Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial

CEA comité español de automática

ISSN: 1697-7912. Vol. 6, Núm. 2, Abril 2009, pp. 26-35

RIAI http://www.revista-riai.org

Reduciendo distancias entre el control borroso y el control no lineal: luces y sombras

Antonio Sala * **Carlos V. Ariño** **

* *Dep. Ing. Sistemas y Automatica, Instituto de Automática e Informática Industrial. Universidad Politécnica de Valencia, Cno. Vera s/n, 46022 Valencia, España (email: asala@isa.upv.es)*
** *Departamento de Ingeniería de Sistemas Industriales y Diseño, Universitat Jaume I, Av. de Vicent Sos Baynat, s/n, 12071 Castelló de la Plana, España (email:arino@esid.uji.es)*

Resumen: aunque el control borroso nació como una metodología heurística, las formulaciones en desigualdades matriciales lineales del control borroso se han convertido en la herramienta más utilizada en dicho área desde los años 90. Muchos sistemas no lineales pueden ser modelados como sistemas borrosos (con la metodología de sector no lineal) de modo que el control borroso puede considerarse como una técnica para el control no lineal. Aunque se han obtenido muchos y buenos resultados, quedan algunas fuentes de conservadurismo cuando se comparan con otros enfoques de control no lineal. Este artículo discute dichas cuestiones de conservadurismo (sombras) y plantea algunas ideas (luces) para resolverlas, aunque muchas de las propuestas tienen alto coste computacional.

Palabras clave: control borroso, control inteligente, desigualdades matriciales lineales

1. INTRODUCCIÓN

El control borroso comenzó como una metodología heurística en los años 70, codificando reglas de control manualmente para tratar de incorporar el razonamiento y la heurística en los bucles de control (Zadeh, 1973; Sugeno, 1985).

No obstante, muchas de las reglas heurísticas de control resultantes no tienen una diferencia fundamental desde un punto de vista conceptual con los reguladores PID clásicos a los que tratan de sustituir, generándose reguladores PD-borroso, PI-borroso y similares (Pedrycz, 1993). Otros desarrollos resultan en reglas particularizadas para una planta concreta de interés, de modo que se pueden extraer muy pocas conclusiones de ámbito general (Burgos-Artizzu *et al.*, 2007; Andújar *et al.*, 2007) pese a su éxito en la aplicación específica. Por estas razones, el análisis basado en la heurística y el razonamiento lógico en el control borroso ha perdido empuje en la literatura moderna, y ha sido sustituido por métodos más rigurosos orientados a garantizar especificaciones de estabilidad, prestaciones, robustez a errores de modelado, *etc.* en control borroso basado en modelos. El enfoque formal de la lógica borrosa, no obstante, sigue siendo una herramienta válida y activa en la literatura reciente en otros ámbitos afines al control (integración (Albertos y Sala, 2004*a*), cooperación y supervisión (Evsukoff *et al.*, 2000), diagnóstico (Sala, 2008), modelado experimental (Diez *et al.*, 2004), etc.).

Los sistemas a discutir en el presente trabajo son los modelos de tipo Takagi-Sugeno (TS) (Takagi y Sugeno, 1985) continuos o discretos

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x,z) f_i, \quad x_{k+1} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x,z) f_i \tag{1}$$

con f_i lineal siendo r el número de "reglas" y z variables externas medibles [1]. Los términos $\mu_i(x,z)$ se denotan como *funciones de pertenencia* o *antecedentes*. En lo que sigue, se abreviará $\mu_i(x,z)$ como μ_i. Los términos f_i se denominan modelos *vértice*, o *consecuentes* (también *modelos locales* si fuera posible una interpretación en ese sentido de su antecedente μ_i).

El interés de los modelos borrosos TS radica en que existe una amplia clase de sistemas no lineales que pueden ser *localmente* modelados como dicho tipo de sistemas mediante la metodología de sector no-lineal (Tanaka y Wang, 2001). De este modo, sistemas no lineales pueden ser "insertados" en una dinámica lineal variante en el tiempo (linear time-varying (LTV) embedding en la literatura inglesa) y aplicar (conservativamente, como luego se discutirá) técnicas de control LTV que proveen de condiciones suficientes de estabilidad local para los sistemas no lineales originales.

La ventaja del formalismo borroso es que existen herramientas software razonablemente eficientes (desigualdades matriciales lineales (Boyd *et al.*, 1994; Boyd y Vandenberghe, 2004)), que siendo muy utilizadas en el ámbito del control lineal pueden ser casi directamente aplicadas a los sistemas no lineales en discusión.

Desafortunadamente, hay un precio a pagar: el objetivo de este artículo es discutir las desventajas "específicas" del enfoque borroso respecto a otras alternativas que se podrían llamar de control no-lineal "directo" (Khalil, 1996; Slotine y Li, 1991). Para discusiones sobre las perspectivas y líneas de interés actuales en identificación y control borroso desde una perspectiva más general, el lector puede consultar (Albertos y Sala, 2004*c*; Sala *et al.*, 2005; Feng, 2006; Al-Hadithi *et al.*, 2007).

[1] La planificación de ganancia para sistemas lineales variantes en el tiempo estudia únicamente aquéllos sistemas en la forma (1) en los que $\mu_i(z)$ no depende de x.

La estructura de la contribución es la siguiente: la sección siguiente presenta información preliminar y notación sobre la transformación de modelos no lineales en modelos borrosos y algunas técnicas formales de análisis. En la sección 3 se discuten brevemente las ventajas y desventajas del enfoque heurístico. La sección 4 discute las sombras y desventajas respecto al control no-lineal directo que el enfoque borroso en general podría tener. En la sección 5 se discuten algunas contribuciones recientes, algunas de ellas trabajo propio de los autores de este trabajo, de cara a solventar algunas fuentes de conservadurismo. Una sección de conclusiones cierra el trabajo.

2. PRELIMINARES

2.1 Modelos borrosos Takagi-Sugeno

Como se ha mencionado en la introducción, la metodología de sector no lineal (Tanaka y Wang, 2001) permite expresar localmente las ecuaciones de un sistema no lineal en la forma Takagi-Sugeno (1). Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1^2)x_1 - 10x_2 + u\end{aligned} \tag{2}$$

puede ser expresado como un sistema TS de dos reglas dado por:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(A_i x + Bu) \tag{3}$$

con $B = (0\;1)^T$ y

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$$

En efecto, dado que $f(x_1) = \sin(x_1^2) \in [-1, +1]$ para todo valor de x_1, se puede expresar como una interpolación entre el máximo y el mínimo, esto es: $f(x_1) = \mu_1 * (+1) + (1 - \mu_1) * (-1)$ para algún valor de μ_1 entre cero y uno; evidentemente μ_1 depende de x_1. En efecto, sustituyendo $\mu_1 = 0{,}5(\sin(x_1^2) + 1)$ se tiene:

$$0{,}5(\sin(x_1^2) + 1) - (1 - 0{,}5(\sin(x_1^2) + 1)) = \sin(x_1)^2$$

Denotando $\mu_2 = 1 - \mu_1$, tenemos $f(x_1) = -\mu_1 + \mu_2$ y, dado que $\mu_1 + \mu_2 = 1$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\mu_1 + \mu_2)(-x_1 + x_2) \\ \dot{x}_2 &= -(-\mu_1 + \mu_2)x_1 + (\mu_1 + \mu_2)(-10x_2 + u)\end{aligned} \tag{4}$$

con lo que escribiendo las ecuaciones en forma matricial, obtenemos (3). Una interpretación lingüística del modelo (3) podría ser el par de reglas:

si $\sin(x_1^2)$ es alto, $\dot{x} = A_1 x + Bu$;
si $\sin(x_1^2)$ es bajo, $\dot{x} = A_2 x + Bu$.

En este caso el universo de discurso (región donde se definen las funciones de pertenencia) es toda la recta real donde puede tomar valores x_1: el modelo es *global*.

Si se deseara analizar la estabilidad *local* del sistema (ver sección siguiente), por ejemplo, en la zona

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \,|\, |x_1| < 0{,}5\}$$

podría hacerse mediante un modelo local.

En efecto, calculando el mínimo y el máximo en esa zona de la no-linealidad $\sin(x_1^2)$, que valen 0 y $\sin(0{,}5^2) = 0{,}2474$ respectivamente, el sistema (2) podría describirse en la forma (3) con:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0{,}2474 & -10 \end{pmatrix}$$

y unas *nuevas* funciones de pertenencia $\mu_1 = \sin(x_1^2)/\sin(0{,}5^2)$ y $\mu_2 = 1 - \mu_1$. Evidentemente, el nuevo modelo *local* está incluido estrictamente en la envoltura convexa del modelo global.

En general, cualquier función continua $f(x)$ puede ser expresada *localmente* en una región *compacta* Ω como una interpolación entre su máximo y su mínimo, por lo que el procedimiento ejemplificado es de una gran generalidad y sirve para modelar localmente sistemas dinámicos que puedan ser expresados como $\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x,u)x_i + \sum_{j=1}^{p} g_i(x,u)u_i$, donde n es el número de variables de estado (orden del sistema) y p el número de entradas, si f_i, g_i son continuas. Por brevedad, se omite el detalle del procedimiento general, y se remite al lector a (Tanaka y Wang, 2001) para consultarlo.

Nota: Una característica importante de los modelos TS es que si el tamaño de la región de interés tiende a cero, todos los consecuentes tienden al *modelo linealizado* clásico (Albertos y Sala, 2004*b*) alrededor de $x = 0$: el modelado TS es una extensión, pues, del modelado basado en la linealización: la "zona de validez" de un modelo linealizado es infinitesimal, mientras que la de un modelo TS no lo es. En general, si las no-linealidades no son acotadas (por ejemplo, reemplazando $\sin(x_1^2)$ por x_1^2 en el ejemplo), no se pueden obtener modelos globales. Los modelos TS comparten con los modelos linealizados el hecho de que son modelos adaptados a un punto de funcionamiento (que, con los adecuados cambios de variable es el origen). El que los modelos dependan del punto de funcionamiento elegido, como en el caso de la linealización, puede ser inconveniente en ciertos casos, como se discute en la sección 4.4.

2.2 Comparación con otros modelos borrosos.

Existen otras metodologías que obtienen modelos en la forma (1) (por ejemplo, neuronales (Haykin, 1994) o ANFIS, neurofuzzy (Wang, 1994)) basadas en la idea de aproximador funcional universal (Kosko, 1994). Esa idea dice que se puede expresar una función continua arbitraria en la forma (1) para un μ_i de estructura *prefijada a priori* (por ejemplo, una función de activación de una neurona gaussiana) con una precisión (máximo error de aproximación en una región compacta Ω) determinada por el número de reglas, r (mejor cuanto más reglas).

Es importante remarcar que los modelos Takagi-Sugeno son *exactos* al poder utilizar formas arbitrarias en μ_i (relacionadas con el *modelo no-lineal* del sistema), en vez de antecedentes prefijados.

También existen modelos Takagi-Sugeno que incorporan un término afín:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(A_i x + B_i u + \gamma_i) \tag{5}$$

Aunque estos modelos tienen una mayor capacidad de representación, en el caso que nos ocupa (modelado y análisis alrededor de un punto de equilibrio) los modelos TS ordinarios son suficientes, como se ha esbozado en esta sección. Además, las herramientas de análisis y diseño de controladores para modelos afines no están tan desarrolladas como las de los sistemas TS no afines (algunas de ellas se revisan en (Al-Hadithi *et al.*, 2007; Ariño *et al.*, 2007)). Además, dichos modelos, cuando se obtienen mediante identificación experimental (Diez *et al.*, 2004), no son exactos.

También existen otras concepciones del modelado borroso, como descriptor de sistemas inciertos generando una distribución de posibilidad en una familia de ellos (Bondia *et al.*, 2005, 2006). Esta concepción está, no obstante, alejada de los objetivos del trabajo que aquí se discute.

2.3 Análisis de estabilidad y prestaciones

El objetivo de este trabajo es analizar qué técnicas de análisis de estabilidad y prestaciones (y de diseño de controladores) existen en la literatura basadas en modelos borrosos (1) y cómo son de potentes comparadas con aquéllas que usan, directamente, el modelo no-lineal original a partir del cual se ha obtenido el modelo Takagi-Sugeno.

Como se comenta arriba, el conservadurismo del enfoque borroso no está en el modelado, sino en el uso posterior de dichos modelos (donde, normalmente, la única suposición que se hace sobre las funciones de pertenencia μ es que son positivas y suman uno), según se discute in la Sección 4.

En efecto, el lector podría preguntarse por qué obtener un modelo borroso TS si ya se dispone de las ecuaciones no lineales. La respuesta es que, al expresarlo como combinación convexa de modelos lineales, el análisis de estabilidad y diseño de controladores en el modelo TS podrá realizarse mediante técnicas que derivan de las lineales, con software de optimización numérica convexa muy eficiente (ver más adelante). El precio a pagar vendrá determinado por dos factores:

- El análisis, en muchos casos, será sólo local.
- El análisis (considerando sólo los modelos vértices) es conservativo, como se comenta en la sección 4, y reducir su conservadurismo conlleva en algunos casos un alto incremento del coste de cómputo.

En esencia, si la linealización da como resultado un sistema estable, se sabe que existe un dominio de atracción del origen, pero no su tamaño. La metodología borrosa puede probar que una zona compacta (obviamente, de dimensiones no infinitesimales) pertenece al dominio de atracción (Sala y Ariño, 2006); para ello sustituirá el modelo linealizado por los modelos vértice en, prácticamente, las mismas expresiones que usaba en el primer caso. Dado que la técnica es conservativa, si las no-linealidades son suficientemente sencillas, podrán aplicarse técnicas no-lineales específicas para hallar dominios de atracción mayores (Khalil, 1996). Lo que, en esencia, discute este trabajo es cuáles son las razones de esa “distancia” entre lo alcanzable con el método borroso y lo teóricamente alcanzable con otras técnicas [2].

Como se menciona en la introducción y en los párrafos precedentes, las técnicas de optimización convexa, en particular las basadas en desigualdades matriciales lineales (en lo sucesivo LMI, usando el acrónimo fuertemente establecido en la literatura inglesa, linear matrix inequalities), se han convertido en la herramienta más utilizada para diseñar controladores cuando el proceso viene dado en la forma Takagi-Sugeno. Las LMI fueron introducidas a finales de la década de los 80 en el control lineal (Boyd *et al.*, 1994) y importadas al dominio borroso por (Tanaka y Wang, 2001) teniendo una vertiginosa expansión en los últimos 10 años. Existen resultados para sistemas con incertidumbre, retardo, en forma descriptor, *etc.*. tanto lineales como borrosos.

Básicamente, una de las estrategias de control más usadas es la compensación paralela distribuida (PDC en la literatura inglesa) en el que el controlador tiene también la forma TS compartiendo las funciones de pertenencia con el proceso a controlar

$$u = -\sum_{j=1}^{r} \mu_j K_j x \tag{6}$$

Al sustituir este controlador en (3), se tiene un bucle cerrado en la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i (A_i x + B_i \sum_{j=1}^{r} \mu_j K_j x) = \\ = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i\mu_j (A_i - B_i K_j) x\end{aligned} \tag{7}$$

Considérese una función cuadrática de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, con P simétrica positiva definida (en adelante $P > 0$). Se desea comprobar la tasa de decrecimiento α, esto es, que existe $M > 0$ tal que $\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$. Ello es equivalente a comprobar que $\dot{V} \leq -2\alpha V$ (Khalil, 1996; Tanaka y Wang, 2001). Como $\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x$, sustituyendo la expresión (7) se llega a:

$$\dot{V} + 2\alpha V = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i\mu_j x^T G_{ij} x \tag{8}$$

con

$$G_{ij} = PA_i + A_i^T P - PB_i K_j - K_j^T B_i^T P + 2\alpha P \tag{9}$$

debiendo ser (8) negativo. Introduciendo ahora la notación $R = P^{-1}$, $M_j = K_j P^{-1}$, y haciendo el cambio de variable $x = Rz$, tenemos que una condición suficiente para que (8) será negativo es que

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i\mu_j Q_{ij} > 0 \tag{10}$$

con

$$Q_{ij} = -(A_i R + RA_i^T + B_i M_j + M_j^T B_i^T + 2\alpha X)$$

La expresión (10) es denominada como doble suma borrosa. Condiciones para determinar su signo se discuten en la Sección 2.4 a continuación.

En general, muchos otros problemas de diseño [3] de controladores (ganancia inducida $\mathcal{H}_\infty$, sistemas discretos, etc.) pueden

[2] Otras técnicas no-lineales también pueden tener un coste computacional alto para procesos complejos, necesitar complejos pasos de cálculo simbólico, o necesitar una cierta estructura canónica del sistema que puede no ser la de las ecuaciones disponibles.

[3] Los problemas de *análisis* de estabilidad, norma inducida, etc. en bucle *abierto* son mucho más sencillos. Por ejemplo, analizar la estabilidad de un sistema borroso, haciendo $K_j = 0$ en (9), simplifica (8) a una suma unidimensional:

$$\dot{V} + 2\alpha V = \sum_{i=1}^{r} \mu_i G_i \tag{11}$$

con $G_i = PA_i + A_i^T P + 2\alpha P$.

expresarse en la forma (10) con expresiones diferentes de Q_{ij}. Por ejemplo, usando como Q_{ij} la matriz (Tuan *et al.*, 2001):

$$\begin{pmatrix} PA_i^T + R_j^T B_{2i}^T + A_i P + B_{2i} R_j & B_{1i} & PC_i^T + R_j^T D_{12i}^T \\ B_{1i}^T & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_i P + D_{12i} R_j & D_{11i} & -\gamma I \end{pmatrix}$$

si se prueba (10), se demuestra que existe un regulador (6) que hace que la norma H_∞ (esto es, la norma inducida $\mathcal{L}_2$ to $\mathcal{L}_2$) de un sistema borroso Takagi-Sugeno dado por

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z)(A_i x + B_{1i} v + B_{2i} u) \qquad (12)$$

$$y = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z)(C_i x + D_{11i} v + D_{12i} u) \qquad (13)$$

es menor que γ.

El lector puede consultar (Tanaka y Wang, 2001) y las referencias en los artículos de revisión (Sala *et al.*, 2005; Feng, 2006) para obtener detalles acerca de estas y otras formulaciones para Q_{ij}. Algunos otros problemas (observadores, sistemas en forma descriptor, funciones de Lyapunov no cuadráticas, etc.) acaban en una expresión similar a (10) donde el sumatorio es triple o cuádruple (Tanaka y Wang, 2001; Guerra y Vermeiren, 2004; Tanaka *et al.*, 2003*b*), apareciendo Q_{ijk} o Q_{ijkl} en vez de Q_{ij}. Estos casos se denotaran como sumas multidimensionales borrosas.

2.4 Positividad de sumas borrosas.

Como se ha discutido en el texto precedente, una gran cantidad de problemas de análisis o diseño de reguladores pueden plantearse en términos de "demostrar que una suma borrosa (doble (10), simple (11), o multi-dimensional) es positiva". Esta sección discute específicamente cómo abordar dicho problema.

El análisis de estabilidad de sistemas, por ejemplo mediante (11), resulta en una suma borrosa unidimensional. Una condición suficiente de estabilidad es $G_i > 0$.

Dicha condición permiten su expresión en forma de desigualdad matricial lineal (LMI) (Boyd *et al.*, 1994), para las que existe software (incluso gratuito, (Löfberg, 2004)) eficiente y sencillo de usar. En efecto, comprobar que el sistema no lineal (2) es estable con una tasa de decrecimiento de, al menos, 0.6, se reduce a teclear dos lineas de código YALMIP en Matlab:

```
P=sdpvar(2,2);
solvesdp([P>=eye(2)
 A1'*P+P*A1+2*0.6*P<=0 A2'*P+P*A2+2*0.6*P<0])
```

y, tras 0.14 segundos se obtiene una respuesta afirmativa.

En general, tal y como se ha argumentado anteriormente, muchos problemas de relevancia en control borroso pueden ser solucionados si se encuentran valores para las variables de decisión que intervienen en la expresión particular de Q_{ij} de modo que se verifique (10).

Condiciones suficientes para (10) son, evidentemente, $Q_{ii} > 0$, $Q_{ij} + Q_{ji} > 0$ (Tanaka y Wang, 2001). La prueba es evidente sin más que considerar un ejemplo de 2 reglas donde se tiene que (10) se puede expresar como:

$$\mu_1^2 Q_{11} + \mu_1\mu_2(Q_{12} + Q_{21}) + \mu_2^2 Q_{22} > 0$$

con lo que, dado que μ_1 y μ_2 son positivos, si $Q_{11} > 0$, $Q_{12} > 0$ y $Q_{12} + Q_{21} > 0$ se habrá probado (10). El razonamiento se puede generalizar inmediatamente a más de dos reglas.

Estas condiciones han sido mejoradas por (Liu y Zhang, 2003*a*) y, posteriormente, (Fang *et al.*, 2006) las mejora aún más, con el teorema que a continuación se enuncia.

Teorema 1. La expresión (10) se verifica si existe un conjunto de matrices X_{ijk} tal que

$$R \geq 0 \quad X_{ijk} = X_{ikj}^T$$
$$Q_{ii} \leq X_{iii}$$
$$Q_{ii} + Q_{ij} + Q_{ji} \leq X_{iij} + X_{iji} + X_{jii} \quad i < j$$
$$Q_{ij} + Q_{ik} + Q_{ji} + Q_{jk} + Q_{ki} + Q_{kj} \leq$$
$$X_{ijk} + X_{ikj} + X_{jik} + X_{jki} + X_{kij} + X_{kji} \quad i < j < k$$
$$\begin{pmatrix} X_{i11} \dots X_{i1r} \\ \vdots \ddots \vdots \\ X_{ir1} \dots X_{irr} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i$$

Otras condiciones recientes más potentes (Sala y Ariño, 2007*a*), que también se aplican a casos de sumas borrosas multi-dimensionales, serán discutidas posteriormente.

La idea clave es que todas esas condiciones son de tipo LMI y, por tanto, unas pocas líneas de código permiten su resolución eficiente con un algoritmo de complejidad polinomial en tiempo y memoria.

3. LUCES Y SOMBRAS EN EL ENFOQUE HEURÍSTICO/LÓGICO DEL CONTROL BORROSO

Como se comenta en la introducción, el enfoque "heurístico" al diseño de controladores (un "experto humano" provee de reglas de control que se codifican) ha sido ampliamente utilizado y provee de soluciones satisfactorias en muchos casos. No obstante, las "sombras" del enfoque heurístico en cuanto a sus posibilidades de aportar resultados de control no-lineal en el futuro son:

- o bien son resultados no muy diferentes a las acciones de control usuales (con lo cual la contribución es básicamente introducir "suavizamientos" o saturaciones en leyes PID (Driankov, 1996), o usar ideas borrosas para suavizar controles deslizantes (Al-Hadithi *et al.*, 2005)),
- o bien son bases de reglas especializadas para una planta en concreto (por ejemplo, (Ruusunen y Leiviskä, 2004; Macián *et al.*, 2006; Burgos-Artizzu *et al.*, 2007)), innovadoras en su campo de aplicación, pero que no aportan grandes conclusiones generales al grueso de investigadores en control por su excesiva dependencia de las características específicas del proceso controlado, requiriendo en muchos casos un sintonizado fino manual por ensayo y error.

Se puede decir, por tanto, que el enfoque heurístico, históricamente de importancia dado que el control borroso nació con él (Zadeh, 1973), tuvo su apogeo en la década de 1975 a 1985 pero que casi ningún nuevo resultado de importancia general en control de procesos se ha producido desde entonces (excepto la extensión de su aplicación a plantas concretas).

Desde el punto de vista de la utilidad en control de argumentaciones en el ámbito de la lógica borrosa formal, algunos análisis de las reglas de control borroso pueden ser realizados desde un punto de vista formal estudiando contradicción, redundancia, ambigüedad (Sala y Albertos, 1998, 2001). No obstante, el tener unas reglas en un sistema experto de control "lógicamente válidas" no garantiza que lo sean "funcionalmente": el análisis de estabilidad de los controladores heurísticos puede resultar complicado, requiriendo aproximaciones en zonas, función descriptiva, *etc.* (Aracil *et al.*, 1989; Aracil y Gordillo, 2000; Al-Hadithi *et al.*, 2007). En efecto, las anteriores herramientas son, en algunos casos restringidas al control borroso de plantas lineales, en otros no pueden generalizarse al caso multivariable, los planos de fase no permiten discutir fácilmente sistemas de orden mayor de 2, etc. Además, las posibles variaciones en la estructura de las reglas heurísticas pueden dificultar análisis unificados generales.

Como punto positivo, es un hecho que, dada la capacidad de aproximación de los sistemas borrosos, las reglas pueden integrar distintas capas de control directo, supervisión o diagnóstico en una aplicación compleja por lo cual el enfoque heurístico sigue teniendo validez como metodología integradora (Albertos y Sala, 2004*a*). Asimismo, desde el punto de vista de un control, diagnóstico y supervisión a más "alto nivel", de creación de modelos y aprendizaje, colaboración multiagente, etc., la relevancia de la lógica borrosa en enfoques heurísticos y otras ideas de inteligencia artificial sí que continua siendo importante (Evsukoff *et al.*, 2000; Gentil, 2006; Innocenti *et al.*, 2007; Sala, 2008).

4. SOMBRAS EN EL CONTROL BORROSO: ENFOQUE LMI

En cuanto al enfoque formal basado en teoría de Lyapunov y LMI, básicamente, hay varias fuentes de conservadurismo en los resultados actuales de control borroso. Los siguientes serán discutidos en este trabajo:

1. Elección de la clase de funciones de Lyapunov a explorar
2. conservadurismo de las condiciones de positividad de sumas borrosas,
3. independencia de los resultados respecto a la forma de la función de pertenencia
4. Consideración de puntos de funcionamiento fijos
5. coste computacional.

Algunas ideas para superar dicho conservadurismo serán discutidas en la sección 5.

La selección de los temas obedece a la experiencia de los autores en ellos. Otras cuestiones muy relevantes, como las estructuras de incertidumbre, enfoques adaptativos, observadores, sistemas neuro-borrosos, *etc.* son también de suma importancia, pero no han sido elaboradas aquí por brevedad y para centrar la discusión. El lector puede consultar (Labiod y Guerra, 2007; Guerra *et al.*, 2006; Chen *et al.*, 2007) para estudiar contribuciones recientes en algunas de estas áreas.

Discutamos algunas de las antes mencionadas "sombras" del enfoque LMI.

4.1 Conservadurismo del enfoque de Lyapunov.

En control borroso, la búsqueda de funciones de Lyapunov se hace sólo en una particular clase de funciones candidatas (por ejemplo, las formas cuadráticas $x^T Rx$). Por tanto, un sistema estable puede no tener una función de Lyapunov en la clase buscada. El problema, no obstante, es común a la mayor parte de ámbitos del control no lineal: el enfoque de Lyapunov no es constructivo.

Las funciones cuadráticas han sido exploradas en profundidad en la literatura. Algunas mejoras en el ámbito TS han sido sugeridas recientemente; por ejemplo, funciones cuadráticas "a trozos" (Feng, 2003; Johansson *et al.*, 1999), funciones de Lyapunov borrosas para sistemas continuos (Tanaka *et al.*, 2003*a*) o discretos (Guerra y Vermeiren, 2004).

Aparte de eso, si el modelado del sistema no lineal como modelo TS es local, entonces no se prueba estabilidad o prestaciones ante condiciones iniciales dentro del conjunto modelado (por ejemplo, la zona $|x_1| < 0{,}5$ del ejemplo en la Sección 2), que sería el objetivo deseado, sino ante el *máximo conjunto invariante* resultante de la función de Lyapunov; en el caso cuadrático es una elipse. Si esa elipse resulta estar mal condicionada, sólo se prueba estabilidad en un pequeño dominio dentro del conjunto de definición que puede resultar muy poco útil en términos prácticos.

4.2 Conservadurismo de las condiciones de positividad de sumas borrosas.

La literatura actual está básicamente centrada en proveer de condiciones suficientes (Tuan *et al.*, 2001; Tanaka y Wang, 2001; Liu y Zhang, 2003*a*; Fang *et al.*, 2006) para que se verifique (10). Por tanto, podría existir una función de Lyapunov (incluso cuadrática) que verifique (10) pero que no verifique las condiciones LMI referenciadas. De hecho, el problema de la doble suma borrosa está íntimamente relacionado con el problema de la copositividad que es co-NP completo (Murty y Kabadi, 1987).

4.3 Conservadurismo "intrínseco" del enfoque borroso respecto a un enfoque no lineal.

La última sombra a abordar es la independencia de los resultados de la forma explícita de la función de pertenencia. En efecto, nótese que, por ejemplo, en el Teorema 1 en la sección 2 no aparece μ_i ni ninguna condición sobre la misma.

Sin embargo, de cara a implementar (6) es necesario conocer el valor de μ_i (su forma explícita y la medida o estimación razonablemente ajustada de las variables de las que dependa).

La independencia de la forma de las pertenencias es, cuando se obtiene una solución, ventajosa: la solución se aplica a cualquier familia de plantas no-lineales variantes con el tiempo a condición de que compartan los vértices. No obstante, es evidentemente conservativa *para un sistema en particular*. Por el contrario, los enfoques no-lineales usualmente toman en cuenta, explícitamente, la expresión de la no-linealidad para derivar resultados que son mucho más potentes que el enfoque borroso para un sistema en particular.

Considérese el siguiente ejemplo trivial

$$\dot{x} = \mu_1(z) \cdot x + (1 - \mu_1(z)) \cdot (-x) \tag{14}$$

No puede probarse que sea estable para una μ_1 arbitraria $0 \leq \mu_1(z) \leq 1$ porque es, evidentemente, inestable para μ_1 igual a la función constante 1. Sin embargo, para $\mu_1 = 0{,}2 + 0{,}2\sin(x)$ es estable porque se puede probar que la función de Lyapunov $V(x) = x^2$ es decreciente.

Por tanto, este conservadurismo es una situación que ocurre incluso en sistemas de primer orden: utilizando ideas de control no lineal, una vez las funciones de pertenencia han sido sustituidas explícitamente, se pueden obtener funciones de Lyapunov (a veces, con gran facilidad) incluso si el enfoque LMI ha fallado.

4.4 Puntos de funcionamiento fijos.

La metodología del sector no-lineal para obtener modelos TS es en muchos casos local. El modelo TS resultante tiene como punto de equilibrio $x = 0$ y los controladores son diseñados para alcanzar $x = 0$ de forma estable y con prestaciones adecuadas. No obstante, el cambio de punto de funcionamiento (y no digamos el seguimiento de trayectorias) requiere un cambio de variable "incremental" y el *re-cálculo* del modelo, dado que la interpretación de los modelos TS muchas veces no tiene características de "modelo local" (Sala *et al.*, 2004; Diez *et al.*, 2007). Por tanto, muchos de los resultados de la literatura son válidos sólo en un punto de funcionamiento. En (Ariño *et al.*, 2007) se presenta un bloque adicional a los reguladores PDC que permite dicho cambio de punto de funcionamiento sin remodelar, pero sólo se aplica a una clase canónica muy restringida de sistemas borrosos TS; los sistemas no lineales de los que provienen los sistemas TS admiten otras metodologías de control relativamente sencillas por lo que quizás el control no-lineal directo estaría recomendado. El cambio de punto de funcionamiento en sistemas borrosos en general es un problema abierto.

4.5 Coste computacional.

El número de variables de decisión y de condiciones LMI en alguno de los resultados más recientes es extremadamente grande: incluso si los motores de cálculo LMI utilizan algoritmos polinomiales en tiempo y memoria, el exponente sobre el orden del sistema es grande y muchos resultados sólo son implementables computacionalmente para sistemas simples (de orden bajo y de poco número de reglas).

4.6 Identificación

El modelado Takagi-Sugeno en (Tanaka y Wang, 2001) es apto para expresar en forma borrosa sistemas no lineales cuyas ecuaciones de comportamiento en representación interna sean conocidas. Pero existen algunos problemas cuando se discute la identificación de dichos modelos a partir de datos. Muchos enfoques hacia el problema de identificación borrosa utilizan técnicas de clasificación (*clustering* en la literatura inglesa); en particular, algunos trabajos de los autores en dicha linea pueden consultarse en (Diez *et al.*, 2004; Díez *et al.*, 2006). No obstante, existen múltiples problemas de condicionamiento, de coste computacional, de exactitud del modelado, de generación de las variables de estado, que hacen que la linea de investigación permanezca abierta y que el control borroso basado en modelos experimentales no haya despegado totalmente. Además, dado que los modelos experimentales no son exactos, al contrario que los TS considerados en la sección 2.1, deberían introducirse dichos "errores de aproximación" para un análisis riguroso: el problema es que la estructura de dichos errores es generalmente muy diferente a la usada en control robusto borroso LMI; véase, por ejemplo (4) en (Lo y Lin, 2004). Esa discrepancia entre la estructura de los errores en modelos de identificación y las estructuras necesarias en la teoría de control robusto ocurre también en el control lineal clásico (Sala y Esparza, 2003; Albertos y Sala, 2002; Gevers, 2005). Algunas aplicaciones prácticas de control borroso basado en datos se basan en identificar modelos locales, interpolarlos obteniendo una expresión similar a (1), y aplicar planificación de ganancia (Schulte y Hahn, 2004; Giarré *et al.*, 2006; Apkarian y Adams, 1998).

5. ALGUNAS LUCES

La mayor "luz" y razón de ser del enfoque borroso LMI es que pueden obtenerse controladores para sistemas no lineales utilizando técnicas derivadas de las lineales. Esta idea "seminal" es la que dio origen a la filosofía dominante en el control borroso en los últimos 15 años y ella sóla justifica la importancia del enfoque cuando es capaz de obtener resultados. No obstante, los problemas discutidos en la sección anterior pueden impedir que dichos resultados sean factibles en algunos problemas para los cuales una solución no-lineal "directa" podría obtenerlos (linealización por realimentación, back-stepping, etc. (Khalil, 1996)).

A continuación se discuten algunas ideas que reducen el conservadurismo en los primeros tres casos considerados en la sección precedente, pero incrementando considerablemente el quinto problema (coste computacional) con lo cual existe un compromiso práctico. Los resultados, no obstante, disminuyen la "distancia" entre lo alcanzable con control borroso y el control no lineal, al menos en teoría.

5.1 Funciones de Lyapunov arbitrariamente complejas.

Esta cuestión es común al control no-lineal y por tanto no sería en rigor responsable de un conservadurismo específico al modelo borroso. No obstante, la formulación TS permite realizar distintas aproximaciones al problema. En particular, podría pensarse en tres posibilidades para conseguir funciones de Lyapunov arbitrariamente complejas en este contexto:

(1) funciones de Lyapunov homogéneas de grado mayor que dos (Chesi *et al.*, 2003);
(2) exacerbar la idea de "cuadrática a trozos" hasta casi una definición "puntual" interpolada de la función de Lyapunov (Johansen, 2000);
(3) en sistemas discretos, utilizar muestreo ficticio a frecuencias menores (*sub-sampling*), comprobando $V(t + k) - V(t) \leq 0$, $k > 1$ según propuesto en (Kruszewski y Guerra, 2005) (en efecto, si un sistema es estable existirá una k tal que incluso $V(x) = x^T x$ verificará la ecuación de decrecimiento sobre varias muestras)

Las tres ideas son asintóticamente necesarias y suficientes: a medida que se incrementa el grado de las funciones de Lyapunov, la densidad de las interpolaciones o el período de muestreo, si existe una solución, será hallada. El problema, obviamente, es el coste computacional.

5.2 Condiciones asintóticamente necesarias y suficientes para sumas borrosas.

Defínase una variable índice multidimensional con la notación $\mathbf{i} \in \{1, \ldots, r\}^n$ donde r es el número de "reglas" y n es un parámetro de complejidad arbitrario seleccionado por el usuario. Denótense las permutaciones de $\mathbf{i}$ mediante $\mathcal{P}(\mathbf{i})$. Por ejemplo, considérese el índice de complejidad 3, $\mathbf{i} = \{1, 2, 4\}$, en un sistema de al menos cuatro reglas; entonces se tiene:

$$\mathcal{P}(\mathbf{i}) = \{\{1,2,4\},\{1,4,2\},\\ \{4,2,1\},\{2,4,1\},\{2,1,4\},\{4,1,2\}\}$$

Los resultados de (Liu y Zhang, 2003*a*,*b*; Fang *et al.*, 2006) son casos particulares de encontrar un tensor multi-dimensional de matrices que verifique para todo $\mathbf{i}$:

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{P}(\mathbf{i})} Q_{j_1 j_2} > \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{P}(\mathbf{i})} \frac{1}{2}(X_{\mathbf{j}} + X_{\mathbf{j}}^T) \tag{15}$$

y la desigualdad (con complejidad $n-2$):

$$\sum_{\mathbf{k}\in B_{n-2}} \mu_{\mathbf{k}} \xi^T \begin{pmatrix} X_{(\mathbf{k},1,1)} & \dots & X_{(\mathbf{k},1,r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{(\mathbf{k},r,1)} & \dots & X_{(\mathbf{k},r,r)} \end{pmatrix} \xi > 0 \tag{16}$$

De modo que, estableciendo adecuadamente una metodología recursiva, puede probarse que las condiciones anteriores son *necesarias y suficientes* con $n \to \infty$, y establecerse un parámetro de tolerancia para valores finitos de n. El lector puede consultar (Sala y Ariño, 2007*a*) para una discusión en detalle. El Teorema 1 es la particularización de las anteriores condiciones para complejidad $n = 3$, y las condiciones en (Liu y Zhang, 2003*a*) lo son para complejidad $n = 2$.

La principal cuestión sobre estas condiciones es que son necesarias sólo asintóticamente (n tendiendo a infinito). Por tanto, la no factibilidad no implica que el problema original no lo sea, sino que puede ser que el parámetro de complejidad n no sea lo suficientemente alto. Se plantea entonces el problema de determinar criterios de detención del algoritmo, por ejemplo basados en el parámetro de tolerancia antes discutido. Algunas consideraciones de interés a este respecto se hacen en (Kruszewski *et al.*, 2009).

El hecho de que la exactitud sea asintótica implica que obtener soluciones a alguno de los problemas puede tener un coste computacional muy elevado: según se discute en (Sala y Ariño, 2007*a*), el número de desigualdades LMI crece según $O(n^r)$ (polinomial en n), pero el número de variables de decisión crece según $O(r^n)$, exponencial en n, por lo que pronto se alcanzan los límites de los computadores actuales.

5.3 Considerar la forma de la función de pertenencia

El incorporar información explícita sobre la forma de las funciones de pertenencia (además de la obvia de que son no negativas y suman uno) puede relajar el conservadurismo. Hay dos tipos de información al respecto.

- restricciones en las funciones de pertenencia mismas, por ejemplo
$$\mu_1(x)\mu_2(x) < 0{,}1 \tag{17}$$
dado que, en un caso concreto, son conocidas (ver ejemplo (3)) y puede calcularse $\beta_{ij} = \text{máx}_{x\in\Omega}\, \mu_i(x)\mu_j(x)$.
- restricciones provenientes de la no-linealidad (restricciones de la función de pertenencia en una particular región del espacio de estados que hace que adopte valores en un rango menor que el intervalo [0,1] completo)
- Otra posibilidad prometedora es el *diseño directo* de las funciones de pertenencia del controlador no siendo iguales ni en forma ni en número a las de la planta, para conseguir objetivos de prestaciones. Una primera aproximación en esa linea aparece en (Lam y Leung, 2007); el trabajo (Ariño y Sala, 2007*a*) propone usar en las pertenencias del controlador productos y potencias de las funciones de pertenencia μ_i del proceso.

A continuación se discutirán un par de avances recientes en la primera de las líneas. La segunda y tercera líneas son interesantes, pero abiertas en estos momentos con resultados muy preliminares.

(a) Cotas sobre la superposición y la magnitud. Como las funciones de pertenencia de los controladores y plantas son conocidas, pueden obtenerse fácilmente cotas del tipo (17):

$$0 \le \mu_i(z)\mu_j(z) \le \beta_{ij}\ \forall\, z \tag{18}$$

Dichas cotas β_{ij} pueden ser usadas para relajar las LMIs originales y obtener resultados. En (Sala y Ariño, 2007*b*) se presenta el siguiente resultado.

Teorema 2. La expresión (10) se verifica si existen matrices $X_{ij} = X_{ji}^T$ y matrices simétricas $R_{ij} > 0$, $i \le j$, tales que, definiendo $\Lambda = \sum_{k=1}^{r} \sum_{k\le l\le r} \beta_{kl} R_{kl}$ se verifique:

$$X_{ii} \le Q_{ii} + R_{ii} - \Lambda \tag{19}$$

$$X_{ij} + X_{ji} \le Q_{ij} + Q_{ji} + R_{ij} - 2\Lambda \tag{20}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{r1} & \dots & X_{rr} \end{pmatrix} > 0, \qquad R_{ij} \ge 0 \tag{21}$$

De este modo, la información sobre la superposición permite conseguir mejores resultados sobre un sistema “en particular” que los conseguibles para toda la familia convexa TS de ellos.

En (Sala y Ariño, 2007*b*, 2008) se discuten también cotas sobre la magnitud de las funciones de pertenencia que, por ejemplo, permitirían demostrar, con mínimas modificaciones a las LMI usuales, que el segundo caso considerado en el ejemplo (14) de la sección 4.3 es estable.

Otra contribución al respecto aparece (Sala y Ariño, 2006), donde se discute que cuando un problema LMI es no factible pueden obtenerse resultados locales en una región del estado que pueda ser definida mediante restricciones lineales sobre las funciones de pertenencia. La metodología se basa en el cálculo de vértices, sin remodelar, como en principio sería requerido para obtener resultados de estabilidad en una zona diferente a la inicialmente considerada en el modelo borroso (Tanaka y Wang, 2001).

(b) Sistemas borrosos tensoriales. Muy frecuentemente, los sistemas borrosos se expresan en la forma:

$$\dot{x} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} \mu_{1i_1}\mu_{2i_2}\dots\mu_{pi_p}(A_{i_1 i_2\dots i_p}x + \\ + B_{i_1 i_2\dots i_p}u) \tag{22}$$

donde las funciones de pertenencia son el producto tensorial de particiones más simples.

Por ejemplo, si consideramos el ejemplo de la sección 2 modificado a:

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1)x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1^2)x_1 + u$$

puede ser expresado, en la zona $|x_1| < 0{,}5$ como un sistema TS tensorial de 2 x 2 reglas dado por:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\mu_i\eta_j(A_{ij}x + Bu) \qquad (23)$$

con $B = (0\ 1)^T$ y

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(0{,}5) & 0 \end{pmatrix}$$
$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(0{,}5) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(0{,}5) \\ -\sin(0{,}5) & 0 \end{pmatrix}$$

En (Tanaka y Wang, 2001) aparecen muchos otros ejemplos donde el modelo resultante tiene esta forma, con $n_1 = \cdots = n_p = 2$ resultante de interpolaciones entre el máximo y el mínimo de una función en una zona. También aparecen sistemas borrosos tensoriales como resultado de algunas metodologías de identificación y aproximación (Baranyi, 2004).

Ninguna de las referencias bibliográficas citadas considera explícitamente dicha forma de producto multidimensional y simplemente realiza una reducción de dimensionalidad (*flattening*) para aplicar metodologías usuales (un sistema tensorial de $2 \times 2 \times 2$ reglas se convierte en un sistema ordinario de 8 reglas): ello es conservativo dado que, por ejemplo, cuando se anula una de las ocho pertenencias, automáticamente se anulan tres más y eso no se toma en cuenta si se las considera de forma independiente.

Como $\mu(1-\mu)$ tiene en $[0,1]$ un máximo en 0.25 (para cualquier μ genérico variando en el rango [0,1]) , puede demostrarse que existen cotas de superposición para las reglas que son una potencia de 0.25. Por ejemplo, considerando el modelo (23) arriba descrito, la regla $(\mu_1\eta_1)$ y la regla $(\mu_2\eta_2)$ se superponen con una cota $\beta = 0{,}25^2$. De este modo, la metodología anterior (Teorema 2) puede aplicarse fácilmente sobre esta muy frecuente clase de sistemas, como de hecho aparece en la sección de ejemplos de (Sala y Ariño, 2007*b*).

Además, en (Ariño y Sala, 2007*b*) se presenta una metodología recursiva que explota esa particular estructura de las funciones de pertenencia para reducir el conservadurismo aún más que con el enfoque basado en la superposición arriba esbozado (no obstante, el coste computacional de la metodología recursiva es bastante mayor).

6. CONCLUSIONES

Muchos sistemas no-lineales admiten una representación como sistemas borrosos Takagi-Sugeno. El control borroso mediante LMI es una forma de aproximarse al control de dichos sistemas no-lineales mediante la extensión de técnicas de sistemas lineales. No obstante, hay fuentes de conservadurismo, algunas de las cuales han sido analizadas en este trabajo, para entender mejor cuál es esa "distancia" entre lo que un enfoque borroso basado en los modelos "vértice" puede ofrecer y lo que ofrece un enfoque no-lineal que contempla explícitamente las ecuaciones originales no lineales.

Algunas de las desventajas de las metodologías borrosas han sido estudiadas y superadas recientemente en algunos aspectos (clases más generales de funciones de Lyapunov, restricciones de la forma de las funciones de pertenencia, condiciones necesarias y suficientes asintóticamente, sistemas borrosos tensoriales, etc.). No obstante, gran parte de las soluciones propuestas adolecen de una gran complejidad computacional.

La más importante razón de la diferencia entre metodologías borrosas y no-lineales es la imposibilidad de expresar relaciones entre pertenencias y estados; esto continua siendo un problema abierto, así como el diseño explícito de las funciones de pertenencia (el diseñador tendría libertad para proponer un controlador con funciones no necesariamente iguales ni en forma ni en número a las del proceso no lineal a controlar). En general, técnicas no lineales explícitamente adaptadas a la estructura del proceso a controlar ofrecerán, probablemente, mejores prestaciones que las técnicas borrosas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado parcialmente gracias al apoyo del Ministerio de Educación y Ciencia, programa FPU, proyecto DPI2008-06731-c02(-01 y -02), y de la Generalitat Valenciana, proyecto PROMETEO/2008/088.

REFERENCIAS

Al-Hadithi, B.M., F. Matía y A. Jiménez (2005). Controladores Borrosos Basados en Estructura Variable con Modos Deslizantes: Aspectos y Similitudes. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)* **2**(1), 19–35.

Al-Hadithi, B.M., F. Matia y A. Jimenez (2007). Análisis de estabilidad de sistemas borrosos. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)* **4**(2), 7–25.

Albertos, P. y A. Sala (2002). *Iterative Identification and Control: Advances in Theory and Applications*. Springer.

Albertos, P. y A. Sala (2004*a*). El Control Borroso: Una Metodología Integradora. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)* **1**(2), 22–31.

Albertos, P. y A. Sala (2004*b*). *Multivariable control systems—an engineering approach*. Springer.

Albertos, P. y A. Sala (2004*c*). Perspectives of fuzzy control: lights and shadows. *Proc. of 2nd International IEEE Conference on Intelligent Systems, 2004* **1**, Plenary session.

Andújar, J.M., AJ Barragán, M.E.G. Arias y M. Maestre (2007). Control borroso multivariable basado en heurística. Un caso práctico: grúa porta contenedores. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)* **4**(2), 81–89.

Apkarian, P. y R.J. Adams (1998). Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Trans. Control Syst. Techn.* **6**, 21–32.

Aracil, J., A. Ollero y A. Garcia-Cerezo (1989). Stability indices for the global analysis of expert control systems. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on* **19**(5), 998–1007.

Aracil, J. y F. Gordillo (2000). *Stability Issues in Fuzzy Control*. Physica-Verlag Heidelberg.

Ariño, C., A. Sala y J.L. Navarro (2007). Diseño de controladores en varios puntos de funcionamiento para una clase de modelos borrosos Takagi-Sugeno afines. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)* **4**(2), 98–105.

Ariño, C. y A. Sala (2007*a*). Design of multiple-parameterisation PDC controllers via relaxed conditions for multi-dimensional fuzzy summations. In:

Proc. of Fuzz-IEEE'07. IEEE Press. London, UK. p. doi:10.1109/FUZZY.2007.4295495.

Ariño, C. y A. Sala (2007*b*). Relaxed LMI conditions for closed loop fuzzy systems with tensor product structure. *Eng. Appl. Artif. Intell.* **20**(8), 1036–1046.

Baranyi, P. (2004). TP model transformation as a way to LMI-based controller design. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* **51**(2), 387–400.

Bondia, J., A. Sala, J. Picó y M. A. Sainz (2006). Controller design under fuzzy pole-placement specifications: an interval arithmetic approach. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* **14**(6), 822–836.

Bondia, J., A. Sala y J. Pico (2005). Possibilistic Robust Control For Fuzzy Plants: Control Performance Degradation. In: *16th IFAC World Congress*. Elsevier. Praga (República Chéca). pp. 1–6.

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Ed. SIAM. Philadelphia, USA.

Boyd, S. y L. Vandenberghe (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

Burgos-Artizzu, X.P., A. Ribeiro y M. de Santos (2007). Controlador Borroso Multivariable para el Ajuste de Tratamientos en Agricultura de Precisión. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)* **4**(2), 64–71.

Chen, B., X. Liu y S. Tong (2007). Adaptive Fuzzy Output Tracking Control of MIMO Nonlinear Uncertain Systems. *IEEE Trans. Fuzzy Systems* **15**(2), 287.

Chesi, G., A. Garulli, A. Tesi y A. Vicino (2003). Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties. *Automatica* **39**(6), 1027–1035.

Díez, J.L., A. Sala y J. LuisÑavarro (2006). Target-shaped possibilistic clustering applied to local-model identification. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **19**(2), 201–208.

Diez, J.L., J.L. Navarro y A. Sala (2004). Algoritmos De Agrupamiento En La Identificación De Modelos Borrosos.. *Rev. Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* **1**, 32–41.

Diez, J.L., J.L. Navarro y A. Sala (2007). A Fuzzy Clustering Algorithm Enhancing Local Model Interpretability . *Soft Computing* **11**, 973–983.

Driankov, D. (1996). *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer.

Evsukoff, A., S. Gentil y J. Montmain (2000). Fuzzy reasoning in co-operative supervision systems. *Control Engineering Practice* **8**(4), 389–407.

Fang, Chun-Hsiung, Yung-Sheng Liu, Shih-Wei Kau, Lin Hong y Ching-Hsiang Lee (2006). A New LMI-Based Approach to Relaxed Quadratic Stabilization of T-S Fuzzy Control Systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **14**, 286–397.

Feng, G. (2003). Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Trans. Fuzzy Systems* **11**(5), 605–612.

Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* **14**(5), 676–697.

Gentil, S. (2006). Artificial Intelligence for Industrial Process Supervision. *Lecture Notes in Computer Science* **4031**, 2.

Gevers, M. (2005). Identification for control: From the early achievements to the revival of experiment design. *European Journal of Control* **11**(4-5), 335–352.

Giarré, L., D. Bauso, P. Falugi y B. Bamieh (2006). LPV model identification for gain scheduling control: An application to rotating stall and surge control problem. *Control Engineering Practice* **14**(4), 351–361.

Guerra, TM, A. Kruszewski, L. Vermeiren y H. Tirmant (2006). Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi–Sugeno's form. *Fuzzy Sets and Systems* **157**(9), 1248–1259.

Guerra, T.M. y L. Vermeiren (2004). LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the takagi-sugeno's form. *Automatica* **10**, 823 – 829.

Haykin, S. (1994). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, USA.

Innocenti, B., B. López y J. Salvi (2007). A multi-agent architecture with cooperative fuzzy control for a mobile robot. *Robotics and Autonomous Systems* **55**(12), 881–891.

Johansen, TA (2000). Computation of Lyapunov functions for smooth nonlinear systems using convex optimization. *Automatica* **36**(11), 1617–1626.

Johansson, M., A. Rantzer y K.E. Arzen (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Systems* **7**, 713–722.

Khalil, H.K. (1996). *Nonlinear Systems (2nd. ed.)*. Ed. Prentice-Hall. Upper Saddle River, New Jersey, USA.

Kosko, B. (1994). Fuzzy systems as universal approximators. *Computers, IEEE Transactions on* **43**(11), 1329–1333.

Kruszewski, A., A. Sala, T.M. Guerra y C.V. Ariño (2009). A triangulation approach to assymptotically exact conditions for fuzzy summations. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*.

Kruszewski, A. y TM Guerra (2005). New Approaches for the Stabilization of Discrete Takagi-Sugeno Fuzzy Models. *44th IEEE Decision and Control and 2005 European Control Conf.* pp. 3255–3260.

Labiod, S. y T.M. Guerra (2007). Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems* **158**(10), 1126–1137.

Lam, HK y FHF Leung (2007). Fuzzy controller with stability and performance rules for nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems* **158**(2), 147–163.

Löfberg, J. (2004). Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan.

Liu, X. y Q. Zhang (2003*a*). Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for t-s fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **11**(6), 830–839.

Liu, X. y Q. Zhang (2003*b*). New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica* **39**(9), 1571–1582.

Lo, J.C. y M.L. Lin (2004). Observer-based robust $\mathcal{H}_\infty$ control for fuzzy systems using two-step procedure. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **12**(3), 350–359.

Macián, V., B.V. Tormos, A. Sala y J.C. Ramírez (2006). Fuzzy Logic-Based Expert System For Diesel Engine Oil Analysis Diagnosis. *Insight* **48**, 462–470.

Murty, K.G. y S.N. Kabadi (1987). Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming. *Mathematical programming* **39**, 117–129.

Pedrycz, W. (1993). *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*. John Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA.

Ruusunen, M. y K. Leiviskä (2004). Fuzzy modelling of carbon dioxide in a burning process. *Control Engineering Practice* **12**(5), 607–614.

Sala, A. (2008). Encoding Fuzzy Possibilistic Diagnostics As A Constrained Optimisation Problem. *Information Sciences* **178**, 4246–4263.

Sala, A., J.L. Diez, J.L. Navarro y P. Albertos (2004). Fuzzy model usage and readability in identification for control. In: *Proceedings of World Automation Congress'04*. Vol. 16. IEEE.

Sala, A., T.M. Guerra y R. Babuška (2005). Perspectives of fuzzy systems and control. *Fuzzy Sets and Systems* **156**(3), 432–444.

Sala, A. y A. Esparza (2003). Reduced-order controller design via iterative identification and control. *European journal of control* **9**(1), 105–117.

Sala, A. y C. Ariño (2006). Local Stability of Open-and Closed-loop Fuzzy Systems. *IEEE International Symposium on Intelligent Control, ISIC'06* pp. 2384–2389.

Sala, A. y C. Ariño (2007*a*). Assymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets and Systems* **158**(4), 2671–2686.

Sala, A. y C. Ariño (2007*b*). Relaxed stability and performance conditions for takagi-sugeno fuzzy systems with knowledge on membership function overlap. *IEEE Trans. SMC(B)* **37**(3), 727–732.

Sala, A. y C.V. Ariño (2008). Relaxed stability and performance LMI conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with polynomial constraints on membership shape. *IEEE Trans. Fuzzy Systems* **16**(5), 1328–1336.

Sala, A. y P. Albertos (1998). Fuzzy systems evaluation: The inference error approach. *Systems, Man and Cybernetics, Part B, IEEE Transactions on* **28**(2), 268–275.

Sala, A. y P. Albertos (2001). Inference error minimisation: fuzzy modelling of ambiguous functions. *Fuzzy Sets and Systems* **121**(1), 95–111.

Schulte, H. y H. Hahn (2004). Fuzzy state feedback gain scheduling control of servo-pneumatic actuators. *Control Engineering Practice* **12**(5), 639–650.

Slotine, Jean-Jaques E. y Weiping Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Ed. Prentice Hall. Englewood Cliffs,New Jersey.

Sugeno, M. (1985). *Industrial Applications of Fuzzy Control*. Elsevier Science Inc. New York, NY, USA.

Takagi, T. y M. Sugeno (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* **15(1)**, 116–132.

Tanaka, K., T. Hori y HO Wang (2003*a*). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **11**(4), 582–589.

Tanaka, K., T. Hori y H.O. Wang (2003*b*). A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**, 250–265.

Tanaka, K. y H. O. Wang (2001). *Fuzzy control systems design and analysis*. Ed. John Wiley & Sons. New York, USA.

Tuan, HD, P. Apkarian, T.Ñarikiyo y Y. Yamamoto (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Trans. Fuzzy Systems* **9**(2), 324–332.

Wang, L.-X. (1994). *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*. Ed. Prentice-Hall. New Jersey, USA.

Zadeh, L.A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. **3**, 28–44.