

Desarrollo y control de un helicóptero de laboratorio de 2 GDL y de bajo costo

Mariana A. Chávez-Gudiño^a, Antonio Concha-Sánchez^{a,*}, Fermin M. Maciel-Barboza^a, Suresh K. Gadi^b, Suresh Thenozhi^c,
Ramón J. Betancourt^d

^a Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad de Colima, Coquimatlán, Colima 28400, México.

^b Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Coahuila, Torreón, Coahuila 27276, México.

^c Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, Santiago de Querétaro, Querétaro 76010, México.

^d Facultad de Ingeniería Electromecánica, Universidad de Colima, Manzanillo, Colima 28860, México.

To cite this article: Chávez-Gudiño M. A., Concha-Sánchez A., Maciel-Barboza F. M., Gadi S. K., Thenozhi S. 2023. Development and control of a low cost 2 DOF laboratory helicopter. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 20, 366-378. <https://doi.org/10.4995/riai.2023.18942>

Resumen

Se presenta el diseño mecánico y electrónico, modelado cinemático y dinámico, programación y control de un helicóptero de 2 GDL y de bajo costo. Si bien existen plataformas comerciales de helicópteros de 2 GDL, su costo es elevado y por ende son poco accesibles. Esta situación puede evitarse mediante el uso de una plataforma basada en software de código abierto y en un sistema de adquisición de datos de bajo costo. Para este fin, en este artículo se presenta un helicóptero de 2 GDL cuyos movimientos de cabeceo y guiñada son accionados por motores de corriente directa, y son medidos por encoders ópticos. Para la interpretación, procesamiento y monitoreo de los movimientos del helicóptero se emplea una computadora con Matlab Simulink. Para la adquisición de datos de los encoders y la generación de las señales de control del helicóptero se utiliza una tarjeta Arduino Mega, la cual se comunica con Matlab-Simulink por medio del Toolbox Arduino IO de código abierto. También, se propone un procedimiento para estimar los parámetros del modelo dinámico del helicóptero, y se utilizan para diseñar controladores PI-D, los cuales permiten que el helicóptero siga una trayectoria deseada. El análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado toma en cuenta la interacción entre los movimientos de cabeceo y guiñada. Se verifica el desempeño de la plataforma propuesta mediante resultados experimentales, los cuales se visualizan en un vídeo.

Palabras clave: Helicóptero de 2 GDL, control en tiempo real, estimación de parámetros, software de código abierto, tecnología de bajo costo.

Development and control of a low cost 2 DOF laboratory helicopter

Abstract

The mechanical and electronic design, kinematic and dynamic modeling, programming, and control of a low-cost 2-DOF helicopter are presented. Although there are commercial platforms for a 2-DOF helicopter, their cost is high, and therefore they are not easily accessible. This situation may be avoided by using a low-cost platform based on open-source software and a low-cost data acquisition system. To this end, this article presents a 2-DOF helicopter whose pitch and yaw movements are actuated by DC motors, and they are measured by encoders. For the interpretation, processing, and monitoring of the movements, a computer with Matlab Simulink is used. Data acquisition of the encoders and the generation of the control signals of the helicopter are carried out by an Arduino Mega board, which communicates with Simulink through the open-source Arduino IO Toolbox. A procedure to estimate the parameters of the dynamic model of the helicopter is also proposed, and they are used for designing PI-D controllers, which allow the helicopter to follow a desired trajectory. The closed-loop stability analysis of the system takes into account the interaction between pitch and yaw motions. In addition, the performance of the proposed platform is verified through real-time experiments, which are shown in a video.

Keywords: 2-DOF helicopter, real-time control, parameter estimation, open-source software, low-cost technology.

* Autor en correspondencia: aconcha@ucoil.mx

1. Introducción

Como se menciona en Madridano et al. (2020), los desarrollos recientes en vehículos aéreos no tripulados (VANT) han beneficiado enormemente al sector público, civil y militar. Entre ellos, los VANT con hélices son los más populares debido a sus capacidades de despegue y aterrizaje vertical, mayor maniobrabilidad y menor tamaño (Shraim et al., 2018; Sanchez-Fontes et al., 2020; Rico-Azagra et al., 2021). Especialmente, los helicópteros son eficientes en vuelo y se utilizan ampliamente en misiones de vigilancia y recopilación de datos (He et al., 2021). Por lo anterior, varias instituciones de investigación y universidades han centrado su investigación en este campo (Xilun et al., 2019), enfocándose principalmente en mejorar los aspectos mecatrónicos y computacionales del sistema, donde el primer aspecto se refiere al diseño del hardware, y el segundo está relacionado con el diseño del controlador de movimientos y en su programación.

En particular, el helicóptero de 2 grados de libertad (GDL) ha sido ampliamente utilizado en el campo académico y de investigación para mostrar el comportamiento y control de los VANT. Este sistema está disponible comercialmente para verificar una variedad de técnicas de control, incluyendo el control neuronal (Zhao et al., 2022), neurodifuso (Öztürk y Özkol, 2021; Evangelista y de Oliveira Serra, 2022), modos deslizantes (Sadala y Patre, 2018; Patel y Mehta, 2021), control robusto basado en el aprendizaje (Reyhanoglu et al., 2022), control pasivo tolerante a fallas (Zuñiga et al., 2021), control saturado (Kim y Yoo, 2021), control de realimentación por retroceso (backstepping) adaptable (Schlanbusch y Zhou, 2020), control linealizante por retroalimentación (Xin et al., 2019), control óptimo (Kumar et al., 2016; Luo et al., 2017), entre otros. Si bien estas plataformas comerciales han sido de gran utilidad en el ámbito académico y de investigación, su costo es elevado. Por esta razón, algunos investigadores se han enfocado en desarrollar plataformas de helicópteros de bajo costo, las cuales se presentan en la Tabla 1. Sin embargo, la parte más costosa de los diseños presentados en Ahmed et al. (2010); Sharma y Pfeiffer (2017); Castellanos y Ballesteros (2019) es el sistema de adquisición de datos, y aún hay margen para reducirlo utilizando microcontroladores genéricos (Khakshour y Khanesar, 2016; Neto et al., 2016; Solaque Guzmán et al., 2014), a expensas de la dificultad en la programación de los algoritmos de control.

Por otro lado, en los últimos años se han generado varios trabajos sobre el diseño de controladores para los VANT, entre los que destacan los descritos en Xilun et al. (2019); Özbek et al. (2016); Wei-hong et al. (2021); Ghersin et al. (2021); Rodríguez-Cortés (2022). La mayoría de los controladores presentados se validan mediante estudios de simulación, posiblemente debido al alto costo de las plataformas experimentales y de los sistemas de adquisición de datos, así como por las restricciones del hardware y por la implementación del sistema de control. Dado que el uso de plataformas experimentales es esencial para validar el control de movimiento de los VANT, es muy deseable desarrollar una plataforma de bajo costo basada

en software de código abierto, que sea fácil de implementar y de construir, y que sea asequible para la mayoría de los estudiantes e investigadores, tal como se menciona en Flores-Calero et al. (2020). Este hecho ha motivado la realización de este trabajo, cuyo objetivo es desarrollar una plataforma experimental basada en un helicóptero de 2 GDL y de bajo costo, que permita realizar diversas actividades, tales como la investigación y la enseñanza de la teoría de control automático. Las principales contribuciones del documento son las siguientes:

- Se describen en detalle el diseño mecánico y electrónico de la plataforma propuesta, su modelo cinemático y dinámico, las especificaciones de los sensores y actuadores, así como el diseño y programación del controlador del helicóptero.
- Se propone una nueva metodología para estimar los parámetros del modelo dinámico del helicóptero, los cuales son necesarios para diseñar su controlador y analizar su estabilidad. Esta técnica de identificación paramétrica se basa en el modelo en estado estacionario del helicóptero y es más simple que la presentada en Osmic et al. (2010).
- Se proponen y sintonizan 2 controladores PI-D, uno para controlar los movimientos de cabeceo y otro para controlar los movimientos de guiñada. Se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado, y se presentan las condiciones para garantizar la estabilidad del helicóptero. Este análisis de estabilidad toma en cuenta el acoplamiento entre los movimientos de cabeceo y guiñada, a diferencia del presentado por Solaque Guzmán et al. (2014). Al emplear controladores PI-D en lugar de controladores PID tradicionales se evita el efecto de patada derivativa debido a señales de referencia constantes.
- Se emplea una tarjeta Arduino Mega para la adquisición de datos del helicóptero y para generar las señales de control. Esta tarjeta se comunica con una computadora personal por medio del Toolbox Arduino IO de Simulink. La ventaja de este sistema de adquisición de datos es que es mucho más económico que los presentados en Ahmed et al. (2010); Sharma y Pfeiffer (2017); Castellanos y Ballesteros (2019).
- La ventaja del Toolbox Arduino IO es que es de código abierto y permite realizar el control automático del helicóptero tiempo real. Además, toda la programación del algoritmo de control del helicóptero se realiza por medio del software Simulink, con el cual es posible diseñar otras técnicas de control usando un entorno visual basado en diagramas de bloques, cuya programación tiene un nivel de abstracción mayor que la empleada en las plataformas descritas en Khakshour y Khanesar (2016); Neto et al. (2016); Solaque Guzmán et al. (2014).

Este artículo está organizado como sigue. La sección 2 presenta la plataforma experimental construida describiendo cada uno de sus componentes. Tanto el modelo cinemático como el

Tabla 1: Plataformas de helicópteros de 2 GDL.

Referencias	Controlador	Adquisición de datos	Software
Ahmed et al. (2010)	Modos deslizantes	Tarjeta PCI	Matlab/Simulink
Sharma y Pfeiffer (2017)	LQR and MPC	National Instruments	Matlab/Simulink
Castellanos y Ballesteros (2019)	Difuso	Tarjeta NI USB-6008	Labview
Khakshour y Khanesar (2016)	Fraccionario	Microcontrolador ARM LPC1768	Embebido
Neto et al. (2016)	Asignación de polos	Tarjeta Freescale FRDM-K64F	Embebido
Solaque Guzmán et al. (2014)	PID y difuso	PIC 18F4550	Lenguaje C#

dinámico del helicóptero de 2 GDL se deducen en la sección 3. Por otro lado, la sección 4 presenta el procedimiento propuesto para estimar los parámetros del modelo dinámico, mientras que en la Sección 5 se emplean estos parámetros en el diseño de 2 controladores PI-D que estabilizan al helicóptero y permiten que siga una trayectoria deseada. Finalmente, la Sección 6 presenta los resultados experimentales obtenidos con la plataforma, y la Sección 7 describe las conclusiones de este trabajo.

2. Arquitectura de la plataforma experimental

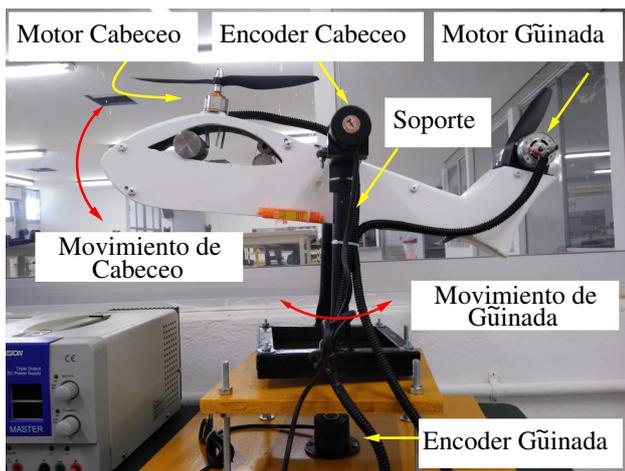
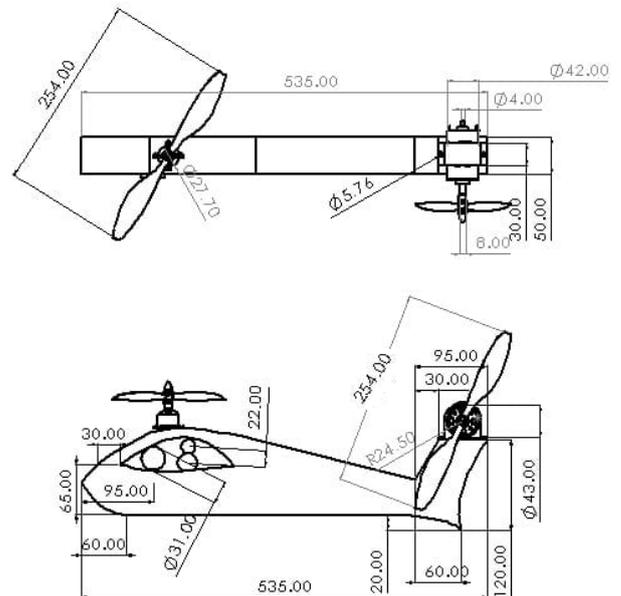


Figura 1: Plataforma experimental propuesta.

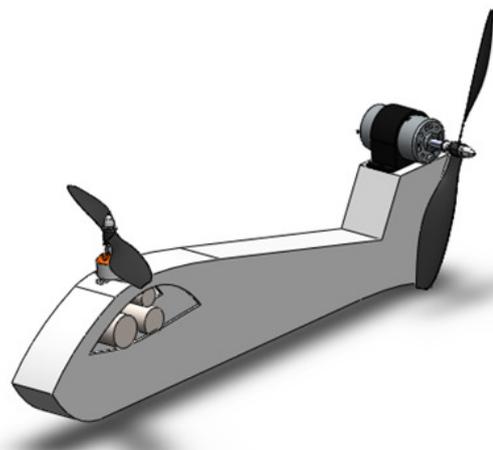
La Figura 1 muestra el helicóptero de 2 GDL desarrollado, mientras que su diseño mecánico y dimensiones se presentan en la Figura 2. El helicóptero está acoplado a una estructura para no golpear ni lastimar a los usuarios debido a algún error en el diseño de su controlador. El fuselaje del helicóptero es de acrílico de 3 mm, mientras que su soporte es un perfil de acero tubular de 3/4 pulgadas con 2 mm de espesor. En el fuselaje del helicóptero se encuentran 2 contrapesos que modifican su centro de masa.

El diagrama de bloques y el sistema electrónico del helicóptero se muestran en la Figura 3. El helicóptero se compone de 2 motores de corriente directa (CD) acoplados a unas propelas que permiten la elevación y rotación del helicóptero. El modelo de las propelas es el 1045, las cuales tienen una longitud de 25.4 cm y su paso es de 11.4 cm. El motor empleado para generar el movimiento de cabeceo es de CD sin escobillas, modelo A2212/13T, cuya velocidad es de 1000 RPM por voltio. El driver ESC 30A controla la velocidad de este motor por

medio de modulación por ancho de pulso (pwm). Por otro lado, para accionar el movimiento de guiñada del helicóptero se emplea un motor de CD con escobillas, modelo 775, cuya velocidad puede llegar hasta 10000 RPM. La velocidad y el sentido de giro de este motor se controlan por medio de un puente H, modelo VNH5019.



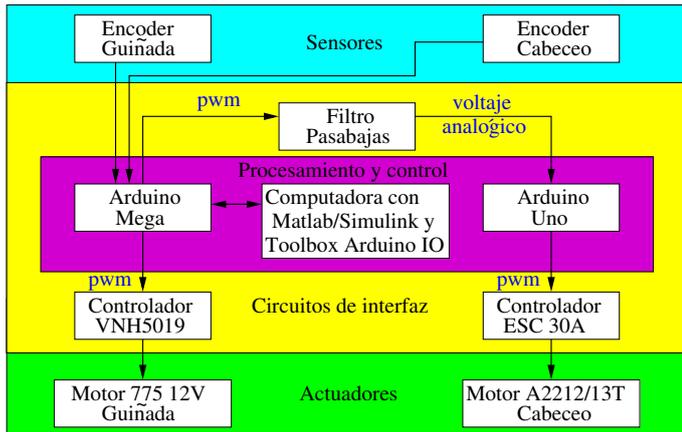
(a) Modelo CAD en 2D (unidades en mm).



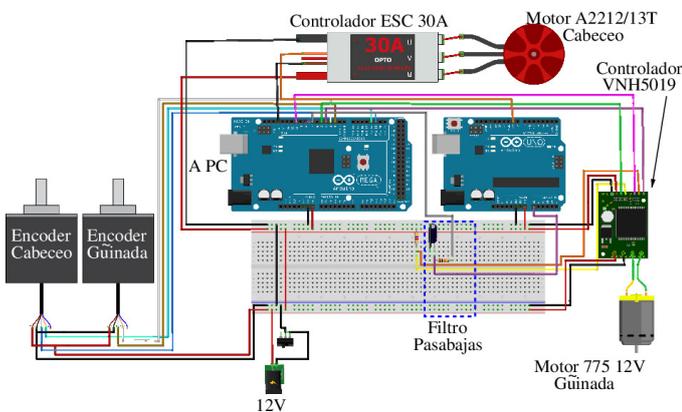
(b) Modelo CAD en 3D.

Figura 2: Diseño mecánico.

El motor de CD sin escobillas A2212/13T gira solo en una dirección ya que su driver ESC 30A no permite el cambio de giro mientras el motor se encuentra energizado. Incrementando su velocidad permite aumentar el ángulo de cabeceo, mientras que decrementando su velocidad permite reducir este ángulo. Por otro lado, para el movimiento de guiñada se emplea el motor de CD con escobillas 775 ya que su driver VNH5019 permite el giro del motor en ambas direcciones, y de esta forma el ángulo de guiñada puede ser positivo o negativo. Para el movimiento de guiñada no se emplea el motor de CD sin escobillas A2212/13T, ya que con este motor el movimiento sería en una sola dirección.



(a) Diagrama de bloques.



(b) Diagrama electrónico.

Figura 3: Diseño electrónico.

Los ángulos de cabeceo y guiñada se miden utilizando encoders de cuadratura de 400 y 600 pulsos por revolución (PPR), respectivamente. Se emplea la codificación X4 en las señales proporcionadas por los encoders, lo cual permite aumentar su resolución cuatro veces. De esta manera se pueden detectar movimientos de $360/(4 \times 400) = 0.23^\circ$ y de $360/(4 \times 600) = 0.15^\circ$ en los ejes de cabeceo y de guiñada, respectivamente.

Se utiliza una tarjeta Arduino Mega para la adquisición de datos del helicóptero en tiempo real, y esta tarjeta sirve como interfaz entre la computadora y el helicóptero. Para que esta tarjeta realice adquisición de datos se requiere el firmware adioe, el cual se puede descargar en Giampiero Campa (2023b). Esta placa Arduino lee los encoders y convierte las señales del

controlador de movimientos del helicóptero en señales PWM equivalentes. Esta tarjeta posee 3 Temporizadores/Contadores de 16 bits y 2 de ellos son usados para contabilizar los pulsos de los encoders de la plataforma. En una computadora se programa el controlador de movimientos usando el software de MATLAB-Simulink. La comunicación entre la placa Arduino y la computadora se realiza por medio del Toolbox Arduino IO de Simulink, el cual tiene bloques para leer los pulsos de los encoders y para generar las señales de control del helicóptero. Cabe mencionar que no se empleó una tarjeta Arduino UNO para la adquisición de datos, ya que esta tarjeta posee un solo Temporizador/Contador de 16 bits y, por consiguiente, solo es posible leer un encoder con la misma.

Como se observa en la Figura 3, la señal de control del Arduino Mega se aplica al motor de CD sin escobillas a través de una placa Arduino Uno. Esta última placa se utiliza para generar una señal PWM de 50 Hz requerida por el controlador ESC 30A, ya que la frecuencia de la señal PWM proporcionada por el Arduino Mega es de 500 Hz. La salida PWM del Arduino Mega se convierte en un voltaje analógico equivalente usando un filtro paso bajas de primer orden conformado por una resistencia y un capacitor, el cual tiene una frecuencia de corte de 15,92 Hz. El Arduino Uno convierte esta señal analógica en una señal PWM que luego se suministra al controlador ESC 30A. El periodo de esta señal de PWM es de 20 ms, cuyo ciclo de trabajo (D) varía de 5 a 10 %. El valor de D es proporcional a la velocidad del motor de CD sin escobillas, donde $D = 5\%$ indica que el motor se encuentra detenido, mientras que un valor de $D = 10\%$ representa que el motor funciona a su máxima velocidad. El programa para generar la señal PWM con el Arduino Uno se puede descargar en Gadi (2023c).

Finalmente, en la Tabla 2 se presenta el costo total de la plataforma propuesta, el cual es de aproximadamente 308 dolares y es mucho menor que el costo de las plataformas comerciales.

Tabla 2: Lista de componentes del helicóptero de 2 GDL

Componente	Cantidad	Costo (USD)
Motor de CD sin escobillas (A2212/13T 1000 RPM/V)	1	20
Controlador ESC 30A	1	15
Motor de CD con escobillas (775 12V)	1	20
Controlador VNH5019	1	55
Encoder LPD3806 400 PRR	1	30
Encoder LPD3806 600 PRR	1	30
Arduino Mega 2560	1	25
Arduino Uno	1	15
Propelas	2	3
Chumaceras para apoyar ejes	4	15
Fuselaje	1	35
Tornillos y madera	-	15
Gabinete para circuito control	1	15
Costo total	-	308

3. Modelo matemático

La Figura 4 presenta el diagrama cinemático y dinámico del helicóptero construido mostrando un sistema inercial con ejes X, Y, Z, donde los movimientos de cabeceo θ y de guiñada ψ se realizan alrededor de los ejes Y e Z, respectivamente. La constante I_{cm} representa la distancia del centro de masa del helicóptero con respecto al origen del sistema inercial. Además, m_{heli} denota la masa total del helicóptero y g es la aceleración de la gravedad. Se considera que el ángulo θ se incrementa positivamente, es decir $\theta > 0$, cuando la nariz del helicóptero se mueve hacia abajo. Además, se supone que el ángulo ψ se incrementa positivamente cuando el helicóptero gira en el sentido horario. Con esta selección en los sentidos de giro, un incremento en el voltaje de cualquiera de los motores permite incrementar el ángulo del eje al que está acoplado.

En la Figura 4 también se muestra un sistema de coordenadas móvil con ejes X', Y', Z', cuyo origen se encuentra en el centro de masa del helicóptero, el cual se denota como $\mathbf{p}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$; la orientación y posición de este sistema de coordenadas con respecto al marco inercial se puede obtener usando transformaciones homogéneas (Spong et al., 2006), como se muestra a continuación.

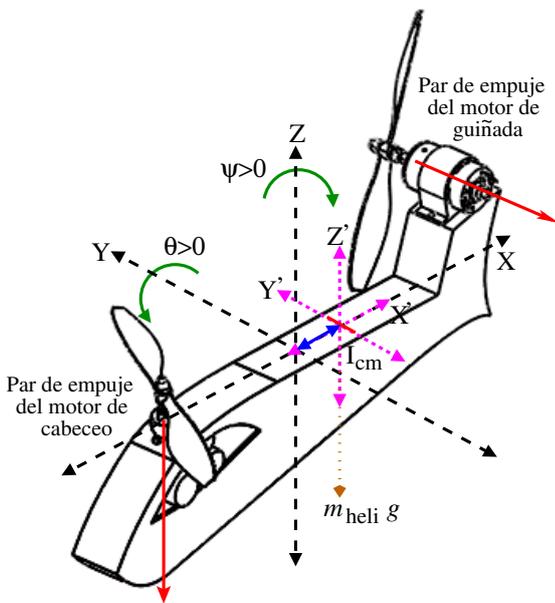


Figura 4: Diagrama cinemático y dinámico del helicóptero.

3.1. Modelo cinemático

Las rotaciones de θ y ψ alrededor de los ejes Y e Z, así como la translación I_{cm} a lo largo del eje X se pueden describir por medio de las siguientes transformaciones homogéneas $\mathbf{R}_{Y,\theta}$, $\mathbf{R}_{Z,\psi}$, y $\mathbf{T}_{X,I_{cm}}$, respectivamente; estas matrices están dadas por:

$$\mathbf{R}_{Y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & 0 & \sin(-\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-\theta) & 0 & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_{Z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos(-\psi) & -\sin(-\psi) & 0 & 0 \\ \sin(-\psi) & \cos(-\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_{X,I_{cm}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & I_{cm} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

La orientación y posición del sistema de coordenadas móvil X', Y', Z' con respecto del sistema de coordenadas inercial X, Y, Z se puede representar por medio de la siguiente transformación homogénea \mathbf{H} dada por

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{Y,\theta} \mathbf{R}_{Z,\psi} \mathbf{T}_{X,I_{cm}} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & s_\psi & -c_\psi s_\theta & I_{cm} c_\psi c_\theta \\ -s_\psi c_\theta & c_\psi & s_\psi s_\theta & -I_{cm} s_\psi c_\theta \\ s_\theta & 0 & c_\theta & I_{cm} s_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde $c_\theta = \cos(\theta)$, $s_\theta = \sin(\theta)$, $c_\psi = \cos(\psi)$ y $s_\psi = \sin(\psi)$. Además, los primeros tres elementos de la cuarta columna de \mathbf{H} indican la posición \mathbf{p}_{cm} del centro de masa del helicóptero, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{cm} &= [x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}] \\ &= [I_{cm} \cos \psi \cos \theta, -I_{cm} \sin \psi \cos \theta, I_{cm} \sin \theta] \end{aligned} \quad (5)$$

3.2. Modelo dinámico del helicóptero

3.2.1. Formalismo de Euler-Lagrange

El modelado dinámico del helicóptero se obtiene por medio del formalismo de Euler-Lagrange, donde el Lagrangiano está dado por

$$L = K - U \quad (6)$$

donde K y U son las energías cinética y potencial del sistema. Ésta última es igual a

$$U = m_{heli} g z_{cm} = m_{heli} g I_{cm} \sin \theta \quad (7)$$

Por otro lado, la energía cinética K_{heli} del helicóptero se calcula como

$$K_{heli} = \frac{1}{2} m_{heli} [\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2 + \dot{z}_{cm}^2] + \frac{1}{2} J_p^{cm} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_y^{cm} \dot{\psi}^2 \quad (8)$$

donde J_p^{cm} y J_y^{cm} son, respectivamente, los momentos de inercia alrededor de ejes paralelos a los ejes de rotación Y e Z, y que pasan por el centro de masa del helicóptero. Nótese que para el cálculo de K_{heli} en (8) se ha empleado la descomposición de Koenig descrita por Murray (1967); O'Reilly (2008), que establece que la energía cinética K_{heli} es la suma de energía cinética traslacional considerando que toda la masa m_{heli} se encuentra concentrada en el centro de masa \mathbf{p}_{cm} , más la energía cinética rotacional del helicóptero alrededor de su centro de masa.

El soporte negro del helicóptero mostrado en la Figura 1 gira alrededor del eje de guiñada cuando el helicóptero lo hace. La energía cinética de la estructura que soporta al helicóptero está dada por:

$$K_s = \frac{1}{2} J_s \dot{\psi}^2 \quad (9)$$

donde J_s es el momento de inercia del soporte alrededor del eje Z. Para el cálculo de J_s se consideraron las masas y dimensiones de cada uno de los componentes de dicha estructura, entre los que se encuentran sus perfiles, el encoder de cabeceo y su soporte, la varilla del eje de cabeceo y sus cojinetes, el cople

entre este encoder y la varilla, así como una placa de acrílico de 8 mm que esta acoplada al eje de guiñada.

La energía cinética K total del sistema es la suma de la energía cinética del helicóptero y de su soporte, es decir,

$$K = K_{heli} + K_s \quad (10)$$

Al sustituir las coordenadas x_{cm} , y_{cm} , z_{cm} en K_{heli} dada en (8), y derivando estas coordenadas con respecto del tiempo resulta

$$K = \frac{1}{2}m_{heli} \left[(-I_{cm}\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta - I_{cm}\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta)^2 + (-I_{cm}\dot{\psi} \cos \psi \cos \theta + I_{cm}\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta)^2 + (I_{cm}\dot{\theta} \cos \theta)^2 \right] + \frac{1}{2}J_p^{cm}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_y^{cm}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\psi}^2 \quad (11)$$

La expresión anterior se puede simplificar como

$$K = \frac{1}{2}m_{heli}I_{cm}^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta] + \frac{1}{2}J_p^{cm}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}[J_y^{cm} + J_s]\dot{\psi}^2 \quad (12)$$

Finalmente, el modelo dinámico del helicóptero se obtiene resolviendo las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = Q_2 \quad (13)$$

donde Q_1 y Q_2 son los pares no conservativos alrededor de los ejes de cabeceo y de guiñada respectivamente. Estos pares están dados por

$$Q_1 = \tau_p - B_p\dot{\theta}, \quad Q_2 = \tau_y - B_y\dot{\psi} \quad (14)$$

donde B_p y B_y son los coeficientes de fricción viscosa alrededor de los ejes de cabeceo y guiñada, respectivamente. Además, τ_p y τ_y son los pares de actuación en los ejes de cabeceo y guiñada, los cuales están dados por

$$\tau_p = K_{pp}V_p + K_{py}V_y, \quad \tau_y = K_{yy}V_y + K_{yp}V_p \quad (15)$$

donde V_p y V_y son los voltajes de los motores que actúan los ejes del cabeceo y guiñada respectivamente. Asimismo, K_{pp} y K_{py} son las ganancias de par de empuje en cabeceo debido a los motores de cabeceo y guiñada, respectivamente. De manera similar, K_{yy} y K_{yp} son las ganancias de par de empuje en guiñada debido a los motores que actúan los ejes de guiñada y cabeceo, respectivamente.

Al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange en (13) resulta

$$\ddot{\theta} [J_p^{cm} + m_{heli}I_{cm}^2] = K_{pp}V_p + K_{py}V_y - B_p\dot{\theta} - m_{heli}I_{cm}^2\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta - m_{heli}gI_{cm} \cos \theta \quad (16)$$

$$\ddot{\psi} [J_y^{cm} + J_s + m_{heli}I_{cm}^2 \cos^2 \theta] = K_{yy}V_y + K_{yp}V_p - B_y\dot{\psi} + 2m_{heli}I_{cm}^2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \quad (17)$$

Si el helicóptero opera alrededor de $\theta = 0$ y de un cierto ángulo ψ , tales que $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\psi} = 0$, es posible linealizar las

ecuaciones diferenciales en (16) y (17), y éstas se pueden reescribir como

$$J_{Tp}\ddot{\theta} = K_{pp}V_p + K_{py}V_y - B_p\dot{\theta} - m_{heli}gI_{cm} \quad (18)$$

$$J_{Ty}\ddot{\psi} = K_{yy}V_y + K_{yp}V_p - B_y\dot{\psi} \quad (19)$$

donde

$$J_{Tp} = [J_p^{cm} + m_{heli}I_{cm}^2] \quad (20)$$

$$J_{Ty} = [J_y^{cm} + m_{heli}I_{cm}^2] + J_s \quad (21)$$

Nótese que J_{Tp} y J_{Ty} representan los momentos de inercia del sistema alrededor de los ejes Y de cabeceo y Z de guiñada, respectivamente. Los términos entre corchetes en las ecuaciones (20) y (21) reflejan el Teorema de los ejes paralelos o de Steiner descrito por Murray (1967), que relaciona el momento de inercia del helicóptero alrededor del eje de movimiento con el momento de inercia alrededor de su centro de masa.

El modelo matemático del sistema en (18) y (19) también se puede obtener por medio de la segunda ley de Newton, como se describe en la siguiente sección.

3.2.2. Segunda ley de Newton

En la Figura 4 se muestra el diagrama de cuerpo libre del helicóptero. La segunda ley de Newton establece que la suma de pares en torno a un eje es igual al momento de inercia alrededor del eje por la aceleración angular. Supóngase que el helicóptero opera alrededor de $\theta = 0^\circ$ y que se desprecian fuerzas centrífugas y de Coriolis. Aplicando la segunda ley de Newton a cada uno de los ejes de movimiento resulta

$$J_{Tp}\ddot{\theta} = Q_1 - m_{heli}gI_{cm} \quad (22)$$

$$J_{Ty}\ddot{\psi} = Q_2 \quad (23)$$

Nótese que (22) y (23) coinciden con (18) y (19), respectivamente.

El modelo dinámico lineal del helicóptero se obtuvo directamente con la formulación newtoniana. Sin embargo, para obtener el modelo no lineal del helicóptero en (16) y (17) mediante las leyes de Newton, es necesario calcular los pares $-m_{heli}I_{cm}^2\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta$ y $2m_{heli}I_{cm}^2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$ generados mediante la fuerza centrífuga y la de Coriolis, respectivamente. La obtención de estos pares con la formulación newtoniana se puede complicar, mientras que con la formulación lagrangiana dichos pares aparecen de forma natural.

3.3. Modelo dinámico de los actuadores

De acuerdo con Xia (2012) y Golnaraghi y Kuo (2017), la función de transferencia de los motores de CD del helicóptero está dada por:

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^2 + (R_a J_m + f_m L_a) s + (K_b K_i + R_a f_m)} \quad (24)$$

donde $\Omega(s)$ y $V(s)$ son las transformadas de Laplace de la velocidad del motor ω y de su voltaje V aplicado, respectivamente. Nótese que $V = V_p$ para el motor sin escobillas, mientras que $V = V_y$ para el motor con escobillas. Además, R_a y L_a son la resistencia e inductancia de la armadura, J_m , f_m , K_b y K_i son el momento de inercia del rotor, el coeficiente de fricción viscosa del eje del motor, así como su constante de fuerza contraelectromotriz y de par, respectivamente.

Es conocido que para los motores de CD su inductancia de armadura es despreciable, es decir, $L_a \approx 0$. Considerando $L_a = 0$, la función de transferencia (24) se simplifica como

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{b}{s+a} \quad (25)$$

donde

$$a = \frac{f_m}{J_m} + \frac{K_i K_b}{R_a J_m}, \quad b = \frac{K_i}{R_a J_m} \quad (26)$$

A partir de (25) se deduce que si el motor se alimenta con μ volts, su velocidad ω converge en estado estacionario a la relación $\omega = \mu b/a$. El fabricante del motor de CD sin escobillas menciona que la relación b/a es aproximadamente 104.7 rad/s o 1000 rpm. Por otro lado, la relación b/a para el motor de CD con escobillas es 87.3 rad/s o 833.3 rpm. Al acoplar una hélice a cada motor, el aire actúa como carga y las velocidades alcanzadas por los motores son ligeramente menores a las calculadas con la expresión $\mu b/a$.

La velocidad de respuesta del modelo del motor en (25) depende de su constante de tiempo τ_m , la cual está dada por

$$\tau_m = 1/a \quad (27)$$

De acuerdo con Hawary et al. (2019), la constante de tiempo para el motor de CD sin escobillas es $\tau_m = 8.9$ ms. Por otro lado, el fabricante del motor de CD con escobillas no proporciona el valor de τ_m , pero como este motor se emplea en aplicaciones de muy alta velocidad su constante de tiempo τ_m también es muy pequeña.

4. Identificación de los parámetros del sistema

De los parámetros de (18) y (19) solo se suponen conocidas la masa total del helicóptero m_{heli} y la aceleración de gravedad g , dadas por $m_{\text{heli}} = 1.8745$ kg y $g = 9.81$ m/s². El parámetro m_{heli} se obtuvo al sumar las masas de todos los componentes del helicóptero que se muestran en la Figura 2(b), cuyos valores se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3: Masas de los componentes del helicóptero.

Componente	Masa (kg)
Motor de CD sin escobillas	0.06
Motor de CD con escobillas	0.3322
Abrazadera del motor con escobillas	0.0275
Fuselaje	0.852
Dos propelas	0.0268
Contrapeso	0.576
Masa total m_{heli}	1.8745

4.1. Parámetros de inercia y centro de masa del helicóptero

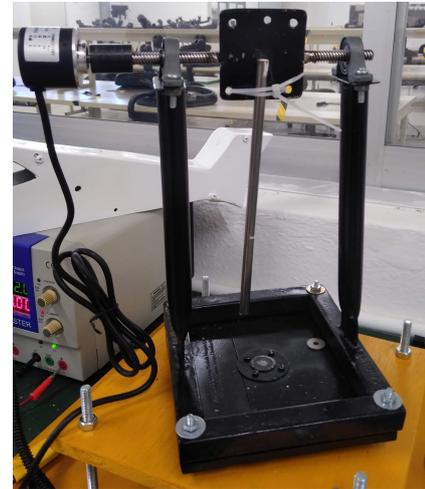
Los parámetros de inercia J_p^{cm} , J_y^{cm} y J_s , así como la distancia I_{cm} relacionada con el centro de masa del helicóptero, se obtuvieron mediante el modelo de diseño asistido por ordenador (CAD) del sistema, el cual se generó por medio del software SolidWorks. La Figura 2(b) presenta el modelo CAD en 3D del helicóptero. En el diseño de este modelo se asignó la masa real a cada una de las piezas ensambladas y se usaron las medidas

reales y ubicación de cada una de las piezas del helicóptero. Los resultados obtenidos son

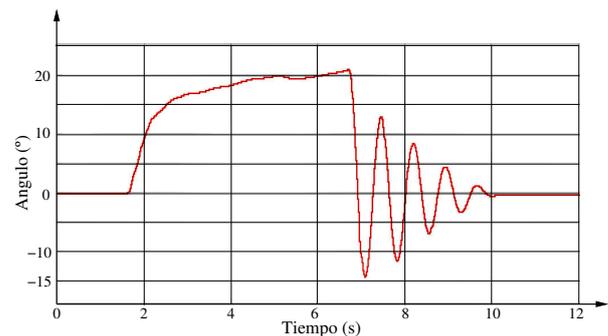
$$J_p^{cm} = 0.0597 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad J_y^{cm} = 0.0577 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad (28)$$

$$J_s = 0.0133 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad I_{cm} = 0.005 \text{ m} \quad (29)$$

4.2. Constantes de fricción viscosa



(a) Péndulo



(b) Oscilación del péndulo

Figura 5: Experimento para estimar la constante de fricción viscosa.

Para estimar la constante de fricción viscosa B_p en el eje Y de cabeceo se llevó a cabo un experimento con un péndulo simple, donde una barra de masa m y longitud L oscila en torno al eje de cabeceo, como se muestra en la Figura 5(a). El modelo matemático del péndulo con fricción viscosa está dado por:

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + mg \frac{L}{2} \sin(\theta) = -B_p \dot{\theta} \quad (30)$$

Para pequeños movimientos angulares de θ se tiene la aproximación $\sin(\theta) \approx \theta$, y (30) se linealiza como sigue

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + mg \frac{L}{2} \theta = -B_p \dot{\theta} \quad (31)$$

La expresión anterior se puede escribir en la forma estándar de un sistema de segundo orden dada por

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (32)$$

donde

$$2\xi\omega_n = \frac{3B_p}{mL^2}, \quad \omega_n = \frac{\sqrt{3g}}{2L} \quad (33)$$

Los parámetros ξ y ω_n se conocen como factor de amortiguamiento y frecuencia natural no amortiguada.

Acorde al método de decremento logarítmico descrito por Inman y Singh (1994), el factor de amortiguamiento del sistema está dado por:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}, \quad \delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) \quad (34)$$

donde $A(t)$ y $A(t+T)$ denotan, respectivamente, la amplitud del sobreimpulso de θ en los tiempos t y $t+T$, donde T es el periodo de oscilación. Una vez encontrado ξ se obtiene el parámetro B_p como

$$B_p = \frac{2\xi\omega_n mL^2}{3} \quad (35)$$

Para la estimación de B_p se utilizó un péndulo con una longitud de $L=0.02$ m y una masa de $m=0.078$ kg. El péndulo se soltó desde una posición inicial $\theta(0)$ de 21° obteniéndose la oscilación mostrada en la Figura (5(b)). Los valores de las amplitudes $A(t)$ y $A(t+T)$ del experimento son $A(t) = 12.8^\circ$ y $A(t+T) = 8.3^\circ$. Sustituyendo estos valores en (34) resulta $\delta = 0.4332$ y $\xi = 0.688$. Finalmente, usando estos valores en (35) se obtiene

$$B_p = 0.0012 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \quad (36)$$

Debido a que el mismo tipo de balero se emplea para el eje de guiñada, se va a considerar que $B_y = B_p$.

4.3. Constantes de tiempo del helicóptero en lazo abierto

A partir de (18) y (19) se deduce que las constantes tiempo mecánicas en cabeceo τ_p y en guiñada τ_y están dadas por:

$$\tau_p = \frac{J_{Tp}}{B_p}, \quad \tau_y = \frac{J_{Ty}}{B_y} \quad (37)$$

Sustituyendo los valores de J_{Tp} , J_{Ty} , B_p y B_y en (37) resulta $\tau_p = 59$ s y $\tau_y = 71.1$ s. Estas constantes de tiempo son mucho mayores que las constantes de tiempo τ_m en (27) de los motores de CD del helicóptero. Por esta razón se despreciará la dinámica de estos motores mostrada en (25) y sólo considerará la dinámica mecánica (18)-(19) del helicóptero para su control.

4.4. Estimación de las ganancias de par de empuje

4.4.1. Ganancia K_{pp}

Para encontrar esta ganancia solo se energizó el motor de CD sin escobillas que permite el movimiento de cabeceo del helicóptero, véase Figura 1. Asimismo, se impidió el movimiento en guiñada del helicóptero. En este caso, (16) se reduce a

$$J_{Tp}\ddot{\theta} = K_{pp}V_p - B_p\dot{\theta} - \rho \cos(\theta) \quad (38)$$

donde $\rho = m_{\text{heli}}gI_{\text{cm}}$.

Se aplicaron diferentes voltajes V_p y para cada uno de ellos se determinó la posición θ en la cual se estabilizó el helicóptero, resultando $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$. Posteriormente, se utilizó la siguiente ecuación para calcular K_{pp}

$$K_{pp} = \frac{\rho \cos(\theta)}{V_p} \quad (39)$$

La Figura 6(a) muestra los ángulos de cabeceo θ en los cuales se estabilizó el helicóptero, así como sus correspondientes voltajes V_p . Como solo se emplea voltaje positivo V_p para variar θ , entonces este ángulo se incrementa al aumentar V_p . Por otro lado, las Figuras 6(b) y 6(c) muestran la variación de K_{pp} con respecto a θ y a V_p , respectivamente. Se observa que esta ganancia se reduce conforme se incrementa θ y V_p . Este hecho se debe a que el par $K_{pp}V_p = \rho \cos(\theta)$ varía muy poco en el rango de θ considerado en los experimentos. La Figura 6(d) muestra que el par $\rho \cos(\theta)$ producido por la fuerza de gravedad varía de 0.09 a 0.092 Nm. Como el par $\rho \cos(\theta)$ tiene un valor casi constante se deduce que si V_p se incrementa entonces K_{pp} decrece. Nótese que el valor máximo de este par se alcanza en $\theta = 0^\circ$ y disminuye conforme θ se aleja de este valor. El mismo comportamiento debe tener el par generado por el motor $K_{pp}V_p$ para mantener el sistema en equilibrio.

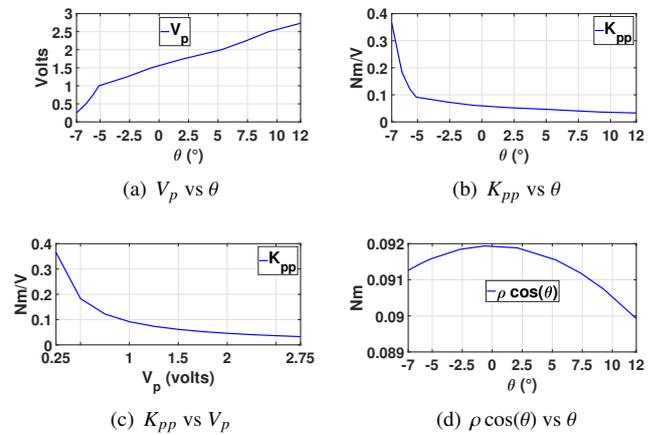


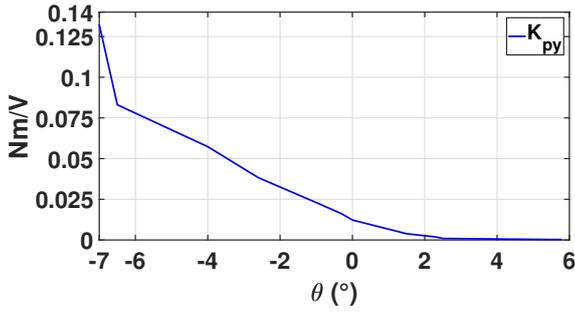
Figura 6: Experimentos para determinar K_{pp} .

4.4.2. Ganancia K_{py}

Al igual que en los experimentos anteriores, solo se permitió el movimiento de cabeceo para determinar esta ganancia. También, se estabilizó el helicóptero en diferentes posiciones de cabeceo θ , tales que $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$. De (16) se obtiene la siguiente expresión para calcular K_{py}

$$K_{py} = \frac{m_{\text{heli}}gI_{\text{cm}} \cos(\theta) - K_{pp}V_p}{V_y} \quad (40)$$

La Figura 7 muestra la variación de K_{py} con respecto al ángulo θ de cabeceo. Se puede observar que esta ganancia también decrece conforme incrementa θ . Los valores de ganancia K_{py} correspondientes a las posiciones θ en estado estable de -7° a 0° se obtuvieron considerando $V_p = 0$, mientras que V_y se incrementó gradualmente hasta 7.5 V. La corriente que circuló en el motor de CD con escobillas con $V_y = 7.5$ V fue de 5 A. Para evitar sobrecalentar y dañar a este motor en los experimentos donde se estabilizó el helicóptero en posiciones mayores a 0° , se procedió a energizar el motor de CD sin escobillas con un voltaje constante de $V_p = 1.5$ V. Los valores de K_{pp} que se emplearon en estos experimentos son los mostrados en la Figura 6(b).

Figura 7: Experimento para determinar K_{py} .

4.4.3. Ganancia K_{yy}

Las ganancias K_{pp} y K_{py} obtenidas previamente varían con respecto a θ porque a los pares $K_{pp}V_p$ y $K_{py}V_y$ en (16) se les opone el par $\rho \cos(\theta)$ dependiente de θ , con el cual es posible estabilizar al helicóptero en diferentes posiciones de cabeceo. Por otro lado, se considerará que las ganancias K_{yy} y K_{yp} no varían con respecto a ψ pues a los pares $K_{yy}V_y$ y $K_{yp}V_p$ en (17) no se le opone un par dependiente de este ángulo que permita mantener al helicóptero en equilibrio.

Figura 8: Experimento para determinar K_{yy} .

El valor de K_{yy} se determina por medio del experimento mostrado en la Figura 8, el cual consiste en desmontar el motor de CD sin escobillas del helicóptero para posteriormente acoplarlo a una barra de madera que se sujeta sobre el eje de cabeceo de la plataforma; en uno de los extremos de la barra se coloca este motor y en el otro extremo se coloca un contrapeso con masa conocida. Posteriormente, se aplica un voltaje al motor para posicionar la barra de madera en equilibrio a 0° con respecto a la horizontal. En esta posición la suma de pares alrededor del eje es cero, es decir

$$\tau_y - m_{\text{prueba}}g x_{\text{cm}} = 0 \quad (41)$$

donde $m_{\text{prueba}} = 1.184$ kg es la suma de las masas de la barra, contrapeso y motor; además, $x_{\text{cm}} = 0.002$ m es la posición del centro de masa del sistema. El par de empuje del motor τ_y está dado por $\tau_y = K_{yy}V_y$, y sustituyendo esta expresión en (41) se obtiene la siguiente fórmula para calcular K_{yy}

$$K_{yy} = \frac{m_{\text{prueba}}g x_{\text{cm}}}{V_y} \quad (42)$$

El voltaje del motor V_y con el cual se estabilizó el sistema en la posición de equilibrio fue de $V_y = 0.64$ V. Sustituyendo este

voltaje en (42) resulta

$$K_{yy} = \frac{(1.184 \text{ kg})(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0.002 \text{ m})}{0.64 \text{ V}} = 0.0363 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{V}} \quad (43)$$

4.4.4. Ganancia K_{yp}

Para determinar esta ganancia se montó el helicóptero en la plataforma, y se energizaron ambos motores para contrarrestar sus pares alrededor del eje Z de guiñada, estabilizando el helicóptero en una posición determinada; en este caso, se tiene $\dot{\psi} = 0$ y $\ddot{\psi} = 0$. Sustituyendo estos valores en (17) resulta $K_{yy}V_y + K_{yp}V_p = 0$. Despejando K_{yp} queda

$$K_{yp} = -\frac{K_{yy}V_y}{V_p} \quad (44)$$

Los voltajes de los motores con los cuales se estabilizó al helicóptero fueron $V_y = -1$ V y $V_p = 2.5$ V. Sustituyendo estos valores en (44), así como la ganancia K_{yy} obtenida previamente produce

$$K_{yp} = -\frac{(0.0363 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{V}})(-1 \text{ V})}{2.5 \text{ V}} = 0.0145 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{V}} \quad (45)$$

5. Controladores PI-D

El objetivo de control del helicóptero es que siga una trayectoria deseada a pesar de perturbaciones. Para ello, se proponen dos controladores PI-D, uno se encarga del control del movimiento de cabeceo y el otro del de guiñada. Como se menciona en Ogata (2010), la señal de control PI-D es una modificación del controlador tradicional PID y evita el fenómeno de patada derivativa, el cual consiste en cambios abruptos en la señal de control debido a la derivada de señales de referencia tipo escalón. Los voltajes de control PI-D están dados por:

$$V_p(t) = K_p^p e_p(t) + K_I^p \int_0^t e_p(\tau) d\tau - K_D^p \dot{\theta}(t) \quad (46)$$

$$V_y(t) = K_p^y e_y(t) + K_I^y \int_0^t e_y(\tau) d\tau - K_D^y \dot{\psi}(t) \quad (47)$$

donde K_p^p y K_p^y son las ganancias proporcionales, K_I^p y K_I^y son las ganancias integrales, mientras que K_D^p y K_D^y son las ganancias derivativas; además, e_p y e_y son los errores de posicionamiento definidos como $e_p = \theta_d - \theta$ y $e_y = \psi_d - \psi$, donde θ_d y ψ_d son los ángulos deseados en cabeceo y guiñada, respectivamente, los cuales se suponen constantes.

Sustituyendo las señales de control V_p (46) y V_y (47) en (18) y (19) resulta

$$J_{T_p} \ddot{\theta} = K_{pp} \left[K_p^p e_p(t) + K_I^p \int_0^t e_p(\tau) d\tau - K_D^p \dot{\theta}(t) \right] + K_{py} \left[K_p^y e_y(t) + K_I^y \int_0^t e_y(\tau) d\tau - K_D^y \dot{\psi}(t) \right] - B_p \dot{\theta} - \rho \quad (48)$$

$$J_{T_y} \ddot{\psi} = K_{yy} \left[K_p^y e_y(t) + K_I^y \int_0^t e_y(\tau) d\tau - K_D^y \dot{\psi}(t) \right] + K_{yp} \left[K_p^p e_p(t) + K_I^p \int_0^t e_p(\tau) d\tau - K_D^p \dot{\theta}(t) \right] - B_y \dot{\psi} \quad (49)$$

Derivando las expresiones (48) y (49) con respecto del tiempo, y considerando que $\dot{e}_p = -\dot{\theta}$, $\ddot{e}_p = -\ddot{\theta}$, $\dot{e}_y = -\dot{\psi}$, y $\ddot{e}_y = -\ddot{\psi}$ se obtiene

$$\ddot{e}_p = -\gamma_1 \ddot{e}_p - \gamma_2 \dot{e}_p - \gamma_3 e_p - \gamma_4 \ddot{e}_y - \gamma_5 \dot{e}_y - \gamma_6 e_y \quad (50)$$

$$\ddot{e}_y = -\gamma_7 \ddot{e}_y - \gamma_8 \dot{e}_y - \gamma_9 e_y - \gamma_{10} \ddot{e}_p - \gamma_{11} \dot{e}_p - \gamma_{12} e_p \quad (51)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{K_{pp}K_D^p + B_p}{J_{Tp}}, & \gamma_2 &= \frac{K_{pp}K_p^p}{J_{Tp}}, & \gamma_3 &= \frac{K_{pp}K_l^p}{J_{Tp}}, \\ \gamma_4 &= \frac{K_{py}K_D^y}{J_{Tp}}, & \gamma_5 &= \frac{K_{py}K_p^y}{J_{Tp}}, & \gamma_6 &= \frac{K_{py}K_l^y}{J_{Tp}}, \\ \gamma_7 &= \frac{K_{yy}K_D^y + B_y}{J_{Ty}}, & \gamma_8 &= \frac{K_{yy}K_p^y}{J_{Ty}}, & \gamma_9 &= \frac{K_{yy}K_l^y}{J_{Ty}}, \\ \gamma_{10} &= \frac{K_{yp}K_D^p}{J_{Ty}}, & \gamma_{11} &= \frac{K_{yp}K_p^p}{J_{Ty}}, & \gamma_{12} &= \frac{K_{yp}K_l^p}{J_{Ty}} \end{aligned}$$

Defínase el vector de estado $\mathbf{E} = [e_p, \dot{e}_p, \ddot{e}_p, e_y, \dot{e}_y, \ddot{e}_y]^T$, entonces, (50) y (51) se pueden escribir en espacios de estado como $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A}\mathbf{E}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_3 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & -\gamma_6 & -\gamma_5 & -\gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma_{12} & -\gamma_{11} & -\gamma_{10} & -\gamma_9 & -\gamma_8 & -\gamma_7 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Para que el helicóptero sea estable en lazo cerrado, las ganancias de los controladores PI-D en (46) y (47) deben de seleccionarse para que todos los valores propios de la matriz \mathbf{A} tengan parte real negativa.

6. Resultados experimentales

En esta sección se presentan experimentos del control en tiempo real para la estabilización del helicóptero usando Matlab-Simulink y el Toolbox Arduino IO. El programa en Simulink que se desarrolló para el control del helicóptero se puede descargar en Gadi (2023c). El periodo de muestreo empleado durante los experimentos fue de 0.02 s. Las ganancias de los controladores PI-D se sintonizaron para tener una respuesta del helicóptero suficientemente rápida y amortiguada, y sus valores son: $K_p^p = 2$, $K_l^p = 1$, $K_D^p = 5$, $K_p^y = 2$, $K_l^y = 1$, y $K_D^y = 5$. El análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado se llevó a cabo considerando las variaciones de las ganancias de par K_{pp} y K_{py} con respecto a θ que se muestran en las Figuras 6(b) y 7, respectivamente. Para todo el rango de movimiento en θ se garantiza que el sistema es estable, como se observa en la Tabla 4, que presenta los valores propios de la matriz \mathbf{A} en (52). Nótese que como la magnitud más pequeña de la parte real de los polos es aproximadamente 0.18, entonces la constante de tiempo dominante del sistema es de aproximadamente $1/0.18=5.6$ s.

Tabla 4: Valores propios de la matriz \mathbf{A} en (52).

θ	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	λ_5	λ_6
-7°	-0.172 ± 0.454i	-0.199 ± 0.404i	-1.858	-30.57
-3°	-0.159 ± 0.465i	-0.196 ± 0.412i	-1.460	-6.79
0°	-0.173 ± 0.453i	-0.193 ± 0.421i	-1.876	-4.97
3°	-0.179 ± 0.446i	-0.191 ± 0.427i	-2.206	-3.91
7°	-0.179 ± 0.446i	-0.187 ± 0.434i	-2.247	-3.12
10°	-0.179 ± 0.446i	-0.183 ± 0.440i	-2.247	-2.61

La Figura 9(a) presenta el diagrama de bloques en Simulink del control de movimiento en cabeceo del helicóptero. El método de integración Dormand-Prince se emplea para calcular la acción integral de los controladores PI-D. Además, la acción derivativa se aproxima mediante el filtro pasa-banda $F(s) = \left(\frac{300s}{s+300} \right) \left(\frac{150}{s+150} \right)$.

Bloques de saturación limitan el voltaje de control de los motores de cabeceo y guiñada a [0-10] V y [-12,12] V, respectivamente. Cuando la señal de control alcanza sus valores límite se rompe el lazo de realimentación, pero se continua integrando la señal de error correspondiente, lo cual puede generar largos transitorios en la respuesta del helicóptero. Para evitar que el controlador siga integrando cuando se han alcanzado los valores máximos y mínimos de la señal de control, se emplea el mecanismo anti-windup por recálculo (KJ y Hägglund, 1995), el cual está mostrado en el diagrama 9(a) y está marcado con color azul, donde la ganancia K_A^p se denomina ganancia anti-windup. De esta forma cuando el voltaje de control se satura, la entrada del integrador tiende a cero debido al lazo de retroalimentación que lo rodea. Esto permite que la respuesta transitoria del helicóptero sea lo suficientemente rápida. Se sintonizaron las ganancias anti-windup del sistema de control de cabeceo y el de guiñada, y ambas se seleccionaron con un valor de 0.5, ya que con estas ganancias se obtuvo la mejor respuesta transitoria en los movimientos del helicóptero.

La Figura 9(b) muestra el interior del subsistema Cabeceo del diagrama de bloques de la Figura 9(a). Se observa que este subsistema cuenta con el bloque *Arduino Analog Write* para general la señal de control del motor de CD sin escobillas. El motor de cabeceo tiene un voltaje de zona muerta y para hacerlo girar se requiere aplicarle un voltaje mayor a 0.1 V. Para evitar esta zona muerta se emplean los bloques a la izquierda del interruptor multipuerto de la Figura 9(b), con los cuales el motor comienza a girar cuando $V_p > 0$. En esta figura también se muestra el bloque *Arduino Encoder Read* para la lectura del encoder acoplado al eje de cabeceo, y se observan las ganancias para la conversión de pulsos por revolución a grados. Cabe mencionar que el motor de CD con escobillas, que produce el movimiento en guiñada, tiene un voltaje de zona muerta de 0.4 V, el cual también se elimina con bloques de Simulink.

Las restricciones mecánicas limitan el movimiento de cabeceo en el rango de -15 a 45°, mientras que el helicóptero puede dar un giro completo de 360° en guiñada. La Figura 10(a) presenta la trayectoria deseada en cabeceo θ_d , la cual toma valores de 0, -2, y 2 grados. Por otro lado, la señal de referencia deseada en guiñada ψ_d toma valores de 0, 45, y -45 grados, como se observa en la Figura 10(b). El valor máximo de θ_d fue de 2°

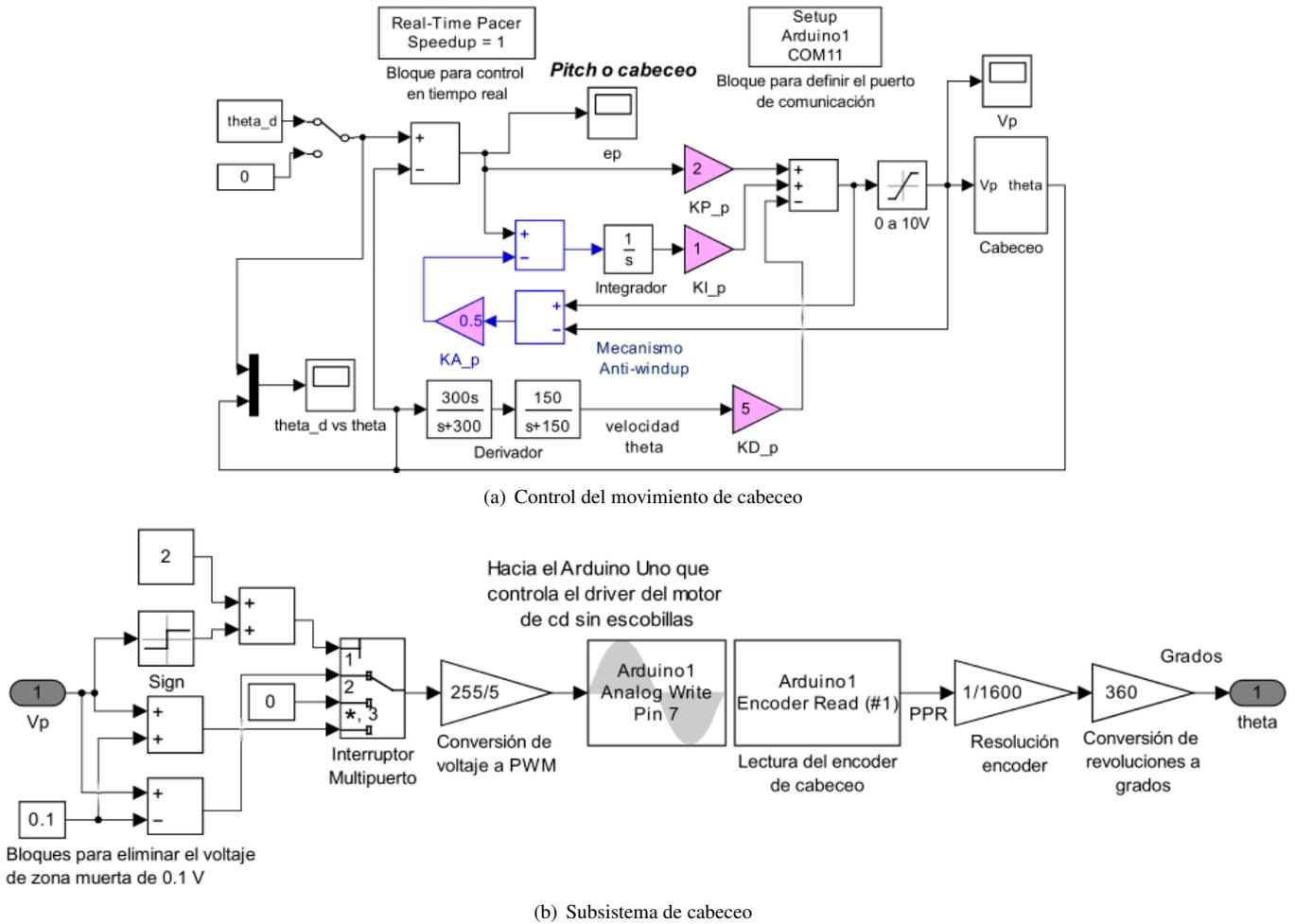


Figura 9: Diagrama de bloques en Simulink del control del helicóptero.

para evitar sobrecargar la fuente de voltaje del helicóptero, ya que con valores mayores de θ_d la fuente tiene que suministrar más de 7 A. Asimismo, con este valor máximo de θ_d se evita el sobrecalentamiento de la circuitería de control.

En la Figura 10(a) se puede observar que la magnitud inicial del error e_p alcanza casi 12° , pero posteriormente se reduce a cerca de 2° en aproximadamente 20 s. El transitorio inicial del error e_y es más rápido que el de e_p y se reduce a menos de 2° en 5 s, como se observa en 10(b). Asimismo, los cambios en la referencia en cabeceo θ_d actúan como perturbaciones en el movimiento de guiñada ψ , y viceversa. Por ejemplo, en $t = 150$ s, θ_d cambia de -2 a 2° y la variable ψ alcanza hasta 50° . Por otro lado, en $t = 200$ s, la referencia ψ_d cambia de 45 a -45° y genera un transitorio en θ que supera los 6° . Cabe mencionar que los pares $-m_{\text{heli}} I_{\text{cm}}^2 \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta$ en (16) y $2m_{\text{heli}} I_{\text{cm}}^2 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$ en (17) se despreciaron en el modelo lineal del helicóptero mostrado en (18) y (19) y actúan como perturbaciones en el sistema en lazo cerrado. Su efecto es atenuado adecuadamente por los controladores PI-D diseñados ya que los movimientos de cabeceo y guiñada se estabilizan cerca de su valor deseado.

La Figura 11 muestra las señales de control V_p y V_y . Estas señales de control oscilan alrededor de un valor de voltaje y alcanzan sus valores mínimos y máximos en ciertos instantes de tiempo. A partir de $t = 150$ s, cuando se seleccionó referencia $\theta_d = 2^\circ$, el voltaje promedio de la señal de control

V_p se incrementó a aproximadamente 2 V, ya que para mantener el helicóptero en esta posición deseada se requiere un par o velocidad mayor del motor de cabeceo que en las otras posiciones θ_d . Por otro lado, la señal de control V_y toma valores promedio entre 0.4 y -1 V. Nótese que cuando se aplicó la referencia $\theta_d = 2^\circ$, la magnitud de V_y tomó su valor máximo para contrarrestar el efecto del motor de CD sin escobillas sobre el movimiento en guiñada. Finalmente, en Gadi (2023a) se presenta un vídeo de este experimento, con el cual se evidencia el buen desempeño de la plataforma empleando el controlador PI-D propuesto. Además, en Gadi (2023b) se presenta un vídeo donde se visualiza la robustez del sistema de control ante perturbaciones generadas al tocar el helicóptero con la mano.

7. Conclusiones y trabajos futuros

Se propuso un helicóptero experimental de 2 GDL que se utilizará para realizar prácticas de laboratorio y para investigación. Es de bajo costo y de fácil construcción, y cuenta con la ventaja de ser controlado mediante el software de código abierto Arduino IO. Se presentó su diseño mecánico y electrónico, así como su modelado cinemático y dinámico. Además, se propuso una metodología para la estimación de los parámetros del modelo dinámico del helicóptero, los cuales fueron posteriormente utilizados en dos controladores PI-D diseñados para es-

tabilizar el helicóptero en posiciones deseadas. Los resultados experimentales en tiempo real con la plataforma son satisfactorios, con lo cual se demuestra que: 1) los motores de CD, sus drivers y encoders son adecuados para generar y medir los movimientos del helicóptero; 2) la tarjeta Arduino Mega es capaz de realizar la adquisición de datos de los encoders y generar las señales de control del helicóptero, mientras que la tarjeta Arduino Uno produce la señal PWM requerida por el driver del motor de CD sin escobillas; y 3) los reguladores PI-D diseñados controlan con éxito el movimiento del helicóptero.

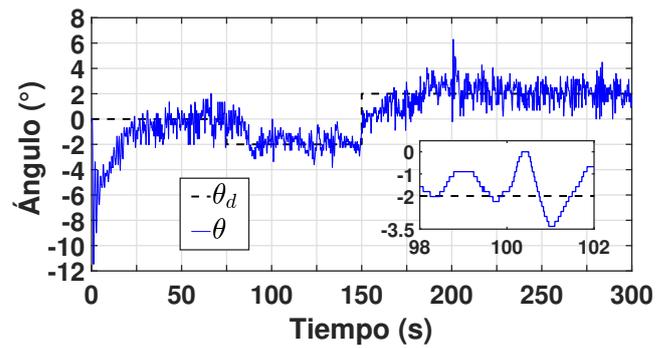
La base de este trabajo servirá para el desarrollo de helicópteros con más grados de libertad y diseños de otros controladores, tales como retroalimentación de estado por asignación de polos, el regulador cuadrático lineal, y el controlador multivariable desacoplado (Espinosa, 2003), cuyos desempeños se compararán con el del controlador PI-D propuesto. Mediante el controlador desacoplado se podrán reducir o cancelar las interacciones entre los movimientos de cabeceo y guiñada.

Asimismo, como trabajo futuro se reducirá la masa e inercia del helicóptero para que su respuesta sea más rápida, reduciendo con ello el tiempo de establecimiento del sistema. También, se sustituirá el motor de CD con escobillas por uno sin escobillas, ya que este último presenta mejor rendimiento y pesa menos. Para ello, el controlador del motor sin escobillas deberá permitir su cambio de giro mientras se encuentra energizado. En futuras evoluciones del helicóptero se considera utilizar una sola tarjeta Arduino en lugar de dos para reducir costos, simplificar el sistema y aumentar la precisión del controlador, puesto que la conversión PWM-tensión con el filtro RC y la posterior conversión analógico-digital puede incurrir en pérdidas de información. El empleo de una sola tarjeta Arduino requerirá que la frecuencia de las señales PWM se pueda configurar al valor requerido por los drivers de los motores del helicóptero. Para ello, se podrán emplear bloques de Simulink que realizan funciones específicas, tales como los descritos por Giampiero Campa (2023a).

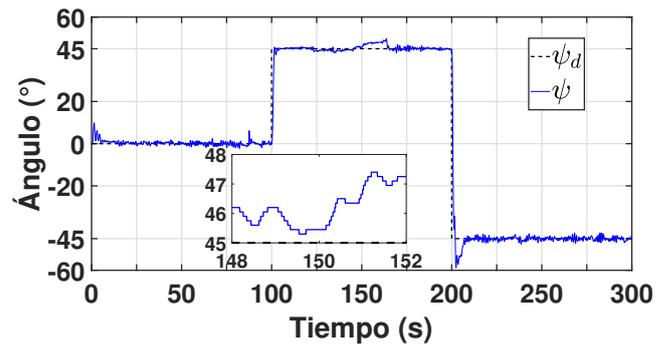
Otro trabajo futuro puede ser verificar el control en tiempo real del helicóptero empleando software libre basado en diagrama de bloques, tal como Scilab-Xcos. También, se puede experimentar la adquisición y control del helicóptero con una tarjeta ESP32, la cual es de 32 bits a diferencia de la tarjeta Arduino. Este mayor número de bits podría permitir la realización de cálculos numéricos precisos con mayor rapidez. Como la tarjeta ESP32 cuenta con dos núcleos se podría realizar el control y la adquisición de datos con un núcleo mientras que con el otro núcleo se podría llevar a cabo la comunicación entre el helicóptero y la computadora. Esto a su vez reduciría el periodo de muestreo de las señales y, por consiguiente, el algoritmo de control podría trabajar rápido y con buen desempeño.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP-SEP) de México por el apoyo para la realización de este trabajo. Los autores también agradecen al editor y a los revisores anónimos por sus valiosos comentarios.

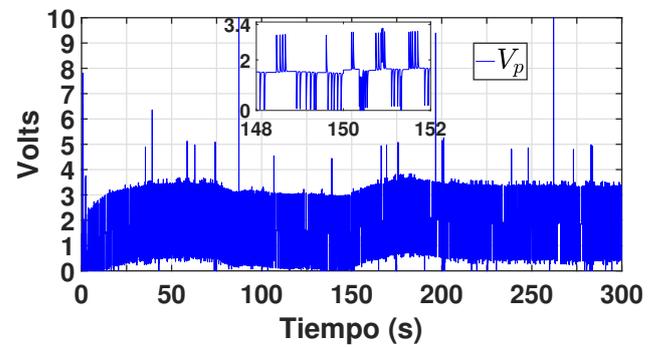


(a) Señales θ_d vs θ

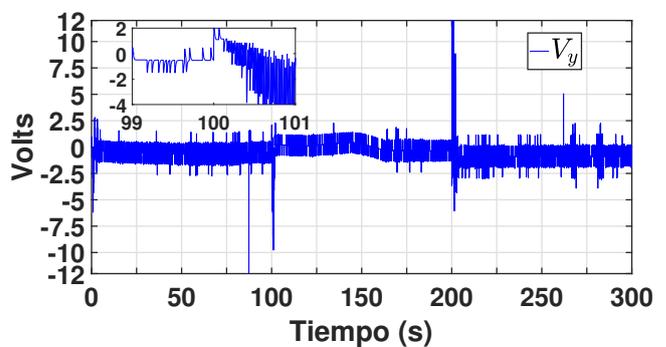


(b) Señales ψ_d vs ψ

Figura 10: Movimientos del helicóptero.



(a) V_p vs t



(b) V_y vs t

Figura 11: Señales de Control.

Referencias

- Ahmed, Q., Bhatti, A., Iqbal, S., Kazmi, I., 2010. 2-sliding mode based robust control for 2-dof helicopter. En: 2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). IEEE, pp. 481–486.
- Castellanos, J. E. R., Ballesteros, J. E. C., 2019. Implementation of a direct fuzzy controller applied to a helicopter with one degree of freedom. *IEEE Latin America Transactions* 17 (11), 1808–1814.
- Espinosa, J. J., 2003. Control lineal de sistemas multivariados. Corporación Universitaria de Ibagué.
- Evangelista, A. P. F., de Oliveira Serra, G. L., 2022. Type-2 fuzzy instrumental variable algorithm for evolving neural-fuzzy modeling of nonlinear dynamic systems in noisy environment. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 109, 104620.
- Flores-Calero, M., Torres-Torriti, M., Retamales-Ortega, F., Rosas-Díaz, F., 2020. Plataforma de presencia virtual de bajo costo para personas con discapacidades motoras severas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 17 (2), 215–228.
- Gadi, S. K., Febrero 2023a. Resultados experimentales del control de movimiento del helicóptero de 2 gdl.
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=Cpb9p41EJPU>
- Gadi, S. K., Febrero 2023b. Robustez del control de movimiento del helicóptero ante perturbaciones.
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=Nfodye9RL3k>
- Gadi, S. K., Febrero 2023c. Software de control del helicóptero de 2 gdl.
URL: <https://github.com/skgadi/Projects/tree/master/2023-helicopter/software>
- Ghersin, A. S., Giribet, J. I., Luiso, J., Tournour, A., 2021. Control robusto h-infinito para la velocidad de desplazamiento de un uav en base a estimación de flujo óptico. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 18 (3), 242–253.
- Giampiero Campa, 2023a. Device Drivers.
URL: <https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/39354-device-drivers>
- Giampiero Campa, 2023b. Legacy MATLAB and Simulink Support for Arduino - File Exchange - MATLAB Central.
URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32374-legacy-matlab-and-simulink-support-for-arduino>
- Golnaraghi, F., Kuo, B. C., 2017. Automatic control systems. McGraw-Hill Education.
- Hawary, A. F., Hoe, Y. H., Bakar, E. A., Noor, N. R. M., Othman, W. A. F. W., 2019. Parameter estimation of brushless DC motor using experimental methods. En: *Symposium on Manufacturing and Industrial Engineering*.
- He, M., He, J., Scherer, S., 2021. Model-based real-time robust controller for a small helicopter. *Mechanical Systems and Signal Processing* 146, 107022.
- Inman, D. J., Singh, R. C., 1994. Engineering vibration. Vol. 3. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Khakhsour, A. J., Khanesar, M. A., 2016. Model reference fractional order control using type-2 fuzzy neural networks structure: Implementation on a 2-dof helicopter. *Neurocomputing* 193, 268–279.
- Kim, B. M., Yoo, S. J., 2021. Approximation-based quantized state feedback tracking of uncertain input-saturated mimo nonlinear systems with application to 2-dof helicopter. *Mathematics* 9 (9), 1062.
- KJ, Å., Häggglund, T., 1995. PID controllers: theory, design and tuning. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC.
- Kumar, E. V., Raaja, G. S., Jerome, J., 2016. Adaptive pso for optimal lqr tracking control of 2 dof laboratory helicopter. *Applied Soft Computing* 41, 77–90.
- Luo, B., Wu, H.-N., Huang, T., 2017. Optimal output regulation for model-free quanser helicopter with multistep q-learning. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 65 (6), 4953–4961.
- Madridano, A., Campos, S., Al-Kaff, A., García, F., Martín, D., Escalera, A., 2020. Vehículo aéreo no tripulado para vigilancia y monitorización de incendios. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 17 (3).
- Murray, R. S., 1967. Teoría y problemas de mecánica teórica. McGraw-Hill.
- Neto, G. G., dos Santos Barbosa, F., Angélico, B. A., 2016. 2-dof helicopter controlling by pole-placements. En: 2016 12th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON). IEEE, pp. 1–5.
- Ogata, K., 2010. Ingeniería de control moderna, 5th Edición. Pearson Educación, Madrid.
- O'Reilly, O. M., 2008. Intermediate dynamics for engineers: a unified treatment of Newton-Euler and Lagrangian mechanics. Cambridge University Press Cambridge.
- Osmic, N., Velagic, J., Konjicija, S., Galijasevic, A., 2010. Genetic algorithm based identification of a nonlinear 2dof helicopter model. En: 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10. IEEE, pp. 333–338.
- Özbek, N. S., Önkol, M., Efe, M. Ö., 2016. Feedback control strategies for quadrotor-type aerial robots: a survey. *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 38 (5), 529–554.
- Öztürk, M., Özkol, İ., 2021. Comparison of self-tuned neuro-fuzzy controllers on 2 dof helicopter: an application. *SN Applied Sciences* 3 (1), 1–14.
- Patel, K., Mehta, A., 2021. Fixed time steps discrete-time sliding mode consensus protocols for two degree of freedom helicopter systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 43 (15), 3322–3334.
- Reyhanoğlu, M., Jafari, M., Rehan, M., 2022. Simple learning-based robust trajectory tracking control of a 2-dof helicopter system. *Electronics* 11 (13), 2075.
- Rico-Azagra, J., Gil-Martínez, M., Rico, R., Nájera, S., Elvira, C., 2021. Benchmark de control de la orientación de un multirrotor en una estructura de rotación con tres grados de libertad. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 18 (3), 265–276.
- Rodríguez-Cortés, H., 2022. Aportaciones al control de vehículos aéreos no tripulados en México. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 19 (4), 430–441.
- Sadala, S., Patre, B., 2018. A new continuous sliding mode control approach with actuator saturation for control of 2-dof helicopter system. *ISA transactions* 74, 165–174.
- Sanchez-Fontes, E., Avila Vilchis, J., Vilchis-González, A., Saldívar, B., Jacinto-Villegas, J., Martínez-Méndez, R., 2020. Nuevo vehículo aéreo autónomo estable por construcción: Configuración y modelo dinámico. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 17 (3).
- Schlanbusch, S. M., Zhou, J., 2020. Adaptive backstepping control of a 2-dof helicopter system with uniform quantized inputs. En: *IECON 2020 The 46th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. IEEE, pp. 88–94.
- Sharma, R., Pfeiffer, C. F., 2017. Comparison of control strategies for a 2 dof helicopter. En: *Proceedings of the 58th Conference on Simulation and Modelling (SIMS 58)*. pp. 271–279.
- Shraim, H., Awada, A., Youness, R., 2018. A survey on quadrotors: Configurations, modeling and identification, control, collision avoidance, fault diagnosis and tolerant control. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine* 33 (7), 14–33.
- Solaque Guzmán, L., Cristancho Cardozo, C. A., Gil Cárdenas, C. A., 2014. Diseño e implementación de una plataforma experimental de dos grados de libertad controlada por dos técnicas: Pid y lógica difusa. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina* 24 (1), 99–115.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M., et al., 2006. Robot modeling and control. Vol. 3. Wiley New York.
- Wei-hong, X., Li-jia, C., Chun-lai, Z., 2021. Review of aerial manipulator and its control. *International Journal of Robotics and Control Systems* 1 (3), 308–325.
- Xia, C.-l., 2012. Permanent magnet brushless DC motor drives and controls. John Wiley & Sons.
- Xilun, D., Pin, G., Kun, X., Yushu, Y., 2019. A review of aerial manipulation of small-scale rotorcraft unmanned robotic systems. *Chinese Journal of Aeronautics* 32 (1), 200–214.
- Xin, Y., Qin, Z.-C., Sun, J.-Q., 2019. Input-output tracking control of a 2-dof laboratory helicopter with improved algebraic differential estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing* 116, 843–857.
- Zhao, Z., Zhang, J., Liu, Z., Mu, C., Hong, K.-S., 2022. Adaptive neural network control of an uncertain 2-dof helicopter with unknown backlash-like hysteresis and output constraints. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*.
- Zuñiga, M. A., Ramírez, L. A., Romero, G., Alcorta-García, E., Arceo, A., 2021. Passive fault-tolerant control of a 2-dof robotic helicopter. *Information* 12 (11), 445.