

Análisis de rendimiento del rechazo de perturbaciones en controladores cuadráticos lineales: un método práctico de sintonía adaptativo

Igor M. L. Pataro^{*a}, Juan D. Gil^a, José L. Guzmán^a, João M. Lemos^b

^aCentro Mixto CIESOL, ceiA3, Universidad de Almería. Ctra. Sacramento s/n, Almería 04120, Spain.

^bINESC-ID, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Lisbon, Portugal.

To cite this article: Pataro, Igor M. L., Gil, Juan D., Guzmán, José L., Lemos, João M. 2024. Performance study of disturbance rejection in linear quadratic controllers: A practical adaptive tuning method. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 21, 148-158. <https://doi.org/10.4995/riai.2023.19703>

Resumen

Este trabajo propone un método de ajuste adaptativo para la metodología de control cuadrático lineal con acción de control por adelanto (LQ-FF, por sus siglas en inglés, *Linear-Quadratic FeedForward*). El método tiene como objetivo rechazar las perturbaciones al mismo tiempo que mantiene el desempeño de seguimiento a referencias del controlador LQ convencional. El mecanismo adaptativo se formula analizando cada elemento de la señal de control LQ-FF en relación con la regulación de estados, el cambio de referencia y la compensación de perturbaciones. Además, el rechazo de perturbaciones se basa en los controladores Proporcional-Integral-Derivativo y el análisis teórico para controladores predictivos, los cuales tienen como objetivo obtener la dinámica inversa de las perturbaciones y las entradas del proceso. Se presenta una comparativa entre un modelo de espacio de estados aumentado y un modelo con aproximación de retardo polinomial para el tratamiento de los retardos asociados a las perturbaciones y las entradas del proceso en la formulación del controlador. El método propuesto demuestra su eficacia en el control de un sistema de temperatura no lineal validado, manteniendo el rendimiento similar al controlador LQ convencional en el seguimiento de referencias y rechazando por completo los efectos de las perturbaciones. Para el escenario de simulación presentado, la sintonía propuesta logra un 10 % menos de error de salida, con un incremento de solo un 18 % en el esfuerzo de control en comparación con la sintonía convencional.

Palabras clave: Control óptimo, Teoría del control óptimo, Rechazo de perturbaciones, Control adaptativo, Sistemas con retardo.

Performance study of disturbance rejection in linear quadratic controllers: A practical adaptive tuning method

Abstract

This paper proposes an adaptive tuning method for the Linear-Quadratic FeedForward (LQ-FF) optimal controller. The procedure aims to reject disturbances while maintaining the reference tracking performance of the conventional LQ controller. The adaptive mechanism is formulated by analyzing each element of the control signal LQ-FF concerning state regulation, reference change, and disturbance compensation. The disturbance rejection mechanism is based on the classical strategy used in Proportional-Integral-Derivative controllers and the theoretical analysis studied in previous works for predictive controllers, which aim to obtain the inverse dynamics of the disturbances and process inputs in relation to the outputs. In addition, a comparison is presented between an augmented state space model and a model with a polynomial delay approximation for treating delays associated with disturbances and process inputs in the controller formulation. The proposed method effectively controls a validated nonlinear temperature system, maintaining performance equivalent to the conventional LQ controller for reference tracking while entirely rejecting disturbance effects. The proposed tuning achieves 10 % less output error, with an increase of only 18 % in the control effort compared to conventional tuning in simulations.

Keywords: Optimal control, Optimal control theory, Disturbance rejection, Adaptive control, Delay systems.

*Autor en correspondencia: ilp428@inlumine.ual.es

1. Introducción

El control óptimo es un componente fundamental de la teoría de control moderna. En esta metodología, el comportamiento del sistema en bucle cerrado, su estabilidad y las propiedades de ancho de banda se contemplan simultáneamente en una función de coste específica (Athans, 1971). Dentro de este campo, los controladores lineales cuadráticos (LQ, por sus siglas en inglés, *Linear Quadratic*) son aquellos que consideran un sistema lineal, un controlador lineal y una función de coste formada por índices de rendimiento cuadráticos. En la literatura, estos controladores han sido objeto de diversos estudios relacionados con la formulación de controladores robustos y con una alta componente de estabilidad, los cuales resultan en leyes de control con márgenes de ganancia de 0.5 a infinito y márgenes de fase de $\pm 60^\circ$ (Franklin et al., 2006; Anderson and Moore, 1990; Sockaert and Rawlings, 1998; Chmielewski and Manousiouthakis, 1996).

En la mayoría de aplicaciones desarrolladas hasta el momento, los controladores LQ se proponen como reguladores de estado para escenarios de seguimiento a referencias, en los que la formulación de la ley de control asume modelos en espacio de estados observables o estimadores de estado en el caso de que solo algunas salidas estén accesibles (Castillo et al., 2022; Caballería et al., 2020). No obstante, en la literatura también se ha demostrado cómo el desempeño de estos controladores se puede mejorar notablemente al considerar las perturbaciones accesibles en la formulación del modelo en espacio de estados y, por ende, en la ley de control. Este hecho permite a los controladores LQ rechazar los efectos de la perturbación al incluir en el problema de optimización del LQ la dinámica de las perturbaciones respecto a la salida, mejorando así el desempeño del controlador (Castillo et al., 2022; Arévalo-Castiblanco et al., 2018; Gao et al., 2017; Lemos and Pinto, 2012).

Centrándose en la acción de control por adelantado (FF, por sus siglas en inglés, *Feedforward*), aunque su inclusión en controladores LQ ha sido bien motivada en la literatura, tal y como se ha comentado anteriormente, su sintonía y desempeño ha sido poco estudiada. En trabajos previos de los autores se han realizado análisis teóricos para controladores clásicos Proporcional-Integral-Derivativo (PID) y controladores predictivos basados en modelo (MPC, por sus siglas en inglés *Model Predictive Control*), con el objetivo de rechazar las perturbaciones haciendo uso de la relación dinámica entre las perturbaciones medibles y las entradas (Guzmán and Häggglund, 2021; Pataro et al., 2022). Para este propósito, la dinámica inversa de las perturbaciones y las entradas del proceso debe incluirse en el controlador para eliminar idealmente los efectos de las perturbaciones. Además, en Pawlowski et al. (2012) se demuestra que para el caso de los controladores MPC, la estructura inversa solo se logra cuando el peso de sintonía de las entradas se aproxima a cero, resultando en la misma respuesta que el FF clásico en estrategias PID. Estas conclusiones motivan el estudio de este fenómeno para la estrategia LQ-FF y serán unas de las bases del método de sintonía adaptativo propuesto en este trabajo.

También es de destacar que los efectos de los retardos de las entradas del proceso, así como los de la perturbación, afectan

notablemente la implementación práctica de la acción FF, la cual puede culminar en una estructura de controlador causal o no causal. En concreto, el caso no causal en controladores predictivos se puede abordar introduciendo la predicción de las perturbaciones cuando esta esté disponible. Sin embargo, para las estrategias clásicas, el rendimiento se ve comprometido debido a la ausencia de la función de predicción, lo que imposibilita la implementación práctica de la dinámica no causal del controlador. De una forma similar a las estrategias de control comentadas, los controladores LQ también deben lidiar con los retardos del proceso en la representación del modelo para abordar el rechazo de perturbaciones. Hasta el momento, se han presentado diferentes soluciones en la literatura, como estructuras descompuestas (Srivastava et al., 2016), estrategias basadas en el predictor de Smith (Zhang et al., 2015), o aproximaciones polinomiales de los retardos (Rubio et al., 1996). Sin embargo, en la mayoría de casos, el tratamiento de los retardos se realiza con estructuras externas al controlador LQ y su inclusión de forma intrínseca en el propio controlador apenas ha sido tratado en la literatura, reclamando así una investigación más profunda.

Sobre estas bases, este trabajo propone un método de ajuste adaptativo para el rechazo completo de perturbaciones en controladores LQ-FF. El mecanismo propuesto se basa en el ajuste del controlador para lograr la dinámica inversa de las entradas y perturbaciones del proceso. Así, en primer lugar, se presenta un estudio de la señal de control del controlador LQ-FF respecto a las componentes de regulación de estados, seguimiento de referencia y rechazo de perturbaciones. Posteriormente, se proponen dos modelos para abordar los retardos del sistema para la entrada y la perturbación, los cuales se basan en implementaciones típicas usadas en ingeniería de control, como un modelo en espacio de estados aumentado y un modelo basado en la aproximación de retardos de Padé (PDA, por sus siglas en inglés *Padé Approximant*) (Milano, 2016). Una vez formulado el controlador, y siguiendo los resultados de Pawlowski et al. (2012), se investiga el desempeño del controlador LQ-FF frente al rechazo de perturbaciones, así como las señales de control que este genera en relación con el ajuste del peso de ponderación de las entradas. Este análisis se realiza usando como referencia sistemas estables en bucle abierto. Finalmente, se presenta el método adaptativo propuesto para sistemas causales con retardo y estables en bucle abierto con perturbaciones accesibles, en el que se establece una solución adecuada para el ajuste óptimo del control, manteniendo el mismo rendimiento de seguimiento de referencia que un controlador convencional. Destacar que, aunque la robustez es un tema crucial, su discusión será considerada en futuras investigaciones y no se aborda ampliamente en este estudio.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: La Sección 2 resume la formulación LQ-FF y detalla los términos de la señal de control. En la Sección 3 se analiza el desempeño del LQ-FF para el rechazo de perturbaciones y el manejo de retardos del sistema. Posteriormente, en la Sección 4, se presenta el método práctico de sintonía LQ-FF para el rechazo de perturbaciones. En la Sección 5, se plantea un caso de estudio basado en un sistema real para demostrar la eficacia del método de sintonía propuesto. Finalmente, la Sección 6 presentan las conclusiones del trabajo.

2. Formulación del LQ-FF

En esta sección se resume la formulación del LQ-FF con el objetivo de analizar las componentes de la ley de control resultante. Para ello, considere el modelo en espacio de estados en tiempo discreto, para $k \geq 0$, con perturbaciones medibles y forma incremental de las entradas que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\Delta u(k) + B_d\Delta d(k) \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x \in R$ es el estado, $u \in R$ es la variable manipulable, $y \in R$ es la salida, $d \in R$ es una perturbación medible, y $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times nu}$, $C \in R^{ny \times nx}$, y $B_d \in R^{n \times nd}$ son las matrices de la representación en espacio de estados, siendo A la matriz de estados, B la matriz de entradas, B_d la matriz de perturbaciones, y C la matriz de salidas. Obsérvese que esta solución de control se basa en la disponibilidad de medidas de las perturbaciones, lo que, como se ha presentado ampliamente en la literatura, es la base de la acción de control por adelantado (Åström and Hägglund, 1995; Visioli, 2006; Guzmán and Hägglund, 2021).

De esta forma, el sistema se puede controlar minimizando, en cada instante k , la siguiente función cuadrática:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u(k)} J_k, \\ J_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left[(y(k+j) - y_{ref}(k))^2 + |\Delta u(k+j)|_R^2 \right], \end{aligned} \quad (2)$$

donde $R > 0$ es la matriz de ajuste relacionada con la acción de control e y_{ref} es la referencia de salida. Se debe destacar que en este trabajo se propone seguir la formulación original presentada en Lemos and Pinto (2012) para mantener la misma nomenclatura y un análisis sencillo sin pérdida de generalidad. De esta forma, la función de coste propuesta utiliza únicamente la matriz R en lugar de utilizar otro parámetro de ajuste adicional para el seguimiento de referencia. Asumiendo que todos los estados y perturbaciones son medibles, y aplicando las Condiciones Necesarias para Optimalidad y el Principio Máximo de Pontryagin, el problema cuadrático en Ec. (2) para la dinámica del sistema en Ec. (1) se puede resolver analíticamente, dando como resultado la siguiente ley de control:

$$\Delta u_{opt}(k) = -K_{LQ}x(k) + K_{g,d}(k), \quad (3)$$

en la cual:

$$\begin{aligned} K_{LQ} &= -(R + B^T PB)^{-1}(B^T)PA, \\ K_{g,d}(k) &= (R + B^T PB)^{-1}(B^T) [g(k) - PB_d\Delta d(k)]. \end{aligned} \quad (4)$$

La matriz P es la solución de la Ecuación de Riccati:

$$P = (A^T P) [I + R^{-1}(BB^T)P]^{-1} A + C^T C, \quad (5)$$

y $g(k)$ es la solución de la expresión algebraica:

$$\Gamma g(k) = -(A^T P) [I + R^{-1}(BB^T)P]^{-1} B_d\Delta d(k) + y_{ref}(k)C^T, \quad (6)$$

donde la matriz Γ se define como:

$$\Gamma = I + (A^T P) [I + R^{-1}(BB^T)P]^{-1} R^{-1}BB^T - A^T. \quad (7)$$

Como se puede apreciar en las Ec. (3) y Ec. (6), las componentes de la ley de control se pueden analizar por separado, asignando señales medibles del sistema a cada componente. De esta forma, Ec. (3) se puede interpretar como:

$$\begin{aligned} K_{LQ} &= -(R + B^T PB)^{-1}(B^T)PA, \\ K_{ref}(k) &= (R + B^T PB)^{-1}(B^T)g(k), \\ K_{ff}(k) &= -(R + B^T PB)^{-1}(B^T)PB_d\Delta d(k). \end{aligned} \quad (8)$$

Nótese que en la formulación anterior, K_{LQ} está relacionado con el desempeño de la regulación de estados. Por otro lado, el término K_{ref} se asocia con el vector $g(k)$, el cual se encarga de conducir los estados del sistema al nuevo estado estacionario originado por los efectos de un cambio en la referencia o los de una perturbación. Por su parte, el término K_{ff} puede investigarse por separado para la acción FF, ya que relaciona las matrices dinámicas del proceso y las perturbaciones, B y B_d , con la matriz P y el factor de ajuste R . El diagrama de bloques del sistema de bucle cerrado se muestra en la Figura 1.

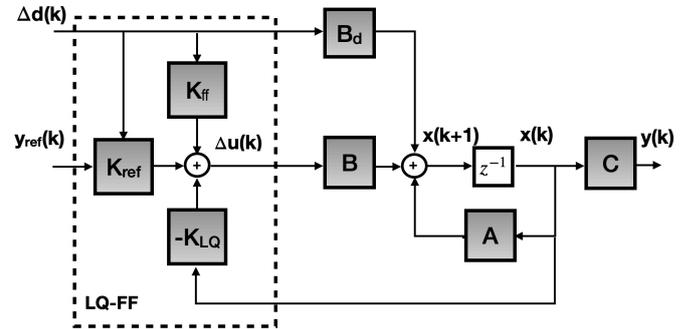


Figura 1: Diagrama de bloques del controlador LQ-FF.

En la siguiente sección, usando como referencia la estructura de control resultante propuesta, se analizará el desempeño del LQ-FF en diferentes escenarios, considerando el comportamiento de bucle cerrado, diferentes enfoques para abordar el retardo, así como su rechazo de perturbaciones.

3. Estudio del desempeño del LQ-FF

Para realizar los diferentes análisis del controlador LQ-FF, se considera un modelo matemático genérico de un sistema estable en bucle abierto con dinámica de perturbaciones medible. La función de transferencia de este modelo en el dominio de Laplace s viene dada por:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{5}{10s + 1} e^{-d_u s}, \\ P(s) &= \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{10}{15s + 1} e^{-d_d s}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde d_u y d_d son los retardos asociados a la entrada y perturbación del sistema. Para transformar la función de transferencia en la representación en espacio de estados se eligen dos tipos de representaciones con el objetivo de compararlos: i) el modelo en espacio de estados aumentado basado en la parametrización de la curva de respuesta escalonada (OPOM, por sus siglas en inglés *Output Prediction Oriented Model*) (Pataro et al., 2022) y ii) la forma incremental convencional usando la metodología PDA (Rubio et al., 1996).

La representación del modelo OPOM se puede definir como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k+1) \\ \mathbf{z}_u(k+1) \\ \mathbf{z}_d(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_u^a & \mathbf{B}_d^a \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_d \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k) \\ \mathbf{z}_u(k) \\ \mathbf{z}_d(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_u^b \\ \mathbf{I}_{nu} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_B \Delta \mathbf{u}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_d^b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{nd} \end{bmatrix}}_{B_d} \Delta \mathbf{d}(k), \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k) \\ \mathbf{z}_u(k) \\ \mathbf{z}_d(k) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

donde el estado aumentado \mathbf{x} está formado por los estados del sistema \mathbf{x}_s y los retardos del sistema relacionados con las entradas $\Delta \mathbf{u}$ y las perturbaciones $\Delta \mathbf{d}$, es decir, \mathbf{z}_u y \mathbf{z}_d , respectivamente. Las matrices concatenadas \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} están formadas por matrices auxiliares $\mathbf{0}$, \mathbf{B}_u^a , \mathbf{B}_d^a , y \mathbf{C}_y cuya construcción está definida por la parametrización de la respuesta a escalón del modelo del sistema original. Además, las matrices \mathbf{I}_u y \mathbf{I}_d son matrices identidad cuyas dimensiones están asociadas con los retardos del sistema en las entradas y las perturbaciones medibles, respectivamente. Finalmente, las matrices \mathbf{I}_{nu} y \mathbf{I}_{nd} son matrices identidad relacionadas con el número de entradas y perturbaciones accesibles. Las construcciones de matrices se detallan en Pataro et al. (2022).

En el caso del modelo en espacio de estados incremental, se puede obtener una formulación similar para la descripción ampliada del sistema dinámico considerando la siguiente forma de modelo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{d}(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_{d_0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{nu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{nd} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{d}(k-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{I}_{nu} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_B \Delta \mathbf{u}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{d_0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{nd} \end{bmatrix}}_{B_d} \Delta \mathbf{d}(k), \quad (12)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{d}(k-1) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

donde las matrices \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_{d_0} son el modelo original del sistema definido en la representación del espacio de estados. En

esta formulación, para considerar los retardos del sistema, se puede emplear la aproximación de Padé basada en la expansión de la serie de Taylor y la reducción del modelo de Padé (Wei et al., 2016). Siguiendo esta metodología, el retardo del proceso con relación a su entrada se puede formular como:

$$e^{-d_u s} = \frac{q_0 + q_1(d_u s) + \dots + q_m(d_u s)^m}{p_0 + p_1(d_u s) + \dots + p_n(d_u s)^n}, \quad (14)$$

donde

$$q_i = (-1)^i \frac{(m+n-1)!m!}{(m+n)!(m-i)!i!}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, m\}, \quad (15)$$

$$p_j = (-1)^j \frac{(m+n-1)!n!}{(m+n)!(m-j)!j!}, \quad j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

De esta manera, es posible hacer el producto de la función de transferencia $P(s)$, ver Ec. (9), y del polinomio aproximado del retardo, Ec. (14) y, por lo tanto, obtener una función de transferencia aproximada de todo el sistema y su retardo.

Nótese que para el desarrollo del controlador LQ-FF, el modelo en espacio de estados se puede obtener por la transformación de la función de transferencia resultante de los modelos descritos anteriormente, bien sea utilizando la formulación OPOM o el modelo de aproximación PDA. Además, es importante tener en cuenta que ambos enfoques presentados anteriormente pueden representar el sistema bajo la forma en Ec. (1), usando una aproximación de dimensión finita adecuada de los retardos.

3.1. Análisis de desempeño frente al rechazo de perturbaciones

En este primer análisis, se considera el estudio LQ-FF para la compensación de perturbaciones. Se debe remarcar que solo se tendrá en cuenta el LQ-FF formulado como el modelo OPOM, sin considerar retardos, es decir, $d_u = d_d = 0$.

El LQ-FF se compara con el LQ convencional sin FF, y el LQ con FF externo dinámico diseñado de forma clásica mediante la expresión $P(s)/G(s)$. Como resultado, el FF externo clásico se obtiene de la siguiente dinámica

$$FF_{clas} = \frac{P(s)}{G(s)} = \frac{10s + 1}{15s + 1} e^{(-d_d + d_u)s}. \quad (16)$$

Para esta simulación, se elige un valor de ajuste conservador $R = 10$ para todos los casos. Las Figuras 2 y 3 representan la respuesta del sistema y las señales de control para el cambio de referencia y el rechazo de una perturbación en forma de escalón, respectivamente.

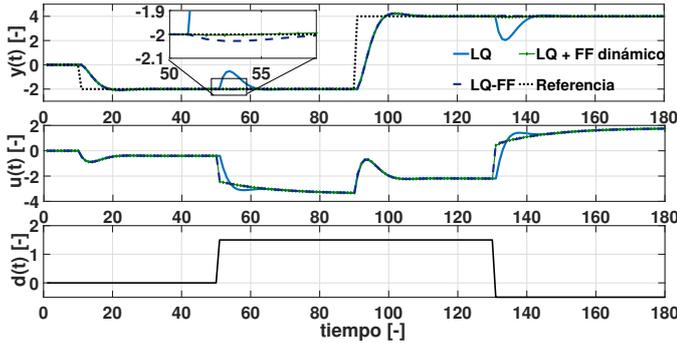


Figura 2: Comparativa de desempeño considerando los controladores LQ-FF, LQ clásico, y LQ con acción FF externa.

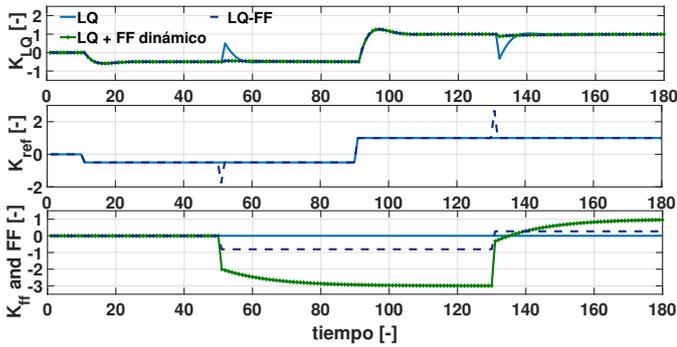


Figura 3: Señales de control generadas por el LQ-FF, LQ clásico y LQ con acción FF.

De esta simulación, es posible observar cómo el LQ-FF y el LQ con FF dinámico externo funcionan de manera equivalente. De esta forma, se puede concluir que las señales de control K_{ref} y K_{ff} (ver Figura 1) del LQ-FF logran un rendimiento similar a la estructura FF externa. Además, estas simulaciones ponen de manifiesto los beneficios de incluir la acción FF en la formulación LQ, ya que el rechazo de perturbaciones se puede integrar en una única formulación óptima, descartando la necesidad de agregar estructuras externas. Igualmente, en el LQ-FF, los retardos del proceso pueden tratarse directamente mediante la formulación en espacio de estados, lo que simplifica la necesidad de diseñar compensadores FF externos.

Por otra parte, basándose en los resultados de las Figuras 2 y 3, se puede notar que el LQ-FF usa principalmente dos componentes para rechazar la perturbación, K_{ref} y K_{ff} , y una pequeña contribución de la componente K_{LQ} . Los estudios previos sobre el rechazo de perturbaciones señalan que los controladores predictivos deben lograr la dinámica inversa entre las contribuciones a la salida del proceso de la perturbación y la entrada para rechazar la perturbación por completo (Pataro et al., 2022; Pawlowski et al., 2012). Siguiendo estas evidencias, al analizar las señales de control en la Figura 1 y la Ec. (8), se puede observar cómo la dinámica inversa para el rechazo de perturbaciones solo se logra cuando $R \rightarrow 0$; de manera similar a estrategias de control predictivo para sistemas estables en lazo abierto (Pawlowski et al., 2012). Este hecho conduce a la siguiente señal FF:

$$K_{ff}(k) = - (B^T P B)^{-1} (B^T P B_d) \Delta d(k). \quad (17)$$

En este caso, $K_{ff}(k)$ es la señal de control óptima relacionada con la dinámica inversa del sistema y los efectos de perturbación en la salida. Para demostrar este efecto, en las Figuras 4 y 5 se representan la respuesta del sistema y las señales de control para diferentes valores de ajuste de R .

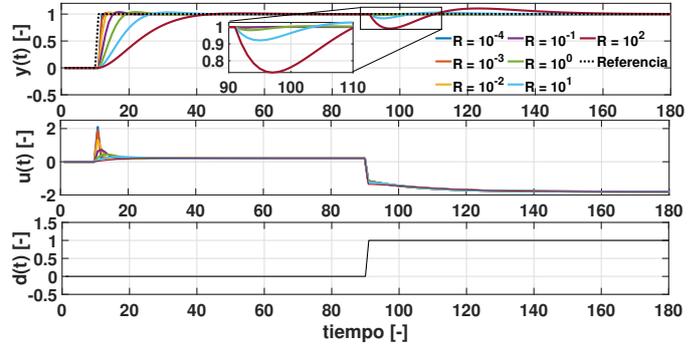


Figura 4: Desempeño del sistema para el rechazo de perturbaciones con diferentes valores de sintonía de R .

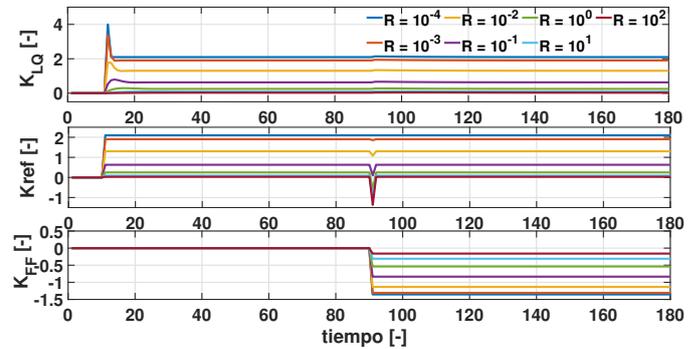


Figura 5: Señales de control LQ-FF para el rechazo de perturbaciones con diferentes valores de sintonía de R .

Observe que a medida que R tiende a cero, mayor es el efecto de la señal de perturbación K_{ff} y menor K_{ref} . Así, utilizando un factor de peso pequeño R , es posible separar las contribuciones de cada señal de control del LQ-FF de forma que, K_{LQ} se encarga de regular los estados, y K_{ref} se encarga de calcular el nuevo ajuste de estado estable debido a cambios de referencia, y K_{ff} se responsabiliza del rechazo de perturbaciones. Sin embargo, es esencial notar que las contribuciones de K_{ff} y K_{ref} son estáticas, lo que aún requiere una contribución parcial de la señal de control K_{LQ} . Por otro lado, la elección de un peso de control pequeño da como resultado una variación abrupta de la entrada, como se puede observar en la Figura 4, que puede no ser deseable en escenarios prácticos debido a las incertidumbres del modelo, la robustez sensibilidad y límites de los actuadores de proceso. Este asunto será tratado apropiadamente en la Sección 4 con un método de ajuste adaptativo.

3.2. Desempeño del LQ-FF para sistemas con retardos

El propósito de esta sección es analizar el desempeño de LQ-FF respecto a los modelos en espacio de estados propuestos para el tratamiento de los retardos, es decir, el OPOM y el PDA. Para ello, se considerarán tres escenarios: i) $d_u = d_d > 0$ (retardos

iguales), ii) $d_u < d_d$ (sistema causal), y iii) $d_u > d_d$ (sistema no causal).

Para el primer caso, considere las funciones de transferencia de la Ec. 9 con $d_u = d_d = 5$, lo que implica un retardo de la mitad de tiempo que la constante de tiempo del sistema. La primera simulación considera un PDA de primer y tercer orden y un peso para el LQ-FF de $R = 10$. La Figura 6 muestra el desempeño del sistema para los modelos en espacio de estado propuestos, y la Figura 7 detalla las señales generadas por las componentes de la ley de control del LQ-FF.

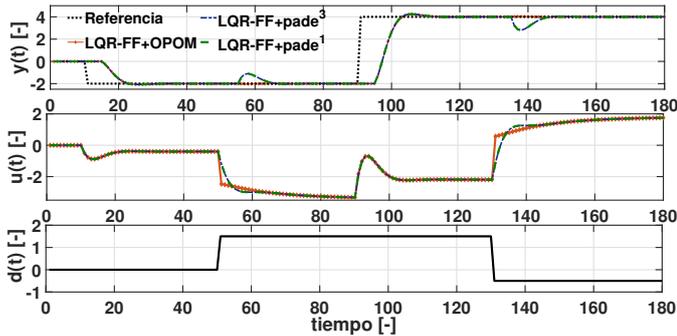


Figura 6: Desempeño del sistema para el caso de retardos iguales asociados a la entrada y perturbación.

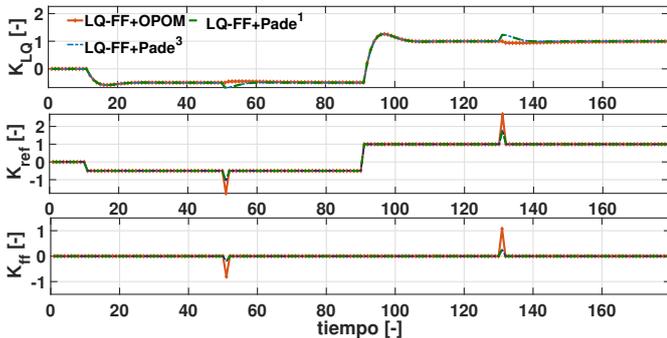


Figura 7: Componentes de la señal de control de la simulación mostrada en la Figura 6.

Para el caso de seguimiento de referencias, las diferentes formulaciones de modelos propuestas dan un desempeño idéntico. Además, el modelo PDA funciona de manera similar utilizando tanto la aproximación de primer orden, más simple, como la aproximación de tercer orden, la cual es más compleja. Sin embargo, analizando el rechazo de perturbaciones, se puede ver como el desempeño del modelo PDA se ve comprometido, ya que el efecto de las diferentes dinámicas de las entradas y salidas se combinan, produciendo una situación donde hay diferencias entre el modelo interno del controlador y el sistema. Este comportamiento se evidencia en las señales de control de la Figura 7, en las que se produce una señal FF diferente para el controlador LQ-FF con el modelo PDA. Por el contrario, con la formulación OPOM, no se crean dinámicas adicionales, ya que se emplea un modelo en espacio de estados aumentado con retardos y, por lo tanto, el controlador mantiene el desempeño del caso convencional.

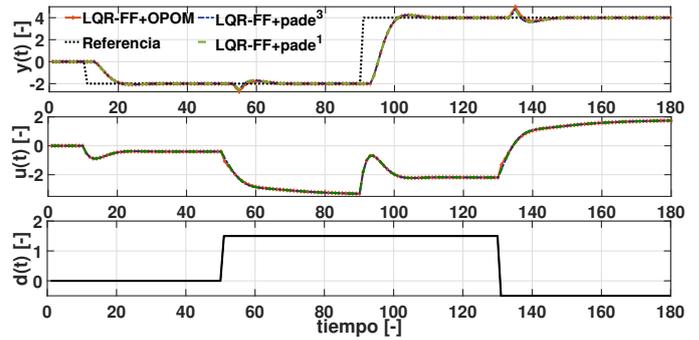


Figura 8: Desempeño del controlado para un escenario causal, $d_u = 3$ y $d_d = 5$.

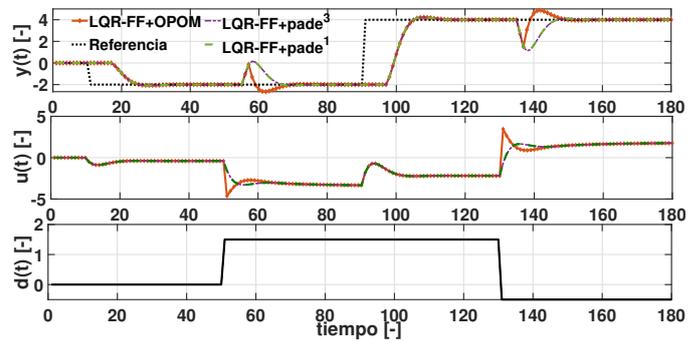


Figura 9: Desempeño del sistema para un escenario no causal, $d_u = 7$ y $d_d = 5$.

A continuación, se presenta un análisis similar considerando las situaciones causales y no causales. La Figura 8 muestra el escenario causal para $d_u = 3$ y $d_d = 5$, mientras que la Figura 9 muestra el caso no causal para $d_u = 7$ y $d_d = 5$. Para ambas simulaciones, el peso de ajuste R se elige inicialmente igual a 10. Como se puede ver, ambos enfoques de modelado funcionan de manera similar para el caso causal, y solo se pueden apreciar diferencias en el LQ-FF con el modelo OPOM para el caso de rechazo de perturbaciones no causal. Estas diferencias se deben a que la aproximación de los retardos de la representación PDA cambia considerablemente la dinámica del sistema para el caso no causal, y, por lo tanto, el rendimiento del LQ-FF. Por el contrario, con el modelo OPOM, la dinámica del modelo refleja fielmente la del sistema real, con la diferencia de que la actuación de la entrada está retardada con la perturbación, lo que impide de rechazar por completo ésta.

Con el objetivo de estudiar los efectos del parámetro de ajuste R en el rechazo de perturbaciones en escenarios causales y no causales, como se trata en la Sección 3.1, las Figuras 10 y 11 detallan el desempeño del LQ-FF cuando $R \rightarrow 0$. A diferencia de los casos con sintonía conservadora, el LQ-FF formulado con el modelo OPOM funciona mejor que los modelos PDA, ya que el efecto de los desajustes ahora es más evidente, lo que se puede notar tanto para el caso de seguimiento de referencia como para el rechazo de perturbaciones. Para expresar el análisis de desempeño de forma analítica, la Tabla 1 detalla los índices de rendimiento de los sistemas Suma del Error Absoluto (SEA) y Suma de los Incrementos de Control (SIC), definidos como

Tabla 1: Índices de desempeño para el análisis del LQ-FF en sistemas con retardos.

Índice	Casos									
	Retardo Igual		Causal $R = 10$		No causal $R = 10$		Causal $R = 10^{-4}$		No causal $R = 10^{-4}$	
	OPOM	PDA 3 ^a	OPOM	PDA 3 ^a	OPOM	PDA 3 ^a	OPOM	PDA 3 ^a	OPOM	PDA 3 ^a
SEA	63.55	77.61	55.56	55.64	98.49	111.75	24.00	29.21	69.25	72.39
SIC	12.47	12.53	12.45	12.49	21.48	13.66	38.94	73.97	108.36	130.08

$$SEA = \sum_{k=i}^{k=t_f} |y(k) - y_{ref}(k)|, SIC = \sum_{k=i+1}^{k=t_f} |u(k) - u(k-1)|. \quad (18)$$

Nótese que para estas simulaciones, las señales de control fueron omitidas con el objetivo de mejorar la visualización y análisis. Sin embargo, el esfuerzo de control para todos los casos se resume en Tabla 1.

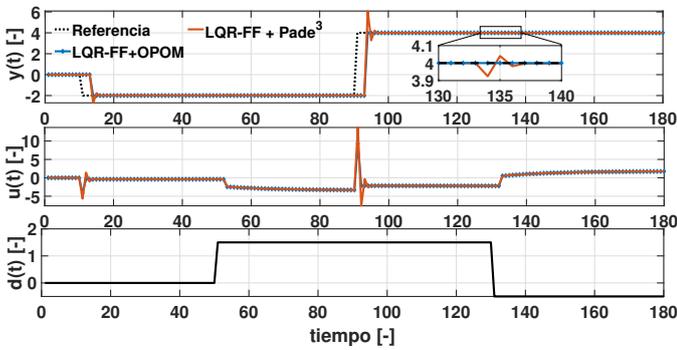


Figura 10: Desempeño del sistema para un escenario causal de la Figura 8 con LQ-FF para $R = 10^{-4}$.

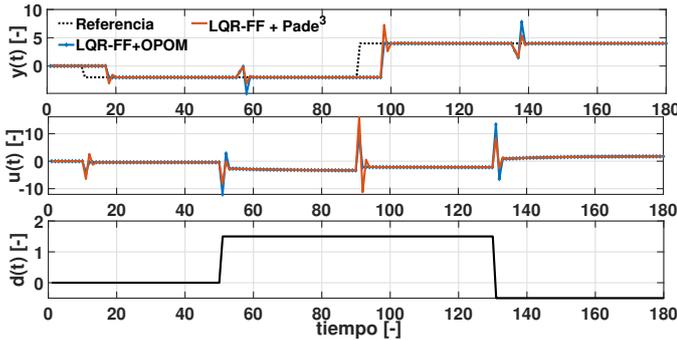


Figura 11: Desempeño del sistema para un escenario no causal de la Figura 9 con LQ-FF para $R = 10^{-4}$.

Por tanto, el análisis presentado ha demostrado que al utilizar un modelo en espacio de estados aumentados adecuado en lugar del enfoque de retardos aproximados, la dinámica del sistema se mantiene y no se producen escenarios de desajustes tanto para casos causales como no causales. En conclusión, el modelo en espacios de estados aumentado proporciona un mejor rechazo de perturbaciones y un mejor rendimiento de seguimiento de referencia con un menor esfuerzo de control para el controlador LQ-FF.

4. Método práctico de sintonía LQ-FF para rechazo a perturbaciones

En base al estudio realizado en la sección anterior sobre el rechazo de perturbaciones en controladores LQ-FF, cuando el sistema tiene retardos en la entrada y en la perturbación idénticos, el controlador puede eliminar el efecto de las perturbaciones casi perfectamente con una sintonía conservadora de R . Sin embargo, el rechazo completo solo se logra usando $R \rightarrow 0$. En este sentido, se debe remarcar que esta sintonía puede producir un pico alto en las entradas en el problema de seguimiento a referencias, lo que puede generar dificultades en la implementación real de la estrategia de control. Por lo tanto, se propone un ajuste de control adaptativo, considerando mantener el rendimiento convencional del LQ-FF para el seguimiento de referencias y el rechazo completo de perturbaciones. Cabe mencionar que la presente propuesta es válida exclusivamente para procesos cuya dinámica pueda ser aproximada por sistemas de primer orden; nótese que en sistemas de orden superior que no cumplan este requisito pueden aparecer dinámicas diferentes que requieran rediseñar la ganancia feedforward K_{ff} asociada a la ley de control LQ-FF.

El método de sintonía se define como:

$$\begin{aligned} &\text{si } |d(k) - d(k-1)| > \delta_d \text{ Y } |y(k) - y_{sp}(k)| < \delta_y \\ &\quad R(k + \tau) = R_d \quad \forall \tau = [0, (d_d - d_u)] \\ &\text{si no} \\ &\quad R(k) = R_n \\ &\text{fin.} \end{aligned} \quad (19)$$

En este método, R_d es el parámetro de la matriz de sintonía para el rechazo de perturbaciones y R_n es el parámetro de sintonía convencional. El método propuesto permite ajustar el LQ-FF para la variación de perturbación deseada y el esfuerzo de control adecuado eligiendo δ_d , δ_y y R_d . Nótese que la condición $|y(k) - y_{sp}(k)| < \delta_y$ y $|d(k) - d(k-1)| > \delta_d$ se convierte en una condición de diseño en el algoritmo de control. El objetivo de los parámetros es: i) identificar cuando la perturbación afecta considerablemente al sistema, de forma que se pueda emplear el método de sintonía propuesto, e ii) identificar si el sistema está en estacionario. Por lo tanto, la sintonía recomendada de estos parámetros debe proceder del conocimiento del comportamiento del sistema, teniendo en cuenta el ruido, el efecto de la perturbación y la dinámica.

De esta forma, se recomienda emplear el mecanismo de ajuste solo cuando el sistema esté en estado estacionario (es decir, problemas de regulación) para que el ajuste de sintonía no afecte a la respuesta del LQ-FF frente a los cambios de referencia. Así,

este método de ajuste requiere un nuevo cálculo de las ganancias LQ-FF solo si la contribución de la perturbación es mayor que el parámetro de diseño δ_d y el sistema está en estacionario. En caso contrario, las ganancias de control son las calculadas previamente fuera de línea. Nótese que el tiempo en el cual el nuevo valor de la ganancia R_d se aplica al LQ-FF contempla desde el momento en el que se satisfacen las condiciones, hasta el tiempo $k + (d_d - d_u)$, momento en el que se garantiza que el controlador óptimo rechaza completamente la perturbación.

A continuación, el método de sintonía propuesto se prueba en un escenario en simulación considerando el caso causal del sistema presentado en la Sección 3.2. La Figura 12 muestra el desempeño del método adaptativo propuesto para el LQ-FF formulado con el modelo OPOM, usando $R_n = 10$, $R_d = 10^{-4}$, $\delta_d = 0,25$ y $\delta_y = 0,1$. Además, este enfoque se compara con una sintonía convencional con $R = 10$ en todos los instantes. Como se puede ver en la Figura 12, para el cambio de referencia y el rechazo de la primera rampa de perturbación, ambos controladores presentan el mismo desempeño, ya que la condición de adaptación para el rechazo de perturbaciones no se cumple para δ_d . Sin embargo, cuando se introduce una segunda perturbación con una pendiente más grande, de forma que se cumple la condición de adaptación para el rechazo de perturbaciones, el controlador LQ-FF puede rechazar la perturbación mejor que la sintonía convencional. Además, se puede observar cómo no se requieren fuertes movimientos de las entradas, y el esfuerzo de control no se incrementa debido a la aplicación del método adaptativo propuesto.

Finalmente, la Figura 13 presenta las señales de control de cada método. Obsérvese como la ganancia LQ-FF solo cambia cuando se cumple la condición de adaptación para el rechazo de perturbaciones y, posteriormente, se restablece una vez transcurrido el tiempo especificado en $\tau = d_d - d_u$.

El desempeño de ambos controladores se pueden comparar analíticamente mediante los índices de rendimiento SEA y SIC. La Tabla 2 detalla los índices para la sintonía adaptativa y convencional. Se puede apreciar cómo el esfuerzo de control estimado por el índice SIC es solo un 8 % mayor para el método adaptativo, el cual, a su vez, proporcionó un índice de error casi un 50 % menor en comparación con el ajuste convencional.

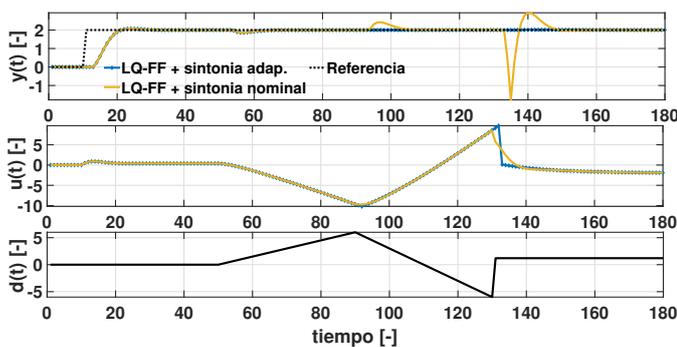


Figura 12: Desempeño de los controladores para perturbaciones en escalón y rampa.

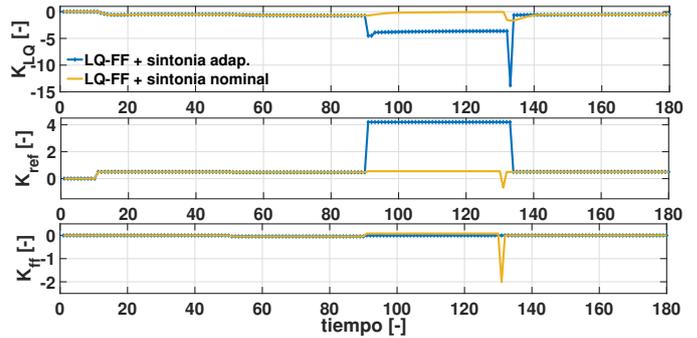


Figura 13: Señales de control para perturbaciones en escalón y rampa.

Tabla 2: Índices de rendimiento LQ-FF. Tuning

Índices	Tuning	
	Adaptive	Convencional
SEA	13.60	29.47
SIC	43.52	40.24

Se debe destacar que en este ejemplo se considera que todos los estados del modelo propuesto son medibles. Sin embargo, es crucial considerar también escenarios en los que los estados del sistema real no se puedan medir directamente. En tales casos, la implementación de un estimador de estados resulta esencial para permitir la aplicación de la estrategia LQ-FF presentada. El estimador de estados desempeña un papel crucial en la estimación de los estados no medibles del sistema, permitiendo que el controlador LQ-FF funcione eficazmente incluso en situaciones donde las mediciones de estados sean limitadas o inexistentes. Estos escenarios se consideran en la siguiente sección para el caso de estudio propuesto.

5. Caso de estudio - Control de temperatura

En esta sección se demuestra la eficacia del método de sintonía propuesto mediante la aplicación del controlador LQ-FF para el control de un sistema de temperatura no lineal estable con retardos. Para ello, se emplea el LQ-FF para controlar el sistema AP Monitor Temperature ControlLab (TCLab) (APMonitor, 2016), un dispositivo portátil comercial de bajo coste utilizado ampliamente como herramienta de referencia para la identificación de modelos y la prueba de estrategias de control. El kit TCLab es un sistema multivariable con dos calentadores (transistores) y dos sensores térmicos (termistores). El principal objetivo de control del sistema TCLab es regular la temperatura de sus transistores ajustando la corriente que pasa a través de ellos. Cada par sensor-actuador está unido a un disipador en contacto permanente y pegado con un material termocrómico, como se ilustra en la Figura 14. El objetivo principal de la prueba realizada es comparar la sintonía convencional para el LQ-FF y la solución propuesta desarrollada en la sección anterior. Para ello, el estudio se realiza en un escenario de simulación, considerando las mismas condiciones para ambas aplicaciones.

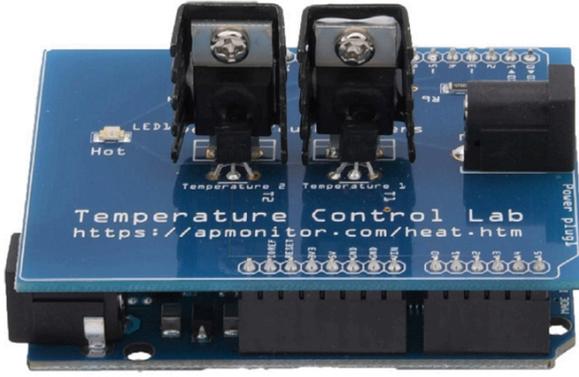


Figura 14: Imagen de un kit TCLab (APMonitor, 2016).

El ensayo se ha desarrollado en este trabajo teniendo en cuenta la metodología presentada en Hoyo et al. (2023), en la que se han realizado ensayos en lazo abierto tipo escalón para obtener un modelo lineal aproximado. Así, tanto el modelo de proceso como el de perturbación se han aproximado a sistemas de primer orden con retardo para el punto de operación $y(t) = 33\text{ }^{\circ}\text{C}$, $u(t) = 18,3\%$, y $d(t) = 5\%$, siendo la función de transferencia obtenida:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{0,5}{667s + 1} e^{-12s}, \\ P(s) &= \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{0,08}{446s + 1} e^{-776s}, \end{aligned} \quad (20)$$

Los modelos presentados se utilizan para desarrollar la estrategia LQ-FF, considerando la formulación basada en modelos lineales. Sin embargo, para validar la solución de control, el controlador se pone a prueba frente al modelo no lineal del TCLab. En este escenario, la evolución de las temperaturas de ambos transistores está gobernada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{1}{m \cdot Cp} (U \cdot A \cdot (T_a(t) - T_1(t)) \\ &\quad + \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_a(t)^4 - T_1(t)^4) + U \cdot A_s \cdot (T_2(t) - T_1(t)) \\ &\quad + \varepsilon \cdot \sigma \cdot A_s \cdot (T_2(t)^4 - T_1(t)^4) + \alpha_1 \cdot u(t)) \\ \frac{dT_2}{dt} &= \frac{1}{m \cdot Cp} (U \cdot A \cdot (T_a(t) - T_2(t)) \\ &\quad + \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_a(t)^4 - T_2(t)^4) - U \cdot A_s \cdot (T_2(t) - T_1(t)) \\ &\quad - \varepsilon \cdot \sigma \cdot A_s \cdot (T_2(t)^4 - T_1(t)^4) + \alpha_2 \cdot d(t)) \end{aligned} \quad (21)$$

donde $U = 10,0$ [W/m²K] es la conductividad térmica, $m = 0,0004$ [kg] es la masa de los transistores, $Cp = 500,0$ [J/kgK] el calor específico, $A = 0,001$ [m²] el área de los transistores, $A_s = 0,002$ el área de contacto de los transistores con los disipadores, $\alpha_1 = 0,0100$ [W/%] el factor de calentamiento del transistor 1, $\alpha_2 = 0,0075$ [W/%] el factor de calentamiento del transistor 2, $\varepsilon = 0,9$ la emisividad, y $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ la constante de Stefan-Boltzman. Obsérvese que la salida del sistema es la temperatura del transistor 1, $T_1(t)$, mientras que la señal

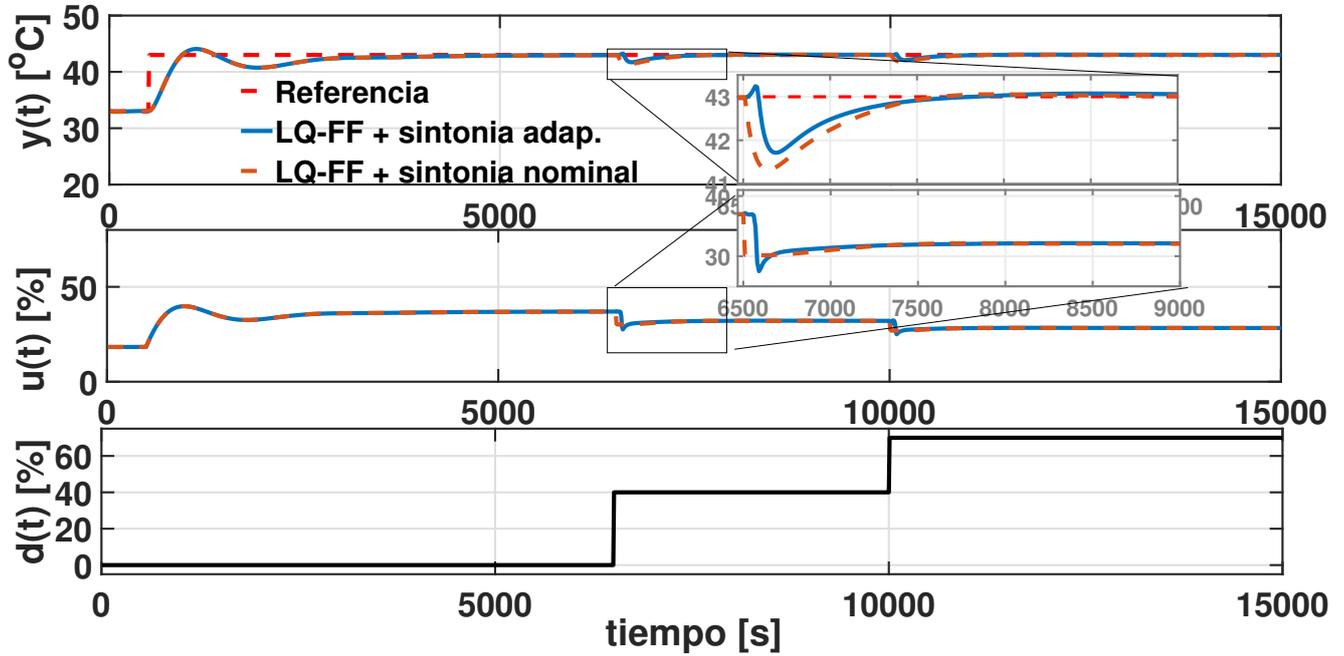
de control es la corriente que pasa por ese transistor, definida como $u(t)$. Finalmente, la perturbación del sistema se define como la corriente que pasa por el transistor 2 $d(t)$, lo que hace que haya un efecto de transmisión de energía entre los transistores donde se varían sus temperaturas $T_1(t)$ y $T_2(t)$, respectivamente. Además, en este escenario la temperatura ambiente $T_a(t)$ se mantiene constante en toda simulación como $T_a(t) = 23\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Para esta comparación entre controladores, los controladores LQ-FF se ajustan como sigue. El ajuste convencional se establece para toda la simulación con $R_n = 0,1$. Para la sintonía adaptativa, $R_d = 10^{-5}$. Además, teniendo en cuenta las condiciones del sistema, los parámetros adaptativos para la variación de la perturbación y entrada son $\delta_d = 5$ y $\delta_y = 0,5$. Estos parámetros se determinan de modo que el sistema se encuentre en estacionario (δ_y) y la perturbación medible tenga una magnitud suficiente para que el método de sintonía sea aplicado (δ_d). Finalmente, considerando la aplicación del LQ-FF en un sistema real, para el cálculo de las acciones de control es necesario estimar los estados del sistema. Por lo tanto, se propone un filtro de Kalman como estimador de estados. La sintonía de este filtro se obtuvo después de varias pruebas en simulación, llegando finalmente a los valores $R_K = 200$ y $Q_K = 0,1$.

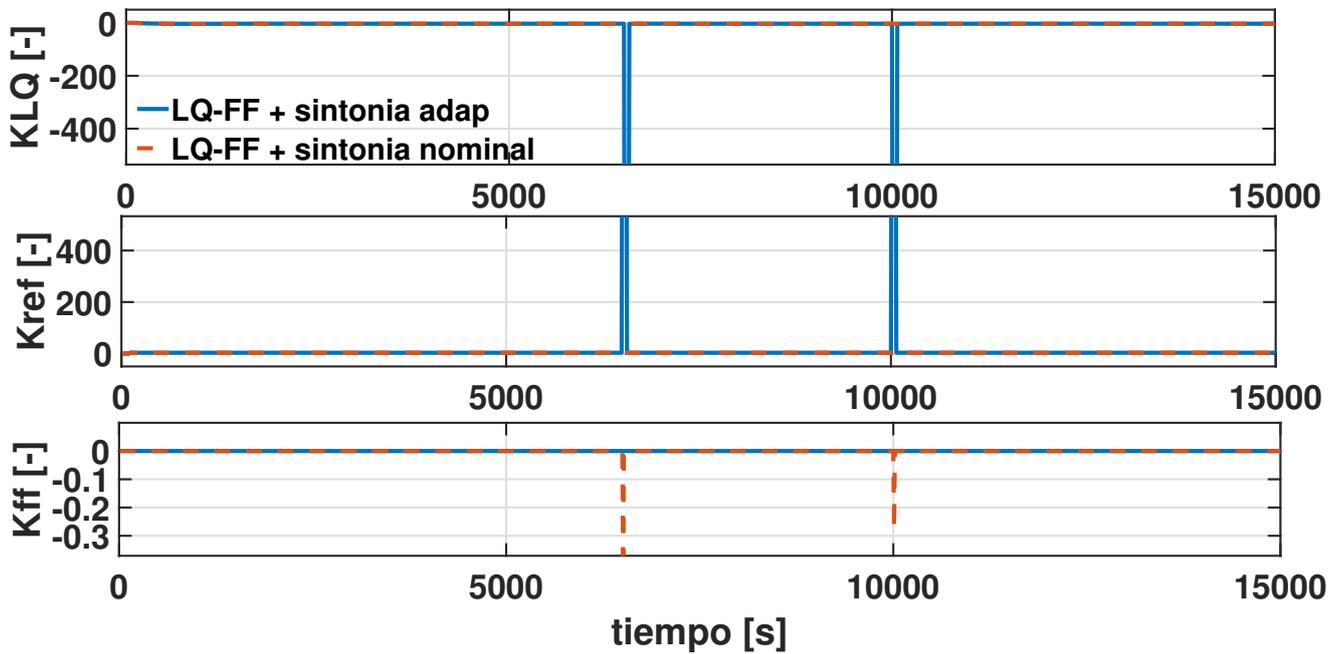
La Figura 15 ilustra los resultados del controlador LQ-FF para las dos sintonías presentadas. Como se muestra, los resultados son muy similares a los presentados en la Sección 4. Para el escenario de seguimiento de referencia, ambos controladores presentan rendimientos idénticos. La principal diferencia ocurre para el rechazo de perturbaciones, donde el LQ-FF con sintonía adaptativa supera al LQ-FF con sintonía convencional. Es esencial reconocer que, a pesar del mejor rendimiento, el rechazo de perturbaciones no es perfecto debido a la naturaleza inherente del LQ-FF, es decir, debido a que el LQ-FF es una ley de control lineal que se emplea para controlar un sistema no lineal. De esta forma, el modelo interno del LQ-FF no coincide exactamente con la dinámica real del sistema. Ese error del modelo puede generar pequeñas sobre oscilaciones cuando se implementa el cambio de sintonía debido a la mayor ganancia de la realimentación de los estados. No obstante, merece la pena destacar que el LQ-FF con ajuste adaptativo mejora considerablemente al ajuste convencional, incluso cuando se enfrenta a un sistema no lineal. Además, el rendimiento del LQ-FF sigue siendo muy satisfactorio, a pesar de no disponer de medidas directas de todos los estados del sistema. La implementación del filtro de Kalman para estimar los estados del sistema demuestra ser un enfoque práctico, permite aplicar con éxito la sintonía adaptativa propuesta en escenarios en los que no todos los estados son directamente medibles. La comparación cuantitativa de los controladores se presenta en la Tabla 3. Se puede observar cómo el LQ-FF con el método de sintonía propuesto obtiene una mejora del 6% para el error absoluto en comparación con el controlador LQ-FF convencional.

Tabla 3: Índices de rendimiento LQ-FF para el control del TCLab. Sintonía

Índices	Adaptativo	Convencional
SEA	650.74	690.04
SIC	116.15	80.72



(a) Desempeño de los controladores para control del sistema no lineal TCLab.



(b) Señales de control para perturbaciones en escalón en el sistema no lineal TCLab.

Figura 15: Comparación entre el método de sintonía propuesto y la sintonía convencional para controladores LQ-FF en el control del sistema no lineal TCLab.

6. Conclusión

Este artículo presenta un análisis de desempeño para el controlador LQ-FF considerando escenarios de rechazo de perturbaciones y seguimiento a referencias. Primero, se analiza la formulación del LQ-FF presentando una ley de control dividida en las contribuciones de la parte relacionada con la regulación de estados, el cambio de referencia y el rechazo de perturbaciones. Posteriormente, con base a trabajos previos en la literatura, se estudia el LQ-FF para el rechazo de perturbaciones, observándose como el parámetro de sintonía R debe aproximarse a cero para lograr el desempeño deseado. Además, se estudian dos enfoques de modelo en espacio de estados siguiendo el ajuste de control propuesto para diferentes retardos de entrada y perturbación. Los resultados obtenidos demuestran que al usar un modelo en espacio de estados aumentado para LQ-FF, el controlador se desempeña mejor que si se emplean métodos de aproximación de retardos polinomiales, los cuales pueden producir escenarios de desajuste. Se debe tener en cuenta que los modelos en espacio de estados aumentado incrementan considerablemente el número de estados a medida que aumenta el retardo, lo que debe tenerse en cuenta para el esfuerzo computacional en una aplicación real.

Finalmente, y sobre la base de todo el análisis realizado, el trabajo propone un controlador óptimo LQ con FF intrínseco en el propio modelo en espacio de estados, el cual mejora notablemente el desempeño del control óptimo respecto al LQ con una estructura FF externa. Además, se propone un método de sintonía práctico que permite rechazar completamente las perturbaciones al mismo tiempo que se mantiene un desempeño en el seguimiento de referencias idéntico al control LQ convencional. El método es evaluado considerando tanto un modelo genérico como en un caso de estudio en el que se contempla un sistema no lineal real. Además, se demuestra cómo ajustando el parámetro de sintonía LQ-FF solo para el rechazo de perturbaciones se puede lograr un mejor desempeño sin aumentar considerablemente el esfuerzo de control. Trabajos futuros pretenden estudiar la robustez y sensibilidad del método propuesto para LQ-FF considerando incertidumbres en los modelos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente desarrollado en el marco de los proyectos del Ministerio de Ciencia de España con número de subvenciones PID2020-112709RB-C21 y PID2021-122560OB-I00 (MCIN/AEI/10.13039/501100011033), y por la Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal) bajo el proyecto UIDB/50021/2020. Igor M. L. Pataro agradece el apoyo financiero del Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (CNPq, Brasil) bajo la subvención 201143/2019 - 4.

Referencias

- Anderson, B. D. O., Moore, J. B., 1990. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Prentice-Hall, Inc., USA.
- APMonitor, 2016. Temperature control lab. <http://apmonitor.com/pdc/index.php/Main/ArduinoTemperatureControl>, accessed on 06/08/2023.
- Arévalo-Castiblanco, M. F., Rodríguez-Garavito, C. H., Patino-Forero, A. A., Salazar-Cáceres, J. F., sep. 2018. Controlador LQR y SMC Aplicado a Pla-

- taformas Pendulares. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 15 (4), 374-383.
DOI: 10.4995/riai.2017.9101
- Åström, K. J., Hägglund, T., 1995. PID controllers: theory, design, and tuning. ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society.
- Athans, M., 1971. On the LQG Problem. IEEE Transactions on Automatic Control 16 (6), 528-528.
DOI: 10.1109/TAC.1971.1099845
- Caballeria, J., Vargas, F., Ramirez, H., Wu, Y., Gorrec, Y. L., 2020. On linear quadratic regulation of linear port-hamiltonian systems. IFAC-PapersOnLine 53 (2), 6857-6862, 21st IFAC World Congress.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.343>
- Castillo, A., Garcia, P., Albertos, P., abr. 2022. Reguladores basados en observadores de perturbaciones: principios de funcionamiento y métodos de diseño. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 19 (4), 343-355.
DOI: 10.4995/riai.2022.16856
- Chmielewski, D., Manousiouthakis, V., 1996. On constrained infinite-time linear quadratic optimal control. Systems & Control Letters 29 (3), 121-129.
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(96\)00057-6](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(96)00057-6)
- Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A., 2006. Feedback control of dynamic systems. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Boston, MA, USA.
- Gao, B., Hong, J., Yu, S., Chen, H., 2017. Linear-quadratic output regulator with disturbance rejection: Application to vehicle launch control. In: 2017 American Control Conference (ACC). pp. 1960-1965.
DOI: 10.23919/ACC.2017.7963239
- Guzmán, J. L., Hägglund, T., 2021. Tuning rules for feedforward control from measurable disturbances combined with PID control: a review. International Journal of Control 0 (0), 1-14.
DOI: 10.1080/00207179.2021.1978537
- Hoyo, A., Hägglund, T., Guzmán, J. L., Moreno, J. C., 2023. A practical solution to the saturation problem in feedforward control for measurable disturbances. Control Engineering Practice 139, 105636.
DOI: 10.1016/j.conengprac.2023.105636
- Lemos, J. M., Pinto, L. F., 2012. Distributed linear-quadratic control of serially chained systems: Application to a water delivery canal. IEEE Control Systems Magazine 32 (6), 26-38.
DOI: 10.1109/MCS.2012.2214126
- Milano, F., 2016. Small-signal stability analysis of large power systems with inclusion of multiple delays. IEEE Transactions on Power Systems 31 (4), 3257-3266.
DOI: 10.1109/TPWRS.2015.2472977
- Pataro, I. M. L., Gil, J. D., Americano da Costa, M. V., Guzmán, J. L., Berenguel, M., 2022. A stabilizing predictive controller with implicit feedforward compensation for stable and time-delayed systems. Journal of Process Control 115, 12-26.
DOI: 10.1016/j.jprocont.2022.04.017
- Pawlowski, A., Guzmán, J. L., Normey-Rico, J. E., Berenguel, M., 2012. Improving feedforward disturbance compensation capabilities in generalized predictive control. Journal of Process Control 22 (3), 527-539.
DOI: 10.1016/j.jprocont.2012.01.010
- Rubio, F., Gordillo, F., Berenguel, M., 1996. LQG/LTR control of the distributed collector field of a solar power plant. IFAC Proceedings Volumes 29 (1), 6975-6980, 13th World Congress of IFAC, 1996, San Francisco USA, 30 June - 5 July.
DOI: 10.1016/S1474-6670(17)58804-7
- Scokaert, P., Rawlings, J., 1998. Constrained linear quadratic regulation. IEEE Transactions on Automatic Control 43 (8), 1163-1169.
DOI: 10.1109/9.704994
- Srivastava, S., Misra, A., Thakur, S., Pandit, V., 2016. An optimal PID controller via LQR for standard second order plus time delay systems. ISA Transactions 60, 244-253.
DOI: 10.1016/j.isatra.2015.11.020
- Visioli, A., 2006. Practical PID control. Springer, London, England.
DOI: <https://doi.org/10.1007/1-84628-586-0>
- Wei, Y., Hu, Y., Dai, Y., Wang, Y., 02 2016. A generalized padé approximation of time delay operator. International Journal of Control, Automation and Systems 14, 181-187.
DOI: 10.1007/s12555-013-0240-4
- Zhang, H., Li, L., Xu, J., Fu, M., 2015. Linear quadratic regulation and stabilization of discrete-time systems with delay and multiplicative noise. IEEE Transactions on Automatic Control 60 (10), 2599-2613.
DOI: 10.1109/TAC.2015.2411911