trenzados que han sido objeto de este estudio tienen comportamientos de auto-similitud. Los resultados muestran que los sistemas de cauces trenzados objeto de estudio tienen un comportamiento auto-similar y multifractal.

Palabras clave: cauces trenzados, multifractales, algoritmos multifractales.

INTERPRETAZIONE FRATTALE E MULTIFRATTALE DEI CORSI D'ACQUA NATURALI

La geometria frattale svolge un ruolo di fondamentale importanza per la comprensione di molti fenomeni complessi presenti in natura, caratterizzando dettagliatamente gli aspetti essenziali strettamente collegati alla scala di osservazione, in cui la dimensione frattale rappresenta l'invariante di *scaling* (Malcai et al. 1997; Avnir et al. 1998).

Nell'ultimo decennio l'interpretazione frattale ha riguardato la caratterizzazione dei corsi d'acqua naturali, sia in ambito idraulico-idrologico che geomorfologico fluviale, passando da un campo di indagine a scala di bacino, ossia di sviluppo planimetrico-areale delle reti fluviali, a quello locale esteso a un ristretto intervallo di osservazione spaziale.

A scala di bacino, la rete idrografica viene intesa come una intricata struttura auto-organizzata (Rodriguez-Iturbe e Rinaldo, 1997), la cui proiezione sul piano bi-dimensionale del rilievo,

manifesta un comportamento multifrattale rappresentato da uno spettro di dimensioni frattali a cui corrispondono sotto-strutture di reti o porzioni di esse, liberamente interconnesse, ciascuna delle quali caratterizzata da un proprio esponente di scala, noto in letteratura come *crowding index* ovvero esponente di *Lipschitz-Hölder* (De Bartolo et al. 1995; 1998; 2000; 2003; 2004; 2005).

A scala locale, l'osservazione della rete viene fortemente influenzata dall'andamento planimetrico del corso d'acqua nel suo sviluppo unicursale ovvero pluricursale. C'è da precisare, però, che il solo carattere unicursale costituisce un parametro di riferimento dipendente dalla scala di dettaglio (che può raggiungere l'ordine di qualche decina di metri).

Con riferimento alle consuete scale di bacino (ad esempio comprese tra 1:25000 e 1:50000), tramite l'interpretazione mono-frattale delle singole aste (Mandelbrot, 1977; Hjelmfelt, 1988; Robert e Roy, 1990) nella gerarchizzazione di Horton-Strahler (Horton, 1932; 1945 e Strahler, 1952; 1964),

Dipartimento di Difesa del Suolo, "V. Marone", Università della Calabria, Cubo 42 b, V Piano 87030 Arcavacata di Rende (CS), Italia.
e.mail: debartolo@dds.unical.it (tel. 0039 0984 496568); dippoli@dds.unical.it (tel. 0039 0984 496550); veltrim@dds.unical.it

Artículo recibido el 27 de julio de 2005, recibido en forma revisada el 6 de abril de 2006 y aceptado para su publicación el 29 de mayo de 2004. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

la dimensione frattale, qui intesa come dimensione di stream (La Barbera e Rosso 1987; 1989), costituirebbe un invariante che tiene conto di un range di scala condizionato dal limite inferiore di riscaldamento (lower-cutoff) rispetto al quale essa stessa viene calcolata.

Pertanto tale interpretazione potrebbe risultare potenzialmente errata se la si considerasse come dimensione frattale invariante del singolo corso d'acqua anche a scale a maggiore dettaglio, potendo essere queste ultime rappresentative anche di una natura pluricursale. In questo caso il riferimento alla granularità (*coarse graining*) fornita dalla scala di riferimento risulta di fondamentale importanza (Tarboton et al., 1988; Everts et al., 1992; Rigon, 1994).

Nell'ambito della presente nota si è proceduto alla caratterizzazione geometrica, in condizioni non-dinamiche, dei tratti terminali di alcuni corsi d'acqua calabresi a una scala 1:10000 rappresentativa della loro natura pluricursale.

Le più recenti ricerche sui corsi d'acqua intrecciati sono state rivolte alla comprensione dei fenomeni a scala di canale (portate e trasporto solido nelle biforcazioni e nelle confluenze, assortimento granulometrico), ai meccanismi di formazione dell'intera rete di canali intrecciati, alle loro caratteristiche frattali ed alle proprietà di scaling.

Sapozhnikov e Foufoula-Georgiou (1996) ritengono che i corsi d'acqua intrecciati mostrano uno scaling anisotropo, quindi un comportamento auto-affine, ed evidenziano peraltro come un tale comportamento, valido per corsi d'acqua con grandi differenze di scala (larghezza del corso d'acqua variabile da 0.5 km a 15 km), pendenze (da $7 \cdot 10^{-3}$ a $8 \cdot 10^{-5}$), tipo di materiale (da sabbia a ghiaia), possa essere il risultato di meccanismi simili nella formazione di queste strutture spaziali.

Nykanen et al. (1998) hanno inoltre evidenziato che i corsi d'acqua intrecciati con vincoli esterni di tipo geologico-topografico (rilievi, percorsi dominanti) non presentano la suddetta invarianza di scala. Sempre Sapozhnikov e Foufoula-Georgiou (1996) hanno avvalorato, inoltre, che il comportamento di alcuni corsi d'acqua braided possa essere anisotropo in base alle dimensioni delle isole e lungo, cioè, le proiezioni delle stesse su due assi di cui uno orientato lungo la linea collegante l'inizio e la fine di ogni tratto analizzato e l'altro ad esso ortogonale. È da dire però che

sul comportamento anisotropo (auto-affine) o isotropo (auto-somigliante) dei sistemi di canali intrecciati non c'è accordo generale.

In particolare Walsh e Hicks (2002) ritengono che l'analisi delle isole considerando l'asse maggiore delle stesse (lunghezza) e quello ad esso ortogonale (larghezza) insieme ad una regressione di scala basata sulla media geometrica porta, non solo per i corsi d'acqua della Nuova Zelanda da loro analizzati ma anche per quelli analizzati da Foufoula-Georgiou e Sapozhnikov (1996), verso un comportamento auto-somigliante.

Anche Nikora et al. (1995) per alcuni sistemi di canali intrecciati della Nuova Zelanda avevano ottenuto un comportamento auto-somigliante valutando la dimensione frattale mediante la procedura standardizzata di box-counting e ottenendo come dimensione del supporto valori compresi nell'intervallo 1.5÷1.7.

Tali risultati furono discussi dagli stessi Sapozhnikov e Foufoula-Georgiou (1996) perché la procedura di standardizzazione effettuata con il metodo delle masse, $M(R)$, risulta non idonea per il riconoscimento della natura auto-somigliante ovvero della natura auto-affine, in quanto a scale differenti, sia piccole che grandi, tale metodo evidenzia due distinti andamenti i quali rappresentano rispettivamente le dimensioni locali D_L e globali D_G . Tali dimensioni, ancora secondo Sapozhnikov e Foufoula-Georgiou (1996), costituirebbero, al contrario di quanto sopra affermato, la base della natura auto-affine dei canali intrecciati, in quanto direttamente dipendenti dagli esponenti longitudinali e trasversali che caratterizzano la legge delle scale di misura.

Risulta di fondamentale importanza capire, soprattutto alla luce anche delle recenti validazioni sperimentali effettuate da Sapozhnikov e Foufoula-Georgiou (1997) sul carattere auto-organizzato delle reti braided e da Rosatti (2002) in considerazione delle analisi di isotropia e anisotropia sui canali intrecciati, quale comportamento risalante caratterizzi le misure relative alla distribuzione dei canali intrecciati nel piano di rilevamento.

L'approccio seguito nella presente nota è stato quello degli spettri delle dimensioni frattali generalizzate (De Bartolo et al., 2000 e De Bartolo et al., 2003) essendo quest'ultimi in accordo ai primi lavori effettuati da Nikora et al. (1995) attraverso l'utilizzo delle tecniche standardizzate mono-frattali.

Questa generalizzazione si pone in un campo intermedio tra l'analisi mono-frattale e multifrattale (auto-affine) delle misure relative ai sistemi di canali intrecciati e rappresenta una prima caratterizzazione multifrattale in termini di misure auto-somiglianti.

La scelta di tale approccio è dovuta anche al fatto che gli sviluppi multifrattali dei *braided vortex river* proposti da Bassler et al. (1999) sulla base della generalizzazione della metodologia proposta da Sapozhnikov e Foufoula-Georgiou (1996) hanno già evidenziato, nel caso dei *braided vortex river*, caratteristiche di multifrattalità con dimensioni del supporto delle misure pari a 2 e facendo ritenere per questi ultimi un probabile comportamento di tipo *plane-filling*. Motivazione avvalorata anche dal fatto che Bassler et al. (1999) ritengono esista un'unica classe universale di canali intrecciati a cui appartengono sia i canali intrecciati a vortice che i sistemi di canali intrecciati fluviali.

MISURE MULTIFRATTALI

Il formalismo multifrattale trova origine nella teoria delle misure. Esso venne introdotto a partire dalla metà degli anni cinquanta del secolo scorso, grazie ai contributi di Renyi (1955) sulle entropie generalizzate e caratterizzato successivamente, tra gli anni settanta e ottanta, dagli sviluppi di Mandelbrot (1973; 1974), Badii e Politi (1984; 1985) e Halsey et al. (1986).

Com'è noto, per misura si intende una legge di potenza che lega il contenuto (o massa o probabilità), p_i , dell'insieme di punti ricadenti in una generica cella, i , al suo lato di lunghezza ε , attraverso un esponente di singolarità. Le misure multifrattali, quindi, interessano la distribuzione di tali grandezze su un supporto geometrico, caratterizzato, quest'ultimo, dall'essere esso stesso un frattale (Feder, 1988).

In considerazione di quanto testé definito, per insieme multifrattale si intende l'unione di più sotto-insiemi mono-frattali, tra loro liberamente interconnessi, aventi ciascuno una propria dimensione frattale (Aharony, 1989; Feder, 1988; Falconer, 1990). In generale tale unione viene descritta interamente da un numero infinito di dimensioni frattali generalizzate, D_q , dette anche di *Renyi* (Renyi, 1955; 1970), oppure in modo più articolato attraverso lo spettro multifrattale, $f(\alpha_q)$ (Hal-

sey et al., 1986). L'andamento delle dimensioni frattali generalizzate, D_q , in funzione dell'ordine del momento della probabilità, q , viene descritto attraverso le espressioni:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i p_i^q}{\ln \varepsilon} \quad q \neq 1 \quad (1)$$

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}$$

dove p_i è la misura normalizzata nell' i -esima cella di lato ε della partizione di ricoprimento dell'oggetto in esame, mentre D_1 , dimensione di informazione, viene ottenuta, a partire dalla prima espressione riportata nella (1), come processo limite relativo alla singolarità $q=1$.

La relazione che lega lo spettro delle dimensioni frattali generalizzate, D_q , allo spettro multifrattale, $f(\alpha_q)$, si individua attraverso l'utilizzo della sequenza degli esponenti di massa, τ_q (Hentschel e Procaccia, 1983), cioè una funzione in grado di controllare come i momenti della probabilità scalano con il lato delle celle, ε , che è fornita dall'espressione:

$$\tau_q = (1-q)D_q \quad (2)$$

In definitiva, attraverso la (2) risulta possibile risalire allo spettro multifrattale, $f(\alpha_q)$, in considerazione delle trasformate di Legendre (Halsey et al., 1986):

$$\alpha_q = -\frac{d}{dq} \tau_q \quad (3)$$

$$f(\alpha_q) = \tau_q + q\alpha_q$$

le quali associano parametricamente, attraverso i momenti q , le singolarità α alle dimensioni frattali f . L'analisi degli spettri multifrattali, D_q e $f(\alpha_q)$, viene effettuata generalmente mediante procedure numeriche basate su algoritmi di ricoprimento a taglia fissa, noti in letteratura come procedure di *box-counting*, in cui si fissa il lato della cella di ricoprimento nel riscaldamento della funzione di partizione della misura ($\sum_i p_i^q$).

Negli ultimi anni sono stati proposti numerosi algoritmi veloci di ricoprimento mirati all'analisi completa dello spettro multifrattale, $f(\alpha)$, caratterizzata, cioè, dalla stima sia dei momenti positivi che di quelli negativi. Tali tecniche numeriche (Pastor-Satorras e Riedi; 1996, Yamaguti e Prado,

1997; Oiwa e Fiedler-Ferrara, 1998, Feeny, 2000), pur offrendo in sé una riduzione considerevole dei tempi computazionali rispetto alle procedure standardizzate (Liebovitch and Toth, 1989; Block et al., 1990; Hou et al., 1990; Meisel et al., 1992; Molteni, 1993), mostrano tuttora lo svantaggio di essere imprecise per misure enfatizzate da pesi negativi. Infatti in letteratura (Håkansson e Russeberg, 1990; Meisel e Johnson, 1994; Veneziano et al., 1995; Mach et al., 1995; Pastor-Satorras e Riedi, 1996; Yamaguti e Prado, 1997; Meisel e Johnson, 1997) è ormai stabilito univocamente che le cause di tali imprecisioni sono da ricercarsi oltre che nella bassa statistica dei punti costituenti il frattale oggetto di misura, anche nell'utilizzo diretto delle trasformate di Legendre (Chhabra e Jensen, 1989; Veneziano et al., 1995).

In accordo a Meisel e Johnson (1994) una delle procedure a taglia fissa più accurata per la stima delle dimensioni frattali generalizzate è quella suggerita da Pawelzik e Schuster (1987). La base di tale procedura è costituita dalla generalizzazione dell'integrale di correlazione introdotto da Grassberger e Procaccia (1983) e Grassberger (1983) per la valutazione della dimensione di correlazione D_2 . I dettagli del metodo vengono presentati nell'Appendice 1.

ANALISI MULTIFRATTALE DEI TRATTI VALLIVI DI ALCUNI CORSI D'ACQUA CALABRESI

L'analisi effettuata ha riguardato lo studio del comportamento multifrattale dei tratti vallivi intrecciati di tre corsi d'acqua della Calabria: il Ferro, lo Stilaro ed il Torbido. In *Tabella 1* sono riportati i loro parametri geomorfologici ossia: la superficie del bacino drenante S (km²), l'altezza massima H_{max} (m s.l.m.) e quella media H_{med} (m s.l.m.), la lunghezza L (km) e la pendenza media i (%) calcolata come H_{max}/L . Il primo corso d'acqua appartiene alla zona Ionica settentrionale, gli altri due a quella meridionale.

Tabella 1. Caratteristiche geomorfologiche dei tratti analizzati.

Corso d'acqua	S (km ²)	H_{max}	H_{med}	L (km)	i (%)
Ferro	121.4	1108	453	28.4	3.90
Stilaro	98.2	1423	613	28.7	4.95
Torbido	159.2	1215	588	21.85	5.58

Tratta da: Viparelli M. (1972).

Tutti e tre i corsi d'acqua sono soggetti a frequenti fenomeni di piena con le massime concentrazioni di eventi alluvionali in novembre e marzo e precipitazioni notevoli nel periodo dicembre-gennaio e in ottobre (Petrucci et al., 1996). Fra le maggiori precipitazioni si ricordano per la stazione idrometrica di Stilo, appartenente al bacino dello Stilaro, i valori di 115 mm, 264 mm e 359 mm rispettivamente per le piogge di durata 1h, 12 h e 24 h verificatesi la prima nell'ottobre del 1951 e le altre due nell'ottobre del 1953. Con riferimento alla stazione di Gioiosa Jonica, appartenente invece al bacino del Torbido, si citano i valori 52 mm, 237 mm e 306 mm sempre per le piogge di durata 1h, 12 h e 24 h, verificatesi tutte nell'ottobre del 1951.

Per il Torbido è stata stimata alla foce una portata al colmo di 8.58 m³/s km² corrispondente ad un valore di 1390 m³/s per l'evento alluvionale del 10-11-1932. Nei più recenti eventi straordinari (Petrucci et al., 1996) del 1972-73 il Torbido è entrato in piena ben quattro volte nel giro di un mese (con l'abbattimento in uno dei casi di un ponte), mentre nello Stilaro la piena del 1976 ha determinato gravi danni con il crollo di opere di attraversamento.

Nel tratto montano i tre corsi d'acqua scorrono incassati in ripidi pendici e dal momento che attraversano terreni fortemente degradati, soggetti a frequenti frane, essi si caricano di una quantità considerevole di materiale solido. La parte grossolana di tale materiale viene depositata dalla corrente nella zona valliva favorendo la formazione di barre. Peraltro la presenza, in queste aree, di sponde erodibili permette l'allargamento del canale e costituisce un'importante sorgente di materiale solido. Se le portate maggiori determinano profonde modifiche nella morfologia dei corsi d'acqua analizzati c'è da rilevare come anche le portate di piena più modeste sono in grado di formare o distruggere i canali e le barre in intervalli temporali che vanno da poche ore a qualche giorno. L'insieme di questi fattori determinano un andamento planimetrico dei corsi d'acqua analizzati, per una parte dell'anno, di tipo intrecciato con rapidi cambiamenti piano altimetrici e, nel caso delle portate maggiori, cospicue traslazioni del canale principale.

Il tratto analizzato del Ferro ha inizio ad una quota di circa 160 m s.l.m. e termine a 15 m s.l.m. per una lunghezza complessiva di circa 10000 m e una pendenza media, i_m , pari a 1.41 (%);

la larghezza dell'alveo è abbastanza uniforme con un valore medio di circa 370 m e si amplia solo nella parte terminale raggiungendo un valore massimo di circa 700 m. Il tratto analizzato dello Stilaro ha inizio ad una quota di circa 125 m s.l.m. e termina a circa 10 m s.l.m. per una lunghezza complessiva di circa 7250 m e una pendenza media, i_m , pari a 1.49 (%); la larghezza dell'alveo è nella parte iniziale piuttosto ridotta, si amplia poi notevolmente raggiungendo un valore massimo di circa 840 m mentre nella parte terminale, corrispondente al 40% della lunghezza del tratto esaminato, si può ritenere abbastanza costante con un valore medio di circa 350 m. Il tratto analizzato del Torbido ha inizio ad una quota di circa 190 m s.l.m. e termina a 40 m s.l.m. per una lunghezza complessiva di circa 8400 m e una pendenza media, i_m , pari a 1.67 (%); la larghezza dell'alveo è abbastanza uniforme con un valore medio di circa 280 m e una larghezza massima di circa 340 m.

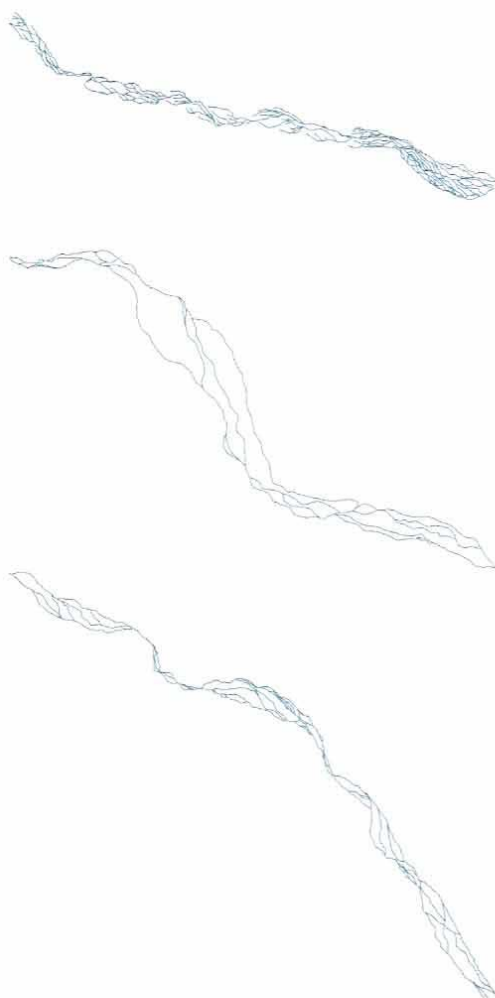


Figura 1. Rappresentazione dei tratti terminali dei corsi d'acqua analizzati.

I tre sistemi di canali intrecciati sono stati estratti da digitalizzazioni cartografiche in scala 1:10000 e sono rappresentati da insiemi costituiti da punti reticolo i quali ne caratterizzano, come aggregati frattali, la loro struttura discretizzata (Figura 1). La rete dei canali è stata digitalizzata in modo dettagliato e successivamente è stata rappresentata con passi spaziali di circa 2 metri, 4 metri e 8 metri. Ciascun sistema di punti è stato confinato (normalizzato) nella cella unitaria senza alterarne le proprietà topologiche (Falconer, 1990; Block et al., 1990).

L'analisi è stata effettuata mediante procedure standardizzate a taglia fissa in accordo al metodo proposto da De Bartolo et al. (2003; 2005) relativo alla generalizzazione dell'integrale di correlazione (vedi Appendice 1). Tale procedura numerica ha permesso pertanto di delimitare l'intervallo di riscaldamento dell'integrale di correlazione generalizzato, espresso dalle relazioni (A.3) e (A.5), partendo dai valori relativi alla minima e massima distanza di campionamento tra i net points costituenti i sistemi discreti dei tre canali intrecciati. In Tabella 2 sono riportati rispettivamente: il numero di net-points, N_{np} , i valori della minima e massima distanza (ϵ_{min} , ϵ_{max}), in accordo alle definizioni di cui all'Appendice 1, tra i punti campionati e della base, b , della distanza tra i punti alle risoluzioni di 2, 4 e 8 metri con partizione massima del supporto, M_{max} , pari a 41.

Tabella 2. Caratteristiche degli insiemi relativi ai tre sistemi di canali intrecciati normalizzati.

Corso d'acqua	N_{np}	ϵ_{min}	ϵ_{max}	b	M_{max}
Ferro (2 m)	32006	0.00021	1.055	1.230	41
Ferro (4 m)	15892	0.00078	1.055	1.192	41
Ferro (8 m)	7838	0.00100	1.055	1.185	41
Stilaro (2 m)	13953	0.00037	1.193	1.217	41
Stilaro (4 m)	6960	0.00083	1.193	1.194	41
Stilaro (8 m)	3465	0.00150	1.193	1.177	41
Torbido (2 m)	16103	0.00034	1.330	1.223	41
Torbido (4 m)	7809	0.00125	1.330	1.185	41
Torbido (8 m)	3954	0.00141	1.330	1.181	41

Lo spettro delle dimensioni frattali generalizzate D_q è stato stimato attraverso l'utilizzo delle relazioni (A.1), (A.2), (A.3) e (A.5) ovvero dal riscaldamento del $\ln C_q$ in funzione del $\ln \epsilon$ in accordo alle relazioni (A.10) e (A.11) (De Bartolo et al., 2003, 2005) e ciascuna dimensione frattale è stata calcolata dalla pendenza di ognuna delle curve di riscaldamento all'interno del campo di valori costituito dai limiti inferiori e superiori di cut-offs [ϵ_{lower} , ϵ_{upper}] in cui è massimo il coefficiente di determinazione R^2 (De Bartolo et al., 2000).

In *Figura 2* è riportato l'andamento di $\ln C_q(\varepsilon)$ in funzione di $\ln \varepsilon$ per la rete dei canali intrecciati del Ferro alla risoluzione spaziale di 2 metri. Le curve di riscaldamento riportate sono relative agli ordini dei momenti -5, -1, 0, 1, 5.

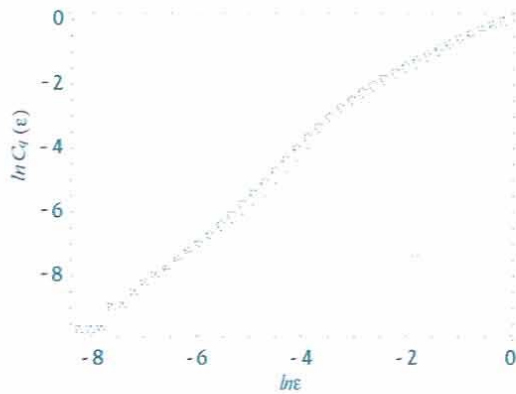


Figura 2. Scaling dell'integrale di correlazione generalizzato, $C_q(\varepsilon)$ (tratto vallivo del Ferro alla risoluzione spaziale di 2 m).

In particolare è stato possibile stimare il $\ln C_q$ vs. $\ln \varepsilon$ per valori di q appartenenti agli intervalli: [-5, 7] nel caso del Ferro per i passi 2, 4 e 8 m; [-5, 7] nel caso dello Stilario per il passo 2 metri e [0, 7] per i passi 4 e 8 metri; [-2, 7] per il Torbido ai passi 2, 4 e 8 metri. In *Figura 3* sono riportate, per il tratto vallivo del Ferro, alle risoluzioni 2, 4 e 8 metri le leggi di variazione di $\ln \varepsilon$ in funzione del partizionamento M , variabile da 1 sino a M_{\max} .

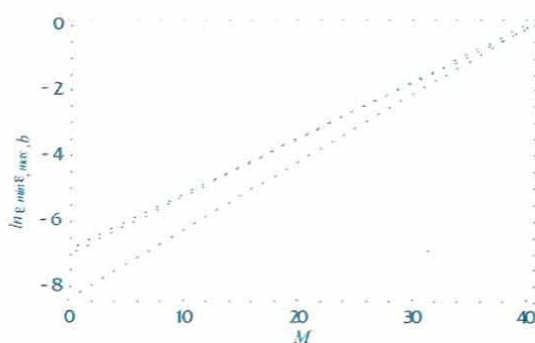


Figura 3. Variazione del $\ln \varepsilon$, in funzione del numero di partizionamenti M (tratto vallivo del Ferro, risoluzioni spaziali di 2, 4 e 8 metri).

Nella *Figura 4* sono rappresentati, per il sistema di canali intrecciati del tratto vallivo del Torbido, gli andamenti degli spettri delle dimensioni frattali generalizzate, D_q , rispettivamente alle risoluzioni 2, 4 e 8 metri e per momenti, q , stimati nell'intervallo di valori interi [-2, 7],

mentre nella *Figura 5* è mostrato, per il tratto vallivo dello Stilario, il confronto delle tre sequenze di massa τ_q , ricavate attraverso la (A.6) alla risoluzione 2 metri, con momenti, q , stimati nell'intervallo di valori [-5, 7] e alle risoluzioni 4 e 8 metri per momenti, q , stimati nell'intervallo di valori [0, 7].

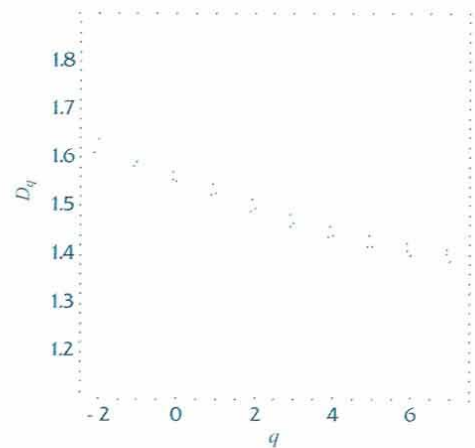


Figura 4. Spettri delle dimensioni frattali generalizzate, D_q , stimati alle risoluzioni spaziali di 2, 4 e 8 metri e per valori dei momenti q compresi nell'intervallo di valori interi positivi [-2, 7] e [0, 7] (tratto vallivo del Torbido).

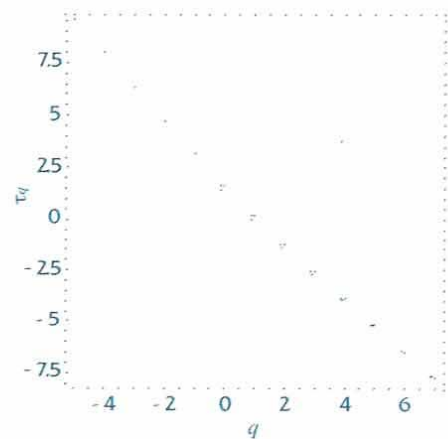


Figura 5. Sequenze degli esponenti di massa, τ_q , stimate alle risoluzioni spaziali di 2, 4 e 8 metri e per valori dei momenti q compresi nell'intervallo di valori interi positivi [-5, 7] e [0, 7] (tratto vallivo dello Stilario).

In accordo alle relazioni (A.7), (A.8) e (A.9) sono stati ricavati inoltre gli spettri delle singolarità, α_q , e gli spettri multifrattali $f(\alpha_q)$. Nelle *Figura 6* e *7* sono riportati rispettivamente, per il tratto vallivo del Ferro, l'andamento degli spettri delle singolarità e gli spettri multifrattali alle risoluzioni 2, 4 e 8 metri e per momenti, q , stimati nell'intervallo di valori interi [-7, 7].

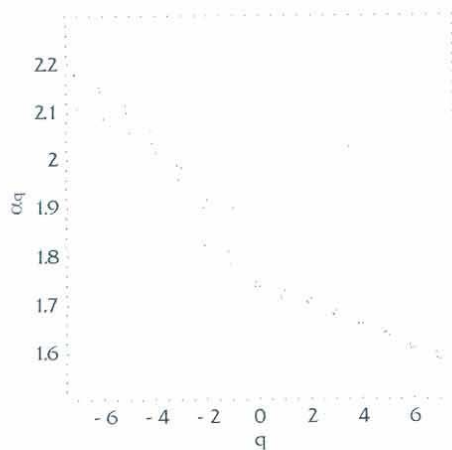


Figura 6. Spettri delle singolarità, α_q , stimati alle risoluzioni spaziali di 2, 4 e 8 metri e per valori dei momenti q compresi nell'intervallo di valori interi positivi [-7, 7] (tratto vallivo del Ferro).

La Tabella 3 riporta, per ciascun sistema di canali intrecciati analizzati al passo spaziale di 2 metri, i valori del coefficiente di determinazione, $R^2_{q=0}$, per la stima di $D_{q=0}$; i limiti dell'intervallo di determinazione delle dimensioni frattali ε_{lower} e ε_{upper} per $q=0$; la dimensione frattale del supporto, $D_{q=0} = f(\alpha_0)$; la dimensione di entropia, $D_{q=1}$; la dimensione di correlazione, $D_{q=2}$; i valori delle singolarità α_{min} , α_0 e α_{max} .

ANALISI DEI RISULTATI

I risultati ottenuti evidenziano il comportamento multifrattale dei tre sistemi di canali intrecciati analizzati e caratterizzati da un ben determinato intervallo di valori sia per quanto concerne gli indici delle singolarità, α_q , sia per quanto riguarda le dimensioni frattali generalizzate D_q .

In tutti i casi analizzati i coefficienti di determinazione, R^2 , relativi alle stime delle dimensioni frattali generalizzate, D_q , delle sequenze degli esponenti di massa, τ_q , dei valori di singolarità, α_q , e delle dimensioni frattali, $f(\alpha_q)$, hanno assunto valori molto prossimi all'unità.

Tabella 3. Risultati relativi agli indici di singolarità delle misure: passo di risoluzione spaziale 2 m.

Corso d'acqua	$R^2_{q=0}$	$\varepsilon_{lower,q=0}$ (m)	$\varepsilon_{upper,q=0}$ (m)	$D_{q=0}$	$D_{q=1}$	$D_{q=2}$	α_{min}	α_0	α_{max}
Ferro	0.9999	71	167	1.721	1.716	1.710	1.577	1.725	2.099
Stilaro	0.9991	111	537	1.462	1.438	1.412	1.245	1.482	1.696
Torbido	0.9994	42	212	1.542	1.518	1.487	1.313	1.560	1.634

Nel caso del Torbido alla risoluzione di 8 metri è stato possibile stimare i soli momenti positivi appartenenti all'intervallo di valori interi [0, 7]. Per quanto concerne il tratto terminale dello Stilaro tale stima è stata possibile per ordini compresi nell'intervallo di valori interi [-5, 7] alla risoluzione spaziale di 2 metri mentre per le restanti risoluzioni la stima dei momenti è ricaduta nell'intervallo di valori interi positivi [0, 7]. Quest'ultima riduzione di momenti negativi stimati, così come in parte anche nel caso del Torbido risulta strettamente connessa alla bassa statistica dei netpoints per le risoluzioni 4 e 8 metri (vedi Tabella 2) in quanto tali valori non forniscono una base sufficientemente numerosa per una corretta stima, a pesi negativi, del supporto della misura (De Bartolo et al., 2003).

Gli spettri multifrattali stimati sono risultati indipendenti dal passo spaziale di rappresentazione dei netpoints costituenti l'aggregato frattale dei sistemi di canali intrecciati, mentre le dimensioni frattali stimate del supporto della misura, $D_{q=0}$, hanno valori differenti anche se il limite superiore di cut-off è risultato dello stesso ordine di grandezza della larghezza media di ogni tratto (vedi Tabella III). Quest'ultima considerazione è in accordo con quanto riportato da Rosatti (2002) relativamente alle misure isotrope effettuate su canali intrecciati riprodotti in laboratorio.

Tabella 4. Campi di variabilità degli indici delle singolarità alle diverse risoluzioni spaziali.

Risoluzione spaziale	$f(\alpha_0) = D_{q=0}$	α_{min}	α_{max}
2 m	1.462 ÷ 1.721	1.245 ÷ 1.577	1.634 ÷ 2.099
4 m	1.468 ÷ 1.724	1.245 ÷ 1.591	1.495 ÷ 2.171
8 m	1.469 ÷ 1.732	1.191 ÷ 1.588	1.510 ÷ 2.179

In Tabella IV sono riportati i campi di variabilità degli indici delle singolarità alle diverse risoluzioni spaziali. La media delle dimensioni frattali del supporto delle misure calcolate alle risoluzioni 2, 4 e 8 metri è risultata essere pari a 1.726 nel caso del Ferro; pari a 1.466 nel caso dello Stilaro;

pari a 1.546 nel caso del Torbido. I risultati, pur differenti tra loro, risultano essere abbastanza congruenti con quelli stimati da Nikora et al. (1995) su 14 tratti di corsi d'acqua intrecciati della Nuova Zelanda.

In accordo a Sapozhnikov e Foufoula-Georgiou (1996) i tre sistemi di canali intrecciati analizzati riempiono il piano più densamente dei corsi d'acqua a canale singolo ma meno delle reti fluviali a scala di bacino. Questa differenza è in contrasto con il presunto comportamento *plane-filling* ipotizzato dal modello multifrattale di Bassler et al. (1999). Pare di poter rilevare che all'aumentare della dimensione frattale del supporto le strutture che costituiscono i sistemi di canali intrecciati passano da una organizzazione strutturale meno densa (Stilaro), verso una più densa (Ferro).

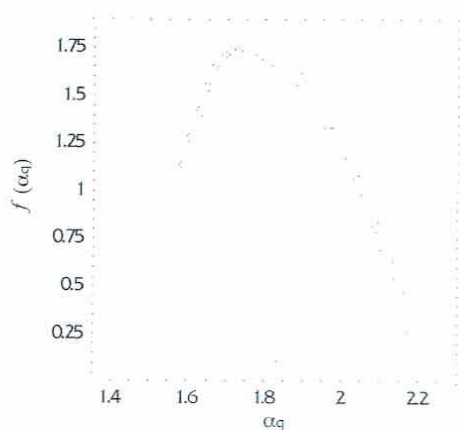


Figura 7. Spettri multifrattali, $f(\alpha_q)$, stimati alle risoluzioni spaziali di 2, 4 e 8 metri e per valori dei momenti q compresi nell'intervallo di valori interi positivi [-7, 7] (tratto vallivo del Ferro).

In generale gli spettri delle dimensioni frattali ottenuti sono rappresentativi oltre che della natura multifrattale anche della complessità geometrica dei sistemi di percorsi dei canali intrecciati. Come è facile riscontrare dalla Figura 7 lo spettro multifrattale (nel caso del Ferro) è anche ben rappresentato nella parte sinistra a pesi $q > 0$ che caratterizza, come è ormai noto, le misure multifrattali auto-somiglianti (Mandelbrot e Evertsz, 1991). I risultati del presente lavoro, anche sulla base di quelli Nikora et al. (1995) e da Walsh e Hicks (2002), inducono a ritenere che almeno per i corsi d'acqua analizzati l'andamento planimetrico dei sistemi di canali intrecciati sia auto-somigliante.

CONCLUSIONI

È stato analizzato il comportamento multifrattale di tre sistemi di canali intrecciati appartenenti ai tratti terminali dei corsi d'acqua calabresi del Ferro, Stilaro e Torbido. Ciascun sistema di canali intrecciato è stato estratto da digitalizzazioni in scala 1:10000 e rappresentato, come aggregato frattale, attraverso un insieme discreto di punti reticolo. La procedura di campionatura dei punti reticolo è stata effettuata con passi spaziali di 2, 4 e 8 metri.

L'analisi ha riguardato la stima degli spettri delle dimensioni frattali generalizzate, D_q , gli spettri delle singolarità, α_q e gli spettri multifrattali, $f(\alpha_q)$ mediante una procedura standardizzata a base auto-somigliante.

In particolare la procedura di stima numerica degli spettri multifrattali si è avvalsa della generalizzazione dell'integrale di correlazione introdotta da Pawelzik e Schuster (1987) con partizione esponenziale della base relativa alla minima e massima distanza tra i punti reticolo (De Bartolo et al., 2003, 2005) costituenti ciascun sistema di canali intrecciati.

L'analisi ha evidenziato che i punti reticolo rappresentativi dei sistemi di canali intrecciati appartenenti ai tre tratti vallivi analizzati, costituiscono una distribuzione multifrattale auto-somigliante, con valori medi stimati della dimensione frattale del supporto compresi tra 1.46 e 1.72 e indipendenti dalla risoluzione spaziale adottata.

Le dimensioni frattali del supporto, pur essendo tra loro differenti, si mostrano in accordo alle precedenti esperienze mono-frattali condotte da Nikora et al. (1995) e Walsh e Hicks (2002) su sistemi di canali intrecciati della Nuova Zelanda attraverso tecniche di ricoprimento standardizzato (box-counting).

L'analisi eseguita nella presente nota ha evidenziato concretamente la possibilità di proseguire nelle indagini che coinvolgano un maggior numero di sistemi di canali intrecciati al fine di verificare la dipendenza della dimensione frattale del supporto da grandezze idraulico-geomorfologiche fondamentali quali portate, pendenze e trasporto solido.

**APPENDICE 1. IL METODO DELL'INTEGRALE
DI CORRELAZIONE GENERALIZZATO**

In accordo a quanto riportato da De Bartolo et al. (2003; 2005), la famiglia di dimensioni frattali generalizzate secondo la procedura numerica di Pawelzik e Schuster (1987) viene espressa dalle relazioni:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad q \neq 1 \quad (\text{A.1})$$

e

$$D_1 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_1(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (\text{A.2})$$

Nella (A.1) il termine $C_q(\varepsilon)$ rappresenta l'integrale di correlazione generalizzato a tutti i momenti q espresso dalla relazione:

$$C_q(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|) \right)^{q-1} \right]^{1/(q-1)}$$

per $q \neq 1$, (A.3)

in cui Θ è la funzione a gradino di Heaviside, la quale assume i valori:

$$\begin{aligned} \Theta(\cdot) &= 0 \quad \text{se } (\cdot) < 0, \\ \Theta(\cdot) &= 1 \quad \text{se } (\cdot) \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

mentre (x_i, x_j) e N rappresentano, rispettivamente, la generica coppia di punti e il numero di *net-points* (aggregato frattale). Risulta utile evidenziare che la (A.3) enumera semplicemente le coppie di punti (x_i, x_j) con distanza $|x_i - x_j|$ minore ε .

Nella (A.2) il termine $\ln C_1(\varepsilon)$ rappresenta invece l'integrale di correlazione espresso dalla (A.3) nella singolarità $q=1$ valutato in considerazione dello sviluppo nell'intorno $1+dq$ (De Bartolo et al., 2003) ossia:

$$\ln C_1(\varepsilon) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|) \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Le espressioni (A.1 e A.2), (A.3) e (A.5) permettono anche di risalire allo spettro multifrattale $f(\alpha_q)$ con l'ausilio delle trasformate di Legendre (3) (Yamaguti e Prado, 1995). Infatti, in considerazione della (2) è possibile, mediante semplice sostituzione, riscrivere la sequenza degli esponenti di massa come:

$$\tau_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\ln \varepsilon} \ln \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|) \right)^{q-1} \right] \right\} \quad (\text{A.6})$$

Nella (A.6), l'unica parte dipendente dal parametro q è costituita dal $\ln[\cdot]$, e, pertanto, se indichiamo detta parte con T , applicando le note regole di derivazione al solo argomento avremo:

$$\Lambda = \frac{d}{dq} T = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|) \right)^{q-1} \right]^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|) \right)^{q-1} \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|) \right) \right] \quad (\text{A.7})$$

In accordo quindi con le trasformate di Legendre (3), si può scrivere:

$$\alpha_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Lambda}{\ln \varepsilon} \quad (\text{A.8})$$

e allo stesso modo, introducendo la differenza $\Psi = T - q\Lambda$, ottenere:

$$f(\alpha_q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Psi}{\ln \varepsilon} \quad (\text{A.9})$$

Pertanto in considerazione delle relazioni (A.8 e A.9) è possibile determinare direttamente lo spettro multifrattale $f(\alpha_q)$ avvalendosi delle sole relazioni (A.3) e (A.5).

Per quanto concerne la procedura numerica su cui si basa il calcolo dell'integrale di correlazione generalizzato (relazioni A.1 e A.2) De Bartolo et al. (2003, 2005) hanno introdotto una partizione esponenziale della base tra la minima e la massima distanza tra i net-points oggetto di misura, che si avvale della seguente legge di potenza:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\min} b^M \quad M = 1, \dots, M_{\max} \quad (\text{A.10})$$

in cui ε_{\min} si calcola come segue: ad ogni punto dell'insieme si associa la minima distanza dagli altri punti, il più grande di tali valori minimi rappresenta ε_{\min} . Sempre nella (A.10) b rappresenta la base della distanza tra i punti ed è espressa da:

$$b = \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\min}} \right)^{1/M_{\max}} \quad (\text{A.11})$$

in cui ε_{\max} rappresenta la massima distanza tra tutte le coppie di punti e M_{\max} il numero massimo di partizionamenti.

RIFERIMENTI

- Aharony, A., (1989). Measuring multifractals, *Physica D*, 38: 1-4.
- Avnir, D., Biham, O., Lidar, D. A. e Malcai, O., (1998). Is the geometry of nature fractal? *Science*, 279: 39-40.
- Badii, R. e Politi, A., (1984). Hausdorff Dimension and uniformity factor of strange attractors, *Physical Review Letters*, 52, 1661-1664, 1984.
- Badii, R. e Politi, A., (1985). Statistical Description of Chaotic Attractors: the Dimension Function, *Journal of Statistical Physics*, 40: 725-750.
- Bassler, K.E., Paczuski, M., e Reiter, G. F. (1999). Braided rivers and superconducting vortex avalanches, *Physical Review Letters*, 83: 3957-3959.
- Block, A., Bloh, W. von e Schellnhuber, H.J. (1990). Efficient box-counting determination of generalized fractal dimensions, *Physical Review A*, 42(4): 1869-1874.
- Chhabra, A., e Jensen, R. V. (1989). Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum, *Physical Review Letters*, 62: 1327-1330.
- De Bartolo, S.G., Maiolo, M., Veltri, M. e Veltri, P. (1995). Sulla caratterizzazione multifrattale delle reti fluviali, *Idrotecnica*, 6: 329-340.
- De Bartolo, S.G., Gabriele, S. e Gaudio, R. (1998). Analisi sperimentale sulla natura multifrattale delle reti fluviali, XXVI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, IV, 53-64, Catania 1998.
- De Bartolo, S.G., Gabriele, S. e Gaudio, R. (2000). Multifractal behaviour of river networks, *Hydrology and Earth System Sciences*, 4(1): 105-112.
- De Bartolo, S.G., Veltri, M. e Primavera, S. (2003). Indagine con tecniche a taglia fissa sulla struttura multifrattale delle reti fluviali, *L'Acqua*, 6: 9-15.
- De Bartolo, S.G., Gaudio, R. e Gabriele, S. (2004). Multifractal analysis of river networks: a sand-box approach, *Water Resources Research*, 40, W02201, doi:10.1029/2003WR002760.
- De Bartolo, S.G., Veltri, M. e Primavera, S. (2005). Estimated generalized dimensions of river networks, *Journal of Hydrology*, doi:10.1016/j.jhydrol.2005.02.033.
- Evertsz, G.J.G. e Mandelbrot, B.B. (1992). Multifractal measures, in H-O. Peitgen, H. Jürgens and D. Saupe (eds.), *Chaos and fractals, new frontiers of science*, Springer Verlag, New York, 921-953.
- Falconer, K.J. (1990). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, J. Wiley, Chichester, England.
- Feder, J (1988). *Fractals*, Plenum, New York.
- Feeny, B. F. (2000). Fast multifractal analysis by recursive box covering, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(9): 2277-2287.
- Foufoula-Georgiou, E. e Sapozhnikov, V. (1996). Self-affinity in braided rivers, *Water Resources Research*, 32(5): 1429-1439.
- Foufoula-Georgiou, E. e Sapozhnikov, V. (1997). Experimental evidence of dynamic scaling and indications of self-organized criticality in braided rivers, *Water Resources Research*, 33(8): 1983-1991.
- Foufoula-Georgiou, E. e Sapozhnikov, V. (2001). Scale invariances in the morphology and evolution of braided rivers, *Mathematical Geology*, 33(3): 273-291.
- Grassberger, P. e Procaccia, I. (1983). Characterization of strange attractors, *Physical Review Letters*, 50(3): 346-349.
- Grassberger, P. (1983). Generalized dimensions of strange attractors, *Physics Letters*, 97A(6): 227-230.
- Håkansson, J. e Russberg, G. (1990). Finite-size effects on the characterization of fractal sets: $f(\alpha)$ construction via box counting on a finite two-scaled Cantor set, *Physical Review A*, 41(4): 1855-1861.
- Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I. e Shraiman, B.I. (1986). Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Physical Review A*, 33(2): 1141-1151.
- Hentschel, H. G. E. e Procaccia, I. (1983). The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, *Physica D*, 8: 435-444.
- Hjelmfelt, A. T. (1988). Fractals and the river-length catchment-area ratio, *Water Resources Bulletin*, 24(2): 455-459.
- Horton, R.E. (1932). Drainage basin characteristics, *Transactions of the American Geophysical Union (AGU)*, 13: 350-370.
- Horton, R.E. (1945). Erosional development of streams and their drainage basins; hydrophysical approach to quantitative geomorphology, *Geological Society American Bulletin*, 56: 275-370.
- Hou, X.-J, Gilmore, R., Mindlin, G. e Solari, H. (1990). An efficient algorithm for fast $O(N*\ln(N))$ box-counting, *Physics Letters A*, 151(1,2): 43-46.
- La Barbera, P. e Rosso, R. (1987). Fractal geometry of river networks (abstract), *Eos Trans. AGU*, 68(44): 1276.
- La Barbera, P. e Rosso, R. (1989). On the fractal dimension of stream networks, *Water Resources Research*, 25(4): 735-741.
- Liebovitch, L. S. e Toth, T. (1989). A fast algorithm to determine fractal dimensions by box-counting, *Physics Letters A*, 141(8,9), 386-390.
- Mach, J., F. Mas, e Sagués, F. (1995). Two representations in multifractal analysis, *J. Phys. A Math Gen.* 28: 5607-5622.
- Malcai, O., Lidar, D. A., Biham, O. e Avnir, D. (1997). Scaling range and cutoffs in empirical fractals, *Physical Review E*, 56(3): 2817- 2828.
- Mandelbrot, B. B. (1972). Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence. In: *Statistical Models and Turbulence* (ed. By M. Rosenblatt & C. Van Atta), *Lecture Notes in Physics 12*, Springer, New York, 333-351.

- Mandelbrot, B. B. (1974). Intermittent turbulence in self-similar cascades: Divergence of high moments and dimension of the carrier, *Journal of Fluid Mechanics*, 62: 331-358.
- Mandelbrot, B. B. (1977). *Fractals: form, chance and dimension*, W. H. Freeman and Co, San Francisco, California.
- Mandelbrot, B. B. e Evertsz, C. J. G. (1991). Exactly self-similar left-sided multifractals, in A. Bunde e S. Havlin (Eds.), *Fractals and disordered systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Meisel, L. V., Johnson, M. e Cote, P. J. (1992). Box-counting multifractal analysis, *Physical Review A*, 45(10): 6989-6996.
- Meisel, L. V., e Johnson, M. (1994). Multifractal analysis of imprecise data: Badii-Politi and correlation integral approach, *Physical Review E*, 50(5): 4214-4219.
- Meisel, L. V., e Johnson, M. (1997). Convergence of numerical box-counting and correlation integral multifractal analysis techniques, *Pattern Recognition*, 30(9): 1565-1570.
- Molteno, T. C. A. (1993). Fast $O(N)$ box-counting algorithm for estimating dimensions, *Physical Review E*, 48(5): R3263-R3266.
- Nikora, V. I., Hicks, D. M., Smart, G. M. e Noever, D. A. (1995). Some fractal properties of braided rivers, paper presented at the 2nd International Symposium on Fractals and Dynamic System in Geoscience, John Wolfgang Goethe Univ., Frankfurt, Germany, 4-7 April 1995.
- Nykanen, D. K., Fofoula-Georgiou, E. e Sapozhnikov, V. B. (1998). Study of spatial scaling in braided river patterns using synthetic aperture radar imagery, *Water Resources Research*, 34(7): 1795-1807.
- Oiwa, N. N. e Fiedler-Ferrara, N. (1998). A moving-box algorithm to estimate generalized dimensions and $f(\alpha)$ spectrum, *Physica D*, 124: 210-224.
- Pastor-Satorras, R. e Riedi, R. H. (1996). Numerical estimates of the generalized dimensions of the Hénon attractor for negative q , *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29: L391-L398.
- Pawelzik, K. e Schuster, H. G. (1987). Generalized dimensions and entropies from a measured time series, *Physical Review A*, 35(1): 481-484.
- Petrucci, O., Chiodo, G. e Caloiero D. (1996). Eventi alluvionali in Calabria nel decennio 1971-1980. CNR IRPI (CS), GNDICI, Linea di ricerca N. 1, U.O. 1.4, Pubbl. n. 1374.
- Renyi, A. (1955). On a new axiomatic theory of probability, *Acta Mathematica Hungarica*, 6: 285-335.
- Renyi, A. (1970). *Probability Theory*, North-Holland Publishing Company, Budapest.
- Rigon, R. (1994). Principi di auto-organizzazione nella dinamica evolutiva delle reti idrografiche, Tesi del dottorato di ricerca in Idrodinamica, Trento, Febbraio.
- Robert, A. e Roy, A. (1990). On the fractal Interpretation of the mainstream length-drainage area relationship, *Water Resources Research*, 26: 839-842.
- Rodriguez-Iturbe, I. e Rinaldo, A. (1997). *Fractal River Basins: Chance and Self-Organization*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Rosatti, G. (2002). Validation of the physical modeling approach for braided rivers, *Water Resources Research*, 38(12): 1295, doi:10.1029/2001WR000433.
- Strahler, A.N. (1952). Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography, *Geological Society American Bulletin*, 63: 1117-1142.
- Strahler, A.N. (1964). Quantitative geomorphology of drainage basins and channel networks, *Handbook of applied hydrology*, ed. V.T. Chow, section 4, McGraw-Hill, New York.
- Tarboton, D.G., Bras, R.L. e Rodriguez-Iturbe, I. (1988). The fractal nature of river networks, *Water Resources Research*, 24: 1317-1322.
- Veneziano, D., Moglen, G. E. y Bras, R. L. (1995). Multifractal analysis: pitfalls of standard procedures and alternatives, *Physical Review E*, 52(2): 1387-1398.
- Viparelli, M. (1972). *La sistemazione delle aste terminali delle fiumare calabre*, Liguore Editore.
- Walsh, J. e Hicks, M. D. (2002). Braided channels: self-similar or self-affine?, *Water Resources Research*, 38(6): 1082, doi: 10.1029/2001WR000749.
- Yamaguti, M. e Prado, C. (1995). A direct calculation of the spectrum of singularities $f(\alpha)$ of multifractals, *Physics Letters A*, 206: 318-322.
- Yamaguti, M. e Prado, C. (1997). Smart covering for a box-counting algorithm, *Physical Review E*, 55(6): 7726-7732.