

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS LOGÍSTICOS Y DE PRODUCCIÓN MEDIANTE REDES DE PETRI

Emilio Jiménez[†], Mercedes Pérez[‡], Félix Sanz[‡]

[†] *Departamento de Ingeniería Eléctrica. Área de Ingeniería de Sistemas y Automática.*

[‡] *Departamento de Ingeniería Mecánica. Área de Expresión Gráfica en Ingeniería.
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial. Universidad de La Rioja.
C/ Luis de Ulloa 20, 26004 Logroño, La Rioja, España.*

emilio.jimenez@die.unirioja.es; {mercedes.perez;felix.sanz}@dim.unirioja.es

Resumen: Las redes de Petri forman una familia de formalismos, con diferentes niveles de abstracción (generalizadas, coloreadas, extendidas, etc.), así como diferentes interpretaciones (autónoma, temporizada determinista, estocástica, etc.) que constituyen un paradigma para el modelado, análisis, síntesis, optimización e implementación de los sistemas dinámicos de eventos discretos. En este artículo se analiza su utilización como herramienta para modelar y simular sistemas logísticos y de producción, caracterizados básicamente por su gran complejidad y nivel de concurrencia, basándonos en un sistema real sobre el que se muestra la metodología de aplicación a todos los niveles del sistema y los resultados más relevantes obtenidos. *Copyright © 2005 CEA-IFAC*

Palabras Clave: Modelado (*Modelling*), Simulación (*Simulation*), Sistemas logísticos (*Logistic systems*), Sistemas productivos (*Industrial production systems*), Automatización (*Automation*), Redes de Petri (*Petri-nets*), Sistemas dinámicos de eventos discretos (*Discrete event dynamic systems*).

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de grafos ha jugado tradicionalmente un papel muy importante en el desarrollo y la aplicación de sistemas logísticos. Las redes de Petri (RdP) son una potente extensión de los grafos de estados que proporcionan una representación más compacta y efectiva de los sistemas concurrentes (con evoluciones paralelas y sincronizaciones). Pueden ser aplicadas a sistemas logísticos de varias formas: sus interpretaciones gráfica (grafo bipartido directo) y matemática (ecuación de estados) las hacen particularmente interesantes para tratar sistemas complejos. Éstos pueden simularse eficientemente gracias a la simplicidad y potencia de las RdP para representaciones gráficas, y pueden optimizarse

utilizando las propiedades de las RdP y sus herramientas matemáticas de análisis (Figura 1).

Las características básicas de las redes de Petri en los sistemas logísticos pueden resumirse en las siguientes (DiCesare, *et al.*, 1993):

- Proporcionan una metodología y un formalismo para modelar sistemas discretos.
- Su representación gráfica es sencilla, pero permite representar sistemas complejos, especialmente aquéllos que incluyen concurrencia. Por esto es una herramienta ideal para realizar simulaciones.
- Existe una amplia teoría matemática que permite el análisis del comportamiento de sistemas, que incluye técnicas para su optimización (reducción, detección de bloques, etc.).

- Están muy extendidas en la comunidad académica y cada vez más en la industrial, por lo que existen diversidad de aplicaciones para gestionar RdP (Guasch, *et al.*, 2002; Jiménez, 2001).
- Las contribuciones relativamente recientes en continuización de sistemas discretos para grandes poblaciones han proporcionado resultados aproximados mediante la simulación de un modelo continuo (Recalde and Silva, 2000; Jiménez, *et al.*, 2001). De esta forma se agiliza la toma de decisiones que se consigue con menor coste computacional.
- Representan un paradigma para el modelado y análisis de sistemas dinámicos, con varios niveles de abstracción e interpretación (Jensen, *et al.*, 1991; Thiagarajan, 1987; Silva, 1985) así que pueden aplicarse a todos los niveles de decisión y con diferentes niveles de detalle.

Además, los sistemas logísticos normalmente son representados por modelos discretos complejos con grandes poblaciones; y los sistemas discretos presentan el problema de explosión de estados (conjunto de estados alcanzables extremadamente grande), inherente al análisis numerativo, debido a las grandes poblaciones. Pero *grandes poblaciones* implican errores relativamente pequeños si el modelo se relaja a una aproximación continua (en los números reales no negativos). De esa forma, la complejidad de cálculo del modelo se reduce y pueden utilizarse varias herramientas matemáticas: técnicas de programación lineal, ecuaciones diferenciales, etc. (Recalde and Silva, 2000). Por tanto, otra propiedad importante de las RdP, por la que pueden representar este tipo de sistemas, es que pueden analizarse desde dos enfoques distintos: como sistemas discretos o como una aproximación continua del sistema discreto real (Figura 1).

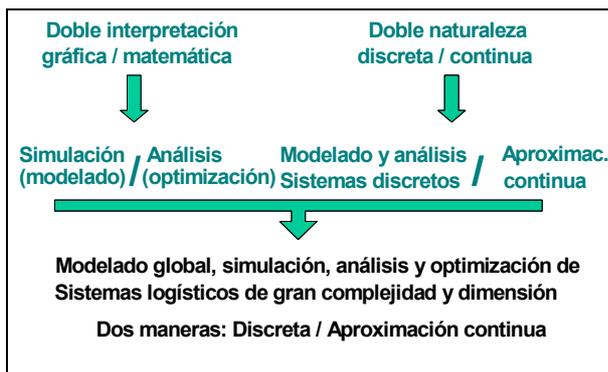


Figura 1. Análisis de RdP como una herramienta para la mejora mediante simulación de sistemas logísticos.

En este artículo se ilustran las propiedades mencionadas mediante la mejora por simulación de un sistema logístico-productivo compuesto por una red de plantas de producción similares entre sí. Las plantas comparten el sistema logístico, tanto en la recepción de materiales como en la distribución de productos finales, e incluso ocasionalmente en los productos intermedios.

Los niveles diferentes de abstracción e interpretación han facilitado la integración de los modelos de los sistemas logístico y productivo. De esta forma es posible combinar en un único modelo de RdP la simulación para la optimización y la toma de decisiones en operaciones complejas, a todos los niveles de decisión: estratégica, táctica y operacional. Esto constituye una de las particularidades que se han desarrollado en el modelado y simulación del sistema real que se presenta.

Los estudios que se presentan y sus aplicaciones han sido desarrollados como parte de un proyecto de investigación vivo que se ha aplicado recientemente a un sistema logístico y de producción real, y que siguen desarrollándose y aplicándose, ya que se plantean para todo el ciclo de vida del proceso: diseño, desarrollo y mantenimiento en la fase operacional. Por tanto, este artículo es en esencia metodológico, ya que muestra cómo modelar y simular sistemas logísticos y de producción mediante RdP en sus diversas manifestaciones, y ello se ejemplifica con una aplicación que valida los conceptos proporcionados como aplicables a los problemas del mundo real.

Tras esta introducción previa, en la sección 2 se introduce la utilización de las RdP para modelar, simular, analizar y optimizar sistemas discretos y se presentan las técnicas de análisis formal. La sección 3 resume un ejemplo real de sistema logístico y productivo que se empleará a lo largo del artículo para ilustrar la metodología de modelado y análisis (secciones 4 y 5) y simulación (sección 6) de sistemas logísticos con RdP aplicando sobre el mismo las novedades e innovaciones que se han incluido en la simulación: la integración del análisis de los sistemas logísticos y de producción, inclusión de modelos discretos, continuos e híbridos para tratar todos los niveles de decisión, y las aplicaciones adicionales de implementación de los sistemas como la trazabilidad del sistema y el producto, o la simulación semifísica.

2. LAS REDES DE PETRI EN LOS SISTEMAS LOGÍSTICOS Y PRODUCTIVOS

2.1 Introducción a las redes de Petri

Una RdP es un grafo bipartido directo con dos tipos de nodos: *lugares* (representados por círculos) y *transiciones* (representados por rectángulos). Los *arcos* (representados por flechas) unen consecutivamente un lugar con una transición, o viceversa. Los lugares tienen un número entero no negativo de *marcas* (representadas por puntos), y al conjunto de marcas en todos los lugares (al vector de las marcas) se le denomina *marcado*. El marcado evoluciona por el disparo de las transiciones, debido a la ocurrencia de sus eventos asociados. Los lugares pueden ser interpretados como variables de estado,

los eventos como las señales de entrada, y el vector de marcado como el vector de estado, teniendo en cuenta que pueden existir redundancias.

La evolución del marcado se realiza de la siguiente manera. Una transición está *sensibilizada* cuando todos sus lugares previos (los que tienen un arco a esa transición) tienen alguna marca. Si una transición está sensibilizada y ocurre su evento asociado entonces sus lugares previos pierden una marca cada uno, y ganan una marca los lugares posteriores (los que reciben un arco desde la transición).

Pero una RdP se puede representar también por una tupla $N = \langle P, T, \mathbf{Pre}, \mathbf{Post} \rangle$, donde P es el conjunto de lugares, T el de transiciones, y la estructura estática del sistema se define con \mathbf{Pre} y \mathbf{Post} , matrices que representan respectivamente a los arcos que van de lugares a transiciones y viceversa. En redes puras (aquellas en que ningún lugar es previo y posterior a una misma transición) basta con conocer la matriz de incidencia $\mathbf{C} = \mathbf{Pre} - \mathbf{Post}$. La ecuación de estado o ecuación fundamental (1) relaciona el marcado \mathbf{m} en cada instante, con el marcado inicial \mathbf{m}_0 , con \mathbf{C} y con el vector de disparos $\boldsymbol{\sigma}$ (vector que lleva la cuenta del número de disparos de cada transición).

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{N}^{|T|}$ y $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{|P|}$.

El lector no habituado a tratar con RdP puede consultar (Silva, 1985; Murata, 1989; Silva, 1993; Silva and Teruel, 1996; David and Alla, 2005) para revisar la terminología y los conceptos básicos. Se recomienda especialmente la primera de esas referencias, pues es un libro básico para todo el que trata con RdP (puede considerarse una obra clásica, con vigencia total).

A modo de ejemplo de todo lo anterior puede adelantarse la RdP de la Figura 9, que más adelante de estudiará con detalle; tiene 5 lugares y 5 transiciones, y en la figura se muestra la matriz de incidencia. Por ejemplo, un disparo en la transición t_1 supondría que desapareciese una marca de los lugares p_1 y p_5 y que apareciese una nueva en p_2 , como puede comprobarse tanto del gráfico de la RdP como de la ecuación de estado (a partir de la matriz de incidencia \mathbf{C}).

Además puede apreciarse en ese ejemplo (tanto en el gráfico como en la matriz de incidencia) que los arcos tienen un cierto valor asociado, su *peso* (cuando el peso es 1 se omite); las RdP con pesos en los arcos se denominan RdP generalizadas (frente a las ordinarias que tienen siempre peso unitario). En este tipo de RdP, las reglas de validación de transiciones (el número de marcas en cada lugar previo) y de disparo (el número de marcas que aparecen y desaparecen en los lugares) tienen en cuenta el peso de los arcos. Habitualmente éste es el tipo de RdP que se considera mientras no se indique lo contrario, y así se hará en adelante.

2.2 Modelado y análisis de sistemas logísticos y productivos

Los sistemas de producción y logísticos son altamente concurrentes, presentando evoluciones paralelas y sincronización (conurrencia), exclusiones mutuas, y conflictos, que son típicos en entornos distribuidos. Necesitan ser analizados desde dos puntos de vista, el cualitativo y el cuantitativo. El cualitativo busca comprobar el correcto funcionamiento del sistema, apoyándose en propiedades como ausencia de bloqueos, exclusiones mutuas, recursos compartidos, etc. (Silva 1993). El cuantitativo busca analizar o evaluar la eficiencia del sistema, mediante propiedades de prestaciones (*throughput*), de respuesta (tiempos de producción) o de utilización (tiempo medio de utilización de una máquina).

Esa evaluación del correcto funcionamiento y de su eficiencia se realiza sobre modelos, y las RdP constituyen un paradigma de modelado de sistemas dinámicos de eventos discretos (SDED), de gran eficiencia para este tipo de sistemas en sus diferentes aspectos, debido a la dualidad gráfico-matemática, los diferentes niveles (autónoma, temporizada, estocástica, etc.), las distintas interpretaciones o semánticas (i.e., significados físicos) y los diferentes niveles de detalle.

La especificación del modelo en RdP permite obtener información, bien analizando la evolución del sistema o bien simplemente su estructura. El análisis de la estructura permite obtener rápidamente conclusiones sobre propiedades importantes del sistema. El análisis del comportamiento puede realizarse de diversas maneras: resolución analítica, simulación determinista y estudio de trayectorias, simulación estadística, simulación de prestaciones (Guasch, *et al.*, 2002).

Una RdP conlleva una amplia teoría matemática que permite el análisis del comportamiento del sistema, así como diferentes técnicas para su optimización, como por ejemplo la simplificación de lugares implícitos, la reducción de lugares, o el método de los lugares fuente. El análisis de una RdP usualmente consiste en: validación, verificación y análisis de propiedades. Entre las propiedades básicas cabe mencionar la vivacidad, la ciclicidad, la limitación, la ausencia de conflictos y de bloqueos, la exclusión mutua, el avance sincrónico, el ser conservativa y consistente, los invariantes de marcado o disparo, la ausencia de bloqueos, los cerrojos y las trampas (Silva 1985).

Los métodos de análisis de validez de una RdP se dividen en dinámicos (simulación) y estáticos. Estos últimos incluyen la enumeración, la reducción (o transformación), y el análisis estructural (por álgebra lineal, o por cerrojos y trampas) (Silva and Teruel, 1997). Se ha dedicado mucho esfuerzo en desarrollar las técnicas de análisis y las propiedades de las RdP, las cuales permiten conocer el comportamiento del sistema sin que sea preciso realizar una simulación. Pero veremos que la simulación también es importan-

te desde un doble punto de vista: como un método aproximado de determinación de prestaciones del sistema, y como un método de ensayo de cualquier operación que se vaya a realizar en el sistema real, para evitar comportamientos indeseados o para comprender las razones de ciertos comportamientos extraños. Todo esto se resume en el esquema de la Figura 2.



Figura 2. Análisis de las redes de Petri como herramientas para la mejora de sistemas logísticos mediante análisis y simulación

3. SISTEMA LOGÍSTICO Y PRODUCTIVO REAL

Veamos a continuación la descripción del sistema logístico y productivo que emplearemos como ejemplo en las siguientes secciones. El sistema está compuesto por varias plantas industriales, similares entre sí, y que comparten el sistema logístico de abastecimiento y distribución (Jiménez, 2001; Jiménez and Pérez, 2003).

3.1 El sistema de producción

El sistema de producción se compone de varios procesos diferentes sincronizados que trabajan en paralelo. Es prácticamente imprescindible emplear RdP para modelarlo debido al alto grado de concurrencia presente en el sistema. Por otra parte, el marcado es elevado debido a que contempla diversidad de elementos: recursos compartidos (robots, transbordadores, cintas transportadoras), elementos de transporte y almacenamiento (vagones, bandejas y cajas), y los elementos de producción (ladrillos). Por tanto se complementará el análisis discreto con las técnicas de continuización.

El sistema (Figura 3) consiste básicamente en los siguientes elementos: unos vagones que hacen un ciclo entrando y saliendo a un secadero (ciclo 6-7-8-9-10-23 de la figura), donde los ladrillos pierden la humedad; unos vagones distintos que hacen lo mismo en un horno (ciclo 15-16-17-18-19) donde los ladrillos cristalizan; unas bandejas sobre las que se

apoyan los ladrillos para ir en el primer tipo de vagones (ciclo 4-5-6-7-8-9-10-11-12); y finalmente los ladrillos que se acoplan a los elementos anteriores para pasar por el secadero y el horno y finalmente ser empaquetados.

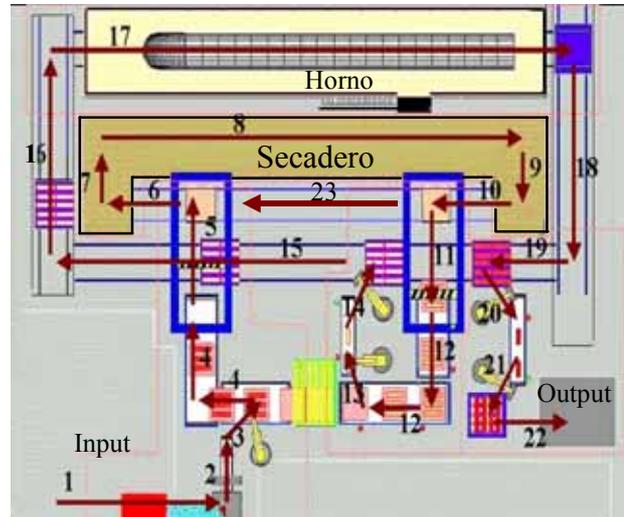


Figura 3. Sistema de producción con alto grado de concurrencia

Por tanto el recorrido de los ladrillos en el proceso es el siguiente: los nuevos ladrillos (pieza de barro húmedo) que se van produciendo (1 en la Figura 3) se mueven por la *cinta transportadora a* (2), y el *robot 1* (3) los coloca en las bandejas (de capacidad n). Cuando una bandeja se completa, las *cintas transportadoras 3 y 4* (4) la mueven al *punto grúa 1* que la coloca (5) en un vagón de bandejas (con p bandejas de capacidad). Cuando este vagón está lleno, se mueve (6) sobre un rail hacia la entrada del secadero, y entonces sigue una ruta (7-8-9) a través del mismo durante un tiempo especificado. Al terminar el recorrido, el vagón de bandejas sale (10) al área de descarga en donde espera el *punto grúa 2* (11), que descarga las bandejas desde el vagón. Dichas bandejas avanzan (12) por las *cintas 1 y 2*. El *robot 3* (13) apila los ladrillos de las bandejas. Entonces la bandeja vacía sigue su ruta cíclica. Los ladrillos apilados son cargados ahora por el *robot 2* (14) a un vagón de ladrillos. Cuando éste está lleno (con m ladrillos), avanza (15) al *transbordador 1* que lo transporta (16) a la vertical del horno. Después de ese trayecto, sigue una ruta (17) a través del horno durante un tiempo, y cuando termina, el *transbordador 2* lo mueve de nuevo (18). Entonces el vagón de ladrillos avanza (19) a un área de descarga, donde el *robot 4* (20) le saca los ladrillos a la *cinta c*, y después el *robot 5* (21) los deposita (22) en las cajas (*pallets*).

En el párrafo anterior se ha representado entre paréntesis la ubicación de cada elemento en la Figura 3, y con cursiva los nombres de los elementos (robots, cintas transportadoras, etc.) que indican la zona que les corresponde en el modelo del proceso realizado mediante RdP en la Figura 4. En ella se

aprecia el recorrido concurrente de los ladrillos desde su comienzo (lugar de entrada “input”, más grande arriba a la izquierda) hasta que salen en cajas (lugar de salida “output”, más grande, abajo a la derecha) tras innumerables sincronizaciones con todos los elementos del sistema. Expresamente no se ha dividido la figura en partes que muestren con claridad a mayor tamaño los lugares y transiciones, porque el objetivo en este artículo no es modelar sino simular y analizar los modelos. En cualquier caso el modelo se encuentra en (Jiménez, 2001).

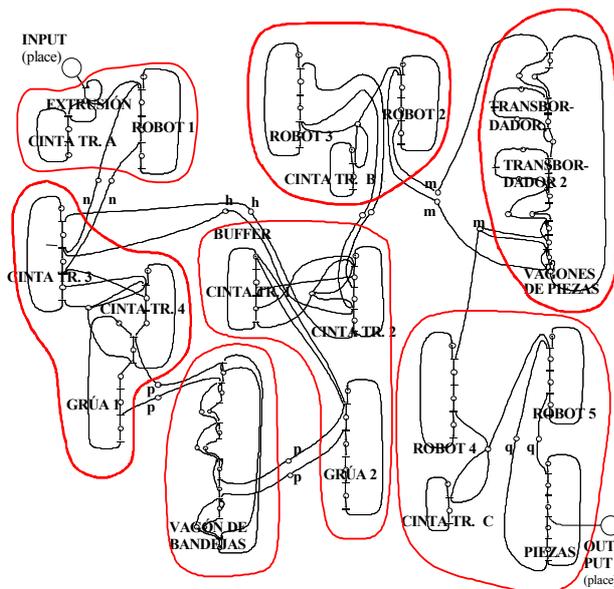


Figura 4. RdP que modela el sistema de la Figura 3.

Como dato adicional, el modelo puede simplificarse a un proceso secuencial determinísticamente sincronizado (PSSD) (Campos, *et al.*, 1997) porque puede dividirse en bloques que se comportan como máquinas de estados conectadas con almacenes intermedios (*buffers*), y satisfacen ciertas restricciones. Esa característica permite aplicar las propiedades conocidas para ese tipo de sistemas. En el modelo de la Figura 4 esos bloques están acotados con curvas cerradas, con los *buffers* intermedios (modelados por lugares) fuera de los bloques, y con el lugar de entrada al proceso y el de salida. Se diferencian 7 bloques, si bien el último de ellos (abajo a la derecha) podría haberse separado también en dos otros más, análogamente.

Comentar que los *buffers* son dobles (dos lugares entre dos bloques conectados) porque se han modelado con lugares tanto para los elementos almacenados como los que caben en ese momento; ello se hace simplemente empleando un *lugar complementario* (Silva, 1985) al que modela los elementos en el *buffer*; en todos los casos se podía haber modelado igualmente empleando *buffers* simples, como se ha hecho entre los dos últimos bloques por hacerlo de forma distinta.

Una vez disponemos de dicho modelo del sistema de producción se puede simular el proceso para estudiar su comportamiento ante próximas maniobras

complicadas (como por ejemplo reparación de algún elemento, cambio de las piezas de producción, etc.), o bien para analizar posibles mejoras del sistema; en concreto, dada la gran cantidad de recursos compartidos del sistema y las diversas etapas del proceso, la mejora local de muchas de las partes no tiene incidencia en aumento global de la producción. Es decir, este modelo por ejemplo puede mostrar, antes de invertir, si la mejora en la velocidad de funcionamiento de los transbordadores realmente merece la pena o no. Incluso más adelante veremos, que la mejora de ciertas partes (mejora local) puede llevar a un empeoramiento global.

3.2 Sistema logístico y de distribución.

El sistema de la Figura 4 corresponde únicamente a una planta de producción, pero esa planta está integrada con el resto de las plantas (tres en total) y con el sistema logístico de abastecimiento y redistribución.

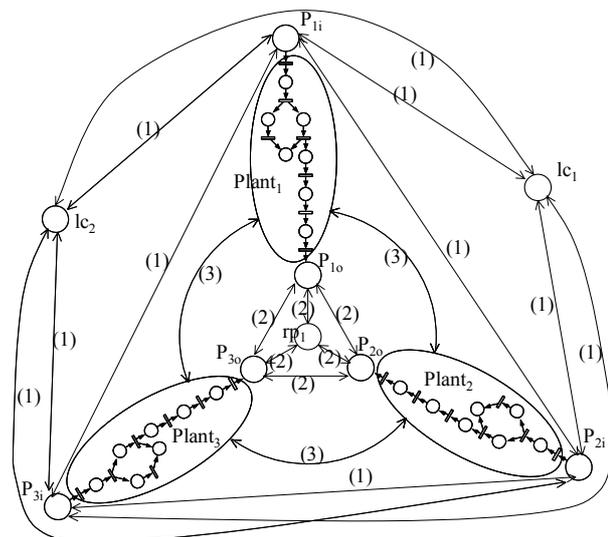


Figura 5. Esquema del sistema global logístico/productivo simplificado: (1) abastecimiento de material (a los lugares de entrada, p_i); (2) distribución de productos resultantes (desde los lugares de salida, p_o); (3) redistribución de productos intermedios en los *buffers*.

La logística de las plantas de producción en nuestro caso consiste en tres tipos de procesos: el abastecimiento de material (a los lugares de entrada de las plantas), la distribución de productos resultantes (desde los lugares de salida de las plantas), y por último la redistribución de los productos intermedios en los *buffers* (desde una planta a otra, para compensar los fallos y para reducir el tamaño de los *buffers*). Un esquema del sistema logístico/productivo de tres plantas descrito se muestra en la Figura 5.

Existen tres plantas (p_1, p_2, p_3), dos centros logísticos (lc_1, lc_2) de abastecimiento de material, y sólo un centro de almacenamiento de productos resultantes (rp_1)

(el sistema real presenta algunos más que se han omitido por simplificar). Las plantas de producción se han representado mediante los lugares de entrada (p_i), los de salida (p_o), y el resto del modelo de la planta ($plant_x$), que en conjunto no son otra cosa que una simplificación del modelo de la Figura 4.

El dibujo empleado para representar el modelo de la planta (rodeado por un óvalo) se trata de una RdP cualquiera, sin relación con el proceso real, ya que simplemente se está indicando con él que en esa posición se debe incluir el modelo de la planta; pero ese modelo puede ser muy distinto dependiendo del nivel de detalle que queramos emplear. A modo de ejemplo podemos citar tres niveles de detalle aplicables (de menor a mayor detalle): (a) modelar el proceso mediante un único lugar (es decir, el dibujo del interior del óvalo se sustituiría por un lugar), (b) modelar cada uno de los 7 bloques de la Figura 4 mediante un lugar, y esos lugares unidos entre sí mediante los *buffers* intermedios, y (c) modelar cada proceso productivo como en la Figura 4 (sin tener en cuenta la agrupación en bloques).

Con todo ello, el modelo del sistema logístico incluye el abastecimiento de material a los lugares de entrada p_i , (procesos (1) en el esquema de la Figura 5), la distribución de productos resultantes desde los lugares de salida p_o , procesos (2), y la redistribución de productos intermedios en los *buffers* en los procesos de producción, procesos (3).

La Figura 5 representa tan sólo un esquema del modelo, en el que por simplificar la representación se han representado las vías bidireccionales de distribución de materiales (procesos (1), (2) y (3)) mediante una flecha bidireccional, en vez de mediante los caminos de ida y de vuelta que corresponderían al modelo mediante RdP. Por tanto para convertir ese esquema en el modelo en RdP del sistema logístico/productivo hay que realizar el cambio indicado en la Figura 6. Además hay que tener en cuenta que los procesos de redistribución (3) de la Figura 5 representan transporte de elementos intermedios entre plantas, y que por tanto si el modelo se realiza con detalle suficiente para diferenciar diferentes *buffers* en el sistema de producción de las plantas, cada una de esas flechas bidireccionales tipo (3) del esquema corresponden a varios caminos bidireccionales (entre cada par de *buffers* similares) en el modelo.

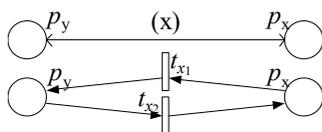


Figura 6. Equivalencia entre las flechas bidireccionales indicadas en el esquema de la Figura 5 para procesos (1), (2) y (3), con el modelo en RdP para esos procesos logísticos.

Con todo ello, la simulación conjunta del sistema completo se puede realizar al nivel que nos interese

de decisión y de detalle del sistema, acorde a la utilización que se le vaya a dar al modelo, como veremos en las secciones siguientes. Empleando esos modelos y la metodología que se relata a continuación para el análisis global de los procesos logístico y productivo se ha logrado una mejora en el comportamiento global de ambos procesos utilizando las RdP como herramienta básica de análisis y simulación.

4. METODOLOGÍA DE MODELADO DE SISTEMAS LOGÍSTICOS Y PRODUCTIVOS

4.1 Niveles de abstracción para los niveles de modelado y de decisión.

Ciertos comportamientos y características de los sistemas, al ser modelados mediante RdP, aumentan considerablemente el número de nodos del modelo, lo que dificulta notablemente su mantenimiento y su explotación.

A modo de ejemplo supongamos que el sistema modelado en la Figura 4 trabaja con varios tipos diferentes de ladrillos (cosa que ocurre en la realidad) que pueden combinarse entre sí en ciertas zonas. No sería complicado realizar el modelo partiendo del existente, pero dicho modelo sería extraordinariamente grande, por la cantidad de nodos y arcos que aparecerían (por ejemplo tendríamos que tener lugares diferentes para cada tipo de elementos). En este caso lo que se empleó es *RdP Coloreadas*, que ha permitido emplear el mismo modelo para producción de diferentes modelos simultáneamente. Las RdP Coloreadas reducen la dimensión del modelo al incrementar el nivel de abstracción permitiendo que las marcas tengan una información que se denomina *color*, a modo de atributo (en nuestro caso el tipo de elemento en producción). Con ellas se amplía la capacidad de condensación del modelo, si bien la potencia descriptiva es la misma que con las RdP generalizadas (siempre se puede traducir un modelo de un tipo al otro).

Igualmente se emplea otra extensión de las RdP ordinarias en el modelo de la Figura 4, las RdP con *arcos inhibidores*. Son arcos (terminados en un círculo en vez de una flecha) que siempre van de lugares a transiciones, y simplemente imponen a la transición como condición de sensibilización un test de cero del lugar de origen. Ese modelo podía haberse realizado sin emplear arcos inhibidores, ya que es un sistema finito, pero resultaría un modelo más complejo (con más lugares) (Jiménez, *et al.*, 2005). Cabe destacar que las RdP con arcos inhibidores sí tienen mayor potencia descriptiva que las generalizadas (Silva, 1985).

Así, según se acaba de ver, la utilización de diversos niveles de abstracción facilita la simplificación del modelo (RdP Coloreadas, RdP con arcos inhibidores, RdP con prioridades, etc.), si bien a costa de perder

resultados analíticos conocidos para los niveles más bajos de abstracción. Es decir, cuanto más bajo sea el nivel de abstracción más propiedades analíticas se conocerán sobre el formalismo y por tanto más propiedades podrán ser deducidas del modelo.

Pero además de los niveles de abstracción hay que tener en cuenta los niveles de decisión del modelo que estamos desarrollando. Si los modelos desarrollados con RdP se emplean para el análisis, síntesis, e implementación de los SDED, y en todo el ciclo de vida (diseño, desarrollo y mantenimiento), es evidente la necesidad de contar con modelos específicos para cada objetivo. En el ejemplo real que se presenta, se ha trabajado con decenas de modelos distintos: para las partes, para el conjunto, para la implementación, la puesta a punto, etc. En concreto se pueden dividir de acuerdo a los tres niveles de decisión de los sistemas logísticos: operacional, táctico y estratégico.

Habitualmente las RdP se han empleado más en el nivel operacional (por ejemplo desarrollo de la automatización de la planta en RdP) y el táctico (como el análisis conjunto de las plantas con el sistema logístico). En este último es en el que se podría incluir el modelo de la Figura 4; dicho modelo se ha obtenido mediante la unión y simplificación de los modelos detallados de cada una de las partes del sistema (metodología *bottom-up* que estudiaremos a continuación), desarrollados para la implementación y control de la planta, y por tanto clasificables como nivel operacional. El nivel estratégico (por ejemplo determinación de las oscilaciones de producción y ventas) ha sido más empleado habitualmente mediante otros formalismos, como los *diagramas de Forrester* que se emplean en *dinámica de sistemas* (Aracil and Gordillo, 1997), si bien el empleo de RdP también resulta ventajoso en dicho campo (Jiménez, et al., 2004; Jiménez, et al., 2001). A este nivel corresponde en el ejemplo el modelo que se obtiene del esquema de la Figura 5.

4.2 Metodologías top-down y botton-up.

Para la realización de los modelos en RdP se conocen dos metodologías: la descripción descendente y la modular.

Descripción descendente (top-down). Se parte de modelos condensados e incompletos (descripciones abstractas) para, mediante transformaciones sucesivas (refinamientos), obtener descripciones más detalladas y concretas que preserven las propiedades que se están tratando. Por tanto permite obtener modelos que por construcción son válidos. En RdP consisten básicamente en la sustitución de un lugar o una transición por una subred. Así se puede construir la descripción detallada preservando las propiedades que se desean validar (vivacidad, limitación, exclusión mutua, etc.). Para ello podemos sustituir lugares o transiciones por sub-RdP reducibles a un

lugar o una transición, o sustituir conjuntos de transiciones (que representan secuencias de eventos o acciones) por un lugar y otro conjunto de transiciones; también podemos añadir lugares implícitos o transiciones idénticas y transiciones de identidad (Silva, 1985).

Descripción modular (botton-up). Se describen independientemente los diversos subsistemas o partes que forman el sistema total, que suele ser complejo, y posteriormente se unen y sincronizan esos módulos. Esa sincronización suele corresponder a esquemas típicos como activaciones, desactivaciones, autorizaciones con o sin memoria, autorizaciones con evolución mutua (doble semáforo o sincronización simétrica), sincronizaciones con evolución mutua o con evolución simultánea, etc. Se pone de manifiesto la potencia descriptiva de las RdP en el modelado de sincronismo y concurrencia a partir de una estructura básica (varios arcos de entrada a una transición).

La descripción modular es necesaria para describir sistemas muy complejos. Sin embargo hay que tener en cuenta que esta forma de proceder de unir subredes puede dar lugar a comportamientos anómalos no presentados en ninguno de los bloques, por lo que se debe analizar y validar el modelo total obtenido.

Respecto a la elección entre ambas metodologías, finalmente es la combinación de ambas la forma más habitual de proceder para modelar y analizar sistemas complejos. En concreto, en nuestro ejemplo, el modelo que se obtiene del esquema de la Figura 5 corresponde a una descripción descendente, ya que partiendo del esquema de cómo queremos que sea nuestro sistema logístico, con las propiedades que queremos que tenga, vamos sustituyendo los lugares de los subsistemas (plantas, vías de distribución, etc.) por subredes que modelan con más detalle sus comportamientos. Sin embargo el modelo de la Figura 4 corresponde claramente a una descripción modular, ya que partiendo del modelo detallado de cada parte del proceso productivo, se unen esos módulos para obtener el modelo del sistema completo. La metodología empleada en esta parte exige que se sea extremadamente cuidadoso a la hora de comprobar las propiedades del modelo construido; en concreto más adelante veremos que el sistema presenta ciertos comportamientos extraños.

4.3 Naturaleza de los modelos de RdP: sistemas discretos, continuos e híbridos.

Otra característica importante de las RdP es que, pese a que se originaron para tratar exclusivamente sistemas discretos, sucesivos desarrollos relativamente recientes las han extendido para modelar sistemas discretos, continuos e híbridos (David and Alla, 2005).

Existen sistemas discretos y continuos, modelos discretos y continuos, y simulación discreta y continua. Sin embargo puede darse prácticamente cualquier

combinación de distintos tipos de sistemas modelos y simulaciones, como por ejemplo sistemas discretos tratados como continuos por sus grandes poblaciones para simplificar el análisis (Recalde and Silva, 2000), o sistemas continuos tratados como discretos para simplificar el modelo (oleoductos, sistemas de alcantarillado, etc.). Igualmente podemos tener sistemas híbridos o combinados de los anteriores.

Por ejemplo en el sistema productivo que tratamos, el agua y la arcilla (magnitudes continuas) se transforman en ladrillos (discreto). Sin embargo las primeras se pueden discretizar, tratando los litros o los kilogramos como unidades discretas, o también los ladrillos se pueden aproximar por una variable continua (sección 6.2). Aparte de para modelar el material continuo, en ese ejemplo puede requerirse un modelo híbrido para modelar, a un cierto nivel de detalle, una de las cintas transportadoras (sección 5.1).

5. TEMPORIZACIÓN DE LOS MODELOS RDP

En Rdp la evolución de un sistema totalmente ininterpretado se denomina autónoma. Una red con cierta interpretación se denomina no-autónoma, y un caso particular de interpretación es la temporización.

Históricamente las Rdp se idearon para describir sistemas concurrentes en términos de relaciones causa-efecto. Luego se introdujo el concepto temporal, con diferentes propósitos, basado en tiempos deterministas. Después se introdujo los tiempos estocásticos, lo que amplió el campo de las Rdp al análisis de prestaciones, tradicionalmente basado en los modelos estocásticos.

Los modelos deterministas son apropiados para describir el comportamiento dinámico del sistema, pero su uso está limitado si debemos “tratar” o evaluar prestaciones del sistema real que presenta eventos en mayor o menor medida no determinados, como fallos en máquinas o acciones humanas impredecibles, o si resulta complicado su conocimiento y es más sencillo tratarlo por un comportamiento aproximado aleatorio.

Como ya se ha comentado, el análisis cuantitativo de los modelos de SDED se realiza básicamente en dos formas. La primera se basa en la simulación por computación y las técnicas de análisis de la trayectoria del sistema. La otra se basa en los modelos estocásticos clásicos para los que se pueden desarrollar las técnicas de análisis.

En nuestro ejemplo, no se ha especificado si los modelos presentados en las Figuras 4 y 5 son o no son temporizados. En realidad se pueden analizar como autónomos, como temporizados deterministas y como estocásticos, dependiendo del objetivo del modelo y el nivel de precisión que se desee. Esos modelos se emplean como deterministas, para prever mediante simulación el comportamiento del sistema

en maniobras complejas o en modificaciones de los parámetros de operación cuando no se sabe si su efecto será el deseado. También se emplean como estocásticos, para determinar propiedades de comportamiento cuando se quiere tener en consideración aspectos estocásticos, como averías de las máquinas y sus tiempos de reparación, retrasos en el transporte por causas externas, etc., requiriendo entonces resolver el problema estocástico subyacente, o emplear la simulación para obtener una aproximación (Ajmone, *et al.*, 1995; Cassandras, 1993). Además, por poderse simplificar alguno de los modelos a un PSSD, puede emplearse dicha simplificación para generar el espacio de estados y encontrar las probabilidades de estado estacionario de la extensión estocástica de la red de forma eficiente (simplificando los cálculos y el almacenando del grafo de alcanzabilidad del sistema) (Campos, *et al.*, 1997).

5.1 Semánticas de modelado.

Incluso en los sistemas deterministas, además de contar con una temporización o retardo en las transiciones (en los lugares sería equivalente pero se emplea menos) hay que dotar a la temporización de un significado o semántica. Se debe tener especial cuidado con las semánticas de disparo de las transiciones cuando el nivel de sensibilización puede ser mayor que uno, ya que ese es uno de los errores más frecuentes cometidos en el modelado de sistemas temporizados deterministas (Jiménez, *et al.*, 2005).

En el ejemplo que tratamos, en cierta zona los ladrillos tardan cierto tiempo en ser llevados de una cinta a otra por el robot que lo hace; en otro sitio tardan cierto tiempo en pasar por una cinta transportadora en la que caben unos pocos ladrillos; igualmente ocurre en otra cinta con capacidad para todos los ladrillos que queramos (se aproxima por infinitos); y por último los vagones tienen que esperar un cierto tiempo a que se abra la puerta del horno en cuanto llega alguno, para en ese momento entrar a la vez (supuestamente de golpe) todos los que haya esperando.

Esos cuatro ejemplos de retraso podríamos modelarlos con la estructura de la Figura 7a, y serían todos correctos, pero en cada uno se habría dotado a la transición temporizada de una semántica diferente; en concreto serían respectivamente semántica de un servidor, de finitos servidores, de infinitos servidores, y de un servidor con servicio múltiple (sería sencillo extender de nuevo esta semántica a la de un servidor con servicio infinito). Si el grado de sensibilización (el mínimo de los cocientes entre el marcado y el peso del arco para todos los lugares previos a una transición) es menor o igual a uno, el comportamiento de todos esos sistemas es equivalente, pero si no es así difiere en todos ellos.

Para comprobar la diferencia pueden modelarse todos esos comportamientos empleando una única

semántica, en concreto la de un servidor que es la más empleada y que consiste simplemente en que el *disparo* de la transición dura un cierto tiempo. En ese caso el primer ejemplo se modelaría mediante la Figura 7a de nuevo, puesto que el robot tarda un cierto tiempo en hacer cada traslado de un ladrillo. El segundo caso se modelaría según la Figura 7b, en la que existen tantas ramas en paralelo como servidores (en este caso tres). El tercer caso sería equivalente al segundo con un número infinito de ramas similares en paralelo. Estos dos últimos casos funcionan como si la temporización la contasen las marcas en vez de la transición (para un número finito de marcas o infinito, respectivamente). Y por último el cuarto ejemplo lo podíamos modelar según la Figura 7c, en este caso para un servidor de tres servicios simultáneos (la extensión a infinitos sería similar con infinitas ramas).

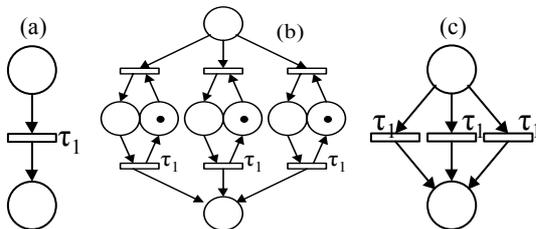


Figura 7. Modelos de los comportamientos de semántica de un servidor, de múltiples servidores, y de un servidor con servicio múltiple, modelados todos ellos con semántica de servidor único.

Las semánticas que se han mencionado son sólo algunas de las posibles (las que más se emplean y más suelen confundirse entre ellas en su uso). Como ejemplo de todas las posibilidades, podemos considerar todas ellas con memoria del tiempo esperado. Eso se daría por ejemplo al modelar con gran nivel de detalle una cinta transportadora; si se para la cinta transportadora se detiene el avance, pero cuando se reanuda éste no se empieza a contar desde cero, porque la distancia avanzada se mantiene.

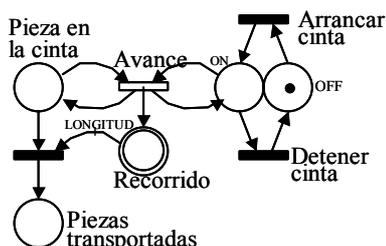


Figura 8. Modelo de cinta transportadora con memoria del avance mediante una RdP híbrida.

En la Figura 8 se ha modelado dicho comportamiento empleando para ello una RdP híbrida. En ella pueden distinguirse los lugares discretos (línea simple) y continuos (línea doble), así como las transiciones discretas (rellenas) y continuas (huecas). El funcionamiento es muy intuitivo: la cinta puede arrancarse o detenerse; cuando hay una pieza en la cinta, mientras la cinta está arrancada (ON), el lugar continuo “recorrido” se va llenando de manera continua, con velocidad proporcional al “avance”, almacenando la distancia recorrida por la pieza, hasta

que alcanza el valor “longitud”, en cuyo caso la pieza pasa al lugar de las piezas transportadas. De nuevo el modelo puede hacerse al nivel de detalles que convenga; por ejemplo en (Jiménez, *et al.*, 2005) se muestra un modelo similar para más de una pieza y teniendo en cuenta la velocidad de avance.

5.2 Redes de Petri Estocásticas.

Los modelos de simulación estocásticos modelan los sistemas mediante variables aleatorias que representan la aparición de los eventos, lo cual conduce a una evolución del sistema en términos de probabilidad. El uso de variables aleatorias en la formalización de la dinámica de un sistema permite modelar sistemas con partes aleatorias (como fallos en las máquinas) o partes no aleatorias pero que se modelan de manera mucho más sencilla empleando el valor medio (por ejemplo el robot que coge piezas de las bandejas).

Los modelos estocásticos pueden tratarse mediante simulación estocástica (Guasch, *et al.*, 2002) o mediante el uso de técnicas especiales de análisis (Ajmone, *et al.*, 1995). Este último caso es el que trataremos posteriormente y tiene gran importancia en las RdP.

Los procesos estocásticos de estado discreto en tiempo continuo pueden ser muy difíciles de caracterizar y casi imposibles de analizar en un caso general; pero esa caracterización y análisis se vuelven razonablemente simples en ciertos casos, que se emplean a menudo precisamente por dicha facilidad matemática de uso. La función de densidad de probabilidad exponencialmente distribuida tiene la propiedad exclusiva de no-memoria, y esa es la razón de la relativa simplicidad de su uso. El único valor necesario para determinar una función de densidad de probabilidad exponencial es su ratio, que es el inverso de su valor medio. Las RdP obtenidas empleando dicha distribución se denominan *estocásticas*, y su potencia radica en que son isomorfas a las *cadena de Markov*, y su comportamiento cualitativo es similar por tanto.

Por ello en nuestro ejemplo los modelos de las Figuras 4 y 5 se han analizado también teniendo en cuenta comportamientos aleatorios para determinación de prestaciones medias de funcionamiento, como sistemas estocásticos con probabilidad exponencialmente distribuida (RdP estocásticas).

La metodología de aplicación de RdP Estocásticas para el análisis de un sistema incluye los pasos:

- 1.- Construcción del modelo (técnicas *top-down* o *bottom-up*).
- 2.- Validación del modelo y análisis estructural (vivacidad, ciclicidad, componentes conservativas y repetitivas, ...).
- 3.- Definición de los índices de prestaciones de interés, en términos de los marcados y disparos de las transiciones (*throughput*).

- 4.- Generación del grafo de alcanzabilidad para la obtención de la cadena de Markov asociada al modelo en RdP.
- 5.- Resolución de la cadena de Markov.
- 6.- Obtención y análisis de los índices a partir de dicha solución.

Lógicamente todos esos pasos se realizan con la ayuda de herramientas informáticas que suministran un entorno gráfico de modelado, permitiendo creación y modificación de modelos, definición de índices de prestaciones, análisis estructural y análisis estocástico del modelo.

Siempre es posible resolver las cadenas de Markov, pero en la práctica esa tarea puede ser muy costosa ya que a menudo requiere resolver complejas ecuaciones diferenciales. Frecuentemente es suficiente con conocer el estado permanente o la solución estacionaria. Si bien en ciertos casos de interés se pueden obtener soluciones explícitas algebraicas (Cassandras, 1993), incluso en esos casos se suele tener que recurrir a métodos numéricos de resolución, o a métodos aproximados de simulación, como la continuización que veremos en el apartado 6.2.

6. SIMULACIÓN: ANÁLISIS DE PRESTACIONES Y ENSAYO DE MANIOBRAS

La simulación del sistema puede ser una herramienta muy potente y simple para determinar el comportamiento que presentará al operar bajo ciertas condiciones. Incluso una simulación determinista permite comprobar con antelación cómo se van a realizar ciertas maniobras especiales, como por ejemplo la parada de alguna máquina, la modificación del proceso productivo, un cambio de los parámetros de producción, etc., sin necesidad de involucrar al sistema real, ni el coste y riesgo que ello supondría. Esta simulación por medio de trayectorias para el estudio del comportamiento se trata en el próximo subapartado.

También podemos considerar la simulación como una herramienta para determinar propiedades del sistema, es decir, para estudiarlo y analizarlo. Las soluciones analíticas, especialmente para sistemas estocásticos, suelen ser demasiado complicadas de obtener, por lo que la simulación se presenta como una herramienta muy atractiva encaminada al análisis del sistema, tal como hemos adelantado en el apartado anterior (Banks, *et al.*, 2001). Una de estas técnicas de simulación consiste en la continuización del sistema, y se explica en el subapartado 6.2. Con ella, emplearemos una simulación determinista para obtener propiedades de los sistemas estocásticos (en vez de hacerlo para determinar la evolución de un sistema determinista). Hay que diferenciar la continuización, como técnica de análisis del sistema discreto, del modelado mediante RdP Continuas de una parte continua del sistema (como se hizo anteriormente en nuestro ejemplo con la cinta transportadora).

6.1 Estudio de comportamiento: trayectorias y producción virtual.

Como se acaba de adelantar, a través de las trayectorias de estado se pueden obtener tendencias del sistema analizando las diferentes trayectorias en función de un parámetro, es decir, la sensibilidad a dicho parámetro. Se puede estimar el efecto para pequeños cambios (incluyendo la derivada), para grandes cambios (sin incluirla) y para valores puntuales, así como incluir el análisis de perturbaciones. La simulación determinista del proceso productivo para comprobar el correcto funcionamiento (Jiménez, 2001) conduce a la *producción virtual*.

A modo de ejemplo de análisis del comportamiento mediante trayectorias y producción virtual, la Figura 9 muestra el estudio de la duplicación de un proceso en dos procesos que trabajan en paralelo (p_2 y p_3) con recursos limitados (m_{10}), que corresponde a una parte del sistema de nuestro ejemplo del apartado 3. Las marcas de p_1 y p_4 representan los elementos de transporte (vagones), y las marcas de p_5 son contenedores, necesarios para el abastecimiento de los dos procesos (se supone que hay tantos como vagones). Los retardos se modelan con las transiciones de entrada y de salida de los dos procesos, esto es, t_1, t_2, t_3 , y t_4 . Estas transiciones también modelan la sincronización entre vagones y contenedores. Sea m_{10} el marcado inicial en p_1 . Para $m_{10} \geq 2$, la red es: pura, viva, cíclica, acotada estructuralmente, k -acotada (con $k=m_{10}$), con un conflicto estructural entre t_1 y t_2 (que es un conflicto efectivo para la red autónoma), p_3 está en exclusión mutua con todos los otros lugares si $m_{10}=2$, las transiciones t_1 y t_3 tienen una relación sincrónica de m_{10} , el doble que la existente entre t_2 y t_4 , es conservativa y consistente, con dos invariantes de marcado ($m_2+2 \cdot m_3+m_5$, y $m_1+m_2+2 \cdot m_3+m_4$) y dos invariantes de disparo ($[t_1, t_3, t_5]$ y $[t_2, t_4, t_5]$), no presenta bloqueos, tiene dos cerrojos ($[p_1, p_2, p_3, p_4]$ y $[p_5]$) que son también trampas (posee la propiedad cerrojo-trampa) (Silva, 1985), y p_5 es un lugar redundante (y por tanto puede ser eliminado). Su matriz de incidencia es:

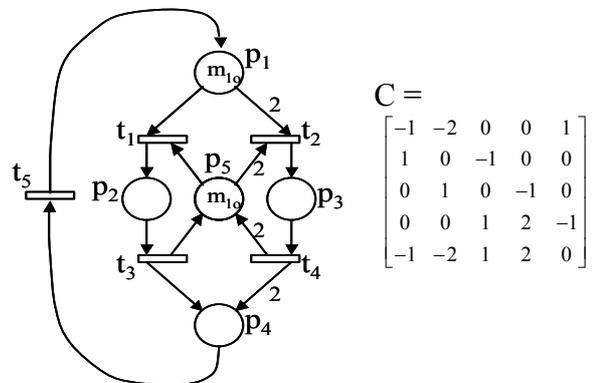


Figura 9. RdP que modela la duplicación de caminos (p_1 y p_2) con recursos limitados (m_{10}) en un proceso cíclico del ejemplo de la Figura 3.

Sea el modelo determinista, con retardos en las transiciones de $\tau_1=3, \tau_2=\tau_3=\tau_5=1, \tau_4=10$, donde τ_i

representa el retardo de la transición t_i . Si el número de elementos de transporte (m_{i0}) aumenta sucesivamente desde 1, el *throughput* mejora y empeora alternativamente, y a partir de 5 lo único importante es tener un número impar, como puede verse en la Tabla 1. Así, si hay 7 vagones, por ejemplo, un esfuerzo económico de incrementar un vagón más proporcionaría un comportamiento peor. O equivalentemente, si uno se estropea (y está siendo reparado), es mejor separar otro más.

Tabla 1: *Throughput* de t_5 dependiente del marcado inicial de p_1 (m_{i0})

m_{i0}	<i>throughput</i> (t_5)
1	0.20
2	0.15
3	0.35
4+2·n con n=0..∞	0.20
5+2·n con n=0..∞	0.40

Este comportamiento aparentemente extraño tiene una explicación sencilla si se tienen en cuenta las dos características que exhibe el sistema simultáneamente: a) existen caminos paralelos: a través de p_2 y de p_3 respectivamente; el que presenta menos restricciones temporales al principio (p_3), por satisfacer $\lambda_2 < \lambda_1$, presenta mayores restricciones totales ($\lambda_2 + \lambda_4 > \lambda_1 + \lambda_3$); b) el lugar fuente para ambos caminos (p_1) no provee suficientes marcas para que ambos puedan trabajar sin detenerse (ya que los vagones se reutilizan cíclicamente)

Teniendo en cuenta la explicación anterior, los resultados de la Tabla 1 pueden ser analizados según los siguientes puntos:

- Cuando hay una única marca, ésta debe seguir el camino más rápido globalmente, es decir, a través de p_2 , debido al peso del arco de entrada al proceso más lento globalmente, e invierte la suma de los retardos $\tau_1 + \tau_3 + \tau_5$ en realizar un ciclo completo. Como es sabido, el *throughput* corresponde al inverso del tiempo de ciclo.

- Cuando hay dos marcas, éstas tomarán el camino más lento, es decir a través de p_3 , ya que $\tau_2 < \tau_1$, y necesitan $\tau_2 + \tau_4 + 2 \cdot \tau_5$ para completar un ciclo.

- Cuando hay un número par de marcas mayor que 2, el único proceso activo es el más lento, pero al menos una marca estará esperando en p_3 durante el retardo correspondiente a t_4 (en estado estacionario). De hecho habrá a lo sumo dos marcas fuera de p_3 . Por tanto el tiempo global de ciclo es el de la transición más lenta (el cuello de botella), es decir τ_4 para dos marcas (que es equivalente a $\tau_4/2$).

- Cuando hay un número impar de marcas mayor que 3, su comportamiento en estado estacionario será equivalente a presentar una evolución paralela de una única marca (que evolucionará a través de p_2 como se ha indicado anteriormente) y de un número par de marcas (que evolucionarán a través de p_3). Por ello el *throughput* corresponde a la suma de los *throughputs* de los dos procesos, es decir $1/(\tau_1 + \tau_3 + \tau_5) + 2/\tau_4$. Es

posible demostrar que el conflicto estructural de la red (entre t_1 y t_2) no llega a ser un conflicto efectivo en estado estacionario.

- Cuando el número de marcas es exactamente 3, su comportamiento en estado estacionario será equivalente a presentar una evolución paralela de una única marca (a través de p_2) y de dos marcas (a través de p_3). Por tanto el *throughput* corresponde a la suma de los *throughputs* de los dos procesos, $1/(\tau_1 + \tau_3 + \tau_5) + 2/(\tau_2 + \tau_4 + 2 \cdot \tau_5)$. En este caso el conflicto estructural llega a ser un conflicto efectivo. Según cómo se resuelva dicho conflicto se obtendrán diferentes valores de *throughput*.

Partiendo del análisis anterior, se deduce que el máximo *throughput* posible con las restricciones temporales presentes (considerando los retardos como valores mínimos) es el que corresponde a tener a los dos procesos (p_2 y p_3) trabajando a su máxima capacidad. El cuello de botella de estos procesos proporcionará el *throughput* $1/\tau_1 + 2/\tau_4 = 16/30$. De hecho el máximo *throughput* será el mínimo entre ese valor y $1/\tau_5$.

Otro comportamiento extraño puede ocurrir con los parámetros temporales. Supongamos por ejemplo que $m_{i0} = 7$ en el ejemplo anterior. En este caso, si t_2 se vuelve más lento, el sistema puede mejorar el *throughput* global, como se muestra en la Tabla 2 en la que se puede observar el *throughput* en t_5 con un retardo en t_2 . El mejor comportamiento se obtiene con un parámetro de tiempo más lento ($t_2 = 9$ ó 10), y en esos casos el *throughput* ($16/30$) es el mejor posible, para cualquier marcado inicial, considerando los parámetros temporales de las otras transiciones (como se ha visto anteriormente).

Tabla 2: *Throughput* de t_5 dependiente de la constante de tiempo de t_2 (τ_2)

τ_2	<i>Throughput</i> (t_5)
1 - 3	12/30
4 - 5	13.5/30
6	14/30
7 - 8	15/30
9 - 10	16/30

Este otro comportamiento sorprendente se debe nuevamente al camino que presenta el peor comportamiento y monopoliza el flujo del marcado. Por esta razón, cuando se mejora el comportamiento local en ciertas áreas (la entrada al peor camino), el comportamiento global puede ser peor.

Pero también se puede conseguir el máximo *throughput* controlando el disparo de las transiciones apropiadamente (siempre respetando las restricciones de tiempo mínimo). De hecho el aumento de retardo de t_2 (τ_2), puede verse como una forma de controlar los procesos mediante el retardo apropiado del disparo de las transiciones.

Otra forma sencilla de control que también proporciona el máximo *throughput* consiste en incluir un arco inhibitor desde p_3 a t_2 . Los arcos inhibitor van de un lugar a una transición, y se utilizan para evitar el disparo de dicha transición cuando el lugar no está vacío; estos arcos no consumen ni producen recursos (marcas).

Entonces, con dicho arco inhibitor, para cualquier marcado $m_{1_0} \geq 6$ el *throughput* máximo posible es (16/30). Este valor se obtiene del trabajo de los dos procesos en paralelo con la única restricción de sus respectivos cuellos de botella, y así el *throughput* se compone de dos *throughputs* parciales: 1/3 y 1/10.

Pero esta forma sencilla de controlar las transiciones sólo funciona correctamente cuando $m_{1_0} > 5$ (en otros casos es necesario utilizar otro control en las transiciones para obtener el máximo *throughput*). Para $m_{1_0} = 1$ y $m_{1_0} = 3$ no es necesario controlar las transiciones para conseguir el *throughput* óptimo. Cuando $m_{1_0} = 2$, el único control necesario consiste en evitar el disparo de la transición t_2 , es decir, el único proceso permitido es p_2 (como si el sistema fuera sólo el ciclo: $p_1-t_1-p_2-t_3-p_4-t_5$). Si $m_{1_0} = 4$, dos marcas pueden evolucionar a través de p_2 (*throughput* parcial igual a 1/3) y las otras dos marcas a través de p_3 (*throughput* parcial igual a 2/13). Por tanto, utilizando el control apropiado en las transiciones (control inteligente), se consiguen los *throughputs* máximos que se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. *Throughput* conseguido con control inteligente en el modelo discreto

m_1	thr.(t_5) discreto con control inteligente
1	1/5
2	1/3
3	1/5 + 2/13
4	1/3 + 2/13
5	1/3 + 2/12
≥ 6	1/3 + 2/10

En el ejemplo propuesto algunos de los comportamientos encontrados se pueden predecir directamente simplemente observando la estructura del sistema, pero hay otros que resultan más sorprendentes. Además hay que tener en cuenta que estas estructuras pueden ser más complejas y lo que se ha considerado un lugar puede ser una subred tan compleja como pueda imaginarse.

Se ha comprobado que aumentar el número de elementos del sistema, o mejorar los parámetros temporales en ciertos puntos, no implica necesariamente mejorar el comportamiento global. En estos casos la simulación, combinada con las técnicas formales de análisis, puede ser muy importante para asegurar que cualquier operación futura en el sistema sea correcta.

6.2 Continuización de RdP para análisis de prestaciones.

En las RdP continuas cualquier marcado real no negativo está permitido (en una red discreta el marcado sólo puede ser entero). El disparo de una transición es similar al de las redes discretas: t está *sensibilizado* en \mathbf{m} sii $\forall p \in \bullet t, \mathbf{m}[p] > 0$. El grado de sensibilización (*enabling*) se define como:

$$enab(t, \mathbf{m}) = \min_{p \in \bullet t} \{ \mathbf{m}[p] / \mathbf{Pre}[p, t] \} \quad (2)$$

y el disparo de t en cierta cantidad $\alpha \leq enab(t, \mathbf{m})$ hace que la red evolucione a un nuevo marcado $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + \alpha \cdot \mathbf{C}[p, t]$. Independientemente de la interpretación temporal de la RdP (determinista, estocástica Markoviana, etc.), la interpretación del disparo de la transición será determinista en el modelo continuo aproximado (Recalde and Silva, 2000; David and Alla, 2005). No todas las redes discretas pueden continuizarse apropiadamente, y las propiedades del modelo aproximado continuo pueden diferir sorprendentemente respecto a las del modelo discreto (Recalde, *et al.*, 1999), por lo que es preciso realizar la continuización con mucha precaución.

La ecuación de estado vista para las RdP (1) resume la evolución del marcado, y como evoluciona de forma continua, puede derivarse respecto al tiempo: $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{C} \cdot \dot{\sigma}$. El valor $\dot{\sigma}$ representa el flujo a través de las transiciones, y por ello se denota normalmente por \mathbf{f} (Jiménez, *et al.*, 2001). En general depende localmente del marcado y, por tanto, del tiempo (τ). Si $\mathbf{f}(\tau)$ se define por una extensión interpretativa de las semánticas en redes discretas, se puede obtener la evolución temporal de la RdP continua (Recalde and Silva, 2000):

- *Semántica de infinitos servidores* (SIS). El grado de sensibilización de t_i en función del tiempo, τ , es $\mathbf{e}(\tau)[t_i] = \min_{p \in \bullet t_i} \{ \mathbf{m}[p] / \mathbf{Pre}[p, t_i] \}$ y representa el número de servidores activos en la transición en el instante τ . La tasa asociada a t_i es $\lambda[t_i]$ y las transiciones se disparan con flujo:

$$\mathbf{f}(\tau)[t_i] = \lambda[t_i] \cdot \mathbf{e}(\tau)[t_i] \quad (3)$$

- *Semántica de finitos servidores* (SFS). La velocidad de disparo $\mathbf{f}(\tau)[t_i]$ está acotada superiormente por $K[t_i]$ veces la velocidad de un servidor $\mathbf{F}[t_i]$, y entonces las transiciones se disparan con flujo (David and Alla, 2005):

$$\mathbf{f}(\tau)[t_i] \leq K[t_i] \cdot \mathbf{F}[t_i] \quad (4)$$

La simulación de una RdP continuizada, como una aproximación del modelo discreto real, se utiliza para determinar sus parámetros de comportamiento, por ejemplo el *throughput*. Sin embargo, es preciso interpretar cuidadosamente los resultados que se obtienen a partir de un modelo continuizado.

Por ejemplo, en la RdP de la Figura 9, el lugar implícito puede ser eliminado (porque por definición nunca restringe el disparo de sus transiciones de salida (Cólom and Silva, 1991)), y entonces la estructura se convierte en dos líneas paralelas (Figura 10).

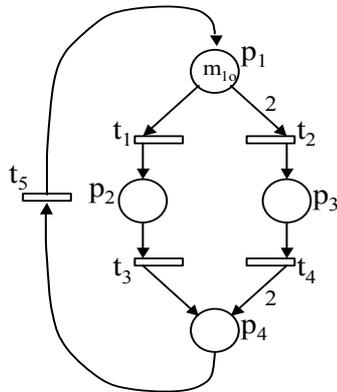


Figura 10. Modelo continuo SIS.

También se puede estudiar el modelo SFS. En este caso se consideran únicamente los cuellos de botella de los procesos paralelos (es decir, la transición más lenta), y se incluye en cada transición un autolazo con una única marca para modelar la cota superior en el disparo de las transiciones (Figura 11). Si se evalúa el *throughput* de t_5 , el modelo proporcionará el valor máximo (16/30) para cualquier m_{10} y se ha visto anteriormente que en el caso discreto no es posible para $m_{10} < 6$, incluso cuando se aplica un control inteligente en el disparo de las transiciones.

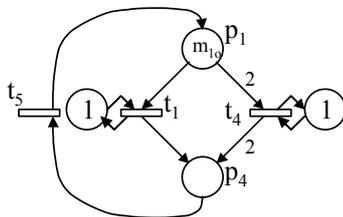


Figura 11. Modelo continuo SFS.

Los resultados se muestran en la Tabla 4, a partir de la cual se pueden deducir conclusiones válidas a partir de la aproximación continua para grandes poblaciones, con menor coste computacional. Sin grandes poblaciones, dicha aproximación continua puede proporcionar conclusiones erróneas.

Tabla 4: Comparación entre SFS, SIS, y el modelo óptimo discreto

m_1	thr.(t_5) con FSS	thr.(t_5) con ISS	thr.(t_5) Discreto (IC)
1	0.53	0.30	0.20
2	0.53	0.48	0.33
3	0.53	0.53	0.35
4	0.53	0.53	0.48
5	0.53	0.53	0.50
≥ 6	0.53	0.53	0.53

Nótese que el ejemplo se ha realizado con una interpretación determinista, y por tanto las

restricciones temporales corresponden a retardos en el disparo de las transiciones. También podría emplearse un modelo estocástico (no determinista), y los parámetros temporales indicarían la probabilidad (normalmente con distribución exponencial) de que el disparo ocurra. En estos casos, la continuización proporciona nuevamente un modelo determinista, y su simulación, una aproximación de las características de comportamiento del sistema. En (Recalde, *et al.*, 1999) el lector puede encontrar un ejemplo completo de producción industrial, que compara todos los modelos. En ese ejemplo el modelo discreto y la aproximación SIS coinciden completamente.

En cuanto a las prestaciones, SIS proporciona resultados más satisfactorios, incluso sin grandes poblaciones. En estos modelos continuos (SIS), la simulación es muy útil porque las soluciones analíticas son difíciles de obtener, fundamentalmente por dos razones: la velocidad depende del marcado localmente (y por tanto del estado), y las sincronizaciones introducen la función "mínimo", que es complicada de tratar en los desarrollos analíticos. Por consiguiente, se obtienen sistemas de ecuaciones diferencial conmutadas, que son fáciles de simular y en general difíciles de resolver si el sistema es complejo.

Es muy importante resaltar que las simulaciones correspondientes a esta sección se desarrollaron para determinar el comportamiento del sistema de forma aproximada. Con un modelo discreto, determinista o estocástico, se deduce un modelo aproximado continuo determinista, y su simulación proporciona resultados aproximados del comportamiento del modelo discreto. El lector puede consultar (Jiménez, *et al.*, 2001; Recalde and Silva, 2000) para profundizar en la continuización de RdP estocásticas. Estas simulaciones son diferentes de las desarrolladas en la sección anterior, que corresponden a una simulación de maniobra, donde el modelo determinista se ha simulado para comprobar cómo funcionaría el sistema real, especialmente en operaciones complejas. Incluso en esta simulación continua, el uso de RdP como base para el modelado y simulación es ventajoso comparado con el uso de ecuaciones solamente (Recalde, *et al.*, 1999).

6.3 Aplicaciones adicionales de simulación e implementación de RdP: Simulación semifísica y Trazabilidad.

Otros tipos de simulación desarrollados en el proyecto de investigación y que también han sido aplicados al ejemplo tratado a lo largo del artículo son la simulación semifísica y la simulación de trazabilidad, y pueden considerarse como dos aplicaciones adicionales empleadas en la implementación del sistema logístico y productivo modelado. Por no extendernos tan sólo presentaremos ambas aplicaciones, haciendo

referencia a (Jiménez, 2001) donde se explican con más detalle.

Simulación semifísica. Dada la constitución de las RdP como paradigma de los sistemas de eventos discretos y su capacidad de participar en todos los procesos y partes que puedan ser vistos como discretos y a muy diversos niveles, resulta sencillo programar aplicaciones informáticas que traduzcan un modelo de RdP (empleado como lenguaje estándar) a cualquier lenguaje empleado por los diversos dispositivos de control. En nuestra Universidad se han desarrollado aplicaciones de traducción a los más importantes dispositivos de control automático y lenguajes de programación, y existen algunas aplicaciones comerciales similares. De esta manera, si se modela el sistema físico en forma de RdP, ese modelo puede ser introducido en el dispositivo de control junto al propio programa de control, con lo cual el dispositivo puede anticipar una simulación "semifísica" del funcionamiento que realizará (posteriormente) con el sistema real. En la referencia también se proponen aplicaciones de supervisión similares mediante el empleo de los paquetes SCADAs. Todo ello es posible y ventajoso gracias al empleo de las RdP como lenguaje estándar de comunicación de todos los elementos y procesos del sistema, en busca de una *ingeniería colaborativa*.

Trazabilidad. Por otro lado, muchas veces es interesante tener información del sistema adicional a la que proporciona el modelo de RdP. Por ejemplo, en el sistema de producción modelado mediante RdP en la Figura 12.

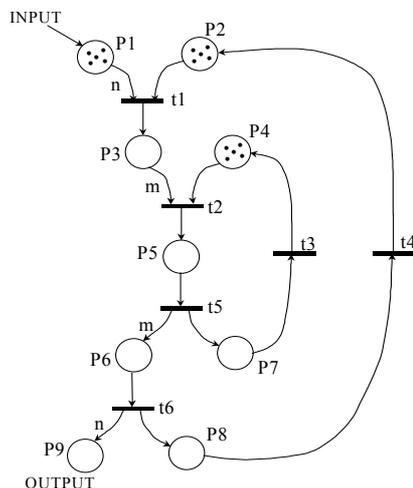


Figura 12. Modelo simplificado del llevado y vaciado de las bandejas y los vagones de bandejas en el ejemplo de la Figura 3.

Cuando n ladrillos de p_1 se combinan con una bandeja de p_2 para formar una bandeja llena en p_3 , resulta que la única información que proporciona la RdP es el número de bandejas llenas que hay en p_3 . Si se emplean colores para representar las bandejas sí existirá en el modelo información de qué bandeja es la que hay en p_3 , pero cuando m bandejas llenas de p_3 se introduzcan en un vagón de p_4 para formar un

vagón lleno de bandejas p_5 , entonces sí se pierde la información. El empleo de colores en las bandejas o en los vagones podría ser viable, pero lo que no lo sería es el de combinaciones distintas de vagones con bandejas, ya que sería enorme el número de posibilidades y por tanto de colores. Para ello se proponen (Jiménez, 2001) unas tablas que con la mínima información mantienen la trazabilidad (seguimiento del producto y del proceso) tanto del sistema en activo como de los elementos terminados. Esa información puede usarse para conseguir un estudio de deficiencias del producto a partir del seguimiento del proceso productivo que ha seguido.

Al igual que esta última, se pueden emplear muy diversas aplicaciones adicionales a la simulación de RdP que proporcionen a dicha simulación la información que requiera. En nuestro ejemplo en cuestión, para poder simular de manera determinista y con gran nivel de detalle el proceso de los robots cuando pueden acceder a muchas zonas diferentes, se han implementado simuladores de los robots que generan los eventos "simulados" (posición alcanzada, pieza cogida, etc.) que hacen evolucionar al simulador de la RdP del modelo (Jiménez, *et al.*, 2005)

7.- CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un análisis metodológico de la aplicación de RdP para el modelado y simulación de sistemas logísticos y de producción. La complejidad y gran dimensión son características importantes de los sistemas mencionados, y parte de las razones por las que las RdP constituyen una herramienta muy útil para modelarlos. Por un lado, la versatilidad de una RdP hace que sea apropiada para incorporar modelos a diferentes escalas, niveles de detalle y niveles de decisión, lo que facilita la gestión global del sistema. Por otro lado, las técnicas de continuización de modelos discretos permiten simplificar modelos complejos y utilizar herramientas matemáticas (para resolver el problema de explosión de estados). El modelo continuo es una aproximación del modelo discreto utilizado para estimar las propiedades del sistema discreto real. La aplicación de las técnicas de continuización y la interpretación de sus resultados debe realizarse con precaución.

Otra conclusión de este trabajo es la gran importancia de utilizar a la vez la simulación y el análisis de propiedades para conseguir la optimización del sistema. Si únicamente se realiza la simulación, se pueden obtener conclusiones erróneas y limitadas. Sin embargo, el uso mixto de la simulación y el análisis de propiedades proporciona buenos resultados y permite, entre otras cosas, buscar comportamientos extraños e inesperados que puedan afectar al sistema.

Por tanto se presentan dos conceptos diferentes de simulación. Uno de ellos es la simulación del sistema

discreto real para conocer las propiedades del sistema y su funcionamiento esperado, pudiendo así anticiparse al comportamiento. El otro tipo es la simulación del modelo continuizado, que sirve para estimar aproximada pero rápidamente las prestaciones del funcionamiento.

También se han presentado diferentes metodologías de modelado, análisis y simulación aplicables, diversos niveles de detalle de los modelos para obtener resultados específicos, e incluso ciertas aplicaciones que mejoran la implementación de los sistemas desarrollados mediante RdP.

Todo ello se muestra aplicado a un ejemplo real para tratar de proporcionar un enfoque metodológico de la utilización de las RdP para la mejora mediante modelado y simulación de los sistemas logísticos y productivos.

REFERENCIAS

- Ajmone Marsan, M., G. Balbo, G. Conte, S. Donatelli y G. Franceschinis (1995). *Modeling with generalized stochastic petri nets*. Ed. John Wiley & Sons Ltd, Reino Unido.
- Aracil, J. y F. Gordillo (1997). *Dinámica de sistemas*. Ed. Alianza, Madrid.
- Banks, J., J. S. Carson, B. L. Nelson y D. M. Nicol (2001). *Discrete event system simulation*. Ed. Prentice-Hall Inc, Upper Saddle River, E.E.U.U.
- Campos, J., Donatelli S., Silva, M. (1997). Structured Solution of Stochastic SDDP Systems. *Proceedings of the 6th International Workshop on Petri Nets and Performance Models*, p.p. 91.
- Cassandras C. G. (1993). *Discrete event systems: modeling and performance analysis*. Ed. Richard D. Irwin Inc y Aksen Associates Inc, Boston, E.E.U.U.
- Colom, J. M., Silva, M., (1990, 1991). Improving the Linearly based characterization of P/T nets. *Lecture Notes in Computer Science*, **483**, 113-145.
- David, R. y H. Alla (2005). *Discrete continuous and hybrid petri nets*. Ed. Springer-Verlag, Berlin.
- DiCesare, F., G. Harhalakis, J. M. Proth, M. Silva y F. B. Vernadat. (1993). *Practice of Petri nets in manufacturing*. Ed. Chapman & Hall, Londres, Reino Unido.
- Dutheillet, C., Franceschinis, G., Haddad, S., (1998). Analysis techniques for colored well-formed systems, in *Performance Models for DES with Synchronizations: Formalisms and Analysis Techniques*, cap.7, 233-284.
- Guasch, A., M. A. Piera, J. Casanovas y J. Figueras (2002). *Modelado y simulación. Aplicación a procesos logísticos de fabricación y servicios*. Ed. UPC, Barcelona.
- Jensen, K., (1994). *Coloured Petri Nets: Basic Concepts, Analysis Methods, and Practical Use*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer.
- Jensen, K., Rozenberg, G., (1991). *High-level Petri Nets*. Ed. Springer.
- Jiménez, E. (2001). *Técnicas de Automatización Avanzada en Procesos Industriales*. PhD Thesis. Ed. Serv. Publicaciones Universidad de La Rioja., Logroño.
- Jiménez, E., Recalde, L., Silva, M. (2001). Forrester Diagrams and Continuous Petri Nets: a Comparative View. *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, (2) 85-94.
- Jiménez, E., Pérez, M. (2003). Simulation and optimization of logistic and production systems using discrete and continuous Petri nets. *Simulation: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International*, **80**, (3), 131-142.
- Jiménez, E., Recalde, L., Julvez, J., Silva, M. (2004). Continuous Views of Discrete Event Systems: considerations on Forrester Diagrams and Petri Nets. *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man & Cybernetics (SMCC'04)*.
- Jiménez, E., Pérez, M., Latorre, J. I., (2005). On Deterministic Modelling and Simulation of manufacturing Systems with Petri Nets. European Simulation Symposium (ESS05), Marsella, Francia.
- Murata, T., (1989) Petri nets: Properties, analysis and applications, *Proceedings of the IEEE*, **77** (4) 541-580.
- Recalde, L., Silva, M., (2000). PN fluidification revisited: Semantics and steady state. *4th International Conference on Automation of Mixed Processes: Hybrid Dynamical Systems (ADMP2000)*, pp. 279-86.
- Recalde, L., Teruel, E., Silva, M., (1999) Autonomous continuous P/T systems. In *Application and Theory of Petri Nets of Lecture Notes in Computer Science* (J. Kleijn S. Donatelli), **1639**, 107-126. Springer.
- Silva, M. (1985). *Las redes de Petri en la automática y la informática*. Ed. AC, Madrid.
- Silva, M., (1993) Introducing Petri Nets. In *Practice of Petri Nets in Manufacturing*, 1-62. Ed. Chapman & hall.
- Silva, M., Teruel, E., (1996). A systems theory perspective of discrete event dynamic systems: The Petri net paradigm. *Symposium on discrete events and manufacturing systems,- (CESA96 IMACS Multiconference*, pp.1-12.
- Silva, M., Teruel, E., (1997). Petri nets for the design and operation of manufacturing systems. *European Journal of Control*, **3** (3) p.p.182-199.
- Thiagarajan, P.S., (1987). Elementary Net Systems. *Lecture Notes in Computer Science*, Part I, **254** 26-59.
- Viswanadham, N., y Narahari, Y. (1992). *Performance modeling of automated manufacturing systems*. Ed. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, E.E.U.U.