

## Control Tolerante a Fallas Activo: Estimación y acomodación de fallas en sensores aplicado al modelo LPV de una bicicleta sin conductor

J. A. Brizuela-Mendoza<sup>a,\*</sup>, C. M. Astorga-Zaragoza<sup>a</sup>, A. Zavala-Río<sup>b</sup>, F. Canales-Abarca<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET/Tecnológico Nacional de México), Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira Cuernavaca, Morelos, Mexico.

<sup>b</sup>Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT), Camino a la Presa San José 2055, Col. Lomas 4 sección, San Luis Potosí, Mexico.

<sup>c</sup>ABB Corporate Research Center, Brown Boveri Strasse 6, Baden, Suiza.

### Resumen

Se presenta el diseño de un control tolerante a fallas (CTF) activo aplicado al modelo de una bicicleta sin conductor con representación Lineal de Parámetros Variables en el tiempo (LPV) polinomial, afectado por fallas aditivas en los sensores y ruido de medición. Dentro del CTF, el sistema de diagnóstico de fallas opera en base a las estimaciones de un observador de fallas, el cual genera el aislamiento de dichas fallas. Los algoritmos propuestos, considerados como las principales aportaciones del trabajo, logran estimaciones de fallas y variables de estado libres de ruido, con el objetivo de generar indicadores de falla y ley de control, respectivamente. La tolerancia a fallas del sistema se consigue a través de un conjunto de observadores. Los resultados se presentan en simulación utilizando el modelo LPV de una bicicleta sin conductor, considerando un controlador para la estabilización de la postura vertical a lo largo de su movimiento traslacional y su velocidad como parámetro variable.

**Palabras Clave:** Diagnóstico de fallas, control tolerante a fallas, observadores, sistemas LPV.

### 1. Introducción

Un esquema de control capaz de mantener la operación de la planta en forma segura ante la presencia de fallas recibe el nombre de sistema de Control Tolerante a Fallas (CTF) (Zhang and Jiang, 2000). Entre las diversas formas que pueden adoptar los esquemas CTF (Jiang and Yu, 2012) existe la llamada *acomodación de fallas*. Esta involucra, ante la condición de falla, la acción correctora basada en el cambio de los parámetros del controlador o estructura del sistema (Verde et al., 2013). Con el objetivo de construir un sistema CTF, se requiere un sub-sistema encargado de la detección y aislamiento de las fallas ocurridas en el sistema. Dicho sub-sistema se denomina Sistema de Detección y Aislamiento de fallas o FDI del inglés. La detección indica la ocurrencia de una condición anormal en el comportamiento dinámico, mientras que el aislamiento determina los elementos cuyos comportamientos son anormales. Así mismo, un tema importante consiste en la calidad de

los elementos de medición dentro del sistema físico, i.e. si un elemento de medición proporciona una salida con un alto nivel de ruido, la señal de control dependiente de dicha medición presentará ruido también, generando con ello funcionamientos forzados de los elementos finales de control o actuadores. Por otro lado, los sistemas lineales con parámetros variables en el tiempo o sistemas LPV se consideran, desde hace algunas décadas, como un tipo de sistemas que permiten la aproximación de dinámicas no lineales en términos de un conjunto de sistemas lineales. Los sistemas LPV dependen de parámetros variables considerados disponibles para su medición, cuyos valores determinan el punto de operación del sistema no-lineal aproximado. Entre las principales representaciones de los sistemas LPV (Briat, 2015), la formulación politópica ha sido mayormente abordada, debido a que la solución se obtiene a partir de la combinación lineal de sistemas construidos en los valores límite de los parámetros variables. Existe una forma específica que involucra la dependencia de los parámetros variables dentro del sistema en forma polinomial, es decir, el sistema depende de parámetros variables representados mediante un polinomio con grado mayor o igual a dos, generando con ello la formulación LPV con representación polinomial (Gilbert et al., 2010). Los sistemas LPV polinomiales representan una formulación menos estudiada con respecto a los LPV politópicos. Esto se debe prin-

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [jabriz.cenidet@gmail.com](mailto:jabriz.cenidet@gmail.com) (J. A. Brizuela-Mendoza), [astorga@cenidet.edu.mx](mailto:astorga@cenidet.edu.mx) (C. M. Astorga-Zaragoza), [azavala@ipicyt.edu.mx](mailto:azavala@ipicyt.edu.mx) (A. Zavala-Río), [francisco.canales@ch.abb.com](mailto:francisco.canales@ch.abb.com) (F. Canales-Abarca)  
URL: [www.cenidet.edu.mx](http://www.cenidet.edu.mx) (J. A. Brizuela-Mendoza), [www.cenidet.edu.mx](http://www.cenidet.edu.mx) (C. M. Astorga-Zaragoza)

principalmente a que, en el diseño del controlador u observador, la solución involucra Desigualdades Lineales Matriciales (LMI, del inglés) dependientes de los parámetros variables (Gahinet et al. (1996)). Así, el presente trabajo aborda el diseño de un sistema CTF basado en la acomodación de fallas en sensores modeladas como fallas aditivas, considerando al sistema afectado por ruido de medición. Para lograr dicho objetivo, el sistema FDI se basa en un observador de fallas, cuyas estimaciones, obtenidas libres de ruido de medición, son utilizadas como indicadores de la ocurrencia de las mismas en el sistema. En otras palabras, las estimaciones del observador de fallas generan la detección de las fallas, mientras que el sistema FDI, por su parte, determina el aislamiento de las mismas. Para construir la ley de control, se presenta la extensión del diseño del estimador de fallas utilizando observadores de Luenberger, con el objetivo de generar una ley de control libre de ruido. Los diseños del estimador de fallas y observadores de Luenberger se consideran las principales aportaciones del presente trabajo. En términos de CTF y FDI para sistemas LPV, Rotondo et al. (2013) presenta el diseño de un sistema CTF aplicado al modelo LPV politópico de un quadrotor. En dicho trabajo, dependiendo de la información obtenida de la falla, se selecciona un esquema de CTF activo o pasivo. El CTF propuesto en (Rotondo et al., 2013) no incorpora elementos dedicados a la estimación de la falla presente en el sistema. Rodríguez et al. (2013) presenta la síntesis de un filtro de detección y estimación de fallas en sensores aplicado a una máquina de viento modelada en forma LPV politópica. Alwi et al. (2012) aborda el diseño de un estimador de fallas en sensores y actuadores utilizando la metodología de modos deslizantes dentro del modelo de una aeronave. Patton and Klinkhieo (2010) presenta el diseño de un estimador de fallas y sus compensaciones para sistemas LPV, aplicado a un manipulador de dos eslabones modelado en forma politópica. Finalmente, de Oca et al. (2008) utiliza el modelo LPV politópico de un helicóptero para construir un control tolerante a fallas basado en un controlador por retroalimentación de estado. Haciendo referencia a trabajos aplicados en sistemas LPV en forma afín, es decir, sistemas LPV con dependencia lineal en el parámetro variable, Sloth et al. (2011) presenta el control robusto y CTF de una turbina de viento. Se aborda el concepto del control tolerante a fallas en términos de desigualdades bilineales matriciales. Las investigaciones de CTF presentadas con anterioridad aplican a sistemas LPV en sus representaciones politópica y afín. Como resultado, se manifiesta la necesidad de contribuir al respecto de los CTF en sistemas LPV con representación polinomial. Se mencionan las aportaciones del presente artículo: diseño de un estimador de fallas y diseño de un estimador de estado aplicados al modelo LPV de una bicicleta sin conductor. Dicho modelo LPV es afectado por fallas aditivas en los sensores y ruido de medición, además de que depende de la velocidad traslacional del vehículo, involucrada en forma polinomial. Los algoritmos propuestos permiten estimar fallas y variables de estado libres de ruido, con el objetivo de detectar su ocurrencia y construir la ley de control, respectivamente. La tolerancia a fallas del sistema se consigue a través de un conjunto de observadores encargados de compensar las fallas ocurridas, con el objetivo de mantener su estabilidad.

## 2. Sistemas LPV con representación polinomial

### 2.1. Descripción

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\zeta)x + B(\zeta)u \\ y &= C(\zeta)x \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^s$  representan las variables de estado, entrada y salida, respectivamente.  $A(\zeta)$ ,  $B(\zeta)$  y  $C(\zeta)$  son matrices de dimensiones compatibles, con  $\zeta \in \mathbb{R}^m$  definido como el vector de parámetros variables. Debido a que el valor que adopte  $\zeta$  define el punto de operación del sistema,  $\zeta$  es considerado medible, acotado y con derivada  $\dot{\zeta}$  acotada. Si las matrices  $A(\zeta)$ ,  $B(\zeta)$  o  $C(\zeta)$  pueden escribirse en la forma:

$$\chi(\zeta) = \chi_0 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \chi_{\{(i-1)m+j\}} \zeta_j^i \quad (2)$$

para algún  $k \geq 1$ , donde  $\chi_l$ ,  $l = 0, \dots, km$ , son matrices constantes de dimensiones apropiadas, entonces (1) se denomina sistema LPV con representación polinomial.

### 2.2. Controlabilidad y observabilidad de sistemas LPV

De acuerdo con (Briat, 2008), la controlabilidad y observabilidad de sistemas LPV se consideran dentro de la extensión de los criterios aplicados a sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI). Así, un sistema LPV será controlable si:

$$\text{rango}[B(\zeta) \ A(\zeta)B(\zeta) \ A(\zeta)^2B(\zeta) \ \dots \ A(\zeta)^{n-1}B(\zeta)] = n \quad (3)$$

se cumple para todos los valores de  $\zeta$  considerados. De forma similar, si  $\forall \zeta$ :

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C(\zeta) \\ C(\zeta)A(\zeta) \\ C(\zeta)A(\zeta)^2 \\ \vdots \\ C(\zeta)A(\zeta)^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (4)$$

entonces el sistema LPV será observable.

## 3. Caso de estudio

### 3.1. Descripción general

El caso de estudio es una bicicleta sin conductor. El objetivo de control consiste en mantener su posición vertical con respecto a la horizontal, manipulando la posición angular del manubrio a través de un par. La estabilidad de la bicicleta debe conservarse independientemente de la variación de la velocidad traslacional  $v$  del vehículo. De acuerdo a Schwab et al. (2005), el sistema puede ser dividido en tres secciones: (i) el cuadro principal de estructura rígida, (ii) el tren delantero, compuesto por el manubrio que orienta la rueda correspondiente y (iii) las ruedas. El modelo dinámico de una bicicleta sin conductor es:

$$Q\ddot{q} + vW\dot{q} + (gE_0 + v^2E_1)q = f_i \quad (5)$$

donde  $Q$ ,  $W$  representan coeficientes matriciales de masa y amortiguamiento, y  $E_0$ ,  $E_1$  son matrices de rigidez. En el sistema (5),  $Q$ ,  $W$ ,  $E_0$  y  $E_1$  dependen de la física del prototipo modelado en términos de la velocidad traslacional  $v$ , considerada como parámetro variable del sistema medible  $\forall t$ . El vector  $q = [\phi \ \delta]^T$  corresponde a las posiciones angulares de la bicicleta donde:  $\phi$  es el ángulo del cuadro principal con respecto a la horizontal y  $\delta$  el ángulo del tren delantero.  $f_i$  representa el vector de fuerza de entrada  $f_i = [T_\phi \ T_\delta]^T$ , siendo  $T_\phi$  y  $T_\delta$  los pares aplicados al cuadro principal y tren delantero, respectivamente. Con el objetivo de construir la representación en variables de estado del sistema (5), se adopta  $x = [q \ \dot{q}]^T$  y  $T_\delta = u$  como único par de entrada. De esta manera el sistema (5), con los valores paramétricos considerados en Cerone et al. (2010), adquiere la representación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(v)x + Bu \\ y &= x \end{aligned} \quad (6)$$

con

$$A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13.67 & 0.225 - 1.319v^2 & -0.164v & -0.552v \\ 4.857 & 10.81 - 1.125v^2 & 3.621v & -2.388v \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.339 \\ 7.457 \end{bmatrix} \quad (7)$$

El sistema (6) con (7), considerando como parámetro variable  $\zeta = v$  en (2) es un sistema LPV polinomial, dado que  $A(v)$  adopta la forma  $A_0 + A_1v + A_2v^2$ .

### 3.2. Controlabilidad

Debido a la dependencia de la velocidad traslacional  $v$  en (6), es decir  $A(v)$ , existirán valores de  $v$  causantes de la pérdida de controlabilidad en el modelo. Considere la matriz de controlabilidad:

$$\Upsilon_c = [B \ A(v)B \ A(v)^2B \ A(v)^3B] \quad (8)$$

Los valores de  $v$  que generan la pérdida de controlabilidad en el modelo, se obtienen a partir de la igualación a cero del polinomio resultante de la operación determinante de (8). Consecuentemente, calculando  $|\Upsilon_c|$  y resolviendo para  $v$ , se obtienen los siguientes valores de velocidad traslacional para los cuales el modelo pierde la controlabilidad:

$$\tau_c = \{v \in \mathbb{R} : |\Upsilon_c| = 0\} = \{\pm 1.8305, \pm 0.03386\} \quad (9)$$

Como resultado, a partir del análisis se consideran únicamente las raíces positivas, dado que dichos valores adquieren sentido físico en el contexto planteado. La sustitución de dichos valores en (8) generan la pérdida de rango de la matriz y consecuentemente la pérdida de controlabilidad en el modelo. Finalmente, para efectos de la metodología propuesta, se considera una variación para  $v$  dentro del rango  $\Phi = [0.5 \ 1.7] \text{ m/s}$ ; bajo la consideración de que  $\Phi$  asegura la controlabilidad del sistema LPV polinomial.

### 3.3. Representación general del sistema bajo falla afectado por ruido de medición

Considere el sistema (6) afectado por fallas aditivas abruptas y/o incrementales en los sensores y ruido de medición:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(v)x + Bu \\ y &= x + F_m f + Dr \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $F_m \in \mathbb{R}^{n \times g}$  y  $f \in \mathbb{R}^g$  corresponden a la matriz y el vector de falla;  $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$  y  $r \in \mathbb{R}^q$  representan la matriz y vector de magnitud asociadas con el ruido de medición. Considere fallas en los sensores de las salidas  $y_3 = \phi$  y  $y_4 = \delta$  además de dos ruidos de medición:

$$F_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.15 & 0.12 \\ 0.1 & 0.2 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

En el contexto real, las magnitudes adquiridas por el vector de fallas  $f$ , son relacionadas con problemas de descalibración o pérdida de efectividad en los sensores con respecto a su operación nominal. Como ejemplo, el vector  $f = [0.2 \ -0.3]^T$  en (10), representa la descalibración o BIAS del sensor para la salida  $y_3 = \phi$  de un 20 %, además de la pérdida de efectividad del 30 % en el correspondiente a  $y_4 = \delta$  (Chen and Patton, 1999).

## 4. Descripción general del sistema de control

El sistema de control general se divide en dos etapas: (i) Estabilización de la bicicleta sin conductor; (ii) Sistema de acomodación de fallas. Como resultado, el sistema de acomodación de fallas genera la tolerancia a fallas del sistema o, equivalentemente, la característica de un sistema de control CTF.

### 4.1. Estabilización de la bicicleta sin conductor

Se propone una ley de control por retroalimentación de estados estimados:

$$u = T_\delta = \theta(v)\hat{x} \quad (12)$$

tal que el origen del sistema en lazo cerrado:

$$\dot{x} = A(v)x + B\theta(v)\hat{x} \quad (13)$$

sea asintóticamente estable<sup>1</sup>, donde  $\theta(v)$  es la ganancia del control dependiente del parámetro variable. Para los estimados, se adopta un observador de Luenberger, denotado como Observador de Sistema Libre de Falla (OLF) con estructura:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(v)\hat{x} + Bu + L(v)(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $L(v)$  corresponde a la ganancia del observador dependiente del parámetro variable. Considere el sistema (10) libre

<sup>1</sup> Criterios adicionales como tiempo de estabilización, máximo sobreimpulso, etc., pueden ser determinados mediante el uso de regiones LMI (Chilali and Gahinet, 1996; Brizuela-Mendoza et al., 2014).

de falla con  $f = [0 \ 0]^T$  en (10), además error de estimación de estados  $e_{el} = x - \hat{x}$ :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{el} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ \dot{e}_{el} &= (A(v) - L(v)C)e_{el} - L(v)Dr \end{aligned} \quad (15)$$

Adicionalmente, considere el lazo cerrado del sistema presentado en la Ec. (13):

$$\dot{x} = (A(v) + B\theta(v))x - B\theta(v)e_{el} \quad (16)$$

Expresando la dinámica del estado en lazo cerrado y el error de estimación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v) + B\theta(v) & -B\theta(v) \\ 0 & A(v) - L(v)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_{el} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ L(v)D \end{bmatrix} r \quad (17)$$

A partir de (17) se manifiesta el principio de separación lineal, donde los valores propios de la matriz:

$$\begin{bmatrix} A(v) + B\theta(v) & -B\theta(v) \\ 0 & A(v) - L(v)C \end{bmatrix} \quad (18)$$

estarán constituidos por la unión de los valores propios generados por  $A(v) + B\theta(v)$  a través de  $\theta(v)$  y  $A(v) - L(v)C$  a través de  $L(v)$ . Consecuentemente, se hace posible el diseño de las ganancias de control  $\theta(v)$  y las ganancias del observador  $L(v)$  independientemente. Si bien el sistema (10) presenta como salida el estado  $x$  afectado por las fallas  $f$  y ruido de medición, la elección de la ley de control (12) se basa en la idea de generar  $u = T_\delta$  libre de ruido a través de  $\hat{x}$ . Para lograr dicho objetivo, en el diseño del observador libre de fallas (14) denotado como OLF en la Figura 1, se debe considerar la minimización del ruido en la estimación del estado, relativo al término  $[0 \ L(v)D]^T r$  en (17).

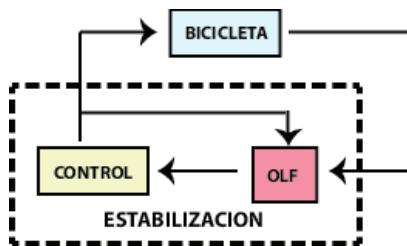


Figura 1: Diagrama a bloques general del sistema de control

#### 4.2. Sistema de acomodación de fallas

El sistema de acomodación de fallas (SAF) tiene como objetivo asegurar la estabilidad de la bicicleta a pesar de la ocurrencia de las fallas en sensores. Evidentemente, dado que se considera una ley de control por retroalimentación de estado estimado, el efecto de los sensores fallidos se manifestará en el lazo cerrado del sistema a través de  $\hat{x}$ . Así, el sistema de acomodación de fallas propuesto se conforma de los siguientes elementos: i) Observador Estimador de Fallas (OEF); ii) Sistema de Aislamiento de fallas (FDI); iii) Sistema de Compensación de fallas (SCF) y iv) Observadores para Sistema Bajo Falla

(OSBF). Las unidades OEF, FDI, SCF y OSBF, además del sistema de estabilización, tienen la conexión presentada Figura 2.

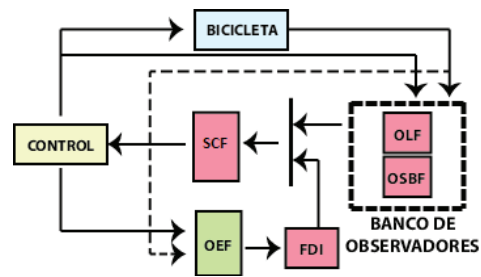


Figura 2: Descripción general del sistema de acomodación de fallas

La función de cada una de las unidades dentro del sistema de acomodación de fallas (SAF) es la siguiente. Las fallas estimadas por la unidad OEF son utilizadas como detección de falla; analizadas dentro del sistema FDI, quien aísla o determina el sensor fallido. Ante una condición de falla, los observadores de estado OSBF generan la estimación del vector de estado considerando únicamente las salidas libres de falla  $y$ , y en conjunto con la información proporcionada por el FDI, denotada como indicador de falla, la unidad SCF selecciona los estados estimados a partir del observador correspondiente. Dicho estado estimado se utiliza para construir la ley de control  $u = T_\delta$ . Finalmente, ante la condición libre falla,  $u$  se construye a partir del vector de estado estimado generado por el observador OLF.

#### 4.3. Diseño de unidad de Aislamiento de Fallas y Sistema de Compensación de Fallas

El sistema de aislamiento de fallas tiene como objetivo aislar o determinar el sensor fallido, a fin de asegurar, junto con la unidad de compensación de fallas, la estabilidad del sistema. Dicho proceso refiere el uso de la estimación de falla generada por el observador OEF, cuyo aislamiento se realiza en base a un conjunto de umbrales. Si el residuo proveniente del estimador de falla para un específico sensor se encuentra por fuera del rango seleccionado llamado umbral, entonces se lleva a cabo la detección y aislamiento de la falla. Una vez realizado lo anterior, la unidad SCF presentada en la Figura 2, se encarga de seleccionar del banco de observadores, con disposición mostrada en la Figura 3, el observador cuyos estimados son generados a partir de las salidas libres de falla. Lo anterior se realiza con el objetivo de construir la ley de control (12). Como resultado, el banco de observadores estima el estado sin considerar las salidas correspondientes a los sensores fallidos. Consecuentemente, una vez que el OEF estima una falla y el FDI emite el indicador correspondiente a dicha falla, la unidad SCF actúa, con la finalidad de generar la ley de control a través del observador requerido. La Tabla 1 presenta el valor del indicador correspondiente al sensor fallido generado por la unidad FDI, además del observador seleccionado por la unidad SCF. Como ejemplo, a partir de la Tabla 1, en el caso de falla del sensor de la salida  $y_3 = y_\phi$  el sistema FDI emite el indicador de falla 1, correspondiente al aislamiento de dicha falla, mientras que la unidad SCF, se encarga de seleccionar el estado estimado

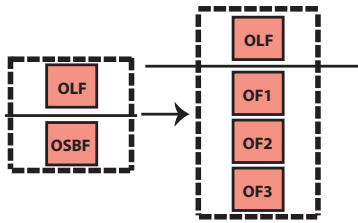


Figura 3: Banco de observadores

Tabla 1: Valor indicador y observador seleccionado

| Sensor fallido             | Indicador de falla | Observador |
|----------------------------|--------------------|------------|
| -                          | 0                  | OLF        |
| $\dot{\phi}$               | 1                  | OF1        |
| $\dot{\delta}$             | 2                  | OF2        |
| $\dot{\phi}, \dot{\delta}$ | 3                  | OF3        |

proveniente del observador que excluye la salida fallida. Finalmente, la Figura 4 presenta el diagrama a bloques del sistema de CTF propuesto.

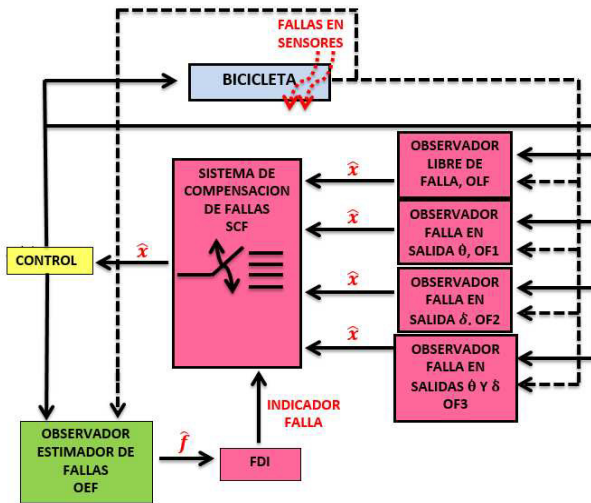


Figura 4: Sistema de acomodación de fallas

## 5. Diseño del Sistema de Acomodación de fallas

Se presenta, en la sección 5.1, el diseño del observador estimador de fallas (OEF). La sección 5.2 aborda el diseño de los observadores involucrados en el sistema de estabilización y sistema de acomodación de fallas. La sección 5.3, por su parte, muestra el análisis de observabilidad para el sistema bajo falla.

### 5.1. Diseño del estimador de fallas OEF

Considere el sistema (10) además de la salida filtrada (Edwards, 2004):

$$\dot{z} = -\tilde{A}z + \tilde{A}Cx + \tilde{A}F_m f + \tilde{A}Dr \quad (19)$$

con  $-\tilde{A}$  una matriz definida negativa.  $F_m$ ,  $f$ ,  $D$  y  $r$  denotan lo presentado en (10). Haciendo uso de las Ecs. (10) y (19), es posible representar el sistema y la salida filtrada dentro de una expresión considerando la extensión del vector de estado  $X = [x \ z]^T$  de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \tilde{A}_0(v)X + B_0u + E_0f + D_0r \\ \tilde{y} &= C_0X \end{aligned} \quad (20)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \begin{bmatrix} A(v) & 0 \\ \tilde{A}C & -\tilde{A} \end{bmatrix} & B_0 &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ E_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{A}F_m \end{bmatrix} & D_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{A}D \end{bmatrix} & C_0 &= \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

La inclusión de la Ec. (19) y, específicamente la matriz auxiliar  $-\tilde{A}$ , refiere el hecho de presentar las fallas en los sensores como fallas en actuadores, haciendo posible sus estimaciones en términos de una señal desconocida involucrada en la ecuación de estado. En consecuencia, el propósito del Observador de Estimación de Fallas consiste en estimar las fallas ocurridas en el sistema para ser utilizadas dentro del sistema FDI. Se propone un observador con estructura (Khedher and Othman, 2010):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= \tilde{A}_0(v)\hat{X} + B_0u + E_0\hat{f} + G(v)(\tilde{y} - \hat{y}) \\ \hat{f} &= H(v)(\tilde{y} - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_0\hat{X} \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $G(v)$  y  $H(v)$  corresponden a las ganancias del observador dependientes del parámetro variable. Considere los errores de estimación de estado y fallas  $e_e = X - \hat{X}$  y  $e_f = f - \hat{f}$ , respectivamente. Evaluando  $\dot{e}_e$  y  $\dot{e}_f$ :

$$\begin{aligned} \dot{e}_e &= \dot{X} - \dot{\hat{X}} \\ \dot{e}_e &= \tilde{A}_0(v)(X - \hat{X}) + E_0(f - \hat{f}) - G(v)C_0(X - \hat{X}) \\ \dot{e}_e &= (\tilde{A}_0(v) - G(v)C_0)e_e + E_0e_f + D_0r \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_f &= \dot{f} - \dot{\hat{f}} \\ \dot{e}_f &= \dot{f} - H(v)C_0e_e \end{aligned} \quad (24)$$

agrupando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_e \\ \dot{e}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0(v) - G(v)C_0 & E_0 \\ -H(v)C_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_e \\ e_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{f} \end{bmatrix} \quad (25)$$

y proponiendo los vectores  $\Psi = [e_e \ e_f]^T$  y  $\psi = [r \ \dot{f}]^T$ , la dinámica (25) puede ser expresada como:

$$\dot{\Psi} = \xi(v)\Psi + \tau\psi \quad (26)$$

$$\xi(v) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0(v) - G(v)C_0 & E_0 \\ -H(v)C_0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (27)$$

Con el objetivo de asegurar la convergencia de los errores de estimación, se considera una función de Lyapunov dependiente

del parámetro variable  $V(\Psi, v) = \Psi^T P(v) \Psi$  (Rugh and Shamma, 2000). Así, el problema de la estimación de estado y estimación de falla se reduce al cálculo de las ganancias del observador dependientes del parámetro variable  $G(v)$  y  $H(v)$  tal que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi &= 0 \quad \text{si } \psi = 0 \\ \|\Psi\|_{\beta\Psi} &\leq \eta(v)^2 \|\psi\|_{\beta\psi} \quad \text{si } \psi \neq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

donde  $\eta(v)$  corresponde al nivel de atenuación. La convergencia de los errores de estimación dada la expresión (28) está garantizada si y solo si:

$$\dot{V}(\Psi, v) + \Psi^T \Gamma_{\beta\Psi} \Psi - \eta(v)^2 \psi^T \Gamma_{\beta\psi} \psi < 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Psi^T P(v) (\xi(v) \Psi + \tau \psi) + (\xi(v) \Psi + \tau \psi)^T P(v) \Psi \\ + \Psi^T \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v} \Psi + \Psi^T \Gamma_{\beta\Psi} \Psi - \eta(v)^2 \psi^T \Gamma_{\beta\psi} \psi < 0 \end{aligned} \quad (30)$$

considerando  $\|\Psi\|_{\beta\Psi} = \Psi^T \Gamma_{\beta\Psi} \Psi$ ,  $\|\psi\|_{\beta\psi} = \psi^T \Gamma_{\beta\psi} \psi$  además de  $\Gamma_{\beta\Psi}$  y  $\Gamma_{\beta\psi}$  matrices definidas positivas. La desigualdad (30) en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \psi \end{bmatrix}^T [\Delta(v)] \begin{bmatrix} \Psi \\ \psi \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

$$\Delta(v) = \begin{bmatrix} P(v)\xi(v) + \xi(v)^T P(v) + \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v} + \Gamma_{\beta\Psi} & P(v)\tau \\ \tau^T P(v) & -\eta(v)^2 \Gamma_{\beta\psi} \end{bmatrix} \quad (32)$$

La convergencia de los errores de estimación será conseguida si  $\Delta(v) < 0$  en (31) con  $P(v) = P(v)^T$ . Considere la representación para  $\xi(v)$  en la Ec. (27) como:

$$\xi(v) = A_s(v) - D_s(v)C_0 \quad (33)$$

$$A_s(v) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0(v) & E_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_s(v) = \begin{bmatrix} G(v) \\ H(v) \end{bmatrix} \quad (34)$$

y su sustitución en (32). Note que se genera la condición de bilinealidad en la desigualdad (34), dado que en el producto  $P(v)D_s(v)$ , ambos términos son variables solución. A fin de eliminar dicha restricción, haciendo  $\tilde{R}(v) = P(v)D_s(v)$  y  $\eta(v)^2 = M(v)$ , la Ec. (32) adopta la forma:

$$\begin{bmatrix} \kappa(v) & P(v)\tau \\ \tau^T P(v) & -M(v)\Gamma_{\beta\psi} \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

considerando  $\kappa(v) = P(v)A_s(v) - \tilde{R}(v)C_0 + A_s(v)^T P(v) - C_0^T \tilde{R}(v)^T + \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v} + \Gamma_{\beta\Psi}$ . Así, la solución de (35) con  $P(v) = P(v)^T > 0$  genera la convergencia asintótica de los errores de estimación  $e_e$  y  $e_f$ , concluyendo con el diseño del observador OEF. Las ganancias finales serán calculadas  $D_s(v) = P(v)^{-1} \tilde{R}(v)$  y  $\eta(v) = \sqrt{M(v)}$ .

## 5.2. Diseño de observadores para estabilización y acomodación de fallas

Se presenta el diseño de los observadores involucrados en el esquema propuesto mostrado en la Figura 4. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(v)x + Bu \\ y &= Cx + Dr \end{aligned} \quad (36)$$

Definiendo el error de estimación de estados  $e_{el} = x - \hat{x}$  a partir de (14) considerando el sistema libre de fallas (36):

$$\begin{aligned} \dot{e}_{el} &= x - \hat{x} \\ \dot{e}_{el} &= A(v)x + Bu - A(v)\hat{x} + Bu + L(v)(y - \hat{y}) \\ \dot{e}_{el} &= A_e(v)e_{el} - B_e(v)r \end{aligned} \quad (37)$$

con  $A_e(v) = A(v) - L(v)C$  y  $B_e(v) = L(v)D$ . Con el objetivo de asegurar la convergencia asintótica del error de estimación  $e_{el}$ , se propone una función de Lyapunov  $V(e_{el}, v) = e_{el}^T P(v) e_{el}$ . Partiendo de la forma general para el error de estimación:

$$\dot{e}_{el} = A_e(v)e_{el} - B_e(v)r \quad (38)$$

y haciendo referencia a la restricción (28), se introduce la condición:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{el} = 0 \quad \text{si } r = 0 \quad (39)$$

$$\|e_{el}\|_{\beta e_{el}} \leq \eta_o(v)^2 \|r\|_{\beta D} \quad \text{si } r \neq 0$$

para el error de estimación  $e_{el}$ . Aplicando el procedimiento presentado en las Ecs. (29)-(32):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_{el}, v) + e_{el}^T \Gamma_{\beta e_{el}} e_{el} - \eta_o(v)^2 e_{el}^T \Gamma_{\beta D} e_{el} < 0 \\ e_{el}^T P(v) (A_e(v)e_{el} - B_e(v)r) + (A_e(v)e_{el} - B_e(v)r)^T P(v) e_{el} \\ e_{el}^T \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v} e_{el} + e_{el}^T \Gamma_{\beta e_{el}} e_{el} - \eta_o^2 e_{el}^T \Gamma_{\beta D} e_{el} < 0 \end{aligned} \quad (40)$$

con representación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} e_{el} \\ r \end{bmatrix}^T [\Delta_o(v)] \begin{bmatrix} e_{el} \\ r \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

$$\Delta_o(v) = \begin{bmatrix} P(v)A_e(v) + A_e(v)^T P(v) + \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v} + \Gamma_{\beta e_{el}} & P(v)B_e(v) \\ B_e(v)^T P(v) & -\eta_o^2 \Gamma_{\beta D} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$\Delta_o(v) < 0$  con  $P(v) = P(v)^T > 0$  asegura la convergencia asintótica del error de estimación  $e_{el}$  para el observador OLF. Como resultado, la convergencia del observador OLF se garantiza si y solo si:

$$\begin{bmatrix} \kappa_o(v) & -L^*(v)\tilde{D} \\ -\tilde{D}^T L^*(v)^T & -M_o(v)\Gamma_{\beta D} \end{bmatrix} < 0 \quad (43)$$

con  $P(v) = P(v)^T > 0$  donde  $L^*(v) = P(v)L(v)$ ,  $M_o(v) = \eta_o(v)^2$ ,  $\kappa_o(v) = P(v)A(v) - L^*(v)\tilde{C} + A(v)^T P(v) - \tilde{C}^T L^*(v)^T + \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v} + \Gamma_{\beta e_{el}}$ . Las ganancias del observador serán  $L(v) = P(v)^{-1} L^*(v)$  y  $\eta_o(v) = \sqrt{M_o(v)}$ . Para el diseño de los observadores bajo la

condición de falla en el sistema, se considera la matriz  $D$  de (11) eliminando la fila correspondiente al sensor fallido. A continuación, se presentan las formas que adoptan las matrices  $C$  y  $D$  para cada una de las condiciones de falla.

- Falla en sensor  $\phi$ , observador OF1:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.12 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

- Falla en sensor  $\delta$ , observador OF2:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.12 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

- Fallas simultáneas  $\phi$  y  $\delta$ , observador OF3:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

### 5.3. Observabilidad de sistema reconfigurado

El sistema de acomodación de fallas se compone de tres observadores encargados de la reconstrucción del estado. En consecuencia, resulta necesario asegurar la condición de observabilidad del sistema ante cada una de las condiciones de falla. Considere el caso de falla en el sensor de  $\phi$ . A partir de (4) y  $\tilde{C}$  de (44), el sistema será observable si:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4.8570 & 10.81 - 1.125v^2 \\ 13.67 & 0.225 - 1.319v^2 \\ 4.8570 & 10.81 - 1.319v^2 \\ 37.9006v & -2.089v^3 - 24.996v \\ -4.9229v & 0.8373v^3 - 6.004v \\ 37.9006v & -2.0896v^3 - 24.9996v \\ e_{12-1} & e_{12-2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3.624v & -2.388v \\ -0.164v & -0.552v \\ 3.621v & -2.388v \\ 4.857 - 9.2408v^2 & 10.81 + 2.5788v^2 \\ 13.67 - 1.9719v^2 & 0.0897v^2 + 0.225 \\ 4.857 - 9.2408v^2 & 10.81 + 2.5788v^2 \\ 10.8532v^3 + 76.247v & -3.1467v^3 - 53.4949v \end{bmatrix} = n \forall v \in \Phi \quad (47)$$

donde  $e_{12-1} = -113.7966v^2 + 118.8994$  y  $e_{12-2} = 9.2875v^4 + 7.2295v^2 + 117.9489$ . Note que (47) es una matriz rectangular

dependiente de la velocidad traslacional  $v$ . A partir de las propiedades matriciales, el rango de una matriz coincide con el de su traspuesta. Consecuentemente, a fin de determinar los valores de velocidad traslacional que generan la pérdida de observabilidad, el procedimiento comienza a partir de la traspuesta de (47) aplicando el método del orlado de una matriz (Raya et al., 2007). Dicho método consiste en, partiendo de un menor  $\in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  no nulo, incorporar cada una de las filas y columnas restantes para formar submatrices  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ahora bien, debido a que la matriz de observabilidad es dependiente de parámetros, cada una de dichas submatrices requiere el cálculo de su determinante, igualación a cero y respectiva solución. Así, en el caso de la coincidencia de alguna raíz en todas las submatrices, para ese valor en particular, ocurrirá la pérdida de rango en la matriz y consecuentemente la pérdida de observabilidad (47) en el modelo. Partiendo de las columnas 1, 2 y 4 el primer menor no nulo es:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \quad (48)$$

incorporando la columna 3:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = -1 \quad (49)$$

La inclusión de la columna 5 genera la matriz identidad, cuyo determinante es 1. Considerando la columna 6:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4.8570 \\ 0 & 1 & 0 & 10.81 - 1.125v^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3.621v \\ 0 & 0 & 0 & -2.388v \end{bmatrix} \right) = -2.388v \quad (50)$$

y la columna 7:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13.67 \\ 0 & 1 & 0 & 0.225 - 1.319v^2 \\ 0 & 0 & 1 & -0.164v \\ 0 & 0 & 0 & -0.552v \end{bmatrix} \right) = -0.552v \quad (51)$$

La incorporación de los elementos restantes generarán submatrices cuyo determinante corresponde al elemento ubicado en la fila 4 y columna 4. Considere la Tabla 2:

| Columna orlada | Determinante                     | Raíces             |
|----------------|----------------------------------|--------------------|
| 3              | 1                                | -                  |
| 5              | -1                               | -                  |
| 6              | -2.388v                          | v = 0              |
| 7              | -0.552v                          | v = 0              |
| 8              | -2.388v                          | v = 0              |
| 9              | 2.5788v <sup>2</sup> + 10.81     | v = 0 ± 2.0474i    |
| 10             | 0.0897v <sup>2</sup> + 0.225     | v = 0 ± 1.5838i    |
| 11             | 2.5788v <sup>2</sup> + 10.81     | v = 0 ± 2.0474i    |
| 12             | -3.1467v <sup>3</sup> - 53.4949v | v = 0, 0 ± 4.1231i |

se observa que ninguna raíz coincide en cada una de las soluciones de los determinantes, de forma tal que se concluye que el sistema bajo falla en el sensor  $\phi$  será observable  $\forall v \in \Phi$ . La condición de observabilidad para el caso de las fallas restantes en el sistema, i.e. sensor  $\delta$  y fallas simultáneas en sensores  $\phi$  y  $\delta$ , realizando el procedimiento presentado en las Ecs.(47)-(51), se garantiza mediante software.

### 6. Diseño de la Ley de control

Para la implementación de la ley de control:

$$u = T_{\delta} = \theta(v)\hat{x} \quad (52)$$

es necesario calcular las ganancias de control  $\theta(v)$  de tal manera que el sistema en lazo cerrado:

$$\dot{x} = (A(v) + B\theta(v))x - B\theta(v)e \quad (53)$$

tenga en el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable. Bajo la consideración de que la solución de (43) garantiza la convergencia asintótica del error de estimación de estado  $e_{el}$ , resulta posible el diseño de  $\theta(v)$  considerando únicamente:

$$\dot{x} = (A(v) + B\theta(v))x \quad (54)$$

Se propone la función de Lyapunov  $V(x, v) = x^T P(v)x$  y se evalúa su derivada:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, v) < 0 \\ x^T [P(v)(A(v) + B\theta(v)) + (A(v) + B\theta(v))^T P(v) + \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v}] x < 0 \\ x^T \tilde{A}_c(v)x < 0 \end{aligned} \quad (55)$$

con  $\tilde{A}_c(v) = P(v)(A(v) + B\theta(v)) + (A(v) + B\theta(v))^T P(v) + \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v}$  y  $P(v) = P(v)^T > 0$ . Como resultado, la convergencia asintótica del estado se garantiza si y sólo si:

$$P(v)(A(v) + B\theta(v)) + (A(v) + B\theta(v))^T P(v) + \dot{v} \frac{\partial P(v)}{\partial v} < 0 \quad (56)$$

se cumple con  $P(v) = P(v)^T$ . Note la condición bilineal  $P(v)B\theta(v)$ , con el objetivo de eliminar dicha restricción, pre-multiplicando y post-multiplicando  $P(v)^{-1}$  en (56) y haciendo los cambios de variables  $\tilde{x}(v) = P(v)^{-1}x$  y  $Y(v) = \theta(v)\tilde{x}(v)$ , se obtiene:

$$A(v)\tilde{x}(v) + BY(v) + \tilde{x}(v)^T A(v)^T + Y(v)^T B^T - \dot{v} \frac{\partial \tilde{x}(v)}{\partial v} < 0 \quad (57)$$

Basta con asegurar la condición (57) con  $\tilde{x} = \tilde{x}^T > 0$  para conseguir la convergencia asintótica del estado en lazo cerrado. Las ganancias del control son calculadas haciendo  $\theta(v) = Y(v)\tilde{x}(v)^{-1}$ . Resulta importante mencionar el significado de  $\dot{v}$  en la Ec. (57). Una característica del análisis de estabilidad para sistemas LPV, consiste en que se toma en cuenta la razón de cambio del parámetro variable. Como resultado, el controlador será capaz de hacer frente a variaciones con dicha característica lo que corresponde, en el contexto la planteado, a la aceleración del vehículo.

### 7. Cálculo de las ganancias de control y observadores

Las soluciones presentadas en las Ecs. (35), (43) y (57) corresponden LMIs dependientes del parámetro variable  $v$ . Para solucionar dichos problemas existen métodos llamados relajación de matrices (Apkarian and Tuan, 2000), suma de los cuadrados (Prajna and Wu, 2005) y discretización (Rugh and Shamma, 2000). Los resultados presentados utilizan el método de discretización, el cual consiste en la discretización del rango permitido para el parámetro variable  $\Phi$  en  $N$  intervalos con ancho de muestra  $h$ , considerando una aproximación en diferencias para la derivada parcial. Una vez que la solución a cada valor discreto ha sido calculada, se realizan sus interpolaciones para obtener la solución continua. Así, el conjunto de LMIs a resolver se obtiene considerando  $v = jh$  con  $j = 1, \dots, N$ .

- Observador OEF:

$$\begin{bmatrix} \kappa(jh) & P(jh)\tau \\ \tau^T P(jh) & -M(jh)\Gamma_{\beta\psi} \end{bmatrix} < 0 \quad (58)$$

considerando  $\kappa(jh) = P(jh)A_s(jh) - \tilde{R}(jh)C_0 + A_s(jh)^T P(jh) - C_0^T \tilde{R}(jh)^T \pm \dot{v} \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h}$  y  $P(jh) = P(jh)^T > 0$ . Las ganancias finales serán calculadas  $D_s(jh) = P(jh)^{-1} \tilde{R}(jh)$  y  $\eta(jh) = \sqrt{M(jh)}$ .

- Observadores OLF, OF1, OF2 y OF3:

$$\begin{bmatrix} \kappa_o(jh) & -L^*(jh)\tilde{D} \\ -\tilde{D}^T L^*(jh)^T & -M_o(jh)\Gamma_{\beta D} \end{bmatrix} < 0 \quad (59)$$

con  $P(jh) = P(jh)^T > 0$  y  $\kappa_o(jh) = P(jh)A(jh) - L^*(jh)\tilde{C} + A(jh)^T P(jh) - \tilde{C}^T L^*(jh)^T \pm \dot{v} \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h} + \Gamma_{\beta e_{el}}$ . Las ganancias del observador serán calculadas  $L(jh) = P(jh)^{-1} L^*(jh)$  y  $\eta_o(jh) = \sqrt{M_o(jh)}$ .

- Controlador:

$$\begin{aligned} A(jh)\tilde{x}(jh) + BY(jh) + \tilde{x}(jh)^T A(jh)^T + Y(jh)^T B^T \\ \pm \dot{v} \frac{Y(jh+h) - Y(jh)}{h} < 0 \\ \tilde{x}(jh) = \tilde{x}(jh)^T > 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Con ganancias finales obtenidas mediante  $\theta(jh) = Y(jh)\tilde{x}(jh)^{-1}$ . Adicionalmente a la solución presentada en las Ecs. (58)-(59), se anexa una región LMI (Chilali and Gahinet, 1996) la cual permite ubicar los valores propios a la izquierda del valor  $-\zeta$  en el plano complejo:

- Región LMI para OEF

$$\begin{bmatrix} \tilde{\kappa}(jh) & P(jh)\tau \\ \tau^T P(jh) & -M(jh)\Gamma_{\beta\psi} + 2P(jh)\zeta \end{bmatrix} < 0 \quad (61)$$

con  $\tilde{\kappa}(jh) = P(jh)A_s(jh) - \tilde{R}(jh)C_0 + A_s(jh)^T P(jh) - C_0^T \tilde{R}(jh)^T + 2P(jh)\zeta$ .

- Región LMI para OLF, OF1, OF2 y OF3

$$\begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_o(jh) & -L^*(jh)\tilde{D} \\ -\tilde{D}^T L^*(jh)^T & -M_o(jh)\Gamma_{\beta D} + 2P(jh)\zeta \end{bmatrix} < 0 \quad (62)$$



considerando  $\tilde{\kappa}_o(jh) = P(jh)A(jh) - L^*(jh)\tilde{C} + A(jh)^T P(jh) - \tilde{C}^T L^*(jh)^T \Gamma_{\beta e_{el}} + 2P(jh)\zeta$ .

Las ganancias resultantes  $jh$  para el controlador y los observadores OEF, OLF OF1, OF2 y OF3 se interpolan a funciones de tercer orden. Tomando los parámetros de discretización  $N = 62$ ,  $h = 0.02$ ,  $\dot{\nu} = 0.05$  para las Ecs. (58)-(62), las Figuras 5-8 muestran los valores propios para los errores de estimación de falla y estado, además de los correspondientes al lazo cerrado del sistema (54). Las matrices involucradas en las soluciones (58)-(62), por su parte, se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3: Parámetros para la solución de observadores

|                         | OEF    | OLF  | OF1  | OF2  | OF3   |
|-------------------------|--------|------|------|------|-------|
| $\Gamma_{\beta\psi}$    | 0.001I | -    | -    | -    | -     |
| $\Gamma_{\beta\psi}$    | 40I    | -    | -    | -    | -     |
| A                       | 50I    | -    | -    | -    | -     |
| $\Gamma_{\beta e_{el}}$ | -      | 0.1I | 0.1I | 0.1I | 0.01I |
| $\Gamma_{\beta D}$      | -      | 50I  | 80I  | 100I | 75I   |
| $\zeta$                 | 4.5    | 4    | 4    | 2.5  | 1.5   |

Haciendo uso de MATLAB y YALMIP (Lofberg, 2009), las ganancias interpoladas  $D_s(\nu)$  para el estimador de fallas (OEF, referir Apéndice A) generan los valores propios para la matriz  $\xi(\nu)$  considerando  $\psi = 0$  en (27) presentados en la Figura 5. Los asteriscos a la derecha de la Figura 5a corresponden a la región LMI  $\zeta$  incorporada en el diseño. Como resultado, se comprueba la ubicación de los valores propios dentro de la región LMI considerada. Note que el valor asignado para  $\zeta$  permite modificar la respuesta del observador, a través de la ubicación de los valores propios de la matriz correspondiente. La Figura 5b, por su parte, presenta la variación del nivel de atenuación  $\eta(\nu)$  en función de la velocidad traslacional  $\forall \nu \in \Phi$ .

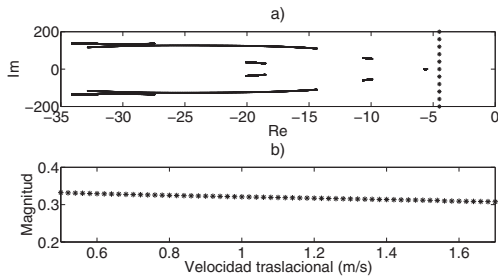


Figura 5: OEF: a) Valores propios matriz  $\xi(\nu)$ ; b) Nivel de atenuación

La Figura 6, muestra los resultados obtenidos para los observadores libres de falla (OLF) y falla en el sensor de salida  $y_\delta$  (OF1). En las Figuras 6a y 6b se observa la parte real de los valores propios para  $A_e(\nu)$  en función de la velocidad traslacional, concluyendo con la convergencia asintótica de los errores de estimación de estado. De igual forma que en el caso OEF, los asteriscos en la parte superior de las Figuras representan la región LMI  $\zeta$  considerada. Las Figuras 6c y 6d, por su parte, muestran la variación del nivel de atenuación  $\eta_o(jh)$  para cada uno de los observadores. Los resultados correspondientes a los observado-

res de estado para el sistema bajo falla en el sensor de salida  $y_\delta$  (OF2) y observador para sistema con fallas simultáneas en sensores  $y_\phi$  y  $y_\delta$  (OF3), por su parte, se muestran en la Figura 7. La interpretación de dichos resultados se realiza de forma similar que en la Figura 6. La Figura 8, por su parte, muestra los valores propios del sistema en lazo cerrado utilizando ganancias de control  $\theta(\nu)$  interpoladas a polinomios de orden 3. A partir de las Figuras 5-7 se concluye con la estabilización del sistema en los casos libre de falla y bajo falla.

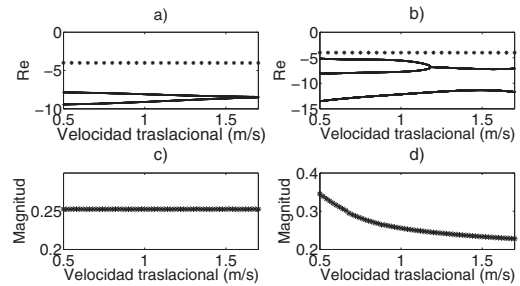


Figura 6: a) Parte real de los valores propios de matriz  $A_e(\nu)$  OLF; b) Parte real de los valores propios de  $A_e(\nu)$  OF1; c) Nivel de atenuación OLF; d) Nivel de atenuación OF1

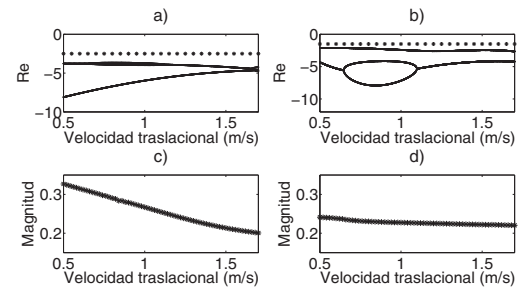


Figura 7: a) Parte real de los valores propios de matriz  $A_e(\nu)$  OF2; b) Parte real de valores propios de  $A_e(\nu)$  OF3; c) Nivel de atenuación OF2; d) Nivel de atenuación OF3

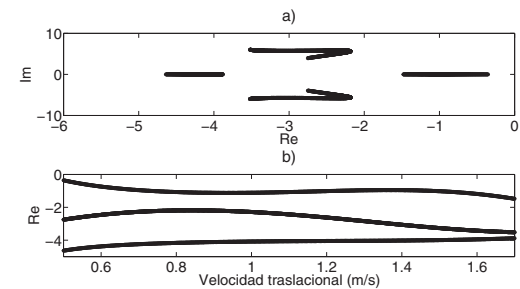


Figura 8: Valores propios de sistema en lazo cerrado

### 8. Resultados en simulación

Se presentan los resultados del CTF considerando la Ec. (10), divididos en cuatro secciones: i) Caso sin falla; ii) Falla

en sensor  $\phi$ ; iii) Falla en sensor  $\delta$  y iv) Fallas en sensores  $\phi$  y  $\delta$ . La matriz  $r$  en la Ec. (10), se compone de ruidos Gaussianos con media 0, además de varianzas  $1 \times 10^{-3}$  y  $0.5 \times 10^{-3}$ . Note que los ruidos considerados en el sistema generan variaciones en las salidas afectadas equivalentes a  $\pm 7.2^\circ$  y  $\pm 8.1^\circ$ , lo cual se corresponde, dado que el modelo del sistema abordado es válido para pequeñas desviaciones en las variables  $\phi$  y  $\delta$  (Schwab et al., 2005), como un ruido de medición considerable.

8.1. Simulación de caso sin falla

Con el objetivo de evaluar la operación del observador para estabilización libre de falla OLF, la Figura 9a muestra la ley de control generada utilizando las salidas estimadas  $\hat{y}$  a partir de (14). En contraste con la ley de control calculada con la salida  $y$ ,  $u = \theta(v)\hat{x}$  presenta una notable eliminación del ruido aplicado en el sistema original, las salidas del sistema, por razones obvias, convergen al equilibrio. La Figura 9c, por su parte, corresponde a la variación de la velocidad traslacional considerada.

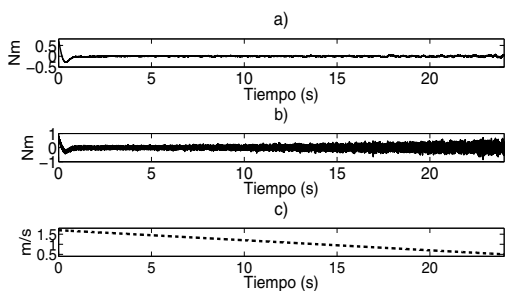


Figura 9: Señal de control: a) Señal de control utilizando  $\hat{y}$ ; b) Señal de control utilizando  $y$ ; c) Velocidad traslacional

8.2. Simulación de falla en el sensor de  $\phi$

Se considera una falla de tipo descalibración o BIAS en el sensor  $\phi$  del 15%, representando  $f = [0.15 \ 0]^T$  para  $t \geq 4$  y  $f = [0 \ 0]^T$  para  $t < 4$  en (10). Las Figuras 10a, 10b, 10c y 10d muestran las salidas  $y_\phi$ ,  $y_\delta$ ,  $y_{\dot{\phi}}$  y  $y_{\dot{\delta}}$ , respectivamente.

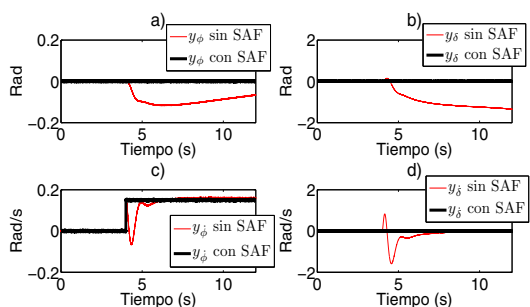


Figura 10: Salidas de sistema bajo falla en sensor  $\phi$

La ley de control presentada en la Figura 11a, construida a través de los estimados provenientes de la unidad OSBF, se-

leccionados a partir del indicador de falla correspondiente mostrada en la Figura 11d, mantiene la estabilidad del sistema. En la Figura 11b, por su parte, se visualiza la falla aplicada y la estimación generada por el observador OEF.

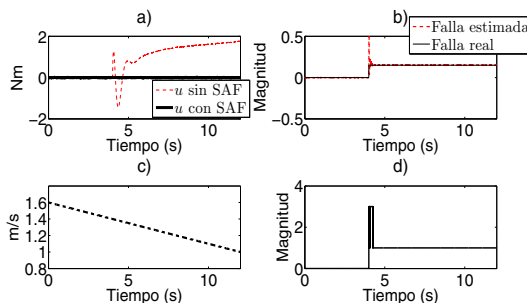


Figura 11: Sistema bajo falla en sensor  $\phi$ : a) Ley de control; b) Falla y su estimación; c) Velocidad traslacional; d) Indicador generado por FDI

8.3. Simulación de falla en el sensor de  $\delta$

Para la falla en el sensor  $\delta$ , se aplica una pérdida de efectividad del 20% a partir de  $t = 7$  s., es decir,  $f$  adopta la forma  $f = [0 \ -0.2]^T \forall t \geq 7$  y  $f = [0 \ 0]^T \forall t < 7$  en (10). Así, las Figuras 12-13 presentan los resultados correspondientes, cuya interpretación se realiza de forma similar que en el caso de falla en el sensor  $\phi$ .

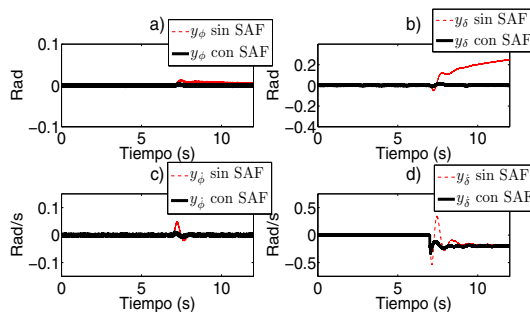


Figura 12: Salidas de sistema bajo falla en sensor  $\delta$

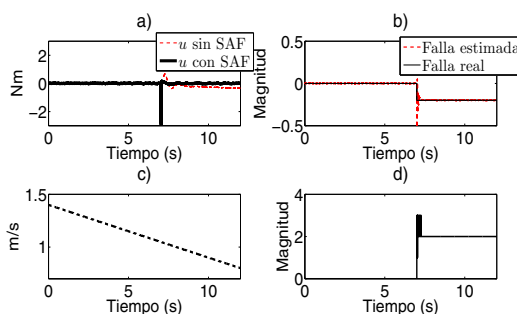


Figura 13: Sistema bajo falla en sensor  $\delta$ : a) Ley de control; b) Falla y su estimación; c) Velocidad traslacional; d) Indicador generado por FDI

Note que se aplica una variación distinta en la velocidad traslacional con respecto a la prueba anterior, generando un mayor esfuerzo en la ley de control en el momento de la ocurrencia de la falla.

#### 8.4. Simulación de fallas en los sensores $\delta$ y $\phi$

La ocurrencia de fallas simultáneas en los sensores  $\delta$  y  $\phi$  se considera en  $t \geq 9$  s. Con respecto a las pruebas realizadas con anterioridad, se aplican fallas incrementales en ambos sensores. A partir de la Figura 14, el objetivo de control se mantiene a pesar de la presencia de dichas fallas. La ley de control, las fallas y sus estimaciones, además de la variación de la velocidad traslacional, se visualizan en Figuras 15a, 15b y 15c, respectivamente. Note que la falla en el sensor  $\phi$  se aplica de manera incremental desde  $t = 6$  s. hasta  $t = 9$  s., finalizando en una magnitud de 0.24. La falla en  $\delta$ , por su parte, se incrementa desde  $t = 8$  s. hasta  $t = 13$  s., con magnitud final de  $-0.25$ .

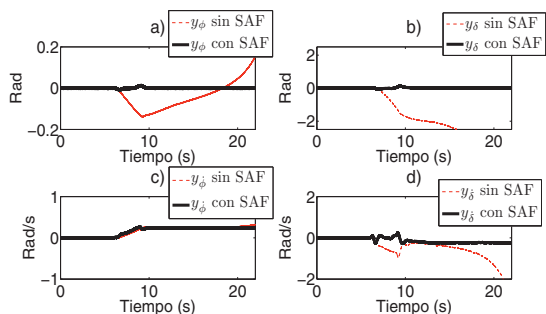


Figura 14: Salidas de sistema bajo falla en sensor  $\phi$  y  $\delta$

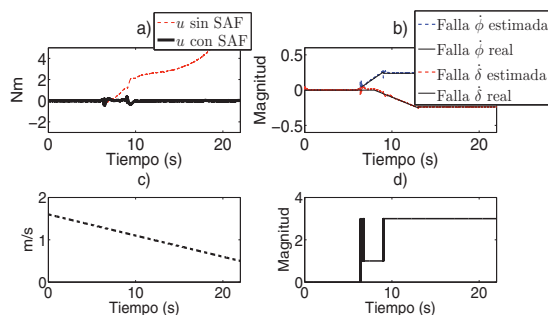


Figura 15: Sistema bajo falla en sensores  $\phi$  y  $\delta$ : a) Ley de control; b) Falla y su estimación; c) Velocidad traslacional; d) Indicador generado por FDI

## 9. Conclusión

A partir de las Figuras 9-15, se concluye con la correcta operación del CTF ante fallas en sensores abruptas e incrementales. Se hace mención de la importancia de la estimación de las fallas así como los estados libres de ruido, aspecto considerado como la principal aportación de este trabajo. La tolerancia a fallas del sistema se consigue haciendo uso de un conjunto de observadores diseñados para hacer frente a cada condición de falla del sistema, asegurando la estabilidad del sistema.

## English Summary

### Active Fault Tolerant Control: Sensor fault estimation and accommodation applied to a riderless bicycle LPV model

#### Abstract

This paper presents an Active Fault Tolerant Control design applied to a riderless bicycle LPV model affected by additive sensor fault and measurement noise. Within the Active Fault Tolerant Control, the detection and diagnostic system is based on the estimations computed by a fault observer, used to determine a fault occurrence. The proposed algorithms, considered as the main contributions in this work, achieves noise-free estimations for the faults and state, in order to compute the fault indicator and control law, respectively. The fault tolerance of the system is guaranteed through the fault accommodation based on a set of observers. The results have been corroborated using a riderless bicycle LPV model, with a controller that aims at keeping it stood-up along its translation motion.

#### Keywords:

Fault diagnosis, Fault Tolerant Control, observers, LPV systems.

## Agradecimientos

Al CONACYT, IPICYT en México. A ABB Corporate Research Center en Baden, Suiza.

## Referencias

- Alwi, H., Edwards, C., Marcos, A., 2012. Fault reconstruction using lpv sliding mode observer for a class of lpv systems. *Journal of the Franklin Institute* 349,2, 510–530.
- Apkarian, P., Tuan, H. D., 2000. Parameterized lmis in control theory. *SIAM Journal Control Optimization* 38,4, 1241–1264.
- Briat, C., 2008. *Commande et observation robustes des systèmes lpv retardés*. Ph.D. thesis, Grenoble INP.
- Briat, C., 2015. *Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems Analysis, Observation, Filtering, Control*. SPRINGER.
- Brizuela-Mendoza, J. A., Astorga-Zaragoza, C. M., Zavala-Río, A., Octubre 2014. Regiones lmi para el diseño de controladores de sistemas lpv polinomiales. *Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA*, 1236–1241.
- Cerone, V., Andreo, D., Larsson, M., Legruto, D., 2010. Stabilization of a riderless bicycle: A linear parameter varying approach. *IEEE Control Systems Magazine* 30, 23–32.
- Chen, J., Patton, R., 1999. *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers.
- Chilali, M., Gahinet, P., 1996.  $h_\infty$  design with pole placement constraints: An lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41,3, 358–367.
- de Oca, S. M., Puig, V., Witczak, M., Quevedo, J., 2008. Fault-tolerant control of a two-degree of freedom helicopter using lpv techniques. *Mediterranean Conference on Control and Automation*.
- Edwards, C., 2004. A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction. *IEEE Conference on Decision and Control* 5, 5279 – 5284.
- Gahinet, P., Apkarian, P., Chilali, M., 1996. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41,3, 436 – 442.
- Gilbert, W., Henrion, D., Bernussou, J., Boyer, D., 2010. Polynomial lpv synthesis applied to turbofan engines. *Control Engineering Practice* 18,9, 1077–1083.

Jiang, J., Yu, X., 2012. Fault-tolerant control systems: A comparative study between active and passive approaches. *Annual Reviews in Control* 36,1, 60–72.

Khedher, A., Othman, K. B., 2010. Proportional integral observer design for state and faults estimation: Application to the three tanks system. *International Review of Automatic Control (I.R.E.A.CO)* 3,2, 115–124.

Lofberg, J., 2009. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*.

Patton, R. J., Klinkhieo, S., 2010. Lpv fault estimation and ftc of a two-link manipulator. *American Control Conference* 23, 4647–4652.

Prajna, S., Wu, F., 2005. Sos-based solution approach to polynomial lpv system analysis and synthesis problems. *International Journal of Control* 78,8, 600–611.

Raya, A., Ríder, A., Rubio, R., 2007. *Algebra y Geometría Lineal*. Reverté.

Rodrigues, M., Sahnoun, M., Theilliol, D., Ponsart, J.-C., 2013. Sensor fault detection and isolation filter for polytopic lpv systems: A winding machine application. *Journal of Process Control* 23,6, 805–816.

Rotondo, D., Nejari, F., Torren, A., Puig, V., 2013. Fault tolerant control design for polytopic uncertain lpv systems: Application to a quadrotor. *Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*, 643 – 648.

Rugh, W. J., Shamma, J. S., 2000. Research on gain scheduling. *Automatica* 36, 1401–1425.

Schwab, A. L., Meijaard, J. P., Papadopoulos, J. M., 2005. Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrolled bicycle. *Journal of Mechanical Science and Technology* 19,1, 292–304.

Sloth, C., Esbensen, T., Stoustrup, J., 2011. Robust and fault-tolerant linear parameter-varying control of wind turbines. *Mechatronics* 21,4, 645–659.

Verde, C., Gentil, S., Morales-Menéndez, R., 2013. Monitoreo y diagnóstico automático de fallas en sistemas dinámicos. *Trillas*.

Zhang, Y., Jiang, J., 2000. Bibliographical review on reconfigurable fault tolerant control. *Annual Reviews in Control* 32,2, 229–252.

$$ZF2OEF = \begin{bmatrix} 392.54 & 294.38 & -363.67 & -199.42 \\ 489.69 & 702.13 & -574.26 & -504.84 \\ 1690.6 & 616.58 & -1232.2 & -336.32 \\ 1875.9 & 2820.4 & -2115.6 & -2222.1 \\ 248.01 & 236.9 & -239.53 & -193.5 \\ 294.57 & 271.19 & -258.61 & -242.94 \\ 291.78 & 241.31 & -256.83 & -189.93 \\ 171.7 & 145.12 & -128.97 & -168.51 \\ -1918.4 & -903.68 & 1393.4 & 523.02 \\ -1956.9 & -3049.4 & 2232.7 & 2280.6 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

$$ZF1OEF = \begin{bmatrix} -385.49 & -226.57 & 321.62 & 144.47 \\ -415.62 & -689.6 & 492.5 & 539.38 \\ -1872.5 & -323.03 & 1134.1 & -50.567 \\ -1575.9 & -2813.6 & 1667.4 & 2471.9 \\ -235.15 & -218.17 & 212.58 & 182.93 \\ -263.32 & -263.77 & 227.18 & 231.56 \\ -271.02 & -227.74 & 231.08 & 175.14 \\ -166.4 & -128.45 & 111.36 & 157.19 \\ 2061.1 & 564.69 & -1260.9 & -144.21 \\ 1606.2 & 3084.5 & -1801.6 & -2528.6 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

**Apéndice A. Ganancias observador OEF**

$$D_s(v) = ZF3OEFv^3 + ZF2OEFv^2 + ZF1OEFv + ZF0OEF \tag{A.1}$$

$$ZF3OEF = \begin{bmatrix} -120.64 & -99.918 & 114.44 & 66.35 \\ -160.09 & -215.82 & 181.57 & 147.89 \\ -498.98 & -245.98 & 395.78 & 147.38 \\ -631.31 & -874.59 & 702.64 & 634.5 \\ -76.852 & -74.633 & 74.561 & 59.788 \\ -94.405 & -84.844 & 81.851 & 75.483 \\ -92.375 & -77.335 & 81.666 & 60.543 \\ -53.981 & -47.836 & 42.32 & 52.134 \\ 566.36 & 331.15 & -439.51 & -198.12 \\ 658.6 & 935.61 & -729.49 & -657.84 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

$$ZF0OEF = \begin{bmatrix} 224.61 & 74.432 & -138.99 & -15.407 \\ 160.28 & 336.11 & -184.4 & -231.37 \\ 980.99 & 206.44 & -591.07 & 302.26 \\ 821.3 & 1419.5 & -761.03 & -1032.2 \\ 74.63 & 82.474 & -78.002 & -69.917 \\ 127.31 & 92.757 & -87.499 & -104.43 \\ 135.15 & 109.7 & -103.37 & -85.55 \\ 85.297 & 61.55 & -28.843 & -83.311 \\ -1045.2 & -289.63 & 705.28 & -272.37 \\ -784.41 & -1555 & 763.34 & 1238.2 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$