

Método para Cálculo de Puntos de Equilibrio en Sistemas Dinámicos Basado en Sincronización Adaptativa

Manuel Prian Rodríguez *, Manuel J. López Sánchez, J. Francisco Moreno Verdulla

Departamento de Ingeniería en Automática, Electrónica, Arquitectura y Redes de Computadores. Universidad de Cádiz. Avda. de la Universidad de Cádiz nº 10, 11510. Puerto Real, Cádiz, España.

Resumen

En este trabajo se propone un sistema de control equivalente a un método numérico para el cálculo de los puntos de equilibrio de sistemas dinámicos, donde dichos equilibrios pueden ser empleados como señal de referencia en diversas técnicas de control. El procedimiento propuesto está basado en la sincronización adaptativa entre un oscilador y un modelo de referencia conducido por las variables de estado del oscilador. Se realiza un análisis de estabilidad y se propone un algoritmo de cálculo simplificado. Finalmente, se muestran resultados satisfactorios de simulación numérica.

Palabras Clave:

Control adaptativo, caos, estabilización, modelo de referencia, punto de equilibrio, sincronización, sistema dinámico.

Calculation Method for Equilibrium Points in Dynamical Systems Based on Adaptive Synchronization

Abstract

In this work, a control system is proposed as an equivalent numerical procedure whose aim is to obtain the natural equilibrium points of a dynamical system. These equilibrium points may be employed later as setpoint signal for different control techniques. The proposed procedure is based on the adaptive synchronization between an oscillator and a reference model driven by the oscillator state variables. A stability analysis is carried out and a simplified algorithm is proposed. Finally, satisfactory simulation results are shown.

Keywords:

Adaptive control, chaos, stabilization, reference model, equilibrium point, synchronization, dynamic system.

1. Introducción

Un sistema dinámico caótico es un sistema no lineal que es hipersensible a pequeños cambios en las condiciones iniciales (Lorenz, 1963), (Alligood, *et al.*, 1997), (González, *et al.*, 2005). Los equilibrios de dicho sistema pueden depender de algún parámetro, de tal forma, que una pequeña variación del mismo cambie el número total de los equilibrios, así como sus valores, pudiendo afectar también a la estabilidad de los mismos. El parámetro en cuestión se dice que es de bifurcación, siendo esto un problema añadido para el uso de algunas técnicas tradicionales de cálculo numérico (Kincaid, *et al.*, 1994), (Axelsson, 1996), (Axelsson, 2010), (Broyden, 1965), (Fletcher, 1987), (Conde, *et al.*, 1990). El método de cálculo propuesto por Barlas (Barlas, *et al.*, 2001), se centra en el cálculo de los equilibrios de sistemas dinámicos cuya estructura del vector de campo es polinomial.

En este trabajo proponemos un sistema de control equivalente a un procedimiento numérico para el cálculo de los puntos de

equilibrio naturales de sistemas dinámicos, basado en sincronización adaptativa. Dicho procedimiento permite que la estructura del vector de campo sea polinomial o trascendente. La novedad del método presentado reside en que usa una técnica de sincronización adaptativa, como un procedimiento alternativo a los métodos numéricos convencionales para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, determinando sus puntos de equilibrio, tanto estables como inestables. Los equilibrios calculados pueden ser empleados como señal de referencia en diversas técnicas de control, como en Krishchenko (Krishchenko, 1995), que utiliza transformaciones no lineales para la estabilización de equilibrios conocidos previamente, o como en (López, *et al.*, 2007) que utiliza control H-infinito; así como los descritos en (Khalil, 2002) y (Astrom, *et al.*, 2002), entre otros.

El trabajo se ha organizado de la siguiente manera: en la sección segunda, se describe mediante un diagrama de bloques el sistema de control para cálculo numérico. En la sección tercera se realiza un análisis de estabilidad. En la sección cuarta se deduce

*Autor para la correspondencia: manuel.prian@uca.es

un algoritmo de cálculo simplificado que facilita su implementación práctica y se dan indicaciones para el ajuste de los parámetros de control. En la sección quinta se muestran resultados de simulación numérica. En la sección sexta se dan las conclusiones.

2. Cálculo de puntos de equilibrio en sistemas dinámicos

Los sistemas sincronizados con un submodelo de referencia conducido fueron introducidos inicialmente por (Pecora et al., 1990). Partiendo de este concepto se define el modelo de referencia conducido (MRC) como un modelo de referencia (MR) del sistema dinámico, en el cual se han sustituido las n variables de estado de su vector de campo por medidas de las correspondientes variables de estado del sistema dinámico.

2.1. Sistema dinámico

Se considera que el sistema dinámico al que se pretende calcular sus puntos de equilibrio viene dado por:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t). \tag{1}$$

Con $\mathbf{x}(t) \in U$, U es un conjunto abierto de \mathfrak{R}^n y donde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ es el vector de estado de dimensión $(n \times 1)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es una función vectorial expresada por el vector función $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = [f_1(\mathbf{x}(t)), \dots, f_n(\mathbf{x}(t))]^T$, de dimensión $(n \times 1)$; $\mathbf{y}(t)$ es el vector de salida de la planta que se supone igual al vector de estado $\mathbf{x}(t)$.

2.2. Sistema de control para cálculo numérico de puntos de equilibrio

El sistema de control para cálculo numérico de puntos de equilibrio que se propone a continuación, se basa en la sincronización adaptativa entre un oscilador y un MRC del mismo. Esto permite que un determinado producto matricial $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}(t)$, que está sumando al vector de campo del MRC, tienda al vector cero cuando $t \rightarrow \infty$, siendo $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))$ una matriz diagonal de dimensión $(n \times n)$ y $\mathbf{p}(t)$ un vector adaptativo de dimensión $(n \times 1)$. Los elementos de la matriz diagonal $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))$ coinciden en estructura con las componentes del vector de campo del sistema dinámico al que se pretende calcular sus puntos de equilibrio. La estructura del sistema se observa en el diagrama de bloques de la Fig. (1) compuesto por: un oscilador, la ley de adaptación de parámetros, la ley de control y un MRC del oscilador.

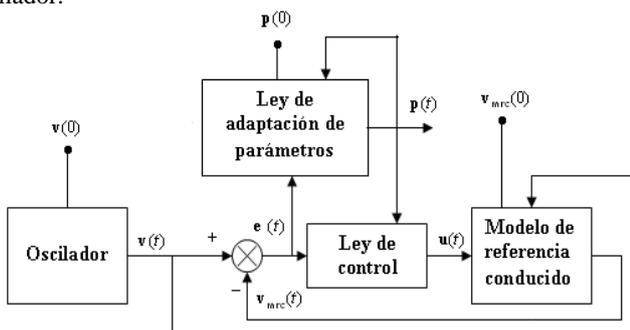


Figura 1: Diagrama de bloques estructural del sistema de control.

A continuación, se describen analíticamente cada uno de los bloques que componen la Fig. (1).

2.3. Oscilador

La expresión correspondiente para el oscilador viene dada por:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{v}(t)). \tag{2}$$

Donde $\mathbf{v}(t) \in V$, V es un abierto en \mathfrak{R}^n , siendo $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), \dots, v_n(t)]^T$ el vector de estado del oscilador de dimensión $(n \times 1)$; $\mathbf{g}(\mathbf{v}(t))$ es una función vectorial expresada por el vector función $\mathbf{g}(\mathbf{v}(t)) = [g_1(\mathbf{v}(t)), \dots, g_n(\mathbf{v}(t))]^T$ de dimensión $(n \times 1)$.

2.4. Modelo de referencia conducido del Oscilador

El MRC del oscilador viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{d\mathbf{v}_{mrc}(t)}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{v}(t)) + \mathbf{u}(t). \tag{3}$$

Donde $\mathbf{v}_{mrc}(t) = [v_{mrc1}, \dots, v_{mrcn}]^T$ es el vector de estado del MRC de dimensión $(n \times 1)$, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$ es el vector de entradas de control de dimensión $(n \times 1)$.

2.5. Vector de error

El error entre el vector de estado del oscilador y el vector de estado del MRC viene dado por:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_{mrc}(t). \tag{4}$$

2.6. Ley de adaptación de parámetros

La ley de adaptación de parámetros viene expresada por:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\mathbf{C}\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{e}(t). \tag{5}$$

Donde $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) = \text{diag}(f_{11}(\mathbf{p}(t)), \dots, f_{mm}(\mathbf{p}(t)))$ es una matriz diagonal de dimensión $(n \times n)$ cuyos elementos son funciones que coinciden en estructura con las componentes del vector de campo del sistema dinámico, $\mathbf{p}(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]^T$ es el vector de estado adaptativo de dimensión $(n \times 1)$ correspondiente a la salida del sistema de control para el cálculo de puntos de equilibrio, $\mathbf{C} = \text{diag}(C_{11}, \dots, C_{mm})$ es una matriz diagonal de dimensión $(n \times n)$ cuyos elementos $C_{ii} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) son los parámetros de velocidad de adaptación.

2.7. Ley de control

La ley de control $\mathbf{u}(t)$ viene expresada por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}(t) + \mathbf{K}\mathbf{e}(t). \tag{6}$$

Donde $\mathbf{K} = \text{diag}(K_{11}, \dots, K_{mm})$ es una matriz diagonal de dimensión $(n \times n)$ cuyos elementos son los parámetros de la ley de control, siendo $K_{ii} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

3. Análisis de estabilidad

A continuación, se realiza un análisis del sistema de control para cálculo numérico con objeto de encontrar las condiciones que deben cumplir sus parámetros para ser estabilizado.

3.1. Dinámica de error entre oscilador y MRC

La dinámica de error entre el oscilador y el MRC del mismo se halla derivando (4) con respecto del tiempo y sustituyendo en la expresión resultante $d\mathbf{e}(t)/dt = d\mathbf{v}(t)/dt - d\mathbf{v}_{\text{mrc}}(t)/dt$ las expresiones (2) y (3), obteniéndose con ello la siguiente igualdad:

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{v}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{v}(t)) - \mathbf{u}(t). \tag{7}$$

Sustituyendo (6) en (7) y simplificando, se obtiene la siguiente expresión para la dinámica de error:

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}(t) - \mathbf{K}\mathbf{e}(t). \tag{8}$$

Agrupando (5) y (8) se obtiene un sistema dinámicamente equivalente al sistema de control de cálculo original, que viene dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}(t) - \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \\ \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= -\mathbf{C}\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{e}(t). \end{aligned}$$

Considerando que el punto de equilibrio de (9) sea $(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{p}})$, se realiza el cambio de variables $\mathbf{e}'(t) = \mathbf{e}(t) - \bar{\mathbf{e}}$, $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}$, con objeto de trasladar el punto de equilibrio al origen, obteniéndose el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}'(t)}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{p}'(t) + \bar{\mathbf{p}})(\mathbf{p}'(t) + \bar{\mathbf{p}}) - \mathbf{K}(\mathbf{e}'(t) + \bar{\mathbf{e}}) \\ \frac{d\mathbf{p}'(t)}{dt} &= -\mathbf{C}\mathbf{F}(\mathbf{p}'(t) + \bar{\mathbf{p}})(\mathbf{e}'(t) + \bar{\mathbf{e}}). \end{aligned} \tag{10}$$

Donde el origen de coordenadas $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es un equilibrio trivial.

Se emplea a continuación el segundo método de Lyapunov o método directo, para verificar que dicho equilibrio puede ser asintóticamente estable, bajo ciertas restricciones de sus parámetros. Se elige para ello una función V de Lyapunov definida en el espacio de estados de (10), siendo $V: L \rightarrow \mathfrak{R}$ ($L \subset \mathfrak{R}^{2n}$) de clase C^1 y definida positiva en el abierto L que contiene al origen de coordenadas. La función V de Lyapunov elegida es:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{e}'(t), \mathbf{p}'(t)) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (e'_1(t) + \bar{e}_1)^2 + \dots + (e'_n(t) + \bar{e}_n)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p'_1(t) + \bar{p}_1)^2}{C_{11}} + \dots + \frac{(p'_m(t) + \bar{p}_m)^2}{C_{mm}} \right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Diferenciando (11) a lo largo de la trayectoria de (10) se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{e}'(t), \mathbf{p}'(t)) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2(e'_1(t) + \bar{e}_1) \frac{de'_1(t)}{dt} + \dots + 2(e'_n(t) + \bar{e}_n) \frac{de'_n(t)}{dt} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(p'_1(t) + \bar{p}_1)}{C_{11}} \frac{dp'_1(t)}{dt} + \dots + \frac{2(p'_m(t) + \bar{p}_m)}{C_{mm}} \frac{dp'_m(t)}{dt} \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Sustituyendo en (12) las derivadas $de'_i(t)/dt$ y $dp'_i(t)/dt$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dadas en (10), y simplificando, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -K_{11}e_1'^2(t) - \dots - K_{mm}e_m'^2(t). \tag{13}$$

La expresión (13) será definida negativa si se verifican las siguientes desigualdades:

$$K_{11} > 0, K_{22} > 0, \dots, K_{mm} > 0. \tag{14}$$

Se concluye pues, que el punto de equilibrio $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es asintóticamente estable en el conjunto abierto $L \forall t$.

Como consecuencia de ello, se cumplirán las siguientes igualdades: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_{\text{mrc}}(t)) = \mathbf{0}$, lo cual indica que las trayectorias del oscilador y del MRC se sincronizan. Esto tiene como consecuencia que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$, y por tanto, una solución posible sería que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t) \neq \mathbf{0}$ y que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{0}$ es decir, que las componentes del vector $\mathbf{p}(t)$ para $t \rightarrow \infty$ tienden a las raíces de la ecuación vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{0}$. Se concluye, que los equilibrios calculados coinciden con los del sistema dinámico, puesto que $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))$ tiene la misma estructura que el vector de campo de éste. Para el caso en que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \neq \mathbf{0}$ la solución arrojada sería el equilibrio del origen y para el caso en que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$ siendo $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{p}(t) \neq \mathbf{0}$ el punto de equilibrio sería distinto del origen.

4. Algoritmo de cálculo de puntos de equilibrio

Partiendo del análisis de estabilidad realizado en la sección anterior, la expresión (9) constituye un algoritmo para el cálculo de los equilibrios de un sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{p}(t) - \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \\ \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= -\mathbf{C}\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))\mathbf{e}(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Como se puede observar, en el algoritmo no aparece el oscilador, ya que éste se ha cancelado al simplificar la estructura de control inicial. La misión del oscilador es, de esta forma, conceptual para el desarrollo del método propuesto.

4.1. Ajuste de los parámetros de control

El ajuste de la matriz de parámetros de velocidad de adaptación \mathbf{C} y de la matriz de parámetros \mathbf{K} se realizan de la siguiente forma:

Los parámetros de velocidad de adaptación, $C_{ii} > 0$ para $i = \{1, 2, \dots, n\}$, se ajustan de forma experimental, escogiéndolos inicialmente iguales en magnitud $C_{11} = C_{22} = \dots = C_{mm}$. Dichos parámetros están relacionados con la forma de la respuesta transitoria de la ley de adaptación.

La matriz de parámetros \mathbf{K} , también se ajusta experimentalmente, debiendo verificar sus elementos las siguientes desigualdades: $K_{11} > 0, K_{22} > 0, \dots, K_{mm} > 0$. En la práctica, se escogen inicialmente iguales en magnitud, es decir: $K_{11} = K_{22} = \dots = K_{mm}$.

4.2. Regla de permutaciones

La regla de permutaciones se emplea para modificar la cuenca de atracción de una determinada solución de equilibrio, de manera que si para unas condiciones iniciales particulares, el algoritmo de cálculo tiende a converger siempre a la misma solución, la regla permite contrarrestar dicha tendencia. Se define como sigue:

Si la componente i -ésima de la ecuación de error es $de_i(t)/dt = f_i(p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))p_j(t) - K_{ii}e_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, la correspondiente componente j -ésima de la ley de adaptación sería $dp_j/dt = -C_{jj}f_i(p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))e_i(t)$.

La regla deja invariante la estabilidad del algoritmo de cálculo, puesto que no altera los resultados del análisis efectuado en la sección (3).

En uno de los experimentos numéricos de la siguiente sección se verá la forma de aplicar esta regla de permutaciones.

5. Resultados de simulación numérica

Los siguientes resultados de simulación numérica se han obtenido aplicando el algoritmo para el cálculo de equilibrios propuesto en la sección (4). Para integrar numéricamente el algoritmo se ha empleado el método de Runge Kutta de cuarto orden con paso de integración Δt fijo.

5.1. Sistema caótico de Lorenz

El sistema caótico de Lorenz (Lorenz, 1963) tiene tres puntos de equilibrio inestables, uno de ellos en el origen, para los valores de los parámetros $\sigma = 10$, $r = 28$, $\beta = 8/3$ (Guckenheimer, et al., 1983), siendo los puntos de equilibrio no triviales los dos siguientes: $(\pm\sqrt{\beta(r-1)}, \pm\sqrt{\beta(r-1)}, (r-1))$. El sistema caótico de Lorenz queda expresado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= rx_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -\beta x_3(t) + x_1(t)x_2(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Se desea calcular los tres puntos de equilibrio inestables presentes en la dinámica del sistema caótico. El paso de integración empleado en la simulación ha sido $\Delta t = 10^{-5}$ s.

En este caso no se ha aplicado la regla de permutaciones, puesto que, el sistema converge bien a todos los puntos de equilibrio, de manera que los subíndices de las expresiones siguen el orden de los números naturales.

El algoritmo de cálculo de equilibrios propuesto previamente se aplica al sistema caótico de Lorenz mediante las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{de_1(t)}{dt} &= p_1(t)10(-p_1(t) + p_2(t)) - K_{11}e_1(t) \\ \frac{de_2(t)}{dt} &= p_2(t)(28p_1(t) - p_2(t) - p_1(t)p_3(t)) - K_{22}e_2(t) \\ \frac{de_3(t)}{dt} &= p_3(t)(-\frac{8}{3}p_3(t) + p_1(t)p_2(t)) - K_{33}e_3(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= -C_{11}10(-p_1(t) + p_2(t))e_1(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= -C_{22}(28p_1(t) - p_2(t) - p_1(t)p_3(t))e_2(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} &= -C_{33}(-\frac{8}{3}p_3(t) + p_1(t)p_2(t))e_3(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Donde (17) representa la dinámica encargada de calcular una raíz real del sistema $p_i(t)f_i(\mathbf{p}(t)) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), adaptando el parámetro $p_i(t)$ para que busque dicha raíz a partir de unas determinadas condiciones iniciales. Dichas condiciones iniciales deben pertenecer a la cuenca de atracción del equilibrio a estabilizar. Se han tomado como condiciones iniciales para el experimento numérico los valores siguientes:

$e_1(0) = 7, e_2(0) = 7, e_3(0) = 25$ y $p_1(0) = 7, p_2(0) = 7, p_3(0) = 25$; con estas condiciones iniciales el algoritmo converge al punto de equilibrio (8.485281374238, 8.485281374238, 27) de la dinámica de bucle abierto del sistema dinámico. Para las condiciones iniciales $e_1(0) = -2, e_2(0) = -7, e_3(0) = 25$ y $p_1(0) = -7, p_2(0) = -7, p_3(0) = 25$ el algoritmo converge al punto de equilibrio (-8.485281374238, -8.485281374238, 27) y para las condiciones iniciales $e_1(0) = 5, e_2(0) = 5, e_3(0) = 5$ y $p_1(0) = 5, p_2(0) = 5, p_3(0) = 5$ el algoritmo converge al origen. Los parámetros de control se han ajustado a los siguientes valores: $K_{11} = K_{22} = K_{33} = 8$ y $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 35$.

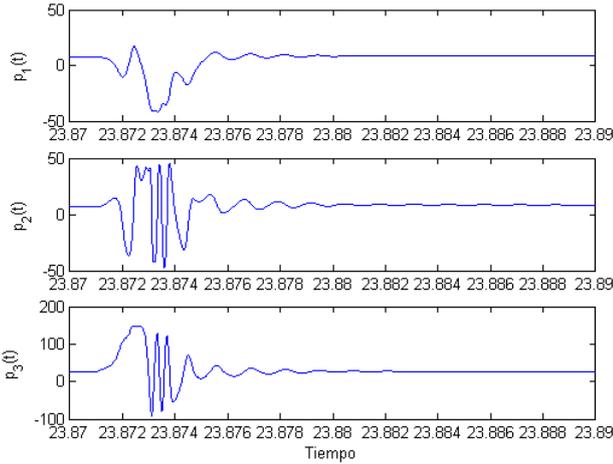


Figura 2: Diagramas temporales de las variables de estado $p_1(t)$, $p_2(t)$ y $p_3(t)$ del algoritmo de cálculo, convergiendo al punto de equilibrio inestable (8.485281374238, 8.485281374238, 27) de la dinámica de bucle abierto del sistema caótico de Lorenz.

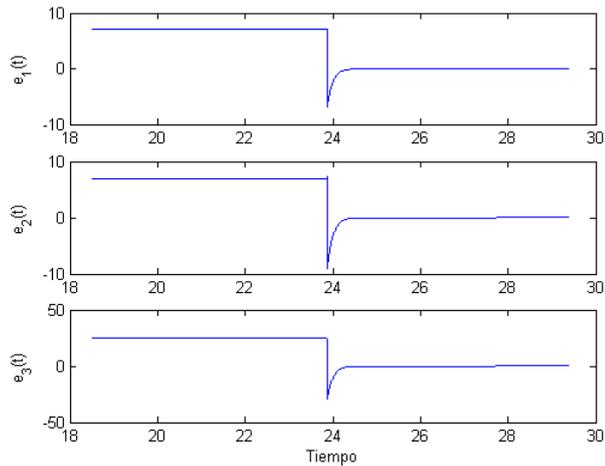


Figura 3: Diagramas temporales de las señales de error $e_1(t)$, $e_2(t)$ y $e_3(t)$ convergiendo al origen del sistema caótico de Lorenz.

En las Fig. (2) y (3) se observa el instante de aplicación del control y la evolución dinámica del sistema.

5.2. Sistema caótico de Rössler

El sistema caótico prototipo-4 de O.E. Rössler (Rössler, 1979) tiene dos puntos de equilibrio inestables, uno de ellos en el origen, para los valores de los parámetros $b=0.5$ y $c=0.5$, (Sundarapandian, 2011), siendo el punto de equilibrio no trivial el siguiente: $(0, 2, -2)$. El sistema caótico de Rössler queda expresado por:

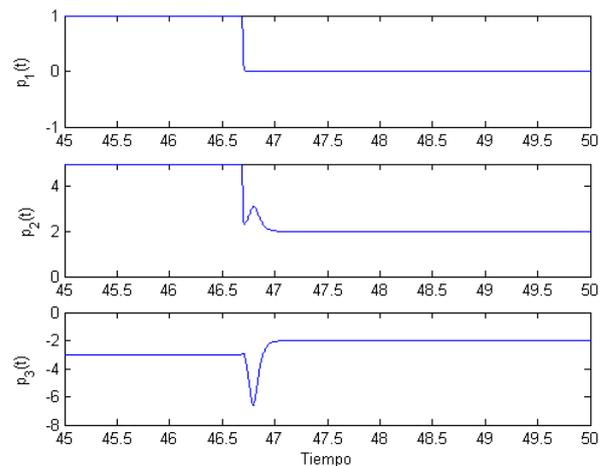
$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -x_2(t) - x_3(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= b(x_2(t) - x_2^2(t)) - cx_3(t). \end{aligned}$$

El paso de integración empleado en la simulación ha sido $\Delta t = 10^{-5}$ s. El algoritmo de cálculo numérico de los puntos de equilibrio propuesto anteriormente aplicado al sistema de Rössler, viene dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{de_1(t)}{dt} &= p_3(t)(-p_2(t) - p_3(t)) - K_{11} e_1(t) \\ \frac{de_2(t)}{dt} &= p_1^2(t) - K_{22} e_2(t) \\ \frac{de_3(t)}{dt} &= p_2(t)(0.5(p_2(t) - p_2^2(t)) - 0.5p_3(t)) - K_{33} e_3(t) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} &= -C_{11}p_1(t)e_2(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= -C_{22}(0.5(p_2(t) - p_2^2(t)) - 0.5p_3(t))e_3(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} &= -C_{33}(-p_2(t) - p_3(t))e_1(t). \end{aligned}$$

En (19) se observa que se ha aplicado la regla de permutaciones, es decir, si la componente de error es $de_1(t)/dt = p_3(t)(-p_2(t) - p_3(t)) - K_{11} e_1(t)$, entonces la correspondiente componente adaptativa sería $dp_3(t)/dt = -C_{33}(-p_2(t) - p_3(t))e_1(t)$. Se han tomado como condiciones iniciales para el experimento numérico los valores: $e_1(0) = 1, e_2(0) = 5, e_3(0) = -3$ y $p_1(0) = 1, p_2(0) = 5, p_3(0) = -3$. Con estas condiciones iniciales el algoritmo converge al punto de equilibrio $(0, 2, -2)$ de la dinámica de bucle abierto del sistema dinámico. El algoritmo converge al punto de equilibrio trivial $(0, 0, 0)$ para las condiciones iniciales siguientes: $e_1(0) = 2, e_2(0) = 5, e_3(0) = 1$ y $p_1(0) = 2, p_2(0) = 5, p_3(0) = 1$. Los parámetros de control se han ajustado a los siguientes valores: $K_{11} = K_{22} = K_{33} = 0.2$ y $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 35$. En las Fig. (4) y (5) se observa la evolución dinámica hacia un punto de equilibrio a partir del instante de aplicación del control.



(18) Figura 4: Diagramas temporales de las variables de estado $p_1(t)$, $p_2(t)$ y $p_3(t)$ del algoritmo de cálculo, convergiendo al punto de equilibrio inestable $(0, 2, -2)$ de la dinámica de bucle abierto del sistema caótico de Rössler.

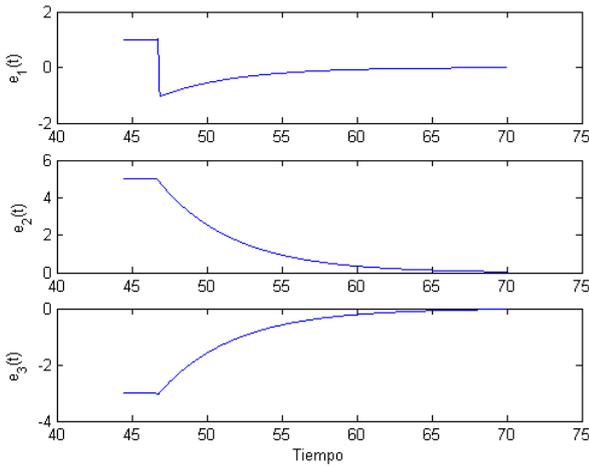


Figura 5: Diagramas temporales de las señales de error $e_1(t)$, $e_2(t)$ y $e_3(t)$ convergiendo al origen del sistema caótico de Rössler.

5.3. Sistema dinámico unidimensional

La función propuesta por Kincaid (Kincaid, *et al.*, 1994) puede ser considerada como el vector de campo de un sistema dinámico unidimensional, en el que los puntos de equilibrio de dicho sistema presentan hipersensibilidad a un parámetro; es decir, un pequeño cambio en un determinado parámetro provoca una bifurcación de los equilibrios. El sistema dinámico posee los siguientes puntos de equilibrio: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), dependiendo de la condición inicial elegida se tendrá una u otra solución. El sistema dinámico queda definido por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = & x^8(t) - 36x^7(t) + 546x^6(t) - \\ & - 4536x^5(t) + 22449x^4(t) - 67284x^3(t) + \\ & + 118124x^2(t) - 109584x(t) + 40320. \end{aligned} \tag{20}$$

El algoritmo de cálculo para puntos de equilibrio aplicado al sistema dinámico unidimensional viene dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} = & p(t) \left(\begin{aligned} & p^8(t) - 36p^7(t) + 546p^6(t) - \\ & - 4536p^5(t) + 22449p^4(t) - 67284p^3(t) + \\ & + 118124p^2(t) - 109584p(t) + 40320 \end{aligned} \right) - \\ & - K e(t) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = -C \left(\begin{aligned} & p^8(t) - 36p^7(t) + 546p^6(t) - \\ & - 4536p^5(t) + 22449p^4(t) - 67284p^3(t) + \\ & + 118124p^2(t) - 109584p(t) + 40320 \end{aligned} \right) e(t).$$

En la Fig. (6) se observa la evolución dinámica del sistema a partir del instante de aplicación del control. Se han tomado como condiciones iniciales para el experimento numérico los siguientes valores: $e(0) = 6.5$ y $p(0) = 6.5$.

Con estas condiciones iniciales el algoritmo converge al punto de equilibrio $\bar{p} = 6$ de la dinámica de bucle abierto del sistema dinámico.

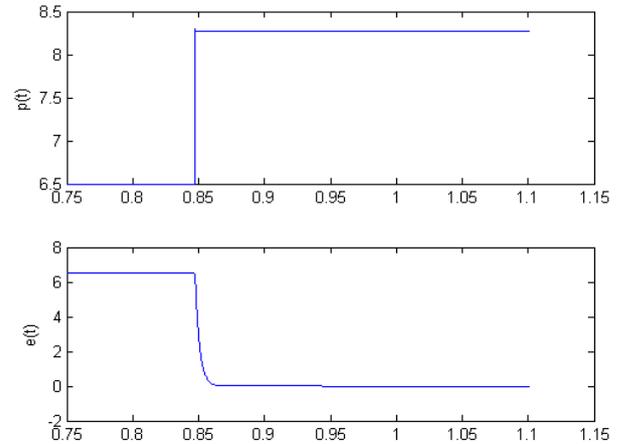


Figura 6: Diagramas temporales de la señal de error $e_3(t)$ convergiendo al origen, y la variable de estado $p(t)$ convergiendo al punto de equilibrio $\bar{p} = 8.272602778967$.

Si se varía ligeramente el coeficiente de $x^7(t)$ en (20), de forma que tome el valor 36.001, el sistema presenta una bifurcación de los equilibrios, desapareciendo dos de ellos (Kincaid, *et al.*, 1994), debido a esto, para las mismas condiciones iniciales anteriores y ese valor del coeficiente, el algoritmo propuesto converge hacia el punto de equilibrio $\bar{p} = 8.272602778967$, que se corresponde con uno de los puntos de equilibrio generados tras la bifurcación, se observa pues, que el método de cálculo propuesto permite dar resultados correctos en presencia de bifurcaciones de los equilibrios. Los parámetros de control se han ajustado a los siguientes valores: $K = 300$ y $C = 20$. El paso de integración empleado ha sido de $\Delta t = 10^{-6}$ s.

5.4. Sistema dinámico con estructura trascendente del vector de campo

El sistema de ecuaciones propuesto en (Conde, *et al.*, 1990) puede ser considerado como el vector de campo de un sistema dinámico tridimensional que viene dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} = & x_1(t) \cos(x_2(t)) - 2/3 \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = & \cos(x_3(t)) + 0.91x_1(t) \sin(x_2(t) + x_3(t)) - 1.22 \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = & 0.76x_1(t) \cos(x_2(t) + x_3(t)) - \sin(x_3(t)). \end{aligned} \tag{22}$$

El algoritmo de cálculo de los puntos de equilibrio viene dado por:

$$\begin{aligned} \frac{de_1(t)}{dt} &= p_1(t)(p_1(t)\cos(p_2(t)) - 2/3) - K_{11} e_1(t) \\ \frac{de_2(t)}{dt} &= p_2(t)(\cos(p_3(t)) + 0.91p_1(t)\sin(p_2(t) + \\ &+ p_3(t)) - 1.22) - K_{22} e_2(t) \\ \frac{de_3(t)}{dt} &= p_3(t)(0.76p_1(t)\cos(p_2(t) + p_3(t)) - \\ &- \sin(p_3(t))) - K_{33} e_3(t) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} &= -C_{11}(p_1(t)\cos(p_2(t)) - 2/3)e_1(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= -C_{22}((\cos(p_3(t)) + 0.91p_1(t)\sin(p_2(t) + \\ &+ p_3(t)) - 1.22))e_2(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} &= -C_{33}(0.76p_1(t)\cos(p_2(t) + p_3(t)) - \sin(p_3(t)))e_3(t). \end{aligned}$$

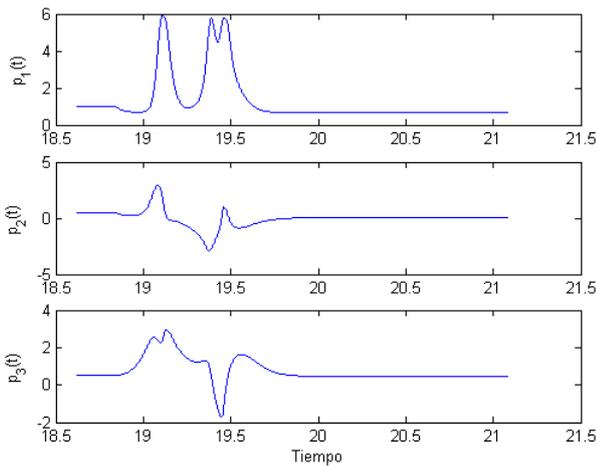


Figura 7: Diagramas temporales de las variables de estado $p_1(t)$, $p_2(t)$ y $p_3(t)$ del algoritmo de cálculo, convergiendo al punto de equilibrio (0.67013116, 0.10172842, 0.44894138).

En la Fig. (7) se observa la evolución dinámica del sistema hacia el punto de equilibrio tras el instante de aplicación del algoritmo. Las condiciones iniciales para el experimento numérico vienen dadas por: $e_1(0)=1, e_2(0)=0.5, e_3(0)=0.5$ $p_1(0)=1, p_2(0)=0.5, p_3(0)=0.5$. Con estas condiciones iniciales el algoritmo converge al punto de equilibrio (0.67013116, 0.10172842, 0.44894138). Los parámetros de control se han ajustado a $K_{ii}=0.08$ y $C_{ii}=35 \quad i=\{1,2,3\}$. El paso de integración empleado ha sido de $\Delta t = 10^{-4} s$.

6. Conclusiones

Se ha presentado un método para el cálculo de puntos de equilibrio de un sistema dinámico basado en el diseño de un sistema de control que emplea una técnica de sincronización adaptativa. El análisis de estabilidad realizado prueba que el método presentado estabiliza los puntos de equilibrio inestables de la dinámica de bucle abierto de un sistema dinámico dejando invariante los estables, y puede ser aplicado en los casos en que la dependencia de los equilibrios con respecto a algún parámetro sea muy sensible. El procedimiento propuesto se puede emplear como un método numérico para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. La novedad del método presentado reside en que usa una técnica de sincronización adaptativa como un procedimiento alternativo a los métodos numéricos para la solución de tales sistemas, permitiendo la determinación de sus puntos de equilibrio, tanto estables como inestables.

Referencias

Alligood, K.T., Sauer, T. & Yorke, J.A., 1997. "Chaos: An Introduction to Dynamical Systems", Springer, New York.

Astrom, J., Wittenmark B., 2002. "Adaptive Control". Addison Wesley.

Axelsson, O. 1996. "Iterative solution methods". Ed. Cambridge University.

Axelsson, O. 2010. "Milestones in the Development of Iterative Solution Methods". Hindawi Publishing Corporation. *Journal of Electrical and Computer Engineering*, Volume, Article ID 972794, 33 pages.

Barlas, Y., Yasarcan H., 2001. "A Method for Finding Equilibrium Points of a Non-Linear Dynamic" *Model. 2001. The 19th International System Dynamics Conference*. Atlanta, Georgia, USA.

Broyden, C. G. 1965. "A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations". *Mathematics of Computation*, 19, págs. 577-593.

Conde, C., Winter, G., 1990. "Métodos y Algoritmos Básicos del Álgebra Numérica". Ed.: Reverté.

Fletcher, R., 1987. "Practical methods of Optimization". Ed. John Wiley and Sons.

González, R., Prian, M., Fernández, M.A. Rojas, J. L., Romero, E., 2005. "A symmetric piecewise-linear chaotic system with a single equilibrium Point". *International journal of bifurcation and chaos*, vol. 15, no. 4 pp. 1411-1415.

Guckenheimer, J., Holmes, P., 1983. "No linear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields". Springer-Verlang, New York.

Khalil H. K., 2002, "Nonlinear Systems". Prentice Hall.

Kincaid, D., Cheney W., 1994. "Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico". Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.

Krishchenko, Alexander P., 1995. "Stabilization of equilibrium points of chaotic system" *Physics Letters A*, 203, 350-356.

López, M. J., Verdulla F. M., Prian, M., 2007. "Chaos control based on nonlinear state feedback and linear H-infinity controller synthesis". *WSEAS Transactions on Systems*. Issue 1, vol. 6, pp. 68-75, ISSN 1109-2777.

Lorenz, E. N., 1963. "Deterministic non periodic flow". *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20 pp. 130-141.

Pecora, L.M., Carrol, T. L., 1990. "Synchronization in chaotic systems". *Phys. Rev. Lett.*, pp. 821-824.

Rössler O. E., 1979. "Continuous chaos - four prototype equations". *Annals New York, Acad Sci*; 316:376-92.

Sundarapandian, V., 2011. "Adaptive control and synchronization of Rössler prototype-4 system". *International Journal of advances information Technology (IAIT)*, Vol. 1, No. 5.