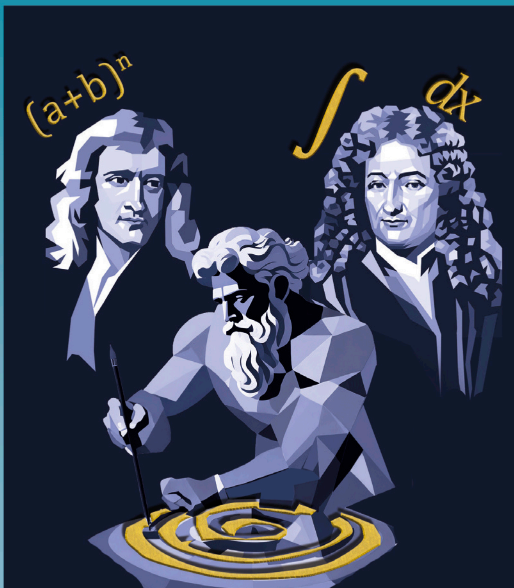
Una ventana a la **CIENCIA**

Joaquín Grau



CÁLCULO INFINITESIMAL

Una pincelada a su historia

edUPV
Universitat Politècnica de València

Cálculo infinitesimal

una pincelada a su historia

Joaquín Grau

edUPV
Universitat Politècnica de València

Una ventana a la ciencia; 3

Ventas: www.lalibreria.upv.es / Ref. 0882_04_01_01

Maquetación: Enrique Mateo

Imprime La imprenta CG

ISBN: 978-84-1396-161-3

Depósito Legal: V-3488-2023

Impreso en España

Dos jóvenes estudiantes, ella de magisterio y él de matemáticas, y una pregunta que todavía resuena en mi memoria: ¿para qué sirven las matemáticas? Le pregunta ella.

Han pasado muchos años, esa chica, mi compañera, amiga, esposa, y madre de nuestras cuatro hijas, todavía me pregunta a veces: Ximo, ¿qué tiene la matemática que despierta tanta admiración?

Este libro te lo dedico a ti, no sé si tiene la respuesta a esas preguntas, pero, en cualquier caso, considéralo una ínfima parte de lo mucho que me has dado en esta vida.

Gracias de corazón

Agradecimientos

Doy las gracias al Dr. Salvador Miret Artés, profesor de investigación y actual director del Instituto de Física Fundamental del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, cuyas sugerencias y sabios comentarios han servido para orientar este trabajo en el camino correcto.

Al Dr. Emilio José García-Taengua, profesor de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Leeds, por su amabilidad en la lectura del trabajo. Sus críticas al estilo, sus valiosos comentarios, y las acertadas ideas sobre ciertos enfoques, me han sido de gran ayuda.

Al doctor en matemáticas Jordi Juan Huguet, consultor tecnológico y profesor universitario, al que muestro mi gratitud por sus opiniones tan sinceras, amables, y a la vez tan rigurosas. Sus correcciones y aportaciones siempre tan fundadas dan valor al trabajo.

A la Dra. Pilar Román Sanchis, excelente filóloga, que ha reconducido el lenguaje del libro en sus justos términos, dando esa sensación de lectura fácil, clara y precisa. Un agradecimiento mayor, si cabe, por dedicarle un tiempo de su doctorando.

No quisiera olvidarme de tantos amigos, familiares, y compañeros de profesión, por sus comentarios y opiniones tan valiosas. No voy a nombrarlos porque seguro me dejaría a alguno. A todos, mi agradecimiento más sincero.

Este trabajo ha visto la luz gracias a la Universitat Politècnica de València. Un merecido reconocimiento a la valiosa atención, trabajo y amabilidad recibida por el equipo de la Editorial UPV, y muy en especial a M.ª Remedios Pérez.

Finalmente, dar también las gracias a las amables y cariñosas opiniones de mis hijas, M.ª Pilar, Paula, Ana, y Alba, de cuya objetividad… no tengo ninguna duda. Pero si he llegado al final de este trabajo ha sido gracias a la inestimable colaboración y apoyo de Pili, mi mujer, que, con paciencia infinita –nunca este término está mejor aplicado–, ha sabido mantener mi ánimo y convicción en este proyecto. Sus comentarios, siempre tan acertados, su sentido común, esa extraña rareza de hoy día, y el toque de humanidad que la caracteriza, han modelado y le han dado vida a este trabajo.

PRÓLOGO

> *Aprender matemáticas nos convierte en "ciudadanos más libres, más difíciles de manipular... Sirve para comprender el mundo en el que estamos, pero también para comprendernos a nosotros mismos"*
>
> *Eduardo Sáenz de Cabezón*

Nuestra curiosidad por la matemática se despierta desde ámbitos muy diversos, pero quizás, una de las formas más directa y motivadora sea la resolución de problemas. Nuestros conocimientos, habilidades algorítmicas y, cómo no, nuestro ingenio, se ponen al servicio de la matemática. En cierto modo nos consideramos un tanto "investigadores". Me pregunto ¿no llevaremos un matemático dentro? Quizás esta historia nos ayude a descubrirlo. ¿Te animas a la aventura?

¿Cómo nace esta idea?

Si bien la lectura es una de mis aficiones preferidas, mi verdadera pasión es, quizás por el tiempo que ocupa en mi pensamiento, la búsqueda de respuestas a un paradigma que llanamente, todos llamamos ***realidad.***

Analizar esta realidad, conocer sus entresijos y sus leyes me ha llevado al universo de la *Ciencia*, y a descubrir esa incomparable entelequia que es la matemática, de la cual me dispongo a hablar.

La idea de arranque en este trabajo es el eje sobre el que gira todo el proyecto: conocer los orígenes e historia de este apasionante mundo de la matemática que llamamos *cálculo infinitesimal.*

Me recuerda las emociones del joven estudiante; transitar y perderse por esos *bosques* llamados: *sucesiones, series, funciones, límites, derivadas, integrales*, etc., es un verdadero deleite.

Mi propuesta es ofrecer una pincelada de esa historia, desde sus orígenes, hasta llegar al momento culminante –*siglos* *XVII-XVIII*–.[i] Explicar con brevedad, precisión, y por encima de todo, con claridad, cómo se han gestado los problemas, los avances, aciertos y errores de esa historia; un largo y vibrante camino que termina con el nacimiento del cálculo infinitesimal o *calculus.*

Este *calculus* no es el que todos conocemos y aplicamos actualmente. Los conceptos, propiedades, y las técnicas de las que se va a hablar no contemplan significados actuales tan familiares como función, límite, o continuidad; ni siquiera el concepto esencial en el desarrollo del cálculo que son los números reales. Un *cálculo infinitesimal* en un estadio anterior al actual, cuyo conocimiento resulta imprescindible si se quiere entender su auténtica naturaleza.

No busquemos pues en su construcción el rigor, la precisión de bisturí que ahora disponemos, muy lejos de la concepción actual de *calculus,* libre de ropajes del álgebra, geometría o aritmética. Está descrito desde una perspectiva histórica, que espero y deseo, nos merezca cierta reflexión. Incluso, animaría a los lectores a que observen con atención, de qué modo los protagonistas de esta historia salieron airosos en situaciones complejas con métodos y herramientas tan precarios. Algo que nos hace recordar que la matemática, como siempre, es un reto.

¿Cuándo empieza a caminar...?

El empujón decisivo para lanzarme a esta atrevida aventura ha sido el COVID-19, enemigo cruel e invisible, que durante 98 días nos ha sumido a todos en el confinamiento. Ese ha sido el detonante. Reconozco que escribir durante estos días ha sido una grata experiencia, y de las pocas diversiones agradables,

[i] **El cálculo infinitesimal a partir del siglo XVIII**, podría ser el proyecto de otro trabajo (¿?), continuación de éste. Las aplicaciones del cálculo en todos los ámbitos científicos, tecnológicos, y sociales son, sin duda alguna, junto con Internet, los grandes protagonistas de esta nueva era de la Ciencia y la Tecnología.

y hasta me atrevería a decir placenteras que he vivido. Doy gracias por el alivio que ha significado mi distracción enfocada a la matemática.

Un ilusionante trabajo

He tenido ocasión de descubrir aspectos humanos, científicos, filosóficos, sociales, etc., de épocas y personajes que difícilmente hubiese llegado a conocer. Del privilegio reservado a los grandes genios: Arquímedes, Cavalieri, Galileo, Descartes, Fermat, Pascal, Leibniz, Barrow, Newton, etc., he aprendido:

- *La forma de encarar los problemas.*
- *Nivel de sutileza de sus respuestas.*

Si hay algo en común en todos ellos, y que representa el estilo científico por excelencia, señalaría:

- *La extraordinaria capacidad de modelar la realidad.*
- *El excepcional nivel de abstracción.*
- *La asombrosa genialidad en la traducción de esa realidad en términos algorítmicos, aunque lleguen a respuestas diferentes.*

Un breve recorrido por la historia del cálculo

Cálculo infinitesimal: una pincelada a su historia, como he señalado, no pretende ser un manual, ni un tratado exhaustivo del *cálculo,* ni por supuesto un referente de la historia de la matemática. La ambición de esta obra es mucho más modesta. Se trata de ofrecer un breve recorrido de las ideas, trabajos, y descubrimientos más relevantes, habidos en esta parcela de la matemática, desde el recuento de objetos, hasta llegar a la derivada, bajo mi particular óptica.

Como bien decía Henri Poincaré:[ii] "si queremos predecir el futuro de la matemática, el camino adecuado para conseguirlo es el de estudiar la historia y el estado actual de esta ciencia".

[ii] Morris Kline. 1999. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, I. Prólogo, p. 13, de Ed. Alianza Universidad.

Esa historia, parafraseando a su compatriota Blaise Pascal, no es la simple enumeración de personajes, sino de sus hallazgos. En palabras textuales: «Cuando citemos autores, citaremos sus demostraciones, no sus nombres».[iii]

A pesar de mi inquebrantable deseo de ser fiel a la veracidad histórica, y la coherencia y rigor exigible en la matemática, puede que haya cometido errores; espero que pocos y de escasa gravedad, y que su lectura resulte entretenida, como mínimo, y útil, en cualquier caso.

¿A quién va dirigido?

El libro puede ser de utilidad a estudiantes de Bachillerato o primeros cursos universitarios, y a todos aquellos que se consideren amantes de la matemática.

Los profesores, también encontrarán en este libro un material de ayuda a sus explicaciones. Un documento, que espero sea atractivo y útil, que ayude a completar, ampliar o incluso afianzar sus razonamientos.

Para los alumnos, la visión histórica de la matemática ayuda, sin duda, a entender mejor los conceptos, teoremas, problemas, etc., y verlos con otra perspectiva, más auténtica y más cercana, libre de ropajes academicistas.

Conforme ha ido avanzando y adquiriendo forma este proyecto, estimo que el lector puede ser también un simple aficionado a la matemática que quiera disponer de una reseña histórica del *calculus.*

Este trabajo no está dirigido a especialistas de la materia, el nivel de matemática exigible es medio-bajo, y se lee con relativa facilidad. Las innumerables notas y citas que aparecen a lo largo de todo este libro, y los apéndices al final, también facilitan la comprensión.

La mayoría de los programas académicos se centran en los contenidos y la temporalización; muchas veces supone

[iii] Morris Kline. 1999. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.* p. 14. Ed. Alianza Universidad.

un obstáculo deslindar esos contenidos con la forma que se han gestado, ya que se presentan perfectamente ordenados y cerrados. *Cálculo infinitesimal: una pincelada a su historia* puede llenar algunas lagunas, vacilaciones, olvidos, aportando un poco de frescura, y clarificando ideas.

Tratando de acercar la matemática

A menudo, en muchos libros de matemática se utilizan expresiones o términos cuyo significado apenas se les presta atención, su uso está viciado, o simplemente es erróneo y no corresponde a su auténtico significado o definición. Éste ha sido también uno de los motivos de atención de este proyecto, convencido de que las "raíces" conducen inevitablemente a la clarificación de las ideas. Dicho de otro modo, deslindar el lenguaje ordinario, el que se usa habitualmente o de forma coloquial, del lenguaje culto, el riguroso, esto es, del *lenguaje matemático*. De otra, se da explicación a la necesidad de perfeccionar el lenguaje simbólico y el instrumental, con el fin de dar respuesta a los retos que han ido surgiendo. Un proceso que ha llevado muchos años y del que a veces olvidamos su trascendencia.

Buscando la esencia ...

Resulta inevitable en cualquier proyecto con perspectiva histórica, otear no sólo el horizonte, sino también, penetrar en las entrañas, en la esencia pura del tema. Como tal, surgen de forma natural interrogantes como: "la matemática... ¿invento o descubrimiento?", "¿es la matemática una ciencia?", "matemática, ¿paradigma de la ciencia formal?", ¿qué significa área?", "¿qué es, y de qué se ocupa el cálculo infinitesimal?" Unas preguntas de las llamadas difíciles, y puedo dar fe de ello.[iv] Esta parte, no siendo esencial en la construcción del *cálculo infinitesimal*, resulta, no obstante, formativa para el principiante, y necesaria para cualquiera que se considere amante de la "matemática".

Podía soslayar las cuestiones anteriores, o bien remitir al lector a las bibliografías correspondientes. No obstante, he creído oportuno pronunciarme al respecto y, con mayor o menor acierto, proporcionar elementos de juicio, que estoy seguro el lector agradecerá.

Me gustaría hacer una aclaración previa. Como bien dice Godfrey H. Hardy,[v] *hacer* y *explicar* son dos formas diferentes de entender la matemática. En su opinión, «*la función de un matemático es hacer algo, es probar nuevos teoremas, es contribuir a las matemáticas y no hablar sobre lo que él u otros matemáticos han hecho*». En este proyecto el lector encontrará de la matemática, poco del hacer, y mucho del explicar, porque el objetivo de este libro no es "crear matemática" sino difundirla. Por otra parte, comparto absolutamente este otro pensamiento: «*Así pues, si me encuentro a mí mismo*

[iv] En mi condición de organizador de conferencias de ciencia y tecnología, durante más de 30 sesiones, no perdía ocasión de hacer justamente esta pregunta: "La matemática... ¿invento o descubrimiento?". Puedo confirmar que la respuesta no era unánime. El problema es que tanto quienes creen que la matemática es un descubrimiento como quienes piensan que es una invención tienen argumentos muy persuasivos. Dos formas diferentes de entender la matemática como realidad.

[5] Godfrey Harold Hardy (1877-1947) fue un matemático británico que formuló la desigualdad que lleva su nombre. A Hardy se le atribuye la reforma de las matemáticas británicas al introducir en ellas el rigor, que hasta entonces era una característica de las matemáticas francesas, suizas y alemanas. Los matemáticos británicos habían permanecido en gran medida en la tradición de las matemáticas aplicadas, esclavizados por la reputación de Isaac Newton. Hardy estaba más en sintonía con los métodos de cours d'analyse dominantes en Francia, y promovió agresivamente su concepción de la matemática pura, en particular contra la hidrodinámica que era una parte importante de las matemáticas de Cambridge. A partir de 1911, colaboró con John Edensor Littlewood, en un amplio trabajo en análisis matemático y teoría analítica de números. A partir de 1914, Hardy fue el mentor del matemático autodidacta indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920), una relación que ha llegado a ser célebre. Fue el principal valedor en Gran Bretaña y director de tesis de Ramanujan, conocido por algunas de sus asombrosas fórmulas y su innata intuición matemática.

no escribiendo matemáticas sino sobre matemáticas, esto es una confesión de debilidad por la que puedo correctamente ser despreciado o compadecido por los matemáticos más jóvenes y vigorosos. Escribo sobre matemáticas porque, como cualquier otro matemático que ha sobrepasado los sesenta, no tengo ya la frescura mental, la energía o la paciencia necesarias para realizar de un modo efectivo mi propio trabajo» (Apología de un matemático).

En cuanto al nombre que le da título a este proyecto, cálculo infinitesimal, si alguien está buscando su significado, no lo va a encontrar ahora. Todavía queda un largo y entretenido viaje por recorrer; lo que sí citaré es una frase ocurrente que, omitiendo el término *cálculo*, muy acertadamente afirma: "La distancia entre amor y odio es un infinitesimal".

Explicando el proyecto

El hilo conductor de este proyecto es el *número* en un sentido amplio. Trataré de explicar su significado y de cómo se ha servido el hombre de él a lo largo del tiempo y culturas.

Contar, comparar, medir y operar, son las necesidades que han dado pleno significado al número a través de la historia. Se pasa del mundo de las cantidades discretas, al mundo del continuo; del conjunto de los *números naturales* al de los *números reales*; del mundo de los cardinales finitos al de los cardinales infinitos; de lo infinitamente grande a lo infinitamente pequeño.

Naturalmente estos saltos conceptuales han necesitado su tiempo. Hay que llegar a Carl Weierstrass, Cantor, Riemann, o Lebesgue para tener el rigor que requieren estas ideas. No obstante, he considerado oportuno exponerlas de manera breve, para que el lector pueda contrastarlas con las técnicas tan precarias de los siglos XVI y XVII.

Pero si hay un momento clave en la historia de la ciencia es la revolución que empieza con Galileo. Una nueva visión de los problemas en todas las órbitas del saber, y cómo no, de la matemática. Se pasa de la visión geométrica y rigor euclidiano, a la nueva formulación: *lo importante es que el método funcione y explique los resultados.*

Como se dice de manera coloquial, –la fruta ya estaba madura–. Sólo faltaba el empujón de dos genios, Newton y Leibniz, culminando el proceso de cambio y nacimiento del nuevo paradigma, *la derivada*, y así, iniciar la andadura del *cálculo infinitesimal.*

Lo que resultaba verdaderamente mágico es como las nuevas técnicas del *cálculo infinitesimal* resolvían tantos y tan variados problemas, sin el rigor exigible.

Cálculo infinitesimal, en el sentido amplio del término hasta llegar al siglo XXI, comprende no sólo el estudio de la *continuidad de funciones, el cálculo de límites, derivadas, ecuaciones diferenciales, integrales, series*, etc., es también conocer y entender cómo ha sido la transformación que ha llevado al hombre de contar con piedras, a calcular un volumen de revolución, conocer e interpretar el resultado de un encefalograma, calcular la resistencia de una viga, el perfil del ala de un avión, etc. Una temática de enorme interés y amplio recorrido, continuación de este proyecto centrado en el cálculo hasta llegar a los siglos XVII y principios del XVIII.

El libro consta de un prólogo, veintitrés capítulos divididos en siete partes, un epílogo y apéndices.

Parte I. *El número en el proceso de cálculo*
Parte II. *¿Qué es el cálculo infinitesimal?*
Parte III. *La naturaleza de la matemática y del cálculo infinitesimal*
Parte IV. *Los orígenes del cálculo*
Parte V. *El periodo de transición con luces y sombras*
Parte VI. *La revolución científica*
Parte VII. *Newton y Leibniz artífices del cálculo infinitesimal*

Epílogo
Apéndices

Contenido

PARTE I

El número en el proceso de cálculo

Como cuestión previa, y por simple economía de pensamiento, no es necesario justificar lo evidente. Espero, por tanto, que nadie dude, ni siquiera que se cuestione si el cálculo forma parte de la matemática, pero sí me gustaría precisar: ¿c*ómo se sustancia el cálculo de objetos? ¿Y de magnitudes*? ¿*Cuál es el verdadero significado del sintagma cálculo infinitesimal?* un término que da título a este libro.

Unas preguntas que requieren un análisis minucioso tanto de los vocablos, como del lenguaje, dándoles la precisión adecuada, lejos del habitual formato coloquial. Partiremos de la idea más elemental de cálculo: contar, algo que hacemos los humanos desde que hay huellas de nuestra existencia como tales seres. Una actividad en apariencia simple que ha servido entre otras razones, para explicar el entorno vital, comunicarnos, cuantificar bienes, etc.

Del Capítulo 1 al 5 se clarifica el significado *cálculo*, y cómo ha sido el proceso de recuento de cantidades finitas desde sus orígenes hasta la actualidad. Se precisarán algunas definiciones como: ¿qué significa contar? Contar ¿una habilidad innata, adquirida o aprendida? Conteo aproximado y conteo exacto, y los límites de la percepción numérica. También se abordará una cuestión interesante: ¿saben contar los animales?

Entraremos en el significado de número, ese vehículo que da vida al cálculo. Matizaremos entre número y numeral, rastrearemos los inicios numéricos con los documentos más antiguos que acreditan la existencia de tales, y haremos un breve resumen de los diferentes métodos de representación numérica. La mecanización del cálculo nos llevará de contar a operar. Hablaremos de los inicios con las máquinas manuales del ábaco, pasando por las primeras máquinas de cálculo de Pascal o Leibniz, hasta los sofisticados ordenadores cuánticos.

Los Capítulos 4 y 5 tratan de situar al lector en el camino correcto de lo finito y lo infinito, con los formatos numéricos *ad hoc*. Una realidad numérica sorprendente que, si bien se aparta un tanto de la línea principal, ofrece un enorme atractivo; nos sitúa en un mundo tan real como el que vivimos, pero infrecuente, el de las magnitudes grandes e ínfimas que nos adentra en un escenario desconocido: ¿dónde está la frontera entre finito e infinito?

El Capítulo 6 sitúa el cálculo en un peldaño más alto: la *medida*. Una necesidad, o quizás, una obsesión de los humanos por controlar nuestro entorno. La medida como vocablo de uso común, aplicado a objetos de la vida ordinaria, y su significado preciso en la geometría, así como también las limitaciones de su uso. No todo se puede medir, ni todo lo que se quiere medir es susceptible de ser medido. Lo cierto es que estamos preparando el terreno para dar la respuesta a la pregunta que se plantea en la segunda parte de este libro. Esta Parte I la conforman estos capítulos:

- Capítulo 1: *Cálculo, un vocablo más amplio y complejo de lo que parece*
- Capítulo 2: *Contar, la primera manifestación del cálculo*
- Capítulo 3: *Contar y su proceso evolutivo*
- Capítulo 4: *Números: muy grandes y pequeños*
- Capítulo 5: *Finito e infinito, dos categorías de cardinal*
- Capítulo 6: *De contar a medir*

Capítulo 1

Cálculo, un vocablo más amplio y más complejo de lo que parece

Entender en toda su extensión el significado de *cálculo*, un término que usamos todos a diario muchas veces y que ni siquiera reparamos en ello, puede parecer una cuestión poco importante. Pero, quizás sea interesante hacer un pequeño paréntesis y dedicar unos pocos minutos a pensar en su significado. No sólo resultaría ilustrativo conocer todas las respuestas, también nos ayudaría a explicar con un lenguaje cercano lo que pensamos del vocablo *cálculo*. Una curiosidad algo difícil, o, mejor dicho, imposible de satisfacer. No puedo preguntar "a todos". Como tamaño objetivo es inviable, he pensado en confeccionar una muestra imaginaria y a los seleccionados hacerles esta pregunta *¿qué entiende por calcular*? Estos son los afortunados:

¿Quién es quién...?

Figura 1.1: Identificando personajes.

- *Loli, cajera de supermercado,*
- *Marcos, árbitro de fútbol y del VAR,*
- *Christine Lagarde,*
- *María, astrónoma,*
- *Theo, piloto de avión,*
- *Gerardo, cardiólogo,*
- *Ángel, político,*
- *Sofía, optometrista,*
- *Esther Duflo,*
- *Pilar, nuestra abuela,*
- *Sebastián, repartidor de mensajería,*
- *Guillem, topógrafo,*
- *Simone Biles,*
- *Mª Pilar, arquitecta*
- *Ferràn Adrià,*
- *Jon Rahm,*
- *Paula, ingeniera de caminos,*
- *Grigori Perelmán,*
- *Cándido, gerente de una cadena de supermercados,*
- *Ana, ingeniera de estructuras,*
- *Pedro Duque,*
- *Toni, empresario,*
- *Alba, dietista,*
- *Emma, actriz,*
- *Júlia, analista de sistemas,*
- *Magdalena Bermejo,*
- *Chloé, pirotécnica,*
- *Facundo, empleado de banca,*
- *Carla, pediatra,*
- *Rafa, convaleciente de una operación biliar,*
- *Juan Bautista, empleado del surtidor de gasolina,*
- *María Blasco,*
- *Terence Tao,*
- *Salvador, investigador de mecánica cuántica,*
- *Messi,*
- *Sandra, peluquera,*
- *Frances H. Arnold.*

Estoy convencido de que todos han entendido la pregunta, pero ¿darán la misma respuesta? Y Ud. sufrido lector ¿se atreve a dar una respuesta? Del resultado de la encuesta quizás pueda hablar algún día. De momento es un secreto.

Un breve recorrido por la semántica del término *cálculo* nos sorprenderá por la cantidad de acepciones que encontramos:

- *cálculo proposicional,* en lógica
- *cálculo estequiométrico,* en química
- *cálculo esencial, cálculo residual, cálculo de retenciones,* en economía
- *cálculo algebraico, cálculo vectorial, cálculo matricial, cálculo tensorial, cálculo numérico, cálculo mental, cálculo diferencial, cálculo de probabilidades, cálculo inferencial, cálculo integral, cálculo de variaciones, cálculo espacial, cálculo trigonométrico, cálculo del IPC, cálculo muestral, etc.,* en la matemática
- *cálculo computacional, calculadoras, Hojas de cálculo,* en informática
- *cálculos renales, cálculo del peso ideal, cálculo del biorritmo, cálculo de dosis de medicamentos, cálculo del filtrado glomerular, etc.,* en medicina
- *cálculo de estructuras*, *cálculo hidráulico, cálculo hidrológico, cálculo de sistemas fotovoltaicos, cálculo de bajantes, etc.,* en ingeniería
- *cálculo de la dosis diaria de medicamentos,* en farmacia
- *cálculo de diseño de formas*, en arquitectura
- *cálculos astronómicos,* en astrofísica
- *cálculo de movimientos,* en la caída libre de los cuerpos
- *cálculo comercial, cálculo de intereses y anualidades,* en banca
- etc.

Sin olvidarnos, por supuesto, de *cálculo infinitesimal.*

Una lista interminable, y un vocablo común, *cálculo*, con un significado diferente en cada caso. Quizás sea un buen momento para cuestionarse ¿qué hay detrás de ese denominador común?, y ¿qué entendemos por calcular? Se trata, evidentemente, de un concepto amplio y de enorme recorrido. Partiendo de sus raíces lo circunscribiremos al ámbito de la matemática, y dentro de ella, a la parte que actualmente denominamos *calculus* o simplemente *cálculo*.

En el contexto matemático, solemos utilizar la palabra *cálculo* cuando nos referimos a una serie de operaciones, algoritmos, o pasos con los que llegamos a un resultado, a partir de unos datos o de una cierta información. Sin embargo, la palabra *cálculo*, etimológicamente, *–proviene del latín calculus–* en sus orígenes significaba contar con piedras. Así lo hacían los pastores-recolectores al contar ovejas, bueyes, o enseres, o también, los cazadores, asociando cada elemento de recuento con una piedra o grupo de ellas.

Figura 1.2: “Cálculo” en su fase inicial.

Resulta curioso, este término se ha mantenido en medicina, y si no, que les pregunten a aquellos que hayan padecido tan dolorosamente *“cálculos biliares”*.

Capítulo 2

Contar, la primera manifestación del cálculo

"La capacidad para realizar operaciones matemáticas complejas, como el cálculo de una división o de una raíz cuadrada, requiere conceptos abstractos que solo son accesibles a la mente educada de un ser humano, puesto que dependen de habilidades simbólico-lingüísticas exclusivas de nuestra especie. Incluso un proceso relativamente sencillo como el de contar es un fenómeno simbólico, consciente, verbal y aprendido que un bebé humano tarda alrededor de cuatro años en dominar. En pocas palabras, todo indica que la capacidad de contar y realizar operaciones matemáticas es un reducto reservado a la especie humana…".[1] Con estas consideraciones se puede decir, sin duda alguna, que cuando el hombre ve la necesidad de contar, comienza la historia del cálculo, o también, de la matemática. Pero ¿qué es contar?

Un proceso mental tan cotidiano y familiar no debería tener una explicación difícil, más bien desde nuestra óptica común parece una obviedad, incluso a veces, como también decía en el capítulo anterior al hablar de cálculo, ni siquiera reparamos en su uso. Sin embargo, como veremos, ni resulta un proceso tan simple, ni tiene una explicación fácil. Quizás, estas reflexiones nos ayuden a encontrar la respuesta que buscamos.

¿Desde cuándo los humanos sabemos contar?

Una cuestión que, a su vez, encierra estos otros interrogantes:

- Nuestros ancestros homínidos ¿sabían contar, tal y como lo hacemos actualmente?

---

[1] Carazo, 8 de junio de 2011, *Revista Mètode*, p. 1

- ¿Dónde y cuándo empezó el ser humano esta trascendente aventura de las habilidades simbólico-lingüísticas de calcular, en Asia, en Europa, en África? ¿En el hombre de Cromagnon –hace unos 30.000 años–, en el hombre de Neanderthal, –hace 100.000 años–, o quizás mucho antes, unos 100.000 o 500.000 años?
- ¿Qué sabemos de ese arduo camino, de los pasos que la humanidad ha tenido que dar, y las dificultades que ha tenido que sortear hasta llegar a contar tal y como lo hacemos ahora?

Actualmente no hay ningún rastro, no existe documento alguno que acredite el momento exacto en el cual se produce ese paso tan crucial; lo verdaderamente cierto es que poco o nada sabemos. Un hecho si puede afirmarse: hubo un tiempo en el que el ser humano no sabía en modo alguno contar tal como lo entendemos actualmente. La prueba de tal afirmación es que todavía hay tribus incapaces de concebir ningún número abstracto, o que ni siquiera saben algo para nosotros tan elemental es que dos más dos son cuatro. Lo que podríamos denominar el grado cero del conocimiento numérico. Una realidad que todavía persiste en algunos poblados y zonas del planeta. Es el caso, como se muestra en la Figura 2.1, de los zulúes, o los pigmeos de África, los Aranda o los Kamilaroi de Australia, los aborígenes de las islas Murray, o los Botocudos de Brasil, etc.


Zulúes de África


Pigmeos de África


Aranda de Australia


Kamilaroi de Australia


Aborígenes de las Islas Murray

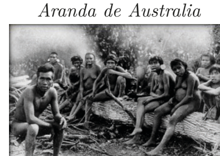
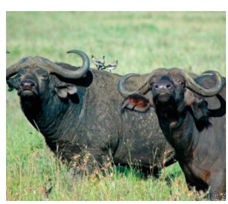

Botocudos de Brasil

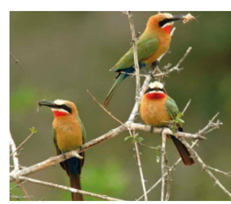
Figura 2.1: Distintas tribus y etnias.

Uno, dos y ... muchos constituyen las únicas magnitudes numéricas de tales indígenas que todavía viven en la edad de piedra. No conciben el número desde el punto de vista de la abstracción. Se trata de un sentido de modo cualitativo, algo así como se percibe un color, un ruido, el olor, o la presencia de un individuo o de un ente del mundo exterior. Se reduce a la simple pluralidad material, una realidad indisociable con la naturaleza de los seres o de los objetos percibidos. Es decir, no conciben que una agrupación de dos búfalos, dos canarios, dos piedras, o dos árboles, presentan una característica común, que es precisamente la de ser "dos". Si desaparecen los dos búfalos, las dos piedras, o los dos canarios, ya no queda *in mente* ningún valor asociado a ellos. Un estadio o zona cero, en el que contar se limita a la percepción directa de número, o también podríamos decir, a la sensación numérica.

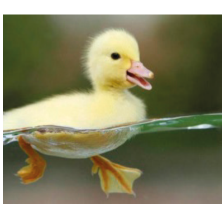
"Un caballo"



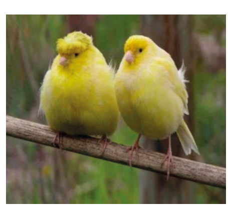
"Dos búfalos"



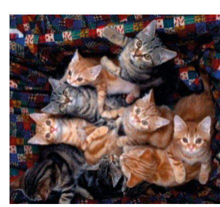
"Muchos pájaros"



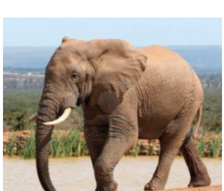
"Un pato"



"Dos canarios"



"Muchos gatos"



"Un elefante"

"Dos piedras"

"Muchas naranjas"

Figura 2.2: Observables de la percepción directa del número.

Contar ¿un proceso innato, adquirido o aprendido?

En nuestra genética existe esa conducta inconsciente, esa facilidad innata cual es comer, llorar, dormir, reír, etc. Pero ¿qué se puede decir de contar? ¿Se trata de una capacidad, cualidad, o habilidad innata? esto es ¿transmitida por la vía genética, que va con el sujeto desde que nace? ¿Es cómo se dice al principio, una habilidad que se desarrolla y, por lo tanto, adquirida y/o aprendida mediante el entrenamiento y la práctica?

Precisemos el concepto *innato*, cuyo significado resulta clave acerca del origen del proceso que llamamos contar. El innatismo es un principio de la filosofía racionalista que surge a partir de la intención de hallar una explicación sobre el origen de los conocimientos y que resulte diferente al argumento de las experiencias vividas. Esta corriente innatista es bastante controvertida en el ámbito de la psicolingüística contemporánea. En el desarrollo inicial de los aspectos cognitivos, actualmente se acepta la existencia de aspectos congénitos del lenguaje; no obstante, no existe consenso sobre la naturaleza, condiciones y particularidades de los mismos. En lo que sí hay consenso es en la teoría lingüística de Avram Noam Chomsky[2], cuando sostiene que, existe un dispositivo innato ubicado en el cerebro, que es un dispositivo para la adquisición del lenguaje humano, que nos permite aprender y utilizar el lenguaje de forma casi instintiva. El lenguaje, sigue diciendo Chomsky, no es algo aprendido, es decir, "se adquiere porque los humanos estamos biológicamente programados para ello, sin importar el grado de dificultad de la lengua"[3]. Además, el lenguaje, es específico del hombre y la imitación tiene pocos efectos

[2] Avram Noam Chomsky filósofo, politólogo, lingüista, y activista estadounidense.

[3] En 1965 Noam Chomski escribe la obra *Aspectos de la Teoría de la Sintaxis*, en la que habla del innatismo

a la hora de aprender un lenguaje. Con estas hipótesis de partida[4], hay algo claro: el lenguaje no es innato, se adquiere.

Un idioma, una técnica, no son innatos ni tampoco adquiridos, se aprenden, al igual que se aprende a jugar al golf, tocar el piano, pilotar un avión, pintar, estudiar, resolver una ecuación diferencial, o a invertir en bolsa. Llegamos al núcleo de la cuestión: *¿nacemos con habilidades matemáticas escritas en nuestra genética, se adquieren o se aprenden?* No hay una posición única, hay dos corrientes:

- Quienes afirman que dichas habilidades son innatas
- Aquellos que aseguran que es posible adquirir esas habilidades

Ambos posicionamientos están en lo correcto. Algunas personas nacen con una habilidad innata[5] lógico-matemática, que les facilita los procesos de cálculo y la comprensión y resolución de problemas[6]. No solo esa habilidad especial se da en este ámbito, también ocurre en el deporte, la pintura, la música, el teatro, la poesía, etc. Eso es una suerte, pero también requiere de adiestramiento, un camino por el cual hemos transitado los humanos desde que nacemos. Por otro lado, se trata de poner en práctica esas habilidades adquiridas y mejorarlas mediante un proceso de aprendizaje[7]. Podemos afirmar, por tanto, que:

[4] Existen otras interpretaciones del término innato. Aquellos estudiosos o interesados en profundizar en el tema pueden consultar otras acepciones del término, en las obras, entre otros, del epistemólogo y biólogo suizo Jean Piaget, o de Jean Mandler, Samuels, etc. El propósito de este trabajo no es otro que ofrecer una explicación clara y razonada sobre el origen del lenguaje, y por ende de contar, sin ánimo de polemizar, ni de entrar en las profundidades del origen del lenguaje.

[5] También no es menos cierto que existen personas con *discalculia* que tienen dificultades para generar secuencias de información y organizar eventos que ocurrieron o están por ocurrir, lo cual trae complicaciones para entender conceptos como el tiempo, días, años, etcétera.

[6] De acuerdo a la clasificación propuesta por el norteamericano Howard Gardner, la habilidad matemática es una clase de inteligencia que utiliza de forma correcta el pensamiento perteneciente al ámbito de la lógica.

[7] Una capacidad o pericia especial para cierta actividad se conoce como *nivel de* competencia de un sujeto para cumplir con una meta específica como dibujar, negociar, escribir, actuar, cantar, etc.

La matemática, y en concreto el proceso de contar, es una habilidad que puede ser innata, que también se adquiere, pero se mejora con el aprendizaje.

Añadamos a lo dicho la singularidad con la que la genética ayuda a cada individuo. Puede que ahí se encuentre en buena medida la clave del proceso evolutivo humano de contar.

Las formas de percepción numérica: conteo aproximado y conteo exacto

Podemos decir que nos duele la cabeza, que la paella está salada, que hay muchas hojas (ver Figura 2.3), que el melón es dulce, o que la película es aburrida, pero necesitamos precisar más nuestras afirmaciones, porque de otro modo no podremos decir cuánto, y no conseguimos contar. Además, *para contar se precisa de una unidad*, es lo que ocurre cuando tenemos un grupo diferenciado de individuos, cada uno de los cuales es una unidad. Ahí tenemos una primera formulación: contar es una manera de precisar la idea de poco o mucho.

"Mucho dolor" *"Muy salada"* *"Muchas hojas"*

Figura 2.3: "Mucho" o "poco" nos indica falta de precisión.

Alcanzar la fase del desarrollo humano que supone contar, esto es, el cálculo en su estadio inicial, fue un camino lento y ha requerido bastante tiempo, probablemente miles de años. Dejemos a los antropólogos, etólogos, o psicólogos, el estudio de las causas, el origen y/o las necesidades de comunicación o de supervivencia como especie, y analicemos ahora qué procesos mentales se dan en los humanos cuando contamos.

Los humanos disponemos de una capacidad innata de medir cantidades de manera aproximada en ausencia de números en el lenguaje, es la *numerosidad*. Se puede decir que es la configuración más básica para distinguir cantidades. Una competencia no exclusiva del ser humano, como mostraremos más adelante.

Algunas investigaciones realizadas en los últimos años sugieren que el concepto simbólico de número no es el único posible. De hecho, parece que los seres humanos disponemos de dos sistemas innatos de representación numérica, de «dos sistemas de número», que están presentes en etapas preverbales de nuestro desarrollo y que, por consiguiente, son independientes de la adquisición de un lenguaje.

Sistema exacto de número

El primero de estos sistemas denominado SENET nos permite valorar el número exacto de objetos de un conjunto siempre que este no sea superior a 4 en bebés, o a 7, en adultos.

Se trata de un proceso mucho más rápido que el proceso simbólico de contar y aparece en bebés de entre 9 y 12 meses, mucho antes de la adquisición de un lenguaje. Una percepción que proporciona información, y su procesamiento genera sensaciones precisas de cantidad, distancia, cantidades diferenciadas, etc. Podemos decir que es un tipo de percepción numérica y comprobar cómo funciona con un experimento muy sencillo. Preparamos dos grupos de, por ejemplo, 3 y 4 bolígrafos (o cualquier otro objeto al alcance de la mano) y se los presentamos simultáneamente a un amigo durante un breve instante, inferior a 1 segundo.

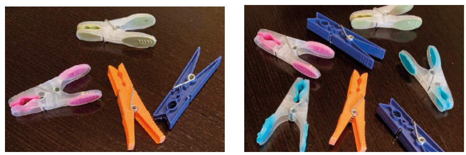


Figura 2.4: Proceso mental de conteo no simbólico.

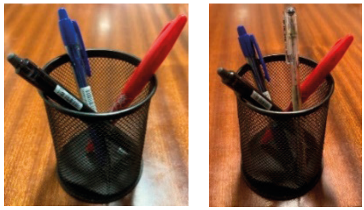


Figura 2.5: Percepción numérica no es contar.

Un tiempo insuficiente para contar verbalmente cada grupo, y que, sin embargo, es capaz de decirnos el número exacto de bolígrafos en cada grupo de objetos. Nuestra mente nos permite realizar este truco porque almacena en la memoria, a corto plazo, representaciones mentales individuales de cada uno de los objetos de cada conjunto. De este modo, nos permite valorar de un vistazo la cantidad de objetos que hay en un solo conjunto, o bien comparar en paralelo dos conjuntos distintos e identificar cuál de los dos contiene un número más grande de objetos. La pregunta que nos hacemos lógicamente es ¿cuál es el límite de esta percepción numérica? Quizás, la respuesta esté en la repetición de experiencias, en ese proceso de aprendizaje, en el mayor o menor agrupamiento, y cómo no, en la capacidad innata de cada individuo. El lector puede comprobar sus límites con estas fotografías, que ha de visualizar una a una, y de forma rápida (menos de 1 segundo).

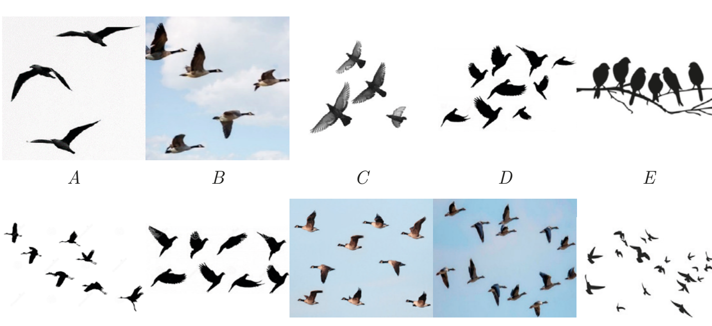


Figura 2.6: Comprobando los límites de la percepción numérica.

Otra característica a tener en cuenta es el apilamiento. Si alguna vez hemos tenido que hacer recuento de un montón de monedas, casi seguro que las hemos distribuido en montones homogéneos porque resulta más fácil el recuento si están apiladas, que si están dispersas.

Figura 2.7: Recuento de objetos dispersos y de objetos agrupados.

Comprobemos la percepción numérica con esta serie de monedas apiladas:

A

B

C

Figura 2.8: Recuento de objetos apilados.

Vaya!, parece que ha aumentado el límite de percepción numérica. La diferencia que se observa en esta segunda serie de imágenes se debe a estas características de los objetos observados:

- El agrupamiento de objetos, frente a la dispersión
- El apilamiento, asociado como es lógico a la "ordenación" de objetos
- Mecanización de la percepción de cantidad, como consecuencia la "suma de cantidades", foto B, y la repetición del mismo grupo de objetos, fotos A y C, que supone el "producto de cantidades"

Sistema aproximado de número

Es la otra forma de percepción numérica, conocida también como *conteo por aproximación*, es un estadio previo a contar, que aparece incluso más pronto en el desarrollo, a partir de los seis meses de edad y nos permite evaluar el número de objetos de un conjunto de manera aproximada. Tiene mucho que ver con la dimensión de la cantidad, fenómeno que se observa no sólo en los humanos, sino en otros seres vivos, como ya se ha apuntado anteriormente.

Este segundo sistema permite estimar conjuntos compuestos por un número de objetos muy por encima de 7, que constituye el límite operativo del *sistema exacto de número*, pero solo nos permite hacer un cálculo aproximado del número de objetos de un conjunto. Esto es debido al hecho de que el tipo de representación mental que actúa en este sistema de número es radicalmente diferente al primero. En este caso, lo que almacena nuestra mente no es una representación individual de cada objeto, sino una magnitud análoga al número total de objetos del conjunto.

En un experimento típico, se nos presentaría una pantalla de ordenador con dos cuadros de puntos, por poner un ejemplo, de 15 y 33 puntos, y otro de 20 y 19 puntos, respectivamente. En esta situación, nuestro cerebro asocia a cada cuadro una magnitud continua que representa, de manera aproximada, el número total de objetos que contiene..., algo parecido a como distinguiríamos la cantidad de líquido de dos recipientes por el volumen que los contiene.

Figura 2.9: Conteo aproximado por asociación con “volumen de objetos”.

De los dos cuadros de puntos de la Figura 2.10, se distingue con facilidad en cuál de ellos hay “más cantidad”, sin necesidad de hacer conteo.

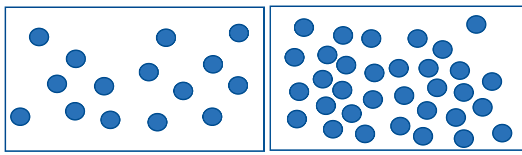


Figura 2.10: Conteo aproximado, comparación fácil.

Ahora, con estos otros dos cuadros de la Figura 2.11, es más difícil distinguir en cuál de ellos hay más puntos.

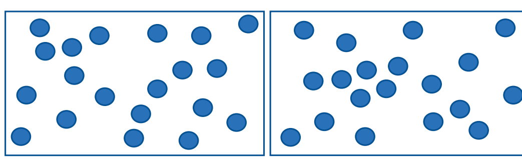


Figura 2.11: Conteo aproximado, comparación difícil.

No se ha contado el número de puntos, simplemente se ha intuido la diferencia de cantidades, se ha hecho aproximación numérica[8], un proceso mental relacionado con el aprendizaje por conteo.

En resumen, los seres humanos disponemos de dos sistemas de número que nos permiten contar sin la necesidad de aprender a contar. Bien es cierto que parecen mecanismos rudimentarios, al menos si los comparamos con nuestra habilidad para contar simbólicamente. Tanto es así, que muchos científicos se refieren a estos dos sistemas como sistemas fundamentales de número, o *numerosidad*, para distinguirlos del concepto simbólico y aprendido de número,

[8] Tal como hacemos al ver un grupo de pájaros y, sin contarlos, decimos: hay 4, o hay 6. Imposible de hacer si en el grupo hay, por ejemplo, 17, 22 o 30 pájaros.

que nos permite contar verbalmente. Ahora bien, esto no nos tiene que hacer perder de vista la enorme utilidad que estos sistemas han podido tener a lo largo de la evolución. Al fin y al cabo, se trata de sistemas que nos permiten contar en etapas del desarrollo en las que no hay un método alternativo y, además, en situaciones en las que no disponemos de tiempo para invocar fenómenos cognitivos conscientes como los responsables de contar verbalmente. Con esto en mente, no es difícil especular sobre las múltiples ventajas evolutivas que la adquisición de este tipo de sistemas pudo reportar tanto para nuestros antepasados como para otras muchas especies de animales. Además, se trata de mecanismos que no requieren capacidades cognitivas excesivamente complejas, por lo cual parecen la solución perfecta a nuestro enigma evolutivo…

Aquellos lectores interesados en profundizar en el proceso que nos lleva desde que nacemos hasta llegar a la edad de contar, pueden consultar la extensa bibliografía al respecto[9].

El proceso abstracto de contar

La *facultad abstracta de contar* procede de una actividad mental mucho más compleja, resultado del proceso evolutivo relativamente reciente de la inteligencia humana. Entonces, ¿dónde está la diferencia entre la *percepción de cantidad* que tienen estas tribus mencionadas, y nuestra idea de cantidad, tal como la concebimos? Dicho de una forma más directa: *¿cómo se pasa del grado cero al actual nivel del conocimiento numérico?*

[9] Las obras de Gelman y Gallistel, o de Jean Piaget. Charles Ransom Gallistel (nacido el 18 de mayo de 1941) es un profesor emérito de psicología en la Universidad Rutgers. Es un experto en los procesos cognitivos del aprendizaje y la memoria, utilizando modelos animales para llevar a cabo investigaciones sobre estos temas. Gallistel está casado con su compañero psicólogo Rochel Gelman. Antes de unirse a la facultad de Rutgers ocupó cargos en la Universidad de Pensilvania, donde fue catedrático del departamento de psicología y profesor de duración Bernard L. & Ida E. Grossman, y en la Universidad de California, Los Ángeles. Fueron los primeros en enunciar en 1978 los cinco principios que, a modo de estadios, ha de ir descubriendo y asimilando el niño hasta que aprende a contar correctamente.

El sistema lógico-simbólico de contar consiste en eliminar el soporte material del objeto observado, para no retener más que el elemento numérico al que corresponde en el proceso de numeración, esto es, lo que de hecho hace el observador es abstraer, eliminar el ropaje del objeto observado. Esta etapa decisiva del conteo, este salto cualitativo a la abstracción de conteo, no se adquiere sino de manera progresiva y en la medida en que se distinguen dos conceptos importantes:

- El *número cardinal*, que proporciona la expresión cuantitativa, finita o infinita. Así: El conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ decimos que tiene $Card(A) = 4$, el mismo cardinal que el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$, pero distinto del $Card(C) = 3$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, o del conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots.\}$ que tiene cardinal infinito[10]
- El *número ordinal*, que pone de manifiesto la existencia de un primer elemento seguido de un segundo y de un tercero, etc. (En lenguaje matemático se conoce como orden total de $\mathbb{N}$)
  Así: en la sucesión numérica 3, 4, 7, 11, 18, 29,... la posición 1ª la ocupa el 3, la posición 2ª el 4, la posición 3ª el 7, etc.

Dicho lo cual, el hombre prehistórico piensa en un número cuando capta bien las relaciones siguientes:

1. La naturaleza de los objetos (piedras, pájaros, cabras, árboles, etc.,) que se van a contar, no desempeña ningún papel en la numeración (es el "ropaje").

Figura 2.12: Cada uno de los grupos lo forman elementos diferentes: cabras, barcas, piedras, canarios, sin embargo, todos los grupos tienen una característica en común: "el número cardinal".

[10] La expresión utilizada es simplemente intuitiva, sin la precisión que requiere su significado, únicamente se quiere poner de manifiesto la existencia de otra categoría de cardinal que no tiene último elemento, nada más.

2. El orden en el que los elementos son observados no influye en el resultado final –a lo mismo empezar a contar desde la primera cabra de color blanco, hasta la última, negra, que al revés–, es decir, es el número cardinal.

primer *elemento* ***segundo*** *elemento* ***tercer*** *elemento* ***cuarto*** *elemento* ***quinto*** *elemento* ***sexto*** *elemento*

Figura 2.13: La enumeración de los elementos, esto es, la ordenación de los elementos del recuento, constituye el número ordinal: primero, segundo, tercero, etc.

3. El último elemento contado, es decir, el último ordinal, –caso finito– corresponde de hecho, en la medida en que sólo sea necesario el resultado de la cuenta, al número cardinal de la colección.

Por consiguiente, el paso difícil consiste en reconocer al último elemento contado como aquel que expresa cuantos elementos contiene el conjunto que se quiere contar. En el ejemplo dado, el sexto elemento da el cardinal seis.

Contar ¿una habilidad exclusiva de los humanos?

Desde un punto de vista evolutivo, esta pregunta representa un problema biológico fascinante. Algunas habilidades matemáticas rudimentarias no son exclusivas de la especie humana, como se ha podido comprobar con ciertos experimentos con leones, cuervos, ratas, etc. Resulta sorprendente la cantidad de animales que han desarrollado, llamémosla así, esa habilidad numérica. Se sabe, por ejemplo, que las ranas hembras necesitan contar el número de pulsaciones que los machos hacen en frases que contienen hasta 10 notas.

Las abejas cuentan para ayudarse a navegar y buscar una fuente de alimento, los pollitos pueden contar casi desde el momento que rompen el cascarón, hay también evidencias de que *contar (¿?) es algo innato en los simios*, nuestros parientes más cercanos.

Figura 2.14: Conteo del croar de las ranas.

Cuando un grupo de leonas oye los rugidos de un grupo rival en los alrededores de su territorio, la decisión de atacar o no dependerá del número de leonas que hayan oído rugir con relación a su propio grupo. Las hienas también son excepcionalmente buenas contando rugidos. En definitiva, el axioma *el poder está en el número*[11] explica aspectos del comportamiento social de gran cantidad de especies animales que parecen necesitar algún tipo de competencia numérica básica.

Figura 2.15: Conteo de los rugidos en los leones y las hienas.

Tanto en los seres humanos como en los chimpancés, dice Butterworth, la habilidad para contar reside en el neocórtex,

[11] Resulta curioso, el proceso de "conteo" puede significar el cambio de la presidencia de los EEUU, a juzgar por las últimas noticias en Pensilvania. Por cierto, aunque se han tardado varios días en el recuento de votos, por suerte para este país, y muy probablemente para el resto del mundo, ha salido vencedor Joe Biden -noviembre de 2020-.

la capa que recubre la zona externa del cerebro. Es allí que nosotros y los primates hacemos cuentas. No obstante, Helen Ditz y Andreas Nieder[12], descubrieron que los cuervos tienen neuronas específicas en el cerebro que responden a los números en una región del telencéfalo que los humanos no tienen. Los peces pueden contar, pero los científicos no tienen idea de cómo lo hacen.

Figura 2.16: Conteo de los animales ¿en qué parte de su cuerpo se ubica?

Ciertas hormigas, han desarrollado un sistema de recuento por números de pasos, un podómetro neuroquímico[13]; o el de las salamandras, capaces de distinguir grupos con distinta cantidad de individuos, etc. Ahora bien ¿realmente saben contar los animales? [14]

Figura 2.17: Recuento de pasos de algunas hormigas.

[12] Biólogos de la Universidad Tübingen, en Alemania. Artículo: Neurons selective to the number of visual items in the corvid songbird endbrain. *PNAS* (2015). https://doi.org/10.1073/pnas.1504245112.

[13] La hormiga del desierto del Sahara, *Cataglyphis tortis.*

[14] El magnífico artículo "*Muchos animales pueden contar... y algunos lo hacen mejor que tú"*, de Natalie Angier, (The New York Times, 12 de febrero de 2018) es una breve pero documentada exposición de como "cuentan" los distintos animales.

Vamos conociendo un poco más el significado del término *contar*. Hemos abierto sólo una ventana, nada más; todavía nos queda mucho por descubrir, pero no podemos desviarnos tanto de nuestra línea principal que es el cálculo. Queda, por tanto, un campo abierto para aquellos lectores interesados en profundizar en este interesante tema.

Capítulo 3

Contar y su proceso evolutivo

Numeral y número

Tal y como se ha indicado en el capítulo anterior, concebir la idea de número, llegar a la abstracción sustituyendo las piedras, guijarros, nudos en cuerdas, muescas en los bastones, o signos, representó un salto cualitativo sin precedentes. Hoy se sabe que los procesos de conteo precedieron cronológicamente a las palabras[15], el agrupamiento de los signos (rayas verticales, guijarros, muescas en huesos, dedos de la mano, etc.) influenció sin duda en la base del sistema de numeración elegido. La necesidad de comunicar el número de forma oral, escrita, o mediante otro soporte, es decir, el ropaje que se utiliza para expresar el significado visual, verbal, etc., son los numerales. Observemos estas imágenes y respondamos a la pregunta ¿qué tienen en común?

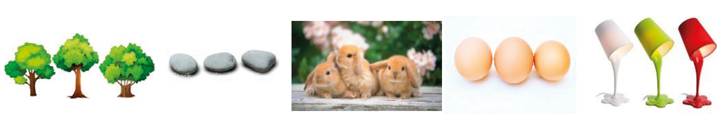


Figura 3.1: Estas imágenes tienen en común la percepción de cierto número. Este "número" está en nuestra mente, y dicha percepción coincide con independencia de quién sea el que las visualice.

Y ahora, observemos estas otras, lógicamente relacionadas con la anteriores.

[15] Parece que en esta cuestión están psicólogos, etólogos, paleontólogos, etc., todos de acuerdo.

Insistiendo en la distinción entre *número* y *numeral* ¿cómo comunica un francés el número anterior de forma verbal? ¿Y un inglés? ¿Y un alemán? Más todavía, si se hace por escrito ¿qué símbolo utilizaría un chino? ¿Y un egipcio? ¿Y un maya?... La respuesta, sea verbal o con símbolos, es un *numeral*. El concepto de número es universal, independientemente de quien lo perciba o transmita. Así pues, hay dos significados inseparables y a la vez distintos[16]: el número y el numeral.

Figura 3.2: Imágenes de "numerales", que representan al número percibido en las imágenes anteriores. Son manifestaciones "plásticas" con las que comunicamos a los demás el "número" que está en nuestra mente.

Los primeros numerales y los sistemas de numeración

Desde que se aceptó de forma generalizada la teoría de la selección natural de Darwin y el hecho de que las especies no son inmutables, muchos científicos se han afanado en buscar a nuestros ancestros, en reconstruir la cronología de la especie humana, en encontrar a ese eslabón perdido a partir del cual nuestro linaje se separó del de los simios. Nuestros primeros antepasados homínidos datan de hace unos dos millones de

[16] Una cuestión no menor, es si el número existe con independencia del hombre, o bien adquiere sentido porque es invención humana. Cuestión que se tratará en el último bloque de este Capítulo 1.

años, pero la especie *Homo sapiens*[17] es mucho más reciente, puede que sólo tenga unos 300 000 años de existencia.

Continuamente se producen hallazgos y es muy fácil perderse con cada nueva noticia o estudio científico que se publica. Ahora bien, los primeros numerales que bien podríamos llamar *registros de conteo*, esto es, las muescas más antiguas que nos llevan a pensar que alguien intentaba dejar anotada una cantidad, nos trasladan a los cazadores-recolectores del Paleolítico.[18]

Figura 3.3: Los *Hadzabe de Tanzania* son una de las últimas tribus cazadoras-recolectoras del mundo.

No conocemos a fecha cierta, cuando se inició esta etapa, de cuando se dio ese paso de percibir a comunicar, es decir, de la existencia de los primeros signos numerales, y como consecuencia, la forma de organizar los símbolos o dígitos, de etiquetar cantidades, que daría paso a lo que ahora denominamos sistemas de numeración. Cada etnia, cada grupo o pueblo, creó su propio lenguaje, y articuló sus propios métodos de recuento, y así, de esta forma tan natural surgieron los distintos sistemas para contar.

[17] También son conocidos bajo la denominación genérica de «humanos». Los seres humanos poseen capacidades mentales que les permiten inventar, *aprender y utilizar estructuras lingüísticas complejas, lógicas, matemáticas*, escritura, música, ciencia y tecnología. Los humanos son animales sociales, capaces de adquirir, concebir, transmitir y aprender conceptos totalmente abstractos.

[18] Se puede consultar "Historias de la Prehistoria", de David Benito.

Figura 3.4: Los primeros signos numerales.

Uno de los hallazgos más reciente es el *hueso de Ishango*, un utensilio de hueso que data del Paleolítico superior, aproximadamente del año 20 000 a. C. Descubierto en 1960 en una zona conocida con el nombre de Ishango, cercana al nacimiento de río Nilo. Este objeto consiste en un largo hueso marrón (más específicamente, el peroné de un babuino) con un pedazo punzante de cuarzo incrustado en uno de sus extremos, quizás utilizado para grabar o escribir. En un principio se pensaba que se empleaba como palo de conteo, ya que el hueso tiene una serie de muescas talladas divididas en tres columnas que abarcan toda la longitud de la herramienta, pero algunos científicos han sugerido que las agrupaciones de muescas indican un conocimiento matemático que va más allá del conteo. Para algunos autores que no descartan la perspectiva del conteo primigenio, el *hueso de Ishango* representa el origen de la contabilidad, o al menos de la *racionalidad del conteo* que permitió la civilización.[19]

[19] Recientes estudios sobre el hallazgo en 1890, del llamado ídolo de Shigir, que unos buscadores de oro descubrieron en el fondo de una turbera de la cordillera rusa de los Urales, convierten este objeto único, en la obra de arte ritual en madera más antigua que se conoce en el mundo. Así, el nuevo estudio sugiere que el ídolo de Shigir fue tallado hace más de 12.500 años en un árbol que ya tenía más de 150 años. En 2018, los científicos, utilizaron la tecnología de espectrometría de masas con acelerador para argumentar que el objeto de madera tenía unos 11.600 años de antigüedad. Ahora, la última publicación del equipo ha hecho retroceder aún más esa fecha de origen.

Figura 3.5: Descubrimientos recientes de signos numéricos; el *hueso de Ishango*, a la izquierda, y *El ídolo de Shigir*, a la derecha.

Con la información que se dispone a fecha de hoy, podemos citar también: La *tablilla de Kish* (del 3500 a. C.), en escritura cuneiforme, o el *Papiro de Ahmes*, conocido también como *Papiro de Rhind*, en escritura hierática (del 1750 a. C.) en él se puede observar el principio de notación cifrada que utilizaron los egipcios hace más de 4000 años –más adelante, se detallará su contenido–.

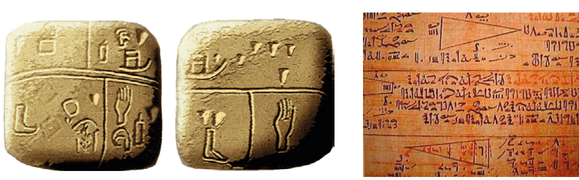


Figura 3.6: Documentos de notación numérica: *tablilla de Kish* y *Papiro de Rhind.*

Desde hace unos 5 000 años, la gran mayoría de las civilizaciones han contado en unidades, decenas, centenas, millares etc. es decir de la misma forma que seguimos haciéndolo hoy. No obstante, la forma de escribir los números ha sido muy diversa y muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no disponer de un sistema eficaz que permitiese el recuento y las operaciones, es decir, el cálculo en su significado más literal. El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes. Leonardo de Pisa (conocido también como Fibonacci) es el que lo introduce en la Europa alrededor de 1202 con su famosa obra *Liber abaci* (de la que se hablará en el Capítulo 18).

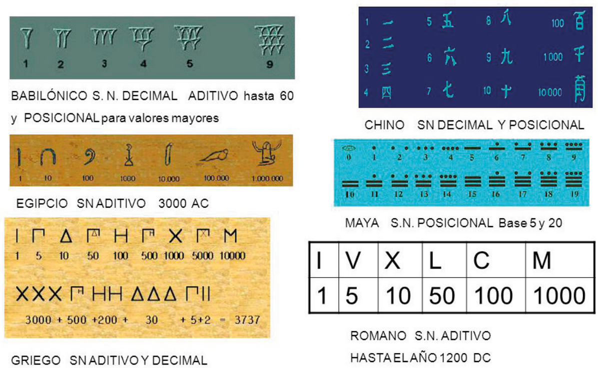


Figura 3.7: Algunos sistemas de numeración.

El gran mérito fue la introducción del cero, tanto su concepto como su símbolo[20], lo que permite un sistema en el que solo estos diez símbolos que denominamos cifras: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, puedan representar cualquier número por grande que sea[21] y simplificar la forma de efectuar las operaciones. Se trata de un sistema posicional, denominado *decimal* (*diez son los dedos de las manos*).

[20] Civilizaciones como las del antiguo Egipto, Babilonia, la antigua Grecia y la Civilización maya, poseen documentos de carácter matemático o astronómico mostrando símbolos indicativos del valor cero; pero por diversas peculiaridades de sus sistemas numéricos, no supieron obtener el verdadero beneficio de este símbolo. En el Papiro Boulaq 18, datado en la dinastía XIII, hay un símbolo para el cero: el término «*nfr*». Podemos decir que el cero como valor posicional, nació en la India. La palabra "cero" proviene de la traducción de su nombre en sánscrito –una lengua clásica de India–, "*shunya*" que significa vacío. Al parecer fue Brahmagupta quien trató el cero como un "número", no como un mero marcador de posición, y mostró reglas para operar con él. El primer testimonio del uso del «*cero indio*» está datado en el año 683: una inscripción camboyana de Angkor Wat, tallada en piedra, que incluye el número «605».

[21] Se mostrará más adelante la dificultad de utilizar este formato en ciertos números.