MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 8(2), 2015 doi: 10.4995/msel.2015.3519.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Modelización de una situación real con tabletas: el experimento de la pelota

Modelling a real situation with tablets: the ball experiment

Miriam Ortega, Luis Puig
Universitat de València.
miriam.ortega@uv.es, luis.puig@uv.es

Abstract

En este estudio presentamos una experiencia llevada a cabo en una clase de 1º de bachillerato con un modelo de enseñanza diseñado para trabajar los conceptos de familia de funciones y parámetro a través de la modelización. Dicho modelo tiene la característica de que los datos usados son obtenidos por los propios estudiantes en el aula usando tabletas y de que incluye elementos que permiten guiarlos en la realización de una buena gestión del proceso de modelización. El análisis posterior de los resultados reveló que la realización de un análisis cualitativo previo del fenómeno estudiado así como los conocimientos que poseen los estudiantes sobre las famílias de funciones y el significado de los parámetros son elementos clave en la gestión y el control de todo el proceso. También obtuvimos información acerca de las concepciones de los alumnos sobre los conceptos de altura y tiempo.

In this study we present an experience carried out in an 11th grade class. We use a teaching model designed to work the concepts of family of functions and parameter through the modelling. This model has the characteristic that the data are obtained by students in classroom using tablets and it includes elements that allow them to manage the modelling process. The analysis of the results revealed that the realization of a previous qualitative analysis of the phenomenon studied and the students' knowledge about the families of functions and the meaning of the parameters are key elements in the management and control of the entire process. Besides, we obtained information about the students' conceptions about the concepts of height and time.

Palabras clave: modelización, resolución de problemas, gestión del proceso, funciones, datos reales, tableta.
Keywords: modelling, problem solving, process management, functions, real data, tablet.

1 Introducción

Tanto en los programas de las diferentes conferencias nacionales e internacionales como en las numerosas investigaciones realizadas en el campo de la didáctica de las matemáticas se hace explícita la importancia de transmitir a los estudiantes de todos los niveles la necesidad de hacer uso de las matemáticas para entender la realidad que les rodea. La modelización matemática se presenta como elemento clave para acercar las matemáticas a la realidad de los estudiantes y, por tanto, las situaciones de modelización son un lugar idóneo para el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos (Puig, en prensa).

A partir de los años 70 ya se empieza a observar una gran relevancia del uso de aplicaciones y modelos en la educación matemática. Esta importancia se hace explícita, sobre todo, en el 2003 cuando el ICTMA (*International Study Group for the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*) se establece como grupo de estudio afiliado del ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) y a raíz de la publicación del *ICMI Study 14* (Blum, Galbraith, Henn, Niss, 2007), libro dentro de la serie de estudios publicados por el ICMI que muestra la importancia de la modelización en la Educación Matemática. Actualmente, disponemos de numerosos trabajos de gran interés diseñados para introducir tareas de modelización en la enseñanza con el objetivo de mejorarla. De los que tienen ya años destacan los que se elaboraron en Holanda en el *OW&OC Institute*, de la *University of Utrecht*, antecesor del actual *Freudenthal Institute*, y los que se diseñaron en Inglaterra en el *Shell Centre*, una muestra de los cuales se puede encontrar en Swan (1985). De los más recientes, podemos destacar los trabajos de Blum, Kaiser y Niss, entre otros, que estan teniendo una gran repercusión e influencia en toda Europa.

Sin embargo, a pesar de que todo el mundo reconoce la importancia de trabajar la modelización en la enseñanza, la aplicación de ésta a las aulas sigue siendo un asunto pendiente. Como explica Sol (2007), en los trabajos de Blum and Niss (1991), Burkhardt and Pollack (2006) y Antonius et al. (2007) se citan algunas de las posibles causas que impiden que este tipo de actividades llegue a las aulas, entre las que destacamos la falta de recursos y material de soporte para el profesorado y la necesidad de un cambio de modelo en la gestión de las actividades en la enseñanza.

Actualmente, en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia se está trabajando en el diseño y en la experimentación de materiales de enseñanza en los que se trabaja el proceso de modelización con ayuda de las nuevas tecnologías, combinadas con una metodología de enseñanza basada en la resolución de problemas y con el objetivo de elaborar una serie de recursos que estén disponibles para su uso por parte del profesorado. Así pues, estos trabajos tienen en común que todos ellos pretenden que los alumnos estudien las familias de funciones y el significado de los parámetros involucrados en ellas a través de diferentes entornos de aprendizaje, como son Geogebra®, Matlab®, calculadoras gráficas... (Véase Monzó y Puig (2007), Monzó y Puig (2008), Monzó y Puig (2010), Monzó y Puig (2011), Puig y Monzó (2013), Puig (en prensa), Juan (2012), Infante y Puig (2013)). En particular, en el caso que nos concierne, el entorno utilizado es el de las tabletas, cuyas aplicaciones permiten obtener los datos directamente de la realidad, además de trabajar con estos para encontrar el modelo que mejor ajuste a la situación estudiada y analizar algunas de sus características.

Por tanto, cabe destacar que la importancia de este trabajo viene dada por los siguientes factores. En primer lugar, por el uso de datos reales y el planteamiento de la situación a estudiar, no como aplicación de los conceptos estudiados previamente por parte de los alumnos, sino con el objetivo de enriquecerlos y desarrollarlos. Por otro lado, por el uso de situaciones de modelización. Y, por último, por el hecho de utilizar herramientas de aprendizaje distintas a las tradicionales, cosa que se hace con el objetivo de buscar el interés y la motivación en el alumnado al adaptarnos a la realidad que les rodea.

Además, como entendemos el proceso de modelización como un caso particular de proceso de resolución de problemas, se han de tener en cuenta las componentes que, según Schoenfeld (1985), permiten a un resolutor real resolver con éxito un problema (heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias). En nuestro caso, incorporamos en la enseñanza la necesidad de realizar una buena gestión del proceso, elemento que Puig (1996) bautiza con el nombre de "gestor instruido". En particular, tal como hemos visto en estudios previos (Puig y Monzó, 2013), tanto la realización de un análisis cualitativo del fenómeno a estudiar como el conocimiento que tienen los estudiantes de las características de las familias de funciones y el significado de los parámetros resultan ser elementos cruciales en la gestión y el control del proceso de modelización. Por tanto, tomando en cuenta esta hipótesis, incorporamos en nuestra secuencia de enseñanza los elementos necesarios que, por un lado, hacen énfasis en el análisis cualitativo del fenómeno y, por otro lado, permiten trabajar los conceptos de familia de función y de parámetro.

En cuanto a los objetivos de nuestro estudio nos planteamos los siguientes:

(a) Comprobar la influencia del análisis cualitativo tanto del fenómeno como de la función que lo modeliza, del conocimiento de las familias de funciones y del significado de los parámetros en la gestión y el control del proceso de modelización.

(b) Explorar las actuaciones de los estudiantes cuando trabajan con una secuencia de enseñanza con estas características.

2 El experimento

2.1 La situación estudiada

El estudio que realizamos consistió en diseñar un experimento de enseñanza de corta duración para el que elaboramos un material con el que trabajar las familias de funciones y los parámetros a través de la modelización matemática y explorar los resultados de su aplicación en una clase de bachillerato. Dicho material se diseñó teniendo en cuenta, por un lado, los elementos necesarios para permitir a los estudiantes realizar una buena gestión del proceso de modelización y, por otro, que los datos que se utilizarían serían datos reales, obtenidos directamente en el aula por los estudiantes mediante la grabación de un vídeo utilizando unas determinadas aplicaciones para tabletas.

El fenómeno que tenían que estudiar matemáticamente los estudiantes era la relación entre el tiempo y la altura de una pelota dejada caer desde una determinada altura restringiendo el modelo a un único salto, en particular, desde el momento en que toca el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a tocar.

La elección de dicho fenómeno se debió, por un lado, al hecho de ser un fenómeno cercano a la vida cotidiana de los estudiantes y a que la trayectoria que sigue la pelota no coincide con la gráfica de la función ya que, en caso contrario, según Janvier (1978), "muchos alumnos, incapaces de tratar las gráficas como representaciones abstractas de relaciones, parecen interpretarlas como si fueran meros dibujos de las situaciones que sirven de base”.

2.2 Población y contexto

La población que participó en el experimento fue una clase de 1º de bachillerato de la especialidad de Ciencias de la Salud de un centro público de la Comunidad Valenciana. El grupo estaba formado por 16 estudiantes, de los cuales seis eran chicos y diez chicas. Dichos estudiantes no se habían enfrentado previamente a la resolución de tareas de modelización, sin embargo sí que poseían conocimientos sobre las diferentes familias de funciones y el significado de los parámetros, adquiridos en cursos anteriores a partir del trabajo con calculadoras gráficas.

Cabe destacar que, durante la realización de la experiencia, los estudiantes se agruparon libremente por parejas ya que, según Schoenfeld (1985), esto favorece la verbalización por parte de los alumnos de aquello que estan haciendo, piensan o quieren hacer.

2.3 El procedimiento seguido

La experiencia se llevó a cabo en un total de tres sesiones de 55 minutos, dos de ellas dedicadas a la enseñanza y una a la realización de entrevistas.

En la primera sesión, los alumnos realizaron una ficha con preguntas previas a la representación y grabación del experimento, con la finalidad de que estudiaran cualitativamente las propiedades del fenómeno y de las familias de funciones (ver Figura 1). Entre las preguntas, se incluye una en la que se les pide a los estudiantes que realicen un esbozo de la gráfica de la función que piensan que modelizaría el fenómeno (pregunta 1), otra en la que se les pide que elijan la familia de funciones que mejor ajustaría a la gráfica (pregunta 2) y una última donde tenían que explicar los motivos de su elección (pregunta 3).

1. Dibuja en el siguiente sistema de ejes la nube de puntos que piensas que obtendríamos después de analizar las imágenes.

2. ¿A cuál de las siguientes familias de funciones pertenece la gráfica de la función que ajuste bien a la nube de puntos?

a) $y = ax + b$	**f)** $y = ax^b$
b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$	**g)** $y = a\cdot e^{bx}$
c) $y = ax^2 + bx$	**h)** $y = a\cdot e^{-bx} + c$
d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	**i)** $y = a\cdot\sin((x-c)/b) + d$
e) $y = a + b\cdot\ln(x)$	**j)** Otra opción. Indícala: _______

3. Explica por qué has hecho esta elección.

Figura 1: Preguntas de la ficha previa a la realización del experimento.

Posteriormente, los alumnos simularon dicho fenómeno y lo grabaron utilizando la aplicación Video Physics®, que les generó una nube de puntos cuyas coordenadas daban la relación entre el tiempo y la altura a la que se encontraba la pelota en cada instante. En particular, lo que hicieron para obtener la nube de puntos fue: fijar los ejes de coordenadas, tomar una medida de referencia en la realidad e introducirla en la aplicación y marcar los puntos que indicaban la trayectoria que seguía la pelota en los distintos fotogramas del vídeo (ver Figura 2). Después, los alumnos copiaron las coordenadas de dichos puntos a la aplicación Data Analysis® para elegir qué familia de funciones ajustaba mejor a estos de entre las que proporcionaba la aplicación, que en este caso era la función cuadrática, y obtener los valores concretos de los parámetros para el experimento que acababan de realizar.

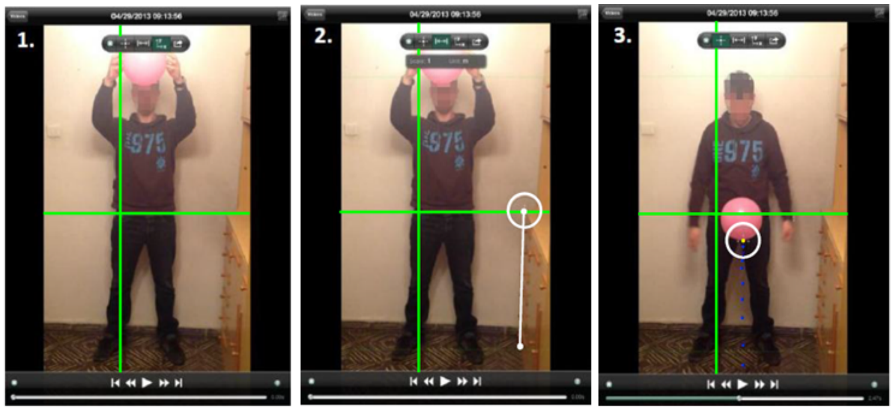


Figura 2: Capturas de imágenes de Video Physics®.

En la segunda sesión, realizaron otra ficha con preguntas relativas a la validación de la función y a su interpretación en términos del fenómeno. Entre ellas, se encontraba una primera pregunta en la que se les pedía que escribieran la función obtenida, otras dos cuya finalidad era ver si los alumnos eran capaces de darse cuenta de que la función de regresión solo ajustaba a la función que describía el fenómeno en el intervalo para el que se había definido y una última para que interpretaran los resultados en términos del fenómeno. En particular, en las preguntas 5 y 6 (ver Figura 3) les pedíamos que calcularan imágenes de valores, algunos de los cuales estaba fuera del dominio (pregunta 5), y después les preguntábamos si estos mostraban lo que verdaderamente ocurría y que especificaran si había datos que no se ajustaban a lo que esperaban obtener (pregunta 6). Por otro lado, en la última pregunta les pedíamos que calcularan para qué valores del tiempo pensaban que la pelota tocaría el suelo y para cuáles alcanzaría su máxima altura. Para responder algunas preguntas de esta ficha, los alumnos utilizaron la aplicación Free GraCalc®, que funciona como una calculadora gráfica.

5. Responde las siguientes cuestiones. Puedes utilizar la aplicación *Free GraClac*.

a) ¿A qué altura se encuentra la pelota cuando $x = 0{,}76$? $f(0{,}76) =$ ___

b) ¿Y cuándo $x = 1{,}1$? $f(1{,}1) =$ __________

c) ¿Y cuándo $x = 0{,}11$? $f(0{,}11) =$ __________

d) ¿Y cuándo $x = 100$? $f(100) =$ __________

6. a) En general, ¿crees que las respuestas obtenidas en la pregunta anterior muestran lo que verdaderamente ocurre? ¿Por qué?

b) ¿Qué datos no se ajustan a lo que esperabas? ¿Por qué?

Figura 3: Preguntas 5 y 6 de la ficha posterior al experimento.

Y, por último, en la tercera sesión, se seleccionaron dos parejas a partir del análisis de sus actuaciones y se les realizó una entrevista de diagnóstico para detectar el origen de los resultados obtenidos. Además, en la entrevista también incorporamos un elemento de enseñanza ya que tratamos de guiar a los alumnos, a partir de preguntas y sugerencias, para que adquirieran conocimientos relacionados con el significado de los parámetros y los valores que puede tomar la altura dependiendo de qué se tome como referencia.

Cabe destacar que las aplicaciones Video Physics®, Data Analysis® y Free GraCalc® fueron usadas por el hecho de ser gratuitas o de bajo coste con el objetivo de hacer más viable su futura incorporación a las aulas.

3 La metodología utilizada

Nuestro estudio está organizado en el marco teórico-metodológico de los Modelos Teóricos Locales, por lo que el análisis de los datos obtenidos en nuestra investigación tiene como un componente esencial la descripción de las actuaciones de los estudiantes, y una parte de la metodología de obtención de datos se basa en la selección de casos que se estudian con detalle mediante la realización de entrevistas que, habitualmente, son entrevistas con enseñanza (Filloy, Rojano y Puig, 2008).

En particular, la metodología utilizada para analizar los datos consistió en realizar lo que Puig (1996) denomina una ”reconstrucción racional”, es decir, basándonos en la información recogida en las fichas, en las tabletas y en las entrevistas junto con las observaciones realizadas durante el experimento, confeccionar una narración de las conductas y comportamientos de los estudiantes con el objetivo de dotar de sentido el conjunto del texto. Por un lado, analizamos sus respuestas a las dos fichas, los datos almacenados en las tabletas y las observaciones realizadas en clase y recogidas en una memoria al terminar cada sesión, con lo que elaboramos una reconstrucción racional de los hechos por pareja. Después de analizar la información relativa a cada una de las parejas, realizamos un resumen con aquellos resultados observados más relevantes, tratando de indagar más sobre las concepciones de los estudiantes y el origen de sus respuestas. Por otro lado, se efectuó una transcripción de las entrevistas en la que no solo se plasmaron las diferentes intervenciones de los participantes sino que se incluyeron comentarios sobre los distintos comportamientos y reacciones observadas en las grabaciones y fundamentales para la total comprensión e interpretación de los datos. El análisis de las entrevistas se realizó también primero pareja por pareja y posteriormente, por resultados.

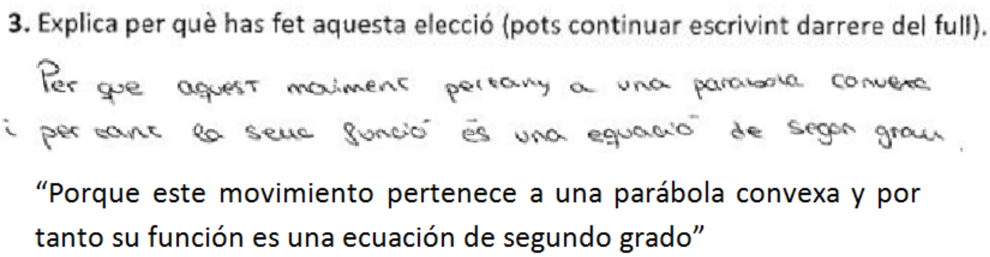
4 Los resultados obtenidos

A continuación presentamos, por un lado, los resultados que muestran la influencia del análisis cualitativo del fenómeno y de los conocimientos previos de los estudiantes en las decisiones que toman (apartado 4.1.) y, por otro, las concepciones que estos presentan sobre los conceptos de altura y tiempo, como consecuencia de explorar sus actuaciones cuando trabajan con el modelo de enseñanza diseñado (apartados 4.2. y 4.3.). Acompañamos estos resultados con ejemplos de las respuestas de los estudiantes en diferentes momentos de la experiencia.

4.1 El análisis cualitativo y los conocimientos previos como elementos clave

Como resultado de analizar la influencia del análisis cualitativo y de los conocimientos previos de los estudiantes en sus actuaciones, pudimos observar que los estudiantes se basan en estos tanto para responder como para justificar sus respuestas. En este apartado veremos un ejemplo de respuesta en el que los alumnos se basan en sus conocimientos previos sobre las familias de funciones, otro en el que utilizan sus conocimientos sobre el significado de los parámetros y un último ejemplo en el que se basan en el análisis cualitativo realizado en la primera ficha.

En la respuesta de la Figura 4 a la pregunta 3 de la ficha inicial, podemos observar la influencia de los conocimientos previos de los estudiantes. En particular, se les pide que justifiquen porqué eligen la familia de funciones $y = ax^2 + bx + c$ en la pregunta anterior, por lo que explican que "el movimiento es una parábola convexa y, por tanto, será una ecuación de segundo grado", relacionando el fenómeno, la gráfica y la expresión algebraica de la función usando sus conocimientos previos sobre las familias de funciones.

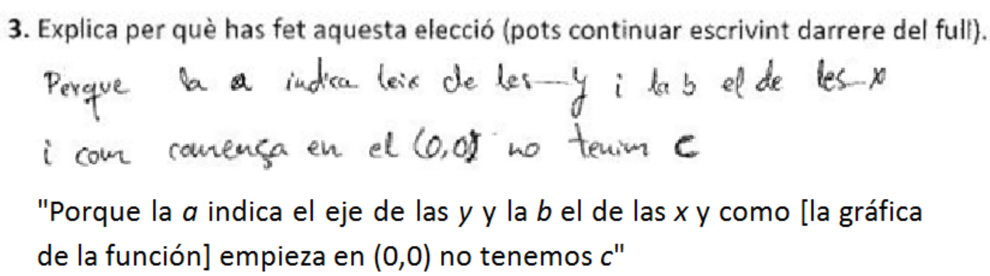

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

Per que aquest moviment pertany a una parabola convexa i per tant la seua funció és una equació de segon grau.

"Porque este movimiento pertenece a una parábola convexa y por tanto su función es una ecuación de segundo grado"

Figura 4: Respuesta alumnos a pregunta de la ficha previa donde explican porqué han elegido la función $y = ax^2 + bx + c$ como la que mejor describe el fenómeno estudiado.

Tambien podemos ver reflejado en la respuesta de la Figura 5 que los estudiantes recurren a sus conocimientos previos a la realización del experimento para responder y justificar sus respuestas. En particular, utilizan sus conocimientos sobre el significado de los parámetros de un determinado tipo de familia de funciones para justificar por qué eligen $y = ax^2 + bx$ y no $y = ax^2 + bx + c$ como aquella que mejor modeliza el fenómeno estudiado. Concretamente, explican que eligen dicha familia de funciones ya que, en su caso, el parámetro c vale cero porque la gráfica de la función que describe el fenómeno pasa por el origen de coordenadas. Sin embargo, al mismo tiempo que interpretan c, también tratan de dotar de significado los parámetros a y b, asegurando que representan el eje de las y y de las x respectivamente, cosa que, como comentan posteriormente en su respectiva entrevista, es resultado de una reflexión poco profunda.


3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

Perque la a indica l'eix de les y i la b el de les x i com comença en el (0,0) no tenim c

"Porque la *a* indica el eje de las *y* y la *b* el de las *x* y como [la gráfica de la función] empieza en (0,0) no tenemos *c*"

Figura 5: Respuesta alumnos a pregunta de la ficha previa donde explican porqué han elegido la función $y = ax^2 + bx$ como la que mejor describe el fenómeno estudiado.

Por último, vemos que otro elemento que es clave en las decisiones que toman los estudiantes es el análisis cualitativo del fenómeno que realizan en la ficha previa. En particular, es clave a la hora de elegir la función que modeliza el fenómeno. Esto se puede apreciar en el fragmento de entrevista que aparece en la Figura 6, donde pedimos a los alumnos que expliquen por qué eligen la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, a lo que responden diciendo que al ser la gráfica de la función una parábola, sabían que habría una x elevada al cuadrado, basándose en el análisis cualitativo del fenómeno para responder.

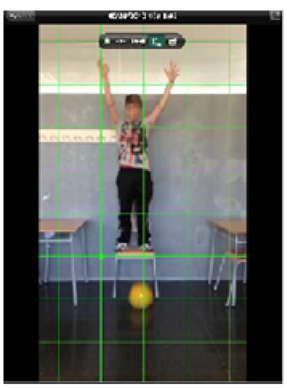
Investig. En la pregunta 2, ¿por qué escogisteis la función del apartado c)? **[$f(x) = ax^2 + bx + c$]**
Alumno Al final encontramos que esa era la más... la más coherente.
Investig. ¿Y en qué os basasteis para responder?
Alumno. Pues... como el dibujo era una parábola... sabíamos que x llevaba un cuadrado.

Figura 6: Fragmento de la entrevista realizada a una de las parejas.

4.2 Las concepciones del concepto de altura

Después de analizar las respuestas de los alumnos, pudimos observar una fuerte tendencia a considerar que la altura por encima del nivel del suelo es positiva y cero exactamente en el suelo, cosa que probablemente sea consecuencia de que habitualmente se toma el suelo como referencia pero que no tiene por qué ser así ya que en nuestro caso depende de dónde hayan fijado los alumnos el eje de las x en el programa Video Physics®.

En particular, encontramos que en la primera parte del experimento, cuando se les da plena libertad a los alumnos para tomar una referencia, la mayoría elige el suelo. Esto se puede observar en la ficha previa cuando les pedimos que hagan un esbozo de la función que piensan que representará el fenómeno ya que responden considerando el eje de las x como el suelo. Además, también se puede observar durante la realización del experimento ya que la mayoría de ellos fijan el eje de abscisas en Video Physics® justo en el punto en que la pelota rebota, es decir, en el suelo.



7. a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra?
Explica què has fet per a obtindre el resultat

$y=0\,m \rightarrow 0 = -12'564x^2 + 37'557x - 24'828$

$$x = \frac{-37'557 \pm \sqrt{37'557^2 - 4\cdot(-12'564)\cdot(-24'828)}}{-12'564\cdot 2} = \begin{cases} x_1 = 0'986897485 \\ x_2 = 2'00235753 \end{cases}$$

Figura 7: Captura de imagen del experimento y respuesta alumnos a pregunta de la ficha posterior en la que se les pide que calculen los valores del tiempo para los que la pelota toca el suelo

Sin embargo, en la segunda parte del experimento, es decir, en la parte correspondiente a la realización de la segunda ficha, cuando la referencia ya está tomada y depende de donde hayan fijado los alumnos el eje de abscisas en Video Physics®, los alumnos continúan considerando el suelo como referencia, incluso en el caso en que no lo es. Esto se puede observar en la Figura 7, donde vemos que a pesar de que los alumnos fijan el eje de coordenadas en la base de la silla, a la hora de calcular en qué momento la pelota golpea el suelo lo hacen igualando la altura a cero, esto es, considerando el suelo como referencia y no la base de la silla.

Además, no conciben que la altura pueda tomar valores negativos ya que, después de calcular en el ejercicio 5 (Figura 8) las imágenes de algunos puntos que están fuera del dominio, que en

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

este caso es el intervalo [1,2], en el ejercicio 6 explican que hay datos que no tienen sentido, no porque estén fuera del dominio, sino porque la altura no puede tomar valores negativos ya que la pelota no atraviesa el suelo, por lo que consideran el suelo como referencia.

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0{,}76$? $f(0{,}76) =$ -3'541646

b) I quan $x = 1{,}1$? $f(1{,}1) =$ 1'28226

c) I quan $x = 0{,}11$? $f(0{,}11) =$ -20'848754

d) I quan $x = 100$? $f(100) =$ -121909'328

6. a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full) - No, porque l'altura en aquest cas no pot ser negativa ja que la pelota no atravesa el terra, sino que rebota, i per tant la y no deuria ser negativa.

"No, porque la altura en este caso no puede ser negativa ya que la pelota no atraviesa el suelo, sino que rebota, y por tanto la *y* no debería de ser negativa"

Figura 8: Respuesta alumnos a preguntas 5 y 6 de la ficha posterior al experimento.

4.3 El tiempo como tiempo absoluto

Por último, también pudimos observar en los alumnos una concepción absoluta del tiempo ya que estos consideran que el tiempo vale cero justo en el momento en que la pelota toca el suelo por primera vez, obviando que este se presenta englobado en un contexto más general.

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.

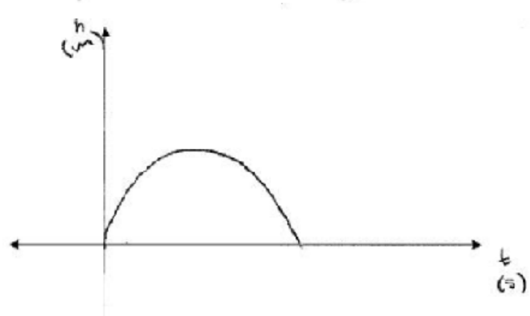


Figura 9: Respuesta alumnos a pregunta de la ficha previa en la que se vé que consideran el tiempo como absoluto.

Es decir, aunque en el enunciado se dice que el fenómeno que tienen que estudiar es "el salto de una pelota de básquet, dejada caer desde una cierta altura" y se especifica que tienen que centrarse solo en el primer salto, la mayoría de ellos lo obvia y dibuja la gráfica de forma que pase por el $(0, 0)$, és decir, como si el tiempo empezara a contar justo en el momento en que la pelota toca el suelo y no cuando se deja caer (ver Figura 9).

Esto también se puede observar por el hecho de que cuando en el ejercicio 2 les pedimos que elijan la familia de funciones que mejor ajusta al fenómeno estudiado, estos eligen la cuadrática que pasa por el origen de coordenadas ($y = ax^2 + bx$) y no la más general ($y = ax^2 + bx + c$), a pesar de que ambas ajustarian a la gráfica.

5 Conclusiones

En definitiva, hemos podido observar que, tal como se ha observado en estudios previos (Puig y Monzó, 2013), el análisis cualitativo del fenómeno y el conocimiento de las familias de funciones y el significado de los parámetros son elementos cruciales en la gestión y el control del proceso de modelización. En particular, son claves a la hora de tomar decisiones sobre la función que se usa como modelo y a la de controlar su posterior adecuación a lo largo de todo el proceso de modelización.

Después de explorar el material en el aula, entrevistar a algunos de los participantes en el experimento y de realizar un análisis exhaustivo de la información recogida, pudimos encontrar algunos resultados interesantes, entre los que destacan el hecho de que la mayoría de los alumnos poseen unas concepciones previas de los conceptos de altura y tiempo muy arraigadas, probablemente por el tipo de enseñanza recibida, aspectos que habrá que considerar en la posterior reelaboración del material con la finalidad de proporcionar una herramienta útil para trabajar la modelización en el aula y que ayude a los alumnos a superar dichos obstáculos.

Además, estos resultados también se tendrán en cuenta para futuros estudios relacionados con el tema que ya estamos empezando a llevar a cabo, en los que pretendemos diseñar un modelo de enseñanza en el que se contemple el estudio de varias situaciones de modelización que nos permitirán trabajar otro tipo de funciones elementales (como la cúbica, la racional, la exponencial, etc.) con la ayuda de sensores y en cuya elaboración se incluyan los elementos que hemos visto que permiten guiar a los alumnos para la realización de una buena gestión del proceso de modelización.

Referencias

Antonius, S., Haines, C., Jensen, T. H., Niss, M., Burkhardt, H. (2007).
Classroom activities and the teacher.
In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss (Eds.), (Modelling and applications in mathematics education ed., p. 295–308). New York: Springer.

Blum, W., Niss, M. (1991).
Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction.
Educational Studies in Mathematics, 22 (1), 37–68.

Burkhardt, H., Pollack, H. (2006).
Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future.
ZDM, 38 (2), 178–195.

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. (2008).
Educational algebra. a theoretical and empirical approach.
New York: Springer.

Infante, F., Puig, L. (2013).
Modelos emergentes en un primer curso de economía y administración.
MSEL, 6(2), 235–248.

Janvier, C. (1978).
The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. studies and teaching experiments.
University of Nottingham. (Tesis Doctoral)

Juan, M. A. (2012).
Modelo plausible vs. modelo esperable: un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización.
Universidad de Valencia. (Trabajo de Fin de Máster)

Monzó, O., Puig, L. (2007).
Modelización con la classpad 300, 1a parte.
Veintidos Séptimos, 24 , 26–29.

Monzó, O., Puig, L. (2008).
Modelización con calculadoras gráficas.
Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas ed. Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Monzó, O., Puig, L. (2010).
Modelización con la classpad 300, 2a parte.
Veintidos Séptimos, 26 , 4–6.

Monzó, O., Puig, L. (2011).
Competencias algebraicas en el proceso de modelización.
In M. Contreras, O. Monzó, L. Puig (Eds.), Actas de las IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana ed., Vol. 1, p. 167–185. Valencia: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana.

Monzó, O., Puig, L. (2011).
Competencias algebraicas en el proceso de modelización.
In M. Contreras, O. Monzó, L. Puig (Eds.), Actas de las IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana ed., Vol. 1, p. 167–185. Valencia: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana.

Puig, L. (1996).
Elementos de resolución de problemas.
Granada: Comares, col. Mathema.

Puig, L. (en prensa).
Modelización con datos reales.
Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Puig, L., Monzó, O. (2013).
Fenómenos y ajustes. un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos deparámetroy familia de funciones.
In T. Rojano (Ed.), . México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985).
Mathematical problem solving.
Orlando, FL: Academic Press.

Sol, M. (2007).
Les competencias en els treballs de projectes matemáticas per una educació equitativa a l'ESO.
Butlletí La Recerca, 28–35.

Swan, M. (1985).
The language of function and graphs.
Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.