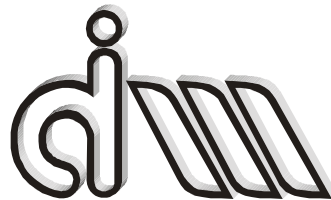


**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA**  
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales  
Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



TESIS DE MASTER

---

DESARROLLO DE UN PROGRAMA DE  
REFINAMIENTO  $H$ -ADAPTABLE PARA EL  
ANÁLISIS MEDIANTE GFEM DE  
PROBLEMAS ELÁSTICOS CON MALLADOS  
INDEPENDIENTES DE LA GEOMETRÍA

---

*Presentada por:* D. Enrique Nadal Soriano

*Dirigida por:* Dr. D. Juan José Ródenas García

Valencia, diciembre de 2009



## Resumen

*En la presente Tesis de Master, se ha desarrollado un método h-adaptativo para la resolución de problemas elásticos lineales bi-dimensionales dentro de un entorno de mallas independientes del dominio, concretamente en un entorno GFEM.*

*En primer lugar, para facilitar la implementación y aumentar tanto la robustez como el rendimiento del procedimiento de refinamiento, dado que las mallas son independientes de la geometría, se ha optado por crear una batería de mallas cartesianas, almacenada en una estructura jerárquica de elementos. El proceso de refinamiento se basa en la subdivisión de elementos y en el uso de restricciones multi-punto (MPC's) para satisfacer la continuidad  $C^0$ .*

*En segundo lugar, el guiado del proceso de refinamiento se ha basado en el estimador ZZ. Para la reconstrucción del campo de tensiones  $\sigma^*$  se ha utilizado la técnica SPR-C, adaptada para el entorno GFEM. Dicha técnica es una mejora sustancial de la técnica SPR, a través de la cual se puede forzar, en cada patch, el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Se obtiene, por tanto, un campo reconstruido  $\sigma^*$  estáticamente admisible en cada patch. En la técnica de ajuste de  $\sigma^*$  a los valores de tensión  $\sigma^h$  en puntos de Gauss del patch se ha utilizado la minimización de la norma  $L_2$  de  $\sigma^* - \sigma^h$  para tener en cuenta las diferencias de densidad de puntos de Gauss en el patch. También se ha usado un proceso de refinamiento geométrico para adaptar rápidamente la malla de aproximación a la geometría e incrementar la precisión del campo reconstruido de manera rápida en las primeras iteraciones.*

*Como el campo de tensiones reconstruido  $\sigma^*$  en cada elemento viene calculado mediante la contribución de varios patches, se ha usado un método de partición de la unidad (PUM), conocido como conjoint polynomials enhancement. Este post procesado modifica ligeramente el equilibrio del campo reconstruido, obteniéndose un campo de tensiones global casi-estáticamente admisible.*

*Los resultados muestran que la técnica de reconstrucción proporciona campos de tensiones de muy alta precisión y estimaciones de error muy precisas que guían adecuadamente el proceso h-adaptativo.*

**Palabras clave:** GFEM, XFEM, SPR, refinamiento h-adaptativo, recovery, estimación de error



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales

---





## Abstract

*In this Master Thesis has been developed an h-adaptive method to solve 2D elastic linear problems in the framework of the mesh less methods, specifically in the GFEM framework.*

*In the first place, in order to simplify the implementation, and increase the robustness and the performance of the refinement process, since the meshes are independent from the geometry, it has been chosen to create a cartesian mesh bank, it is sorted by using a hierarchical mesh structure. The refinement process is based on the element splitting and on the use of multi point constraints (MPC's) in order to satisfy the continuity  $C^0$ .*

*In the second place, the refinement process drive is based on the ZZ estimator. For the stress field recovery  $\sigma^*$  has been used the SPR-C technique, adapted to the GFEM framework. This technique is a great improvement of the SPR technique, through which you can force, at each patch, the satisfaction of the equilibrium and compatibility equations. It is obtained a statically admissible recovered field  $\sigma^*$  at each patch. In the adjustment technique of  $\sigma^*$  to values of stress  $\sigma^h$  at Gauss points of the patch. It is used the minimization in  $L_2$  norm of  $\sigma^* - \sigma^h$  in order to take into account the different density of Gauss point in the patch. It has also been used a geometrical refinement process in order to adapt quickly the approximation mesh to the geometry and increase the accuracy of the recovery field in a quickly way in the firsts iterations.*

*As the recovery field  $\sigma^*$ , at each element is given by the different contribution of some patches, it is used a partition of the unity method (PUM), known as conjoint polynomials enhancement. This postprocess slightly modifies the equilibrium in the recovery field, obtaining a nearly statically admissible recovered stress field*

*The results show that the recovery technique provides stress fields of a very high accuracy and error estimations very accurate which drive properly the h-adaptive process.*

**Key words:** GFEM, XFEM, SPR, h-adaptive refinement, recovery, error estimation



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales

---





## Resum

*En la present Tesis de Màster, s'ha desenvolupat un mètode h-adaptatiu per a la resolució de problemes elàstic lineals bi-dimensionals dins de un entorn de mals independents del domini, concretament n un entorn GFEM.*

*En primer lloc, per a facilitar la implementació y augmentar tant la robustesa com el rendiment del procediment de refinament, donat que les malles són independents de la geometria, s'ha optat per crear una bateria de malles cartesianes, ordenades segons una estructura jeràrquica de elements. El procés de refinament es basa en la subdivisió de elements y en el ús de restriccions multi-punt (MPC's) per a satisfer la continuïtat  $C^0$*

*En segon lloc, el guiat del procés de refinament està basat en el estimador ZZ. Per a la reconstrucció del camp de tensions  $\sigma^*$  s'ha utilitzat la tècnica SPR-C, adaptada per al entorn GFEM. Aquesta tècnica es una millora substancial de la tècnica SPR, a través de la que es pot forçar, a cada patch, en compliment de les equacions de equilibri i compatibilitat. S'obté, per tant, un camp reconstruït  $\sigma^*$  estàticament admissible a cada patch. En la tècnica d'ajust de  $\sigma^*$  a valors de tensió  $\sigma^h$  a punts de Gauss del patch s'ha utilitzat la minimització de la norma  $L_2$  de  $\sigma^* - \sigma^h$  per tindre en conter les diferències de densitat de punts de Gauss al patch. També, s'ha utilitzat un procés de refinament geomètric per adaptar ràpidament la malla d'aproximació a la geometria e incrementar la precisió del camp reconstruït de manera ràpida en les primeres iteracions.*

*Com el camp de tensions reconstruït  $\sigma^*$ , a cada element ve calculat mitjançant la contribució de alguns patches, s'ha usat un mètode de partició de la unitat (PUM) conegut com conjoint polynomials enhancement. Aquest post-processat, modifica lleugerament l'equilibri del campo reconstruït, obtenint-ne un camp de tensions quasi estàticament admissible.*

*Els resultats mostres que la tècnica de reconstrucció proporciona camps de tensions de molta alta precisió y estimacions del error molt precises que guien adequadament el procés h-adaptatiu.*

**Paraules clau:** GFEM, XFEM, SPR, refinament h-adaptatiu, recovery, estimació del error



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales

---





## Agradecimientos

En primer lugar debo agradecer el hecho de poder realizar esta Tesis de Master a mi director, Juanjo, que fue el que me sugirió tomar, hace ahora algo más de un año, un rumbo nuevo para mi futuro. Después de esto, también debo agradecer su comprensión y paciencia durante la realización de este trabajo ya que han sido numerosas las horas que me ha dedicado y siempre con entusiasmo e ilusión. Además de la confianza que ha depositado en mi, arriesgando casi sin conocerme. También es de agradecer la gran persona que eres, que además lo transmites y lo contagias a todos los que están al tu alrededor, lo comprensivo con los demás y el esfuerzo e interés con el que haces toda y cada una de las cosas en tu día a día. Juanjo, muchas gracias, simplemente por ser como eres.

Por otro lado, se merecen un especial agradecimiento todos los profesores y personal administrativo del área de ingeniería mecánica ya que conforman un grupo excelente dónde se crea un entorno más que agradable para trabajar, estudiar y disfrutar. Además ellos siempre ponen especial interés y atención para facilitar el duro proceso de aprendizaje de cada uno de los alumnos que pasan por aquí, y ese clima de esfuerzo mutuo se siente en el ambiente. Por todo esto y mucho más, muchas gracias.

Cómo no acordarse de los compañeros de la sala de becarios, Jose, Rafa, Guillem, Antoine, Rami, Mohamad, Octavio, Vicente, Paloma, Virginia... Ellos siempre trabajando sin cesar en la dura tarea de la investigación. Sin tener tiempo jamás para ir a tomar un café. También, por los momentos divertidos en las cenas tan formales y distinguidas que hemos realizado, dónde también han venido otros compañeros como Juanen, Eva, Santos, Justo,... que siempre han colaborado en crear un ambiente de formalidad y seriedad en dichos actos sociales. A todos ellos, muchas gracias.

También a Fede, que sin él seguro que sería complicado realizar nada en este departamento. Te agradezco todo lo que me has ayudado, siempre con ganas y con buena voluntad. También los consejos que en ocasiones me has dado. Gracias.





Tampoco me puedo olvidar de los compañeros del Máster, Carlos y Pascual, y del que también han formado parte Rami y Fede. Que siempre estaban ahí para pasar los momentos más difíciles en las asignaturas y para echar unas risas. Gracias.

También es muy importante para mí el apoyo de mis compañeros de piso, Iaió y Dany. A mis amigos de Valencia, Marina, Juny, Monica, Alba, Iñaki, Ronie, El Urdanga, Chuanes y en especial a todos y cada uno de los integrantes del “Equipo Loser” que tantos viajes hemos hecho. Siempre gracias a ellos porque están siempre ahí, en los momentos divertidos y en los difíciles. Muchas gracias.

Y como no, a mis amigos de Planes, ese pequeño pueblo tan entrañable al que siempre estoy contento de ir. Ellos, desde hace ya muchos años, vienen acompañándome en los momentos divertidos, y los no tanto. Pero siempre dispuestos para pasar un buen rato. Tore, El Amo, Samu, Clara, Jose, Vero, Ángela, Mari, Pon, Meli, Diego, y muchos otros más. Muchas gracias.

Finalmente, los más importantes, mi familia. En primer lugar mis padres, Enrique y Amparo, que siempre han estado apoyándome cuando lo he necesitado y en todos y cada uno de los pasos que he tomado desde el día que nací. Os quiero. También a mis hermanas, Amparo, Ana y Leli. Que aunque nos peleamos a veces, siempre estamos juntos. A mis cuñados, Joaquín, Toni y Rafael (Català) y a mis cinco sobrinos, Andrea, Javi, María, Rafa y Laura, que aunque son un poco pesados, bueno, te diviertes mucho. También a mis tíos, Elia, Miguel, Teresa y Narciso que desde la lejanía o la proximidad sé que siempre han estado a mi lado. También al resto de mi familia. Muchas gracias a todos vosotros porque me habéis hecho tal y como soy. Gracias.

A todos, muchas gracias por ser como sois.

Valencia, diciembre de 2009



## Índice

<i>Resumen</i> .....	<i>i</i>
<i>Abstract</i> .....	<i>iii</i>
<i>Resum</i> .....	<i>v</i>
<i>Agradecimientos</i> .....	<i>vii</i>
<i>Índice</i> .....	<i>ix</i>
<b>1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Generalized Finite Elements Method (GFEM)</b> .....	<b>3</b>
<b>1.2 Estimación del error basado en técnicas de recovery</b> .....	<b>8</b>
<b>1.3 Objetivos</b> .....	<b>10</b>
<b>2 GENERACIÓN DE LA BATERÍA DE MALLAS</b> .....	<b>13</b>
<b>2.1 Necesidades y requisitos</b> .....	<b>13</b>
<b>2.2 Estructura de la batería de malla</b> .....	<b>14</b>
2.2.1 Estructura nodal, creación y características .....	15
2.2.2 Estructura de elementos, creación y características .....	16
<b>2.3 Proceso de creación de la batería de mallas y refinado</b> .....	<b>22</b>
2.3.1 Proceso de refinamiento geométrico .....	24
<b>2.4 Capacidades</b> .....	<b>25</b>
<b>2.5 Interfaz gráfica y parámetros fundamentales</b> .....	<b>26</b>
<b>3 RECONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE TENSIONES</b> .....	<b>29</b>
<b>3.1 Técnica Superconvergent Patch Recovery (SPR)</b> .....	<b>29</b>
<b>3.2 Adaptación de la técnica SPR a GFEM</b> .....	<b>30</b>



<b>3.3</b>	<b>Técnica Superconvergent Patch Recovery with constraints .....</b>	<b>35</b>
3.3.1	Ecuaciones de equilibrio interno .....	37
3.3.2	Ecuaciones de compatibilidad en deformaciones.....	38
3.3.3	Ecuaciones de equilibrio en el contorno.....	39
3.3.4	Condiciones de contorno en simetría .....	41
3.3.5	Nodos de mitad de lado.....	42
3.3.6	Restricciones y tipos de nodos .....	42
3.3.7	Interpolación del campo mejorado en el patch.....	43
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Definición de parámetros y magnitudes .....</b>	<b>45</b>
4.1.1	Error relativo en tensiones de Von Mises .....	45
4.1.2	Efectividad local .....	46
4.1.3	Error de la solución alisada en norma energética, $\ e^*\ $ .....	46
4.1.4	Parámetros utilizados en el estudio. ....	47
<b>4.2</b>	<b>Problema 1. Placa cuadrada con campo de desplazamientos conocido.....</b>	<b>48</b>
4.2.1	Mallado lineal uniforme.....	52
4.2.2	Malla cuadrática uniforme .....	60
4.2.3	Mallado cuadrático $h$ -adaptativo .....	67
<b>4.3</b>	<b>Problema 2. Tubo sometido a presión interna.....</b>	<b>74</b>
4.3.1	Malla lineal uniforme.....	77
4.3.2	Malla cuadrática uniforme .....	80
4.3.3	Malla cuadrática $h$ -adaptativa .....	84
4.3.4	Problemática de la imposición de las condiciones de contorno en contornos curvos o cóncavos.....	95
<b>4.4</b>	<b>Problema 3. Ejemplo de aplicación, presa .....</b>	<b>98</b>
<b>4.5</b>	<b>Problema 4. Ejemplo de aplicación, volante de inercia.....</b>	<b>110</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....</b>	<b>123</b>
<b>6</b>	<b>ANEXO. ESTRUCTURA DE DATOS .....</b>	<b>125</b>



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



---

<b>6.1</b>	<b>Estructura de datos de la variable Elm .....</b>	<b>126</b>
<b>6.2</b>	<b>Estructura de datos de la variable Nod .....</b>	<b>127</b>
<b>6.3</b>	<b>Estructura de datos de la variable MatK .....</b>	<b>128</b>
<b>7</b>	<b><i>BIBLIOGRAFÍA</i>.....</b>	<b>131</b>





# 1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad se encuentra en su fase de madurez la técnica clásica de elementos finitos FEM, por ello los avances en la materia se diversifican en otras concepciones distintas para el desarrollo de nuevos códigos que permitan resolver los problemas planteados de una manera más rápida, sencilla y de mayor precisión.

Una vertiente de ello, desarrollada recientemente para la resolución de problemas de contorno es la que intenta lograrlo sin necesidad de malla, también conocida como *meshless method*. Estos métodos se basan en usar una partición de la unidad sobre el dominio para asegurar la continuidad de la aproximación. Como ejemplo a este tipo de algoritmos se encuentran los siguientes: *The Element-free Galerkin Methods* de Belytschko; el método *The hp Clouds Method* de Duarte y Oden; y los métodos *Reproducing Kernel Particle Methods* de Liu.

El éxito de estos métodos ha sido limitado debido a que no han logrado resolver el problema de integración de las ecuaciones de manera satisfactoria debido a que terminan por necesitar una malla para la integración numérica. Por otro lado algunos de ellos requieren técnicas especiales para la aplicación de las condiciones de contorno básicas como el método de multiplicadores de Lagrange que plantea problemas de estabilidad.

Por otro lado el método GFEM (Generalized Finite Element Method) fue introducido en el año 2000 por T. Stroubolis, I. Babuška y K. Copps como la combinación del Método clásico de Elementos Finitos (FEM) y el Método de Partición de la Unidad (PUM).

Conociendo la problemática del Método de los Elementos Finitos de no poder adaptarse con facilidad a contornos complejos con la malla utilizada, el nuevo método GFEM permite adaptarse con mayor precisión a este tipo de contornos. Por ello la herramienta principal, propuesta por estos autores, es la combinación de una robusta integración numérica junto con un refinamiento especial de elementos que lo hace capaz de adaptarse a casi cualquier contorno.



Por otro lado, esta técnica permite la introducción en la aproximación funciones especiales de enriquecimiento; como por ejemplo las usadas en esquinas, huecos o inclusiones, aumentando en gran medida la precisión.

Finalmente, este método se puede resumir en dos ideas principales, la primera es que los dominios son independientes de la malla y la segunda es que permite la introducción de un enriquecimiento local de la aproximación mediante funciones especiales.

Cabe centrar el entorno del presente trabajo en la optimización de forma mediante algoritmos evolutivos donde es necesario obtener una solución en tensiones de calidad para guiar el proceso evolutivo hacia una solución geométrica adecuada. Cuando se realiza un procedimiento de optimización de forma para un componente mediante algoritmos evolutivos, se precisa la realización de gran número de análisis a diferentes geometrías, además de forma precisa. Con el uso de la técnica FEM clásica, se necesitaría crear la malla para cada geometría, lo cual ralentizaría en exceso el proceso. Con la introducción de la técnica GFEM se ha avanzado en gran medida en este sentido ya que no es necesario crear una malla por cada individuo, aumentando el rendimiento.

Por otro lado, para aumentar la precisión es necesario un tamaño pequeño de elementos, lo cual, puede obtenerse mediante el uso de mallas uniformes, pero con la desventaja de un gran coste computacional. Ello nos lleva a utilizar métodos *h*-adaptativos los cuales con un menor coste computacional obtienen una precisión del mismo orden de magnitud. Entonces, para el uso de técnicas *h*-adaptativas es necesaria la estimación del error. Concretamente en este trabajo se van a utilizar técnicas basadas en *recovery*.

En el presente trabajo se va exponer un método *h*-adaptativo en la estructura proporcionada por el GFEM. Para ello es necesario el estudio del error. Para el caso del método FEM, las técnicas del estudio del error ya han alcanzado su estado de madurez. Dichas técnicas se clasifican generalmente en dos familias principales [1] y [2]: estimadores del error basado en consideraciones referentes a residuos, y estimadores del error basados en técnicas de reconstrucción de la solución.



Generalmente, los más usados son aquellos basados en técnicas de reconstrucción de la solución basados en las ideas de Zienkiewicz y Zhu [3] y particularmente los basados en la técnica *Superconvergent Patch Recovery* [4] y [5], debido a su simplicidad y robustez.

En cuanto a las técnicas de estimación del error para métodos basados en la partición de la unidad, la bibliografía es muy limitada. Existen estudios basados en la reconstrucción del campo de desplazamientos, según Strouboulis *et al.* [6], para el GFEM. También Strouboulis *et al.* [7] han propuesto dos estimadores del error *a posteriori* basados en residuos, también para el GFEM.

También, recientemente, recientemente Bordas y Duflo [8] han presentado un estimador del error para XFEM basado en la reconstrucción de la reconstrucción de la solución y por otro lado, J.J. Ródenas *et al* [9] proponen también un estimador del error basado en técnicas de *recovery* en el entorno XFEM el cual se caracteriza separa el campo de tensiones en una parte “suave” y otra “singular” la cual viene dominada por la singularidad.

El objetivo del presente trabajo es el de obtener un método *h*-adaptativo para mallas independientes del dominio, usando el estimador del error de Zienkiewicz y Zhu, estimador ZZ, [3] basado en la reconstrucción del campo de tensiones. Para ello se van a utilizar dos modificaciones de la técnica SPR clásica adaptadas para el caso.

## ***1.1 Generalized Finite Elements Method (GFEM)***

En el presente trabajo se expone la técnica GFEM para la resolución de problemas de contorno. Como se ha mencionado en el apartado anterior, las ideas fundamentales del GFEM son, por un lado, los dominios independientes de la malla y, por el otro, el enriquecimiento local de la aproximación mediante funciones especiales. En la implementación sólo se ha considerado el primero de ellos.

En primer lugar se debe definir y comparar el método GFEM y el FEM. En general una malla FEM se usa para la construcción de la aproximación y para la integración numérica de las funciones. Dicha malla se crea por la división del





dominio en triángulos o cuadriláteros curvilíneos no solapados, los cuales se les denomina elementos y deben satisfacer condiciones de conexión entre ellos y distorsión.

Como diferencia, en GFEM se usan dos mallas. Una es llamada malla de aproximación, usada para la construcción de la aproximación del problema y la otra corresponde a la malla de integración, la cual es construida a partir de cada elemento de la primera por separado, y es destinada a la evaluación numérica de todas las integrales. Como se observa en la Figura 1.1, cada elemento de la malla de aproximación, cuyos elementos están delimitados por bordes negros, está subdividido en subdominios, delimitados por el contorno y por los bordes de los subdominios. Dichos subdominios se crean mediante la triangulación de Delaunay con los nodos internos del elemento correspondiente y los puntos de intersección calculados, que actúan como nodos de la malla de integración, los cuales están representados mediante círculos. Para los elementos completos, el dominio de integración corresponde al elemento completo, en este caso representado de color verde claro.

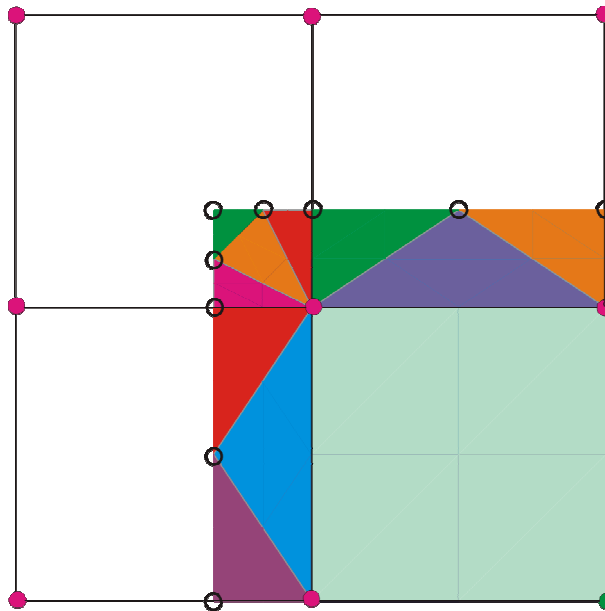


Figura 1.1 Representación de la malla de integración (coloreada) y de la de aproximación (bordes negros).



Para la malla de aproximación, el único requisito indispensable es que cubra completamente el dominio del problema, mientras que la malla de integración es necesario que defina correctamente el dominio del problema, utilizando para ello un refinamiento especial de cada elemento de la malla de aproximación que lo necesite.

Cabe considerar que existen varios tipos de GFEM según T. Strouboulis, I. Babuška y K. Copps, en relación a la malla de aproximación y la geometría del dominio. En todos ellos se usa una malla clásica de elementos finitos, pero con diferente relación entre el contorno de la geometría y del dominio de la malla.

- GFEM I. El contorno de la malla de aproximación usada coincide con el contorno del dominio y además se dotará posteriormente de las funciones especiales en los puntos de comportamiento conocido. Un ejemplo se encuentra en la Figura 1.2.
- GFEM II. El dominio de la malla de aproximación se encuentra modificado de manera que incluye los dominios originales internos, y es obtenido a partir del dominio original por eliminación de varias partes del contorno y adición de nuevos contornos. Un ejemplo se muestra en la Figura 1.2.
- GFEM III. El dominio de la malla de aproximación cubre el dominio original y no tienen fronteras comunes con la geometría. Este es el tipo de mallados para el que se desarrolla la implementación objeto del presente trabajo. En la Figura 1.3, se muestra un ejemplo de un dominio complejo mallado donde se observa una malla de este tipo, donde la malla de integración se ha construido por un refinamiento del elemento inicial en subdominios geoméricamente semejantes. En el caso de la presente implementación, dicho refinamiento se realiza mediante la triangulación Delaunay.

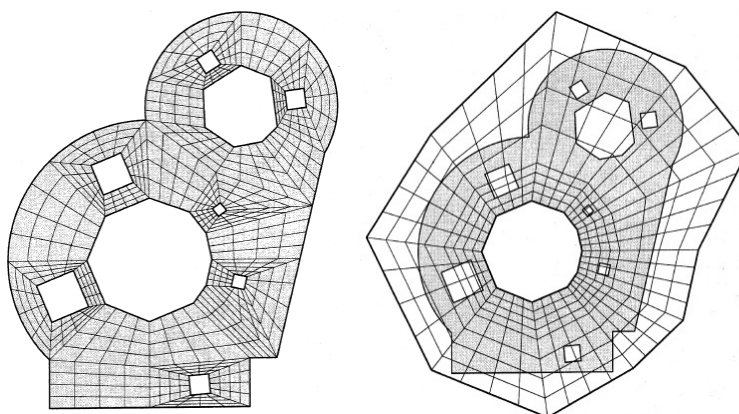


Figura 1.2 Ejemplo de una malla clásica de FEM. Izq. para GFEM I y dcha. Para GFEM II.

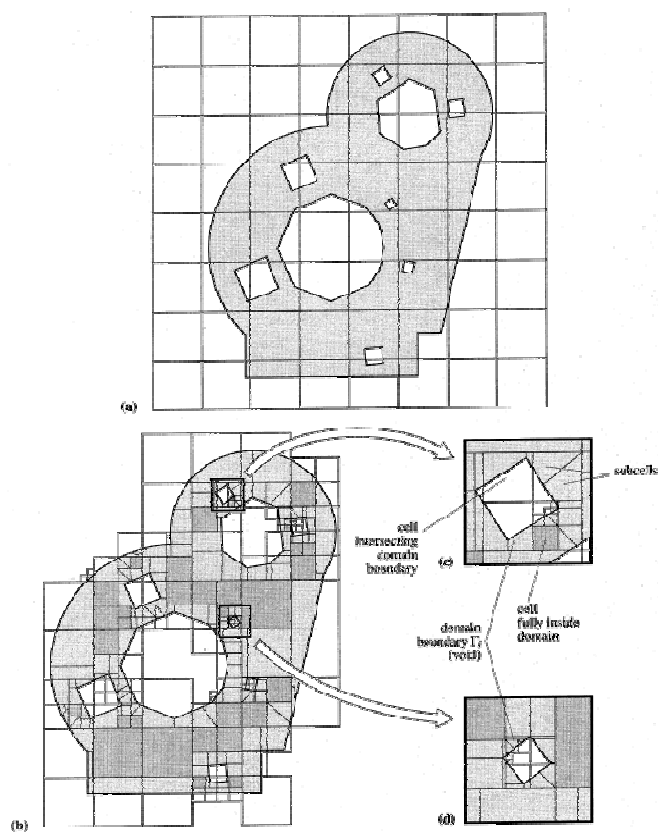


Figura 1.3 (a) Malla de aproximación obtenida empleando refinamiento uniforme de cuadriláteros regulares. (b) Malla de integración correspondiente. (c) y (d) Detalles de la malla de integración.



Una vez descrito a rasgos generales la metodología GFEM, se va a incidir en un aspecto clave para conocer concretamente la estructura que se ha implementado en la aplicación informática.

La peculiaridad de este tipo de mallados es la aparición de los llamados nodos *fantasma* (*phantom nodes*) y, en función del planteamiento utilizado, puntos de integración *fantasma* los cuales se representan en la Figura 1.4. En primer lugar, un nodo *fantasma* es aquel que pertenece a la malla de aproximación y está situado fuera del dominio del problema, en la figura, son aquellos puntos rosa situados fuera del dominio de problema. Los elementos de la malla de aproximación son aquellos que están delimitados por los bordes negros. Dichos nodos *fantasma*, cuando se resuelve el problema FEM, tienen asociados unos desplazamientos, también denominados *fantasma*.

Por otro lado, los puntos de Gauss *fantasma* son los representados en amarillo. Dichos puntos de Gauss son los correspondientes a los elementos de la malla de aproximación, que en los elementos internos (color verde claro) corresponden a los puntos de Gauss reales, pero en los elementos intersectados por el dominio pueden caer fuera del dominio del problema. Para estos elementos intersectados, los puntos de Gauss reales son los correspondientes a cada subdominio triangular coloreado en la figura.

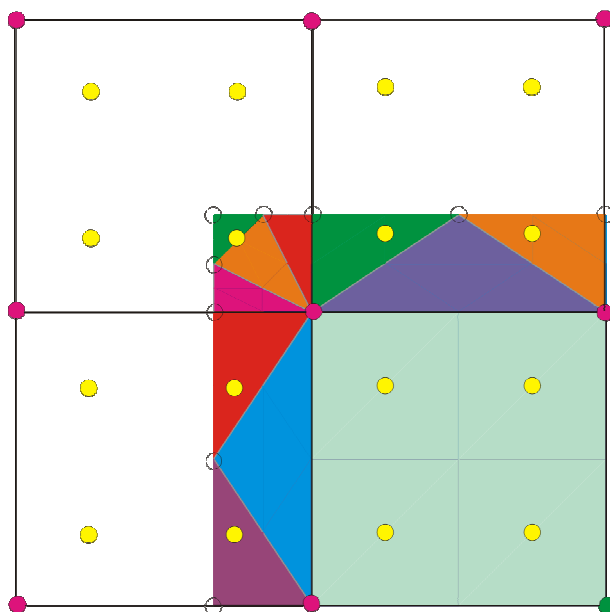


Figura 1.4 Representación de una sección de una malla de integración y una malla de aproximación con nodos y puntos de integración *fantasma*.

Cabe añadir que existe en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, existe un algoritmo de resolución mediante un método GFEM, para una malla fija, desarrollado por Ing. Justo Martí Pellicer [10], el cual ha servido como base de partida y sobre el cual se han introducido mejoras y variaciones las cuales se exponen en el presente trabajo.

## ***1.2 Estimación del error basado en técnicas de recovery***

El análisis de problemas, tanto en FEM como en GFEM, conlleva una serie de errores. Uno de ellos es el error debido a la discretización usada. Para disminuir dicho error, en primer lugar éste se debe cuantificar, o al menos estimar de algún modo. Una forma común de cuantificarlo consiste en estimar el error, en norma energética, de la solución,  $\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|$ . Dicha cuantificación es una medida global del error, en el sentido que involucra a todo el problema analizado.



La norma energética se define según la expresión (1.2). Nótese que corresponde a la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación.

$$\|\mathbf{u}^e\|^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (1.1)$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{NElem} \int_{\Omega_n} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega_n} \quad (1.2)$$

El dominio  $\Omega_i$  representa en general el dominio de integración que para el caso de elementos finitos es concretamente el dominio del elemento obteniéndose de ese modo la norma energética a nivel local o de elemento según la expresión (1.1).  $\mathbf{D}$  es la matriz de elasticidad que define las tensiones como  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Tal y como se mencionaba en párrafos anteriores es necesario alguna variable que cuantifique el error que se está cometiendo, para ello se utiliza el error en norma energética que indica, con un escalar, el error cometido en la estimación de elementos finitos del campo de tensiones. Para ello se define el error en norma energética exacto según las expresiones (1.3) y (1.4) a nivel local y global, respectivamente.

$$\|\mathbf{e}^e\|^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega \quad (1.3)$$

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{NElem} \int_{\Omega_n} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega_n} \quad (1.4)$$

En principio, lo óptimo sería comparar la solución obtenida con la exacta para obtener el error según las expresiones (1.3) y (1.4), pero en general la solución exacta no es conocida. Una estimación del error  $\|\mathbf{e}_{es}\|$ , fue propuesta por Zienkiewicz & Zhu [3] con el estimador del error ZZ, cuya expresión es la siguiente:

$$\|\mathbf{e}_{es}\| = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega \quad (1.5)$$

En la expresión (1.5),  $\Omega$  se refiere al dominio de integración, que en este caso puede ser tanto el dominio completo como un dominio local (generalmente a un elemento),  $\boldsymbol{\sigma}^h$  representa los valores de tensión evaluados por medio del análisis FEM, y  $\boldsymbol{\sigma}^*$  es el denominado campo de tensiones alisado, mejorado, suavizado o



reconstruido, que es una solución mejor que la obtenida directamente por elementos finitos  $\sigma^h$ .

Para poder comprobar la calidad del error estimado, este se compara con el error exacto utilizando la expresión (1.6), obteniendo la efectividad  $\theta$ . Dicho valor en caso de una subestimación del error, el rango de valores que toma es desde 0 a 1, y en el caso de una sobreestimación del error, puede tomar valores desde 1 hasta  $+\infty$ .

$$\theta = \frac{\|e_{es}\|}{\|e\|} \quad (1.6)$$

El estimador del error ZZ (1.5) es asintóticamente exacto,  $\theta = 1$ , si la solución reconstruida usada en la estimación del error tiene mayor índice de convergencia que  $\sigma^h$  [5]. Así pues, el funcionamiento del estimador ZZ queda supeditado a las características y la calidad del campo mejorado que se obtenga a partir de los resultados obtenidos directamente del análisis FEM. Por este motivo una buena estimación del error, pasa primero por conseguir un buen campo reconstruido.

Inicialmente, la obtención del campo mejorado de tensiones pasó por realizar un promediado directo en nodos del valor de las tensiones obtenidas por elementos finitos, de este modo se garantizaba la continuidad de las tensiones a lo largo del dominio, pero esta técnica en general no da buenos resultados. Por otra parte existe otras técnicas que se van a desarrollar más adelante, tales como la técnicas SPR (superconvergent patch recovery) [4] y [5] y la SPR-C (superconvergent patch recovery with constrains) [11] que consiste en una mejora sustancial de la técnica SPR.

### 1.3 Objetivos

El objetivo general de esta tesis de master es el desarrollo de un procedimiento de análisis  $h$ -adaptativo para mallados independientes de la geometría, como los utilizados en GFEM.



Para cumplir este objetivo general y teniendo en cuenta la futura aplicación del software a procesos de optimización se considerará la utilización de mallas cartesianas, y, en base a esto, los siguientes objetivos parciales.

- Implementación de una estructura de mallas regular, denominada batería de mallas, independientes del dominio, con capacidad de operar con diferentes tamaños de elementos.
- Desarrollo de un campo de tensiones reconstruido de calidad, mejor que el obtenido directamente de elementos finitos.
  - Implementación de la técnica SPR-C.
- Guiar el proceso  $h$ -adaptativo para la obtención de una solución de calidad con bajo coste computacional.





UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales

---



## 2 GENERACIÓN DE LA BATERÍA DE MALLAS

### 2.1 Necesidades y requisitos

En la presente implementación se han utilizado elementos de cuatro lados, debido a que son fácilmente exportables a 3D y que funcionan correctamente para las aplicaciones en las que se van a utilizar. Por otro lado, la malla necesita que el refinamiento se realice por subdivisión. Para la geometría de elemento usado, dicha subdivisión será el resultado de dividir el elemento inicial, o elemento padre en cuatro subelementos o elementos hijo. Además de admitir una subdivisión uniforme, debe ser capaz de soportar un proceso refinamiento  $h$ -adaptativo.

Como consecuencia de dicho tipo de refinamiento y de que los elementos sean de 4 lados y que el refinamiento sea el resultado de la subdivisión anteriormente indicada, aparecen una serie de nodos fronterizos entre elementos que impedirían la continuidad de la solución. Dichos nodos, denominados *Hanging nodes* se muestran en la Figura 2.1.

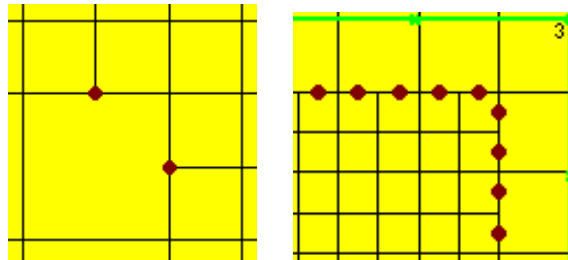


Figura 2.1 Detalle de *Hanging nodes* (marrón) en elementos lineales (izq.) y elementos cuadráticos (dch.).

En la Figura 2.1, se observa que cuando hay un cambio de tamaño de elemento debido a un refinamiento  $h$ -adaptativo, aparece un nodo en el caso de lineales o dos en el caso de cuadráticos que deben ser tomados en consideración para garantizar la continuidad del campo de desplazamientos. En estos nodos, para garantizar la continuidad de la solución, se aplican ecuaciones de restricción, denominadas *Multi Point Constrain (MPC)*, cuyo desplazamiento es función de el



de los nodos padres del lado correspondiente. Los nodos padres son aquellos nodos del lado en cuestión que estaban antes de realizarse la subdivisión.

La restricción necesaria que deben cumplir para garantizar la continuidad es que el desplazamiento en los *Hanging nodes* sea la interpolación de los desplazamientos mediante las funciones de forma de los nodos padre particularizadas en el nodo en cuestión.

Por otro lado, la estructura de malla que se va a utilizar es jerárquica, en primer lugar para el aprovechamiento de la estructura ya existente, desarrollada en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, y también para el tipo de subdivisión de elementos que se va a utilizar. Dicho tipo de estructura confiere muy buenas características en cuanto a la implementación y a la organización de los datos, y especialmente para este caso en particular en el que la malla se crea de manera independiente al dominio.

Para la estructura de malla jerárquica, se ha utilizado una numeración específica en la que con sólo el código asignado al elemento se obtiene información relativa al tamaño del mismo y a la posición ocupada en la malla. Sin embargo, la numeración utilizada limita a 16 el nivel máximo de refinamiento posible, que es suficientemente elevado para las aplicaciones que está preparada la implementación.

Además de ello, la estructura de malla debe ser capaz de soportar elementos lineales o cuadráticos, aunque no una malla mixta.

## ***2.2 Estructura de la batería de malla***

Durante la realización del presente trabajo se ha implementado una estructura de mallas de aproximación independiente del dominio del problema. Dicha estructura tiene la peculiaridad que consta de dos numeraciones distintas. La primera de ellas, que consiste en una numeración simple, secuencial, en la que se enumeran los elementos, desde el nivel 0, hasta el máximo nivel que se a elegido. Y otra numeración en la que en el número de elemento se indica el nivel al que pertenece, el elemento madre a partir del cual desciende, y demás ascendientes y además la posición que ocupa dentro de la malla.



Por otro lado, y antes de crear los elementos, se crea una distribución uniforme de los nodos a los cuales se les asigna una posición, equidistante, tanto en dirección  $x$  como en dirección  $y$ . Después se le asocia a cada elemento los nodos correspondientes, dependiendo de su ubicación y de si se trata de elementos lineales o cuadráticos.

### 2.2.1 Estructura nodal, creación y características

La información de partida para crear la estructura de nodos son las dimensiones de la malla, el tamaño mínimo del elemento o su nivel máximo de refinamiento, y el tipo de elemento (lineal o cuadrático). A partir de esta información se crea una nube de puntos, de dimensiones las de la malla y separados el tamaño del elemento que va a resultar, para lineales, y la mitad para cuadráticos. Dichos puntos, se numeran en dirección vertical descendente y de izquierda a derecha. Dichos puntos serán los nodos. A los nodos se les asigna unas coordenadas reales espaciales en función de su posición. Dicha estructura de nodos se muestra en la siguiente figura.

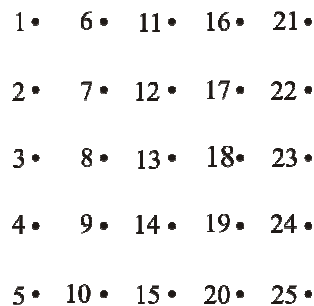


Figura 2.2 Nube de nodos y numeración asociada.

También a los nodos se les asigna más información que va a ser de utilidad para el posterior desarrollo de la implementación. Dicha información consiste en los siguientes puntos.

- *Nivel*: indica el menor nivel de elemento al que pertenece el nodo. Es decir, un nodo puede pertenecer a diversos elementos en la batería de mallas, entonces se entiende como nivel de nodo el mínimo nivel de todos los elementos asociados a dicho nodo.



- *Número de padres*: indica el número de nodos a partir de los cuales se pueden interpolar los desplazamientos y otras magnitudes en el nodo en cuestión. Esto se utiliza para los *Hanging nodes*, los cuales, sus desplazamientos vienen definidos por la interpolación de sus nodos padres.
- *Padres*: indica el número de cada nodo que es padre del nodo en cuestión.
- *Peso*: indica el peso de cada nodo padre en el nodo en cuestión para la interpolación. En otras palabras, el valor de la función de forma correspondiente, particularizada en el nodo hijo.

Algo interesante es conocer la numeración local de los nodos de un elemento, esto es que el primer nodo de un elemento es el inferior izquierda y se sigue, de forma antihoraria, con los nodos vértice, después y a partir del nodo de medio lado del lado inferior y con el mismo sentido se recorren los de medio lado, esto sólo para elementos cuadráticos. Dicha numeración se muestra en la siguiente figura.

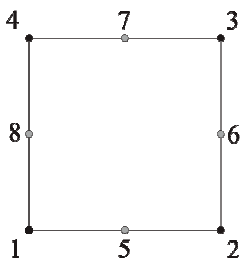


Figura 2.3 Representación de la numeración local de nodos. Negros los nodos vértice y gris los nodos de mitad de lado.

### 2.2.2 Estructura de elementos, creación y características

Los elementos se crean a partir de los nodos, asociando a cada elemento cuatro nodos vértice para los lineales y además si son cuadráticos cuatro nodos de mitad de lado ya que los elementos cuadráticos usados son de 8 nodos, creando de este modo la topología de elementos.



A la vez que se define su topología, se numeran de forma secuencial y sin tener en cuenta niveles ni posiciones. Dicha numeración asigna un número natural a cada elemento, siendo el 1 el primer elemento, numerados por niveles, desde el nivel 0 hasta el máximo. En orden vertical descendiente y de izquierda a derecha y sin atender a su situación con los elementos madre ni a su posición en la malla. Dicha numeración es útil para la creación de bucles y para el almacenamiento de variables ya que es muy compacta porque el número máximo de la numeración coincide con el número máximo de elementos que existen, pero resulta de escasa utilidad para la localización de niveles, y posiciones de elementos de una manera rápida dentro de la malla. Por dicho motivo se crea una numeración alternativa.

Dicha numeración consiste en varias series de números de 10 cifras asignados a cada elemento. En este caso se ha utilizado 2 series en los cuales se puede definir hasta 16 niveles (8 por serie) y 90 elementos madre. Además es capaz de soportar hasta 10 hijos por padre. En el caso implementado se usan 4 hijos por padre, ya que el paso de un nivel de refinamiento al superior consiste en subdividir el elemento en cuestión en 4. Para el caso de mallas 3D, es posible su implementación en esta numeración ya que el número de hijos sería 8.

Esta nueva numeración distingue su funcionamiento para los elementos madre, aquellos de nivel 0, con el resto de elementos. Todos aquellos elementos de nivel 0 se numeran en dirección vertical descendiente y de izquierda a derecha de modo que al primero de ellos se le asigna el número 10 y así sucesivamente hasta el 99. Estos se correlacionan con la numeración secuencial como se muestra en la siguiente figura.

<b>1</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>16</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>11</b>	<b>11</b>	<b>14</b>	<b>17</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>12</b>	<b>12</b>	<b>15</b>	<b>18</b>	<b>21</b>

Figura 2.4 Representación de una malla de nivel 0 con la numeración secuencial de elementos (izq.) y la numeración virtual de elementos (dch.).



Por otro lado, cuando se realiza la subdivisión de un elemento, aparecen 4 elementos nuevos de un nivel superior. Ésta numeración asigna un 1 al elemento inferior izquierda de la subdivisión y siguiendo en sentido antihorario, hasta el 4 al elemento superior izquierda. La característica fundamental es que dicha asignación de números se asigna en la posición correspondiente al nivel. Es decir, en la numeración, la dos primeras cifras de la primera serie corresponden al número asignado al elemento madre, después desde la cifra 3 a la 10 corresponde a la posición virtual en el nivel correspondiente, la cifra 3 es para nivel 1 y la décima para nivel 8. En la segunda serie, la primera cifra es un 1, para inicializar, pero a partir de la segunda corresponde a la posición virtual en el nivel 9 y así sucesivamente hasta la cifra 9 de esta serie, correspondiente al nivel 16. La estructura de la numeración se muestra en la siguiente figura.

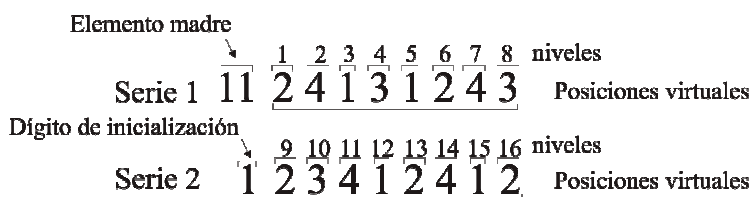


Figura 2.5 Estructura de la numeración virtual.

Es importante destacar que dicha separación en series de la numeración virtual ha sido necesaria hacerla porque para indexar en una matriz tipo *sparse*, el índice máximo posible en Matlab toma el valor  $2^{31}-1$ , cuyo valor es  $2.147483647 \cdot 10^9$ .

También es interesante conocer la forma en que se asignan los dígitos en la numeración virtual. Dicha asignación se realiza por nivel de elemento y por posición. El nivel de elemento viene indicado por la última cifra que se rellena en la numeración representada en la Figura 2.5. Por otro lado, la posición que respecto al padre viene indicada por la cifra asignada en la última posición. Si se atiende a esta última cifra, da información parcial sobre la posición del elemento. Sin embargo, si se atiende a todas las cifras, se indica la posición ocupada por cada elemento respecto a su padre y así sucesivamente hasta llegar a la última cifra. Haciendo el seguimiento descrito se obtiene la posición exacta del elemento en cuestión dentro de la malla. Dicha numeración virtual en referencia a la posición

respecto al padre se muestra en la siguiente figura, la cual, además, muestra la numeración local de los lados de un elemento.

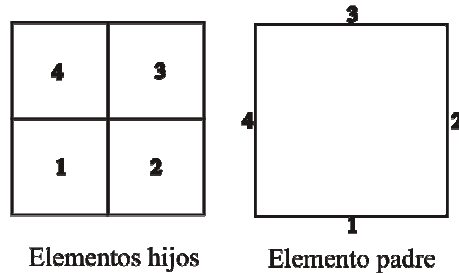


Figura 2.6 Numeración virtual con respecto al padre (izq.) figura de un elemento padre con los lados virtuales (dch.).

Una vez numerado el elemento en cuestión es necesario relacionar la numeración secuencial y la numeración virtual. Para ello se crean dos matrices de transformación; una para el paso de la numeración secuencial a la virtual y otra para el paso de la numeración virtual a la secuencial. La primera de ellas, que se encuentra en memoria, es *Elm.Relationship* y está formada por tantas filas como series haya. Por tanto para esta implementación de dos series se tienen dos filas. El número de columnas coincide con el número de elementos creados. En cada columna se escribe la numeración virtual, la primera serie se sitúa en la primera fila y la segunda serie en la segunda fila. De este modo se ha asignado a cada elemento de la numeración secuencial un número en la nueva numeración, un ejemplo se encuentra ilustrado en la Figura 2.7.

Nº Elm \ Series	1	2	3	4	5
Serie 1	10	104	101	103	102
Serie 2	1	1	1	1	1

Figura 2.7 Ejemplo de llenado de matriz *Elm.Relationship*.

La segunda matriz mencionada, que permite el paso de la numeración virtual a la secuencial, se denomina *Elm.invRelationship* y también se encuentra en memoria. En ella, en el índice de filas se busca el número correspondiente a la primera serie y en el índice de columnas el correspondiente a la segunda. En la posición de dicha matriz dada (*Serie 1*, *Serie 2*), se encuentra el elemento en numeración secuencial correspondiente tal y como se muestra en la Figura 2.8. De este modo se relacionan ambas numeraciones.





Serie 1 \ Serie 2	1	2	3	4	...
1					
...					
101	3				
102	5				
103	4				
104	2				
...					

Figura 2.8 Ejemplo de llenado de matriz *Elm.invRelationship*.

Dicha relación se puede observar a nivel gráfico para los primeros niveles en la Figura 2.9. Como se puede observar, sin repetir ningún número de elemento en esta numeración ni variar su estructura, se podría subdividir un elemento padre en 8 hijos, Éste sería el caso 3D.

La peculiaridad y la ventaja de dicha numeración es que con el número de elemento es inmediato conocer el nivel al que pertenece el elemento, sus vecinos, el elemento madre y su posición relativo con respecto a su padre y esto de modo ascendente. Y por otro lado, también es inmediato conocer a sus hijos.

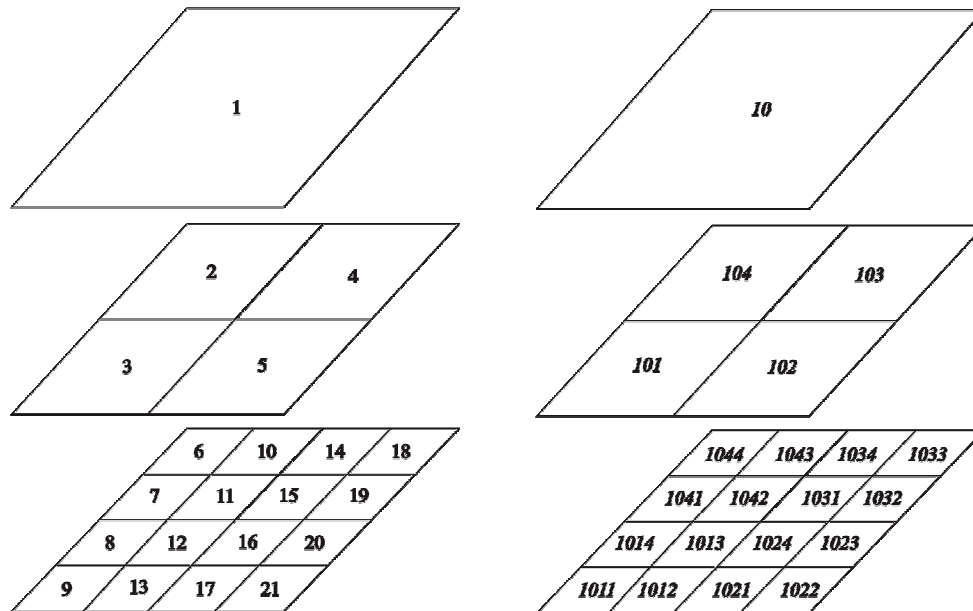


Figura 2.9 Relación entre la numeración compacta (izq.) y la virtual (dch.) para distintos niveles de elementos de la batería de mallas.

Ahora se va a exponer los datos más relevantes de la estructura de datos generada, en términos de elemento, generada en la implementación tras realizar la malla.

- *Topología*: la topología de un elemento consiste en la asignación de los nodos que lo forman, en primer lugar los nodos vértice seguidamente de los nodos de mitad de lado según la numeración virtual descrita en la Figura 2.3.
- *Activos*: los elementos activos se refiere a aquellos elementos que están presentes en la actual malla de cálculo o de aproximación, dicha variable asigna un valor '1' al elemento que esta presente en la malla de cálculo, el resto permanecen en valor cero.
- *Relationship*: es la matriz que permite el paso de la numeración secuencial a la virtual, dónde por columnas está el número de elemento en numeración secuencial y en las dos primeras filas está la serie 1 y la serie 2, respectivamente, descritas en la Figura 2.5.



- *invRelationship*: es una matriz que permite el paso de la numeración virtual a la numeración secuencial, dónde por filas se encuentra el valor de la serie 1 y por columnas el de la serie 2, entonces el número de elemento, en numeración secuencial, es el valor correspondiente a las posición descrita por la fila de valor serie 1 y la columna de valor serie 2.
- *Nivel*: indica, para cada elemento el nivel al que pertenece en la batería de mallas.
- *Hijos*: indica, por filas, los elementos que son hijos del padre, el cual es la columna.
- *Elementos vecinos*: indica los elementos vecinos de un elemento, el cual es el índice de la columna. Las filas indican el lado local, (ver Figura 2.6) por el que es vecino.
- *Elementos padre*: son los elementos padre de cada elemento, el cual es indicado por la columna que ocupa.

### ***2.3 Proceso de creación de la batería de mallas y refinado***

A partir de la información facilitada por el usuario, se crea una batería de mallas totalmente independiente de la geometría del problema, la cual puede ser guardada en memoria o en disco duro y ser usada para distintas geometrías. La batería de mallas se obtiene por la subdivisión recursiva de todos los elementos de la malla más basta en 4 elementos hijo, los cuales en su conjunto formarán un nuevo nivel en la batería de mallas.

Después se interseca una malla perteneciente a la batería de mallas, cuyo nivel es indicado en el parámetro *Intersection Level*. Éste es el nexo de unión entre la geometría y la malla y es dónde se crea la batería de mallas de integración. Acto seguido, la información de dichas intersecciones, en un nivel de malla fino, se sube hasta el nivel inicial, controlado por el parámetro *Initial Level Mesh*.



De este modo se ha creado la batería genérica de mallas y la batería de mallas de integración para el problema en cuestión.

Una vez creada la batería de mallas (que no son mallas de aproximación o de cálculo) mediante una combinación de elementos de éstas se crea la malla de aproximación de tal modo que se cumpla que los elementos contiguos sean del mismo nivel o de, como máximo, un nivel de diferencia. También debe cumplirse que el área de la malla de cálculo cubra todo el dominio del problema. En la Figura 2.10 se representa a la izquierda una figura con la batería de mallas. En la parte de la derecha se representa una malla de aproximación formada a partir de elementos de distintos niveles pertenecientes a la batería de mallas, en este caso de nivel 2 y 3.

Dicha combinación de elementos parte de una malla inicial regular definida por el parámetro *Initial Level Mesh*, donde inicialmente todos sus elementos están en estado activo. A partir de ella, el proceso de refinamiento en el elemento que considera que debe refinar lo coloca en estado no activo y activa a sus hijos de modo que estos heredan la información de su padre y la necesidad de ser refinados una vez menos. Este proceso puede dar lugar al refinamiento de los elementos vecinos del padre debido a la condición de diferencia de un nivel entre elementos contiguos. El proceso de refinamiento termina cuando no quedan ya más elementos a refinar. En este momento queda creada la nueva malla de aproximación. De este modo se repite el proceso hasta que el error relativo medido de manera porcentual tenga el valor que el usuario ha definido en el parámetro *Target Error (%)* o que el número de iteraciones haya llegado al máximo definido por el usuario.

La decisión de si un elemento debe ser refinado o no, es tomada basándose en el error estimado que se comenta de manera local en el elemento en cuestión. Para ello es necesario conocer dicho error estimado, es este el segundo punto clave del presente trabajo. Este punto consiste en utilizar algoritmos para calcular el error estimado en cada elemento y que además se adapten a las peculiaridades del método GFEM. Esto se desarrollará en el capítulo 3. Además, también se ha implementado en la un proceso de refinamiento geométrico basado en la relación que existe entre la malla de cálculo y el dominio.

Es conveniente destacar que la estructura de datos usada en la implementación y las relaciones de proporcionalidad entre elementos semejantes es la propuesta en J.J. Ródenas *et al.* [12].

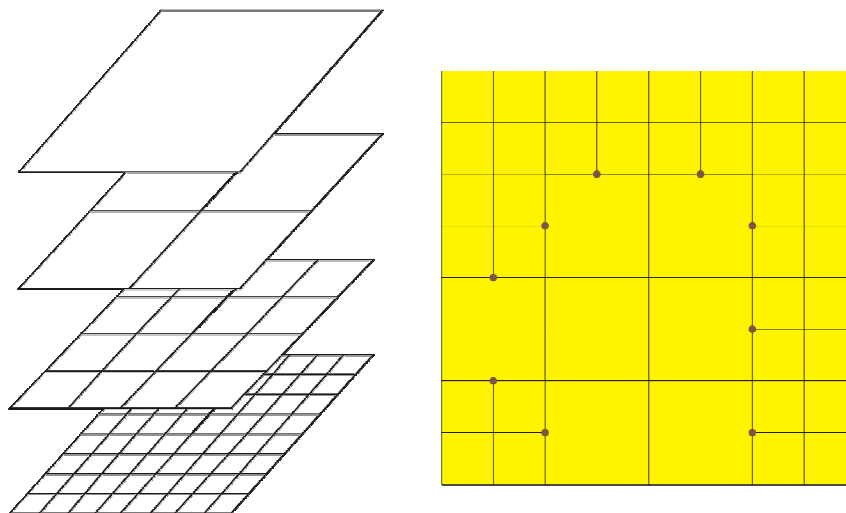


Figura 2.10 Representación de la estructura de batería de mallas y la de una malla de aproximación para el cálculo.

### 2.3.1 Proceso de refinamiento geométrico

Tras el proceso de intersección entre la malla y el dominio, es posible que queden elementos en el contorno cuya área intersectada sea casi su totalidad, o por el contrario que sea una minúscula parte del área de elemento. Ambas situaciones pueden dar lugar a una solución de baja calidad.

En el primer caso, Figura 2.11 en el caso del uso de la técnica de reconstrucción del campo de tensiones se considera que los patches asociados al elemento en cuestión son de contorno y toman las consideraciones necesarias para cada caso. Sin embargo para el cálculo, en estos casos donde la influencia de contorno es mínima en el patch, tomarlo como patch interno da mejores resultados.

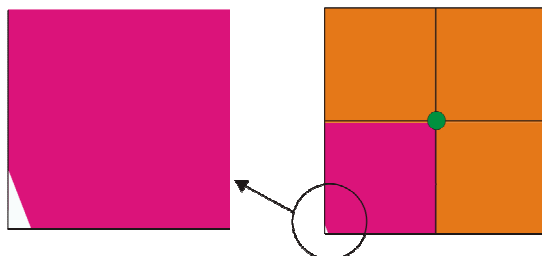


Figura 2.11 Representación de la problemática del área relativa intersectada

Por otro lado, cuando el área intersectada es muy pequeña, la precisión es baja porque las restricciones que se aplican en el contorno para la reconstrucción del campo influyen en exceso en el nodo. Este comportamiento es debido a que al estar muy restringido el campo reconstruido no se le permite una evolución rápida, dando lugar a resultados de baja calidad en el nodo. Este efecto se acentúa cerca de los concentradores de tensiones, obteniéndose por lo general tensiones muy inferiores a las reales.

Por los motivos aquí presentados, se ha implementado un procedimiento de refinado geométrico, para que la malla ajuste mejor al dominio, basado en el área relativa entre la total del elemento y la intersectada.

El procedimiento de refinado geométrico se realiza tras cada refinado basado en el estimador ZZ. En el proceso de refinado geométrico se compara el área intersectada de cada elemento con el área del elemento completo, obteniéndose un valor. Si dicho valor está fuera de un rango que es definido por el usuario, se procede a su refinado. Se refinará una vez si se estima que con un solo refinado del elemento la relación de áreas entraría dentro del rango. Si no es el caso, se refinará hasta un máximo de dos veces el elemento inicial.

## 2.4 Capacidades

Por otro lado, es conveniente conocer la capacidad de la aplicación informática y los parámetros y características más relevantes a nivel de usuario para poder usar de manera apropiada la rutina programada.

En primer lugar es necesario saber que el algoritmo parte de una malla madre o inicial, la cual puede ser definida por el usuario o calculada



automáticamente por la aplicación. Para la definición por parte del usuario de la malla madre, se debe de indicar el número de elementos iniciales en dirección  $X$  y dirección  $Y$  deseados. El máximo de elementos iniciales permitidos es de 90. Si el usuario no define dicho número, la aplicación calcula de manera automática el número apropiado para que dadas unas dimensiones de malla, de modo que el elemento se asemeje a un cuadrilátero tanto como sea posible

A partir de la malla madre, se crea una batería de mallas, topológicamente semejantes a la malla madre, dónde cada elemento de nivel inferior es subdividido en cuatro elementos de nivel superior.

Las dimensiones de malla son la longitud en dirección  $X$  e  $Y$  de la malla, de tal forma que cubra por completo todo el dominio del problema, condición indispensable del método GFEM. Dichas dimensiones son introducidas como límites mínimo y máximo en  $X$  e  $Y$  de la malla.

Por otro lado, es conveniente definir el nivel de refinamiento de un elemento. Se parte de los elementos de la malla madre, cuyo nivel de refinamiento asociado es 0. A partir de ellos, cada subdivisión del elemento madre se considera un incremento de nivel, pasando así a nivel 1, y éste valor se le asocia al nivel de refinamiento de los hijos del elemento madre inicial. Y de este modo se sigue de forma recursiva hasta alcanzar el nivel máximo de refinamiento deseado. Los límites de la aplicación actualmente implementada se sitúan en 16 niveles de refinamiento, esto significa que el tamaño del elemento inicial, entendido como la longitud de su lado, puede verse reducido en 65536 veces, ya que la relación de tamaño en cada nivel de refinamiento es 0.5.

## ***2.5 Interfaz gráfica y parámetros fundamentales***

Todos los parámetros de nivel usuario se pueden introducir en la ventana *h Mesh*, la cual se muestra en la siguiente figura. Dicha ventana encuentra dentro del menú FEM de la aplicación creada por D. Justo Martí Pellicer.

Ahora se van a describir los parámetros que se introducen en la ventana mostrada en la Figura 2.12.



- *Mesh Limits*: se introducen las cotas en coordenadas cartesianas de los valores límite de la malla que se quiere crear. Hay que tener en consideración que el problema debe estar íntegramente contenido en ella. Dichas cotas se pueden expandir o contraer o ser generadas de manera automática.
- *Initial Level Mesh*: indica cuál va a ser la malla más basta que se va a utilizar. El valor indica en nivel de refinamiento inicial, desde el elemento madre.
- *Max n° of Levels*: este parámetro indica el nivel máximo de profundidad de malla que se desea para el cálculo que se va a realizar.
- *Ini Elm X*: se define el número de elementos en dirección X de la malla madre.
- *Ini Elm Y*: se define el número de elementos en dirección Y de la malla madre.
- *Elm Final Size*: si el usuario está interesado en definir el tamaño de elemento más pequeño, el programa calculará automáticamente en nivel de profundidad deseado, notar que si se indica el nivel de profundidad de manera explícita, éste prevalece sobre el tamaño de elemento más pequeño.
- *Intersection Level*: indica que las intersecciones entre la malla de aproximación y el contorno, se hacen en los elemento pertenecientes a dicho nivel de refinamiento.
- *Recovery Type*: indica la técnica con la que se calcula el campo reconstruido de tensiones. Éste puede tomar valor 10 para la técnica SPR y valor 300 para la técnica SPR-C, Éstas se describirán más adelante.
- *Target Error (%)*: indica el nivel de precisión deseado en el análisis (especificado como error relativo máximo en norma energética).
- *Error Reduction*: indica el porcentaje de reducción del error estimado relativo previsto para la siguiente iteración. Éste parámetro solo tiene



sentido en caso de  $h$ -adaptatividad y sirve para indicar el nivel en la reducción del error deseado entre dos mallas sucesivas.

- *Max Ref Incr*: indica el máximo cambio de nivel de refinamiento de un elemento en una malla dada para crear la siguiente malla.
- *Max Ref Level*: indica el nivel máximo de refinamiento de un elemento que se permite durante el proceso  $h$ -adaptativo.
- *Max Num Iter*: indica el número máximo de iteraciones que se permiten para el proceso de refinamiento de la malla.

Figura 2.12 Ventana de introducción de datos para la creación de la malla  $h$ -adaptativa de la aplicación informática.



## 3 RECONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE TENSIONES

El campo de tensiones obtenido directamente de elementos finitos no es un campo continuo y por ello es de baja calidad, este es un motivo que justifica la necesidad de obtener un campo de tensiones que al menos sea continuo. Por otro lado, para la estimación del error basada en técnicas de *recovery*, que se plantea en el presente trabajo, es necesario construir un campo de tensiones nuevo a partir de la información obtenida del campo de tensiones de FEM para poder utilizarlo en el estimador *ZZ*.

### 3.1 Técnica *Superconvergent Patch Recovery (SPR)*

Esta técnica, fue desarrollada también por Zienkiewicz & Zhu [4] y [5] actúa generando un campo reconstruido de mejor calidad que  $\sigma^h$  debido a que crea el nuevo campo con la información del campo  $\sigma^h$  en los puntos de Gauss, donde la información obtenida está considerada, por lo general, de mayor calidad. La técnica hace que el estimado *ZZ* sea asintóticamente exacto ya que la velocidad de convergencia de la solución alisada es mayor que la de elementos finitos. La técnica se basa en ajustar una función polinómica, en general del mismo grado que las funciones de forma usadas para el campo de desplazamientos, que represente el campo de tensiones mejorado. El ajuste se realiza usando la información del campo  $\sigma^h$  en puntos de Gauss obteniendo el campo mejorado para todo el patch, posteriormente se particulariza el campo de tensiones reconstruido en el nodo de ensamblado, obteniendo así el campo de tensiones reconstruido en nodos.

Este algoritmo se repite, en cada nodo vértice del problema y el nodo a partir del cual se forma cada patch se denomina nodo de ensamblado. El patch está formado por todos los elementos que contiene al nodo de ensamblado. Los puntos de Gauss utilizados para el ajuste por mínimos cuadrados son los contenidos en los elementos del patch.



El valor del campo de tensiones en puntos de Gauss, obtenido directamente del análisis de elementos finitos, se calcula a partir de los desplazamientos nodales según la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{\sigma}_{GP}^h = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}^e \quad (3.1)$$

En la que la matriz  $\mathbf{B}$  contiene las derivadas de las funciones de forma evaluadas en el punto deseado, concretamente en todos los puntos de Gauss de dentro del elemento de la malla de integración correspondiente.

A partir de la información obtenida en los puntos de Gauss, se ajusta, por mínimos cuadrados, un campo de tensiones a dichos puntos de Gauss, obteniendo de este modo el campo reconstruido en el interior de cada patch.

Una vez obtenido dicho campo en el patch, éste se particulariza en el nodo de ensamblado, obteniendo así el valor nodal del campo mejorado y según la expresión (3.2) se interpolará en el interior de cada elemento con las funciones de forma correspondientes, siendo  $\boldsymbol{\sigma}_i^*$  el valor del campo reconstruido en cada nodo  $i$  del elemento.

$$\boldsymbol{\sigma}^*(x, y) = \sum_{i=1}^{NN_{vert}} \mathbf{N}_i(x, y) \boldsymbol{\sigma}_i^* \quad (3.2)$$

### ***3.2 Adaptación de la técnica SPR a GFEM***

El método anteriormente descrito corresponde al método SPR clásico, es decir, el usado en la técnica convencional de elementos finitos. Para poder reconstruir el campo de tensiones en un problema abordado mediante la técnica GFEM se deben tener en cuenta ciertas particularidades propias del entorno.

En primer lugar, una peculiaridad muy significativa es que existe en la malla una densidad variable de puntos de Gauss, concretamente existe, en general, una concentración de los mismos cerca del contorno. Esto ocasiona que el peso específico de las zonas donde la concentración es más grande, sea mayor, por lo tanto fuerza a que en el campo reconstruido, dicha zona tenga mayor influencia en el resultado. Dicho efecto no es deseable.

Por otro lado, debido a que existen nodos fuera del dominio, que tienen asociados unos desplazamientos y unas tensiones *fantasma*, pueden dar lugar a baja calidad, sobre todo en zonas cercanas al contorno. Ahora se va a proceder a plantear las soluciones para dichas particularidades.

En primer lugar es importante diferenciar entre dos tipos de patches y de nodos de ensamblado. Por un lado están los patches interiores, en que todos sus elementos están dentro del dominio y ninguno de ellos tiene contacto alguno con el contorno. Por otro lado, estarán los patches del contorno, cuando alguno de los elementos pertenece a elementos del contorno. En la Figura 3.1 se muestran las diferencias.

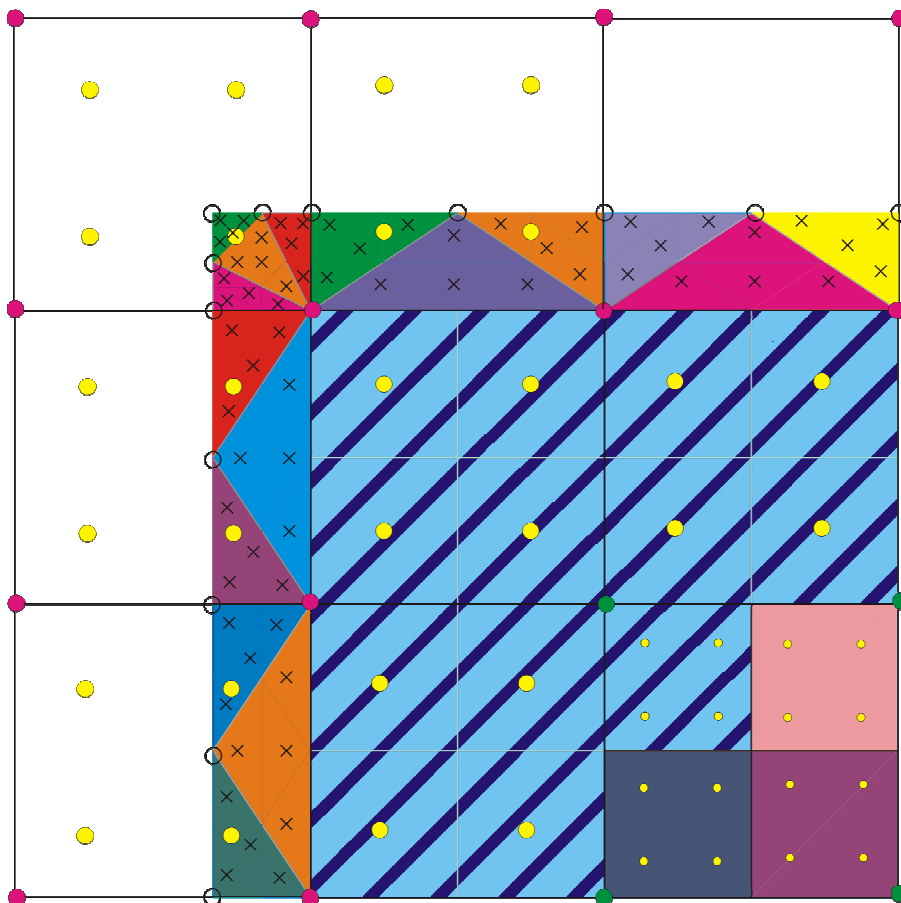


Figura 3.1 Representación de patches internos y de contorno.



En la Figura 3.1, los elementos de la malla de aproximación pertenecientes al contorno son aquellos que se encuentran intersectados, mientras que los internos son aquellos que se encuentran completos. Los nodos representados en color rojo son los nodos de ensamblado de patches de contorno, en los que algún elemento del patch es elemento de contorno, mientras que los nodos de color verde, son nodos asociados a patches internos. También se observa que el nodo de ensamblado verde central, su patch de elementos esta formado por elementos de distinto nivel de refinamiento rallados de color azul, dando lugar al resultado observado. Cabe destacar que en los elementos de contorno existen un número definido de puntos de integración en cada uno de los subdominios triangulares, representados por aspas negras, lo cual da lugar a un número elevado de puntos de integración en el contorno, comparado con elementos internos, y además concentrados en una parte del elemento externo. Por otro lado, es interesante resaltar que los nodos de simetría no son más que aquellos nodos de contorno asociados a un contorno que tiene impuesta una restricción de simetría.

Como se puede observar, existen grandes diferencias en la importancia asociada a cada uno de los puntos de Gauss en los patches situados en el contorno ya que es posible una gran concentración de puntos en un área muy reducida si la triangulación da lugar a gran cantidad de triángulos provocando un peso excesivo de esa zona en la obtención del campo alisado. Debido a ello sería conveniente poderar adecuadamente la aportación de cada punto de Gauss a la obtención del campo reconstruido tal y como se indica a continuación.

Para solventar la peculiaridad relacionada con la distinta concentración de puntos de Gauss, el campo reconstruido se obtiene mediante la minimización de un funcional  $\Psi$  definido por la norma  $L_2$  de la diferencia de las tensiones  $\sigma^*$  y  $\sigma^h$  según la expresión (3.3).

$$\Psi = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma^h)^2 d\Omega \quad (3.3)$$

Por otro lado, se define el campo alisado como un desarrollo polinomial según la ecuación (3.4), donde  $\mathbf{p}$  contiene los términos del desarrollo polinómico correspondiente y  $\mathbf{a}_i$ , donde los subíndices  $i$  indican la dirección de las tensiones en un sistema de referencia cartesiano, es el vector que contiene los coeficiente asociados a cada una de las componentes de  $\mathbf{p}$ , asociadas a cada dirección de



tensiones correspondiente. Para el caso de un campo mejorado lineal  $\mathbf{p} = \{1, x, y\}$  y  $\mathbf{a}_{ii} = \{a_1, a_2, a_3\}^T$ , donde  $x$  e  $y$  son las coordenadas locales del sistema cartesiano dónde se expresa  $\sigma_{ii}^*$ ; el cual, para este caso, se encuentra centrado en el nodo de ensamblado y alineado con los ejes de referencia globales. Por otro lado se define la matriz  $\mathbf{P}$  y el vector  $\mathbf{a}$  de coeficientes según la expresión (3.5)

$$\sigma_{ii}^* = \mathbf{p}\mathbf{a}_{ii} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{.xx} \\ \mathbf{a}_{.yy} \\ \mathbf{a}_{.xy} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Para la minimización del funcional  $\Psi$ , se sigue el procedimiento descrito por la expresión siguiente.

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\Omega} (\mathbf{P}\mathbf{a} - \boldsymbol{\sigma}^h)^2 d\Omega \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} &= \int_{\Omega} 2\mathbf{P}^T (\mathbf{P}\mathbf{a} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{P}\mathbf{a} d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega \end{aligned} \quad (3.6)$$

Realizando la integración numérica de la expresión anterior, utilizando una cuadratura de Gauss, se tendrá.

$$\sum_{GP} \mathbf{P}^T \mathbf{P}\mathbf{a} |\mathbf{J}| \omega = \sum_{GP} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}^h |\mathbf{J}| \omega \quad (3.7)$$

En la expresión (3.7), el sumatorio se extiende a todos los puntos de Gauss que existen en el patch en cuestión.  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana de transformación de coordenadas y  $\omega$  es el peso asociado a cada punto de Gauss. Este desarrollo consigue un sistema de ecuaciones que permite conocer los coeficientes del campo tensional reconstruido, en el que el peso asociado a cada punto de Gauss queda ponderado mediante el término  $|\mathbf{J}|\omega$ . De este modo desaparece el efecto de la diferente concentración de los mismos. La ponderación realizada no es más que el área asociada a cada punto de Gauss. Este desarrollo proporciona el siguiente sistema de ecuaciones que permite conocer los coeficientes  $\mathbf{a}$  del campo tensional reconstruido.



$$\begin{aligned}\mathbf{M}\mathbf{a} &= \mathbf{G} \\ \mathbf{M} &= \sum_{GP} \mathbf{P}^T \mathbf{P} | \mathbf{J} | \omega \\ \mathbf{G} &= \sum_{GP} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}^h | \mathbf{J} | \omega\end{aligned}\tag{3.8}$$

El procedimiento seguido no es más que una generalización del propuesto por Zienkiewicz y Zhu. Este nuevo procedimiento, basado en la minimización de la norma  $L_2$  se distingue en que aplica un peso distinto a cada punto de Gauss. Concretamente, en el caso de un patch formado por elementos cuadrados iguales, con cuatro puntos de Gauss por elemento, ambos métodos son exactamente iguales.

Otra característica de la reconstrucción del campo de tensiones, con respecto a la técnica SPR convencional, es debida a la propia relación entre la malla utilizada y el contorno del problema. Ello provoca que existan nodos fuera del dominio del problema, llamados nodos *fantasma* y nodos internos. En este punto la peculiaridad es que existen unas tensiones del campo reconstruido, en nodos fuera del dominio, denominadas tensiones *fantasma*, las cuales pueden tomar valores que discrepen en exceso de los óptimos ya que pueden encontrarse muy alejados del contorno. Dichos valores se utilizan para el cálculo pero que no tienen ningún sentido físico. Del mismo modo se construye el patch asociado al nodo, en este caso, nodo *fantasma*, con los elementos asociados a él. Así, los puntos de Gauss utilizados para el ajuste del campo mejorado son aquellos que pertenecen a los elementos de patch. En la Figura 3.1 se muestran los nodos internos y los nodos *fantasma*.

Una solución parcial a este último problema es el uso de los *conjoint polynomials*, definidos por la expresión (3.9) que a diferencia de la usada por el método SPR clásico, ecuación (3.2), particulariza también el valor del campo alisado en el punto dónde se desee obtener el campo mejorado dentro del patch correspondiente. Esta mejora no se ha implementado en la técnica SPR utilizada en la aplicación ya que su utilidad en una implementación aislada está limitada. Por ello se ha implementado en el siguiente método de reconstrucción del campo de tensiones denominado SPR-C, el cual además del uso de esta ecuación contiene una serie de mejoras que permitirán resolver las peculiaridades que suceden al adaptar la técnica SPR en un entorno GFEM.



$$\sigma^*(x, y) = \sum_{i=1}^{NNvert} N_i(x, y) \sigma_i^*(x, y) \quad (3.9)$$

### 3.3 Técnica Superconvergent Patch Recovery with constraints

En el punto anterior, se ha descrito una técnica súper-convergente para el cálculo de un campo de tensiones mejorado a partir de la información extraída de la solución de elementos finitos. En esta técnica, al igual que en la técnica SPR adaptada, se pondera en peso de cada punto de Gauss en el ajuste mediante la minimización en norma  $L_2$  según la ecuación (3.7).

A partir de la idea básica de que debemos ajustar un campo mejorado imponiendo ciertas condiciones, es inmediato pensar que a parte de la minimización en norma  $L_2$  se pueden imponer condiciones adicionales para que el campo mejorado cumpla las condiciones de equilibrio y condiciones de compatibilidad.

En primer lugar, definamos tres sistemas de referencia distintos, el sistema de referencia global  $\{X, Y\}$ , el sistema de referencia normalizado del nodo de ensamblado  $\{x, y\}$  y el sistema de referencia normal de puntos del contorno con direcciones de los ejes normales y tangenciales al contorno  $\{\xi, \eta\}$ . Dichos sistemas de referencia se representan en la Figura 3.2.

Para el caso bi-dimensional el campo de tensiones alisado en un sistema cartesiano esta definido por  $\sigma^* = \{\sigma_{xx}^*, \sigma_{yy}^*, \tau_{xy}^*\}^T$ , siendo cada una de las componentes de la tensión funciones polinomiales completas del grado de las funciones de forma usadas para la interpolación del campo de desplazamientos, de manera general, tal y como se ha indicado en el punto 3.1. Por ello cada componente tiene tantos grados de libertad como coeficientes tenga el polinomio correspondiente.

Particularmente, en este caso si los elementos de la malla son lineales, en aquellos nodos de ensamblado considerados como nodos de contorno, el grado del campo alisado en dicho patch es cuadrático con el fin de mejorar la aproximación a las condiciones de contorno.





Concretamente en el caso de un campo mejorado lineal existen 3 coeficientes para definir cada componente del campo, por ello el campo mejorado tiene 9 grados de libertad. Con el mismo razonamiento, en el caso de un campo alisado cuadrático se obtienen 18 grados de libertad. En otras palabras se puede añadir hasta un máximo de 9 o 18 ecuaciones de restricción adicionales, respectivamente.

Además con los parámetros utilizados en la programación, mediante la implementación realizada resulta posible imponer condiciones de restricción a los polinomios de interpolación de tensiones a fin de cumplir las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para campos de tensiones reales polinomiales de grado 2.

Debido a la complejidad para aplicar las condiciones de restricción mencionadas tal y como son aplicadas por J.J. Ródenas *et al* [11], se ha decidido aplicarlas de un modo matemáticamente equivalente que se explicará detalladamente en cada caso. Dicho modo, de forma general, consiste en que en campo reconstruido en el patch cumpla en ciertos puntos las ecuaciones pertinentes en cada caso. También existe la posibilidad que ajustar el número de puntos de cumplimiento de las ecuaciones para poder realizar un ajuste mejor en el caso de campos de tensiones de mayor orden o incluso de variar el grado máximo del campo ajustado según necesidades del usuario.

En el caso de aplicar las ecuaciones de equilibrio en el contorno, hay que resaltar que en los patches donde se encuentra una esquina en el contorno del dominio, o en general un cambio de curva de definición de la geometría, se ha optado por escoger los puntos asociados a una sola curva. Los puntos escogidos en cada curva son los puntos de Gauss de la sección de curva que está dentro del patch. Para seleccionar qué curva es elegida, se realiza la suma vectorial de los vectores posición en el sistema de referencia local de los puntos del contorno escogidos de cada curva. La curva seleccionada es aquella que la suma vectorial correspondiente sea menor.

Este método trata de hacer valer más la información cerca del nodo de ensamblado que la que se encuentra más lejos. Además de este modo se asegura no restringir en exceso el sistema de ecuaciones a resolver ya que el número de



ecuaciones impuestas está definido *a priori* y así asegurar que el número de condición es bajo.

Otra posible variante es aplicar las ecuaciones de equilibrio de manera integral, mediante los multiplicadores de Lagrange, de este modo se evita la problemática de la selección de puntos, pero tiene el inconveniente que aplicando las condiciones de equilibrio de este modo, el campo resultante no puede ser usado como cota del error para futuras aplicaciones.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se van a describir las condiciones impuestas en cada caso basadas en J.J. Ródenas *et al.* [11] dónde se sigue la siguiente nomenclatura para los campos reconstruidos y algunas de sus derivadas.

$$\begin{aligned}\sigma_{pi}^*(x, y) &= a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}y + a_{i4}x^2 + a_{i5}xy + a_{i6}y^2 + \dots \\ \frac{\partial \sigma_{pi}^*(x, y)}{\partial x} &= a_{i2} + 2a_{i4}x + a_{i5}y + \dots \\ \frac{\partial \sigma_{pi}^*(x, y)}{\partial y} &= a_{i3} + a_{i5}x + 2a_{i6}y + \dots \\ \frac{\partial^2 \sigma_{pi}^*(x, y)}{\partial x^2} &= 2a_{i4} + \dots \\ \frac{\partial^2 \sigma_{pi}^*(x, y)}{\partial y^2} &= 2a_{i6} + \dots\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$i = xx, yy, xy$$

### 3.3.1 Ecuaciones de equilibrio interno

Una de las condiciones que puede cumplir el nuevo campo de tensiones alisado son las ecuaciones de equilibrio interno. En el caso bi-dimensional debe cumplir, en general las siguientes ecuaciones.



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + b_x = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0 \quad (3.12)$$

Según J.J. Ródenas *et al* [11], asumiendo que las fuerzas volumétricas se pueden escribir como sigue.

$$\begin{aligned} b_x(x, y) &= b_{x1} + b_{x2}x + b_{x3}y + \dots \\ b_y(x, y) &= b_{y1} + b_{y2}x + b_{y3}y + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Entonces para el cumplimiento de las ecuaciones (3.11) y (3.12) es suficiente con cumplir las siguientes condiciones.

$$\begin{aligned} (a_{xx2} + 2a_{xx4}x + a_{xx5}y) + (a_{xy3} + a_{xy5}x + 2a_{xy6}y) + (b_{x1} + b_{x2}x + b_{x3}y) &= 0 \\ (a_{xy2} + 2a_{xy4}x + a_{xy5}y) + (a_{yy3} + a_{yy5}x + 2a_{yy6}y) + (b_{y1} + b_{y2}x + b_{y3}y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esta metodología tiene el inconveniente de que se debe conocer el desarrollo polinomial de las fuerzas volumétricas, y este dato puede no ser conocido. Entonces para este caso se ha decidido imponer las condiciones correspondientes de una forma matemáticamente equivalente.

Para un campo reconstruido lineal se pueden imponer dos condiciones de restricción y para un cuadrático seis. Por lo tanto lo que se hace es forzar el cumplimiento de las ecuaciones (3.11) y (3.12) por el campo  $\sigma^*$  en uno o tres puntos aleatorios respectivamente.

### 3.3.2 Ecuaciones de compatibilidad en deformaciones

Otra de las ecuaciones que puede cumplirse es la ecuación de compatibilidad en deformaciones que se puede expresar según la ecuación (3.15) con el inconveniente de conocer las parciales de las fuerzas volumétricas, que por lo general no son un dato conocido. Sin embargo, según Timoshenko y Goodier [13] se puede expresar en función exclusivamente de las tensiones tanto en tensión plana como en deformación plana. Para el primer caso, la ecuación que debe cumplir el campo alisado es la desarrollada en (3.16), mientras que para el caso de deformación plana corresponde a la ecuación (3.17). En ambos casos el



cumplimiento de esta ecuación para polinomios cuadráticos supone el cumplimiento de una única ecuación de restricción. Por lo tanto lo que se hará es forzar su cumplimiento en un solo punto, siguiendo la misma filosofía que en el punto anterior.

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = k \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right)$$
$$k = -(1+\nu) \quad \text{Tensión plana} \quad (3.15)$$

$$k = -\frac{1}{1-\nu} \quad \text{Deformación plana}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} ((1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y) + \dots$$
$$\dots + \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.17)$$

Tanto una ecuación como la otra, en el caso que les corresponda, se obliga a que el nuevo campo alisado la cumpla en un punto, concretamente en el nodo de ensamblado. En el caso de que se utilicen polinomios lineales para reconstruir el campo de tensiones, la ecuación de compatibilidad se cumple automáticamente, pero si el campo alisado es cuadrático, se añade una ecuación de restricción adicional.

### 3.3.3 Ecuaciones de equilibrio en el contorno

Estas sólo son de aplicación en aquellos patches que contengan algún elemento en contacto con el contorno. Consiste en hacer que el campo  $\sigma^*$  cumpla exactamente las condiciones de contorno de Neumann.

En caso estudiado por J.J. Ródenas *et al* [11], dónde los nodos están situados sobre el contorno geométrico, para imponer la condición de equilibrio en el contorno es suficiente con cumplir la ecuación (3.18) ya que el patch está centrado en el nodo.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^*(0,0) &= a_{xx1} = \sigma_{\xi} \\ \sigma_{xy}^*(0,0) &= a_{xy1} = \tau_{\xi\eta}\end{aligned}\tag{3.18}$$

Sin embargo, con el uso de la metodología GFEM, no es aplicable dicha condición, debido a que los nodos no se halla sobre el contorno, por este motivo se procede de la siguiente manera.

Dado que en general en estos contornos son conocidas las tensiones normales y tangenciales al mismo, se obliga a que, en ciertos puntos del contorno, las tensiones tangenciales y normales obtenidas del campo mejorado sean exactamente iguales a las impuestas por las condiciones de contorno. Se forzará en cumplimiento de las siguientes ecuaciones en cada punto dónde se desee.

$$\sigma_{\xi}(\xi_i, \eta_i) = \mathbf{p}(\xi_i, \eta_i) \mathbf{a}_{\xi\xi}\tag{3.19}$$

$$\tau_{\xi\eta}(\xi_i, \eta_i) = \mathbf{p}(\xi_i, \eta_i) \mathbf{a}_{\xi\eta}\tag{3.20}$$

En general los ejes locales no están alineados con las direcciones normal y tangencial en el contorno, como se muestra en la Figura 3.2, por ello las ecuaciones (3.19) y (3.20) no son directamente aplicables. Debido a este problema es necesario realizar una rotación del campo alisado de manera que estén en el mismo sistema de referencia normal y tangencial del contorno.

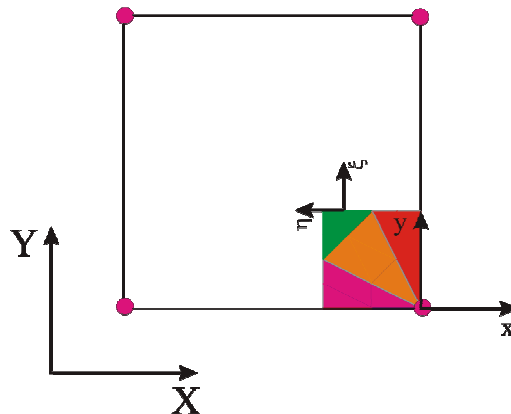


Figura 3.2 Representación del sistema de referencia global  $\{X, Y\}$ , sistema de referencia normalizado del nodo de ensamblado  $\{x, y\}$  y sistema de referencia local en el contorno  $\{\xi, \eta\}$ .

Para ello se plantea el siguiente sistema matricial, dónde  $\mathbf{R}$ , ecuación (3.21), es la matriz de rotación del campo de tensiones alisado desde los ejes



locales del nodo de ensamblado hacia los ejes normal y tangencial del contorno, el ángulo de rotación viene definido por  $\alpha$ .  $\mathbf{P}$  es la matriz donde están los valores  $\{x, y\}$  del punto donde es evaluado el campo de tensiones alisado y  $\{\mathbf{a}_{xx}, \mathbf{a}_{yy}, \mathbf{a}_{xy}\}$  son los coeficientes correspondientes a cada componente del campo alisado.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ -0.5\sin(2\alpha) & 0.5\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\xi}^* \\ \sigma_{\eta}^* \\ \tau_{\xi\eta}^* \end{Bmatrix} = \mathbf{RP}(x, y) \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{xx} \\ \mathbf{a}_{yy} \\ \mathbf{a}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Planteado este sistema, para forzar el cumplimiento exacto de las ecuaciones (3.19) y (3.20) en puntos del contorno basta con hacer cumplir las siguientes ecuaciones.

$$\sigma_{\xi}^*(\xi_i, \eta_i) = \sigma_{\xi}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.23)$$

$$\tau_{\xi\eta}^*(\xi_i, \eta_i) = \tau_{\xi\eta}(\xi_i, \eta_i) \quad (3.24)$$

Una vez realizado este planteamiento, para el caso de un campo alisado lineal, se eligen 2 puntos de Gauss del contorno asociado el patch y se hacen cumplir las ecuaciones (3.23) y (3.24), obteniendo 4 ecuaciones de restricción adicionales. En el caso de un campo cuadrático, se procede del mismo modo pero con 3 puntos de Gauss, obteniendo así 6 ecuaciones de restricción adicionales. La curva sobre la que se aplican las restricciones se elige según el procedimiento explicado al inicio de este punto.

### 3.3.4 Condiciones de contorno en simetría

Para los contornos que tengan simetría, se establece como condición que la tensión tangencial en ejes locales del contorno sea nula. Ésta condición se fureza en varios puntos del contorno del mismo modo que se imponen las condiciones de equilibrio en el contorno. Para ello se procede de mismo modo, pero la condición que se impone es la que sigue.



$$\tau_{\xi\eta}^*(\xi_i, \eta_i) = 0 \quad (3.25)$$

La condición (3.25) se sustituye en la ecuación (3.22) obteniendo así una ecuación de restricción adicional por cada punto del contorno en el que se hace cumplir. Los puntos donde se obliga su cumplimiento son los puntos de Gauss del segmento de contorno que cruza el patch correspondiente. Dos puntos para el caso de lineales y tres para el caso de cuadráticos

### 3.3.5 Nodos de mitad de lado

Este tipo de nodos, que tiene lugar a partir de elementos cuadráticos, tienen un tratamiento especial. Todas las condiciones expuestas anteriormente en este capítulo son de aplicación en nodos vértice. Para este caso, se toma el promedio de los valores de tensiones en los nodos vértice a ambos lados del nodo de medio lado del mismo lado del elemento. Dicho en otras palabras, se hace una interpolación con funciones de forma lineales en los nodos de medio lado con los valores de los nodos vértice.

### 3.3.6 Restricciones y tipos de nodos

En general en este trabajo se ha trabajado sobre 3 tipos de nodos diferentes, en cuanto a las condiciones de restricción aplicables. Ellos son nodos internos, de contorno y de simetría, los cuales se muestran en la Figura 3.1. Las condiciones que se aplican en cada caso son las siguientes.

- *Nodos internos*: condición de equilibrio interno (3.11) y (3.12), compatibilidad de deformaciones (3.16) o (3.17).
- *Nodos de contorno*: condición de equilibrio interno (3.11) y (3.12), compatibilidad de deformaciones (3.16) o (3.17) y de equilibrio en el contorno (3.23) y (3.24). Hay que notar que en este tipo de nodos siempre se utiliza un campo alisado cuadrático con el fin de satisfacer en mayor medida las condiciones de contorno.



- *Nodos de simetría*: condición de equilibrio interno (3.11) y (3.12), compatibilidad de deformaciones (3.16) o (3.17) y condición de simetría (3.25).

Finalmente, según el tipo de nodo y del grado del campo alisado se imponen un número diferente de ecuaciones de restricción que definen el campo de tensiones alisado tal y como se muestra en la tabla que sigue.

Grado del campo	Lineal	Cuadrático
Nodos internos	3	7
Nodos de contorno	8	13
Nodos de simetría	5	10
Nº máximo de restricciones	9	18

Tabla 3.1 Ecuaciones de restricción aplicadas según condiciones.

### 3.3.7 Interpolación del campo mejorado en el patch

Tanto en la técnica SPR clásica como en su adaptación para GFEM, la interpolación del campo dentro del patch se realiza mediante una interpolación lineal con funciones de forma de los vértices a partir de los valores del campo mejorado en los nodos vértice de cada elemento.

En la técnica SPR-C la interpolación de tensiones en el elemento se realiza de distinta manera. Dado que se conoce el campo  $\sigma_i^*$  en todos los puntos del patch del nono  $i$  evalúa el valor del campo mejorado en cada punto dentro del elemento ponderado por el valor de la función de forma correspondiente, particularizada en dicho punto tal y como indica la ecuación (3.9). De ese modo se aprovecha en mayor medida la información obtenida del campo recuperado, este método es denominado *conjoint polynomials enhancement*.

Ésta técnica es más precisa que el procedimiento estándar de interpolación ya que contiene toda la información del campo reconstruido  $\sigma_i^*$  en cada patch. El uso de esta técnica junto con la imposición de condiciones de contorno elimina el efecto de la baja calidad de resultados evaluados en nodos *fantasma*, proporcionando resultados notablemente superiores en calidad a los de la técnica SPR.





UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



En el siguiente punto se van a contrastar los campos recuperados con las dos técnicas de *recovery* adaptadas para trabajar en el entorno GFEM.



## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta parte de la tesis se presentan los resultados obtenidos con las técnicas propuestas sobre distintos problemas tipo. Los resultados tratan de comprobar el comportamiento de la técnica SPR-C ante estos problemas. Cabe indicar que se toma como referencia la técnica SPR adaptada, descrita anteriormente, para observar las diferencias de los resultados y las mejoras obtenidas a través de la técnica SPR-C.

En primer lugar se definen ciertos parámetros que van a resultar de utilidad para el estudio comparativo. Posteriormente se analizarán varios problemas con solución exacta para analizar la precisión y limitaciones de la técnica propuesta. Finalmente se presentarán varios problemas con geometrías relativamente complejas que permitan analizar la robustez del método.

### *4.1 Definición de parámetros y magnitudes*

#### **4.1.1 Error relativo en tensiones de Von Mises**

El error relativo en tensiones de Von Mises se describe de acuerdo con la expresión (4.1). En ella se compara, tanto para la solución alisada, como para la solución obtenida directamente mediante elementos finitos, el valor de las tensiones de Von Mises en cada punto que se considere necesario. Más adelante, se utilizarán los puntos de Gauss de cada elemento.

Este error da información sobre la diferencia que se obtiene del campo de tensiones calculado al campo de tensiones real, y por ello da un orden de magnitud de la precisión en tensiones del método utilizado. Dicha información es de utilidad para conocer el grado de fidelidad con que el campo de tensiones usado reproduce el exacto, para así poder discernir qué método es mejor para poder comparar las tensiones obtenidas con las máximas del material, y así poder indicar si el componente es apto o no para las solicitaciones a las que está sometido, siempre desde el punto de vista del uso de la aplicación en algoritmos de optimización.



$$\eta^h = \frac{\sigma_{vm} - \sigma_{vm}^h}{\sigma_{vm}} \quad (4.1)$$
$$\eta^* = \frac{\sigma_{vm} - \sigma_{vm}^*}{\sigma_{vm}}$$

### 4.1.2 Efectividad local

Se puede definir también la efectividad del estimador a nivel local, o sea, en cada elemento según la expresión (4.2) donde el superíndice  $e$  indica que los errores han sido evaluados solamente a nivel de elemento, por lo tanto se obtiene una efectividad para cada elemento de la malla.

$$\theta^e = \frac{\|\mathbf{e}_{es}^e\|}{\|\mathbf{e}^e\|} \quad (4.2)$$

Debido a que el rango de valores de la efectividad, por su definición puede oscilar en el rango (0,1) en el caso de que el error estimado subestime el exacto y en el rango (1,+∞) en el caso de que el error estimado sobrestime el exacto, se define el parámetro  $D$  o índice de efectividad local según las siguientes ecuaciones.

$$D = \theta^e - 1 \quad \text{si } \theta^e \geq 1$$
$$D = 1 - \frac{1}{\theta^e} \quad \text{si } \theta^e < 1 \quad (4.3)$$

### 4.1.3 Error de la solución alisada en norma energética, $\|\mathbf{e}^*\|$

El error  $\|\mathbf{e}^*\|$  representa la norma energética de la diferencia entre el campo de tensiones exacto y el reconstruido, la expresión (4.4) define el error de la solución reconstruida en norma energética en un dominio  $\Omega$ , para el caso de elementos finitos. Debido a la discretización es conveniente expresarlo según la ecuación (4.5) donde se integra dentro de cada elemento.



$$\|e^*\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\sigma - \sigma^*)^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma - \sigma^*) d\Omega} \quad (4.4)$$

$$\|e^*\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{NElem} \int_{\Omega_n} (\sigma - \sigma^*)^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma - \sigma^*) d\Omega_n} \quad (4.5)$$

#### 4.1.4 Parámetros utilizados en el estudio.

##### 4.1.4.1 Problemas con solución exacta

Para analizar el comportamiento de la técnica usada, se van a utilizar diferentes parámetros que caractericen el comportamiento de la técnica de *recovery* usada y su calidad. Se diferencian dos conceptos distintos en este aspecto. Por una parte se evalúa la calidad de la estimación del error y por otra, la calidad del campo de tensiones reconstruido.

El primer objetivo es interesante para poder evaluar la capacidad de la técnica de *recovery* para poder estimar el error de discretización cometido. Por otro lado, es interesante conocer la capacidad de evaluación de las tensiones en el dominio ya que resulta de interés en algoritmos evolutivos conocer, con la mayor precisión posible, las tensiones en el componente cuando es sometido a ciertas sollicitaciones. Dicha importancia se fundamenta en que un criterio de desestimación de individuos en el proceso evolutivo es si superan en algún punto las tensiones máximas soportadas por el material, por lo que estas deberán ser calculadas con suficiente precisión. Los parámetros usados son los siguientes.

- Error en tensiones de Von Mises entre los campos  $\sigma^h$  y  $\sigma^*$  con  $\sigma$ .
- Distribución de  $D$  en la malla.
- Efectividad global  $\theta$ , índice de efectividad local, su media  $m(|D|)$  y desviación típica  $\sigma(D)$ .
- Error relativo en norma energética y velocidad de convergencia.
  - Hay que tener en cuenta que Bordas *et al.* [14], Bordas y Dulfort [8], y Dulfort y Bordas [15] proponen que la velocidad de convergencia del error estimado sea otro mecanismo para medir la calidad del estimador. En primer lugar es importante saber que la



evolución del estimador del error en norma energética tiende a cero conforme aumentan los grados de libertad, pero además resulta interesante que dicha convergencia se realice a una velocidad adecuada. Dicho estudio de la velocidad de convergencia es fundamental para poder conocer el funcionamiento del estimador del error en problemas donde no es conocida la solución exacta ya que resulta imposible calcular en estos casos la efectividad.

- La notación usada en los gráficos es la que sigue. Los errores considerados en este caso son el error estimado 'Ees' y su velocidad de convergencia 'VEes'; el error exacto 'Eex' y su velocidad de convergencia 'VEex' y finalmente el error de la solución alisada 'Estex' y su velocidad de convergencia 'VEstex'. Todos ellos considerados para el caso SPR y SPR-C, estos últimos indicados con una 'C' final.

#### **4.1.4.2 Problemas sin solución exacta**

En este tipo de problemas se trata de comprobar el comportamiento de las técnicas de *recovery* ante geometrías relativamente complejas, para ello los parámetros usados son los siguientes.

- Diferencia entre  $\sigma^*$  y  $\sigma^h$  en puntos de Gauss y  $\sigma^*$  en nodos y puntos de Gauss.
- Distribución del error relativo estimado en norma energética en la malla.
- Error relativo estimado en norma energética y velocidad de convergencia.

## **4.2 Problema 1. Placa cuadrada con campo de desplazamientos conocido**

Para comprobar el funcionamiento del programa implementado, se han elegido varios problemas con solución conocida. El primero de ellos es el de una



placa infinita de la que se ha modelado tan solo un cuadrado de lado 2, que esta definido por 8 puntos: los puntos vértice del cuadrado y los de mitad de lado.

El campo de desplazamientos aplicado sobre la placa es el descrito por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}u_x(x, y) &= x + x^2 - 2xy + x^3 - 3xy^2 + x^2y \\u_y(x, y) &= -y - 2xy + y^2 - 3x^2y + y^3 - xy^2\end{aligned}\quad (4.6)$$

A partir del campo de desplazamientos de la expresión (4.6) se obtiene el siguiente campo de tensiones.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\nu} \cdot (1 + 2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y) \\ \sigma_{yy} &= \frac{-E}{1+\nu} \cdot (1 + 2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(-x - y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 6 \cdot x \cdot y\right)\end{aligned}\quad (4.7)$$

Finalmente, para garantizar el cumplimiento de las condiciones de equilibrio, aplicando las ecuaciones (3.11) y (3.12) se obtienen las fuerzas volumétricas que deben ser impuestas para garantizar el equilibrio interno. Su expresión viene definida en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}b_x &= \frac{-E}{1+\nu} \cdot (1 + y) \\ b_y &= \frac{-E}{1+\nu} \cdot (1 - x)\end{aligned}\quad (4.8)$$

Las condiciones de contorno aplicadas en este caso son de Neumann en los 4 contornos y se restringe el desplazamiento vertical en los nodos de mitad de lado de los lados verticales y el horizontal en los lados horizontales. La representación de las condiciones de contorno aplicadas se puede observar en la figura que sigue.

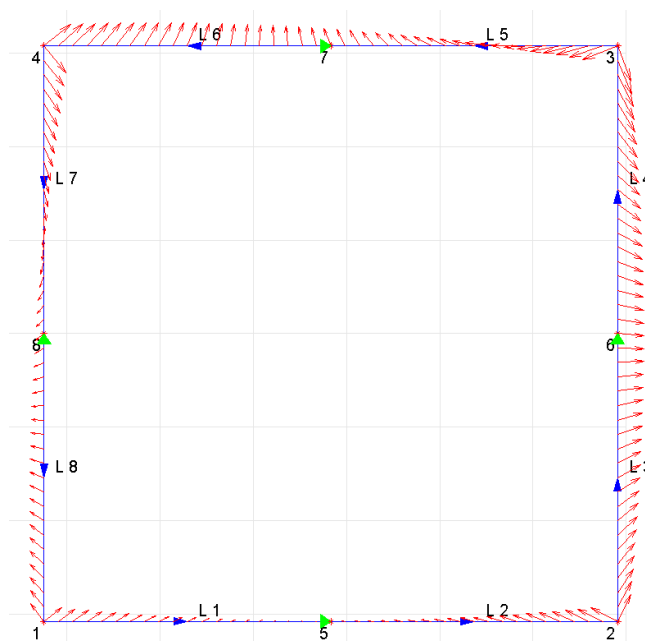


Figura 4.1 Problema 1. Condiciones de contorno y geometría.

Una vez definida la solución exacta en todos sus aspectos, se procede al análisis por elementos finitos del problema propuesto en la Figura 4.1 para diferentes tipos de malla, sean mallas uniformes y  $h$ -adaptativas lineales y cuadráticas, todo ello con las técnicas de alisado SPR y SPR-C.

Los tipos de mallas usados en el problema corresponden a los representados en las figuras 4.2, 4.3 y 4.4, para de este modo observar la influencia que tiene la posición relativa entre el contorno y el borde de los elementos. Dicha relación de posiciones influye en el área de elemento que está cubierta por el dominio. Se observará qué ocurre al variar dicha área de forma controlada.

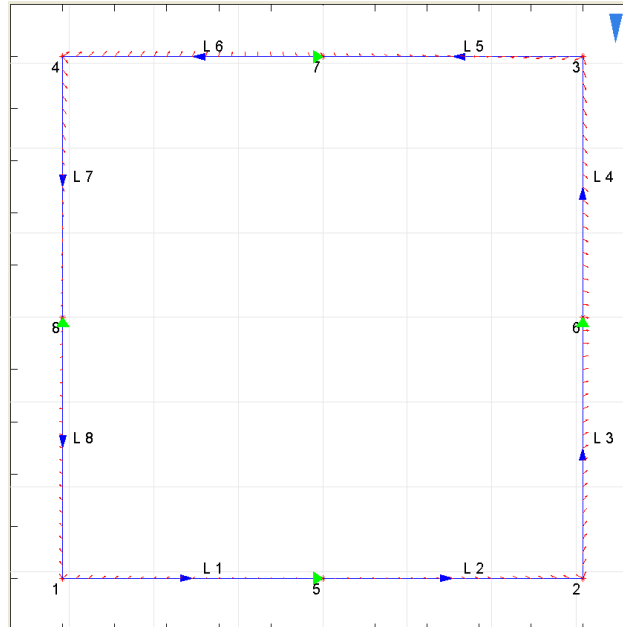


Figura 4.2 Problema 1. Malla tipo 1. Dimensiones  $[-1.3, 1.3; -1.3, 1.3]$ ; centrada.

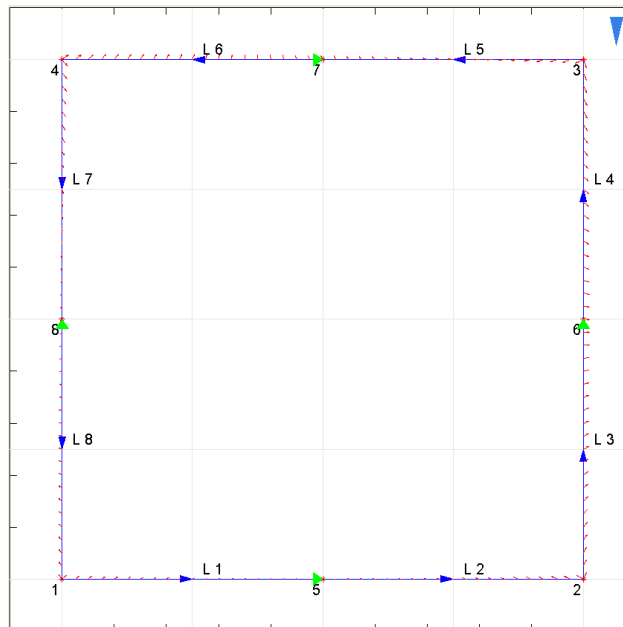


Figura 4.3 Problema 1. Malla tipo 2. Dimensiones  $[-2, 2; -2, 2]$ ; borde del elemento coincide con en lado del contorno.



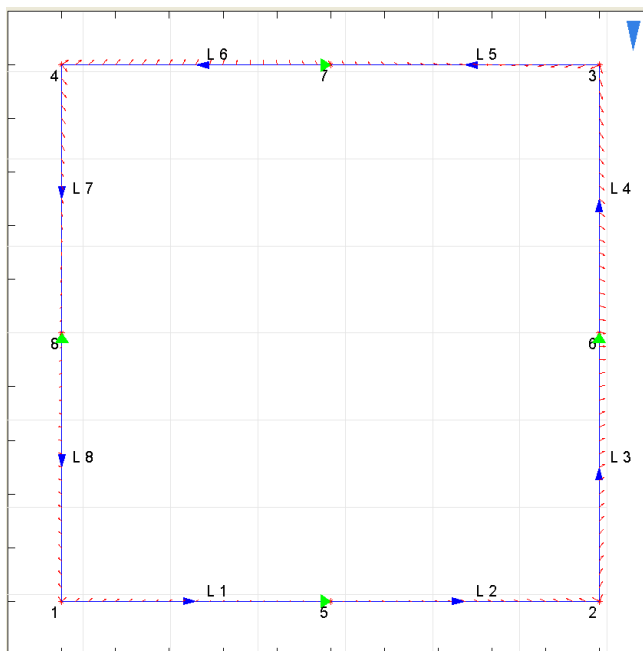


Figura 4.4 Problema 1. Malla tipo 3. Dimensiones  $[-1.57, 1.03; -1.3, 1.3]$ ; desplazada.

### 4.2.1 Mallado lineal uniforme

Ahora se presentan los resultados de los parámetros de análisis obtenidos tras la evaluación para los tipos de malla 1, 2 y 3.

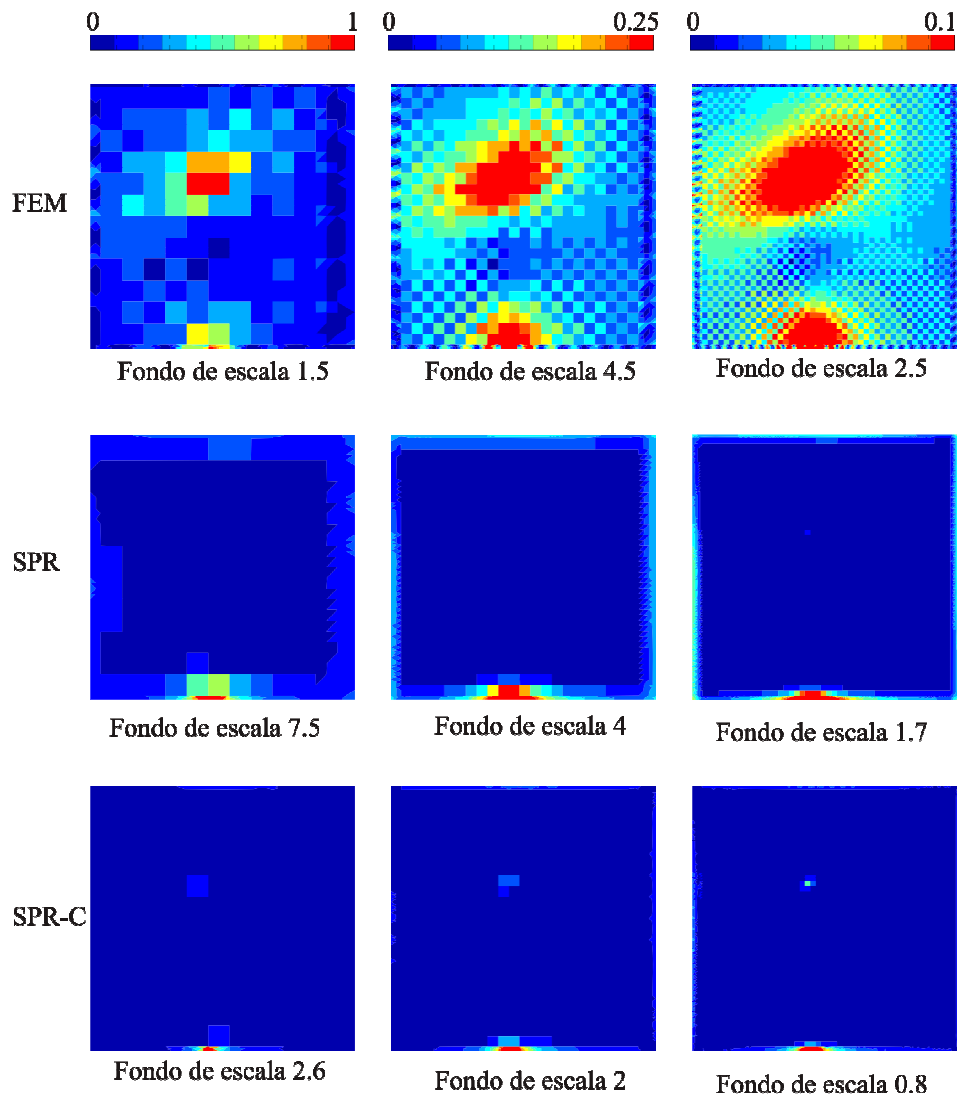


Figura 4.5 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla tipo 3. Error relativo exacto en tensiones de Von Mises.

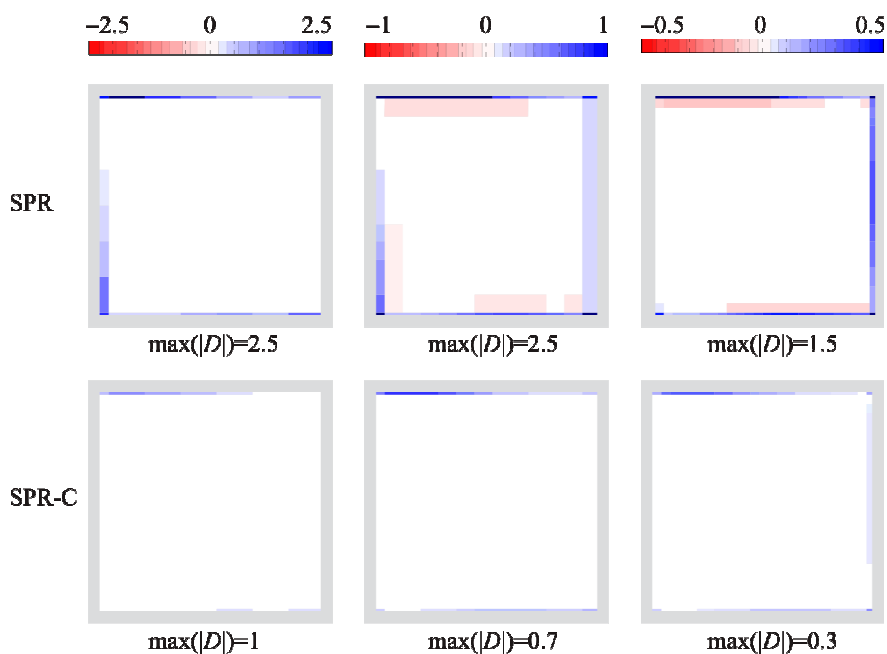


Figura 4.6 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla tipo 3. Distribución de  $D$ .

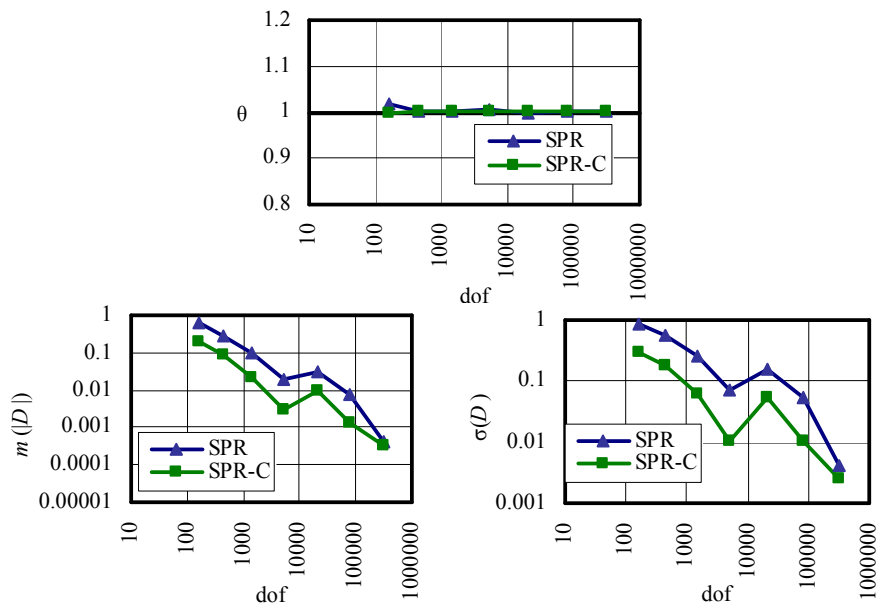


Figura 4.7 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla tipo 1. Representación de  $\theta$ ,  $m(|D|)$  y  $\sigma(D)$ .

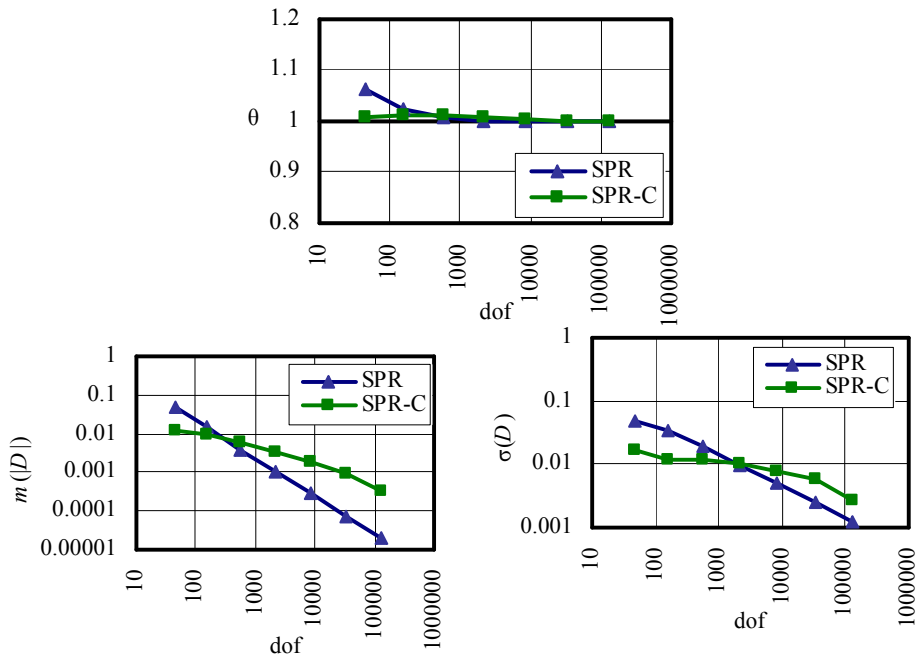


Figura 4.8 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla tipo 2. Representación de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

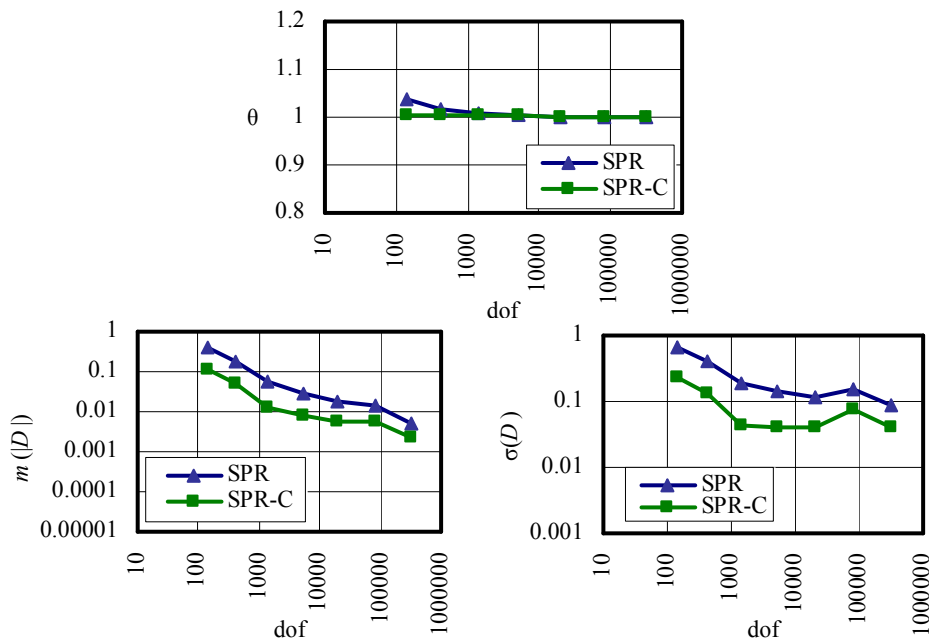


Figura 4.9 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla tipo 3. Representación de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

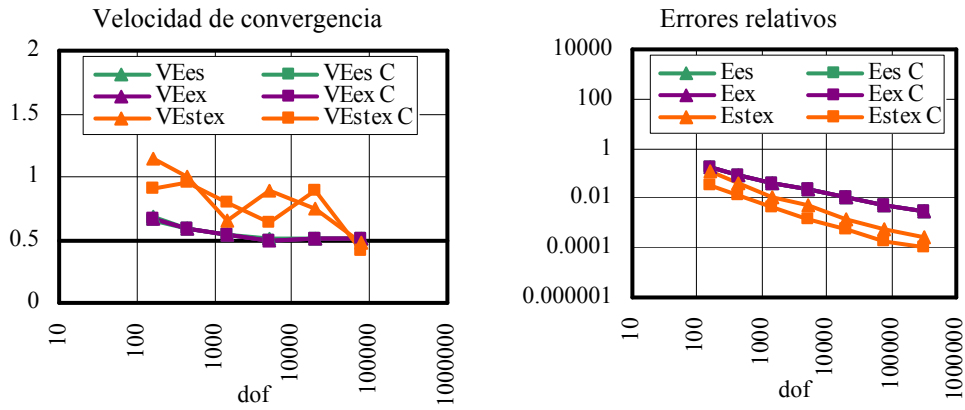


Figura 4.10 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla 1. Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

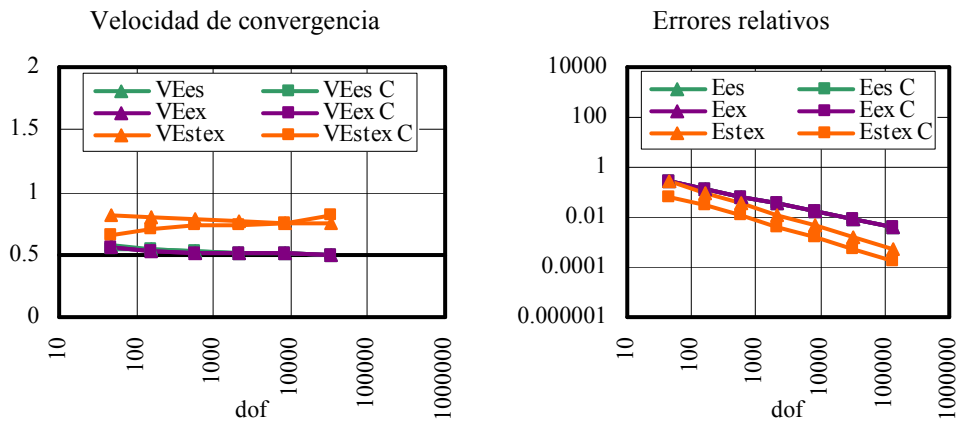


Figura 4.11 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla 2. Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

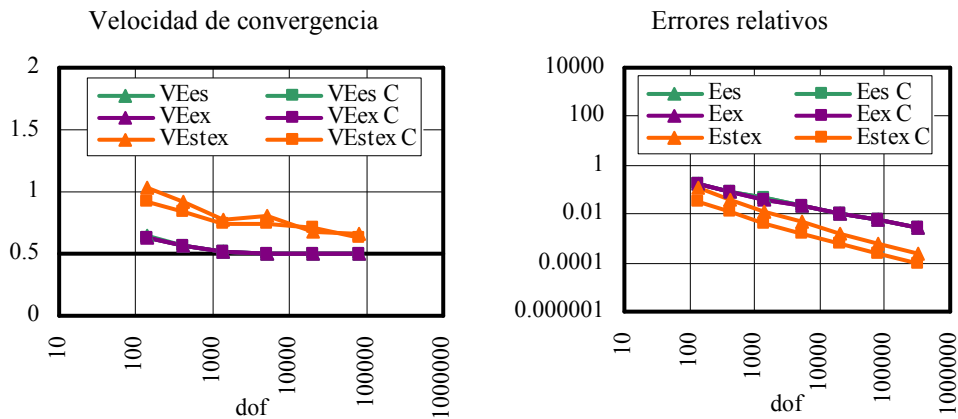


Figura 4.12 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla 3. Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

En la Figura 4.5 se muestran los resultados de error relativo exacto en tensiones de Von Mises obtenidos para el campo directamente evaluado mediante el FEM, el reconstruido mediante la técnica SPR y finalmente el reconstruido mediante la técnica SPR-C. En cada uno de los gráficos representados se indica el fondo de escala correspondiente. Se ha representado, por columnas, con la misma escala para de ese modo poder comparar con facilidad los resultados.

Los resultados muestran la mejoría en el error relativo en tensiones de Von Mises que se produce al usar los distintos campos de tensiones reconstruidas. Por este motivo resulta de interés el uso de los campos de tensiones reconstruidos para el cálculo de tensiones en cualquier punto del dominio del problema.

Cabe destacar que en el punto inferior en los gráficos SPR-C que marca el fondo de escala de dichos gráficos, el valor de tensiones de Von Mises exactas toma valores cercanos a cero, por ello se intensifica el error relativo en tensiones cometido en dicho punto. Si se obvia este punto, el error cometido por el campo alisado correspondiente a la técnica SPR-C está muy cercano a cero en todo el dominio. Además se observa una mejoría notable en zonas cercanas a los contornos. En este caso, con malla tipo 3, de contornos desplazados respecto de la malla, no se observa gran influencia en el campo de tensiones por el hecho de la diferente área cubierta del elemento.



En la Figura 4.6, se puede observar, a diferencia de la Figura 4.5 dónde no es apreciablemente influyente el tamaño del área intersectada, como en los elementos de contorno cuya área se asemeja más a la del elemento completo, el índice efectividad del estimador del error, proporcionado por ambas técnicas de *recovery*, es mejor. No obstante, el índice de efectividad conseguido mediante la técnica SPR-C es mejor incluso en elementos intersectados.

La Figura 4.7 y la Figura 4.9 muestran la comparación de los términos de efectividad global  $\theta$ , la media del índice de efectividad local  $m(|D|)$  y su desviación típica  $\sigma(D)$  para las técnicas SPR-C y SPR. Se observa que cuando la malla de aproximación no es coincidente en los bordes de sus elementos con el contorno del problema, tipos de malla 1 y 3, los resultados obtenidos con la técnica SPR-C mejoran notoriamente a los obtenidos con la técnica SPR.

Se observa también que la media y la desviación típica de  $D$ , disminuye a medida que se refina la malla. Esto es debido a que a pesar de que la estimación del error es de calidad desde pocos grados de libertad, dicha estimación mejora con el aumento de los grados de libertad porque se incrementa la información y la precisión de la malla, obtenida desde el análisis de elementos finitos. La mejora de la técnica SPR-C que presenta frente a la SPR, es debida a que en mallas donde el contorno no es coincidente, mallas tipo 1 y 3, se incluye información del contorno adicional que es necesaria para mallas no coincidentes con el contorno. Es necesario comentar que el uso de los *conjoint polynomials* aporta mejoras, sobre todo, en elementos del contorno. Este efecto se explica en la Figura 4.52.

En cuanto al caso particular de coincidencia del contorno del problema, con los bordes de los elementos de la malla de aproximación, en la Figura 4.8, con mallas de tipo 2, se observa que los resultados de la técnica SPR y SPR-C son ambos muy buenos, pero la técnica SPR-C mejora notoriamente para mallas más bastas debido a que tiene mayor cantidad de información que se impone desde el contorno. El efecto que se produce en este caso para mallas finas, dónde el índice de efectividad local es más alto que el proporcionado por la técnica SPR-C se explica en la siguiente figura.

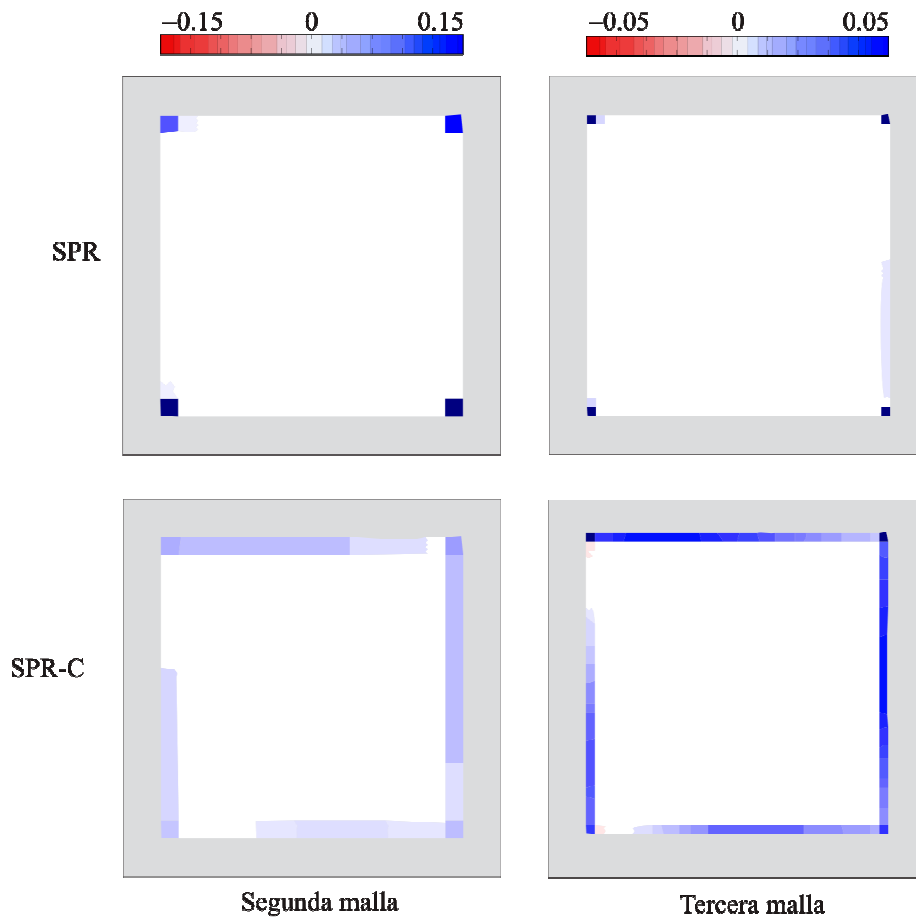


Figura 4.13 Problema 1. Quad4,  $h$ -uniforme. Malla tipo 2. Distribución de  $D$ .

Como se observa en la figura Figura 4.13, en aquellos elementos situados en el contorno, cuando se usa la técnica de *recovery* SPR-C, el índice efectividad local en el contorno se mantiene en valores entorno a 0.05. Esto se produce por la imposición de las condiciones de equilibrio en el contorno.

Una vez analizada la efectividad de ambas técnicas para mallas con elementos lineales es interesante evaluar la evolución del error con el incremento de los grados de libertad. Para ello se han realizado varios análisis con las mallas descritas anteriormente obteniéndose los resultados, tanto de evolución del error como de su velocidad de convergencia, los cuales se han presentado en las figuras de la 4.10 a la 4.12.





En todos los casos se observa que el error cometido entre el campo alisado del SPR y del SPR-C con el exacto es menor en el último caso siendo la velocidad de convergencia más estable para el SPR-C. Se observa también que la velocidad de convergencia del error tanto en el error estimado como en el exacto tiende a 0.5, siendo además ésta a la que tiene que tender para el tipo de malla planteado. En definitiva, para este tipo de mallado la técnica SPR-C tiene un comportamiento robusto y de mejores características que la técnica SPR.

Cabe añadir la robustez que presenta el método, en SPR y en mayor medida en SPR-C, respecto a la variación o descentrado de la malla. En otras palabras, se observa que el comportamiento entre la malla tipo 1 y la malla tipo 3 no varía de forma apreciable.

Por otro lado es interesante observar que en todos los gráficos, la velocidad de convergencia de la solución alisada (naranja) es mayor que la velocidad de convergencia de elementos finitos (morado), por ello, según demostraron Zienkiewicz y Zhu [5], el estimador del error será asintóticamente exacto.

#### **4.2.2 Malla cuadrática uniforme**

Al igual que en el caso anterior, los estudios de convergencia se han realizado en los supuestos descritos por las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 siempre con las mismas condiciones y variando únicamente el tipo de malla de aproximación que en este caso será de elementos cuadriláteros cuadráticos de ocho nodos. Los parámetros utilizados son los descritos al inicio de este apartado, para problemas con solución exacta.

A continuación se muestran los resultados obtenidos.

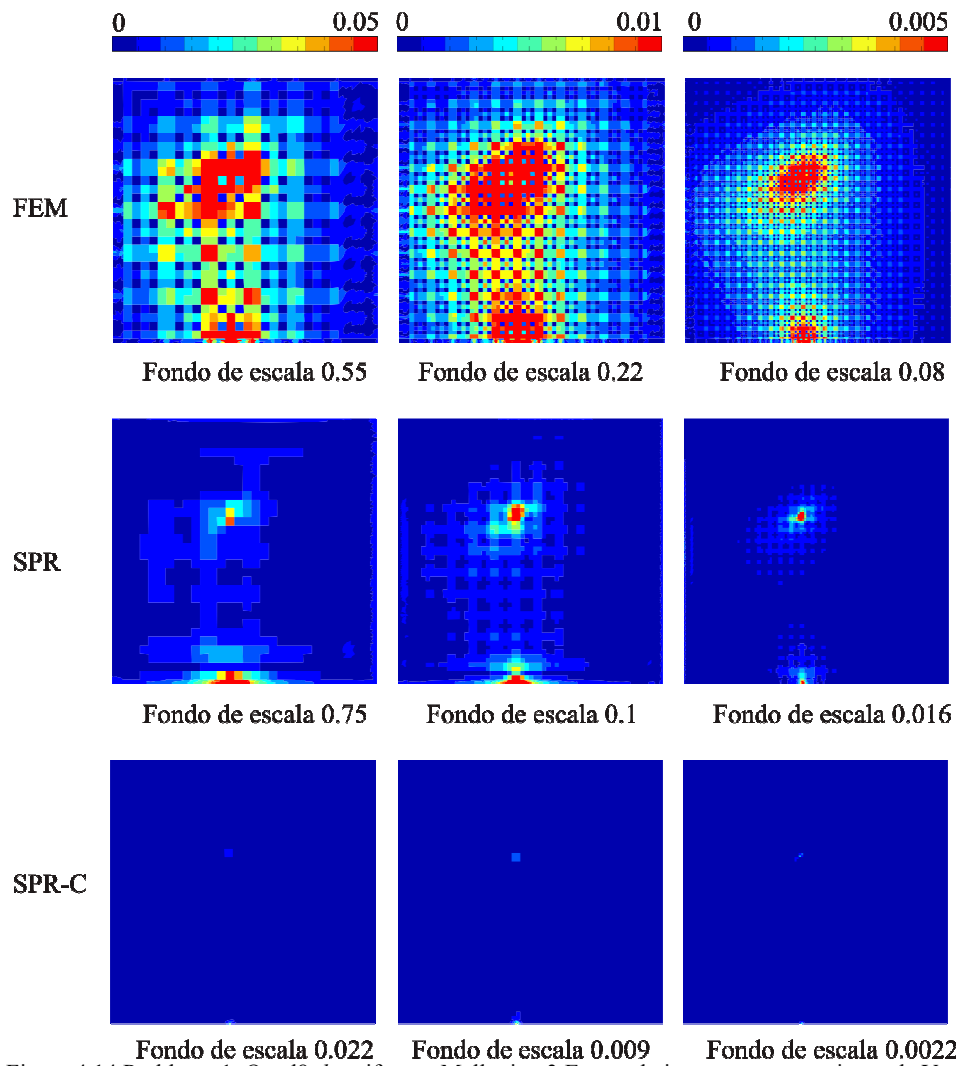


Figura 4.14 Problema 1. Quad8,  $h$ -uniforme. Malla tipo 3. Error relativo exacto en tensiones de Von Mises.

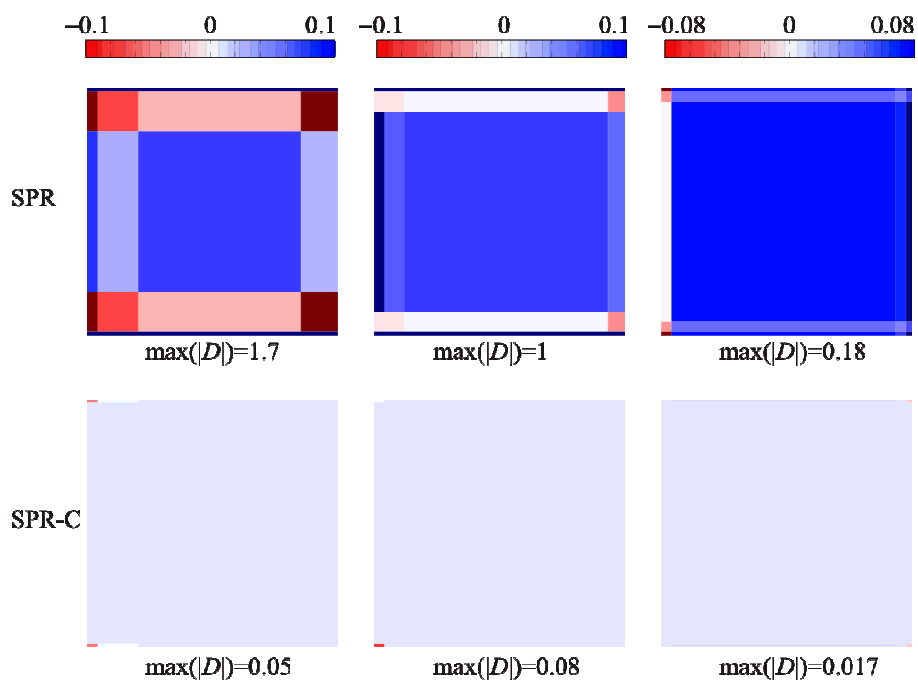


Figura 4.15 Problema 1. Quad8,  $h$ -uniforme. Malla tipo 3. Distribución de  $D$ .

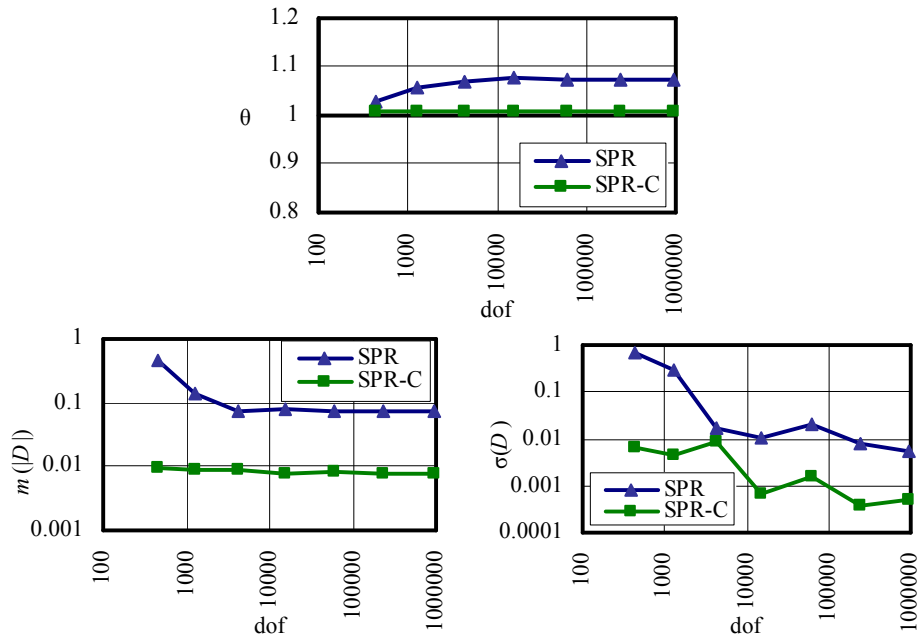


Figura 4.16 Problema 1. Quad8,  $h$ -uniforme. Malla tipo 1. Representación de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

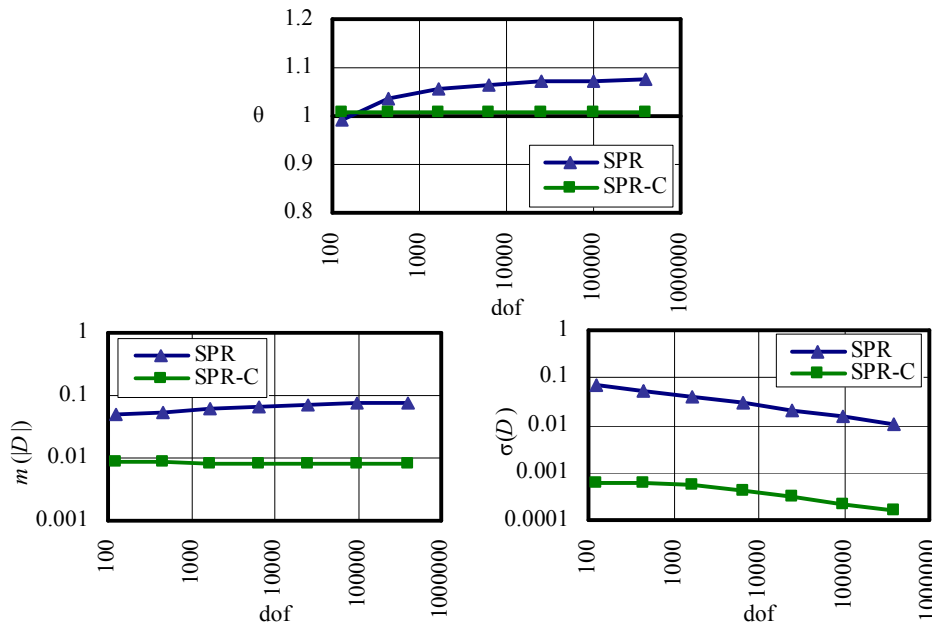


Figura 4.17 Problema 1. Quad8,  $h$ -uniforme. Malla tipo 2. Representación de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

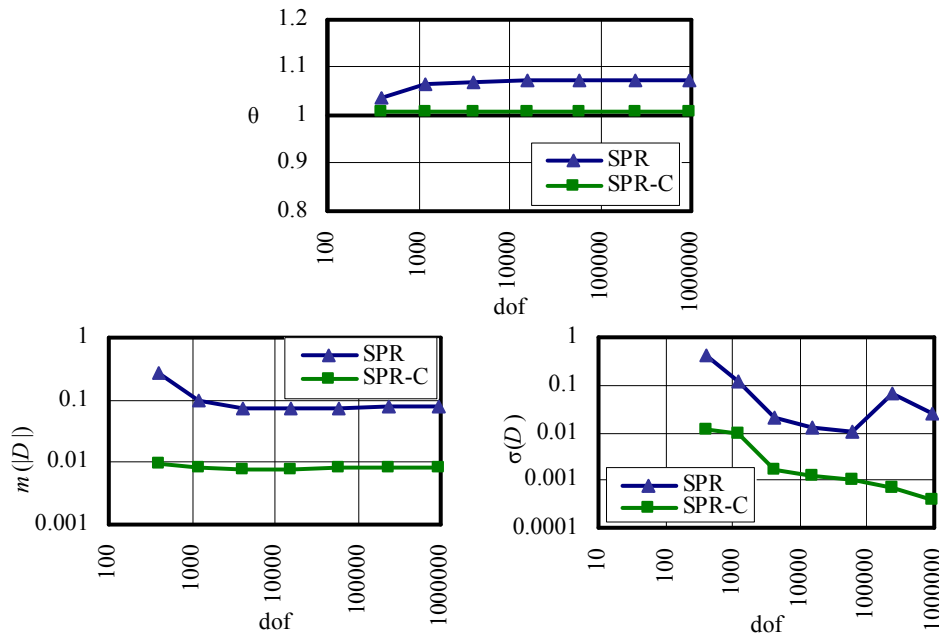


Figura 4.18 Problema 1. Quad8,  $h$ -uniforme. Malla tipo 3. Representación de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

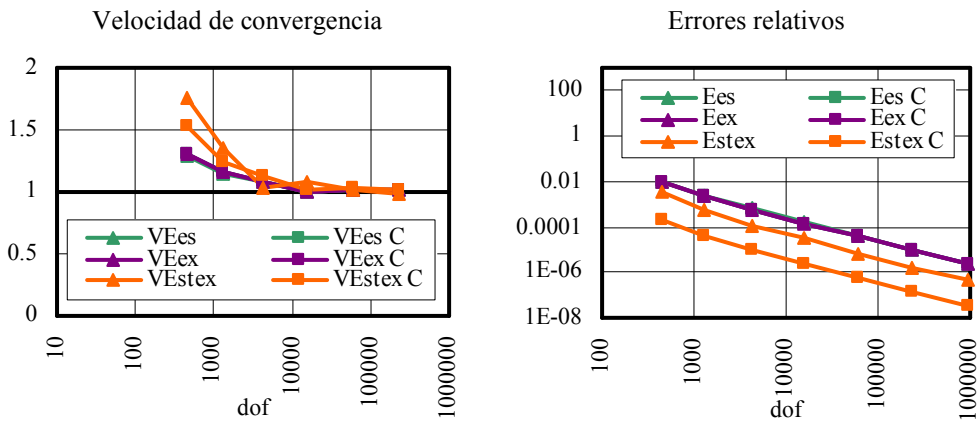


Figura 4.19 Problema 1. Quad8,  $h$ -uniforme. Malla 1. Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

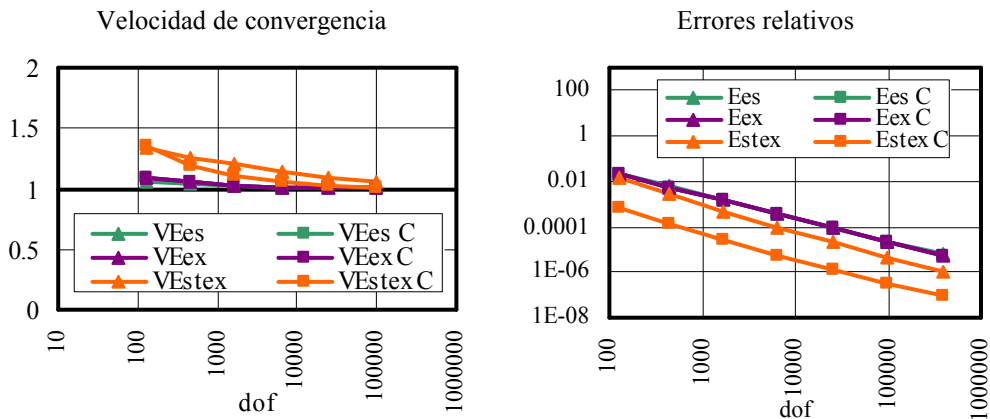


Figura 4.20 Problema 1. Quad8,  $h$ -uniforme. Malla 2. Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

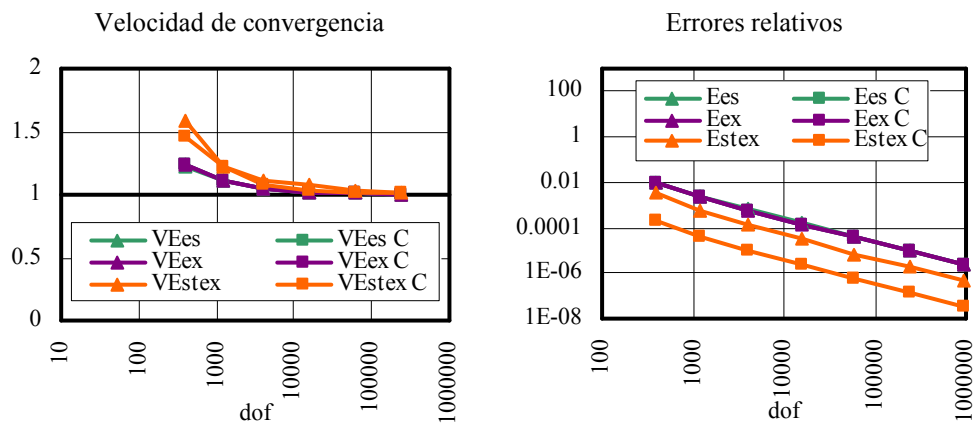


Figura 4.21 Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

Al igual que en el caso anterior, es muy interesante el uso de la solución alisada para obtener los valores tensionales en varios puntos del dominio de manera más exacta. Para ello es conveniente comparar los resultados obtenidos en el error relativo en la tensión de Von Mises en los puntos de Gauss y para los campos tensionales obtenidos por los diferentes métodos programados en la aplicación. Dichos resultados se muestran en la figura Figura 4.14.

Al igual que ocurre en el caso de la malla lineal, el campo mejora con la técnica de alisado utilizada, además cabe considerar que para la malla más fina



usada en esta representación en la técnica SPR-C se consiguen unos errores relativos máximos del 0.22%, unos valores muy bajos ya que la malla es aún bastante basta, y si además se comparan con los resultados de elementos finitos, el error disminuye en algo más de 30 veces. Esto hace pensar que usando el campo reconstruido se pueden obtener unos resultados del mismo orden de error con mallas mucho más bastas.

En la Figura 4.15, al igual que ocurre en el caso de elementos lineales, da mejores resultados en índice de efectividad local para todas las mallas presentadas. A diferencia del caso lineal, se observa que ahora en los elementos situados en el borde del contorno la efectividad apenas se diferencia de los elementos internos ya que el campo reconstruido representa con mayor calidad las tensiones. Además a diferencia de la técnica SPR, para este caso, es mucho más robusta la SPR-C con la variación del área intersectada de elemento.

Se observa además, que en todos los casos mostrados por las figuras 4.16, 4.17 y 4.18, las efectividades globales del SPR se estabilizan entorno a un valor algo superior a la unidad, mientras que en el caso del SPR-C el valor que se estabiliza es muy cercano a la unidad y tiende hacia la unidad, de ahí su mejor comportamiento a nivel global.

Por otro lado, si se observa el índice de efectividad local, los valores obtenidos son en todos los casos mejores para técnica SPR-C que para la SPR. Incluso para este tipo de elementos cuadráticos, para las mallas bastas, se observa que el comportamiento de la técnica SPR-C se estabiliza desde el inicio.

Como se observa en los gráficos de las figuras 4.19, 4.20 y 4.21, la velocidad de convergencia para este caso tiende a la unidad tal y como es esperado y ambas técnicas tiene un comportamiento ciertamente estable con el refinamiento de la malla. Dicho comportamiento indica que el estimador del error converge correctamente, pero se observa por otro lado que la velocidad del convergencia de elementos finitos (morado) y la de la solución alisada (naranja) tienden a igualarse cuando aumenta el número de grados de libertad pero siempre la velocidad de convergencia de la solución alisada es algo mayor que la de elementos finitos. Por otro lado, en los gráficos que muestran el error, se observa que el error del campo



alisado por la técnica SPR-C es de un orden de magnitud inferior al que se obtiene con el uso de la técnica SPR.

Para este caso también el comportamiento de la técnica SPR-C es mejor que el de la técnica SPR y además de forma independiente de la posición relativa entre la malla de aproximación y la geometría o contorno del problema, aspecto muy interesante para el método GFEM.

### 4.2.3 Mallado cuadrático $h$ -adaptativo

El mallado  $h$ -adaptativo es el objetivo final de este trabajo, por ello es de vital importancia la correcta estimación del error y su comportamiento. Una vez estudiado el método para refinamiento uniforme, se procede a comprobar los resultados en el caso de un refinamiento  $h$ -adaptativo. En este caso también se han utilizado las mismas mallas madre que en el caso anterior.

Se realizan los estudios mencionados anteriormente, además para este caso, al tratarse de mallas  $h$ -adaptativas, se representa la sucesión de mallas obtenidas en el proceso de refinado.

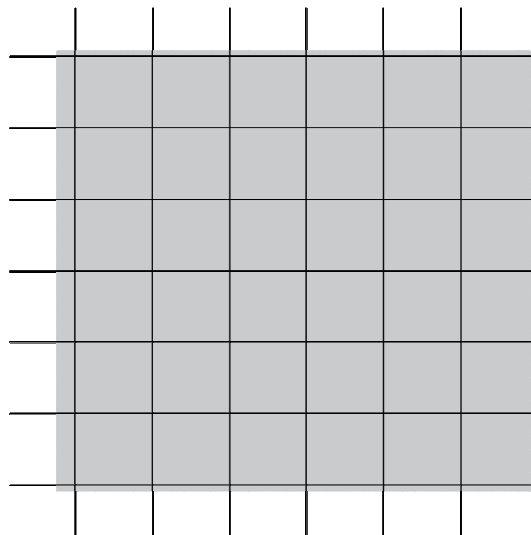


Figura 4.22 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativo. Malla tipo 3. Primera malla del proceso.



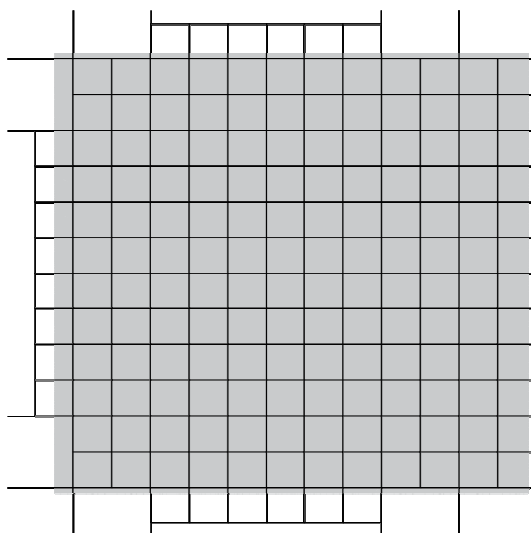


Figura 4.23 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativo. Malla tipo 3. Segunda malla del proceso.

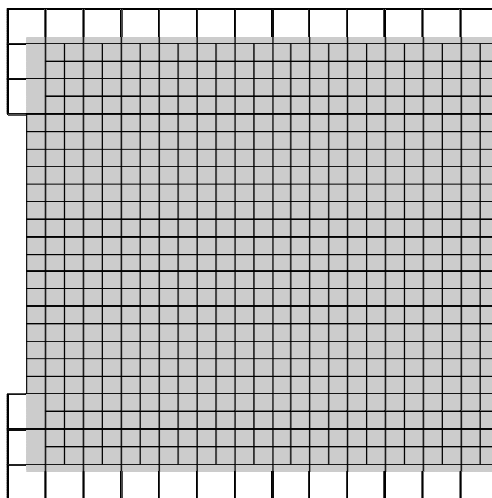


Figura 4.24 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativo. Malla tipo 3. Tercera malla del proceso.

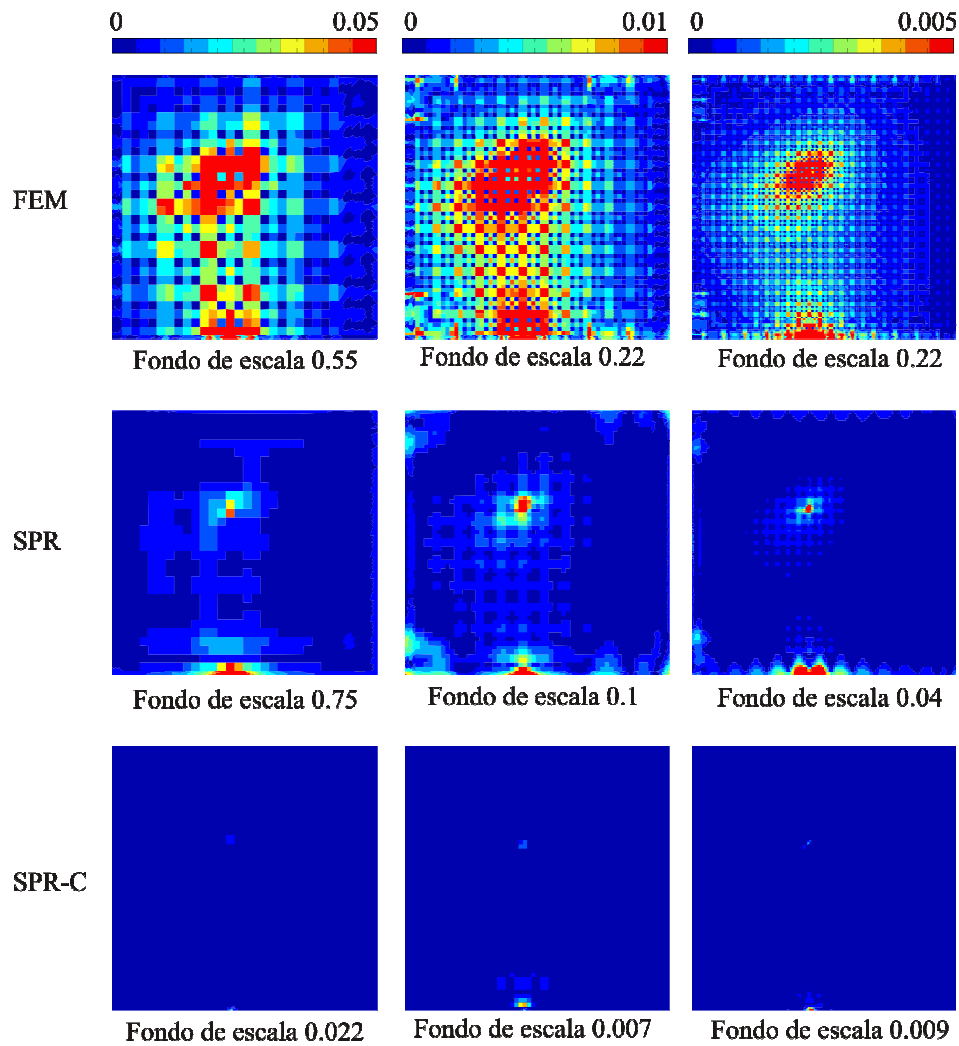


Figura 4.25 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativo. Malla tipo 3. Error relativo exacto en tensiones de Von Mises.

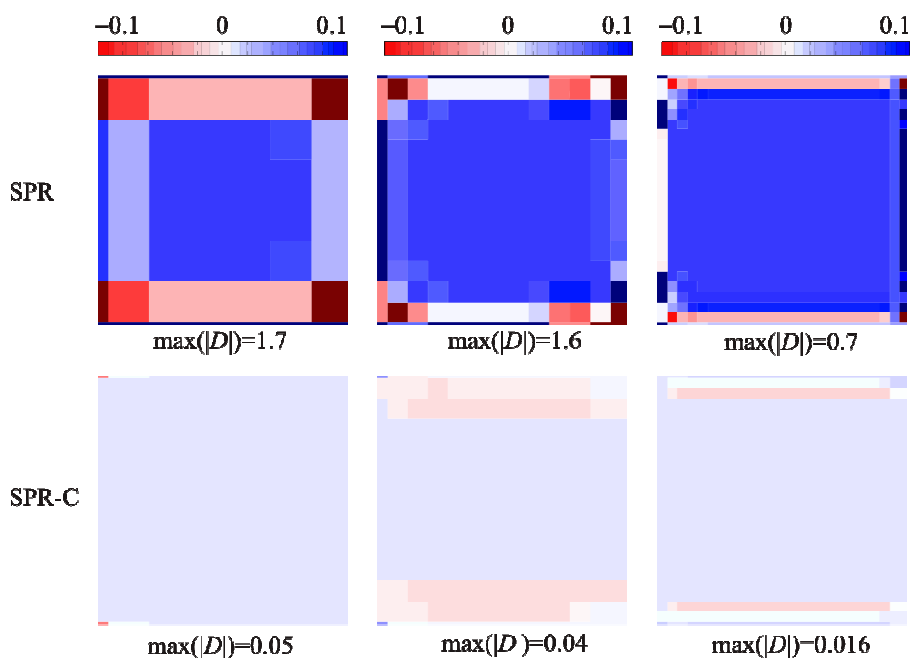


Figura 4.26 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativo. Malla tipo 3. Representación de  $D$ .

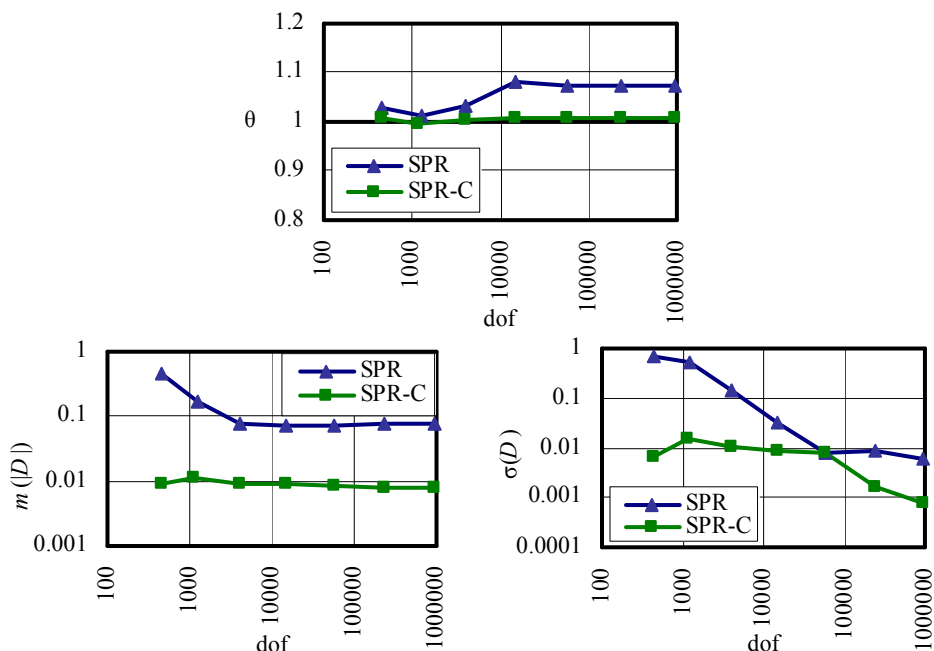


Figura 4.27 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativo. Malla tipo 1. Representación de  $\theta$ ,  $m(|D|)$  y  $\sigma(D)$ .

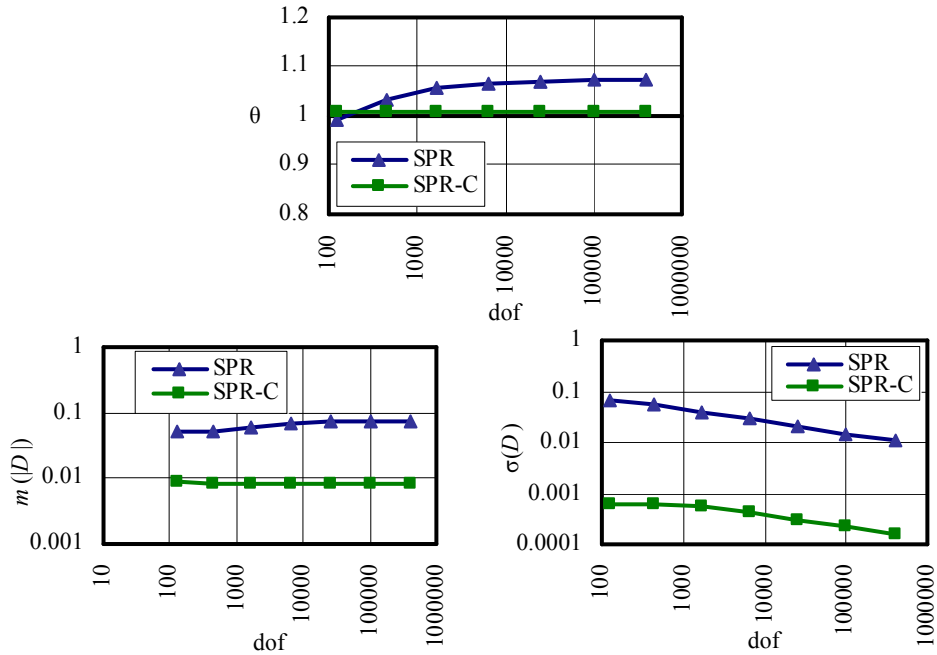


Figura 4.28 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativo. Malla tipo 2. Representación de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

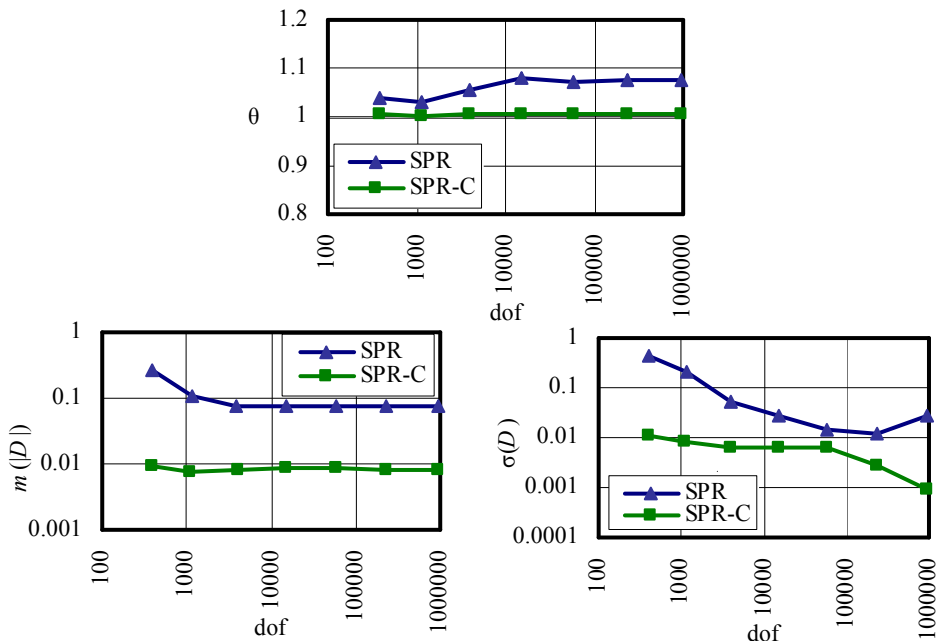


Figura 4.29 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativo. Malla tipo 3. Representación de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

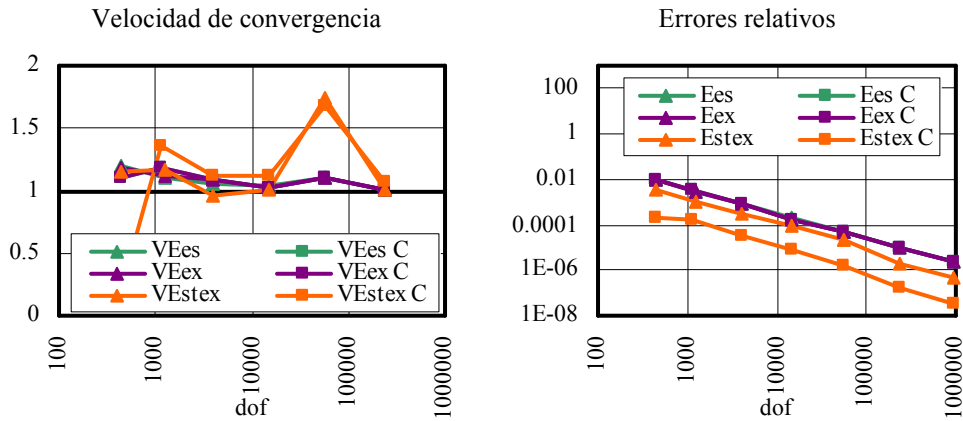


Figura 4.30 Problema 1. Quad8, *h*-adaptativa. Malla 1. Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

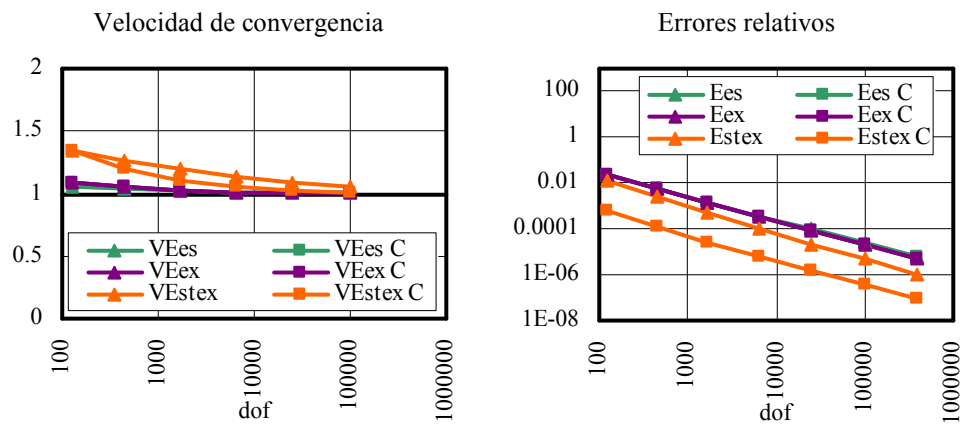


Figura 4.31 Problema 1. Quad8, *h*-adaptativa. Malla 2. Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

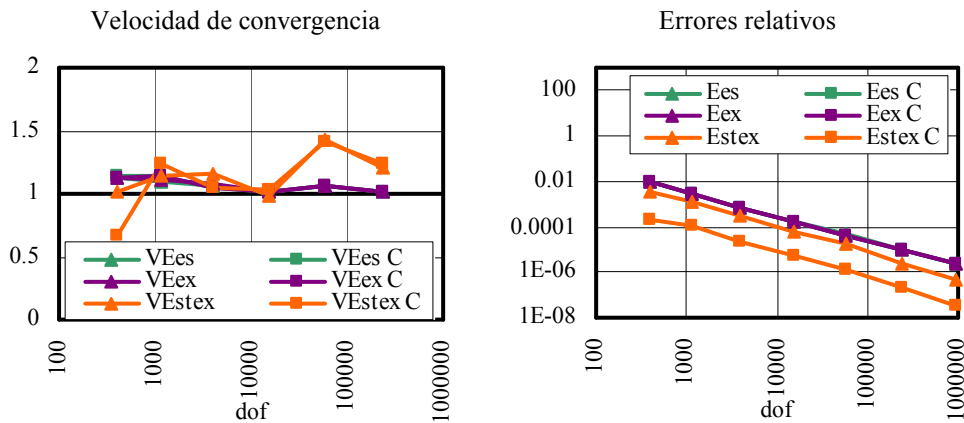


Figura 4.32 Problema 1. Quad8,  $h$ -adaptativa. Malla 2. Velocidades de convergencia y errores relativos. Técnicas SPR y SPR-C.

Tras observar la sucesión de mallas, es destacable en este punto que la  $h$ -adaptatividad en este caso no es tal. Ello es debido que la solución es muy suave y tiene a refinar de manera casi uniforme.

Es interesante observar que siempre el error cometido por el campo reconstruido es mucho menor que el obtenido directamente por elementos finitos, y además en este caso, donde tiene lugar un refinamiento  $h$ -adaptativo, el método SPR no produce gran reducción del error con respecto a la solución de elementos finitos, por ello el método SPR-C se muestra como una gran mejora en error cometido para este tipo de malla  $h$ -adaptativa.

Finalmente, como se ha comentado en los puntos anteriores, la solución reconstruida de tensiones reproduce de manera más fidedigna el campo real de tensiones en el dominio y por ello es interesante usar dicho campo reconstruido para su postproceso. La comparativa en este tipo de malla se muestra en la Figura 4.25.

En dicha figura, al igual que ocurre en la Figura 4.14, se observa una evidente mejoría en el campo de tensiones reconstruido frente al obtenido de los elementos finitos.

También para este caso, se ha realizado el estudio de la efectividad local de modo gráfico para la malla tipo 3, en el cual se realiza un estudio comparativo de la



efectividad de cada elemento usando un método de alisado u otro. Los resultados se muestran en la Figura 4.26 donde se puede observar que el índice de efectividad local de la técnica SPR es mucho peor que el que resulta de la técnica de *recovery* SPR-C, el cual demuestra ser más robusto y casi independiente de la posición relativa entre la malla de aproximación y el contorno del problema. Por otro lado, cabe destacar que la escala para el caso del SPR se encuentra saturada ya que existen elementos en los que el índice de efectividad toma valores muy grandes. Estos elementos se sitúan por lo general en el contorno cuando el resultado de la intersección de la malla de aproximación con la geometría da lugar a subdominios de los elementos cuyo tamaño es mucho menor que el del elemento completo al que corresponde. Este efecto, dado que las mallas usadas en ambos análisis son las mismas, desaparece por completo en el caso del campo alisado mediante la técnica SPR-C, de este modo se confirma la idoneidad de dicha técnica para este tipo de problemas.

En cuanto a la efectividad y sus parámetros relacionados, debido a que el refinamiento es casi uniforme, se comporta de manera semejante al caso anterior. Lo mismo ocurre en los parámetros relacionados con la estimación de error.

### ***4.3 Problema 2. Tubo sometido a presión interna***

En este apartado se procede a resolver un problema tipo, que consiste en un tubo sometido a una presión interna. En la modelización del problema, se utiliza solamente un cuarto de tubería ya que se cumplen las condiciones de simetría para poder obviar el resto del dominio. Con esto el contorno del problema queda definido como muestra la siguiente figura.

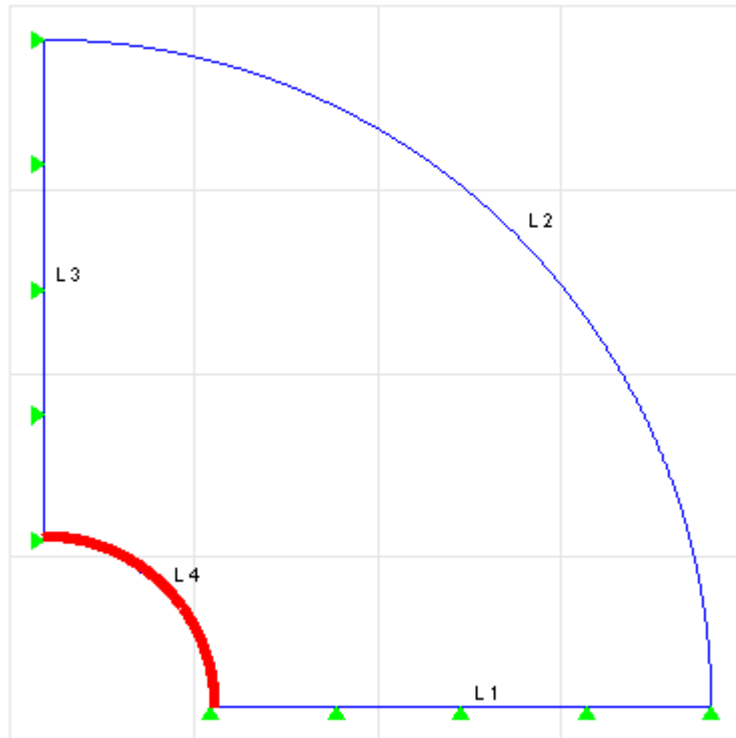


Figura 4.33 Problema 2. Malla madre, condiciones de contorno y geometría.

En la Figura 4.33, se observa la malla inicial de aproximación, cuyas medidas son en  $x$   $[-1;21]$  y en  $y$   $[-1;21]$ . Las condiciones de contorno aplicadas son una presión unitaria en el contorno 'L4' en dirección radial y hacia el exterior. En el contorno 'L1' y 'L3' hay aplicadas 2 condiciones de simetría que consisten en restringir en desplazamiento vertical y horizontal del contorno respectivamente. Finalmente el contorno 'L2' se encuentra libre.

En este caso se ha utilizado únicamente un tipo de malla atendiendo a la posición relativa entre el contorno del problema y la malla de aproximación usada debido a que al utilizar mallas regulares no es posible hacer coincidir los bordes de los elementos con todo el contorno del problema.

La solución analítica de este problema en coordenadas cilíndricas es :





$$u_r = \frac{P \cdot (1 + \nu)}{E \cdot (k^2 - 1)} \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot r + \frac{b^2}{r} \right] \quad (4.9)$$
$$k = \frac{b}{a}$$

En la expresión (4.9), la constante  $b$  es el radio externo del cilindro y  $a$  es el radio interno del mismo, siendo  $k$  la relación de radios. Por otro lado  $P$  es la presión interna aplicada. Los desplazamientos en todos los puntos del dominio a una distancia  $r$  del centro tendrá un desplazamiento  $u_r$  en dirección radial.

Dicho campo de desplazamiento da lugar a un campo tensional definido por la siguiente expresión, definida en un sistema de referencia cilíndrico.

$$\sigma_r = \frac{P}{k^2 - 1} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (4.10)$$
$$\sigma_t = \frac{P}{k^2 - 1} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

También, dicho campo tensional, expresado en coordenadas cartesianas tiene la siguiente expresión donde  $\psi$  indica en ángulo que forma el vector posición del punto en cuestión con el eje global  $X$ .

$$\sigma_{xx} = \sigma_r \cos^2(\psi) + \sigma_t \sin^2(\psi)$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_r \sin^2(\psi) + \sigma_t \cos^2(\psi) \quad (4.11)$$
$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_t) \sin(\psi) \cos(\psi)$$

Finalmente cabe añadir que no existen fueras volumétricas o gravitacionales aplicadas sobre el dominio, cumpliéndose la siguiente expresión.

$$b_x = 0$$
$$b_y = 0 \quad (4.12)$$

Una vez conocida la solución exacta del problema, que será usada para comprobar el comportamiento del método  $h$ -adaptativo y de estimación del error en un problema con contornos curvos y condiciones de contorno de simetría. Se va a proceder al estudio de los resultados numéricos obtenidos para los parámetros

asociados a los problemas con solución exacta, clasificados como en el punto anterior, por el tipo de malla usado.

### 4.3.1 Malla lineal uniforme

Ahora se va a proceder a la representación de los parámetros considerados para este tipo de problemas.

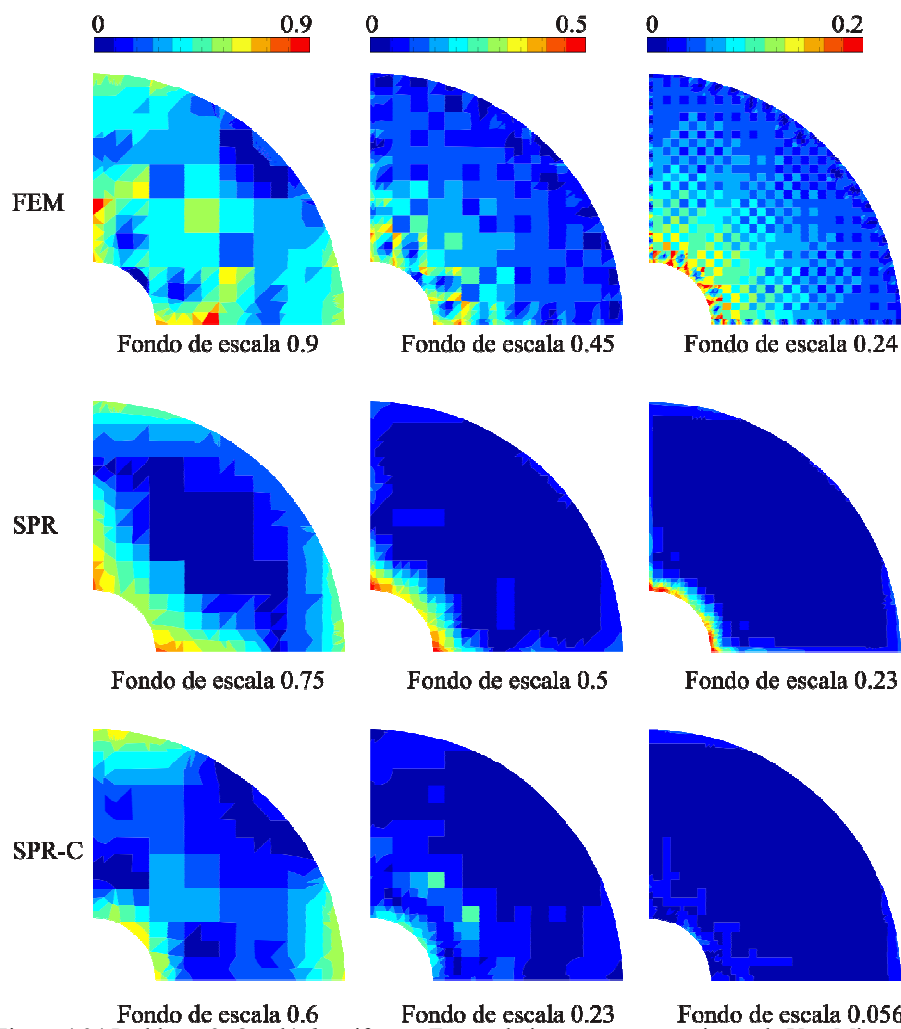


Figura 4.34 Problema 2. Quad4,  $h$ -uniforme. Error relativo exacto en tensiones de Von Mises en puntos de Gauss.

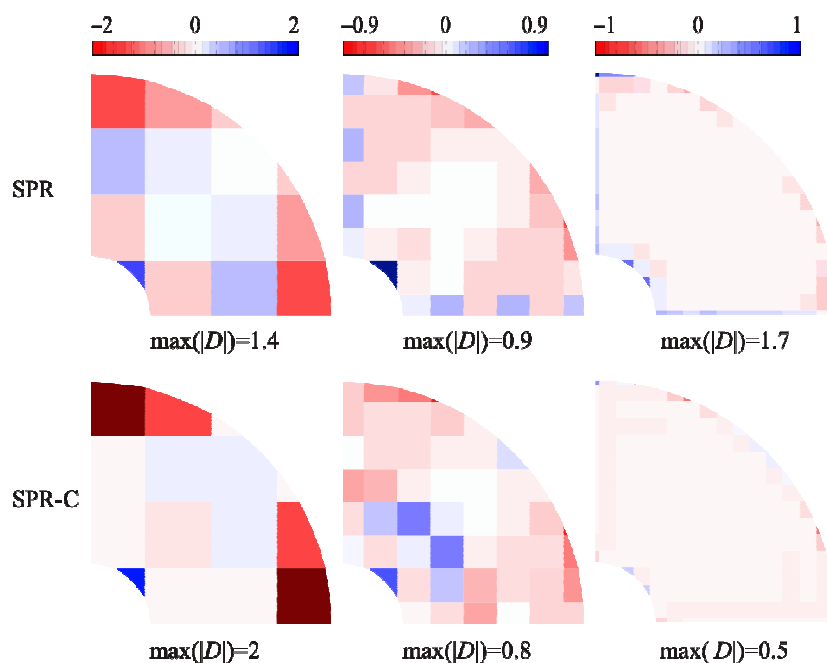


Figura 4.35 Problema 2. Quad4  $h$ -uniforme. Representación del índice de efectividad local  $D$ .

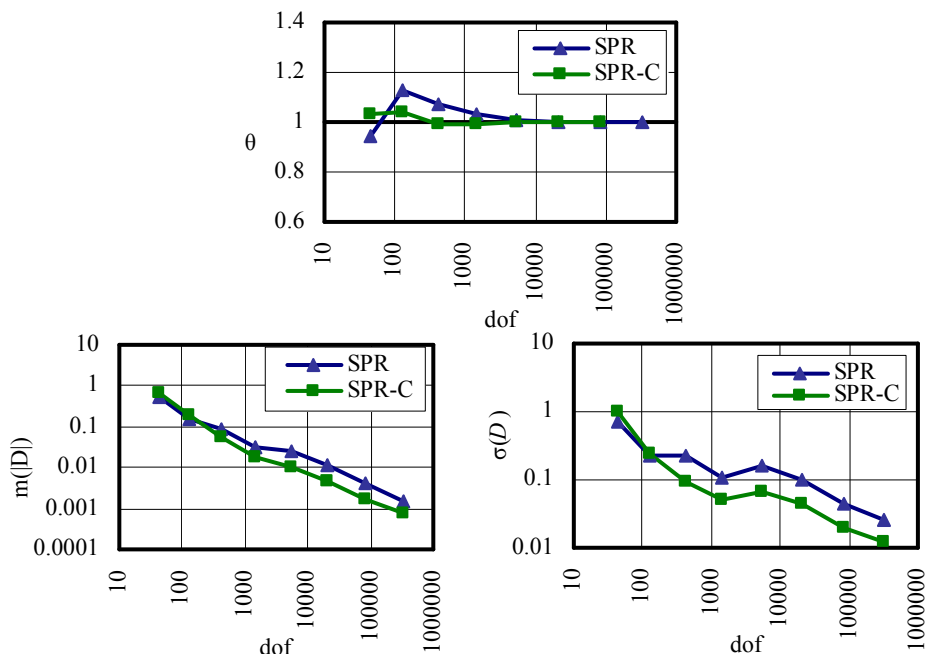


Figura 4.36 Problema 2. Quad4,  $h$ -uniforme. Representación de  $\theta$ ,  $m(|D|)$  y  $\sigma(D)$ .

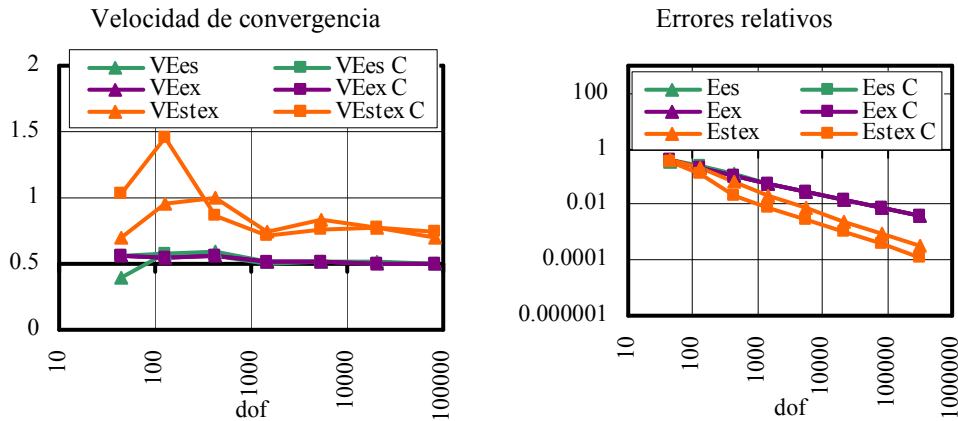


Figura 4.37 Problema 2. Quad4,  $h$ -uniforme. Velocidades de convergencia y errores relativos.

En primer lugar, en la Figura 4.34 se observa, como en los apartados anteriores, la mejora que se produce tras el uso de las técnicas de alisado, y sobre todo en los contornos cuando se usa la técnicas SPR-C obteniendo un error relativo máximo en tensiones entorno al 5% en la tercera iteración.

Además en la Figura 4.35, que muestra la representación del índice de efectividad  $D$ , se observa dos efectos destacados. El primero de ellos es, como se ha comentado anteriormente, la mejora más acusada del índice de efectividad con el refinamiento de la malla con el uso de la técnica SPR-C. Por otro lado, se consigue, mediante el uso de dicha técnica, que en los elementos intersectados los valores de efectividad no sean tan alejados de los del interior como los obtenidos mediante la técnica SPR.

También se analizan los resultados obtenidos en términos de efectividad, dichos resultados se muestran en la Figura 4.36. Se observa que efectivamente en ambas técnicas la efectividad global tiende paulatinamente a la unidad, pero con mejor comportamiento la técnica SPR-C. En este caso, como se deduce también la la Figura 4.35, la media y la dispersión del índice de efectividad es mejor para la técnica SPR-C

Se observa también en la Figura 4.37 que para el mismo número de grados de libertad, el error cometido con la técnica SPR-C es sensiblemente menor al de la técnica SPR. También, las velocidades de convergencia tienden a la teórica de

valor 0.5 y se observa claramente que las velocidades de convergencia de la solución reconstruida son mayores que la de elementos finitos, asegurando así que el estimador es asintóticamente exacto.

### 4.3.2 Malla cuadrática uniforme

Este caso, como el anterior, se analiza el problema en una sola malla madre, descrita por la Figura 4.33. Los elementos correspondientes a este caso de estudio son cuadriláteros cuadráticos de 8 nodos. Ahora se van a representar los resultados de los parámetros usados para este tipo de problemas.

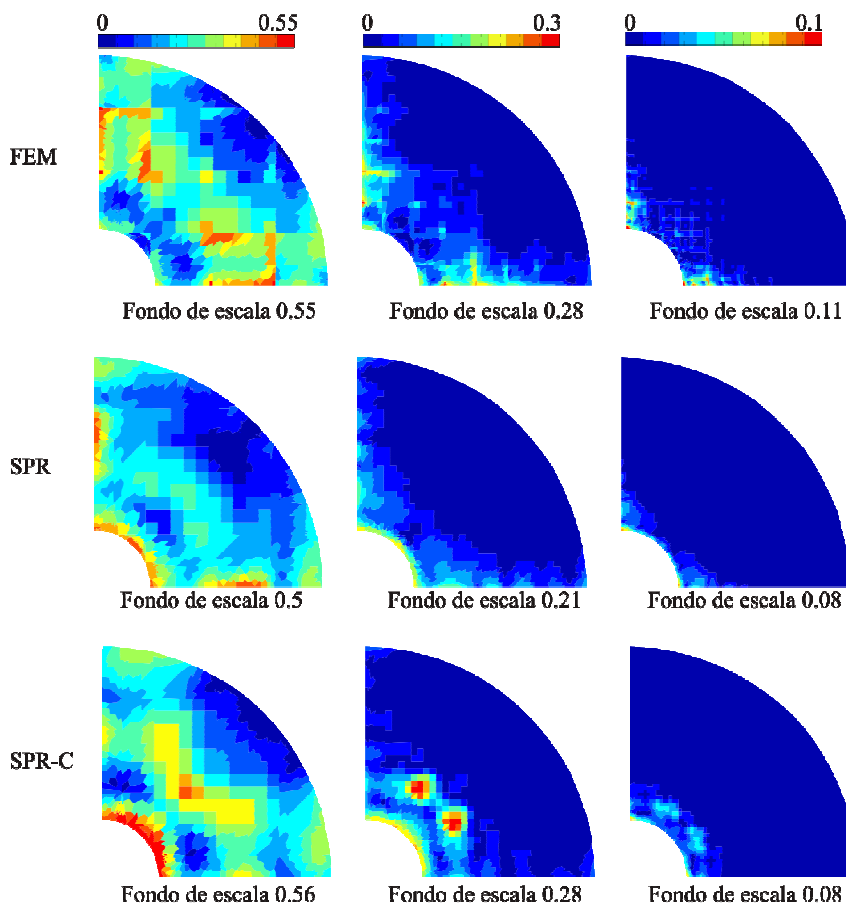


Figura 4.38 Problema 2. Quad8,  $h$ -uniforme. Error relativo exacto en tensiones de Von Mises en puntos de Gauss.

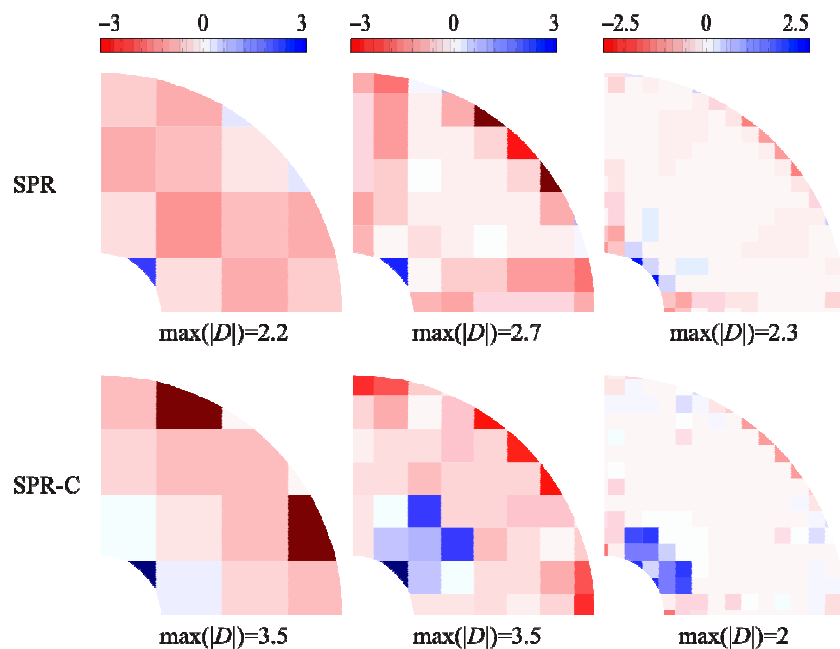


Figura 4.39 Problema 2. Quad8  $h$ -uniforme. Representación del índice de efectividad local  $D$ .

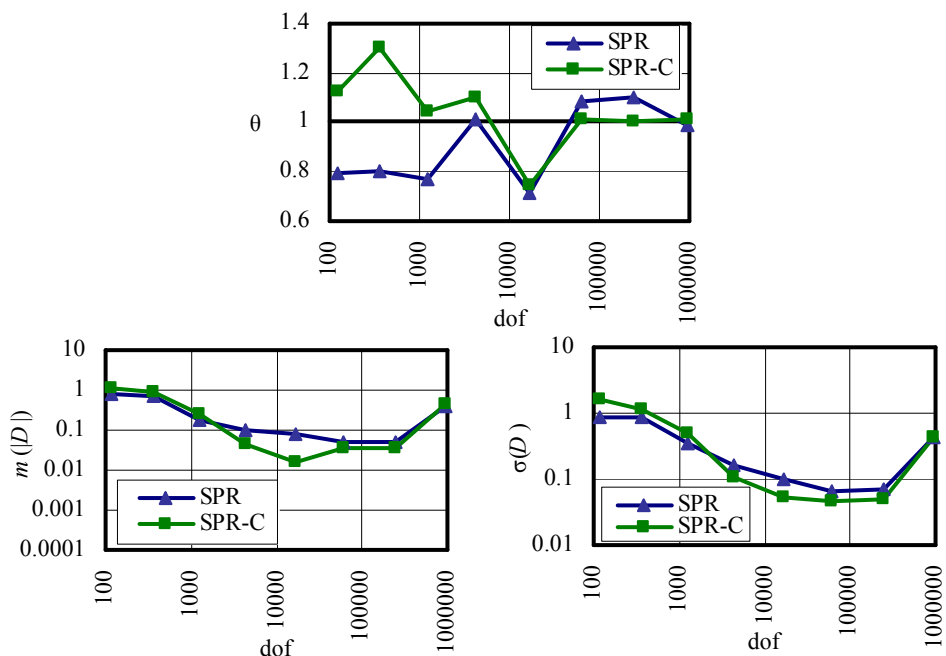


Figura 4.40 Problema 2. Quad8,  $h$ -uniforme. Representación de  $\theta$ ,  $m(|D|)$  y  $\sigma(D)$ .

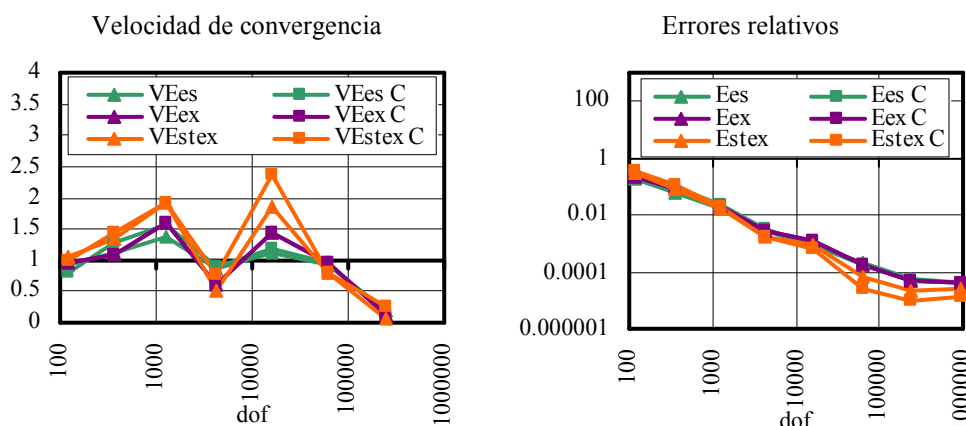


Figura 4.41 Problema 2. Quad8,  $h$ -uniforme. Velocidades de convergencia y errores relativos.

Observando la Figura 4.38, se aprecia que tal y como ocurre en los casos anteriores, la solución proporcionada por las técnicas de *recovery* se asemeja en mayor medida a la exacta que la obtenida directamente mediante el FEM. Pero en este caso existe una peculiaridad en la solución reconstruida obtenida por la técnica SPR-C. Si se presta atención a la segunda y tercera iteración se observa dos puntos donde las tensiones son anormalmente erróneas. Se ha comprobado, tras superponer la malla sobre el dominio, que dichas “manchas” están centradas en un nodo. El patch asociados a dicho nodo contiene un elemento que se encuentra en casi su totalidad en el interior de dominio. Ello produce que las condiciones de equilibrio en el contorno, aplicadas en una porción minúscula del patch, produzcan resultados de peor calidad que si fuera considerado como patch interno. Éste es el motivo que justifica el uso del refinado geométrico expuesto anteriormente.

En la Figura 4.39 se observa el índice de efectividad mejora a nivel general, pero en este caso existen problemas puntuales debido al efecto mencionado en el párrafo anterior, que ocasionan en el caso picos puntuales del índice de efectividad elevados para la técnica SPR-C.

Se puede observar que en la Figura 4.40 que la tendencia que muestra la efectividad global es hacia la unidad, tal y como es esperado. Sin embargo, existe un “pozo” en la efectividad global. Dicho “pozo” es debido al problema que descrito antes el cual se soluciona con un refinamiento geométrico como se comprobará en el punto siguiente.



Por otro lado, la media del índice de efectividad se mantiene en unos valores bajos y se estabiliza entorno a unos valores comparables con otros resultados publicados por J.J. Ródenas *et al.* [11] para problemas similares. También hay que indicar que los resultados obtenidos mediante la técnica SPR-C son mejores que mediante la técnica SPR. Es importante tener en cuenta que el remonte sufrido por el índice de efectividad para la última malla está relacionado con que se produce una saturación en la estimación del error como se observa en la Figura 4.41.

Dicha saturación es debida a un problema geométrico. El error producido ya no es por la discretización o por el campo reconstruido, sino por la definición geométrica de problema. Dicha definición realiza los contornos L2 y L4 mediante *splines* y en el problema exacto esta definido mediante una circunferencia. Cuando el nivel de error cometido en la aproximación de la solución es del orden del error geométrico, el método falla ya que no es capaz de mejorar la solución debido a que no se modifica la geometría del problema. En otras palabras, se esta asumiendo que el contorno descrito por un *spline* es el mismo que el que describe una circunferencia, dicho error, cuando el error de discretización es bajo toma gran importancia.

Es interesante observar la evolución del error con el refinamiento de la malla de cálculo para comprobar la calidad del estimador. Dichos resultados se muestran en la Figura 4.41.

En este caso no se observa una diferencia tan acusada entre la solución de elementos finitos y la correspondiente a los campos alisados, pero sí que se observa la tendencia que con el aumento de los grados de libertad, la diferencia entre ambos se ve incrementada obteniendo mejores resultados para el campo reconstruido, tal y como es de esperar. También se puede observar que la técnica SPR-C tiene mejor comportamiento que la SPR, lo que viene siendo una constante a lo largo del presente trabajo. Si se observa el error cometido, en la última iteración existe una cota mínima que es la debida al error geométrico mencionado párrafos atrás y por ello las velocidades de convergencia tienden a cero.

También es importante indicar que la técnica de *recovery* SPR-C es sensible a que la malla de cálculo represente correctamente el problema, ya que de





no ser así no es capaz de desarrollar todo su potencial, esto se justificará más adelante.

### 4.3.3 Malla cuadrática $h$ -adaptativa

Las mallas  $h$ -adaptativas son uno de los objetivos del presente trabajo, por ello se les presenta especial atención. En este caso del tubo, debido al radio interno, se observa perfectamente el comportamiento de la  $h$ -adaptatividad en todo su potencial. Además en este caso se ha utilizado el refinamiento geométrico para evitar los problemas antes mencionados. En primer lugar se representa la sucesión de mallas obtenidas para ambos casos.

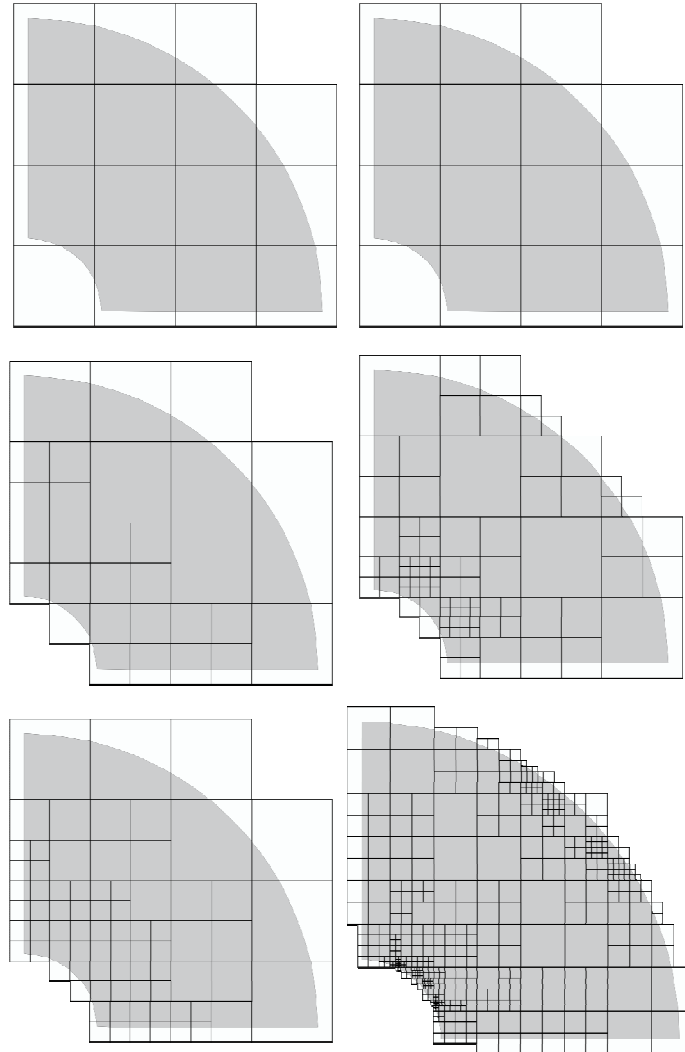


Figura 4.42 Problema 2. Quad8,  $h$ -adaptativa. Secuencia de mallas. Dcha. con refinado geométrico.

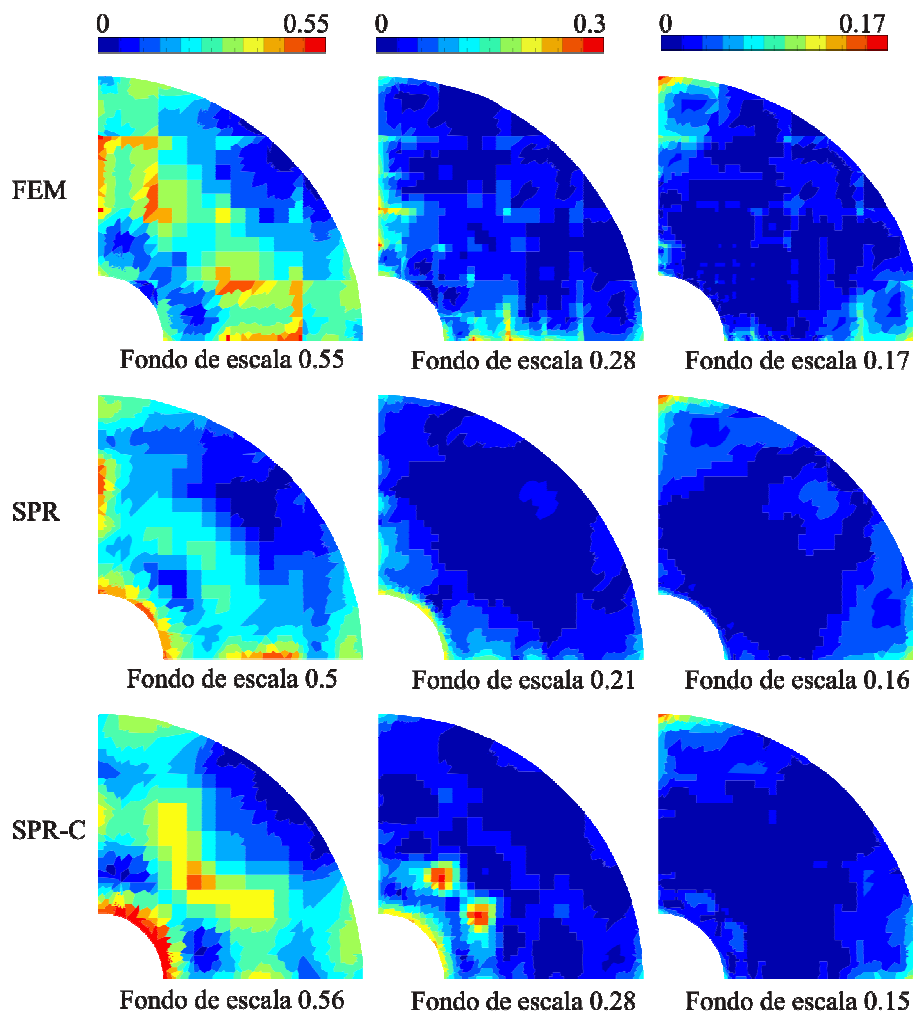


Figura 4.43 Problema 2. Quad8,  $h$ -adaptativa. Error relativo exacto en tensiones de Von Mises en puntos de Gauss.

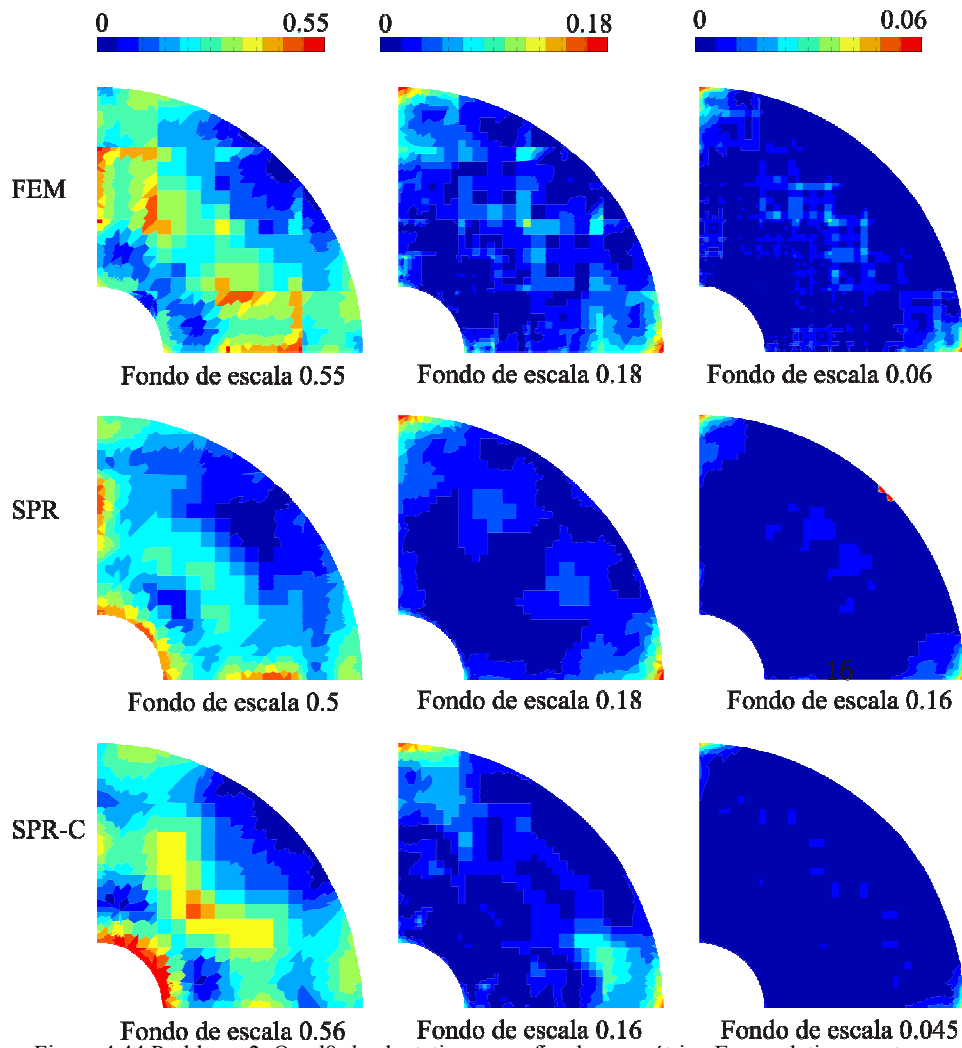


Figura 4.44 Problema 2. Quad8,  $h$ -adaptativa con refinado geométrico Error relativo exacto en tensiones de Von Mises en puntos de Gauss.

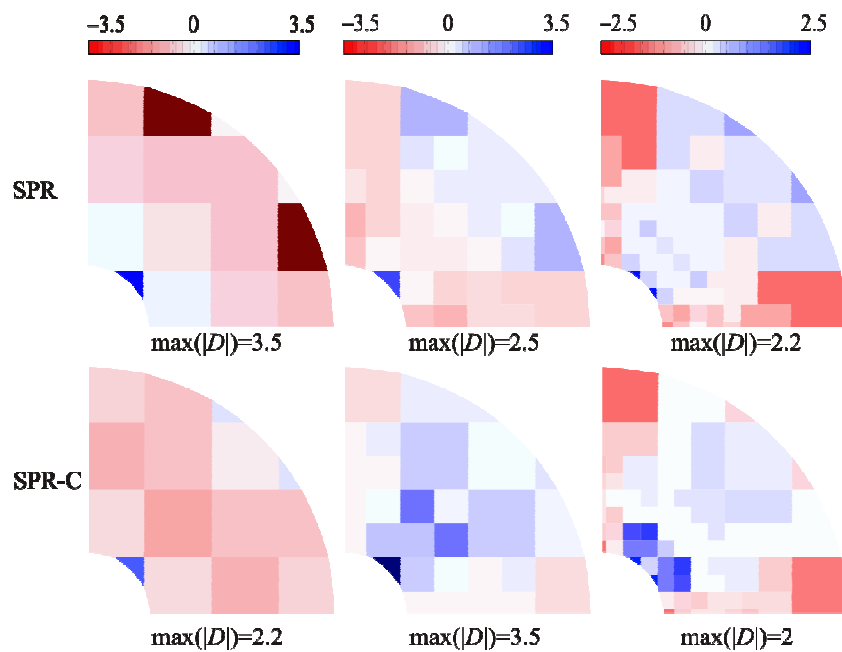


Figura 4.45 Problema 2. Quad8  $h$ -adaptativo. Representación del índice de efectividad local  $D$ .

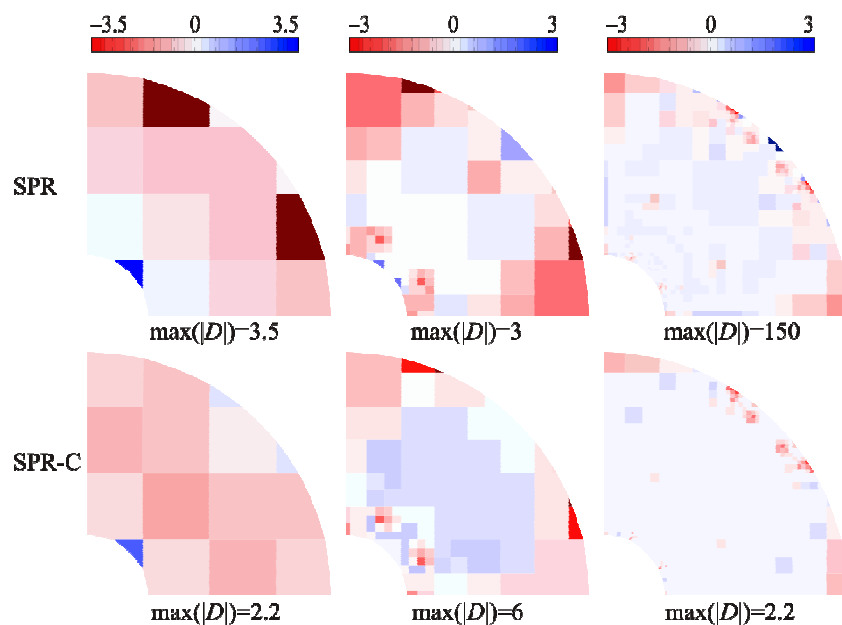


Figura 4.46 Problema 2. Quad8  $h$ -adaptativo. Refinado geométrico Representación del índice de efectividad local  $D$ .

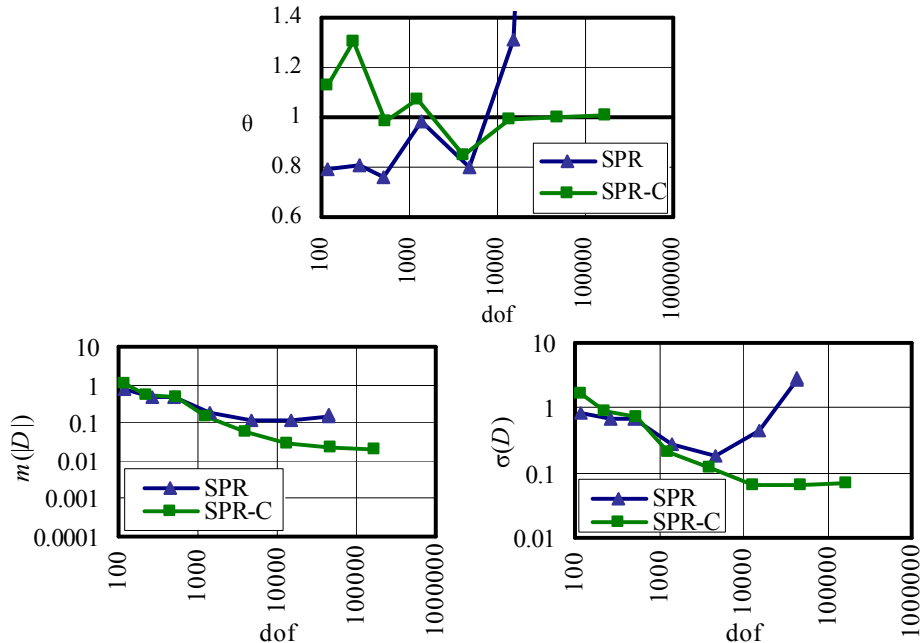


Figura 4.47 Problema 2. Quad8,  $h$ -adaptativo. Representación de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

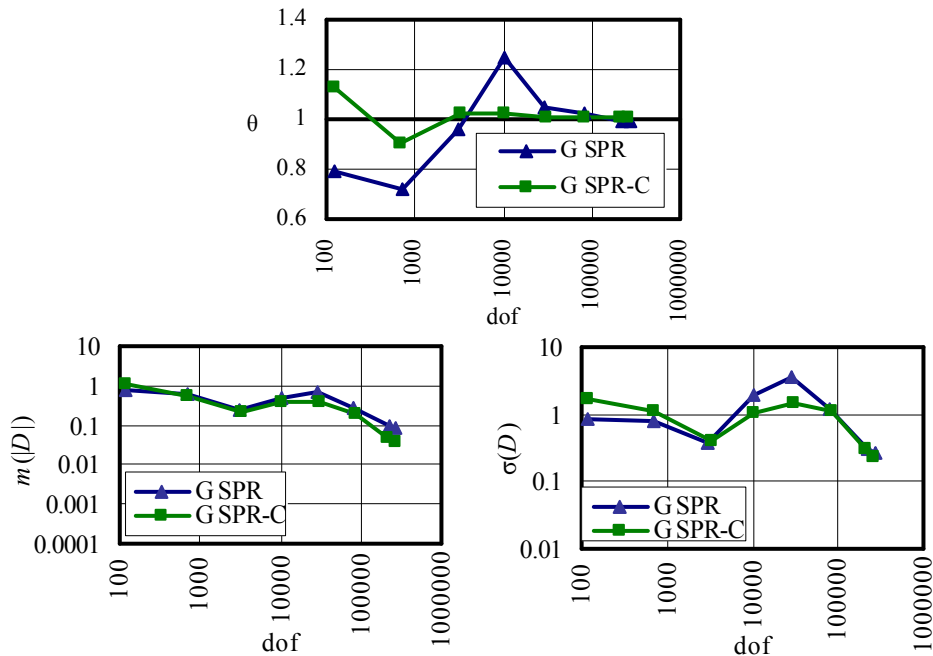


Figura 4.48 Problema 2. Quad8,  $h$ -adaptativo con ref. geométrico Rep. de  $\theta$ ,  $m(D)$  y  $\sigma(D)$ .

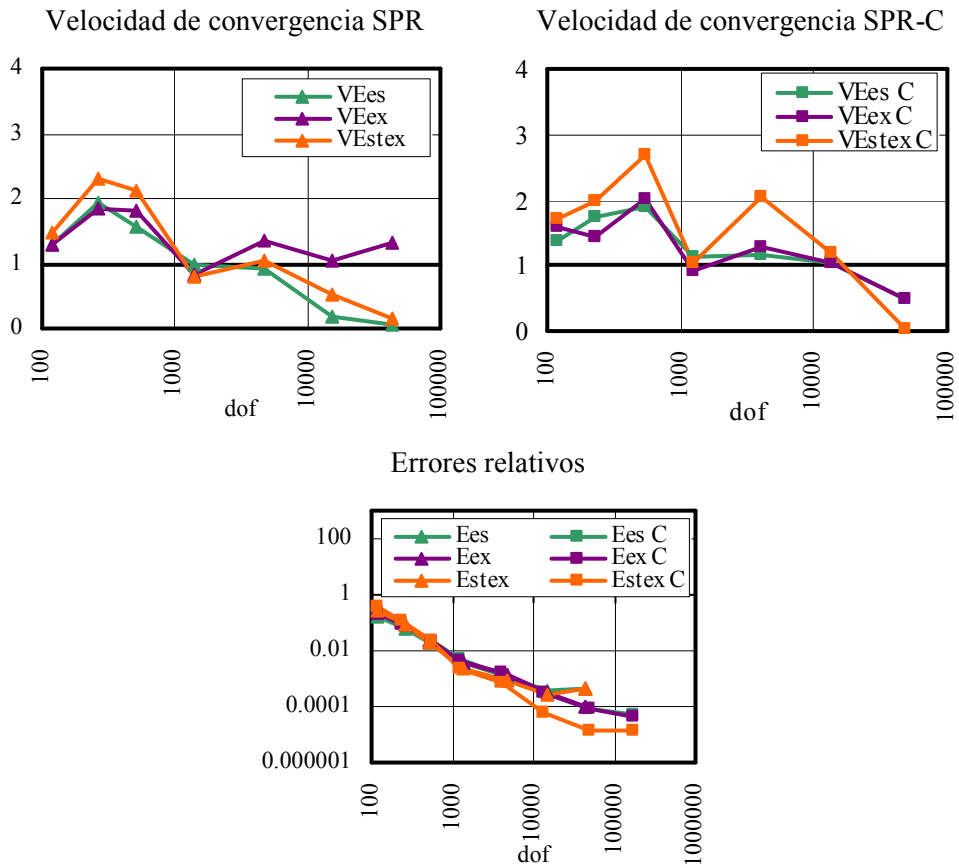


Figura 4.49 Problema 2. Quad8,  $h$ -adaptativo. Velocidades de convergencia y errores relativos.

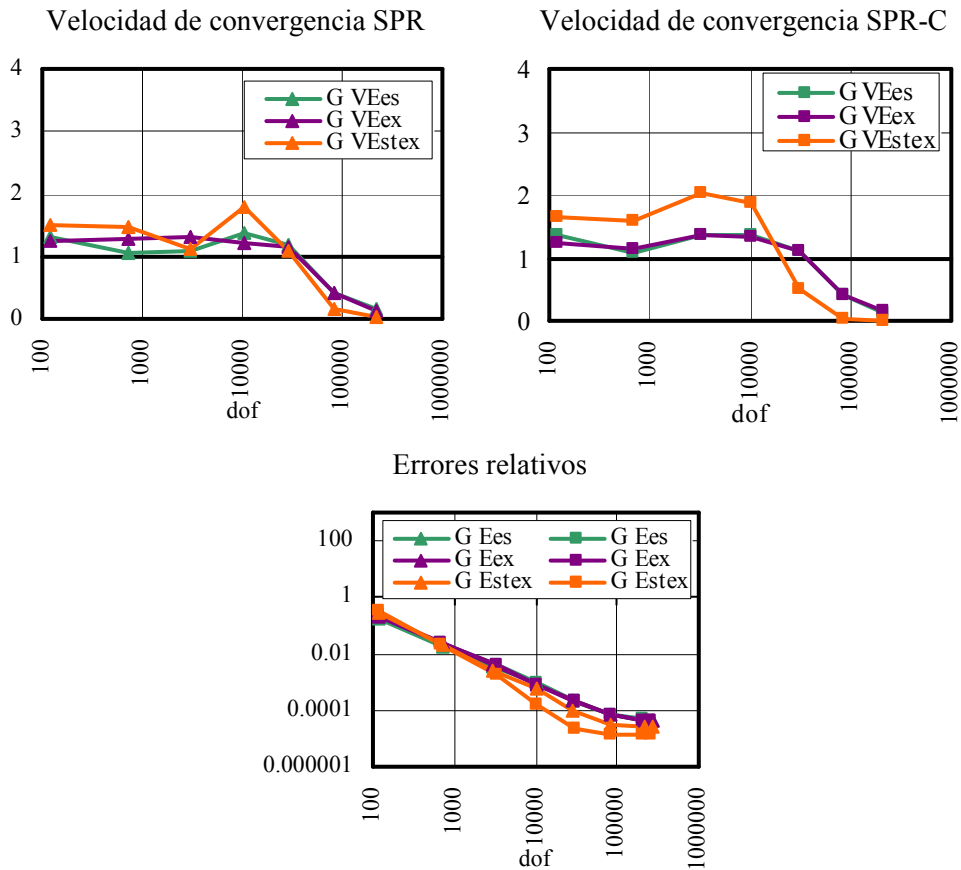


Figura 4.50 Problema 2. Quad8,  $h$ -adaptativo con refinamiento geométrico. Velocidades de convergencia y errores relativos.

En primer lugar, en este caso, para un refinamiento  $h$ -adaptativo, se ha representado en la Figura 4.42 la sucesión de las tres primeras mallas del proceso de refinamiento. En la parte izquierda se ha representado las mallas resultantes de aplicar únicamente el proceso de refinamiento basado en el error en norma energética. En la parte derecha se ha representado el resultado de la combinación del criterio anterior más el uso del refinamiento geométrico. Se observa en este caso que se han refinado aquellos elementos en los que el área intersectada es o muy pequeña o muy grande, con respecto al área del elemento.



La Figura 4.43 muestra que a medida que se refina la malla se observa una mejoría en el contorno. Se aprecia que inicialmente en la técnica SPR-C que el error en tensiones en el radio interno es elevado, pero a medida que se refina en esta zona, disminuye notoriamente. Esto es debido a que se permite una mejor imposición de las ecuaciones de restricción que utiliza el método para calcular el campo reconstruido de tensiones.

En este punto cabe destacar los dos puntos que se observan en el campo de la técnica SPR-C para la segunda malla. Esa concentración del error es debida a que dichos nodos son considerados de contorno ya que el patch correspondiente esta intersectado por el contorno, dejando una parte muy pequeña de área fuera del dominio, por ello al imponer las condiciones de contorno de Neumann para el campo reconstruido en un patch que es en casi su totalidad interno, se comete un error elevado en comparación con el resto del dominio. Dicha situación se mostraba ya en la Figura 2.11 que se vuelve a representar aquí por comodidad.

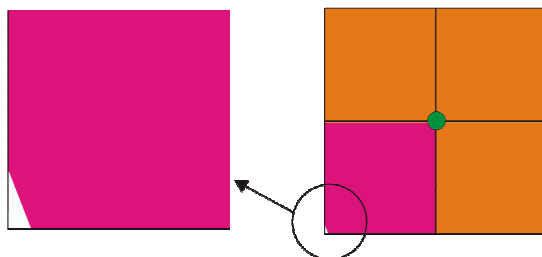


Figura 4.51 Representación de la problemática del área relativa intersectada

Para la malla más refinada este error tiende a desaparecer o suavizarse, pero el error más importante se produce en las esquinas exteriores del dominio. Por un lado, debido a que la solución de elementos finitos es de muy baja calidad por la imposición de las condiciones de contorno de tipo Dirichlet mediante el uso del método Mortar. Por otro lado, la condición de simetría impuesta para la técnica SPR-C es una condición necesaria pero no suficiente para garantizar simetría de tensiones, por dichos motivos los errores en las esquinas externas no se reducen de forma significativa con las diferentes técnicas de reconstrucción de la solución.

Para solucionar el problema relativo a los puntos de concentración del error en la técnica SPR-C, se ha implementado un refinamiento geométrico, los resultados en tensiones se muestran en la Figura 4.44 donde se aprecia la



desaparición de las zonas rojas en los problemas resueltos mediante dicha técnica. Ello es debido a que se evita el problema del área relativa intersectada y la imposición de las condiciones de equilibrio en el contorno en la técnica de *recovery* es capaz de producir resultados satisfactorios. Hay que tener en cuenta que en este caso, ya en la tercera iteración se consigue un error relativo en tensiones de menos del 5%.

En las figuras 4.45 y 4.46 se representa la distribución del índice de efectividad. En la primera de ellas, donde no se utiliza el proceso de refinamiento geométrico, no se aprecia una mejora evidente del parámetro  $D$ , debido a la influencia del área relativa intersectada. No obstante, en la segunda de ellas, sí se aprecia una mejoría y un descenso del parámetro  $D$  a nivel general para la técnica de *recovery* SPR-C. Como se observa, en el contorno, la técnica SPR tiende a dar resultados de baja calidad en comparación con los obtenidos por la técnica SPR-C.

En la Figura 4.47 se observa un comportamiento estable, dentro de un rango, para la técnica SPR-C, mientras que para la técnica SPR se produce un comportamiento inestable en la efectividad y también en el índice de efectividad local. Además se produce el mismo “pozo” de efectividad local que el en apartado anterior. Ello es debido a la influencia del área relativa intersectada de cada elemento, tal y como se viene comentando en este apartado.

Si ahora se observa la Figura 4.48 se aprecia que en la efectividad global desaparece el pozo existente en la figura anterior y además el comportamiento de la técnica SPR es estable. Sin embargo aparentemente, el comportamiento del parámetro  $D$ , empeora en sus dos indicadores. Lo que ocurre es que al refinar geoméricamente y por las características geométricas del problema, cuando se subdivide un elemento aparecen dos con el inconveniente del área relativa, aunque de menor magnitud. El hecho es que en la zona donde existen elementos cuya relación de área intersectada es alta o baja, la efectividad de dichos elementos es muy mala. Esto repercute negativamente en el parámetro  $D$ . Por otro lado, es importante recordar que todos los términos relacionados con la efectividad se evalúan por elemento y el hecho es que en los elementos problemáticos su peso relativo en el problema es menor a medida que se refina, aunque para el cálculo de la efectividad este hecho se obvia. Si se tuviera en cuenta el hecho del área real de

cada elemento cuando se calcula el parámetro  $D$ , sus indicadores tendrían mejor comportamiento.

Si se atiende a la Figura 4.49, se observa que la técnica SPR tiende a fallar a medida que aumentan el número de grados de libertad, iteraciones 6 y 7. La técnica SPR-C muestra mayor robustez en este caso, principalmente debido a la información del contorno que es capaz de introducir y también al uso de los *conjoint polynomials*, los cuales permiten una mayor exactitud de las tensiones en los puntos de Gauss ya que no son interpoladas desde los nodos. La influencia de los *conjoint polynomials* se observa en la siguiente figura.

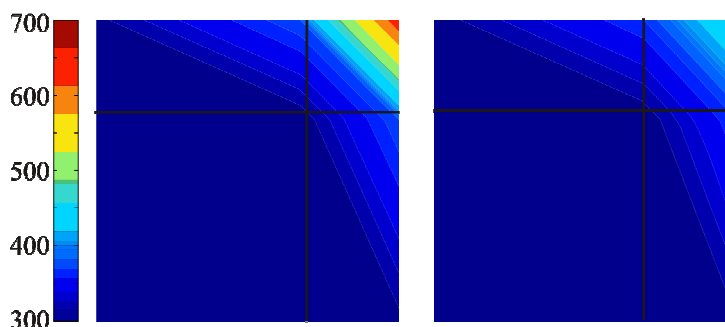


Figura 4.52 Influencia de los *conjoint polynomials* en elementos del contorno. . .  $\sigma_{vm}^* - \sigma_{vm}$  Izq. sin uso de *conjoint polynomials*. Dch. usándolos.

En el caso del GFEM, esta característica cobra elevada importancia desde el momento que en algunos elementos del contorno los nodos pueden estar lejos de los puntos de Gauss correspondientes ya que estos pueden concentrarse en una pequeña porción del elemento. Este efecto puede introducir grandes errores en el cálculo del campo reconstruido en puntos de Gauss ya que intervienen nodos de fuera del dominio.

Este comportamiento se puede observar también aunque no dispongamos de la solución exacta ya que afecta en gran medida a la velocidad de convergencia, dando lugar a valores no comunes y muy bajos.

Sin embargo, en la Figura 4.50, dónde es utilizado un refinamiento geométrico, se observa una mejora notoria en los resultados de convergencia. Por un lado disminuye el número de iteraciones para alcanzar el error relativo necesario, además que la velocidad de convergencia se mucho más estable que en el caso

anterior. Por otro lado, con esta ayuda, la técnica SPR consigue converger de forma conveniente y evitar el fallo producido anteriormente.

También se ha comparado la evolución del error relativo estimado de forma porcentual con el uso o no del procedimiento de refinamiento geométrico con el tiempo de cálculo computacional.

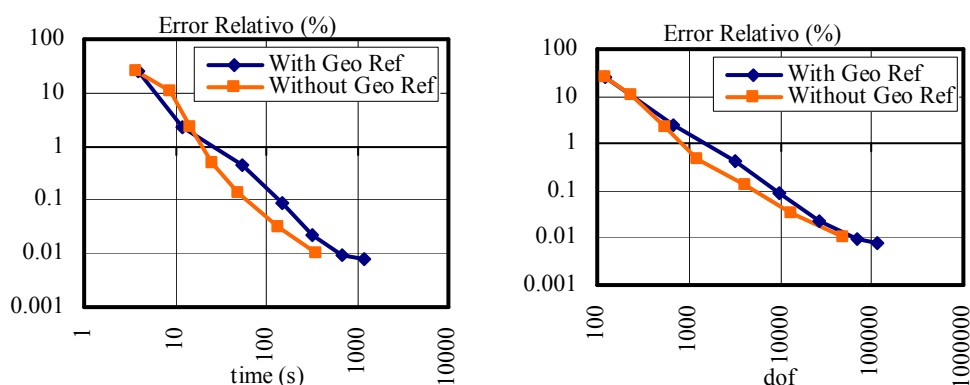


Figura 4.53 Problema 2. Quad8  $h$ -adaptativo. Comparativa del nivel de error con DOF y tiempo de cálculo para técnicas con y sin refinamiento geométrico.

A partir de los resultados arriba expuestos, se pueden extraer dos conclusiones. Para este caso, es interesante utilizar el refinamiento geométrico en las tres primeras iteraciones, de este modo se produce un acoplamiento más rápido de la malla a la geometría. Sin embargo, cuando ya se ha realizado este proceso, el refinamiento geométrico incrementa el número de grados de libertad en zonas donde no provoca una rápida disminución del error. Éste efecto se observa en el gráfico de la derecha, donde para el mismo nivel de error, se necesitan siempre más grados de libertad en el uso del refinamiento geométrico, no obstante con un menor número de iteraciones se alcanza el nivel de error requerido.

#### 4.3.4 Problemática de la imposición de las condiciones de contorno en contornos curvos o cóncavos

Anteriormente se ha comentado que en mallas bastas, o lo que es lo mismo, el patches de gran tamaño, cuando se imponen las condiciones de contorno en la

técnica de *recovery* SPR-C ocurren ciertos problemas, los cuales tienden a desaparecer a medida que se refina la malla.

El motivo por el cual para estas situaciones la técnica SPR-C no actúa de forma adecuada es debido a que al imponer las condiciones de equilibrio en el contorno en tres puntos del mismo ocurre que se forma un lugar geométrico, que contiene dichos puntos en el que se cumplen las condiciones de equilibrio impuestas. En la Figura 4.54, para el caso de un contorno recto se observa que los lugares geométricos, línea verde, no tienen porqué coincidir con el contorno y parte de ellas pueden estar dentro del dominio del problema.

Este hecho provoca que una condición impuesta en el contorno, sea impuesta también en el interior del material, dando resultados erróneos, sobre todo cuando los patches de gran tamaño comparado con las características geométricas.

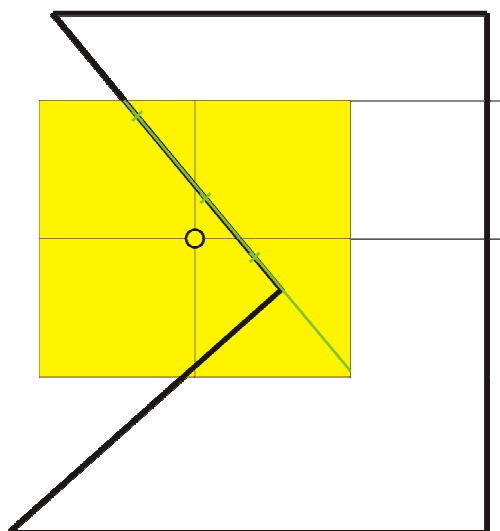


Figura 4.54 Problemática en la imposición de las condiciones de contorno en la técnica SPR-C

En el caso de contornos curvos, ocurre la misma problemática debido a que el lugar geométrico creado que contiene los puntos donde se satisfacen las ecuaciones de equilibrio en el contorno, no representan necesariamente el contorno de la geometría. Por este motivo, cuando se refina en estos lugares de la geometría, se tiende rápidamente a imponer las condiciones de contorno de manera adecuada ya que el tamaño de los patches es menor y los puntos de imposición representan

mejor la geometría. Para el problema 2, en la malla 1, se observa en las siguientes figuras la tensión normal y tangencial impuesta del campo recuperado en el contorno.

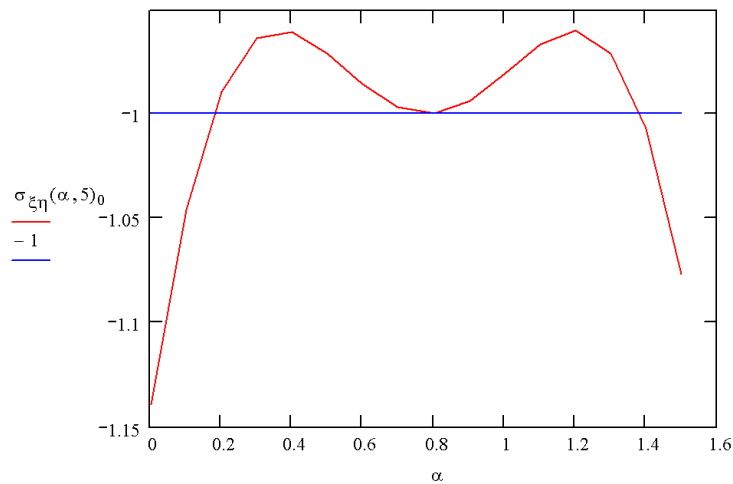


Figura 4.55 Problema 2. Malla 1. Tensión normal reconstruida a lo largo del contorno 'L4', obtenida mediante SPR-C, en un único patch.

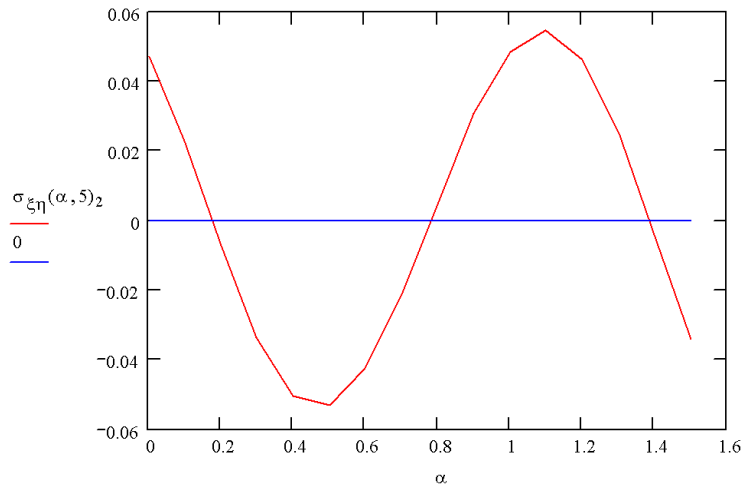


Figura 4.56 Problema 2. Tensión tangencial reconstruida a lo largo del contorno 'L4', obtenida mediante SPR-C, en un único patch.

En estas figuras, la línea azul muestra el valor exacto de la tensión normal o tangencial correspondiente a las condiciones de contorno impuesta a lo largo del

lado 'L4' en el problema 2. Como se observa, el campo en el patch en cuestión cumple la condición de equilibrio en el contorno sólo aquellos puntos del contorno en que se ha impuesto. En las figuras, cuando se igualan las líneas rojas y azules. Ello demuestra que en contornos curvos, la condición de contorno impuesta no se cumple de manera exacta en todo el contorno. También hay que considerar que a medida que disminuye el tamaño del patch, se incrementa en número de puntos de imposición en el contorno, y con ello el aumento de la precisión. Por otro lado, en contornos rectos, no ocurre este problema ya que el lugar geométrico que se forma, es coincidente con el contorno.

#### 4.4 Problema 3. Ejemplo de aplicación, presa

Como ejemplo de aplicación se ha elegido un problema con una geometría algo más compleja que la de los ejemplos anteriores. El problema en cuestión trata de simular la geometría de una presa de gravedad, siendo las condiciones de contorno de la parte interior del dique las presiones hidrostáticas del agua. Se ha tomado un valor del módulo de elasticidad de 1000 Pa y el módulo de Poisson de 0.3 y una densidad de material de  $2500 \text{ Kg/m}^3$  para la carga gravitatoria. El problema en cuestión se muestra en la siguiente figura siguiente.

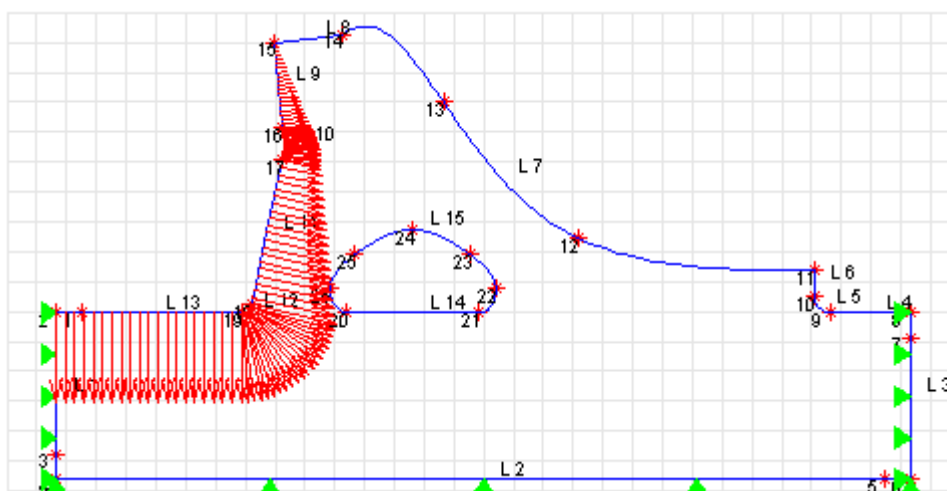


Figura 4.57 Problema3. Geometría y condiciones de contorno.



Las condiciones de Neumann impuestas están representadas como flechas de color rojo y simulan la presión hidrostática del agua, aplicada sobre las líneas de contorno L9, L10, L11, L12 y L13. Por otro lado las condiciones de contorno de Dirichlet impuestas son de una restricción de los desplazamientos horizontales en las líneas L1 y L3 y una restricción de desplazamientos verticales en la línea L2.

Hay que indicar que el contorno interno, definido por los puntos 20, 21, 22, 23, 24, y 25 simula un agujero interno de la presa.

La malla inicial utilizada para este caso es la mostrada en la Figura 4.57 y corresponde a una malla de 4 elementos madre en dirección X y 2 elementos madre en dirección Y con un nivel inicial de valor 3.

Una vez realizado la introducción de datos en la aplicación se procede a la recopilación de los resultados extraídos. Los parámetros que se van a utilizar en este estudio son los anteriormente indicados para problemas sin solución exacta. En primer lugar, se va a observar la evolución del refinamiento  $h$ -adaptativo que se obtiene de la técnica SPR-C para mallas cuadráticas:



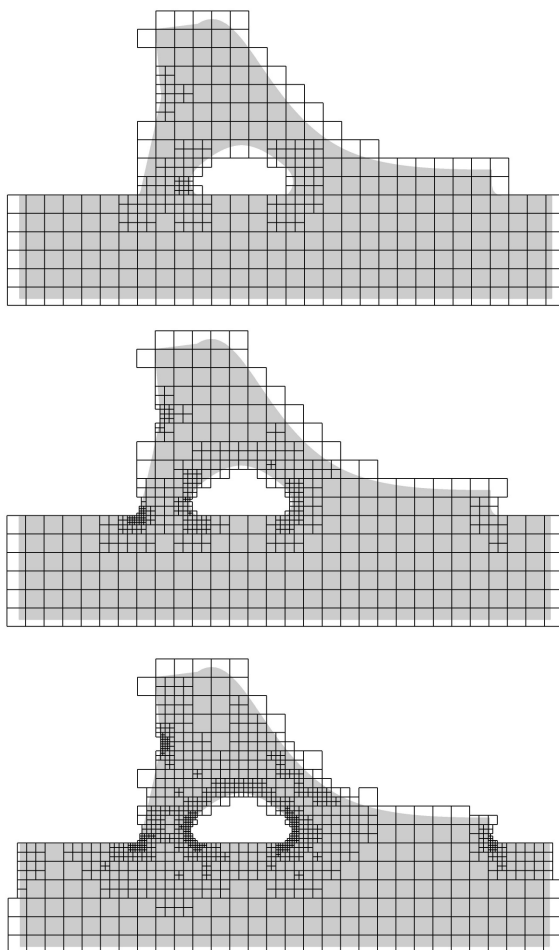


Figura 4.58 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativo. Secuencia de mallas con técnica SPR-C.

En estas figuras, los elementos de la malla de aproximación vienen representados por líneas negras, mientras que el dominio del problema se encuentra representado por un área sombreada de color gris. Se puede observar que claramente la aplicación refina en los lugares cercanos a los concentradores de tensiones hasta llegar al tamaño de elemento mínimo seleccionado el cual, para este caso es un nivel 7 de refinamiento.

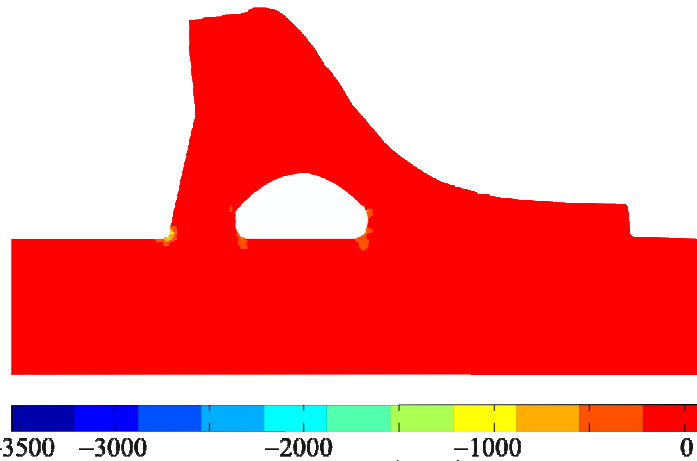


Figura 4.59 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 1.  $\sigma_{vm}^* - \sigma_{vm}^h$  en puntos de Gauss. Técnica SPR-C.

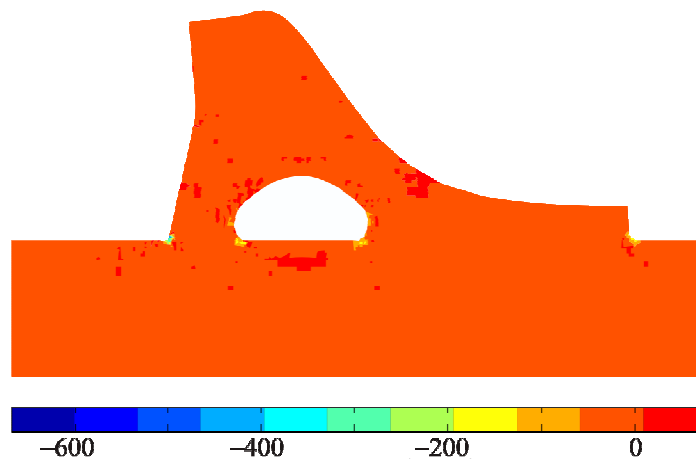


Figura 4.60 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 2.  $\sigma_{vm}^* - \sigma_{vm}^h$  en puntos de Gauss. Técnica SPR-C.

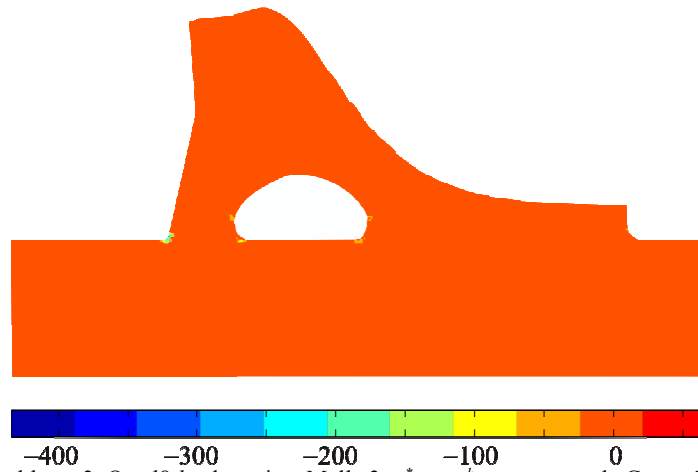


Figura 4.61 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 3.  $\sigma_{vm}^* - \sigma_{vm}^h$  en puntos de Gauss. Técnica SPR-C.

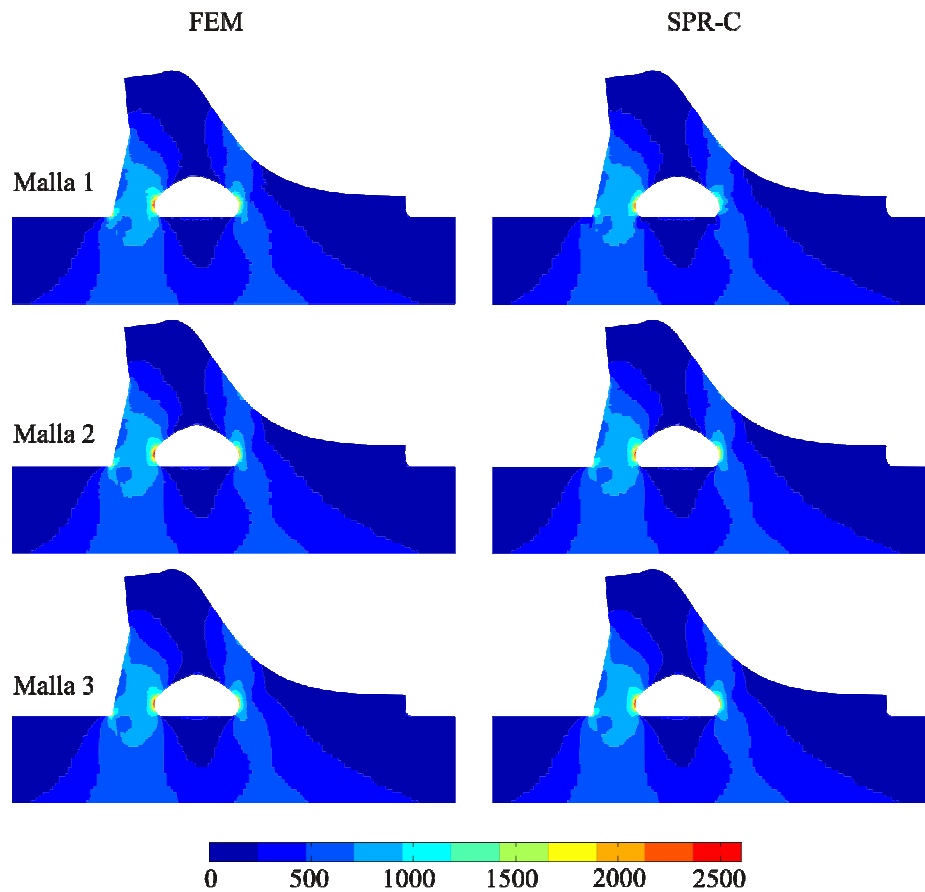


Figura 4.62 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Campos  $\sigma_{vm}^*$  y  $\sigma_{vm}^h$  en puntos de Gauss. Técnica SPR-C.

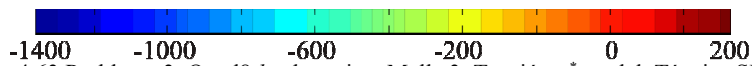
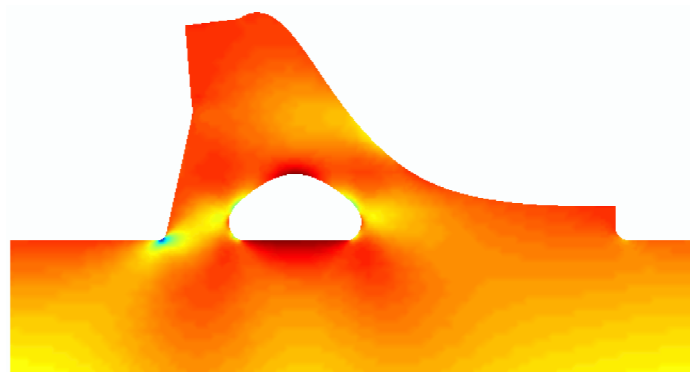


Figura 4.63 Problema 3. Quad8 *h*-adaptativa. Malla 3. Tensión  $\sigma_x^*$  nodal. Técnica SPR-C.

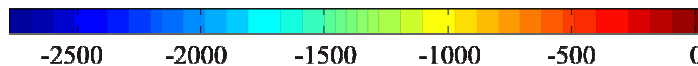
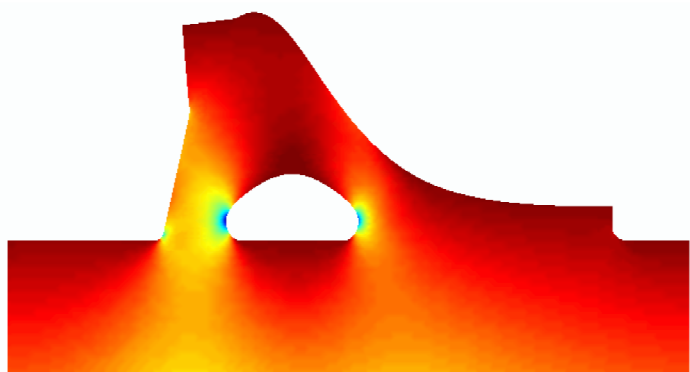


Figura 4.64 Problema 3. Quad8 *h*-adaptativa. Malla 3. Tensión  $\sigma_y^*$  nodal. Técnica SPR-C.

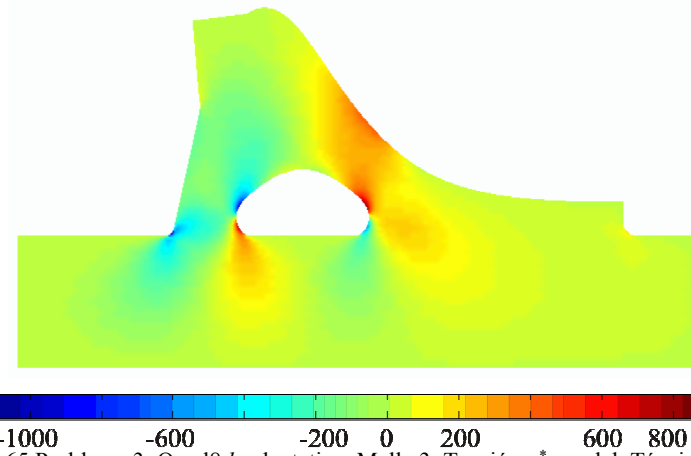


Figura 4.65 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 3. Tensión  $\sigma_{yy}^*$  nodal. Técnica SPR-C.

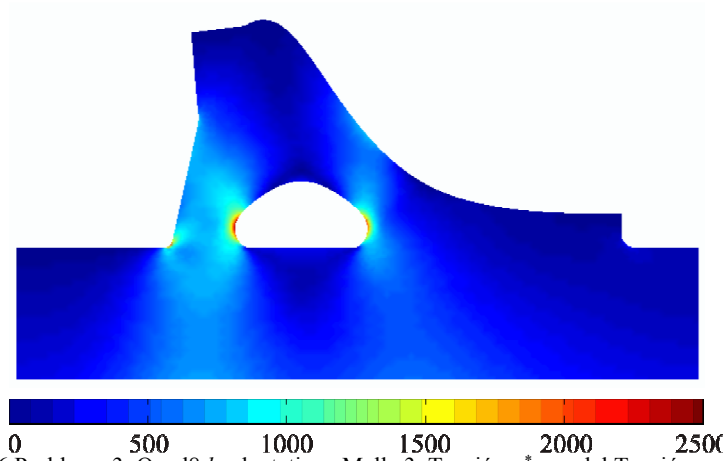


Figura 4.66 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 3. Tensión  $\sigma_{vm}^*$  nodal Tensión nodal. Técnica SPR-C.

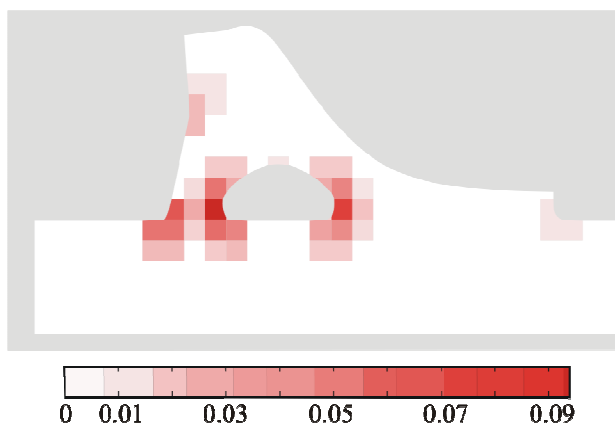


Figura 4.67 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 1. Error relativo estimado. Técnica SPR-C

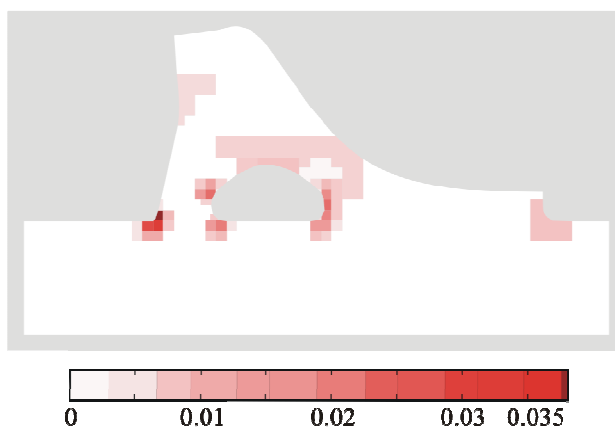


Figura 4.68 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 2. Error relativo estimado en. Técnica SPR-C

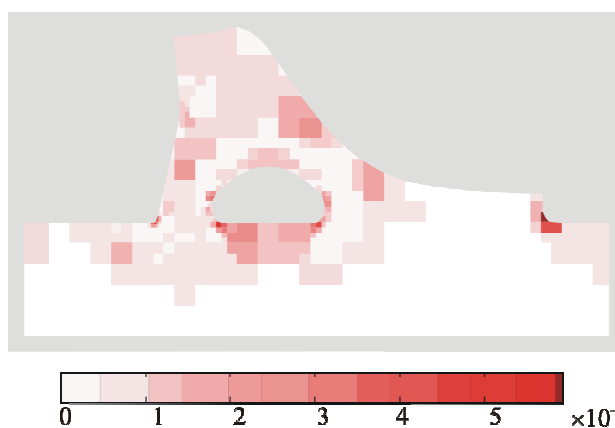


Figura 4.69 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 3. Error relativo estimado. Técnica SPR-C

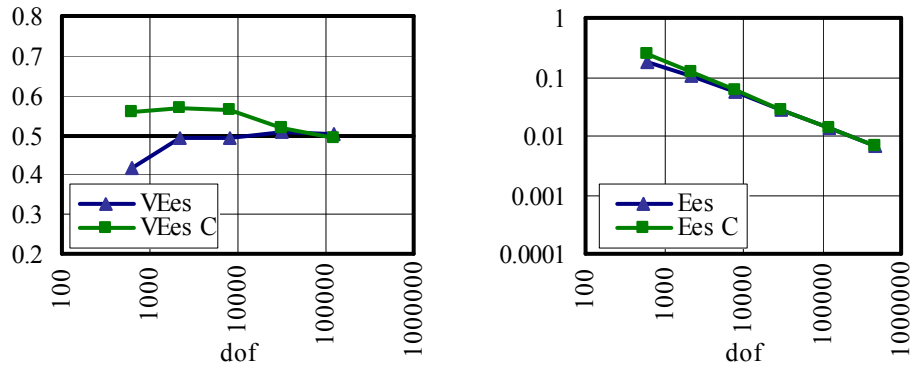


Figura 4.70 Problema 3. Quad4  $h$ -uniforme. Velocidad de convergencia y del error relativo estimado.

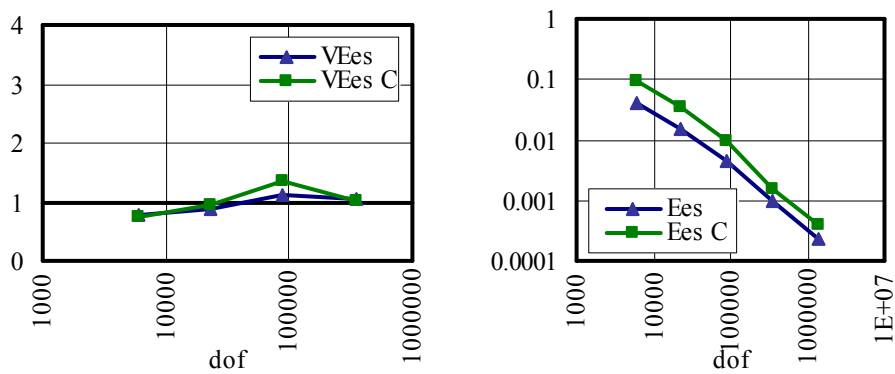


Figura 4.71 Problema 3. Quad8  $h$ -uniforme. Velocidad de convergencia y del error relativo estimado.



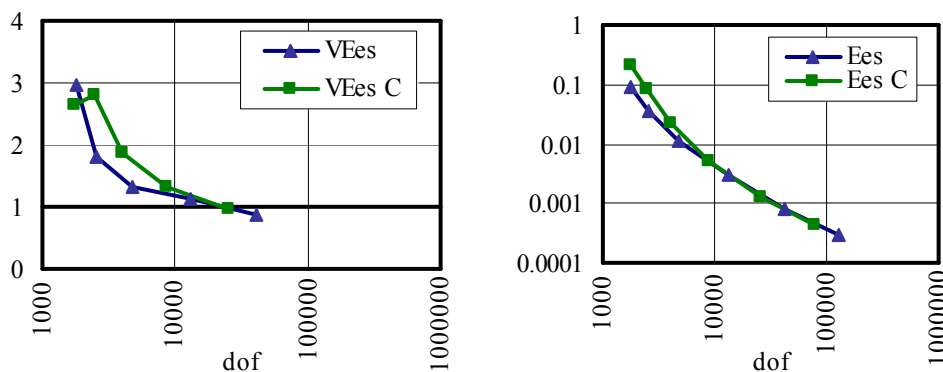


Figura 4.72 Problema 3. Quad8  $h$ -adaptativo. Velocidad de convergencia y del error relativo estimado.

En las figuras de la 4.59 a la 4.61 se muestra la diferencia en tensiones de Von Mises evaluadas en puntos de Gauss del campo reconstruido y la solución obtenida por el FEM. Se observa que claramente la solución extraída mediante la técnica de *recovery* utilizada, SPR-C, obtiene unas tensiones más bajas. La diferencia que existe disminuye a medida que se refina la malla. Concretamente refina en aquellos lugares donde más acusada es la diferencia. Esto es debido a que cuando la malla es basta, patches son de tamaño grande y contornos curvos el campo reconstruido no tiene la suficiente capacidad para obtener la representar correctamente la evolución del campo de tensiones real. Esto es debido a que por la forma de imposición de las condiciones de contorno, éstas acaban imponiéndose en zonas internas del material, por ello predomina la tensión impuesta en el contorno. Por otro lado, si se observa la Figura 4.62, la diferencia entre ambos campos de tensiones, el recuperado y el de FEM, es a nivel muy puntual e influenciada por efecto de los nodos *fantasma* del contorno.

En las figuras de la 4.63 a la 4.66 se representan los campos de tensiones, en nodos del campo reconstruido con la técnica SPR-C para la malla cuadrática  $h$ -adaptativa. En ellas se muestran las sollicitaciones a las que está sometido en el dominio del problema, además se observa el campo reconstruido.

Por otro lado, se obtienen también los resultados de la estimación del error relativo en norma energética a nivel elemental, dichos resultados se muestran para las tres primeras mallas de refinamiento en las figuras 4.67, 4.68 y 4.69.



Si se comparan con la Figura 4.58, se observa que efectivamente en los lugares donde mayor es mayor el error relativo estimado es dónde se ha realizado el refinamiento correspondiente. Por otro lado se observa una rápida reducción del error relativo estimado y en sólo tres iteraciones el error máximo por elemento es del 0.6%. También se observa que el error se concentra cerca de los concentradores de sobre los que recaen mayores solicitaciones.

Finalmente, en las figuras 4.70, 4.71 y 4.72 se muestra la evolución de la velocidad de convergencia con el incremento del número de grados de libertad y también la evolución del error estimado.

En los gráficos anteriores, concretamente en el caso de una malla con elementos lineales, se observa que en el rango asintótico la velocidad de convergencia para ambas técnicas converge a 0.5, alcanzándose así la velocidad teórica que indica que el estimador del error, tanto el SPR como el SPR-C funcionan correctamente.

Sin embargo, para el caso de elementos cuadráticos, cuando el refinamiento es uniforme, el rango pre-asintótico es bastante extenso porque la malla no es capaz de captar correctamente el problema, y justo al final, cuando los elementos son de menor tamaño, captando así la geometría del problema, se produce una disminución brusca del error, para posteriormente entrar en el rango asintótico, este comportamiento es más notorio para el caso de la reconstrucción del campo alisado mediante la técnica SPR-C.

En la malla  $h$ -adaptativa con elementos cuadráticos, se observa como rápidamente se alcanza el rango asintótico, tomando la velocidad de convergencia valores entorno a la unidad. Esto es debido a que se produce el refinamiento en aquellos sitios del dominio donde peor se reproduce el problema, lográndose que rápidamente la malla defina con mayor corrección las características del mismo.

El error estimado mediante la técnica SPR-C es generalmente mayor que el obtenido por la técnica SPR, este hecho es debido a que el campo reconstruido por la primera de ellas es estáticamente admisible en cada patch y casi estáticamente admisible en el dominio y por ello tiende a proporcionar una cota superior del error.

Además en este problema se ha realizado un estudio comparativo de tiempos computacionales para el caso de mallas cuadráticas utilizando tanto un refinamiento uniforme como  $h$ -adaptativo. Para ello se ha graficado en la Figura 4.73 la evolución del error relativo estimado con el tiempo de cálculo y los grados de libertad. Se ha utilizado la técnica de *recovery* SPR-C. Se observa que tanto el tiempo computacional como el número de grados de libertad se reducen de forma notoria con el uso de técnicas  $h$ -adaptativas, de ahí su importancia para el ahorro en tiempo computacional cuando se requiere una solución con un nivel de precisión.

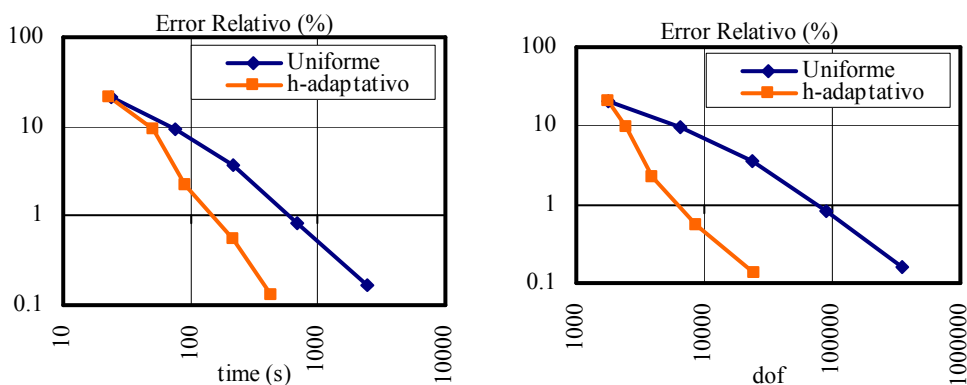


Figura 4.73 Problema 3. Quad8. Técnica SPR-C. Evolución del error relativo estimado con el tiempo de cálculo y los grados de libertad usados.

#### 4.5 Problema 4. Ejemplo de aplicación, volante de inercia

Otro ejemplo de aplicación corresponde a una representación de un volante de inercia, donde se restringe el movimiento en el interior del mismo y se imponen condiciones de Neumann en el contorno exterior mediante el uso de cargas tangenciales. Para este caso se considera que el material utilizado es aluminio, con un módulo de elasticidad de 70 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.33. Además se estima que el espesor, constante, es de 15 cm y se asume un caso de tensión plana. En la figura siguiente se muestra la representación del problema planteado con la malla inicial de cálculo cuyo nivel inicial es 4.

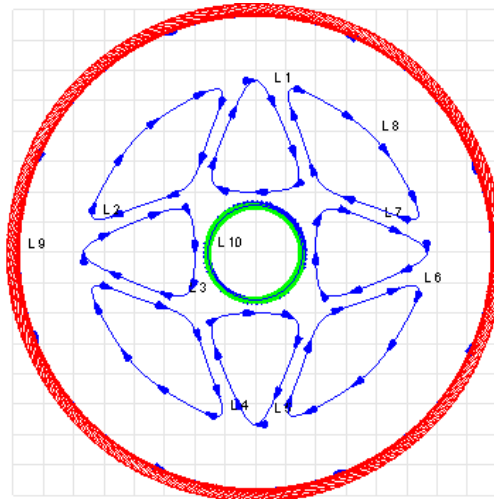


Figura 4.74 Problema 4. Geometría y condiciones de contorno.

En la figura Figura 4.74, se observa en el fondo la malla inicial de cálculo formada por un solo elemento madre, siendo el nivel inicial de refinamiento 4, a partir de la cual se produce el refinamiento, ya sea uniforme o  $h$ -adaptativo. El contorno está representado por líneas azules. En la circunferencia interior, curva L10, se aplican condiciones de contorno de Dirichlet, de manera que se restringen los desplazamientos, tanto en dirección  $X$  como en dirección  $Y$  en dicha curva.

En la siguiente figura se muestra el resultado de la evolución de las tres primeras mallas  $h$ -adaptativas que se obtienen, donde se observa que en los puntos angulosos, o en las estrecheces del dominio se incrementa en número de elementos, refinando en dichos lugares para así poder definir con mayor precisión el problema. A pesar de la simetría del problema, la malla no se encuentra colocada de manera simétrica con el problema, de ahí que el refinamiento obtenido no sea totalmente simétrico.

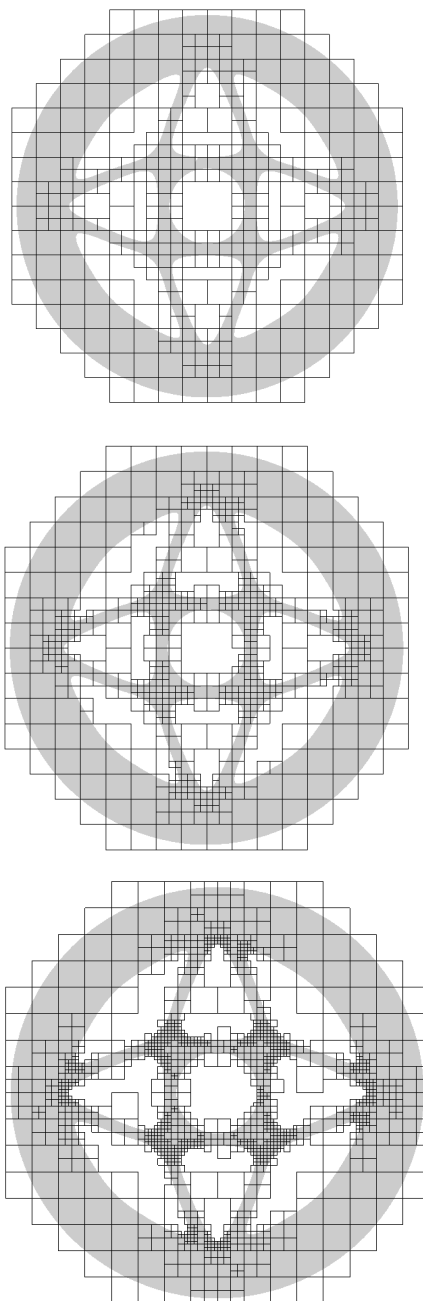


Figura 4.75 Problema 4.Quad8  $h$ -adaptativo. Sucesión de mallas. Técnica SPR-C.

Una vez observada la evolución  $h$ -adaptativa de las mallas, se procede al estudio de la calidad de la estimación del error en norma energética, para ello se utilizan los parámetros anteriormente mencionaos para problemas sin solución exacta.

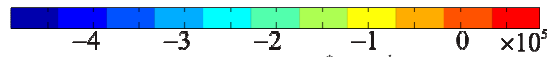
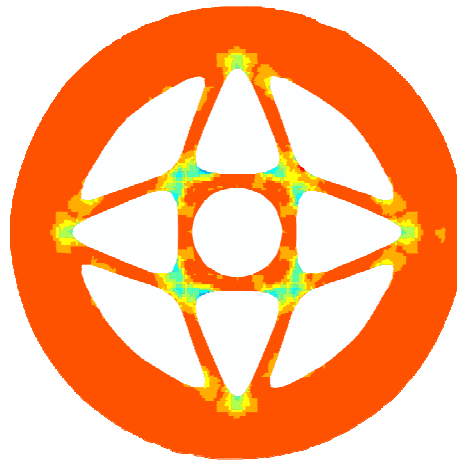


Figura 4.76 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 1.  $\sigma_{vm}^* - \sigma_{vm}^h$  en puntos de Gauss. Técnica SPR-C.

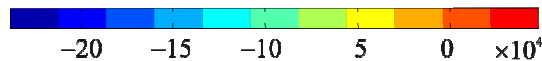
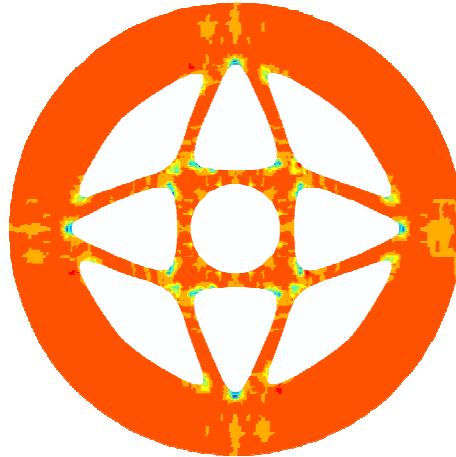


Figura 4.77 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 2.  $\sigma_{vm}^* - \sigma_{vm}^h$  en puntos de Gauss. Técnica SPR-C.

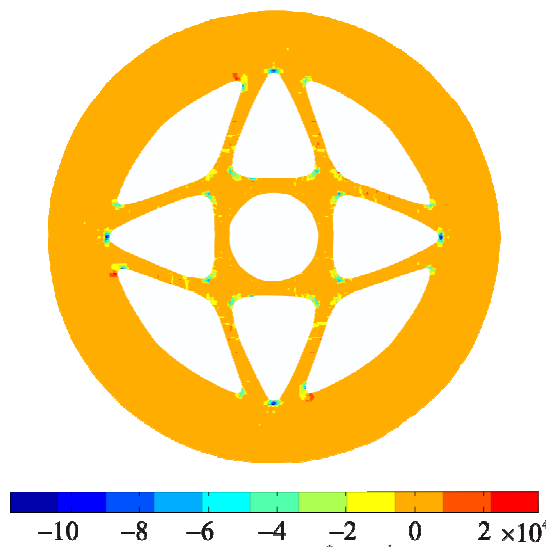


Figura 4.78 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 3.  $\sigma_{vm}^* - \sigma_{vm}^h$  en puntos de Gauss. Técnica SPR-C.

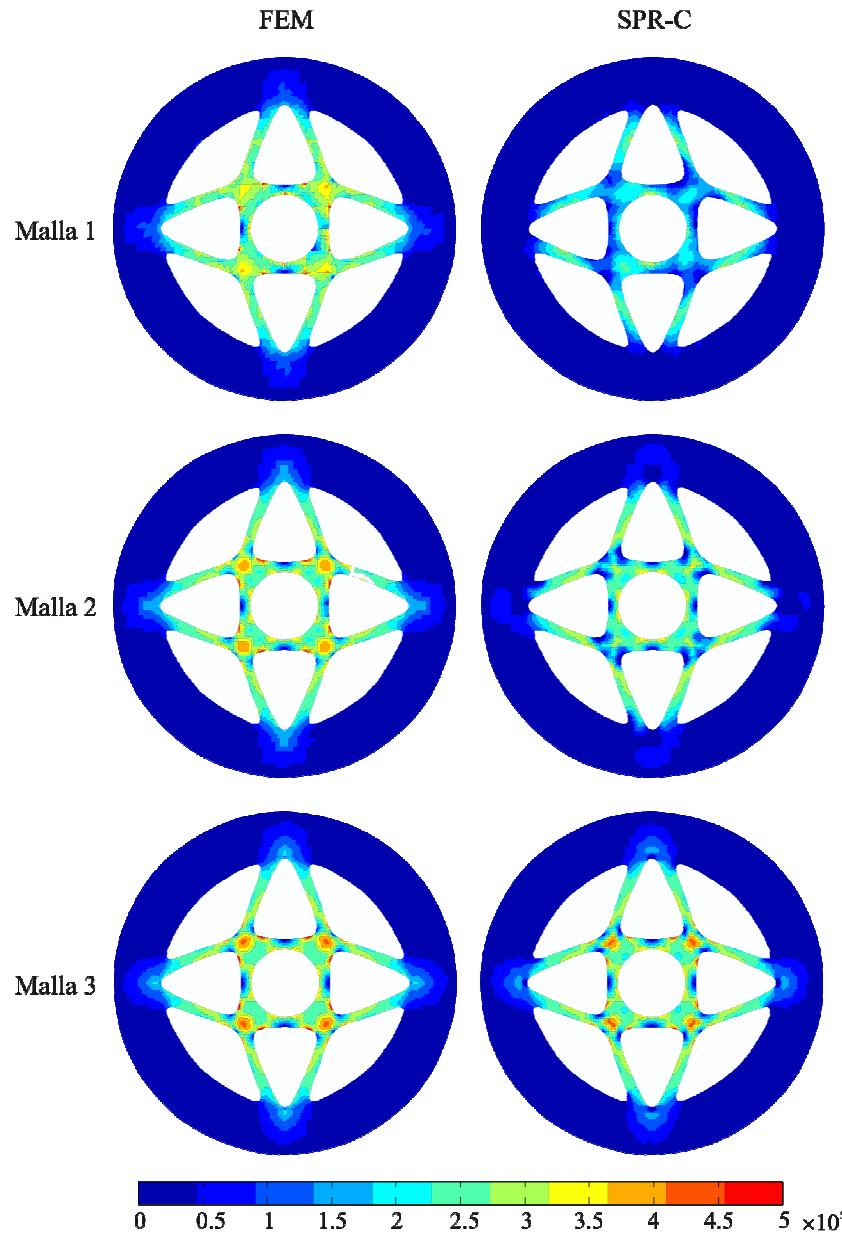


Figura 4.79 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Campos  $\sigma_{vm}^*$  y  $\sigma_{vm}^h$  en puntos de Gauss. Técnica SPR-C.



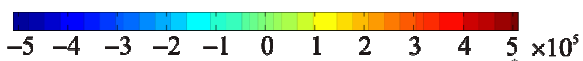
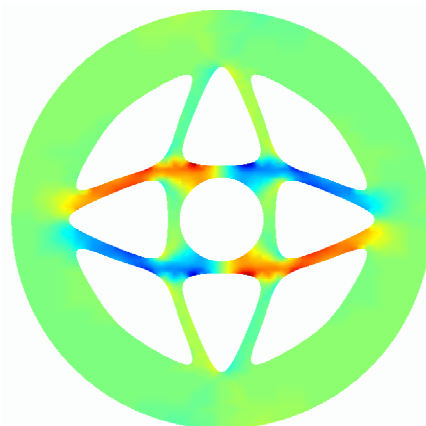


Figura 4.80 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 3. Tensión  $\sigma_x^*$ . Técnica SPR-C.

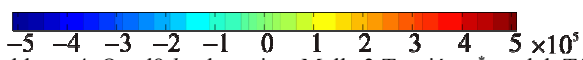
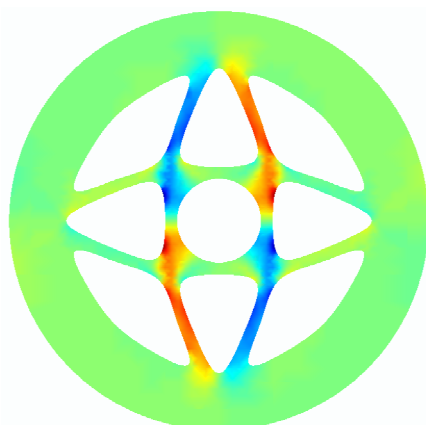


Figura 4.81 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 3. Tensión  $\sigma_y^*$  nodal. Técnica SPR-C.

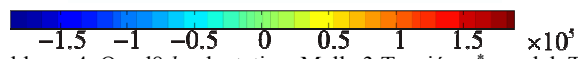
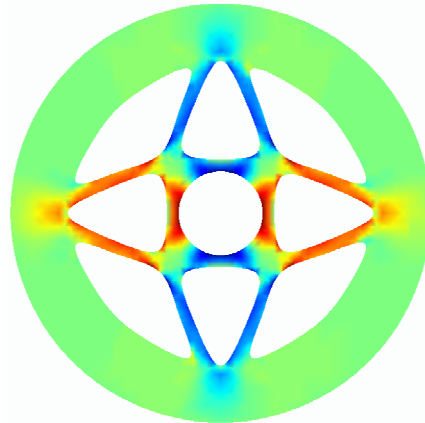


Figura 4.82 Problema 4. Quad8 *h*-adaptativa. Malla 3. Tensión  $\sigma_{yy}^*$  nodal. Técnica SPR-C.

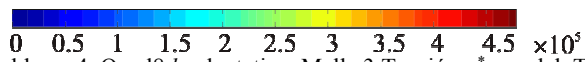
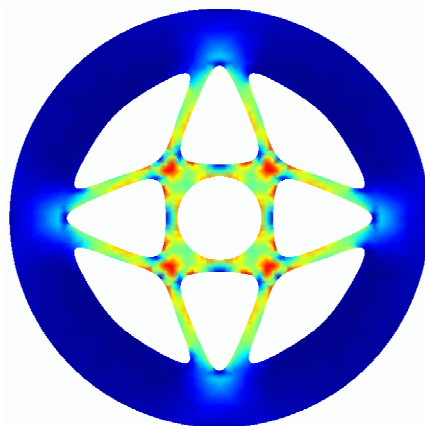


Figura 4.83 Problema 4. Quad8 *h*-adaptativa. Malla 3. Tensión  $\sigma_{vm}^*$  nodal. Técnica SPR-C.

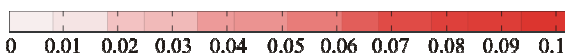
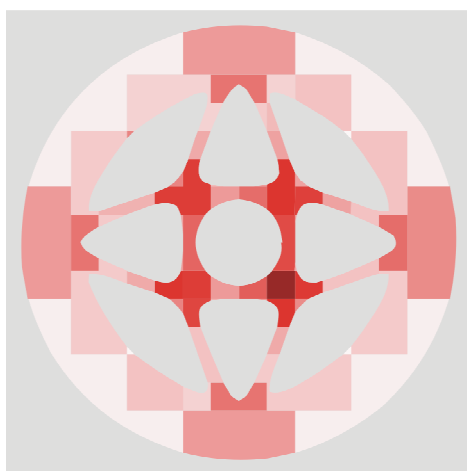


Figura 4.84 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 1. Error relativo estimado. Técnica SPR-C

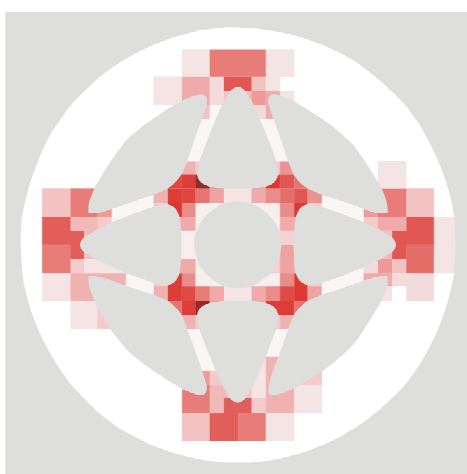


Figura 4.85 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 2. Error relativo estimado. Técnica SPR-C

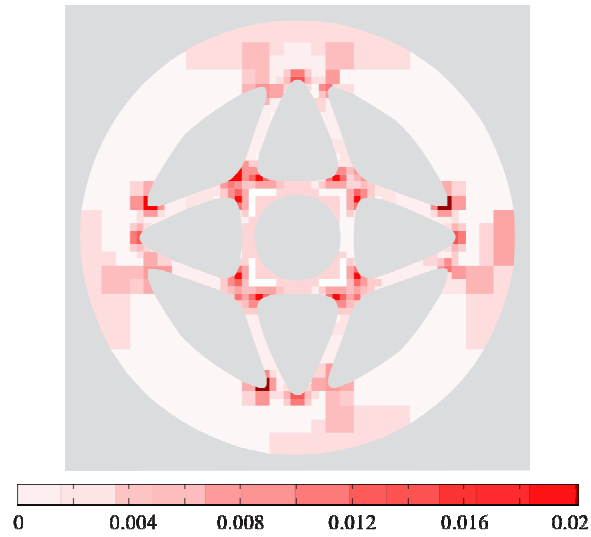


Figura 4.86 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativa. Malla 3. Error relativo estimado. Técnica SPR-C

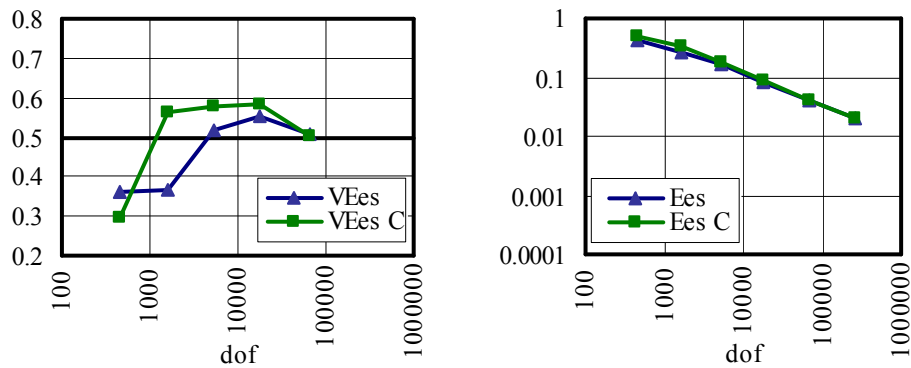


Figura 4.87 Problema 4. Quad4  $h$ -uniforme. Velocidad de convergencia y del error relativo estimado.

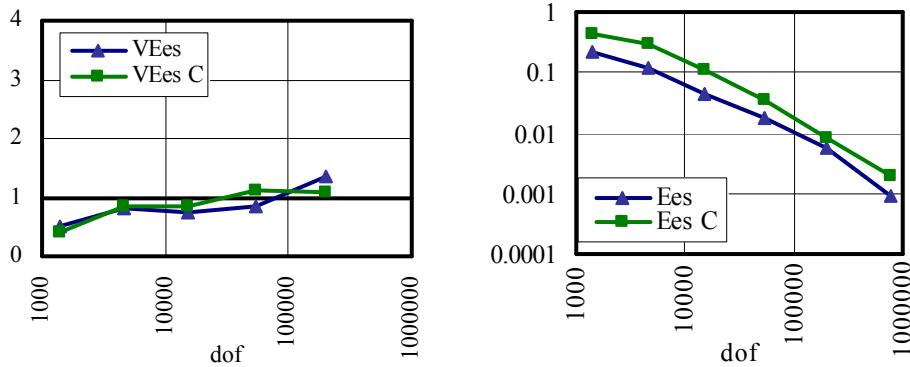


Figura 4.88 Problema 4. Quad8  $h$ -uniforme. Velocidad de convergencia y del error relativo estimado.

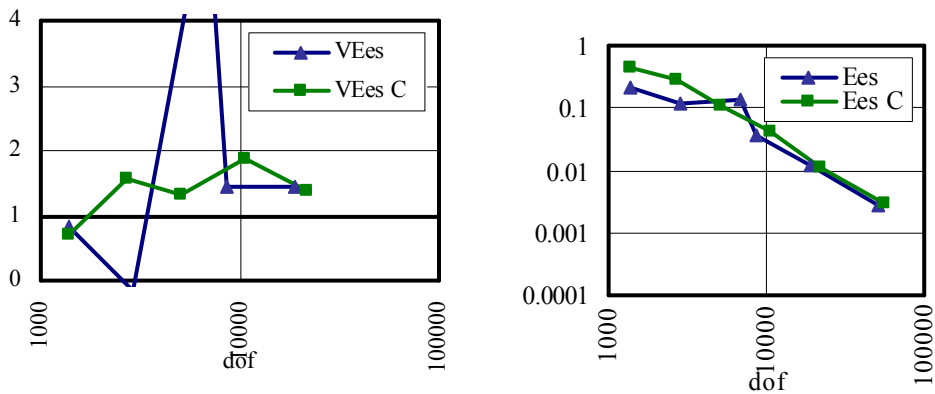


Figura 4.89 Problema 4. Quad8  $h$ -adaptativo. Velocidad de convergencia y del error relativo estimado.

Las figuras de la 4.76 a la 4.78 muestran la diferencia entre campo de tensiones reconstruido y el campo de tensiones obtenido mediante el FEM. Al igual que en el problema 3, los valores de las tensiones recuperadas son inferiores a las obtenidas por el FEM de manera general. Si se observa la Figura 4.79 se puede ver también que hasta que la malla no adecua su tamaño al dominio, la técnica SPR-C no es capaz de alcanzar a definir el problema correctamente debido a la problemática de la imposición de las condiciones de contorno en contornos curvos. Por otro lado, es importante resaltar que en el campo obtenido por el FEM existen puntos que se encuentran saturados en la escala debido a la influencia de los nodos *fantasma*.



Además se muestran las tensiones nodales en dirección  $x$ ,  $y$ , tangenciales y de Von Mises para la tercera malla refinada. Dichas tensiones han sido obtenidas mediante la reconstrucción del campo de tensiones de FEM por medio de la técnica SPR-C y se muestran en las figuras de la 4.80 a la 4.83. Se puede observar las zonas donde las solicitaciones son mayores y la distribución del campo de tensiones reconstruido a lo largo del dominio.

Por otro lado, se ha calculado también el error relativo estimado en tensiones para las mallas propuestas, observándose una reducción del mismo a medida que se refina la malla. En las figuras de la 4.84 a la 4.86 se muestra una sucesión de mallas de elementos cuadráticos en las que tras el proceso de refinamiento  $h$ -adaptativo se va observando una reducción significativa del error estimado, y por otro lado se observa también que en las zonas donde se ha refinado, corresponden a las zonas donde el error estimado ha sido mayor. También cabe destacar que en sólo tres iteraciones, el error máximo estimado es del 2%.

Se puede observar, en las figuras de la 4.87 a la 4.89, que tanto para elementos lineales, como para elementos cuadráticos con refinamiento  $h$ -adaptativos, se alcanza el régimen asintótico a partir de los 10,000 grados de libertad, mientras que para la malla uniforme de elementos cuadráticos son necesarios un mayor número de grados de libertad, esto es debido a que se produce un mejor aprovechamiento de los grados de libertad usados en las mallas  $h$ -adaptativas y éste es el motivo principal de su uso. En elementos lineales lo que ocurre es que como hay menos nodos por elemento, existen mayor número de elementos para el mismo número de grados de libertad. Dicho de otro modo, para elementos del mismo tamaño, los elementos lineales tienen menos grados de libertad. Entonces cuando la malla es capaz de definir correctamente la geometría, se alcanza el régimen asintótico.

La velocidad de convergencia, para los lineales tiende a 0.5, justamente la teórica y para los cuadráticos, para refinamiento uniforme, con la técnica SPR-C se estabiliza en valores cercanos a la unidad, pero no se observa una estabilización para la técnica SPR, aunque sus valores también son cercanos a la unidad. En el mallado  $h$ -adaptativo, se observa una estabilización de la velocidad de convergencia de error en valores algo superiores a la unidad.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales

---





## 5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Una vez realizada la exposición de todos los procesos implementados y los resultados obtenidos, es interesante realizar una recapitulación de cuales han sido los factores más importantes que se ha encontrado en el proceso seguido. También es interesante conocer cuales son las posibles mejoras o materias que necesitan ser estudiadas con mayor detenimiento en futuros trabajos.

- El presente método GFEM, permite la resolución de problemas de elementos finitos de manera independiente de la malla, con su ahorro en tiempo computacional.
- El campo reconstruido mediante la técnica SPR-C, permite obtener una solución en tensiones mejor que la que se obtiene directamente de GFEM.
- El uso del campo reconstruido de tensiones SPR-C permite obtener una estimación de gran calidad del error para el entorno GFEM.
- La técnica SPR-C tiene un comportamiento sensible a que la malla de cálculo defina correctamente la geometría, para ello es necesario un refinado basado en la geometría.
- El refinamiento geométrico en las primeras iteraciones ayuda a que la disminución del error sea más acelerada ya que permite captar la geometría del problema más rápidamente cuando ésta es compleja.
- El uso de un refinamiento de la malla  $h$ -adaptativo, reduce en gran medida el coste computacional para alcanzar un error dado.
- Trabajos futuros:
  - Implementación para el uso de mallas  $h$ -adaptativas para elementos lineales con técnica de *recovery* SPR-C.
  - Imposición de las condiciones de equilibrio en el contorno de manera integral.





- Obtener una cota del error en norma energética estimado.
- Realizar un proceso de alisado del campo de desplazamientos
- Implementación de la técnica de *recovery* MLS (*Moving Least Squares*).
- Implementación de un refinamiento geométrico en función de la curvatura del contorno.
- Implementación de la imposición de las condiciones de contorno de Dirichlet en el campo de tensiones o de desplazamientos reconstruidos.
- Implementación de la resolución de problemas singulares con descomposición de la solución “suave” y “singular”.



## 6 ANEXO. ESTRUCTURA DE DATOS

En el presente anexo se va a representar la estructura de datos de las variables más significativas utilizadas en la aplicación, estas variables son *Elm*, *Nod* y *MatK*. La primera de ellas contiene toda la información referente a la estructura de elementos. La segunda de ellas contiene toda la información correspondiente a la estructura nodal y la tercera contiene la información referente a los puntos de integración y los vértices de la triangulación de Delanauay.

De las dos primeras las variables fundamentales se han explicado en la sección 2.2 del presente trabajo, por ello sólo se va a representar la estructura de datos y comentar aquellas que faltan. La tercera de ellas se explicará con más detalle.



## 6.1 Estructura de datos de la variable *Elm*

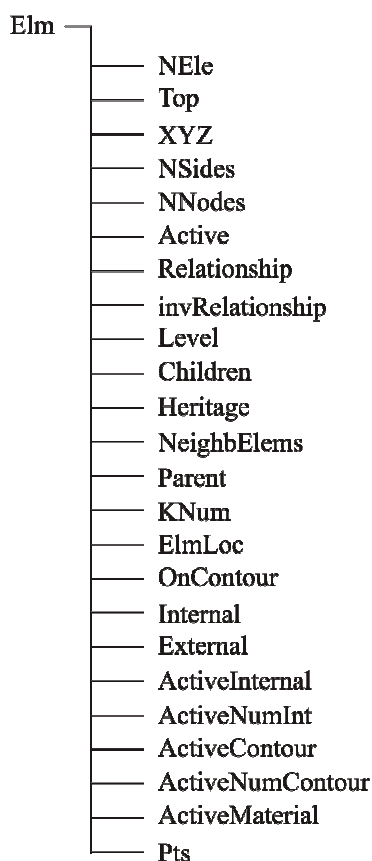


Figura 6.1 Estructura de datos completa de la variable *Elm*.

- *NEle*: indica el número total de elementos.
- *XYZ*: indica las coordenadas de los nodos de un elemento.
- *NSides*: indica el número de lados de cada elemento.
- *NNodes*: indica el número de nodos de cada elemento.
- *Heritage*: indica si el elemento es proveedor de herencia.
- *KNum*: indica el número de matriz K aplicable al elemento.



- *ElmLoc*: indica la posición del elemento respecto al contorno en cada malla.
- *OnContour*: lista de los elementos que están en el contorno.
- *Internal*: lista de los elementos que están en el interior.
- *External*: lista de los elementos que están en el exterior.
- *ActiveInternal*: flag de los elementos internos activos en cada malla de cálculo.
- *ActiveNumInt*: lista de los elementos internos activos para cada malla de cálculo.
- *ActiveContour*: flag de los elementos del contorno activos en cada malla de cálculo.
- *ActiveNumContour*: lista de los elementos del contorno activos para cada malla de cálculo.
- *ActiveMaterial*: flag de los elementos materiales activos en cada malla
- *ActiveNumMaterial*: lista de los elementos materiales activos.
- *Pts*: lista de elementos que contienen fin de línea.

## 6.2 Estructura de datos de la variable *Nod*

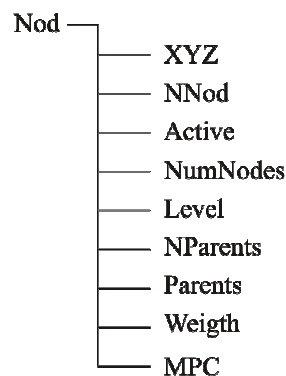


Figura 6.2 Estructura de datos completa de la variable *Nod*.



- *XYZ*: indica la posición en coordenadas cartesianas del nodo respecto del sistema de referencia global.
- *NNod*: indica el número total de nodos.
- *Active*: indica si para la malla de cálculo en cuestión el nodo está presente o no.
- *NumNodes*: esta variable es una numeración donde se representa la nube de nodos por coordenadas, dónde cada fila de la matriz corresponde a una fila de nodos y lo mismo ocurre con las columnas. De este modo se pueden buscar nodos por filas y columnas.
- *MPC*: indica si al nodo en cuestión se le deben aplicar restricciones multipunto.

### 6.3 Estructura de datos de la variable *MatK*

En primer lugar hay que considerar que la variable *MatK* es una estructura de datos de tipo vectorial de modo que existen entradas como elementos distintos a la hora de integración haya. En cada una de las entradas la estructura que se genera es la misma. Hay que considerar que la esta variable está relacionada con la matriz de rigidez del elemento y los puntos de integración. Dicha estructura se presenta en la siguiente figura.

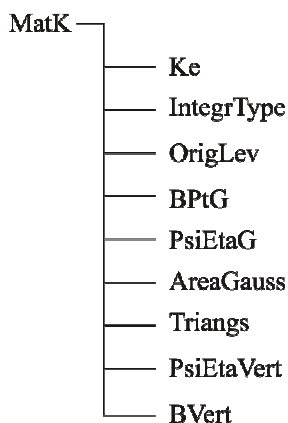


Figura 6.3 Estructura de datos completa de la variable *MatK*.



- *Ke*: es la matriz de rigidez asociada al elemento, si es un elemento interno es la correspondiente al elemento completo, pero si el elemento al que esta asociado es intersectado, sólo es la parte correspondiente que actúa como parte material.
- *IntergrType*: es un flag que indica si esta asociado a un elemento interno o intersectado.
- *OrigLev*: indica en el nivel de refinamiento que está creada la matriz de rigidez.
- *BPtG*: indica el valor, en los puntos de Gauss del elemento, de la matriz **B**.
- *PsiEtaG*: indica la posición, en coordenadas locales del elemento, de los puntos de Gauss.
- *AreaGauss*: indica el área asociada a cada punto de integración de Gauss. Se calcula multiplicando el Jacobiano por el peso de Gauss correspondiente.
- *Triangs*: indica las coordenadas globales de los vértices de cada triángulo de la triangulación de Delaunay.
- *PsiEtaVert*: indica la posición, en coordenadas locales del elemento, de los vértices de la triangulación de Delaunay, o para elemento no intersectados, la posición de los nodos.
- *BVert*: indica el valor, en los vértices o nodos del elemento, de la matriz **B**.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales

---





## 7 Bibliografía

- [1] Ainsworth, M., Oden, J.T. A posteriori Error Estimation in Finite element analysis. John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [2] Bangerth, W., Rannacher, R. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. ETH, Zürich, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [3] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. A simple error estimation and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337-357, 1987.
- [4] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331-1364, 1992.
- [5] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., Adaptivity. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part II: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1365-1382, 1992.
- [6] Strouboulis, T., Copps, K., Babuška, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(32-33):4081-4193, 2001.
- [7] Strouboulis, T., Zhang, L., Wang, D., Babuška, I. A posteriori error estimation for generalized finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(9-12):852-879, 2006.
- [8] Bordas, S., Duflot, M., derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(35-36):3381-3399, 2007.
- [9] Ródenas, J.J., González-Estrada, O.A., Tarancón, J.E., Fuenmayor, F.J. A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular+smooth stress field splitting. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76:545-571, 2008.





- [10] Martí, J. Proyecto Fin de Carrera, Implementación de un programa 2D para resolución de problemas de elasticidad lineal mediante el método de los elementos finitos, utilizando mallados independientes de la geometría, *Universidad Politécnica de Valencia, ETSII*, 2008.
- [11] Ródenas, J.J., Tur, M., Fuenmayor, F. J., Vercher, A. Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70:705–727, 2007.
- [12] Ródenas, J.J., Albelda, J., Tur, M., Fuenmayor, F.J., Hierarchical properties in elements obtained by subdivisión: a hierarchical h-adaptivity program. *International Conference on Adaptive Modeling and Simulation*, CIMNE, Barcelona, 2005.
- [13] Timoshenko, S., Goodier, J.N., *Teoría de la Elasticidad*. Ediciones Urmo, Bilbao, 1968.
- [14] Bordas, S., Duflot, M., Le, P. A simple error estimator for extended finite elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2007. In press.
- [15] Duflot, M., Bordas, S. *A posteriori* error estimator for extended finite element by an extended global recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007. Submitted.