

## Control no lineal de un aerodeslizador no holonómico con acciones de control limitadas

Dictino Chaos\*, David Moreno-Salinas, Rocío Muñoz, Joaquín Aranda

Departamento de Informática y Automática, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática, UNED, calle Juan del Rosal 16, 28040, Madrid

### Resumen

Este artículo aborda el problema de seguimiento de trayectoria de un aerodeslizador subactuado. Esta clase de sistemas es difícil de controlar debido a que su movimiento está sujeto a una restricción no holonómica de segundo orden. La resolución de este complejo problema requiere la descomposición de la dinámica del sistema en dos subsistemas (posición y orientación) para los que se diseña una ley de control basada en dos controladores no lineales en cascada. El lazo externo de control calcula los valores de las fuerzas en el sistema inercial  $F_x$  y  $F_y$  que deberían aplicarse al aerodeslizador para seguir la trayectoria deseada. A partir de estas fuerzas se determina la referencia para la orientación,  $\psi_c$ , entrada del lazo interno. Por su parte, el lazo interno intenta controlar la orientación para de esta forma seguir las referencias  $\psi_c$  del lazo externo. Ambos controladores se han diseñado teniendo en cuenta la saturación de los actuadores. En particular, el principal resultado de este artículo muestra que en los casos donde la trayectoria está adecuadamente definida, es posible ajustar los parámetros del controlador para evitar la saturación de los actuadores. Este trabajo demuestra de forma teórica la estabilidad asintótica global del error de seguimiento bajo la acción del controlador propuesto. Además, mediante simulaciones, se analiza el comportamiento del sistema y el significado práctico de los resultados teóricos. Copyright © 2013 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

**Palabras Clave:** Control no Lineal, seguimiento de trayectoria, vehículo subactuado, saturación, vehículo autónomo.

### 1. Introducción

El problema de seguimiento de trayectoria de robots móviles subactuados no holonómicos es un campo de gran interés en la disciplina del control automático debido a las dificultades que presentan este tipo de sistemas. Para una revisión de los principales problemas y técnicas que se plantean en dichos vehículos véase Kolmanovsky and McClamroch (1995).

Según el criterio de Encarnação and Pascoal (2001) es posible distinguir los siguientes problemas de seguimiento:

I. Seguimiento de trayectoria (*tracking*): En este problema el vehículo debe seguir una trayectoria espacial que se encuentra parametrizada en el tiempo  $(x(t), y(t))$ .

II. Seguimiento de camino (*Path following*): En este problema el vehículo debe converger hacia un camino preestablecido  $(x(s), y(s))$ , donde  $s$  puede ser cualquier parametrización de la trayectoria (normalmente la longitud de arco) y donde una vez haya llegado hacia el camino deberá seguirlo con una velocidad de crucero especificada  $v(s)$ .

\* Autor en correspondencia

Correos electrónicos: [dchaos@dia.uned.es](mailto:dchaos@dia.uned.es) (Dictino Chaos),  
[dmoreno@dia.uned.es](mailto:dmoreno@dia.uned.es) (David Moreno-Salinas), [rmunoz@dia.uned.es](mailto:rmunoz@dia.uned.es)  
(Rocío Muñoz), [jaranda@dia.uned.es](mailto:jaranda@dia.uned.es) (Joaquín Aranda)

Cabe resaltar que, sin embargo, algunos autores no hacen esta distinción al considerar el seguimiento de camino como un seguimiento de velocidad, véase por ejemplo Ashrafiuon et al. (2008).

Este artículo aborda el primero de los problemas, habida cuenta de que una vez diseñado un control de seguimiento de trayectoria dicha estrategia de control puede ser modificada para convertirla en un control de seguimiento de camino. De hecho, el control de seguimiento de camino ofrece un grado de libertad extra en la elección de la dinámica del parámetro  $s$  que en el caso del seguimiento de trayectoria está fijado, reduciendo en una unidad la dimensionalidad del problema. Aguiar and Hespanha (2007) proponen un ejemplo de diseño que muestra cómo es posible llevar a cabo dicha conversión.

La dificultad involucrada en el control de dichos vehículos depende en gran parte de la configuración de los mismos. Así por ejemplo en los vehículos que no poseen deslizamiento (restricciones no holonómicas de primer orden) existe toda una gama de soluciones de control cinemáticas (Balluchi et al., 2000), así como dinámicas (Oya et al., 2003).

Sin embargo, cuando existe deslizamiento (condiciones no holonómicas de segundo orden), las leyes de control deben considerar necesariamente las condiciones dinámicas del sistema

(Behal et al., 2002) o (Murray and Sastry, 1993) . De hecho éste es uno de los mayores problemas con los que se encuentra el control de vehículos subactuados, ya que dichas restricciones reducen el conjunto de trayectorias factibles en el espacio de configuraciones (Aguilar et al., 2003), (Oriolo and Nakamura, 1991).

En general, las leyes de control de seguimiento de trayectoria se encuentran fuertemente influidas por las condiciones de controlabilidad del vehículo en la trayectoria y con la condición de Brockett (1976) que afirma que no pueden diseñarse leyes de control por realimentación, continuas e independientes del tiempo para la estabilización del vehículo. Para un análisis de dichas implicaciones véase el trabajo de Murray and Sastry (1993).

De este modo, las leyes de control por realimentación del estado imponen condiciones sobre el tipo de trayectorias que pueden seguirse. Así por ejemplo, en Lefeber et al. (2003) se exigen condiciones de persistencia de la excitación en la velocidad angular  $r$ , lo que garantiza la controlabilidad local en torno a la trayectoria. Lo mismo ocurre en Dong and Guo (2005). El problema de estas leyes de control es que son incapaces de seguir trayectorias rectilíneas ( $r = 0$ ). Condiciones similares se aplican al problema de estabilización de la velocidad como puede verse en Fantoni et al. (2000).

El mismo problema se presenta en el trabajo de Toussaint et al. (2000), donde se diseña, utilizando la técnica de *backstepping*, un control que estabiliza un vehículo de superficie en trayectorias que produzcan una dinámica estable para la orientación (lo que en particular se cumple en trayectorias de curvatura constante).

Otra forma de evitar las restricciones impuestas por la condición de Brockett es usar soluciones de control variantes en el tiempo. Por ejemplo Ariaei and Jonckheere (2006) diseñan un control de seguimiento de trayectorias circulares mediante controladores LDV (*Linear Dynamically Varying*) para un aerodeslizador subactuado.

En otras ocasiones se alcanza seguimiento de trayectoria en un sentido práctico (el error de seguimiento no es nulo pero puede hacerse tan pequeño como se quiera aumentando la señal de control). En esta línea se encuentran los trabajos de Aguiar et al. (2003) y Aguiar and Hespanha (2007). La ventaja de esta técnica es que puede aplicarse a trayectorias muy generales, dado que basta únicamente con que las trayectorias espaciales sean suficientemente suaves. La principal desventaja es el compromiso entre la eficacia en el seguimiento de trayectoria y el esfuerzo de control.

Conviene destacar que el aerodeslizador es diferencialmente plano para un conjunto amplio de trayectorias, esto es, que conocido un subconjunto de las salidas (variables planas) y sus derivadas hasta cierto orden, es posible invertir el sistema obteniendo tanto el conjunto de los estados como las entradas de control necesarias para seguir la trayectoria. Véase Fliess et al. (1995) para una descripción exhaustiva de este concepto así como Aguilar-Ibáñez et al. (2012) para un ejemplo de aplicación. En particular, algunas leyes de control hacen uso de esta propiedad en su diseño, como es el caso de Sira-Ramírez and Ibanez (2000) y Sira-Ramírez H. (2000) . Estas estrategias producen

no obstante leyes de control variantes en el tiempo.

En Dumbar et al. (2003) se explota otra técnica que consiste en desacoplar el sistema de control en dos sistemas no lineales en cascada. Dicha idea se apoya sobre la base del trabajo previo de Olfati-Saber (2002), donde se afirma sin demostración que es posible diseñar la ley de control de modo tal que se satisfagan ciertas restricciones de saturación.

En este artículo se desarrolla una estrategia de control que, como en Dumbar et al. (2003), utiliza un desacoplamiento entre la posición y la orientación del vehículo. Además, se demuestra la estabilidad asintótica global para cualquier trayectoria bien definida, como se expone en la sección 2.2.

## 2. Problema de control

En esta sección se describe el problema de seguimiento de trayectoria por parte de un aerodeslizador subactuado.

### 2.1. Modelo del aerodeslizador

El vehículo a controlar es el aerodeslizador mostrado en la Figura 1. En dicha figura se considera que  $\{U\}$  y  $\{B\}$  son los sistemas de referencia inercial y fijo al vehículo respectivamente. Los vectores de posición y velocidad del centro de gravedad del vehículo expresados en  $\{U\}$  son  $[x, y]^T$  y  $[v_x, v_y]^T$  respectivamente. La orientación del sistema  $\{B\}$  respecto al sistema  $\{U\}$  se establece en términos del ángulo de guiñada (*yaw*)  $\psi$ , cuya derivada es la velocidad angular  $r$ . Las velocidades en ambos sistemas se relacionan de la siguiente forma  $v_x = V \cos(\psi)$ ,  $v_y = V \sin(\psi)$  donde  $V = \|[v_x, v_y]^T\|$  es la velocidad total del vehículo. Con estas definiciones la dinámica del modelo puede expresarse mediante el modelo simplificado de un aerodeslizador descrito en Aguiar et al. (2003):

$$\dot{x} = v_x \tag{1a}$$

$$\dot{y} = v_y \tag{1b}$$

$$\dot{v}_x = F \cos(\psi) - d_u v_x \tag{1c}$$

$$\dot{v}_y = F \sin(\psi) - d_u v_y \tag{1d}$$

$$\dot{\psi} = r \tag{1e}$$

$$\dot{r} = \tau - d_r r \tag{1f}$$

donde  $m$  es la masa del vehículo,  $J$  el momento angular respecto al eje vertical y  $l$  la distancia entre los propulsores y el eje de simetría.  $F_e$  y  $F_b$  son las fuerzas del motor de babor y estribor respectivamente (ver Figura 1) y se usan como señales de control que actúan sobre el vehículo. En este trabajo se considera de forma explícita la saturación en las señales de control reales  $F_e$  y  $F_b \in [u_{\min}, u_{\max}]$ . A partir de dichas fuerzas se obtienen la fuerza y el momento normalizados  $F = (F_b + F_e)/m$  y  $\tau = l(F_b - F_e)/J$  que tienen unidades de aceleración  $m/s^2$  y  $rad/s^2$  respectivamente. En este modelo  $d_u = D_u/m$ , y  $d_r = D_r/J$  son los coeficientes de rozamiento de rotación y traslación normalizados definidos por los parámetros sin normalizar  $D_u$  y  $D_r$  que se muestran en la Tabla 1. De este modo el estado del sistema queda definido por  $\mathbf{x} = [x, y, v_x, v_y, \psi, r]^T$ .

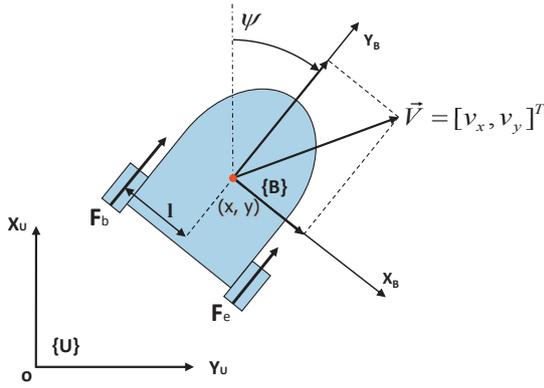


Figura 1: Modelo esquemático de un aerodeslizador subactuado.

Tabla 1: Parámetros del modelo	
Parámetro	Valor
$m$	$0.995Kg$
$J$	$0.014Kgm^{-2}$
$l$	$0.075m$
$u_{max}$	$0.545N$
$u_{min}$	$0.347N$
$D_u$	$0.357Kgs^{-1}$
$D_r$	$0.0243Kgm^{-2}s^{-1}$

## 2.2. Trayectorias bien definidas

El aerodeslizador es un sistema subactuado ya que sólo dispone de dos acciones de control ( $F_e$  y  $F_b$ ) para controlar tres grados de libertad independientes:  $x$ ,  $y$  y  $\psi$ . No obstante, la dinámica del aerodeslizador es plana con respecto a las coordenadas de posición tal como se demuestra en Sira-Ramirez (2002), (véase Fliess et al. (1995) para mayor información acerca de los sistemas diferencialmente planos). Esto implica que una vez fijadas las referencias para la trayectoria espacial  $x_r(t)$  e  $y_r(t)$ , todos los estados, así como las acciones de control que deben aplicarse al vehículo para seguir la trayectoria, quedan automáticamente fijadas. Para ello considérese las ecuaciones (1c) y (1d) y defínase  $F_r$  como la fuerza necesaria para seguir la referencia, entonces la orientación  $\psi_r$  está definida como sigue:

$$F_r \cos(\psi_r) = \dot{v}_{xr} + d_u v_{xr} = \ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r := F_1 \quad (2a)$$

$$F_r \sin(\psi_r) = \dot{v}_{yr} + d_u v_{yr} = \ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r := F_2 \quad (2b)$$

Esta condición puede expresarse como una restricción no holonómica de segundo orden  $(\ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r) \sin(\psi_r) - (\ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r) \cos(\psi_r)$  que no es integrable tal como se demuestra en el capítulo 2 de Chaos (2010). La no integrabilidad de esta condición tiene un impacto importante en el diseño de la ley de control:

- Si la restricción (2) fuese completamente integrable entonces sería posible expresar la orientación ( $\psi$ ) en función de la posición  $x$ ,  $y$  y por tanto eliminarla de la dinámica (1). Esto significa que no sería posible alcanzar cualquier configuración del vehículo  $(x, y, \psi)$  y bastaría con

controlar la posición para que la orientación quedase fijada.

- Si la restricción (2) fuese parcialmente integrable, entonces la orientación estaría ligada a las posiciones y las velocidades  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . En este caso sería posible alcanzar cualquier configuración  $(x, y, \psi)$  pero no cualquier estado  $(x, y, \psi, v_x, v_y, r)$ . Este es el tipo de restricciones que aparecen en robots móviles que ruedan sin deslizamiento.
- En este caso, la restricción es no holonómica de segundo orden lo cual permite alcanzar cualquier estado posible  $(x, y, \psi, v_x, v_y, r)$ . Dicha ligadura exige que el control de la orientación dependa de la dinámica completa de la posición (1a)-(1d) como se analiza en la sección 3.2.

Existen dos familias de soluciones de las restricciones (2). En la primera el vehículo sigue la referencia hacia delante ( $n$  par), en la segunda el vehículo sigue la referencia moviéndose hacia atrás ( $n$  impar). Una vez seleccionada una de las soluciones (normalmente la solución hacia delante) quedan fijadas la orientación  $\psi_r$ , así como sus derivadas  $r_r$  y  $\dot{r}_r$ . De este modo, podemos calcular el par de fuerzas  $\tau_r = \dot{r}_r + d_r r_r$  necesario para seguir la trayectoria:

$$\psi_r = \text{atan2}(\ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r, \ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r) + n\pi \quad (3a)$$

$$F_r = (-1)^n \sqrt{(\ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r)^2 + (\ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r)^2} \quad (3b)$$

$$r_r = (F_1 \dot{F}_2 - \dot{F}_1 F_2) / F_r^2 \quad (3c)$$

$$\dot{r}_r = (F_1 \ddot{F}_2 - \ddot{F}_1 F_2) / F_r^2 - 2r_r (F_1 \dot{F}_1 - \dot{F}_1 F_2) / F_r^2 \quad (3d)$$

Donde  $\text{atan2}(x, y)$  es la función arcotangente de dos argumentos. Cabe destacar que la orientación está bien definida siempre y cuando  $F_r \neq 0$ . Además, para el cálculo de  $\tau_r$  es necesario disponer de las derivadas segundas de  $F_1$  y  $F_2$  y por lo tanto de las derivadas de cuarto orden de la trayectoria espacial de acuerdo con (2).

Considérese una trayectoria espacial cuatro veces derivable  $\mathbf{x}_r = [x_r(t), y_r(t)]^T$ , decimos entonces que la trayectoria es:

1. *Factible*: si existen  $F_r$  y  $\tau_r$  tales que  $F_{b,e} \in [-u_{\min}, u_{\max}]$ .
2. *Bien definida*: si  $F_{b,e} \in [-u_{\min} + \epsilon, u_{\max} - \epsilon]$  y  $F_{\min} < |F_r| \leq (|F_b| + |F_e|) / m$  siendo  $\epsilon$  y  $F_{\min}$  dos constantes positivas.

Esto significa que una trayectoria es factible cuando hay una acción de control que permite seguirla y es bien definida cuando dicha acción de control no satura los motores y además puede calcularse a partir de la salida deseada (ya que  $F_r$  está acotada inferiormente lo evita una posible división por cero en (3)).

## 2.3. Formulación del problema

El objetivo de este trabajo es desarrollar una ley de control para  $F_e$  y  $F_b$  que resuelva el problema de seguimiento de trayectoria con señales de control acotadas. Esto es, dado el modelo (1a)-(1f) y una trayectoria espacial bien definida  $\mathbf{x}_r$ , defínase el error de seguimiento de posición  $\mathbf{e}_p = [e_x, e_y, e_{v_x}, e_{v_y}]^T = [x - x_r, y - y_r, v_x - v_{xr}, v_y - v_{yr}]^T$ .

De este modo se diseñará una ley de control por realimentación de estados  $-u_{\min} \leq F_e(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r) \leq u_{\max}$  y  $-u_{\min} \leq F_b(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r) \leq u_{\max}$  que estabilice global y asintóticamente el error de seguimiento  $\mathbf{e}_p$ , o lo que es lo mismo, que desde cualquier condición inicial garantice que  $\mathbf{e}_p \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Conviene destacar que este planteamiento considera condiciones de saturación en las entradas de control  $F_e$  y  $F_b$  pero no sobre sus derivadas. Se asume por tanto que la dinámica de los actuadores es suficientemente rápida en comparación con la dinámica del vehículo. Esta premisa es asumida tácitamente en todas las referencias expuestas en la introducción. Si se deseara tener en cuenta restricciones en la velocidad de respuesta de los actuadores habría que exigir condiciones en sus derivadas y por lo tanto en las derivadas de orden superior de la trayectoria a seguir.

### 3. Diseño de la ley de control

De las ecuaciones (1e) y (1f) se deduce que la orientación es directamente controlable por medio del momento  $\tau$ , de este modo es posible llevar la variable  $\psi$  a cualquier valor deseado  $\psi_c$ . El ángulo  $\psi_c$  es el valor que tendría la orientación en caso de que la misma se encontrara perfectamente controlada (no debe confundirse con  $\psi_r$ , que es la orientación necesaria para seguir de forma exacta la trayectoria). Considérese entonces la dinámica espacial:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= F \cos(\psi_c) - d_u v_x \\ \dot{v}_y &= F \sin(\psi_c) - d_u v_y.\end{aligned}$$

La actuación sobre las velocidades  $v_x$  y  $v_y$  se llevará a cabo por medio de las entradas  $F$  y  $\psi_c$ . Esto sugiere definir  $F_x = F \cos(\psi_c)$  y  $F_y = F \sin(\psi_c)$  como dos fuerzas de control virtuales e independientes en el sistema de referencia inercial  $\mathbf{U}$ , para así controlar las velocidades y con ellas la posición del vehículo.

Un esquema de dicho diseño de control se muestra en la Figura 2. El lazo externo calcula los valores de  $F_x$  y  $F_y$ . Esos valores se transformarían en valores de  $F$  y la referencia para la orientación  $\psi_c$  (así como las derivadas necesarias). Finalmente el lazo interno intenta controlar la orientación para seguir así las referencias del lazo externo.

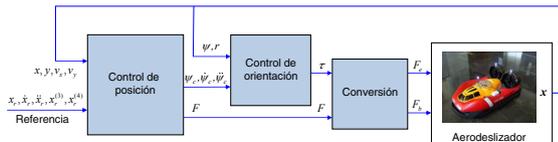


Figura 2: Esquema de control en cascada para el seguimiento de trayectoria.

#### 3.1. Control de posición

Calculando la dinámica del error de posición  $\mathbf{e}_p$  y utilizando las definiciones de  $F_{xr}$  y  $F_{yr}$ , se obtiene:

$$\dot{e}_x = v_x - v_{xr} = e_{vx} \quad (4)$$

$$\dot{e}_y = v_y - v_{yr} = e_{vy} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_{vx} &= F \cos(\psi) - d_u e_{vx} - d_u \dot{x}_r - \ddot{x}_r \\ &= F \cos(\psi) - d_u e_{vx} - F_{xr}\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_{vy} &= F \sin(\psi) - d_u e_{vy} - d_u \dot{y}_r - \ddot{y}_r \\ &= F \sin(\psi) - d_u e_{vy} - F_{yr}.\end{aligned} \quad (7)$$

Se definen entonces las variables  $\psi_c$  y  $F$ :

$$\psi_c = \arctan 2(F_y, F_x) \quad (8)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (9)$$

y a partir de ellas se definen las variables  $z_x$  y  $z_y$ :

$$z_x = F (\cos(\psi) - \cos(\psi_c))$$

$$z_y = F (\sin(\psi) - \sin(\psi_c)).$$

La dinámica (4)-(7) puede entonces reescribirse en términos de  $\psi_c$ ,  $z_x$  y  $z_y$  como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= e_{vx} \\ \dot{e}_y &= e_{vy} \\ \dot{e}_{vx} &= -d_u e_{vx} + F_x - F_{xr} + z_x \\ \dot{e}_{vy} &= -d_u e_{vy} + F_y - F_{yr} + z_y.\end{aligned}$$

Para estabilizar dicho sistema se propone una ley de control proporcional saturada definida de la siguiente manera:

$$F_x = F_{xr} - \text{sat}_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \quad (10)$$

$$F_y = F_{yr} - \text{sat}_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) \quad (11)$$

donde las constantes  $k_1$  y  $k_2$  son dos constantes de control positivas, y la saturación  $\text{sat}_1(x, F_0)$  puede ser cualquier función suave y monótona creciente parametrizada de forma continua en  $F_0$  tal que:  $\text{sat}_1(0, F_0) = 0$ ,  $|\text{sat}_1(x, F_0)| \leq F_0$ ,  $|\frac{d \text{sat}_1(x, F_0)}{dx}| \leq c_1 F_0$ ,  $|\frac{d^2 \text{sat}_1(x, F_0)}{dx^2}| \leq c_2 F_0$ , para unas constantes  $c_1$  y  $c_2$ . Un ejemplo sencillo de saturación que cumple dichas condiciones es  $\text{sat}_1(x, F_0) = F_0 \tanh(x)$ . En la Sección 4 se expondrá cómo es posible elegir  $F_0$  para garantizar que las señales de control generadas sean siempre factibles. La ley de realimentación (10)-(11) convierte la dinámica (4)-(7) en un sistema no lineal estable (como se comprobará en la sección 4) sometido a los términos de perturbación  $z_x$  y  $z_y$ :

$$\dot{e}_x = e_{vx} \quad (12)$$

$$\dot{e}_y = e_{vy} \quad (13)$$

$$\dot{e}_{vx} = -\text{sat}_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x \quad (14)$$

$$\dot{e}_{vy} = -\text{sat}_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) - d_u e_{vy} + z_y \quad (15)$$

Es importante destacar que el vector de perturbación  $\mathbf{z} = [z_x, z_y]^T$  puede acotarse como sigue:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(F, \psi, \psi_d)\|^2 &= F^2(\cos(\psi) - \cos(\psi_c))^2 + F^2(\sin(\psi) - \sin(\psi_c))^2 \\ &= 2F^2(1 - \cos(\psi - \psi_c)) \leq |F|^2 \|\psi - \psi_c\| \end{aligned} \quad (16)$$

de tal modo que dichos términos de perturbación se anulan cuando  $\psi = \psi_c$ , es decir, cuando el vehículo posee la orientación deseada.

### 3.2. Control de orientación

El objetivo del lazo interno es eliminar la perturbación  $\mathbf{z}$  en el lazo externo. Para ello se diseña una ley de control que haga que  $\psi$  converja hacia  $\psi_c$ . En primer lugar se definen las variables de error  $e_\psi$  y  $e_r$ :

$$\begin{aligned} e_\psi &= \psi - \psi_c \\ e_r &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_c \\ \dot{e}_\psi &= e_r \\ \dot{e}_r &= \tau - d_r e_r - d_r \dot{\psi}_c - \ddot{\psi}_c. \end{aligned}$$

De este modo, definiendo  $\tau_c = d_r \dot{\psi}_c + \ddot{\psi}_c$  se obtiene la siguiente dinámica para el error de orientación:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\psi &= e_r & (17) \\ \dot{e}_r &= \tau - \tau_c - d_r e_r. & (18) \end{aligned}$$

Es importante remarcar la diferencia entre  $\psi_c$  y  $\psi_r$ . La primera es una referencia para la orientación que depende de la dinámica espacial, ya que se calcula usando  $F_x$  y  $F_y$ . Esto se debe a la presencia de la restricción no holonómica de segundo orden (2). La segunda, sin embargo, es la referencia de orientación que se seguiría para mantener el aerodeslizador posicionado sobre la trayectoria deseada. De este modo, a medida que el aerodeslizador se posiciona ( $\mathbf{e}_p \rightarrow 0$ ) y de acuerdo con (10)-(11), se tiene que  $F_x \rightarrow F_{xr}$  y  $F_y \rightarrow F_{yr}$ . Por tanto, según (8),  $\psi_c \rightarrow \psi_r$ .

Finalmente con el fin de estabilizar la dinámica (17)-(18) se propone la siguiente ley de control para  $\tau$ :

$$\tau = \tau_c - \text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) \quad (19)$$

en la cual  $k_3$  es una constante de control positiva y la saturación  $\text{sat}_2(x, \tau_0)$  puede ser cualquier función suave y monótona creciente parametrizada de forma continua en  $\tau_0$  tal que:  $\text{sat}_2(0, \tau_0) = 0$ ,  $|\text{sat}_2(x, \tau_0)| \leq \tau_0$  y  $\frac{d\text{sat}_2(x, \tau_0)}{dx} \leq c_4$  para una constante positiva  $c_4$ . Una elección posible es  $\text{sat}_2(0, \tau_0) = \tau_0 \tanh(\frac{x}{\tau_0})$ . Se concluye que el sistema (1a)-(1f) sometido a las acciones de control (10), (11) y (19) se transforma en:

$$\dot{e}_x = e_{vx} \quad (20a)$$

$$\dot{e}_y = e_{vy} \quad (20b)$$

$$\dot{e}_{vx} = -\text{sat}_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x \quad (20c)$$

$$\dot{e}_{vy} = -\text{sat}_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) - d_u e_{vy} + z_y \quad (20d)$$

$$\dot{e}_\psi = e_r \quad (20e)$$

$$\dot{e}_r = -\text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) - d_r e_r \quad (20f)$$

$$\|\mathbf{z}\| = \|[z_x, z_y]^T\| \leq |F| \|e_\psi\|. \quad (20g)$$

## 4. Estudio de la estabilidad

En esta sección se demuestra la estabilidad del sistema (20a)-(20g). La demostración se llevará a cabo en dos etapas. En primer lugar, en 4.1, se prueba que las velocidades del aerodeslizador son global y finalmente acotadas. A continuación, utilizando ese resultado, se demuestra cómo pueden elegirse las constantes  $F_0$  y  $\tau_0$  para que las señales de control sean siempre factibles después de un cierto tiempo  $T_1$ . En segundo lugar, en 4.2, se demuestra la estabilidad del sistema completo. En primer lugar se comienza recordando un resultado conocido de la estabilidad de los sistemas no lineales no autónomos:

**Teorema 1.** Dado el sistema no lineal  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$  con  $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n$ . Sea  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua y diferenciable tal que:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|\mathbf{x}\|) &\leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) &\leq -W_3(x) \quad \forall \|\mathbf{x}\| > \mu > 0 \end{aligned}$$

Donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones continuas y monótonas crecientes tales que  $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$ ,  $\alpha_1(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $W_3$  es una función continua y definida positiva (positivas en todos los puntos salvo en  $\mathbf{x} = 0$ ). Entonces existe un tiempo  $T$  tal que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t > T$$

*Demostración.* Se trata de un caso particular del Teorema 4.18 de Khalil (2002).  $\square$

### 4.1. Factibilidad de la ley de control

**Proposición 1.** Sea el sistema dinámico (1) con estado  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^6$  y entradas acotadas  $|F| < F_{\max}$  y  $|\tau| < \tau_{\max}$ , definiendo  $v_\theta = \frac{F_{\max}}{d_u} + \theta$  y  $r_\theta = \frac{\tau_{\max}}{d_r} + \theta$  y el conjunto

$$\Omega_\theta = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^6 : |v_x|, |v_y| \leq v_\theta, |r| \leq r_\theta\},$$

donde  $\theta$  es fijo y arbitrariamente pequeño. Entonces  $v_x$ ,  $v_y$ , y la velocidad  $r$  son global y finalmente acotadas con cotas  $v_\theta$  y  $r_\theta$ , además el conjunto  $\Omega_\theta$  es positivamente invariante.

*Demostración.* Las fuerzas aplicadas al vehículo son acotadas al serlo  $u_{\max}$  y  $u_{\min}$ . Consideremos las siguientes funciones definidas positivas  $w_1 = v_x^2/2$ ,  $w_2 = v_y^2/2$ , y  $w_3 = r^2/2$ . Las derivadas temporales de dichas funciones son:

$$\dot{w}_1 = -v_x(d_u v_x - F \cos(\psi))$$

$$\dot{w}_2 = -v_y(d_u v_y - F \sin(\psi))$$

$$\dot{w}_3 = -r(d_r r - \tau)$$

La derivada de  $w_1$  puede reescribirse como

$$\dot{w}_1 = -d_u v_x^2 \left(1 - \frac{F \cos(\psi)}{d_u v_x}\right). \quad (21)$$

Esto significa que  $\dot{w}_1$  es estrictamente negativa cuando  $|v_x| \geq v_\theta = F_{\max}/d_u + \theta$  o, de forma equivalente cuando  $w_1 \geq w_\theta =$

$v_\theta^2/2$ . De este modo cualquier solución que comience en  $\omega_{1,\theta} = \{v_x : w_1 \leq w_\theta\}$  permanece allí, ya que  $\dot{w}_1$  es negativa en la frontera  $w_1 = w_\theta$ . Por lo tanto  $\omega_{1,\theta}$  es positivamente invariante. Además cualquier solución que comience fuera del conjunto  $\omega_{1,\theta}$  decrecerá monótonamente hasta entrar dentro de él (ya que  $\dot{w}_1$  es negativo en  $\omega_{1,\theta}$ ). De este modo aplicando el Teorema 1 con  $\alpha_1 = \alpha_2 = w_1$  se llega a la conclusión buscada. Un análisis similar puede llevarse cabo con  $w_2$  y  $w_3$  concluyendo que las velocidades son global y finalmente acotadas y convergen al conjunto  $\Omega_\theta$ .  $\square$

**Lema 1.** Sea el sistema dinámico (1) con estado  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^6$  y entradas acotadas  $|F| < F_{\max}$  y  $|\tau| < \tau_{\max}$ , y sea  $\mathbf{x}_r$  una trayectoria bien definida. Entonces siempre es posible escoger los valores de  $F_0$  y  $\tau_0$  de tal forma que transcurrido un tiempo finito  $T_1$  las señales de control generadas por las leyes de control (9), (10), (11) y (19) sean factibles, esto es, tales que  $-u_{\min} \leq F_{e,b} \leq u_{\max}$ .

*Demostración.* En primer lugar hay que observar qué ocurre cuando  $F_0 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$ . De acuerdo con las ecuaciones (10)-(11), cuando  $F_0 = 0$  por las propiedades de la saturación comentadas previamente  $sat_1(x, 0) = 0$ , luego  $F_x = F_{xr}$  y  $F_y = F_{yr}$ , y por tanto  $F = F_r$ . Además, puesto que la trayectoria es factible,  $F = F_r \neq 0$  de modo que es posible despejar la orientación de (8) tal que  $\psi_c = \psi_r$ . Teniendo en cuenta que cuando  $\tau_0 = 0$ , se cumple que  $sat_2(x, 0) = 0$  se concluye que  $\tau = \tau_r$ .

De este modo, ambas señales de control son siempre factibles en el límite en el que  $F_0 \rightarrow 0$  y  $\tau_0 \rightarrow 0$ .

Para ver qué pasa cuando  $F_0$  y  $\tau_0$  son positivos hay que acotar las diferencias  $\tau - \tau_0$  y  $F - F_0$  en función de  $F_0$  y  $\tau_0$ . Dichos cálculos se encuentran en el Apéndice A.

Calculando las señales de control aplicadas al vehículo, se tiene que  $F_b = \frac{1}{2}(mF + \frac{Jc}{T})$  y  $F_e = \frac{1}{2}(mF - \frac{Jc}{T})$ , substituyendo las cotas (A.1) y (A.6) se sigue que

$$F_{b,e} \leq u_{\max} - \varepsilon + \left(2m + \frac{Jc_{10}}{l(F_{\min} - 2F_0)^4}\right)F_0 + \tau_0$$

$$F_{b,e} \geq -u_{\min} + \varepsilon - \left(2m + \frac{Jc_{10}}{l(F_{\min} - 2F_0)^4}\right)F_0 - \tau_0$$

Luego existe un  $\delta$  tal que si  $F_0 < \delta$ , entonces  $\left(2m + \frac{Jc_{10}}{l(F_{\min} - 2F_0)^4}\right)F_0$  se hace menor que  $\varepsilon/2$ . Por tanto, tomando  $F_0 < \min(\delta, F_{\min}, F_{\max})$  y  $\tau_0 < \varepsilon/2$ , las señales de control son factibles ya que:

$$-u_{\min} \leq F_{b,e} \leq u_{\max}$$

$\square$

#### 4.2. Estabilidad del sistema

Para concluir el análisis es necesario introducir un lema técnico

**Lema 2.** Sea un sistema dinámico descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (22)$$

$$x_2 = -cx_2 - sat(b_1x_1 + b_2x_2) + p \quad (23)$$

donde,  $c$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son constantes positivas,  $p$  es una perturbación acotada  $|p| < \alpha M$  siendo  $\alpha \leq 1$  la constante positiva definida por  $\alpha = \min\left(\frac{2\sqrt{b_2c}}{\sqrt{b_2c} + \sqrt{b_1}}, 1\right)$ ,  $sat(\cdot)$  una función monótona creciente tal que  $sat(0) = 0$ , y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} sat(x) = \pm M$ .

Entonces el sistema (22)-(23) es ISS (Input to State Stable) respecto de la perturbación  $p$ , esto es, existe una función  $\gamma(\cdot)$  de clase  $\mathcal{K}$  (continua, monótona creciente, y tal que  $\gamma(0) = 0$ ) y una función  $\beta(\cdot, \cdot)$  de clase  $\mathcal{KL}$  (de clase  $\mathcal{K}$  respecto al primer argumento y que tiende a cero cuando el segundo argumento tiende a infinito) tal que si  $|p(t)| < \alpha M$  entonces:

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{|p(\tau)|\}\right) \quad (24)$$

*Demostración.* La prueba se encuentra en el Apéndice B.  $\square$

En términos generales un sistema es ISS si para una entrada acotada la salida después de desaparecer el transitorio  $\beta$  es finalmente acotada por una función creciente  $\gamma$  de la entrada. Provistos de este resultado podemos demostrar la estabilidad del sistema.

**Teorema 2.** Sea el sistema dinámico (1) con estado  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^6$  sujeto a la ley de control (9), (10), (11) y (19) en presencia de una saturación en las entradas  $-u_{\min} \leq F_{b,e} \leq u_{\max}$ , y sea  $\mathbf{x}_r$  una trayectoria bien definida. Entonces siempre es posible escoger los valores de  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $F_0$  y  $\tau_0$  de tal forma que el error de seguimiento  $\mathbf{x}_e$  sea global y asintóticamente estable. O dicho de otro modo, que desde cualquier condición inicial garantice que  $\mathbf{x}_e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Fíjese un valor arbitrario a las constantes positivas  $k_1$ ,  $k_3$ ,  $k_3$  y  $k_4$  así como la trayectoria bien definida  $\mathbf{x}_r$ . Entonces, de acuerdo con el Lema 1, para cada condición inicial existe un tiempo  $T_1$  tal que las señales de control (9), (10), (11) y (19) son factibles y por tanto se aplican al aerodeslizador. De este modo para  $t \geq T_1$  se satisface la dinámica (20).

La estabilidad es ahora consecuencia de una aplicación directa de la estabilidad de sistemas ISS en cascada. Consideremos las ecuaciones (20e) y (20f). Estas ecuaciones tienen la forma exigida por el Lema 2 con  $p = 0$ ,  $M = \tau_0$ ,  $b_1 = k_3$ ,  $b_2 = k_4$  y  $c = d_r$ . De este modo existe una función  $\beta_1$  de clase  $\mathcal{KL}$  tal que  $\beta_1(\|[e_\psi, e_r]^T(T_1)\|, t - T_1)$ . Por tanto  $e_\psi \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y de este modo para cualquier  $\varepsilon_1$  existe un tiempo  $T_2 > T_1$  tal que  $|e_\psi| \leq \varepsilon_1/F_{\max}$ .

Por otra parte, puesto que las velocidades son global y finalmente acotadas de acuerdo con la Proposición 1, el estado del sistema (20) permanece acotado (no hay escape en tiempo finito). De este modo, cuando  $t \geq T_2$ , dado que  $z_x \leq \|z\|$ , sabemos que  $z_x \leq |F|e_\psi \leq \varepsilon_1$ .

Escogiendo entonces  $\varepsilon_1 \leq \alpha(k_1, k_2)F_0$ , donde  $\alpha$  es la función definida en el Lema 1, las condiciones de dicho lema son de aplicación al subsistema (20a)-(20b) por lo cual  $\|[e_x, e_{vx}]^T\| \leq \beta(\|[e_x, e_{vx}]^T(T_2), t - T_2) + \gamma_2(\varepsilon_1)$ . Ahora bien, puesto que  $\beta \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon_1$  puede escogerse arbitrariamente pequeño se concluye que  $\|[e_x, e_{vx}]^T\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Un análisis similar puede hacerse con  $e_y$  y  $e_{vy}$  demostrando por tanto que el error de seguimiento es global y asintóticamente estable.  $\square$

## 5. Resultados

En este apartado por medio de simulaciones se demuestra el funcionamiento de la ley de control desarrollada. Para ello se emplean los valores nominales del modelo mostrados en la Tabla 1. En todas las simulaciones se toman los siguientes valores para la ley de control  $k_1 = 0,5m^{-1}$ ,  $k_2 = 1s/m$ ,  $k_3 = 1rad^{-1}$ ,  $k_4 = 1srad^{-1}$ , y las saturaciones propuestas en la teoría:  $sat_1(x, F_0) = F_0 \tanh(x)$ ,  $sat_2(0, \tau_0) = \tau_0 \tanh(\frac{x}{\tau_0})$  con  $F_0 = 0,1m/s^2$ , y  $\tau_0 = 0,8rad/s^2$ . Estos valores han sido escogidos para evitar la saturación de las señales de control  $F_e$  y  $F_b$  y satisfacer las condiciones de la Sección 4.

En primer lugar, se comprueba la convergencia hacia una trayectoria circular desde diferentes condiciones iniciales. En segundo lugar, se comprueba la convergencia hacia trayectorias más complejas.

### 5.1. Trayectoria circular

Para comprobar los resultados del apartado anterior se plantea una trayectoria circular de radio  $R$  centrada en el origen y recorrida con una velocidad  $V$  en sentido horario como sigue:  $x_r(t) = R \sin(\frac{V}{R}t)$ ,  $y_r(t) = R \cos(\frac{V}{R}t)$ . Esta trayectoria se escoge como prueba ya que produce unas señales de control constantes en estado estacionario, permitiendo un análisis más claro del transitorio. Para conseguir que la trayectoria sea factible se toman los valores  $V = 0,5m/s$  y  $R = 2m$ .

En primer lugar se analiza del aerodeslizador desde condiciones iniciales nulas. Tal como muestra la Figura 3, la trayectoria parte del origen con velocidad inicial nula y orientada en la dirección del eje  $x$  ( $\psi = 0$ ) y converge hacia la trayectoria circular de referencia. La Figura 4 muestra la evolución tem-

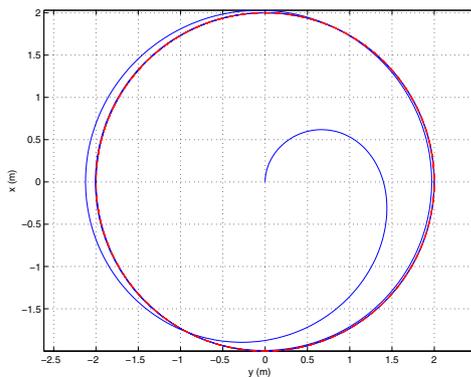


Figura 3: Convergencia a una trayectoria circular  $R = 2m$ ,  $V = 0,5m/s$ . Referencia en rojo y trayectoria en azul.

poral de la posición mientras que la Figura 5 muestra la evolución de las velocidades. Tanto la posición como la velocidad convergen hacia la trayectoria confirmando así el resultado del Teorema 2. En un tiempo de aproximadamente 30 segundos el error de seguimiento de la trayectoria se hace inapreciable. La evolución de la orientación del vehículo se muestra en la Figura 6. La trayectoria circular de referencia se recorre manteniendo

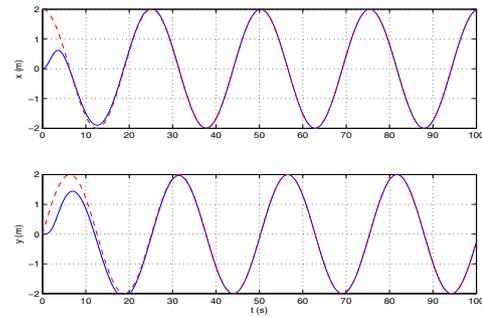


Figura 4: Evolución temporal de las variables de posición. Referencia en rojo y trayectoria en azul.

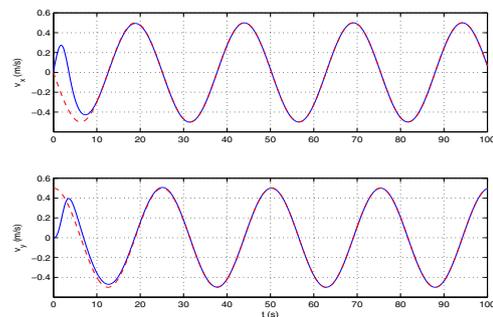


Figura 5: Evolución temporal de las velocidades. Referencia en rojo y trayectoria en azul.

una velocidad angular constante  $r_r = 0,23rad/s$ . Inicialmente, durante el transitorio, la referencia de orientación de control  $\psi_c$  y la referencia en la velocidad angular  $\dot{\psi}_c$  tienen una dinámica compleja. Sin embargo transcurridos los 30 primeros segundos del mismo, una vez que la posición converge hacia la referencia, entonces  $\dot{\psi}_c \rightarrow \dot{\psi}_r$ .

Finalmente las acciones de control  $F_e$  y  $F_b$  se muestran en la Figura 7 evidenciando que  $F_e$  y  $F_b$  no se saturan y las fuerzas calculadas por la ley de control son siempre aplicables. Para mostrar que la convergencia a la trayectoria es global, se simula el sistema partiendo de varias condiciones iniciales adversas  $\mathbf{x}_a = [-10, -10, 0, 0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_b = [0, 0, 0, 5, 5, 0]^T$  y  $\mathbf{x}_c = [0, 0, 0, 0, 0, 10]^T$ .

La forma más simple de comprobar la convergencia consiste en representar la distancia a la trayectoria de referencia como función del tiempo, tal como se hace en la Figura 8. A partir de esta figura pueden sacarse interesantes conclusiones. Por una parte, cuando la trayectoria comienza desde una posición alejada, pero con un error de velocidad bajo ( $\mathbf{x}_a$ ), el error converge rápidamente.

Si se parte de una posición próxima pero la velocidad angular es grande ( $\mathbf{x}_c$ ) la posición inicial se aleja ligeramente pero se recupera aproximadamente en el mismo tiempo que en el caso anterior.

Sin embargo, cuando se parte del origen con una velocidad

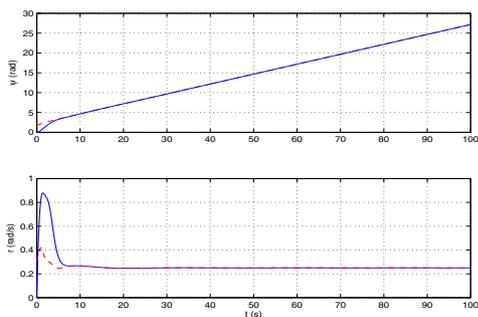


Figura 6: Evolución temporal la orientación y la velocidad angular. Referencia en rojo y trayectoria en azul.

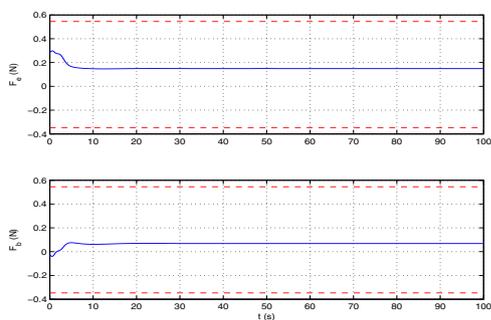


Figura 7: Evolución de las fuerzas  $F_e$  y  $F_b$ , límites de saturación en rojo.

elevada ( $x_b$ ) el sistema tarda más tiempo en recuperarse. Esto se debe a que la gran velocidad inicial está fuera del conjunto  $\Omega_\theta$ , y por tanto dicha velocidad debe disminuir antes de que el controlador sea capaz de estabilizar al vehículo.

Las señales de control necesarias para seguir las trayectorias anteriores se muestran en la Figura 9. Como puede apreciarse, ninguna de ellas produce saturación en los actuadores. Esto demuestra que  $F_0$  y  $\tau_0$  han sido convenientemente elegidas y por tanto las fuerzas  $F$  y  $\tau$  son siempre factibles.

### 5.2. Trayectoria genérica

Para demostrar la generalidad del control desarrollado se aplica a una trayectoria factible no circular. Para ello se elige como ejemplo la siguiente trayectoria de Lissajous  $x_r(t) = 15 \sin\left(\frac{3}{20}t\right)$ ,  $y_r(t) = 10 \cos\left(\frac{1}{10}t\right)$ . Utilizando los mismos parámetros de control que en el caso anterior y partiendo de condiciones iniciales nulas, se obtiene la trayectoria ilustrada en la Figura 10. Tras un transitorio, la trayectoria converge a la referencia. Además, tal como se muestra en la Figura 11, las señales de control permanecen dentro de los límites de la saturación. Esto demuestra que la ley de control obtenida es general y puede aplicarse a cualquier trayectoria bien definida.

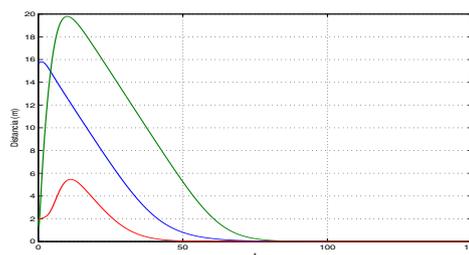


Figura 8: Evolución de la distancia a la trayectoria desde tres condiciones iniciales distintas. La condición inicial  $x_a$  se muestra en azul,  $x_b$  en verde y  $x_c$  en rojo.

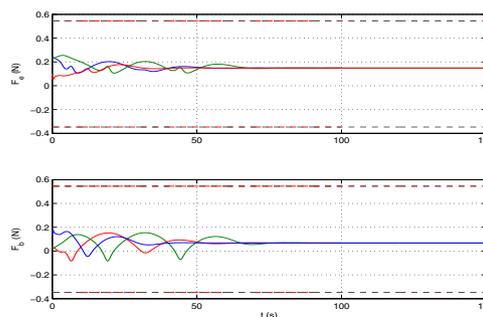


Figura 9: Seguimiento de una trayectoria genérica. Trayectoria en azul y referencia en rojo.

## 6. Conclusiones

En este artículo se ha analizado el problema de seguimiento de trayectoria por parte de un aerodeslizador subactuado. Primero se han definido el tipo de trayectorias que pueden seguirse teniendo en cuenta a la restricción no holonómica en el movimiento del aerodeslizador. A continuación se ha seleccionado un subconjunto de ellas tales que exista un cierto margen de maniobra en la acción de control a aplicar (trayectorias bien definidas).

Se ha diseñado una ley de control por realimentación que permite hacer el seguimiento de cualquier trayectoria bien definida, haciendo especial hincapié en el hecho de que las señales de control no deben saturar los actuadores.

Se han obtenido demostraciones teóricas de la estabilidad asintótica global del error de seguimiento de trayectoria bajo la acción del esquema de control propuesto.

Finalmente se ha evidenciado mediante simulaciones que si la trayectoria está bien definida es posible ajustar las constantes de la ley de control para garantizar que se cumplen los límites impuestos por la saturación de los actuadores, consiguiendo así un seguimiento de trayectoria óptimo.

De esta manera la ley de control desarrollada permite seguir cualquier tipo de trayectoria bien definida desde cualquier condición inicial. Los resultados teóricos y de simulación evidencian el buen comportamiento de la ley de control propuesta.

Como línea de trabajo futuro se encuentra el análisis del

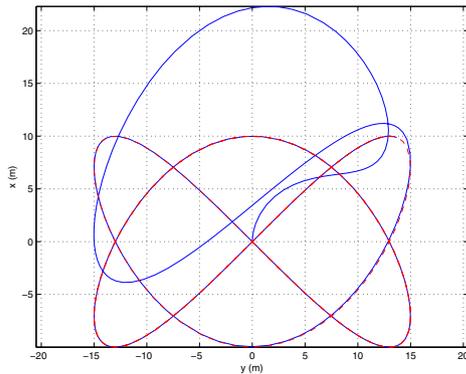


Figura 10: Evolución de las acciones de control. La condición inicial  $\mathbf{x}_a$  se muestra en azul,  $\mathbf{x}_b$  en verde y  $\mathbf{x}_c$  en rojo.

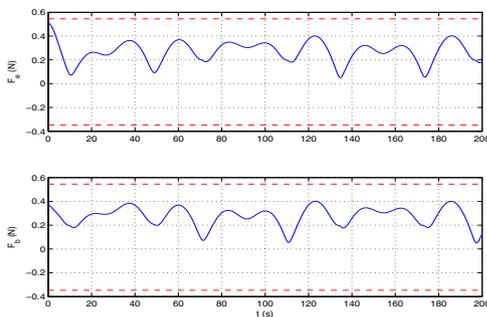


Figura 11: Evolución de las acciones de control. La condición inicial  $\mathbf{x}_a$  se muestra en azul,  $\mathbf{x}_b$  en verde y  $\mathbf{x}_c$  en rojo.

comportamiento de la ley de control propuesta bajo la presencia de ruido en la medida y dinámica no modelada en los actuadores.

## English Summary

### Nonlinear control of an underactuated nonholonomic hovercraft with limited control inputs.

#### Abstract

This paper deals with the interesting problem of trajectory tracking of an underactuated hovercraft. This system is difficult to control because it exhibits second order nonholonomic restrictions on its movement. In order to solve the control problem the dynamics of the system is decomposed in two subsystems (one for position and another for orientation) and a nonlinear control law based on two nonlinear cascaded controllers is designed. On one hand the outer, loop computes the forces that are necessary to track the spatial trajectory  $F_x$  and  $F_y$  in the inertial frame. Based on this forces, the reference for the orientation  $\psi_c$  is computed and it is feedback to the inner loop. On the other

hand, the inner loop tries to converge the orientation to the reference  $\psi_c$  given by the outer loop. Both controllers are designed taking into account saturation of the actuators. In fact the main result of this paper shows that if the reference trajectory is given properly it is possible to avoid saturation of the actuators. With adequate selection, global asymptotic stability of the tracking error under the proposed control law is theoretically demonstrated. In addition simulations are made in order to analyze the performance of the control law and the practical meaning of the theoretical results.

#### Keywords:

Nonlinear control, trajectory tracking, underactuated vehicle, saturation, autonomous vehicles.

## Agradecimientos

Los autores quieren agradecer el apoyo recibido del Ministerio de Ciencia e Innovación a través del Proyecto DPI2009-14552-C02.

## Referencias

- Aguiar, A., Cremean, L., Hespanha, J., dec. 2003. Position tracking for a nonlinear underactuated hovercraft: controller design and experimental results. In: Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on. Vol. 4. pp. 3858 – 3863 vol.4.  
DOI: 10.1109/CDC.2003.1271751
- Aguiar, A., Hespanha, J., aug. 2007. Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty. Automatic Control, IEEE Transactions on 52 (8), 1362–1379.  
DOI: 10.1109/TAC.2007.902731
- Aguilar-Ibáñez, C., Sira-Ramírez, H., Suárez-Castañón, M. S., Martínez-Navarro, E., Moreno-Armendariz, M. A., 2012. The trajectory tracking problem for an unmanned four-rotor system: flatness-based approach. International Journal of Control 85 (1), 69–77.  
DOI: 10.1080/00207179.2011.638328
- Ariaei, F., Jonckheere, E., june 2006. Ldv approach to circular trajectory tracking of the underactuated hovercraft model. In: American Control Conference, 2006. p. 6 pp.  
DOI: 10.1109/ACC.2006.1657329
- Ashrafiuon, H., Muske, K., McNinch, L., Soltan, R., nov. 2008. Sliding-mode tracking control of surface vessels. Industrial Electronics, IEEE Transactions on 55 (11), 4004–4012.  
DOI: 10.1109/TIE.2008.2005933
- Balluchi, A., Bicchi, A., Piccoli, B., Soueres, P., 2000. Stability and robustness of optimal synthesis for route tracking by dubins' vehicles. In: Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on. Vol. 1. pp. 581–586 vol.1.  
DOI: 10.1109/CDC.2000.912827
- Behal, A., Dawson, D., Dixon, W., Fang, Y., mar 2002. Tracking and regulation control of an underactuated surface vessel with nonintegrable dynamics. Automatic Control, IEEE Transactions on 47 (3), 495–500.  
DOI: 10.1109/9.989148
- Brockett, R., jan. 1976. Nonlinear systems and differential geometry. Proceedings of the IEEE 64 (1), 61–72.  
DOI: 10.1109/PROC.1976.10067
- Chaos, D., 2010. Control no lineal de vehículos subactuados marinos no holonómicos. Ph.D. thesis, Department of Informática y Automática of UNED University, Spain.
- Dong, W., Guo, Y., june 2005. Nonlinear tracking control of underactuated surface vessel. In: American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005. pp. 4351–4356 vol. 6.  
DOI: 10.1109/ACC.2005.1470664

- Dumbar, W. B., Olfati-Saber, R., Murray, R. M., 2003. Nonlinear and cooperative control of multiple hovercraft with input constraints. In: European Control Conference.
- Encarnação, P., Pascoal, A., 2001. Combined trajectory tracking and path following: an application to the coordinated control of autonomous marine craft. In: Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on. Vol. 1. pp. 964–969 vol.1.  
DOI: 10.1109/.2001.980234
- Fantoni, I., Lozano, R., Mazenc, F., Pettersen, K. Y., 2000. Stabilization of a nonlinear underactuated hovercraft. International Journal of Robust and Nonlinear Control 10 (8), 645–654.
- Fliess, M., Lévine, J., Rouchon, P., 1995. Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. International Journal of Control 61, 1327–1361.
- Khalil, H. K., 2002. Nonlinear systems, 3rd Edition. Prentice Hall.
- Kolmanovsky, I., McClamroch, N., dec 1995. Developments in nonholonomic control problems. Control Systems Magazine, IEEE 15 (6), 20–36.  
DOI: 10.1109/37.476384
- Lefebvre, E., Pettersen, K., Nijmeijer, H., jan 2003. Tracking control of an underactuated ship. Control Systems Technology, IEEE Transactions on 11 (1), 52–61.  
DOI: 10.1109/TCST.2002.806465
- Murray, R., Sastry, S., may 1993. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids. Automatic Control, IEEE Transactions on 38 (5), 700–716.  
DOI: 10.1109/9.277235
- Olfati-Saber, R., nov 2002. Global configuration stabilization for the vtol aircraft with strong input coupling. Automatic Control, IEEE Transactions on 47 (11), 1949–1952.  
DOI: 10.1109/TAC.2002.804457
- Oriolo, G., Nakamura, Y., dec 1991. Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: underactuated manipulators. In: Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on. pp. 2398–2403 vol.3.  
DOI: 10.1109/CDC.1991.261620
- Oya, M., Su, C.-Y., Katoh, R., feb 2003. Robust adaptive motion/force tracking control of uncertain nonholonomic mechanical systems. Robotics and Automation, IEEE Transactions on 19 (1), 175–181.  
DOI: 10.1109/TRA.2002.807528
- Sira-Ramirez, H., nov 2002. Dynamic second-order sliding mode control of the hovercraft vessel. Control Systems Technology, IEEE Transactions on 10 (6), 860–865.  
DOI: 10.1109/TCST.2002.804134
- Sira-Ramirez, H., Ibanez, C., 2000. The control of the hovercraft system: a flatness based approach. In: Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on. pp. 692–697.  
DOI: 10.1109/CCA.2000.897513
- Sira-Ramirez H., I. C., 2000. On the control of the hovercraft system. Dynamics and Control 10, 151–163.
- Toussaint, G., Basar, T., Bullo, F., 2000. Tracking for nonlinear underactuated surface vessels with generalized forces. In: Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on. pp. 355–360.  
DOI: 10.1109/CCA.2000.897450

## Apéndice A. Cotas del Lema 1

En primer lugar se expande el cálculo de la señal de control. Para ello es necesario calcular  $F_x$  y  $F_y$  usando (10) y (11) y con ellos  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ . Aplicando el teorema del valor medio a  $F$ , sabemos que existen unos parámetros  $\xi_1$  y  $\xi_2$  tales que

$$F = F_r + \frac{\partial F}{\partial F_x} \Big|_{F_x=\xi_1} (F_x - F_{xr}) + \frac{\partial F}{\partial F_y} \Big|_{F_y=\xi_2} (F_y - F_{yr})$$

Determinando entonces las derivadas parciales que aparecen en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial F_x} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} = \cos(\psi_c), \quad \frac{\partial F}{\partial F_y} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} = \sin(\psi_c)$$

y puesto que  $|F_x - F_r| < F_0$  y  $|F_y - F_r| < F_0$  se concluye que

$$|F_r(t)| - 2F_0 \leq |F(t)| \leq |F_r(t)| + 2F_0. \quad (\text{A.1})$$

A continuación es necesario calcular  $\psi_c$  y sus derivadas utilizando (8):

$$\dot{\psi}_c = (F_x \dot{F}_y - \dot{F}_x F_y) / F^2 \quad (\text{A.2})$$

$$\ddot{\psi}_c = (F_x \ddot{F}_y - \ddot{F}_x F_y) / F^2 - 2\dot{\psi}_c (F_x \dot{F}_x - \dot{F}_y F_y) / F^2. \quad (\text{A.3})$$

Puesto que estas expresiones dependen de las derivadas de  $F_x$  y  $F_y$ , el cálculo queda como sigue:

$$\dot{F}_x = \dot{F}_{xr} - \text{sat}'_1(\cdot, F_0)((k_1 - k_2 d_u) e_{vx} + k_2(F \cos(\psi) - F_{xr}))$$

$$\dot{F}_y = \dot{F}_{yr} - \text{sat}'_1(\cdot, F_0)((k_1 - k_2 d_u) e_{vy} + k_2(F \sin(\psi) - F_{yr}))$$

$$\dot{F} = \cos(\psi_c) \dot{F}_x + \sin(\psi_c) \dot{F}_y$$

$$\begin{aligned} \ddot{F}_x = & \ddot{F}_{xr} - \text{sat}''_1(\cdot, F_0)((k_1 - k_2 d_u) e_{vx} + k_2(F \cos(\psi) - F_{xr}))^2 \\ & - (k_1 - k_2 d_u) \text{sat}'_1(\cdot, F_0)(-d_u e_{vx} + F \cos(\psi) - F_{xr}) \\ & - k_2 \text{sat}'_1(\cdot, F_0)(\dot{F} \cos(\psi) - rF \sin(\psi) - \dot{F}_{xr}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{F}_y = & \ddot{F}_{yr} - \text{sat}''_1(\cdot, F_0)((k_1 - k_2 d_u) e_{vy} + k_2(F \cos(\psi) - F_{yr}))^2 \\ & - (k_1 - k_2 d_u) \text{sat}'_1(\cdot, F_0)(-d_u e_{vy} + F \sin(\psi) - F_{yr}) \\ & - k_2 \text{sat}'_1(\cdot, F_0)(\dot{F} \cos(\psi) - rF \cos(\psi) - \dot{F}_{yr}). \end{aligned}$$

Donde se han omitido los argumentos de las funciones de saturación ya que no son necesarios para la discusión que nos ocupa. Lo único relevante es que por las propiedades de la función de saturación  $\text{sat}_1$  todos los términos que involucran la saturación y sus derivadas están acotados por una constante multiplicada por  $F_0$ . Por otro lado, de acuerdo con la Proposición 1, transcurrido un tiempo finito  $T_1$  las velocidades están también acotadas, de tal modo que al estar fijadas las constantes de control  $k_1$  y  $k_2$  existen unas constantes positivas  $c_5$ - $c_8$  tales que  $|\dot{F}_x - \dot{F}_{xr}| \leq c_5 F_0$ ,  $|\dot{F}_y - \dot{F}_{yr}| \leq c_6 F_0$ ,  $|\ddot{F}_x - \ddot{F}_{xr}| \leq c_7 F_0$ ,  $|\ddot{F}_y - \ddot{F}_{yr}| \leq c_8 F_0$ .

Defínanse ahora las funciones  $g_1 = F^2 \dot{\psi}_c$  y  $g_2 = F^4 \ddot{\psi}_c$ . De acuerdo con A.2 y A.3, estas expresiones son continuas. Además sus derivadas parciales respecto a  $\dot{F}_x$ ,  $\dot{F}_y$ ,  $\ddot{F}_x$  y  $\ddot{F}_y$  son acotadas, por lo tanto aplicando el teorema del valor medio, del mismo modo que en el cálculo de  $F$ , sabemos que existe unas constantes  $c_8$  y  $c_9$  tales que:

$$|g_1 - F_r^2 \dot{\psi}_r| \leq c_8 F_0 \quad (\text{A.4})$$

$$|g_2 - F_r^4 \ddot{\psi}_r| \leq c_9 F_0 \quad (\text{A.5})$$

Finalmente introduciendo estas expresiones en el cálculo de  $\tau$  (19) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau - \tau_r = & d_r(\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_r) + (\ddot{\psi}_c - \ddot{\psi}_r) - \text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) |\tau - \tau_r| \\ \leq & d_r |g_1 - F_r^2 \dot{\psi}_r| / F^2 + |g_2 - F_r^4 \ddot{\psi}_r| / F^4 + \tau_0 \\ \leq & (d_r F^2 |g_1 - F_r^2 \dot{\psi}_r| + d_r F^2 |F^2 - F_r^2| |\dot{\psi}_r|) / F^4 + \\ & + (|g_2 - F_r^4 \ddot{\psi}_r| + |F^4 - F_r^4| |\ddot{\psi}_r|) / F^4 + \tau_0. \end{aligned}$$

Para concluir, teniendo en cuenta las siguientes condiciones:  $|F^2 - F_r^2| = |F + F_r| |F - F_r| \leq 2|F + F_r| F_0$ ,  $|F^4 - F_r^4| \leq |F^2 + 2F_r^2| |F + F_r| F_0$ , que  $|F_r| > F_{\min}$  así como la cota (A.1), se deduce que existe una constante  $c_{10}$  tal que:

$$|\tau - \tau_r| < c_{10} F_0 / (F_{\min} - 2F_0)^4 + \tau_0 \quad (\text{A.6})$$

## Apéndice B. Demostración del Lema 2

Es necesario considerar tres casos, dependiendo de que  $b_1$  sea mayor, menor o igual a  $cb_2$ :

### Apéndice B.1. Primer caso, $b_1 > cb_2$ :

Defínase la siguiente función de Lyapunov

$$V_1 = \int_0^{b_1x_1+b_2x_2} \text{sat}(s)ds + (b_1 - cb_2)\frac{x_2^2}{2}$$

El segundo término es claramente no negativo puesto que  $b_1 > cb_2$ . Por otra parte la integral de una función de saturación es definida positiva ya que si  $s$  es positivo  $\text{sat}(s)$  también lo es (puesto que  $\text{sat}(\cdot)$  es una función monótona creciente y  $\text{sat}(0) = 0$ ), del mismo modo si  $s$  es negativo,  $\text{sat}(s)$  es también negativo, por lo que finalmente la integral es siempre no negativa. Además  $V_1$  sólo se anula en el origen, ya que cuando  $V_1 = 0$  se tiene que  $x_2 = 0$  y que  $b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ , luego  $x_1 = x_2 = 0$ . De donde concluimos que  $V_1$  es definida positiva. Sabiendo que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |\text{sat}(x)| = M \Rightarrow \int_0^{\pm\infty} \text{sat}(s)ds = \infty$ , y que el término  $x_2^2$  no es acotado, se deduce que además  $V_1$  es radialmente no acotada.

Tomando entonces la derivada de  $V_1$  a lo largo de la trayectoria se tiene:

$$\dot{V}_1 = -b_2 \text{sat}(b_1x_1 + b_2x_2) (\text{sat}(b_1x_1 + b_2x_2) - p) - (b_1 - cb_2)x_2 (cx_2 - p)$$

A la vista de la expresión anterior es claro que si  $p$  es nulo entonces la derivada de  $V_1$  es definida negativa y por tanto el sistema sería global y asintóticamente estable. Definiendo entonces  $q = \text{sat}(b_1x_1 + b_2x_2)$ , se obtiene:

$$\dot{V}_1 = -b_2q(q - p) - (b_1 - cb_2)x_2 (cx_2 - p)$$

que es una expresión cuadrática en  $x_2$  y  $q$ . Puesto que los términos de segundo orden son negativos, es claro que la derivada de  $V_1$  será negativa si  $q$  y  $x_2$  son suficientemente grandes. Sea  $p_m$  el máximo valor de  $|p|$  en el intervalo  $[t_0, t]$ , entonces la región en la que  $V_1$  puede crecer está limitada por una elipse en coordenadas  $x_2$  y  $q$  correspondiente a la ecuación  $b_2q(q - p) + (b_1 - cb_2)x_2(cx_2 - p_m) = 0$  en la cual el máximo valor de  $q$  es  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{b_1}{cb_2}})p_m$  y el máximo valor de  $x_2$  es  $\frac{1}{2c}(1 + \sqrt{\frac{b_1}{b_1 - cb_2}})p_m = c_{11}p_m$ . Ahora bien, puesto que según las condiciones del Lema  $p_m < \alpha M$  se tiene que:

$$|q| \leq \alpha^{-1}|p| \leq \alpha^{-1}\alpha M = M$$

Y dado que  $q < M$  la región

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : \text{sat}(|b_1x_1 + b_2x_2|) \leq \alpha^{-1}(p_m), |x_2| \leq c_{11}p_m\}$$

está bien definida, es acotada y en su exterior  $V_1$  disminuye.

Como  $V_1$  es radialmente no acotada entonces existe una curva de nivel de  $V_1 = V_{max}$  que encierra la región  $\Omega$ . Esta curva de

nivel de  $V_1$  es una región de atracción ya que en el exterior  $V_1$  decrece y una vez en el interior las trayectorias no pueden salir ya que la derivada de  $V_1$  es negativa en la frontera. Además por la continuidad de la función de saturación la región  $\Omega$  puede hacerse tan pequeña como se quiera si  $p_m \rightarrow 0$ , de tal modo que  $V_{max} \rightarrow 0$  cuando  $p_m \rightarrow 0$ , y por tanto se satisface (24).

### Apéndice B.2. Segundo caso, $b_1 < cb_2$ :

En este caso se define la siguiente función de Lyapunov cuadrática y definida positiva:

$$V_2 = 1/2 (cb_2 - b_1)x_2^2 + b_1/2(cx_1 - x_2)^2$$

cuya derivada es

$$\dot{V}_2 = -c(cb_2 - b_1)x_2^2 - c(b_1x_1 + b_2x_2)(\text{sat}(b_1x_1 + b_2x_2) - p)$$

Si  $p$  fuese cero entonces la derivada de  $V_2$  sería definida negativa y por tanto el sistema sería global asintóticamente estable. Definiendo ahora  $q_2 = b_1x_1 + b_2x_2$

$$\dot{V}_2 \leq -c(cb_2 - b_1)x_2^2 - cz_2 \text{sat}(z_2) + cz_2p$$

Es claro que si  $|q_2| > \text{sat}^{-1}(p_m)$  entonces  $V_2$  decrece sea cual sea el valor de  $x_2$  (ya que la función inversa de saturación está bien definida al ser  $p_m < M$ ). Por otra parte si  $q_2$  es menor o igual que  $\text{sat}^{-1}(p_m)$  entonces

$$\dot{V}_2 \leq -c((cb_2 - b_1)x_2^2 - \text{sat}^{-1}(p_m)p_m)$$

que es claramente negativo siempre y cuando se cumpla que  $|x_2|^2 > \frac{\text{sat}^{-1}(p_m)p_m}{(cb_2 - b_1)}$ , luego la región

$$\Omega_2 = \left\{ (x_1, x_2) : |b_1x_1 + b_2x_2| \leq \text{sat}^{-1}(p_m), |x_2|^2 \leq \frac{\text{sat}^{-1}(p_m)p_m}{(cb_2 - b_1)} \right\}$$

Está bien definida, es acotada y fuera de ella  $V_2$  es decreciente, de este modo se llega a una conclusión análoga a la del caso 1.

### Apéndice B.3. Tercer caso, $b_1 = cb_2$ :

Para analizar qué ocurre en este caso se define la variable  $q_3 = cx_1 + x_2$ , y la función  $V_3 = q_3^2/2$  entonces:

$$\dot{V}_3 = -q_3(\text{sat}(b_2q_3) - p) \leq -|q_3|(|\text{sat}(b_2q_3)| - |p|)$$

Puesto que  $p_m < M$  entonces esta función será decreciente siempre y cuando  $|q_3| > \text{sat}^{-1}(p_m)/b_2$  de tal forma que  $q_3$  es global y finalmente acotado por  $\text{sat}^{-1}(p_m)/b_2$ .

Si ahora se analiza el comportamiento de  $x_1$  se tiene que:

$$\dot{x}_1 = -cx_1 + q_3$$

Que es un sistema lineal estable con perturbación  $q_3$  ya que tomando  $V_4 = \frac{x_1^2}{2}$  entonces  $\dot{V}_4 = -x_1(cx_1 - q_3) \leq -|x_1|(|x_1| - |q_3|)$ . Luego  $x_1$  es global y finalmente acotado por  $q_3/c$  y por ende por  $\frac{\text{sat}^{-1}(p_m)}{b_2c}$ , que es una función creciente de  $p_m$  de modo que el resultado (24) también se cumple en este caso.