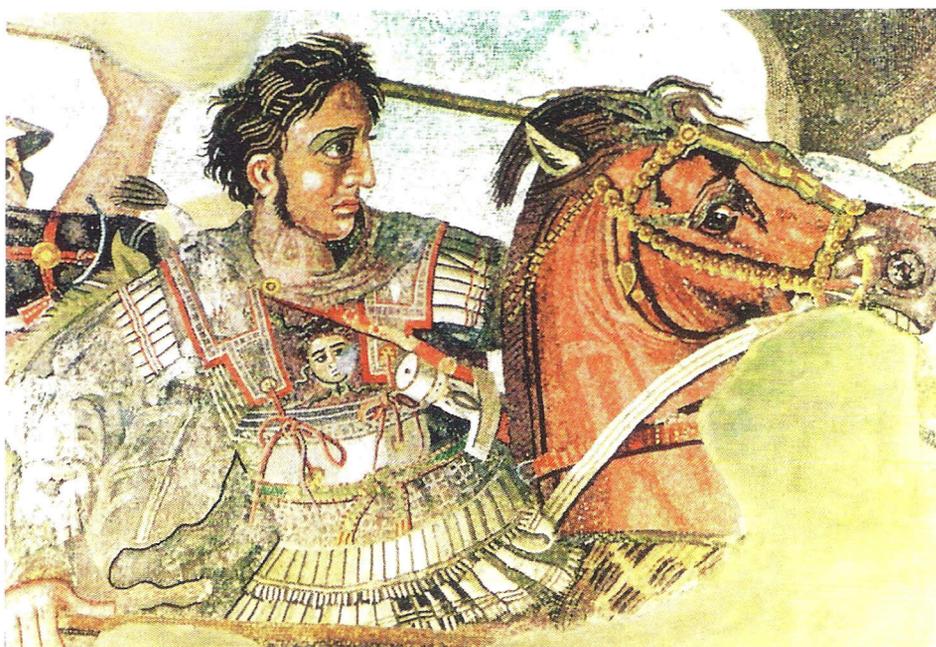


DISEÑO DE TESELAS CON CURVAS DE FORMA LIBRE

M. Luisa Márquez García y Ángel H. Delgado Olmos



Mosaicos y teselas a lo largo de la historia

El mosaico es uno de los elementos decorativos más antiguos que se conocen. Está compuesto por una capa o *nucleus* sobre la que se colocan las teselas. Estas suelen ser cúbicas, realizadas en piedra o pasta vítrea y en algunos casos con un recubrimiento de metal precioso.

Se conocen mosaicos desde el siglo VIII a.c. situados en Gurnia (creta) y en la región de Anatolia (Turquía) que son hechos con cantos redados. En el siglo IV a. c. en Macedonia se realizan

pavimentos coloreados y con sombras para dar volumen a las figuras. Posteriormente en el siglo II a.c. ya se encuentran mosaicos en Pérgamo con teselas de piedras cortadas con una concepción similar a la actual.

Existen datos de artistas mosaicistas de esta época como es el caso de Hefestión autor de los mosaicos del Palacio Real del rey Eumenes donde combinaba fragmentos de vidrio y piedra natural. También es conocido Sosos de Pérgamo del que se conserva una copia de la época romana de uno de sus trabajos.

En Italia se han encontrado muchos mosaicos helenísticos como el famoso

mosaico de Alejandro Magno que decoraba la Casa del Fauno una de las más aristocráticas de Pompeya. El mosaico se cree que es copia de la pintura llamada La Batalla de Alejandro con Darío de Philoxenos de Eretria. Está documentada en los escritos de Plinio el Viejo y data del 330 a.c. (fig. 1).

Cuando los romanos conquistan las regiones de Grecia y Asia Menor a lo largo del siglo II a.c. adoptan el arte del mosaico comenzando un género artístico industrial que cobraría gran auge en la sociedad romana.

Para los romanos, los mosaicos eran un elemento decorativo para los espacios arquitectónicos que cobró tanta importancia que en el siglo III el emperador Diocleciano promulgó un decreto en el que se establecía el precio que los artistas fijarían para sus obras.

Hacia el año 330 el emperador Constantino trasladó la capital del imperio a Bizancio y favorece la llegada a esta ciudad de los mosaicistas. La obra de estos se influye de la tradición oriental y hay una introducción del oro en sus realizaciones.

Con la perfección de las técnicas constructivas del mosaico los romanos establecen por primera vez su uso en pavimentaciones de carácter suntuario.

Dependiendo del tamaño de las teselas, de los dibujos y del lugar al que se destinaba el mosaico se estableció una nomenclatura. Así el *opus vermiculatum* se hacía con piedras muy pequeñas y se usaba para dibujos que requerían gran precisión. El *opus musivum* se utilizaba en muros. El *opus sectile* usaba piedras de diferentes tamaños y colores con un trabajo parecido a la taracea y su mejor ejemplo es el Palacio Flavio.



2. Trencadís. Banco del Parque Güell.
Palau de la Música. Mosaico.

El mosaico romano es considerado como una pintura hecha de piedra y de este género se nutre en cuanto a su temática.

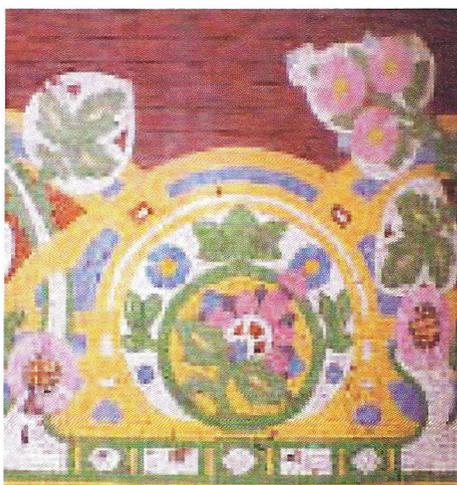
A medida que se va implantando el cristianismo los mosaicos se incorporan a las paredes, bóvedas y cúpulas de las iglesias. También esta decoración vuelve a sus orígenes orientales y numerosas mezquitas La Meca, Medina y Damasco presentan unas maravillosas decoraciones de mosaicos.

Durante el Renacimiento nuevamente en Italia en el siglo XV y en la Florencia de los Médicis resurge con fuerza el mosaico siendo un impresionante ejemplo *La Anunciación* de Ghirlandaio. Más tarde se sitúa la decoración llevada a cabo en la Basílica de San Pedro de Roma que supuso la consolidación del renacer de esta técnica.

La tradición mosaicista cobra un nuevo impulso a finales del siglo XIX con el modernismo. No en vano el decorativismo, tan característico de este periodo, fue una ayuda importante para el desarrollo de todas las artes decorativas y en particular del mosaico.

En el mosaico de la época modernista reencuentramos dibujos clásicos romanos así como experimentos de dibujos y colores de nueva creación dentro de los gustos estéticos propios del modernismo que aportó tanto a la renovación artística de las decoraciones externas (Casa Batllo, Palau de la Música,) y sobre todo interiores (Instituto Pere Mata, Hospital de Sant Pau, Palau Güell) (fig. 2).

De esta época modernista es la variedad de mosaico conocida como el *trencadís* impulsada por Gaudí y su discípulo Jujol. Es de teselas irregula-



res cerámicas y otros materiales y se usa esta técnica para la decoración de superficies verticales exteriores logrando por su policromía efectos decorativos de gran variedad y riqueza.

Dentro de las realizaciones conseguidas con la técnica del teselado es ineludible la figura de M. C. Escher (1898-1972) dibujante y artista holandés que cuaja su particular poética con figuras de animales que se entrelazan caprichosamente para formar bellos, fantásticos y hasta fascinantes conjuntos. Escher crea bellos patrones geométricos en línea con otros artistas que habían apostado por este tipo de

arte y su aplicación al diseño industrial (William Morris o los Delaunay).

La Alhambra impacta profundamente a Escher y copia muchos de sus motivos para incorporarlos a su propio universo. El influjo hispano árabe se percibe particularmente en la segunda etapa de su obra geométrica, donde Escher es un maestro consumado en la técnica de composición a modo de teselas de sus ensamblajes de piezas en sorprendente simetría o asimetría, (fig. 3).

Relleno de una superficie mediante teselas *autoencajables*.

El relleno de una superficie plana puede hacerse de infinitas formas usando una serie de superficies que, al adosarse entre sí, no dejen huecos ni se solapen. A su vez estas piezas pueden ser polígonos de lados rectos o curvilíneos. El propósito de este trabajo de investigación es desarrollar una metodología para generar polígonos curvilíneos de manera que, al encajar entre sí, rellenen una superficie plana. Este relleno tendrá que hacerse con un solo tipo de polígono curvilíneo y además el modelo tiene que ser susceptible de manipularse, mediante unos parámetros de molde, para dar lugar a infinitas soluciones. Evidentemente, todas ellas tienen que cumplir las condiciones previas, es decir, cada una de las soluciones particulares tiene que encajar entre sí perfectamente hasta rellenar completamente el plano sin huecos ni solapes.

La condición de que las piezas encajen entre sí hace necesario que el lado curvilíneo, por el que se adosan dos polígonos, tiene que ser una curva igual

- 3. Metamorphosis II. Escher.
- 4. Curva que pasa por cinco puntos.

para ambos. Con estas condiciones, diseñar polígonos de lados curvilíneos, usando las curvas clásicas (circunferencia, elipse, catenaria,...) se hace muy restrictivo por lo que se hace necesario usar *curvas de forma libre*.

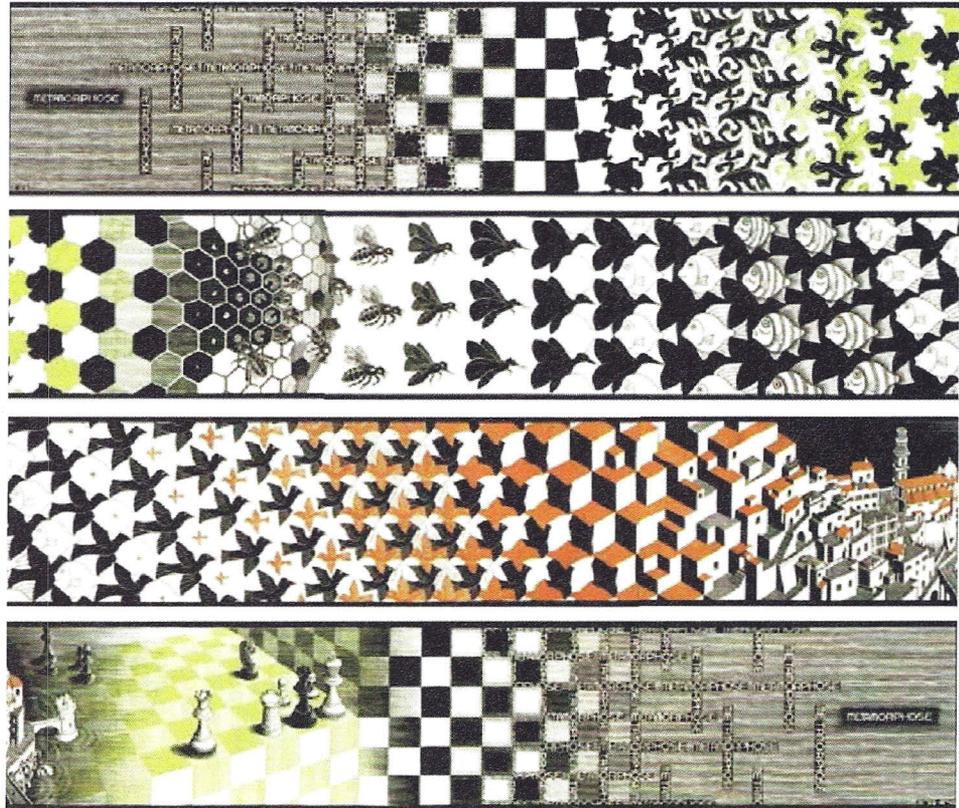
Con este propósito los autores crean un algoritmo que genera curvas controladas por una serie de puntos por los que tendrán que pasar éstas. La forma que va a tener la curva va a depender de las posiciones relativas entre sí que tengan estos puntos de control. De acuerdo con ello, actuando sobre la ubicación de estos puntos de control, puede imponerse la forma que se quiere que tenga la curva y por tanto conseguir que el lado por el que se adosan dos polígonos contiguos sea igual para ambos. El proceso de creación del algoritmo generador de estas curvas se expone en los apartados siguientes correspondientes y se emplea para hacer los diseños recogidos en los ejemplos aportados.

Algoritmo de generación de curvas controladas por cinco puntos.

Se pretende generar una curva (fig. 4) que tiene que pasar por cinco puntos dados (puntos de control) P_0, P_1, P_2, P_3 y P_4 .

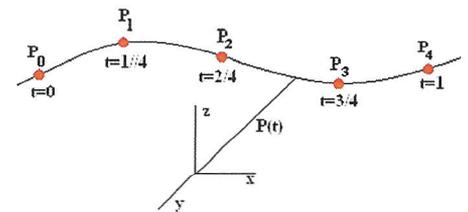
La ecuación vectorial de esta curva sería de la forma:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{i=4} f_i(t)P_i \quad (1)$$



3

donde P_i son los vectores de posición de los puntos de control y son funciones polinomiales que cumplen las condiciones necesarias para que la curva pase por los puntos de control como se le exigía. Desglosando la ecuación vectorial (1) en sus componentes se llegará a las ecuaciones paramétricas de la curva.

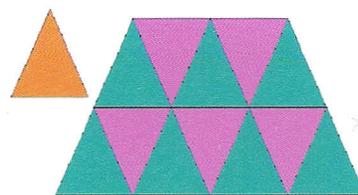
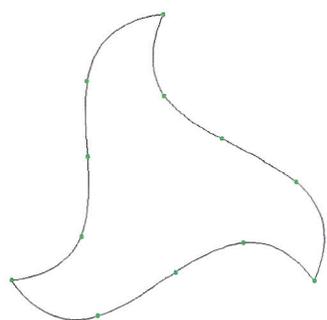


4. Curva que pasa por cinco puntos.

$$\begin{aligned} x &= f_0(t) x_0 + f_1(t) x_1 + f_2(t) x_2 + f_3(t) x_3 + f_4(t) x_4 \\ y &= f_0(t) y_0 + f_1(t) y_1 + f_2(t) y_2 + f_3(t) y_3 + f_4(t) y_4 \\ z &= f_0(t) z_0 + f_1(t) z_1 + f_2(t) z_2 + f_3(t) z_3 + f_4(t) z_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 256/24t^4 - 2560/96t^3 + 8960/384t^2 - 12800/1536t + 1 \\ f_1(t) &= -128/3t^4 + 96t^3 - 208/3t^2 + 16t \\ f_2(t) &= 256/4t^4 - 2048/16t^3 + 4864/64t^2 - 3072/256t + 1 \\ f_3(t) &= -256/6t^4 + 1792/24t^3 - 3584/96t^2 + 2048/384t + 1 \\ f_4(t) &= 256/24t^4 - 1536/96t^3 + 2816/384t^2 - 1536/1536t + 1 \end{aligned}$$

y teniendo los vectores P_i las componentes cartesianas $P_i = (x_i, y_i, z_i)$



Diseño de triángulos curvilíneos

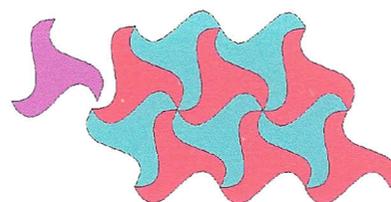
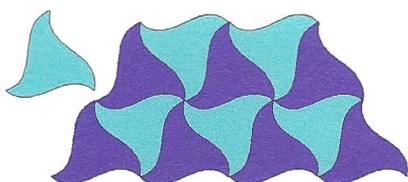
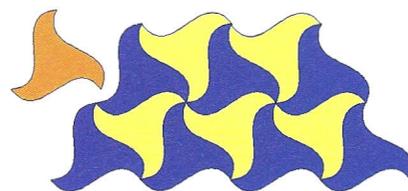
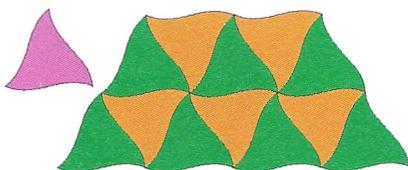
Pretendemos diseñar una tesela cuya forma sea un triángulo equilátero curvilíneo (figs. 5) de manera que sea susceptible de rellenar, con ella, un área plana sin que se produzcan huecos ni solapes. El proceso se lleva a cabo usando como lados del triángulo las curvas diseñadas en el apartado anterior a partir de cinco puntos de control situados convenientemente.

En primer lugar se tendría el caso más simple en el que la tesela es un triángulo equilátero rectilíneo, tal como aparece en las figuras 5. La tesela se ha diseñado haciendo que los cinco puntos de control estén alineados. Variando la posición relativa, que tienen entre sí los puntos de control (ya no se ha exigido que estén alineados), se obtienen distintos tipos de teselas como muestran las figuras 6.

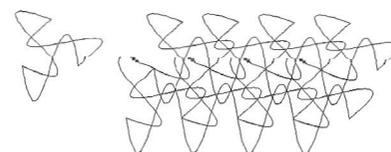
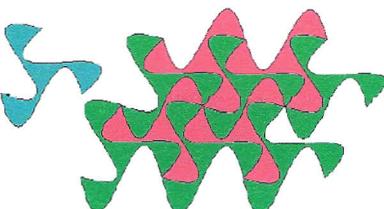
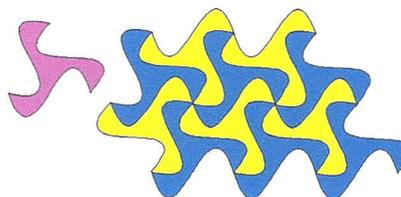
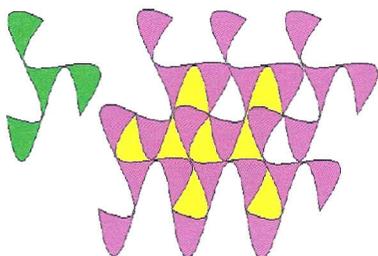
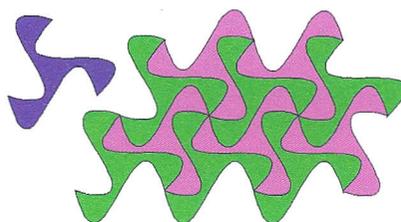
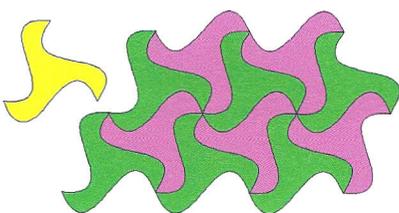
La gama de teselas que se pueden hacer por esta metodología es infinita tal como pueden ser las posiciones relativas de los puntos de control. La similitud entre ambas obedece a que la distribución de los puntos que controlan ambos diseños es casi igual para ambas, como resultado del proceso obtenemos distintos diseños tales que a medida que aumenta la curvatura de los lados se obtienen diseños de teselas cada vez más esbeltas, como podemos observar en las figuras 7.

Los diseños anteriores, resueltos con curvas de forma libre, se pueden considerar como una generalización, de más hondo calado, de algunas teselas resueltas con curvas clásicas como es el caso de la pieza existente en el Museo Nacional de Arte Hispano Musulmán catalogada con el nº 2232 y

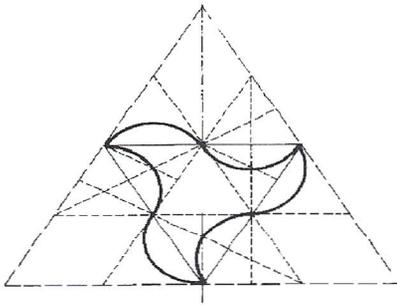
5



6



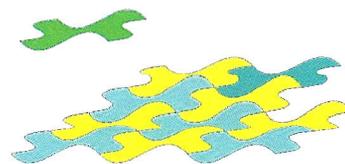
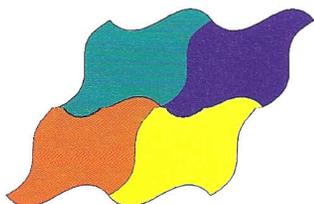
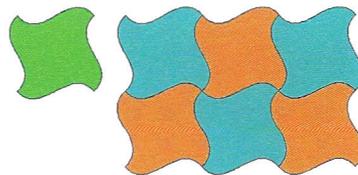
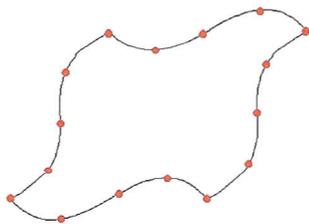
7



8



9



10

que se conoce como la polipajarita (figs. 8).

Las figuras 8 muestran el diseño geométrico de la tesela denominada la polipajarita usando como curvas arcos de circunferencia, como ejemplo de la misma podemos observar el relleno del plano con este tipo de tesela

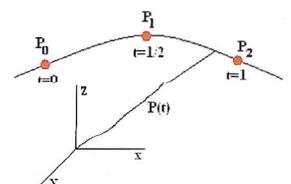
En las figuras 9 podemos observar el empleo de la polipajarita, decorada con diversos colores y dibujos, para relleno del plano en el zócalo del Patio de los Arrayanes de la Alhambra de Granada y una pieza del Museo de Arte Hispano Musulmán con el número 4610 y que pertenece al Arte Morisco de los siglos XV-XVI.

Diseño de romboides curvilíneos

Análogamente al proceso desarrollado en el caso de triángulos curvilíneos se pueden diseñar teselas cuya forma sea la de un romboide curvilíneo cuyos lados son curvas controladas por cinco puntos (figs. 10).

Algoritmo de generación de curvas controladas por tres puntos.

Se pretende generar una curva (fig. 11) que tiene que pasar por tres puntos dados (puntos de control) P_0 , P_1 y P_2 .



11



La ecuación vectorial de esta curva sería de la forma:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{i=3} f_i(t)P_i \quad (2)$$

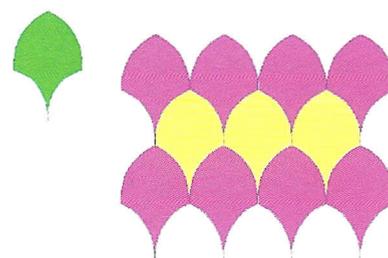
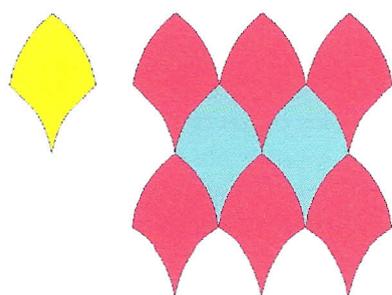
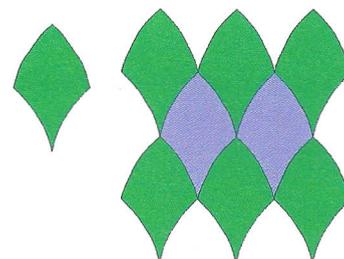
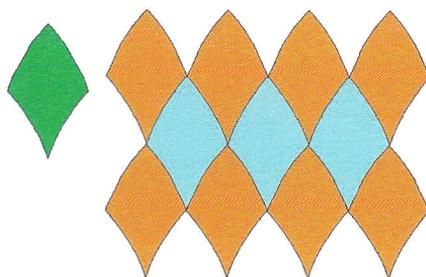
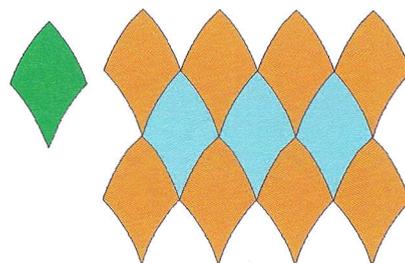
donde P_i son los vectores de posición de los puntos de control y $f_i(t)$ son funciones polinomiales que cumplen las condiciones necesarias para que la curva pase por los puntos de control como se le exigía.

Desglosando la ecuación vectorial (2) en sus componentes se llegará a las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$\begin{aligned} x &= f_0(t) x_0 + f_1(t) x_1 + f_2(t) x_2 \\ y &= f_0(t) y_0 + f_1(t) y_1 + f_2(t) y_2 \\ z &= f_0(t) z_0 + f_1(t) z_1 + f_2(t) z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 2t^2 - 3t + 1 \\ f_1(t) &= -4t^2 + 4t \\ f_2(t) &= 2t^2 - t \end{aligned}$$

y teniendo los vectores P_i las componentes cartesianas: $P_i = (x_i, y_i, z_i)$



Diseño de rombos curvilíneos

Se pretende diseñar teselas de forma de rombo curvilíneo. Los rombos están formados por lados que son curvas controladas por tres puntos (figs. 13).

La máxima esbeltez en el diseño de esta tipología de teselas, sin que se produzca cruce entre las curvas que forman los lados del rombo, es la que se ha conseguido en las teselas que aparece en la figuras 12.

Un ejemplo de estas teselas, generadas con curvas de forma libre, se tiene en la foto (figura 13) que corres-

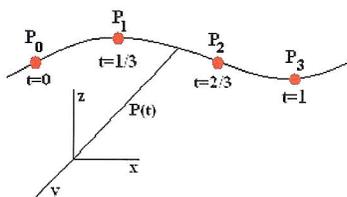


13

ponde a la decoración de los muros de los baños del Palacio de Comares de la Alhambra.

Algoritmo de generación de curvas controladas por cuatro puntos

Se pretende generar una curva (fig. 14) que tiene que pasar por cuatro puntos dados (puntos de control) P_0 , P_1 , P_2 , y P_3 .



14. Curva que pasa por cuatro puntos dados.

La ecuación vectorial de esta curva sería de la forma:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{i=3} f_i(t)P_i \quad (3)$$

donde P_i son los vectores de posición de los puntos de control y $f_i(t)$ son funciones polinomiales que cumplen

las condiciones necesarias para que la curva pase por los puntos de control como se le exigía. Desglosando la ecuación vectorial (3) en sus componentes se llegará a las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$\begin{aligned} x &= f_0(t) x_0 + f_1(t) x_1 + f_2(t) x_2 + f_3(t) x_3 \\ y &= f_0(t) y_0 + f_1(t) y_1 + f_2(t) y_2 + f_3(t) y_3 \\ z &= f_0(t) z_0 + f_1(t) z_1 + f_2(t) z_2 + f_3(t) z_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(t) &= -9/2t^3 + 9t^2 - 11/2t + 1 \\ f_1(t) &= 27/2t^3 - 45/2t^2 + 9t \\ f_2(t) &= -27/2t^3 + 18t^2 - 9/2t \\ f_3(t) &= 9/2t^3 - 9/2t^2 + t \end{aligned}$$

y teniendo los vectores P_i las componentes cartesianas: $P_i = (x_i, y_i, z_i)$

Diseño de teselas cuyos lados son curvas controladas por cuatro puntos

Las teselas de las figuras 15 se han diseñado usando para los lados del cuadrilátero curvilíneo curvas controladas por cuatro puntos convenientemente distribuidos para lograr que el diseño cumpla, su función de rellenar el plano sin huecos ni solapes.

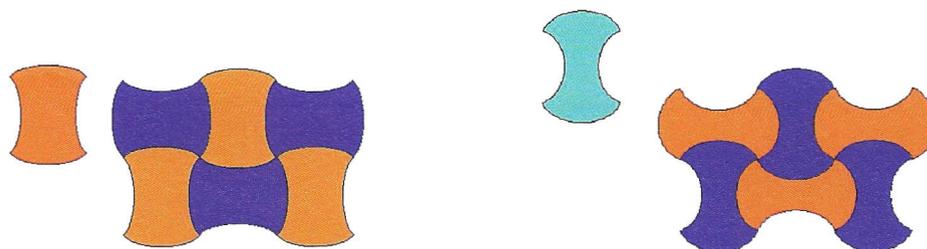
Se puede lograr un diseño análogo, pero más esbelto, variando la posición relativa entre los puntos de control hasta conseguir la tesela. Incidiendo en esta búsqueda de mayor esbeltez se tienen los diseños que aparecen en las figuras 16 donde casi se llega al límite de adelgazamiento de la tesela compatible con que los lados de ésta no se entrecrucen.

Las teselas de lados curvilíneos, presentadas en este apartado, se pueden también considerar como una generalización de un tipo de tesela clásica em-

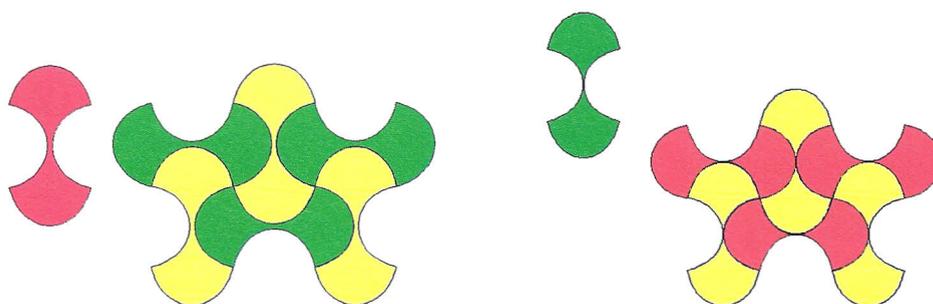
pleada en la decoración de la Alhambra, como ejemplo tenemos el empleo de la tesela anterior en la decoración de las paredes del Palacio de Comares de la Alhambra de Granada, esta es de tipo poligonal tal como aparece en las figuras 17 y se la conoce como el polihueso.

Conclusiones

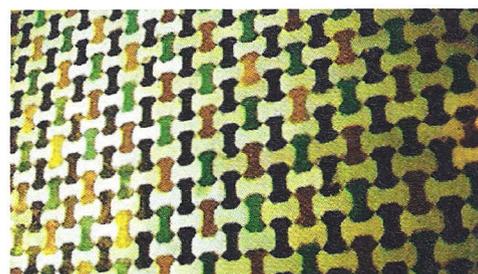
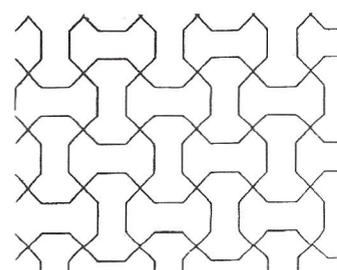
- El diseño de teselas para rellenar áreas planas con una única forma de tesela tiene un gran interés dentro de las artes decorativas, en la arquitectura y en la ingeniería.
- El prefabricado, dentro del mundo, de la construcción presenta cada vez mayor pujanza por su calidad y su fácil empleo con el ahorro de costes de mano de obra que ello supone. Consecuentemente la investigación sobre el diseño de teselas para su uso en el relleno de suelos y paramentos verticales tiene un gran interés y demanda.
- El algoritmo creado para la generación de curvas, a partir de las cuales se formarán los polígonos curvilíneos que constituyen las teselas, se muestra plenamente eficaz para desarrollar la tipología de estas curvas. Los elementos con los que trabaja (puntos de control) permiten imponer fácilmente las condiciones que se quiere que cumplan dichas curvas. Las teselas formadas a partir de estas curvas cumplen exactamente la imposición de rellenar el plano sin dejar hueco ni solapes con un único tipo de tesela.
- La implementación mediante ordenador del algoritmo generado se hace fácilmente y además permite in-



15



16



17

roducir unos parámetros de molde que posibilitan, mediante su concreción numérica, obtener infinitas soluciones de una misma tipología formal.

- La metodología desarrollada posibilita una generalización formal de teselas concretas que se hicieron a partir de curvas conocidas, hasta modelos mas amplios mediante el uso de *curvas de forma libre*.
- Todos los tipos de teselas generados son construibles, de hecho hay empresas que construyen el modelo que se le presente.
- Por último señalar que el estudio de nuevos algoritmos de generación de formas así como la ayuda que supone el tratamiento de éstos en ordenador abre unas posibilidades inmensas al diseño de formas nuevas. El uso de esas herramientas posibilita y permite la investigación aportando herramientas al servicio de la creatividad de los diseñadores.

Bibliografía

- ALSINA, C. et Alter,.; *Simetría Dinámica*. Síntesis Editorial, Madrid 1989.
- BIRGEN, i.; *Hyperbolic Geometry*. University Press Editorial, Cambridge 1992.
- DELGADO OLMOS, a.; *Modelado de superficies polinomiales y su aplicación a la técnica*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada 1995.
- DELGADO OLMOS, a. & COBOS GUTIÉRREZ, c.; *Modelado de superficies polinomiales que pasan por una red de puntos fijo*, Jaén (España) VIII Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén .1996. ISBN: 84-88942-71-0.
- DELGADO OLMOS, a. & MÁRQUEZ GARCÍA, I.; *El modelado en escultura, arquitectura e ingeniería. Posibilidades que ofrecen los nuevos algoritmos desarrollados con ordenador*, Salamanca (España) Congreso Internacional: La ciencia ante el público. Cultura humanista y desarrollo científico tecnológico, Instituto Universitario de Estudios de la Ciencia y la Tecnología .2002. ISBN: 84-688-2676-6.
- DELGADO OLMOS, a.; *Elementos autoencajables. Diseño y uso*, Málaga (España) X Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica, Departamento de Expresión Gráfica, Diseño y Proyecto .1998. ISBN: 84-89791-04-X.
- DELGADO OLMOS, a. & MÁRQUEZ GARCÍA, I.; *Lengthening, expansion and torsion : three geometric operations for aesthetics creation*, Granada (España) Meeting Alhambra. The International Society of the Arts, Mathematics and Architecture. 2002.
- DEGEORGE, g.-; *Tiles and tilework of Europe / Alun Graves*. London: V&A Publications, 2002.
- DEGEORGE, g.-; *The art of the Islamic tile / Gerard Degeorge, Yves Porter*. Paris : Flammarion, c2002.
- BOHM, w.; *Geometrics Concepts for Geometric Design* A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts.1994.
- CORDERO VALLE, j.m.& CORTÉS PAREJO, j.; *Curvas y Superficies para Modelado Geométrico*. RA-MA Editorial, Madrid 2002.
- FABER, richard I.; *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry Geométrico*. board Editorial, New York 1983.
- FARIN, g.; *curves and surfaces for computer aided geometric design*. Academic Press, INC.1988.
- WILHELM; magnus; *Noneuclidean Tesslations and Their Groups*. Academic Press Editorial, New York 1974.