

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

Modelado y simulación
del comportamiento dinámico a baja frecuencia
de trenes articulados

Presentada por: D. Javier Carballeira Morado

Dirigida por: Dr. D. Luis Baeza González

Valencia, mayo de 2012

Nota importante: *Esta tesis doctoral está sometida a procesos de protección o transferencia de tecnología o de conocimiento, por lo que los siguientes contenidos están inhibidos en la publicación en los repositorios institucionales. Autorizado por la Comisión de Doctorado de la Universitat Politècnica de València con fecha 11 de septiembre de 2012.*

Los contenidos inhibidos son, de acuerdo con la numeración establecida en el **Índice general** de esta tesis:

- 2.3. Tren Talgo
- 4. Elementos para el diseño de vehículos ferroviarios
- 6. Aplicación de los modelos
- 7. Conclusiones y futuros trabajos

TESIS DOCTORAL

**Modelado y simulación
del comportamiento dinámico a baja frecuencia
de trenes articulados**

que para la obtención
del grado de
Doctor Ingeniero Industrial

presenta

D. Javier Carballeira Morado

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
de la Universitat Politècnica de València

Dirigida por

Dr. D. Luis Baeza González

Valencia, mayo de 2012

TESIS DOCTORAL

**MODELADO Y SIMULACIÓN
DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO A BAJA FRECUENCIA
DE TRENES ARTICULADOS**

Presentada por: D. Javier Carballeira Morado

Dirigida por: Dr. D. Luis Baeza González

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. Fco. Javier Fuenmayor Fernández

VOCALES: Dr. D. Juan Fayos Sancho

Dr. D. Emilio García García

Dr. D. Javier Santamaría Manrique

SECRETARIO: Dr. D. Alejandro Roda Buch

En Valencia, julio de 2012.

Resumen

Esta Tesis se centra en el desarrollo de herramientas para la simulación de la dinámica en baja frecuencia de trenes articulados. A través de estas herramientas se pretende obtener conclusiones relevantes para el diseño preliminar de estos trenes, ya que en este rango de frecuencias se definen problemas importantes como la seguridad de marcha, la inestabilidad dinámica y, en parte, el confort. Para que estas herramientas sean eficientes, deben tener un bajo coste temporal para el modelado, el cálculo y el postproceso de los resultados.

En la actualidad, el aumento de la velocidad de circulación y la eficiencia energética son factores que influyen notablemente en el desarrollo de los nuevos trenes de alta velocidad. En este sentido, los trenes articulados presentan características que les hacen especialmente indicados para su explotación en alta velocidad. Sin embargo, el modelado de trenes articulados en los programas comerciales de dinámica ferroviaria presenta algunas dificultades. Así, desde el punto de vista industrial, resulta interesante disponer de modelos sencillos que reproduzcan los aspectos más destacados de la dinámica de baja frecuencia de estos trenes. Estos modelos deben proporcionar resultados con una precisión suficiente y ofrecer una visión de conjunto del comportamiento dinámico del tren para poder orientar las decisiones en el diseño de estos vehículos.

En este trabajo se va a plantear una metodología que permita desarrollar modelos dinámicos de trenes articulados de forma eficiente. Para ello, se van a considerar y justificar una serie de hipótesis simplificadoras, y se va a proponer el empleo de coordenadas naturales para describir la cinemática de las cajas. Esta metodología se va a aplicar para desarrollar modelos lineales y no lineales de trenes Talgo con el objetivo de validar las simplificaciones realizadas. Finalmente, se van a realizar una serie de análisis con estos modelos para comprobar su precisión y mejorar el conocimiento del comportamiento dinámico de estos trenes.

Palabras clave: *trenes articulados, dinámica ferroviaria de baja frecuencia, modelado de vehículos ferroviarios, simulación de vehículos ferroviarios.*

Abstract

This Thesis focuses on the development of computational tools for the simulation of the low frequency dynamics of articulated trains. By using these tools, the aim is to reach relevant conclusions for the preliminary design of these trains, since some important problems such as ride safety, dynamic instability and partly comfort are determined by this frequency range. For these tools to be efficient, they should allow for a low time-cost for the modelling, the calculations and the postprocessing of the results.

Nowadays, the increase in the rolling stock speed and the energy efficiency are critical factors in the design of new high speed trains. In this regards, articulated trains share some features which make them particularly suitable for high speed operation. However, it is difficult for the commercial tools available for railway vehicle simulation to suit the modelling of articulated trains. Therefore, from the railway industry point of view, it would be interesting to have simplified models which reproduce the main issues regarding the low frequency dynamics of these trains. These models should be able to give reliable results and an overview on the dynamic behavior of the trains in order to guide the decisions in their design.

A new methodology for developing dynamic models of articulated trains in an efficient manner will be presented in this work. In order to do so, some simplifying hypotheses will be introduced and the use of natural coordinates will be proposed to describe the kinematics of the carbodies. This methodology will be applied to develop linear and non-linear models of Talgo trains in order to validate the hypotheses assumed. Finally, some simulations will be run to establish the accuracy of the models and to improve the knowledge on the dynamic behavior of these trains.

Keywords: *articulated trains, low frequency railway dynamics, railway vehicles modelling, railway vehicles simulation.*

Resum

Esta Tesi es centra en el desenvolupament de ferramentes per a la simulació de la dinàmica en baixa freqüència de trens articulats. Mitjançant estes ferramentes es pretén obtindre conclusions rellevants per al disseny preliminar d'estos trens, ja que en aquest rang de freqüències es defineixen problemes importants com la seguretat de marxa, la inestabilitat dinàmica i, en part, el confort. Per a que estes ferramentes siguen eficients, han de tindre un baix cost temporal per al modelatge, el càlcul i el postprocés dels resultats.

En l'actualitat, l'augment de la velocitat de circulació i la eficiència energètica són factors que influïxen notablement en el desenvolupament dels nous trens d'alta velocitat. En este sentit, els trens articulats presenten característiques que els fan especialment indicats per a la seua explotació en alta velocitat. Tot i això, el modelatge de trens articulats en els programes comercials de dinàmica ferroviària presenta algunes dificultats. Així, des d'un punt de vista industrial, resulta interessant disposar de models senzills que reproduïsquen els aspectes més destacats de la dinàmica de baixa freqüència d'estos trens. Estos models han de proporcionar resultats amb una precisió suficient i oferir una visió de conjunt del comportament dinàmic del tren per a poder orientar les decisions en el disseny d'estos vehicles.

En este treball es plantejarà una metodologia que permeta desenvolupar models dinàmics de trens articulats de forma eficient. Per a això, es consideraran i justificaran una sèrie d'hipòtesis simplificatives, i es proposarà l'ús de coordenades naturals per a descriure la cinemàtica dels caixes. Esta metodologia s'aplicarà per a desenvolupar models lineals i no lineals de trens Talgo amb l'objectiu de validar les simplificacions realitzades. Finalment, es realitzaran una sèrie d'anàlisi amb estos models per a comprovar la seua precisió i millorar el coneiximent del comportament dinàmic d'estos trens.

Paraules clau: *trens articulats, dinàmica ferroviària de baixa freqüència, modelat de vehicles ferroviaris, simulació de vehicles ferroviaris.*

A Diego, Noa e Irene, y a Ana.

A Raquel, y a Fina y Albino.

Agradecimientos

En primer lugar debo expresar mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis, Luis Baeza. Siempre le estaré agradecido por haberme dado la oportunidad de quedarme en la universidad trabajando como profesor, y por haber confiado en mí para llevar a cabo esta Tesis. Su ayuda durante la realización de este trabajo ha sido inestimable. Tanto las ideas originales en las que se basa, como algunas de las contribuciones más relevantes, surgen de sus comentarios y sugerencias. Gracias, Luis, confío en que sigamos colaborando en el futuro y puedas recuperar lo invertido durante estos años.

Son muchas las personas que han contribuido en mayor o menor medida y de distintas formas en este trabajo. Muchas de ellas trabajan en el Área de Ingeniería Mecánica de la Universidad Politécnica de Valencia. Aprovecho la ocasión para dar las gracias a todos mis compañeros porque de todos he aprendido algo. Aunque agradezco la amistad de cada uno de ellos, me gustaría destacar a algunos por su colaboración en esta Tesis. A Alex, compañero de fatigas desde mis inicios en el Área, y cuyo apoyo ha sido decisivo para salvar los momentos más difíciles durante la realización de este trabajo. A Andrés, cuya afición por el ferrocarril y sus conocimientos sobre los trenes Talgo han sido fundamentales. A Toni, por echarme una mano con la docencia y compartir su amplia experiencia conmigo. A Manolo, por sus consejos para acabar la Tesis y su ayuda con el LaTeX. A Marga, por guiarme a través de los tortuosos caminos de la burocracia. A los compañeros del café matutino, porque los consejos más valiosos pueden surgir en una tertulia improvisada. A la *delegación de festejos* del DIMM, por conseguir un ambiente de trabajo inmejorable.

A la empresa Patentes Talgo, S.L., por su colaboración durante el desarrollo de este trabajo. De forma particular, a Emilio García y a José Carlos Miguel De Priego por su generosidad y por haber estado siempre atentos a mis dudas.

A todos mis amigos, porque su amistad y su confianza han sido una fuente constante de motivación durante todo este tiempo. En especial, a mis amigos del *martes* por ayudarme siempre a compensar tanto esfuerzo y concentración con una buena dosis de risas. Y a los miembros de la *Secta* por demostrar que la multidisciplinariedad es realmente enriquecedora.

x

A toda mi familia, por todos los buenos momentos compartidos y por conseguir que tenga *morriña* cada día del año. A la familia de Ana, porque me siento realmente uno más, y en especial a Mayte, por su cariño y su apoyo logístico en las últimas semanas de redacción de la memoria.

A mi hermana, gracias por ser como eres, no me puedo imaginar la vida sin ti. A mis padres, les debo todo. Mi gratitud hacia ellos es inmensa. Su sacrificio, su ejemplo y su apoyo están siempre presentes en mi vida. Os quiero mucho.

A mi hija Irene, porque su sonrisa ilumina mi día más gris. A mi hija Noa, porque sus besos me dan superpoderes. A mi hijo Diego, porque me ha traído la Tesis bajo el brazo. Y a Ana, porque me completa, me cuida, me apoya, me anima, me motiva, me soporta y me quiere. Y yo, cada día me enamoro más. Te quiero guapa.

Valencia, mayo de 2012

Índice general

| | |
|--|------------|
| Resumen | I |
| Abstract | III |
| Resum | V |
| Agradecimientos | IX |
| Índice general | XI |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Motivación y justificación | 3 |
| 1.2. Objetivos | 5 |
| 1.3. Organización de la Tesis | 6 |
| 2. Trenes Articulados | 9 |
| 2.1. Introducción | 11 |
| 2.2. Particularidades en el diseño de trenes articulados | 14 |
| 2.2.1. Ventajas de la configuración articulada | 15 |
| 2.2.2. Inconvenientes de la configuración articulada | 17 |
| 2.3. Tren Talgo | 18 |
| 2.3.1. Evolución histórica | 18 |
| 2.3.2. Rodadura independiente | 25 |
| 2.3.3. Tren articulado | 26 |
| 2.3.4. Guiado de los rodales | 28 |
| 2.3.4.1. Rodales entre cajas | 28 |
| 2.3.4.2. Rodales extremos | 30 |
| 2.3.5. Pendulación natural | 31 |
| 2.3.6. Otras características de diseño | 32 |
| 2.3.6.1. Baja altura | 32 |
| 2.3.6.2. Construcción ligera | 33 |
| 2.3.6.3. Rodadura desplazable | 33 |
| 3. Fundamentos de dinámica ferroviaria en baja frecuencia | 37 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3.1. | Introducción | 39 |
| 3.2. | Análisis cinemático de un vehículo ferroviario | 40 |
| 3.2.1. | Análisis cinemático de un eje montado | 41 |
| 3.2.1.1. | Velocidades de pseudodeslizamiento | 47 |
| 3.2.2. | Análisis de la movilidad de los bogies y cajas | 50 |
| 3.3. | El problema de contacto rueda-carril | 51 |
| 3.3.1. | El planteamiento del problema | 53 |
| 3.3.2. | Contacto rígido | 55 |
| 3.3.2.1. | Problema de posición | 56 |
| 3.3.2.2. | Funciones de restricción | 57 |
| 3.3.3. | Fuerzas en el contacto | 57 |
| 3.3.3.1. | Teoría lineal de Kalker | 58 |
| 3.3.3.2. | Modelo no lineal de Johnson-Vermeulen | 59 |
| 3.4. | Dinámica de baja frecuencia de un eje montado aislado | 61 |
| 3.4.1. | Modelo lineal de un eje montado | 62 |
| 3.5. | Problemas dinámicos en baja frecuencia | 64 |
| 3.5.1. | Estabilidad | 65 |
| 3.5.1.1. | Inestabilidad del eje | 66 |
| 3.5.1.2. | Inestabilidad de caja | 70 |
| 3.5.2. | Comportamiento en curva | 72 |
| 3.5.2.1. | Esfuerzos de guiado en curva | 73 |
| 3.5.2.2. | Velocidad de paso por curva | 75 |
| 3.6. | Dinámica de baja frecuencia de las ruedas independientes | 77 |
| 4. | Elementos para el diseño de vehículos ferroviarios | 79 |
| 4.1. | Introducción | 81 |
| 4.1.1. | Layout del tren | 81 |
| 4.2. | Criterios de diseño | 82 |
| 4.2.1. | Dinámica vertical | 82 |
| 4.2.2. | Dinámica transversal | 86 |
| 4.2.3. | Consideraciones geométricas | 90 |
| 4.2.4. | Propiedades inerciales | 95 |
| 5. | Modelos de comportamiento dinámico | 101 |
| 5.1. | Introducción | 103 |
| 5.2. | Composición articulada | 104 |
| 5.2.1. | Coordenadas naturales | 105 |
| 5.2.2. | Guiado de los rodales | 107 |
| 5.3. | Rodadura | 109 |
| 5.3.1. | Cinemática | 110 |
| 5.3.2. | Restricciones cinemáticas | 114 |
| 5.3.3. | Velocidades de pseudodeslizamiento | 117 |
| 5.4. | Formulación de la ecuación del movimiento | 119 |
| 5.4.1. | Términos derivados de la energía cinética | 120 |
| 5.4.2. | Suspensión y elementos de unión | 121 |

| | |
|---|------------|
| 5.4.3. Fuerzas generalizadas | 126 |
| 5.4.4. Vehículos en posiciones extremas de la composición | 128 |
| 5.5. Modelo no lineal | 129 |
| 5.5.1. Integración temporal | 130 |
| 5.5.2. Circuito de vía | 133 |
| 5.5.2.1. Cálculo de la cinemática de los sistemas de referencia | 135 |
| 5.5.2.2. Cálculo de los giros ψ_{0j} y Θ_j | 138 |
| 5.6. Modelo lineal | 140 |
| 5.6.1. Formulación. Hipótesis simplificadoras | 140 |
| 5.6.2. Ecuación del movimiento del modelo lineal | 142 |
| 5.6.3. Planteamiento matricial | 148 |
| 5.7. Modelo de dinámica lateral | 149 |
| 6. Aplicación de los modelos | 151 |
| 6.1. Introducción | 153 |
| 6.2. Modelo lineal | 153 |
| 6.2.1. Modos de vibración | 153 |
| 6.2.2. Análisis de estabilidad | 154 |
| 6.2.3. Análisis paramétrico | 156 |
| 6.3. Modelo no lineal | 158 |
| 6.4. Modelo de dinámica lateral | 160 |
| 7. Conclusiones y futuros trabajos | 165 |
| 7.1. Conclusiones | 167 |
| 7.2. Futuros trabajos | 169 |
| A. Modelo de Klingel | 171 |
| Bibliografía | 175 |

Capítulo 1

Introducción

*Cada logro, sea grande o pequeño, tiene etapas de esclavitud y de triunfo; un
comienzo, una lucha, una victoria.*
Mahatma Gandhi

1.1. Motivación y justificación

El aumento de las velocidades de circulación, de las cargas por eje admisibles y de las restricciones en materia de confort y seguridad hacen que cada día sea más importante para los constructores ferroviarios disponer de herramientas de simulación que les permitan mejorar sus diseños. En los últimos años diversas empresas y organismos ofrecen programas de simulación dinámica para vehículos ferroviarios, como pueden ser VAMPIRE, ADAMS/Rail o SIMPACK, por ejemplo. Estos programas incorporan módulos para el análisis del confort del vehículo, el estudio de la estabilidad y del comportamiento en curva del vehículo, entre otros, que permiten al diseñador seleccionar los componentes adecuados en función de las especificaciones de explotación del vehículo en fase de diseño.

Pese al avanzado desarrollo de dichos programas existen todavía ciertas carencias. La mayor parte de los programas comerciales permiten analizar vehículos ferroviarios convencionales que consisten en una caja montada sobre bogies con ejes rígidos [116]. Sin embargo, la simulación dinámica de trenes articulados continúa siendo un reto en la actualidad [37].

Los trenes articulados presentan una serie de ventajas desde el punto de vista dinámico para el diseño de trenes de alta velocidad [14]. De hecho, el record mundial de velocidad de un vehículo ferroviario lo posee un tren TGV [8], que es un tren articulado. Además, su eficiencia energética les hace especialmente atractivos en el futuro [79].

Sin embargo, y a pesar de que existen diversos ejemplos de este tipo de trenes en explotación comercial, la literatura acerca de su modelado y sus características dinámicas es escasa. En la referencia [2] se desarrolla un modelo teórico de un tren TGV y se estudia su comportamiento dinámico en curva. Se trata de un modelo lineal mediante el cual se realiza un análisis cuasiestático de este comportamiento. En ese trabajo se lleva a cabo un análisis paramétrico para determinar los valores adecuados para conseguir el mejor compromiso entre estabilidad y guiado en curva. Entre las conclusiones obtenidas cabe destacar que este compromiso es menos exigente si se compara con la optimización que requiere el diseño de la mayoría de trenes convencionales. El nivel de estabilidad para la configuración articulada es más alto incluso para valores de los parámetros del modelo que favorecen el guiado en curva.

En [49] se emplea un modelo similar para realizar un análisis modal. En este estudio se señala una influencia importante de la rigidez al lazo entre cajas, entre otros parámetros, sobre la estabilidad de la composición. Entre los resultados presentados destaca la existencia de modos de vibración de la composición entera con formas ondulatorias si la rigidez al lazo entre cajas no toma valores dentro de un rango adecuado.

La referencia [41] trata el modelado de un tren Talgo mediante el software comercial de simulación dinámica ADAMS/Rail. En ese artículo se comentan las dificultades encontradas para considerar los mecanismos presentes en la articulación entre cajas. Estas dificultades aparecen debido a que se deben crear estos mecanismos a partir de los elementos disponibles en las librerías del software, que en general no se adaptan a

este tipo de trenes.

De este modo, el modelado de un tren articulado mediante un software comercial requiere de la creación de mecanismos específicos que incrementan el tiempo invertido en el modelado, la simulación y en el postproceso de los resultados. Los grados de libertad de las barras de estos mecanismos incrementan los tiempos de cálculo y la complejidad en el análisis de los resultados, por ejemplo, para un análisis modal. Estos mecanismos además pueden generar dificultades numéricas en la simulación debido a las grandes diferencias entre las propiedades inerciales de las diferentes entidades del modelo (masa de una caja frente a la masa de una barra), lo que produce un mal condicionamiento de las matrices asociadas a las ecuaciones del movimiento.

Así mismo, mientras que para la simulación de trenes convencionales es habitual realizar el análisis de un solo vehículo, ya que las conclusiones extraídas pueden extrapolarse al resto de la composición, en el caso de trenes articulados se debe modelar toda la composición. Esto es debido a que la configuración articulada acopla todas las cajas desde el punto de vista dinámico [120]. Esta dificultad incrementa notablemente los tiempos de modelado y cálculo.

De este modo, desde el punto de vista industrial resulta útil el desarrollo de modelos sencillos que permitan extraer conclusiones acerca del comportamiento dinámico de un tren articulado en fases preliminares de su diseño. Sobre esta premisa se justifica el desarrollo de esta Tesis.

Estos modelos deben tener un bajo coste en el modelado, el cálculo y el análisis de los resultados, pero con una precisión suficiente para poder obtener conclusiones cualitativas que mejoren el diseño. En estas fases preliminares, los modelos se pueden centrar en el estudio de la dinámica de baja frecuencia que afecta tanto a la seguridad de circulación, al ser clave para la estabilidad del vehículo, como al confort. Esta dinámica también condiciona el mantenimiento del vehículo puesto que participa en los mecanismos de desgaste asociados al contacto rueda-carril; así como influye en la capacidad del vehículo para evitar un descarrilo.

La dinámica de baja frecuencia se define en gran parte durante el anteproyecto del vehículo, ya que aquí se establecen algunos de los parámetros que mayor influencia tienen sobre ella. Entre estos parámetros cabe destacar: el número, distribución y características de las rodaduras; el tipo de suspensiones empleadas; las uniones entre los distintos componentes del vehículo; así como, las dimensiones y propiedades inerciales de las cajas y de los bogies. Todos estos parámetros se especifican en el inicio del proyecto de un nuevo tren en función de las condiciones de explotación, con poco margen de cambio una vez iniciado. Por lo tanto, deben orientarse adecuadamente desde el principio para evitar diseños erróneos cuya corrección en fases más avanzadas del proyecto resulte muy costosa.

La relación entre estos parámetros es realmente compleja. No se han encontrado referencias que intenten dar solución a un diseño integral del vehículo, excepto la referencia [70], y lo hace a partir de una optimización planteada mediante restricciones de tipo económico principalmente. El planteamiento de una función de optimización similar

en términos dinámicos es inabordable porque la influencia mutua entre los distintos parámetros no se puede cuantificar de forma sencilla.

Así pues, la principal motivación de esta Tesis reside en el desarrollo de una metodología para la creación de modelos simplificados para la simulación y el análisis de la dinámica de baja frecuencia de trenes articulados.

1.2. Objetivos

En la actualidad existe un creciente interés por el desarrollo y la implantación de trenes de alta velocidad. Este interés genera una alta competencia, por lo que los fabricantes deben ofrecer cada día nuevas soluciones tecnológicas en sus vehículos para mejorar la experiencia de los pasajeros y las prestaciones. Así, aunque las principales tecnologías ferroviarias empleadas en las últimas décadas siguen vigentes [54], también es cierto que se empiezan a incorporar elementos novedosos, como por ejemplo el control activo de suspensiones y rodaduras [46].

Por lo tanto, el diseño de nuevos vehículos requiere de modelos y herramientas de simulación que permitan incorporar distintos elementos de forma modular y ofrezcan conclusiones útiles con un bajo coste en el tiempo de desarrollo [107]. Se pretende disponer de criterio acerca de la influencia de distintos elementos sobre el comportamiento dinámico de baja frecuencia de un tren articulado para poder tomar las decisiones adecuadas desde el inicio del proyecto.

El objetivo principal de la Tesis es encontrar una metodología eficaz para el desarrollo de modelos simplificados para la simulación y el análisis de la dinámica de baja frecuencia de trenes articulados. Este desarrollo se va a llevar a cabo tomando como referencia los trenes Talgo. Estos trenes poseen una serie de particularidades que complican su modelado, frente al modelado de otros trenes articulados más sencillos. Si la metodología es viable para el modelado de un tren Talgo, lo será para el modelado de otros trenes articulados ya que comparten aquellas características básicas en las que se fundamenta la metodología propuesta.

Para conseguir este objetivo global se consideran los siguientes objetivos parciales. En primer lugar, para definir el contexto en el que se desarrolla este trabajo se plantea:

- Recopilar las aportaciones fundamentales que describen los principales problemas de dinámica ferroviaria de baja frecuencia, prestando especial atención a aquellos aspectos relevantes para los trenes articulados.
- Revisar el problema de contacto y los modelos más habituales en simulación dinámica, destacando las principales características dinámicas de las rodaduras con ruedas independientes, que montan los trenes Talgo.
- Establecer criterios de diseño de vehículos ferroviarios desde el punto de vista dinámico, haciendo hincapié en las particularidades que presenta el diseño de trenes articulados.

- Describir de forma exhaustiva y analizar las características técnicas de los trenes Talgo para poder llevar a cabo un correcto modelado.

En segundo lugar, para que los modelos desarrollados cumplan con los requisitos de bajo coste en tiempo de modelado, de cálculo y de postproceso de resultados, se deben alcanzar los siguientes objetivos parciales:

- Justificar las hipótesis de partida que permiten realizar las simplificaciones necesarias en el modelado, teniendo en cuenta las características propias de los trenes Talgo en este caso.
- Plantear un sistema de coordenadas que permita obtener modelos con un bajo número de coordenadas.
- Formular las ecuaciones del movimiento del modelo de forma recursiva para adaptarlo a distintas composiciones del tren.
- Construir el modelo de forma que sea posible incorporar nuevos elementos en el futuro.
- Revisar los algoritmos de integración temporal habituales en la simulación dinámica de vehículos ferroviarios para implementar un integrador robusto y eficiente.

Por último, para validar la metodología propuesta en esta Tesis y como ejemplo de aplicación, se deben cumplir los siguientes objetivos parciales:

- Desarrollar modelos lineales y no lineales que describan el comportamiento dinámico en baja frecuencia de los trenes Talgo.
- Implementar un circuito de vía que permita realizar simulaciones para cuantificar la precisión de los resultados obtenidos.
- Programar una aplicación informática con módulos para el análisis modal y paramétrico de los trenes en fases preliminares de su diseño.

1.3. Organización de la Tesis

La memoria de la Tesis está dividida en tres partes principales:

- Una primera parte en la que se proporciona el marco teórico en el que se desarrolla este trabajo. Esta parte está formada por los capítulos 2, 3 y 4, que podrían haberse integrado en un capítulo de Antecedentes en una estructura de tesis clásica.
- Una segunda parte que es el núcleo central de la Tesis y que se detalla en el capítulo 5.
- Y una tercera parte en la que se valida la metodología propuesta y se extraen aquellas conclusiones más relevantes. Esta parte se compone de los capítulos 6 y 7.

Este primer capítulo sirve como introducción al problema que se aborda en este trabajo y contiene la motivación y la justificación de esta Tesis. Además se detallan los objetivos que se pretende alcanzar en el desarrollo de la misma.

En el capítulo 2 se describen las principales características de los trenes articulados y las diferencias que presentan para su diseño desde el punto de vista dinámico frente a los trenes convencionales. Se repasa la evolución y características técnicas de los trenes Talgo, ya que los modelos desarrollados en esta Tesis estarán basados en estos trenes. Este capítulo contiene información acerca de la tecnología empleada en los trenes Talgo que se debe considerar para realizar su modelado de manera adecuada.

La finalidad del siguiente capítulo es proporcionar los antecedentes teóricos necesarios para conocer el estado del arte actual en cuanto a dinámica ferroviaria de baja frecuencia se refiere. El capítulo 3 se organiza de forma que inicialmente se resumen los fundamentos teóricos de la dinámica ferroviaria de baja frecuencia, para a continuación presentar los principales problemas dinámicos que aparecen en este rango de frecuencias. El capítulo se completa con una sección dedicada a las particularidades en el modelado de la dinámica de vehículos ferroviarios derivadas del empleo de ruedas independientes.

El capítulo 4 está dedicado a la elaboración de una serie de criterios de diseño de vehículos ferroviarios desde el punto de vista dinámico. El contenido de este capítulo trata fundamentalmente sobre la influencia de los distintos parámetros geométricos, inerciales y de unión entre los diferentes elementos que conforman un vehículo ferroviario sobre su comportamiento dinámico en baja frecuencia. La mayor parte de los criterios de diseño son aplicables indistintamente a vehículos convencionales o articulados, aunque se hace hincapié en aquellos aspectos que afectan sobretudo a los trenes articulados.

El capítulo 5 se dedica a desarrollar la metodología propuesta en esta Tesis para el modelado y simulación de trenes articulados. Este capítulo aborda, en primer lugar, la justificación de las hipótesis sobre las que se sustenta la metodología. En segundo lugar, se presenta la formulación de las ecuaciones del movimiento. Y por último, se muestran los modelos desarrollados mediante la metodología expuesta, como ejemplo de aplicación de la misma.

En el capítulo 6 se exponen los resultados más destacables obtenidos con los modelos desarrollados. Este capítulo sirve para validar la metodología a partir del análisis de los resultados y de su comparación con datos facilitados por la empresa Talgo.

Por último, el capítulo 7 está dedicado, en primer lugar, a extraer las conclusiones y destacar las aportaciones más relevantes de la Tesis. Y en segundo lugar, a proponer futuros trabajos que tomen como punto de partida los desarrollos llevados a cabo en esta Tesis.

Capítulo 2

Trenes Articulados

*Un hombre con una idea nueva es un loco hasta que la idea triunfa.
Mark Twain*

2.1. Introducción

En el mundo se explotan comercialmente varios trenes que emplean este tipo de composición, tanto trenes interurbanos y de alta velocidad, como metros y tranvías. Uno de los últimos trenes de alta velocidad desarrollados, el AGV francés (*Automotrice à Grande Vitesse*), tiene una configuración articulada [14]. Un prototipo inicial de este tren denominado V150 posee el record mundial de velocidad de un vehículo ferroviario. Se trata de una modificación de un tren TGV Duplex preparado para alcanzar el record (ver figura 2.2). Lo obtuvo en abril de 2007 al alcanzar los 574,8 km/h [8], lo que demuestra el potencial de este tipo de trenes.



Figura 2.1. Tren articulado AGV

Las principales configuraciones articuladas que se explotan en la actualidad son las que se muestran en la figura 2.3. La configuración mostrada en la figura 2.3(a) llamada de tipo Jakob consiste en compartir un bogie convencional con dos ejes entre dos cajas adyacentes. Hay dos realizaciones prácticas de esta configuración:

- En la figura 2.4(a) se muestra la empleada por el AGV, en la que una caja se articula a la otra pero sólo una de ellas se apoya mediante la suspensión secundaria al bogie. La realización práctica de este concepto se muestra en la figura 2.5. Se trata de un par esférico formado en el apoyo de una caja sobre otra con una traviesa montada sobre la suspensión secundaria. Con este sistema se aprovecha mejor el espacio entre coches y se desacopla la dinámica del bogie y de la caja apoyada.
- En la figura 2.4(b) muestra la empleada en los trenes CIVIA de CAF, cuyas cajas se unen a través de una rótula y ambas se apoyan sobre el mismo bogie. En este caso, el modo de cabeceo del bogie puede excitar a las cajas, pero se simplifica notablemente la articulación que sólo debe transmitir tracción en este caso.



Figura 2.2. Tren articulado V150 con el record mundial de velocidad

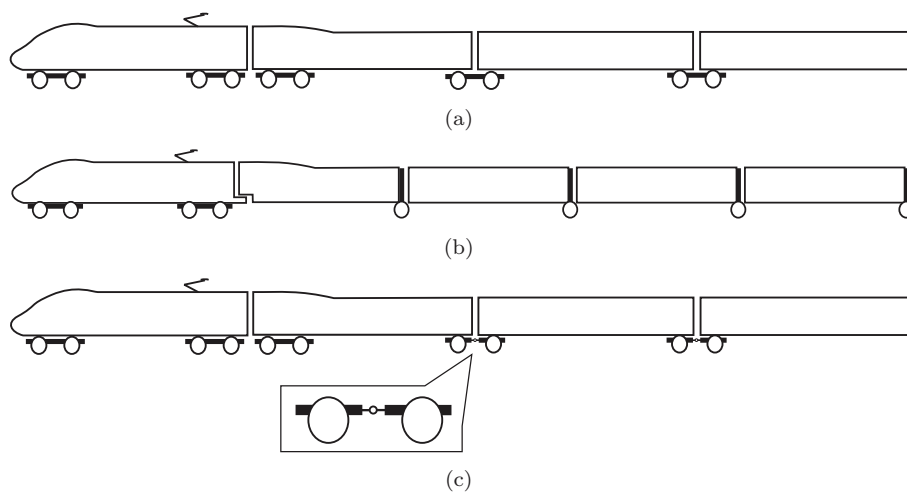


Figura 2.3. Tipos de articulación entre cajas: a) Jakob b) Talgo c) FEBA

La configuración de la figura 2.3(b) es la empleada por los trenes Talgo. En estos trenes existe una rodadura conocida como *rodal* que monta dos ruedas independientes, mostrada en la figura 2.6. Las cajas están unidas mediante un mecanismo llamado *portapesos* que permite unos movimientos relativos entre ambas equivalentes a los de un par esférico (ver figura 2.7).

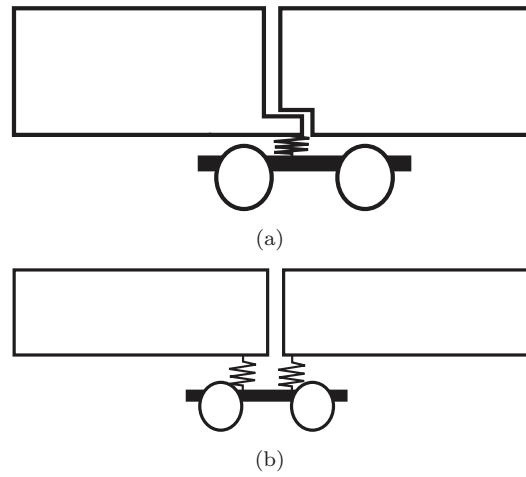


Figura 2.4. Uniones tipo Jakob: a) AGV b) CIVIA

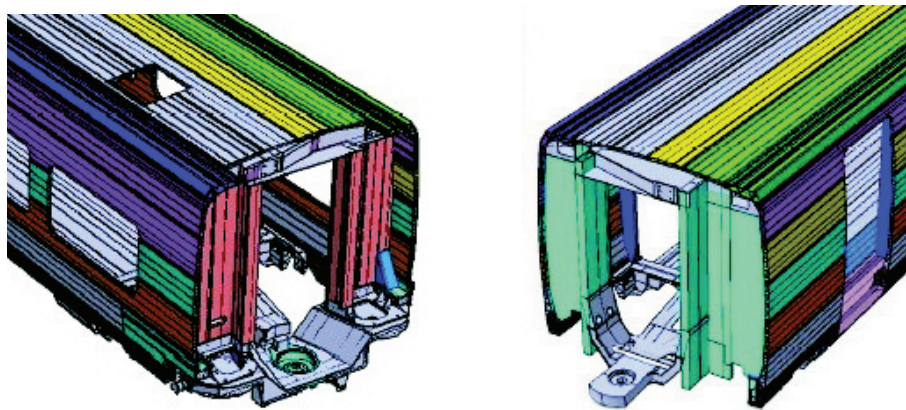


Figura 2.5. Articulación del AGV. Imagen extraída de [66]

La configuración de la figura 2.3(c) ha sido desarrollada por Bombardier y se encuentra en explotación en algunos de sus trenes de cercanías. La idea es dividir el bogie tipo Jakob para hacer más fácil el mantenimiento del vehículo y conseguir un guiado en curva óptimo, conservando las ventajas de la rodadura compartida [85]. La realización práctica de este principio se puede ver en la figura 2.8.

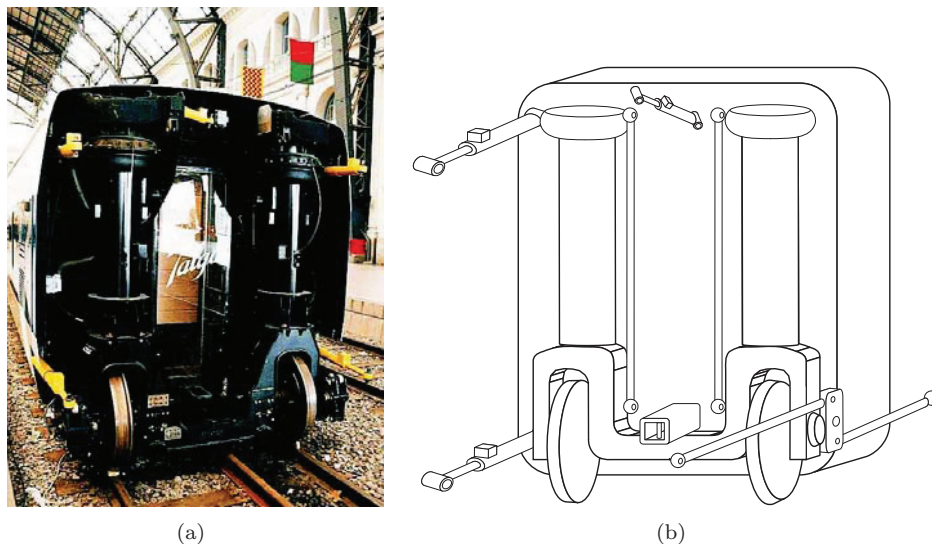


Figura 2.6. Rodal Talgo

2.2. Particularidades en el diseño de trenes articulados

Tal y como destaca un informe de la UIC [79], los trenes articulados poseen algunas cualidades que les hacen especialmente interesante para los trenes del futuro. La más importante es la eficiencia energética. El menor peso y la menor sección transversal de este tipo de vehículos permite unas prestaciones similares a las de los vehículos convencionales con un consumo energético menor.

Este argumento debería haber conseguido una mayor implantación de este tipo de trenes. Sin embargo, la mayoría de operadores mundiales emplean trenes convencionales. Las principales dificultades asociadas a la configuración articulada son de tipo operativo. Las más importantes son:

- En general, no es posible dividir de una forma sencilla estos vehículos, por lo que las tareas de mantenimiento deben realizarse sobre el vehículo completo. Ello obliga a disponer de talleres con las dimensiones y los equipos necesarios, lo cual puede ser complicado y caro para composiciones interurbanas o de alta velocidad donde se necesitan longitudes superiores a los 150 m.
- La falta de flexibilidad debida a la rigidez de las composiciones suele ser un inconveniente para los operadores, que no pueden adaptar los trenes a la demanda de forma sencilla.
- Los esfuerzos para conseguir reducir el peso pueden obligar a emplear materiales más ligeros como aluminio o materiales compuestos, lo que encarecerá el coste

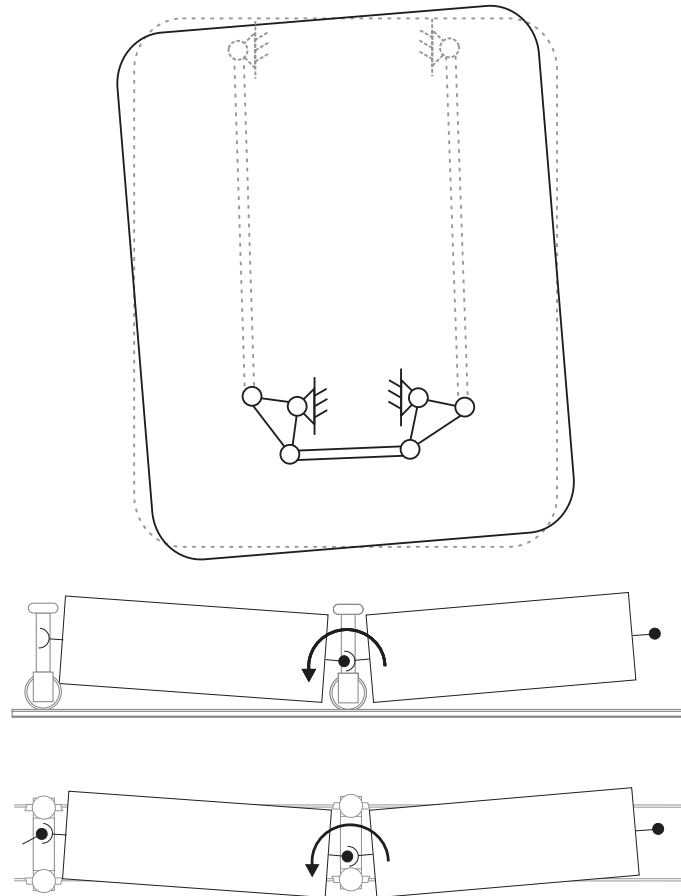


Figura 2.7. Articulación del Talgo

de adquisición del tren.

Estos inconvenientes son los que frenan a los operadores para adquirir vehículos de este tipo. Sin embargo, el empleo de composiciones modulares, como el AGV, o el menor coste de mantenimiento asociado a un menor número de rodaduras, deberían ayudar a cambiar esta situación.

2.2.1. Ventajas de la configuración articulada

Los trenes articulados poseen ciertas ventajas respecto a los vehículos con cajas convencionales montadas sobre bogies y unidas sólo mediante un dispositivo de tracción. Desde un punto de vista dinámico, la configuración articulada ofrece un buen comportamiento gracias a la reducción de peso, el bajo centro de gravedad y el menor número de rodaduras. Para las mismas prestaciones, su eficiencia energética es supe-

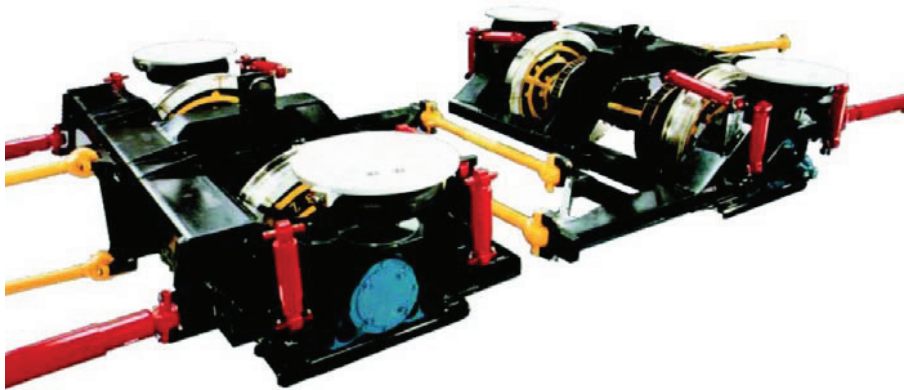


Figura 2.8. Rodadura tipo FEBA desarrollada por Bombardier

rior a la de un vehículo convencional [77]. O bien, visto desde otro punto de vista, para la misma potencia motriz, su capacidad de aceleración es superior.

Esto es posible fundamentalmente gracias a la posibilidad de situar la rodadura entre los coches, y no debajo de éstos. Aquí se enumeran los beneficios más destacables que aporta desde el punto de vista dinámico:

- Se puede aprovechar la altura total del tren para situar los sistemas de suspensión. Un ejemplo de esta situación corresponde al tren Talgo en sus versiones pendulares, en las que las balonas neumáticas de la suspensión secundaria se sitúan sobre torretas soldadas al rodal (ver sección 2.3.5). De esta manera el tren consigue bascular de forma pasiva, incrementando su velocidad de paso por curva mientras mantiene el confort de los pasajeros.
- Al no tener que dejar espacio para los bogies, se puede bajar la altura del piso de los coches de forma que:
 - Se mejora el acceso al tren, disminuyendo los tiempos de espera en las estaciones.
 - Se mejora el perfil aerodinámico y por lo tanto la eficiencia energética del tren.
 - Se baja el centro de gravedad, lo que mejora el comportamiento dinámico y la resistencia al vuelco.
- Las cajas de un tren articulado deben ser más cortas [44] (sobre un 25 %) para disminuir la carga por eje. Sin embargo, también pueden ser más anchas entonces (10-20 cm) sin que aparezcan problemas de gálibo, lo que mejora la habitabilidad. Y además, los menores desplazamientos relativos entre cajas permiten un paso interior entre coches más ancho.

Otra ventaja importante al ser más cortas es que para la misma resistencia a

compresión pueden ser más rígidas a flexión, consiguiendo una frecuencia natural más alta, lo que se traduce en un confort mayor para el pasajero.

- Al compartir las rodaduras entre cajas, el número de ejes es menor, en general. Esto obliga a hacer esfuerzos adicionales para mantener un bajo peso en el tren, de forma que la carga por eje no supere el límite. Sin embargo, aún empleando una configuración con bogies tipo Jakob, se puede conseguir una reducción del peso del tren de entre el 3 y el 10 % [77]. Menos ejes suponen además menor resistencia al avance.
- La unión entre cajas proporciona ventajas desde el punto de vista de un posible descarrilo, al proveer al tren de un sistema antiacaballamiento de forma natural [121]. Además, el tren es menos sensible al viento lateral.
- Al desplazar las rodaduras a los extremos de las cajas, se aleja una fuente importante de ruido y vibraciones de los pasajeros, mejorando el confort de los mismos [14].

2.2.2. Inconvenientes de la configuración articulada

La particularidad más destacable para el análisis de un tren articulado es que su dinámica depende de la dinámica del conjunto de sus cajas, mientras que en un tren convencional se puede estudiar la dinámica de una caja de forma independiente y extrapolar las conclusiones para el diseño de todo el tren.

Desde un punto de vista dinámico, los problemas aparecen debido a la unión entre las cajas y el consiguiente acoplamiento dinámico de todas ellas. Este acoplamiento obliga al diseño integral del tren considerando todas las cajas simultáneamente. Esto lleva a un proceso de diseño más laborioso, para el que no existen herramientas comerciales específicas. Precisamente, esta Tesis pretende contribuir a la solución de esta carencia.

Del mismo modo, el comportamiento dinámico de un tren articulado posee características propias que, en general, conllevan un esfuerzo adicional para conseguir el confort adecuado. En este sentido, existen fenómenos vibratorios que aparecen en la composición en su conjunto y que se transmiten entre las cajas. Así, existen modos de vibración de serpienteo [91], lo que puede generar movimientos parásitos difíciles de atenuar. Este fenómeno es conocido en el diseño de los trenes ligeros y tranvías, que son articulados en su mayoría, pero no es tan importante por la baja velocidad de los vehículos.

En los trenes de alta velocidad no existen muchas referencias, pero se menciona en los trabajos de Haque [49] y Ahmed [2] que modelan un tren TGV. En el artículo de Haque se desarrolla un modelo lineal para estudiar la dinámica lateral de una composición articulada de TGV. Se analiza la estabilidad en función del amortiguamiento al lazo entre cajas, de la conicidad de las ruedas y de la suspensión primaria. Entre las conclusiones más destacables está la presencia de inestabilidades de la composición entera en forma de movimientos ondulatorios, especialmente para conicidades bajas.

Ello coincide con la situación de inestabilidad de caja que se describe en la sección 3.5.1.2, pero al ser un vehículo articulado, esta inestabilidad se transmite a lo largo de la composición. De esta forma, el movimiento lateral de los bogies y de los ejes crece progresivamente desde la parte delantera hasta el extremo posterior de la composición. Según su análisis, una baja rigidez al lazo entre cajas y un alto amortiguamiento mejoran la estabilidad del sistema.

El análisis modal de estos trenes desvela la presencia de múltiples modos locales de vibración asociados a cada caja en concreto. A medida que aumenta el número de cajas, lo hace el número de frecuencias naturales del sistema, por lo que se debe incorporar el amortiguamiento adecuado para evitarlas. Aunque a priori esto supone una desventaja desde el punto de vista del confort, en el capítulo 6 se comprueba como el acoplamiento dinámico entre cajas también supone un incremento del amortiguamiento asociado a cada modo debido a la contribución de todos los amortiguadores de la composición. Esto podría ser beneficioso en caso de avería de algún amortiguador, de forma que el confort de la caja afectada no se vería tan deteriorado como en el caso de una caja convencional.

De este modo, el acoplamiento dinámico entre cajas puede convertirse en una ventaja en ciertas situaciones, siempre que se haga una adecuada selección de los parámetros de rigidez y amortiguamiento de las uniones entre cajas. Precisamente, en la referencia [40] se plantea una solución mediante el empleo de amortiguadores dispuestos longitudinalmente entre cajas para aumentar el nivel de amortiguamiento de toda la composición y evitar así la transmisión de una perturbación a lo largo de la misma. En este trabajo se estudia un fenómeno ondulatorio debido a una perturbación de origen aerodinámico que aparece en las composiciones del tren Shinkansen cuando éste entra en un túnel. Aunque el tren Shinkansen no es un tren articulado propiamente dicho, la solución al problema proviene del acoplamiento dinámico entre cajas mediante el empleo de estos amortiguadores longitudinales con una característica determinada para evitar la transmisión de este fenómeno, pero manteniendo la estabilidad del tren en el resto de situaciones.

2.3. Tren Talgo

En esta sección, en primer lugar, se va a realizar un repaso de la evolución tecnológica del tren Talgo con objeto de conocer el origen de las particularidades de su diseño. A continuación se va a realizar una descripción de sus principales características técnicas para poder modelar su influencia sobre el comportamiento dinámico del tren de forma adecuada. Por último, se van a presentar otras características de diseño relevantes.

2.3.1. Evolución histórica

En esta sección se presenta la evolución de las distintas generaciones del tren Talgo, desde el primer prototipo hasta el tren diseñado para alta velocidad, y como han

Capítulo 3

Fundamentos de dinámica ferroviaria en baja frecuencia

The only way to be sure of catching a train is to miss the one before it.
G. K. Chesterton.

3.1. Introducción

Tradicionalmente en dinámica ferroviaria se distingue entre la dinámica longitudinal del tren en la dirección de la vía y la dinámica transversal y vertical del vehículo. La primera se refiere al comportamiento dinámico en la dirección de la vía de la sucesión de coches o vagones que forman la composición del tren, y abarca fenómenos muy diversos como: comportamiento de la composición frente a accidentes, confort longitudinal, gestión de la circulación, tracción de trenes de mercancías, entre otros. Estos problemas se suelen estudiar con modelos específicos [20]. Mientras que la segunda engloba problemas como la estabilidad de un vehículo ferroviario, el confort de los pasajeros o los esfuerzos de guiado en curva, que son problemas con una gran repercusión sobre las prestaciones y la seguridad del vehículo. Aunque existe una cierta influencia entre ambas, la dinámica longitudinal se suele considerar como un dato de entrada en los modelos de dinámica transversal y vertical de los vehículos, imponiendo una fuerza de tracción o una velocidad constantes sobre el vehículo en la dirección de la vía.

El rango de frecuencia que se clasifica como baja en el ámbito de la dinámica ferroviaria se refiere al de los movimientos de sólido rígido correspondientes a la caja y al bogie. Se trata tanto de desplazamientos y giros respecto de los 3 ejes, como de movimientos debidos a los enlaces elásticos que existen entre los distintos cuerpos que componen el sistema. En general, este rango se encuentra entre los 0 y los 20 Hz.

En este capítulo se pretende realizar una descripción de las teorías y modelos empleados habitualmente en dinámica ferroviaria para estudiar la dinámica transversal y vertical de los vehículos. Esta descripción se centra en los problemas relacionados con la dinámica de baja frecuencia.

En primer lugar se va a analizar la cinemática que describe los movimientos de los cuerpos que forman un vehículo ferroviario. En esta sección además se definen las coordenadas y nomenclatura empleadas en esta Tesis.

En segundo lugar se explica de forma resumida el planteamiento del problema del contacto rueda-carril, que condiciona notablemente la dinámica de un vehículo ferroviario. El modelado del fenómeno de contacto y el cálculo de las fuerzas resultantes puede llevarse a cabo con mayores niveles de precisión a costa de un mayor coste computacional. De este modo, en el ámbito de la simulación dinámica de vehículos ferroviarios se justifica el empleo de modelos simplificados de cálculo de las fuerzas en el contacto, como los descritos en esta sección e implementados en esta Tesis.

En tercer lugar se describen los principales problemas dinámicos asociados al rango de baja frecuencia y su influencia en el comportamiento de los trenes. Los criterios de diseño considerados de forma habitual para evitar o minimizar estos problemas son el objeto del Capítulo 4.

Finalmente se dedica una sección a detallar las particularidades asociadas al empleo de ruedas independientes frente al eje montado para el modelado de la dinámica de

un vehículo ferroviario. Esta sección se incluye porque el tren modelado en esta Tesis es un tren Talgo, que emplea dicho tipo de rodadura.

3.2. Análisis cinemático de un vehículo ferroviario

Un vehículo ferroviario convencional se compone básicamente por estructuras unidas por resortes y amortiguadores. Dentro de este sistema se distinguen partes como la caja y los bastidores, caracterizados por una dinámica correspondiente a la de un elemento pasivo. Por otro lado se encuentran los ejes, los cuales pueden comportarse como un elemento excitador al tener capacidad de introducir energía sobre los movimientos parásitos de los sólidos. Todos los elementos se pueden implementar en un modelo de masas y rigideces concentradas.

El sistema más importante donde se encuentran los elementos que caracterizan la dinámica del vehículo es el *bogie*. Está formado por una estructura (bastidor) unida a dos o más ejes a través de resortes y amortiguadores (suspensión primaria), y frecuentemente mediante bielas. El bogie está unido a la caja a través de una suspensión (suspensión secundaria) y/o mediante los elementos de tracción (pivotes y bielas). El bogie puede montar directamente los motores (bogie motor) y determinados elementos auxiliares, como frenos, areneros, etc. Actualmente la mayor parte de los vehículos poseen bogies, ya que permiten incorporar más ejes por vehículo con objeto de aumentar la carga, sin perjudicar a la calidad de la inscripción en curva.

Además de estos elementos, se emplean otros alternativos en algunos trenes, por lo que conviene definir la nomenclatura empleada en esta Tesis para denominar a los distintos elementos que componen un vehículo ferroviario:

- Rodadura: se refiere a las ruedas del vehículo y se empleará indistintamente para denominar a un eje montado convencional con ruedas caladas o a ruedas independientes.
- Bastidor de la rodadura: se refiere a la estructura que soporta la rodadura y se tiene en cuenta cuando se trate de un cuerpo independiente de la caja. En la mayoría de trenes, este bastidor monta dos ejes rígidos y se denomina *bogie* de forma común. El bogie puede estar a su vez compuesto por 2 cuerpos cuando se emplean *traviesas* para unir caja y bogie. Existen otro tipo de bastidores como, por ejemplo, los *rodales* de los trenes Talgo, que son bastidores monoeje que montan ruedas independientes.
- Coche o vagón: se refiere a la caja que aloja a los pasajeros, en el caso del coche, o a las mercancías, en el caso del vagón. En general, se empleará la palabra *caja* indistintamente.

En esta sección se van a definir los parámetros geométricos y coordenadas que se emplean para modelar un vehículo ferroviario y se va a realizar un análisis de la cinemática de los movimientos más relevantes desde el punto de vista de la dinámica transversal y vertical.

3.2.1. Análisis cinemático de un eje montado

Desde su concepción, los vehículos ferroviarios montan ruedas con perfil troncocónico que habitualmente están caladas en un eje. Este conjunto al que se denomina *eje montado* (formado por las ruedas unidas al cuerpo del eje), confiere al vehículo la capacidad de autoguiado en la vía, realizándose éste de forma eficiente. Al mismo tiempo, el eje montado, debido al sistema de guiado, caracteriza la dinámica de baja frecuencia del vehículo que a su vez define la seguridad de marcha, la inestabilidad dinámica y en gran medida el confort. Esta es la razón por la que numerosos investigadores han tratado de aportar un mayor conocimiento a través de hipótesis cada vez más realistas que basan el desarrollo de los modelos cinemáticos y dinámicos del eje.

En la gran mayoría de modelos, se emplea un sistema de coordenadas cuyo origen se encuentra en la posición del centro de masas del eje centrado en la vía, el eje X tiene la dirección de la vía y sentido positivo el de la marcha, el eje Y tiene dirección lateral, y el eje Z tiene la dirección vertical sentido positivo ascendente. En la figura 3.1 se muestran las 6 coordenadas empleadas para denominar a los 6 grados de libertad (en adelante *gdl*) de un eje montado, con la nomenclatura empleada en la Tesis: desplazamientos longitudinal, x , lateral, u , y vertical, w (y y z se reservan para las coordenadas de las cajas); giros respecto de los ejes (X, Y, Z), denominados (θ, β, ψ) respectivamente.

Cuando el eje se sitúa sobre una vía formada por dos carriles, en cada carril aparecen dos puntos de contacto, uno en la rueda, P , y otro en el carril, P^* (ver figura 3.2). Debido a la forma troncocónica y a la inclinación del carril, en el punto de contacto existe una cierta conicidad, γ , de forma que la dirección normal al contacto no será la dirección vertical, como se observa en la figura anterior.

Esta conicidad, junto con los parámetros geométricos necesarios para la localización tridimensional de los puntos de contacto respecto del centro de masas (en adelante *cdm*) del eje, son fundamentales para la determinación de las acciones sobre el eje debidas a las fuerzas en el contacto. En la figura 3.3 se ilustran los parámetros empleados de forma habitual, que se definen a continuación:

- e es la distancia transversal desde el cdm hasta la vertical del punto de contacto medida según el eje local u .
- r es el radio de contacto y se mide como la distancia vertical desde el cdm hasta el punto de contacto medida según el eje local w .
- ϵ es el ángulo que forma el radio de contacto con el plano $u - w$ debido al giro respecto del eje vertical ψ .
- γ es la conicidad en el punto de contacto y equivale a la dirección de la fuerza normal N respecto al plano vertical.

De entre todos estos parámetros geométricos, la conicidad es probablemente el más importante desde el punto de vista dinámico. Con perfiles reales en ruedas y carriles, la conicidad en los puntos de contacto será variable según la posición del eje sobre

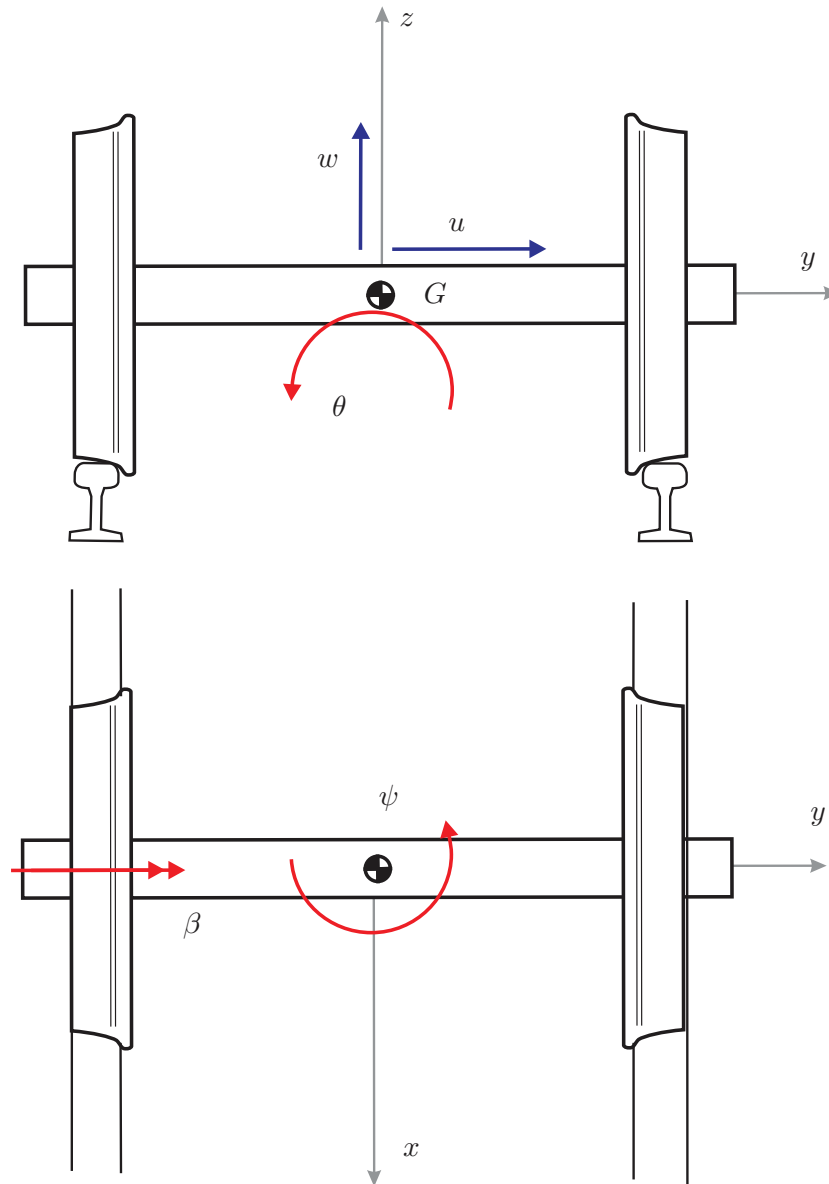


Figura 3.1. Coordenadas asociadas a los gdl del eje

los carriles. Sin embargo, en gran cantidad de cálculos dinámicos se emplea un valor constante denominado *conicidad equivalente*. La conicidad equivalente se define para una combinación de rueda-carril determinada como la conicidad de una rueda cónica que tuviese un comportamiento equivalente para un desplazamiento lateral concreto. Este parámetro tiene en cuenta la conicidad de los perfiles de la rueda y el carril,

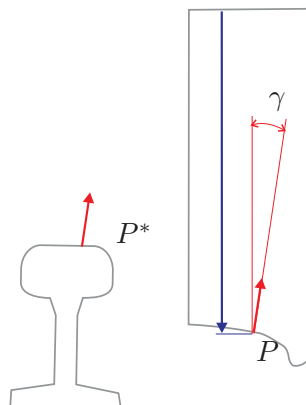


Figura 3.2. Puntos de contacto

junto con la inclinación del carril y el ancho de la vía. De forma que es diferente para varias combinaciones de ruedas y vías, y va aumentando a lo largo del tiempo debido al desgaste de los perfiles [118]. Si se emplean modelos con perfiles de rueda y carril simplificados (ver sección 3.4.1), el valor de la conicidad equivalente puede determinarse analíticamente. En los demás casos, este valor se puede estimar a partir de la diferencia entre los radios de contacto en ambas ruedas para un desplazamiento lateral dado (3 mm según [78]), a partir de la expresión:

$$\gamma_e = \frac{\Delta r}{2u}$$

El primer modelado del eje se debe a Klingel [62] y en él se consideran condiciones de adherencia (rodadura sin deslizamiento) en el contacto rueda-carril. En la formulación (ver Anexo A) se considera un modelo simplificado de la geometría de los perfiles de rueda (tronco de cono) y carril (hilo rígido).

Las conclusiones más importantes de este trabajo son las siguientes:

- 1) El eje tiene un único grado de libertad.
- 2) Ni el movimiento del centro de masas del eje según la dirección de la vía, ni el giro asociado a la rodadura se ven afectados por el resto de desplazamientos.
- 3) El movimiento lateral del eje y el giro en torno al eje vertical son armónicos y no están amortiguados.

Estas conclusiones no se ajustan completamente a la realidad ni explican determinados fenómenos como la inestabilidad, pero permiten tener una información de forma sencilla acerca del comportamiento del eje, según se analiza a continuación.

El único grado de libertad argumentado por Klingel (conclusión primera) se debe a la condición de rodadura pura, existiendo giros según las tres direcciones, y produciéndose el movimiento del centro de masas del eje en un plano paralelo al plano de

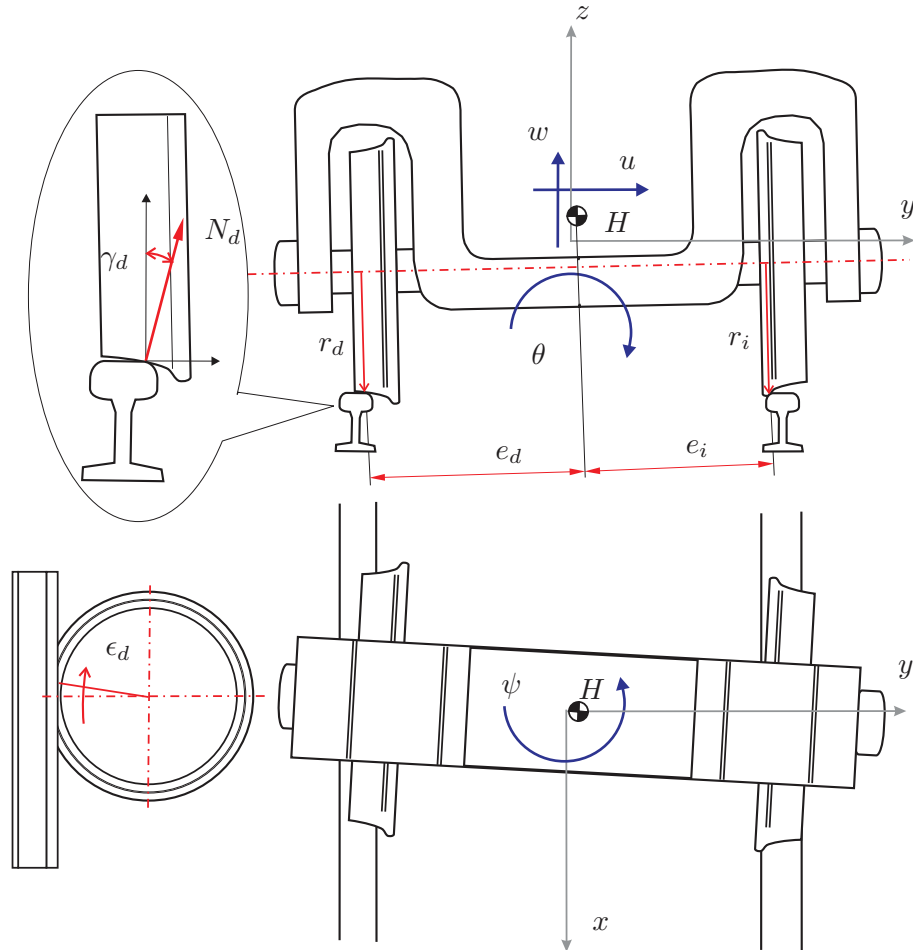


Figura 3.3. Parámetros que definen la posición del punto de contacto. Los subíndices i y d se corresponden con rueda izquierda y rueda derecha respectivamente.

la vía. Según la conclusión segunda, es posible definir unos desplazamientos principales (desplazamiento según la dirección de la vía y giro asociado a la rotación principal del eje) y unos desplazamientos parásitos (desplazamientos lateral y vertical, junto con el resto de giros). Tal y como se detalla en el Anexo A, se establece una restricción no holónoma entre los desplazamientos parásitos numéricamente mayores (u y ψ), siendo ésta:

$$\dot{u} = V\psi \quad (3.1)$$

donde V es la velocidad del vehículo. La solución del modelo de Klingel proporciona los desplazamientos del eje en el plano de la vía, a través de sendas respuestas armónicas correspondientes al desplazamiento lateral y al giro respecto del eje vertical:

$$u = \bar{u} \cos \left(V \sqrt{\frac{\gamma}{r_o e_o}} t \right)$$

$$\psi = \bar{u} \sqrt{\frac{\gamma}{r_o e_o}} \text{sen} \left(V \sqrt{\frac{\gamma}{r_o e_o}} t \right)$$

Este planteamiento corresponde a una primera aproximación (cinemática) a un problema dinámico. Sin embargo, la predicción del modelo del movimiento inestable del eje es razonable. Este movimiento se representa en la figura 3.4, y se conoce como movimiento de *lazo*. Combina el movimiento lateral, u , con el giro respecto de la dirección vertical, ψ , desfasados 90° según se deduce de la condición expresada por la ecuación 3.1.

La frecuencia de dicha oscilación varía con la velocidad (ver figura 3.5), y se denomina *frecuencia cinemática*. Esta ecuación es una buena aproximación, sobretodo para velocidades bajas:

$$f_{\psi_{eje}} = \frac{V}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{e_o r_o}} \quad ; \quad \lambda = \frac{V}{f_{\psi_{eje}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e_o r_o}{\gamma}} \quad (3.2)$$

donde:

- V es la velocidad de circulación
- γ es la conicidad
- r_o es el radio nominal de contacto de la rueda
- e_o es la semidistancia lateral nominal entre los puntos de contacto

Redtenbacher calculó el desplazamiento lateral de un eje en curva a partir de una formulación puramente cinemática similar a la de Klingel [96]. Se trata de un modelo bidimensional que sólo considera el desplazamiento lateral del eje. A partir de la semejanza de los triángulos formados por el radio de curva de cada carril y los radios de contacto en las ruedas (ver figura 3.6), se calcula la posición del eje para mantener condiciones de rodadura pura. Las ecuaciones se presentan a continuación:

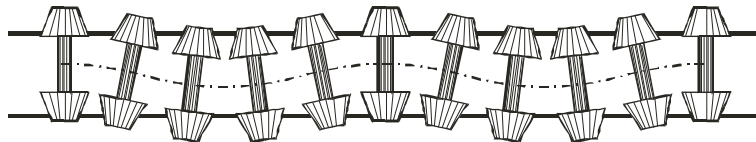


Figura 3.4. Movimiento de lazo de un eje

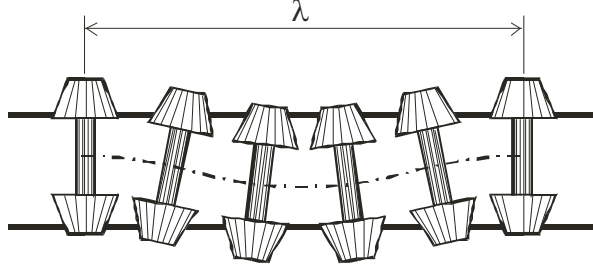


Figura 3.5. Longitud de onda del lazo cinemático de un eje

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{r_d}{R - e_o} = \frac{r_i}{R + e_o} \\ \frac{r_o - \gamma_o u}{R - e_o} &= \frac{r_o + \gamma_o u}{R + e_o} \\ r_o R + r_o e_o - \gamma_o u R - \gamma_o u e_o &= r_o R - r_o e_o + \gamma_o u R - \gamma_o u e_o \\ 2r_o e_o &= 2\gamma_o u R \quad \rightarrow \quad u = \frac{r_o e_o}{\gamma_o R} \end{aligned}$$

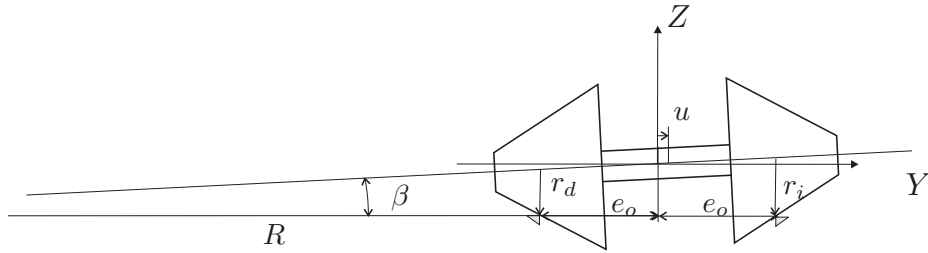


Figura 3.6. Cinemática del eje en curva según el modelo de Redtenbacher

Finalmente, para el análisis del comportamiento de un eje en curva, se emplea un parámetro que define la posición angular del eje en el plano de la vía. En la figura 3.7 se muestra una vista en planta de un eje en curva. El ángulo formado entre la tangente al carril y la rueda se denomina *ángulo de ataque*. Este ángulo puede ser nulo si el eje alcanza una posición completamente radial, positivo si el eje gira en el sentido contrario a la inscripción en curva (mostrado en la figura), o negativo si el eje gira en el sentido de la inscripción.

Como se ha advertido, la formulación cinemática no permite explicar el comportamiento subamortiguado del eje a baja velocidad. En efecto, la respuesta del eje según sus movimientos parásitos está amortiguada con tasas que frecuentemente superan el 10% [11]. La razón de las limitaciones del modelo se debe a que en la realidad no se cumplen las condiciones de adherencia debido al fenómeno del *pseudodeslizamiento* que se explica en la sección siguiente.

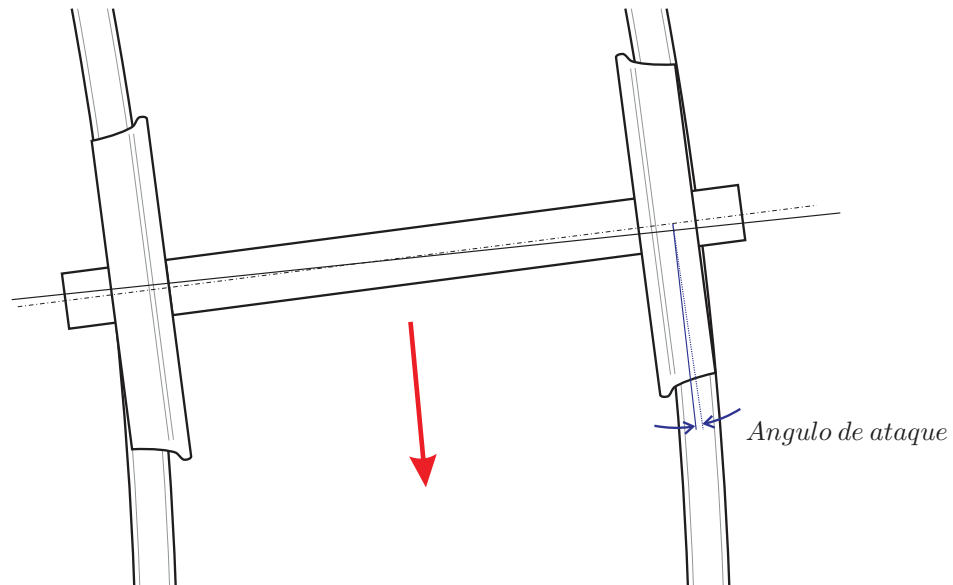


Figura 3.7. Ángulo de ataque

3.2.1.1. Velocidades de pseudodeslizamiento

Bajo la hipótesis de rodadura sin deslizamiento, el eje tiene un único grado de libertad correspondiente al movimiento a lo largo de la vía. Sin embargo, si en el modelo de Klingel se desestima la condición de adherencia, la restricción no holónoma (ecuación 3.1) desaparece, resultando coordenadas independientes u y ψ . Es precisamente el residuo de esta ecuación de restricción, el valor aproximado de la velocidad lateral con la que desliza el eje sobre el carril. Magnitudes similares pueden establecerse para la velocidad de deslizamiento según la dirección de la rodadura. Estas velocidades, numéricamente pequeñas si la comparamos con la velocidad del vehículo, se definen como *velocidades de pseudodeslizamiento*.

Si se considera el fenómeno de *pseudodeslizamiento* aparecen nuevos grados de libertad. Carter [18] introdujo este concepto en 1926 al demostrar que las leyes de contacto de Amontons-Coulomb no son válidas cuando existe rodadura entre los cuerpos elásticos en contacto dado que aparece un fenómeno de deslizamiento relativo entre cuerpos.

Se suponen dos sólidos elásticos en condiciones de contacto en presencia de rozamiento, sometidos a una carga normal al contacto. Se establece entonces un área de contacto cuyo tamaño se supone pequeño con respecto a las dimensiones de los sólidos. Se define el punto de contacto como el punto teórico de contacto suponiendo los cuerpos rígidos. Se supone también que entre ambos cuerpos se transmite una fuerza tangente al área de contacto. En esta situación se produce una distribución de deformaciones y un campo de velocidades de deslizamiento relativo entre las superficies de los cuerpos

en el área de contacto.

Considerando rueda y carril como sólidos rígidos, se observa que como consecuencia de los deslizamientos y deformaciones que se producen en el área de contacto cuando se aplica una fuerza tangente, la velocidad de la rueda en el punto de contacto no es nula. Se define por tanto la *velocidad de pseudodeslizamiento* como la velocidad absoluta del punto de contacto considerado el eje como sólido rígido.

Por otro lado, teniendo en cuenta que la normal en el punto de contacto de la rueda con el carril no es perpendicular al vector velocidad angular del eje, existirá una componente de velocidad angular normal a las superficies de contacto (ver figura 3.8). Por consiguiente existe un giro relativo entre rueda y carril cuyo eje de rotación es la normal al contacto, produciéndose como en el caso anterior deformaciones y tensiones. Éste fenómeno se conoce como *spin*. Aunque el momento que produce se suele despreciar en la simulación dinámica de vehículos, sí debe ser considerado a la hora de analizar otros fenómenos localizados en el área de contacto, como por ejemplo el desgaste [7].

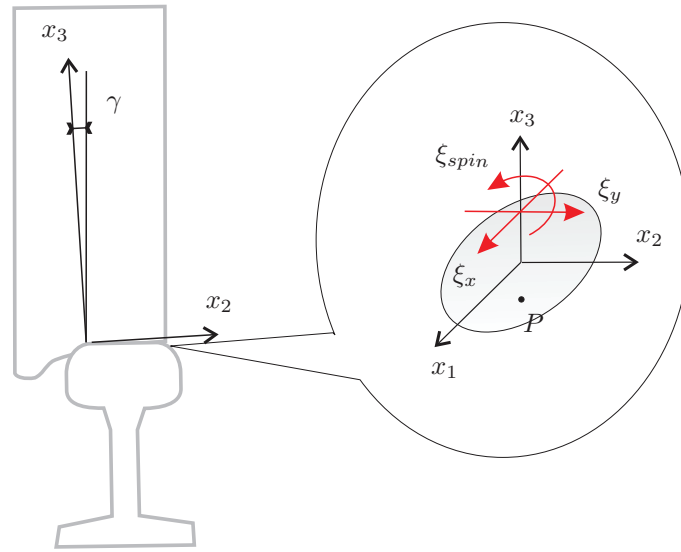


Figura 3.8. Velocidades de pseudodeslizamiento

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{v}}{V}$$

$$\xi_{spin} = \frac{\omega_{spin}}{V}$$

donde:

- $\vec{\xi}$ son las velocidades de pseudodeslizamiento, (ξ_x, ξ_y) , en direcciones (x_1, x_2) respectivamente.
- $\vec{\nu}$ es la velocidad del punto de contacto de la rueda y tiene componentes (ν_x, ν_y) .
- ξ_{spin} es la velocidad de pseudodeslizamiento de *spin*.
- ω_{spin} es la velocidad angular de spin que se produce entre las superficies en contacto.
- V es la velocidad de circulación del vehículo.

Las velocidades de pseudodeslizamiento se pueden calcular a partir de la velocidad de los puntos de contacto. Por tanto:

$$\vec{v}_j = \vec{v}_G + \vec{\omega}^e \wedge \vec{GP}_j$$

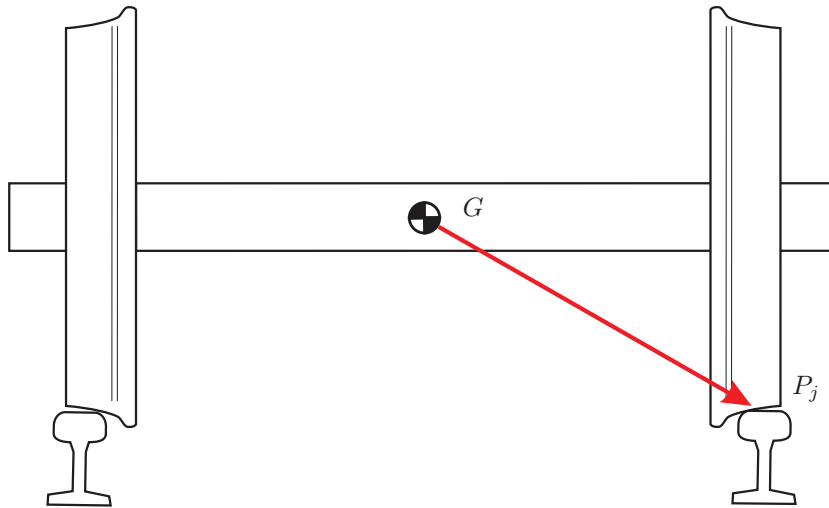


Figura 3.9. Vector de posición del punto de contacto

siendo:

- $j = 1, 2$ se refiere a rueda izquierda o rueda derecha respectivamente
- \vec{v}_G Velocidad del cdm del eje.
- $\vec{\omega}^e$ Velocidad angular absoluta del eje.
- \vec{GP}_j Vector de posición del punto de contacto (ver Figura 3.9).

La velocidad angular de spin ω_{spin_j} que se produce entre las superficies en contacto es la componente en x_3 de la velocidad angular del eje:

$$\omega_{spin_j} = \vec{\omega}_j^e \cdot \vec{x}_3$$

siendo x_3 el eje perpendicular al contacto y \vec{x}_3 su versor asociado.

3.2.2. Análisis de la movilidad de los bogies y cajas

Para realizar análisis dinámicos de baja frecuencia es habitual modelar los bogies y las cajas como sólidos rígidos, considerando sus 6 gdl posibles. También se suelen considerar los modos flexibles de frecuencias más bajas de las cajas, básicamente los primeros modos de flexión y torsión, ya que su frecuencia propia se encuentra en el rango de la baja frecuencia. Además, el acoplamiento entre la caja y los bogies mediante una suspensión con elementos elásticos hace que existan modos de vibración que son combinación de varios movimientos.

En la figura 3.10 se muestra la nomenclatura empleada habitualmente para denominar a los desplazamientos en los 3 ejes (longitudinal en X , transversal en Y , vertical en Z) y giros respecto de los mismos 3 ejes (balanceo ϕ respecto de X , cabeceo θ respecto de Y y guiñada ψ respecto de Z).

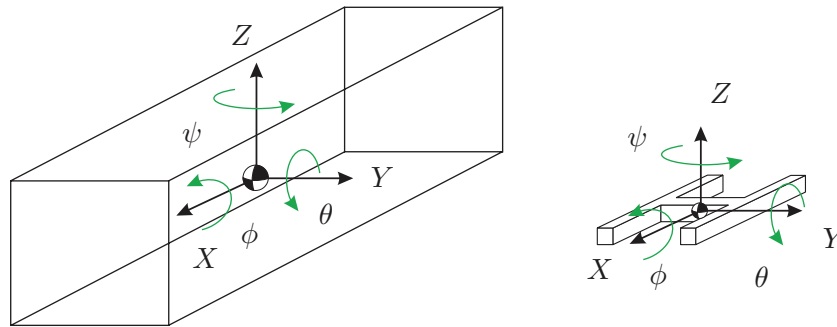


Figura 3.10. Desplazamiento y giros de la caja y el bogie

Entre los modos combinados se suele analizar el que aparece como suma de un movimiento de balanceo y un desplazamiento lateral. Este vaivén se puede producir respecto de un centro de rotación por encima o por debajo del centro de masas de la caja, con dos frecuencias distintas en cada caso. También se considera el *lazo* del bogie y el *lazo* de la caja, que como en el caso del eje, combina el movimiento lateral con el giro respecto de la dirección vertical. Estos modos se ilustran en la figura 3.11.

A través un análisis similar al realizado en el caso del eje montado, es posible obtener una expresión aproximada (válida sólo hasta 200 km/h) de la *frecuencia del lazo cinemático* de un bogie [15] (ver figura 3.12):

$$f_{\psi_{bogie}} = \frac{f_{\psi_{eje}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{e}\right)^2}} \quad (3.3)$$

donde:

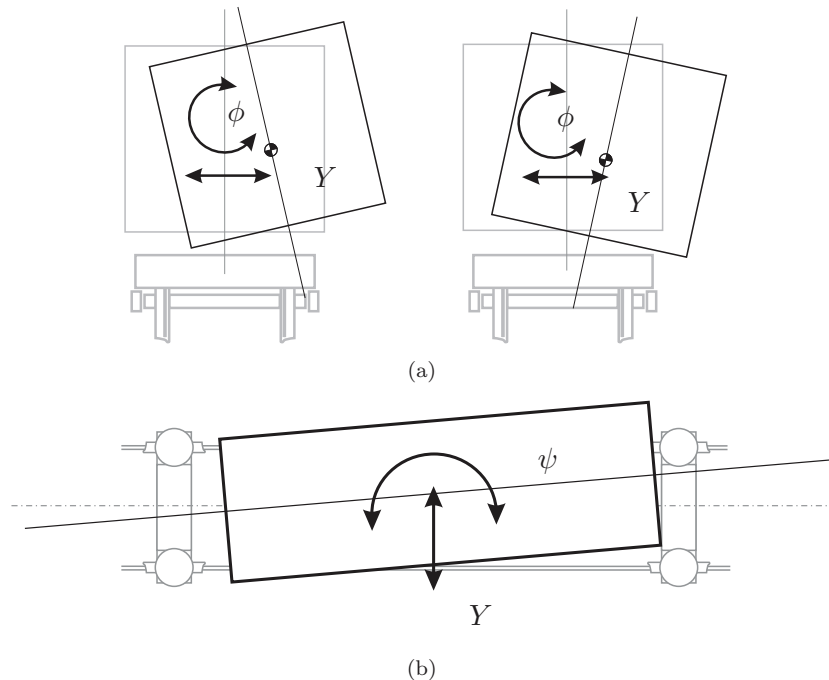


Figura 3.11. Modos de caja combinados: a) Modos de balanceo con desplazamiento lateral; b) Modo de lazo

- $f_{\psi_{eje}}$ es la frecuencia cinemática del eje.
- e es la semidistancia transversal entre los puntos de contacto.
- a es el semiempate del bogie.

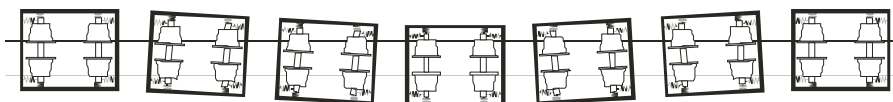


Figura 3.12. Movimiento de lazo de un bogie

3.3. El problema de contacto rueda-carril

El problema de contacto consiste básicamente en establecer las relaciones entre las fuerzas externas aplicadas, la cinemática del eje, la deformación en la zona de contacto de los cuerpos y el campo de tensiones en el área de contacto. Se trata de un complejo fenómeno en el que se produce una transmisión de fuerzas a través de una pequeña área de contacto entre dos cuerpos elásticos con condiciones de rodadura en

presencia de rozamiento. De este modo, en el área de contacto aparecen condiciones mixtas de adhesión y deslizamiento, debidas a los movimientos parásitos del eje y a la deformación elástica de los perfiles.

En la referencia [60] Kalker clasifica las teorías de contacto en rodadura según varios criterios. Según el modelado del problema elástico, Kalker distingue entre *Teorías Simplificadas* en las cuales las relaciones entre el campo de deformaciones y el de tensiones son ajustadas a formulaciones analíticas sencillas aproximadas, y *Teorías Exactas* donde las relaciones son obtenidas a partir de la Teoría de la Elasticidad mediante planteamientos semianalíticos o numéricos. Entre las Teorías Exactas destacan dos casos: contacto conforme, en el que el tamaño del área de contacto es del orden del radio de curvatura de las superficies en contacto, y el contacto no conforme, en el que se puede suponer que los cuerpos se comportan elásticamente como un semiespacio infinito.

Otra clasificación separa las teorías entre las que tienen en cuenta el transitorio que aparece en el fenómeno de contacto y las que no lo hacen. Cuando se produce una modificación en el valor de las fuerzas transmitidas entre los cuerpos, aparece un transitorio en el tiempo consistente en una sucesión de estados de equilibrio en los cuales se va modificando el campo de tensiones entre cuerpos. Mediante esta transición el campo de tensiones se adapta a la nueva situación, produciéndose durante este periodo cambios en el campo de deformaciones y deslizamientos relativos hasta que se alcanza un estacionario. El transitorio se produce en un tiempo muy pequeño de forma que no afecta de forma significativa la dinámica del vehículo, por lo que aquellos modelos de contacto que no consideran el transitorio, denominadas *Teorías Estacionarias*, tienen un interés en dinámica de vehículos mayor frente a las *Teorías No-estacionarias* que sí lo hacen.

Finalmente, una última clasificación se establece según la dimensión espacial del problema de contacto. De esta forma existen modelos sencillos que se encuadran dentro de las Teorías Bidimensionales en los que el campo de tensiones, deformaciones y deslizamientos puede ser descrito en el plano. Los modelos más realistas que se agrupan en las Teorías Tridimensionales, realizan un modelado espacial del problema de contacto.

En una primera aproximación al problema, se puede considerar que se trata de un problema de contacto no conforme, teniendo en cuenta que los radios de curvatura de la rueda y el carril en el plano longitudinal al contacto son varios órdenes de magnitud mayores que las dimensiones del área de contacto. De hecho, si se supone que los radios de curvatura en el plano transversal al contacto también cumplen esta consideración, entonces el área de contacto se puede suponer de forma elíptica y sus dimensiones se podrán determinar analíticamente mediante la teoría de Hertz. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, como por ejemplo el contacto en la pestaña, esta hipótesis no se ajusta a la realidad. Así, existen modelos más completos denominados *No Hercianos* [83] que permiten calcular áreas de contacto con una forma arbitraria.

Kalker desarrolló varios modelos muy distintos aplicando el modelo elástico según

una Teoría Exacta. La Teoría Lineal de Kalker es una técnica semianalítica de cálculo de las fuerzas de pseudodeslizamiento partiendo de un modelo herciano de contacto suponiendo el coeficiente de rozamiento infinito (Teoría de Adhesión). Este planteamiento da lugar a una formulación lineal entre fuerzas y velocidades de pseudodeslizamiento. Se trata de una teoría aproximada dado que realmente el coeficiente de rozamiento es finito y, de hecho, puede variar a lo largo de la simulación según las condiciones de rodadura [87]. Aún así, es ampliamente empleada en dinámica ferroviaria como se explica en la sección 3.3.3.1.

La resolución del problema de contacto no herciano fue resuelto por Kalker mediante el algoritmo CONTACT, que si bien recoge las hipótesis más realistas de contacto no conforme, su utilidad queda limitada por su alto coste computacional. Con una precisión situada entre la Teoría Lineal y CONTACT, Kalker desarrolló FASTSIM [59] que permite el cálculo no lineal de las fuerzas de contacto según una Teoría Simplificada, con un coste computacional razonablemente bajo.

Estas teorías, junto con otras que se han desarrollado para el cálculo de las fuerzas en el contacto, parten de distintas hipótesis iniciales que dan lugar a formulaciones que se caracterizan por su complejidad, su coste computacional y su mayor o menor precisión. Estas características van a determinar la idoneidad para su aplicación en cada uno de los problemas planteados en dinámica ferroviaria. Así, los modelos más complejos corresponden al estudio de problemas de desgaste y corrugación, en los que se deben emplear teorías exactas no estacionarias con contacto no herciano [13], mientras que en dinámica de vehículos se pueden emplear modelos más sencillos para no penalizar los tiempos de cálculo [106]. El objetivo de éstos últimos es proporcionar una aproximación de las fuerzas que aparecen en el contacto a partir de las variables del problema dinámico, pero sin considerar en detalle las deformaciones y tensiones producidas en el área de contacto.

En la referencia [82] se recopilan las metodologías más habituales para el cálculo de las fuerzas en el contacto en dinámica ferroviaria. En estas metodologías se parte de la hipótesis de *cuasiidentidad elástica* que permite separar el problema de contacto normal del problema de contacto tangencial. Esta hipótesis establece que, en caso de contacto no conforme entre dos cuerpos del mismo material, la distribución de tensiones tangenciales no influye sobre la distribución de tensiones normales al contacto. De esta forma, se pueden resolver ambos problemas de forma separada. En primer lugar se debe resolver el problema de contacto normal, dado que las fuerzas normales al contacto determinarán la forma del área de contacto y el valor de otros parámetros necesarios para el cálculo de las fuerzas tangenciales.

3.3.1. El planteamiento del problema

El planteamiento del problema de contacto rueda-carril se refiere al procedimiento empleado para determinar las fuerzas en el contacto a partir de la dinámica del eje. Según el planteamiento empleado aparecen formulaciones matemáticas distintas para considerar el contacto rueda-carril en las ecuaciones del movimiento del sistema.

En la referencia [104] se revisan las aproximaciones al problema de contacto más habituales en la simulación dinámica de vehículos ferroviarios. Para la resolución del problema normal de contacto se emplean básicamente dos aproximaciones: contacto rígido y contacto elástico. En el *contacto rígido* se supone que los perfiles de la rueda y el carril son indeformables y se considera contacto no conforme, de forma que:

- El punto de contacto de la rueda se encuentra físicamente en la misma posición que el punto de contacto en el carril.
- La normal al contacto es la misma para ambos perfiles.
- No existe penetración entre las superficies indeformadas.

Las fuerzas normales al contacto se pueden calcular mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange y las funciones de restricción cinemática que aparecen se acoplan a las ecuaciones del movimiento generando un sistema de ecuaciones diferencial-algebraico. Esta es la aproximación empleada en esta Tesis, por lo que se describe de forma más extensa en la siguiente sección.

La aproximación de *contacto elástico* permite considerar los 6 *gdl* del eje y calcula las fuerzas normales al contacto en función de la penetración entre los perfiles [61]. En la práctica, esta aproximación es equivalente a suponer la existencia de una rigidez y un amortiguamiento entre los puntos de contacto de la rueda y el carril, de forma que las fuerzas en el contacto se calculan a partir de los movimientos relativos entre ambos y se introducen en las ecuaciones del movimiento como un término más en las fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas del sistema.

De este modo, el problema se acopla con la cinemática del eje y se resuelve de forma simultánea. Con este enfoque, la determinación del punto de contacto es muy importante dado que no existen funciones de restricción cinemáticas que limiten el movimiento del eje [105]. Además, pequeñas variaciones en la posición del punto de contacto pueden hacer variar de forma considerable la penetración por lo que la fuerza de contacto tendrá un comportamiento impulsivo que complica la integración temporal de las ecuaciones del movimiento. Para evitar este problema se puede plantear el problema de posición mediante ecuaciones algebraicas [104].

A modo de ejemplo, en la figura 3.13 se muestra la interpenetración calculada para la posición mostrada en la figura 3.14. El cálculo se llevó a cabo siguiendo la metodología de la referencia [83].

Tal y como se ha justificado anteriormente, en ambas aproximaciones el problema tangencial se resuelve a posteriori en función de los valores de las fuerzas normales, propiedades mecánicas y geométricas de los perfiles y cinemática del eje. En la referencia [115] se puede encontrar una recopilación de varios modelos empleados en simulación dinámica, con una comparativa de la precisión obtenida a través de cada uno de ellos.

En la referencia [102] se propone una aproximación híbrida en la que se plantean las funciones de restricción del enfoque rígido, pero suavizadas para tener en cuenta la elasticidad de los perfiles. Otra alternativa se encuentra en la referencia [99], donde

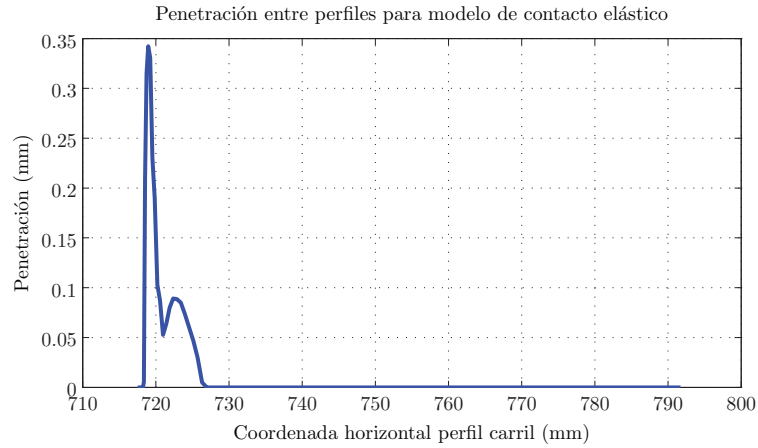


Figura 3.13. Ejemplo de cálculo de la interpenetración en un modelo de contacto elástico

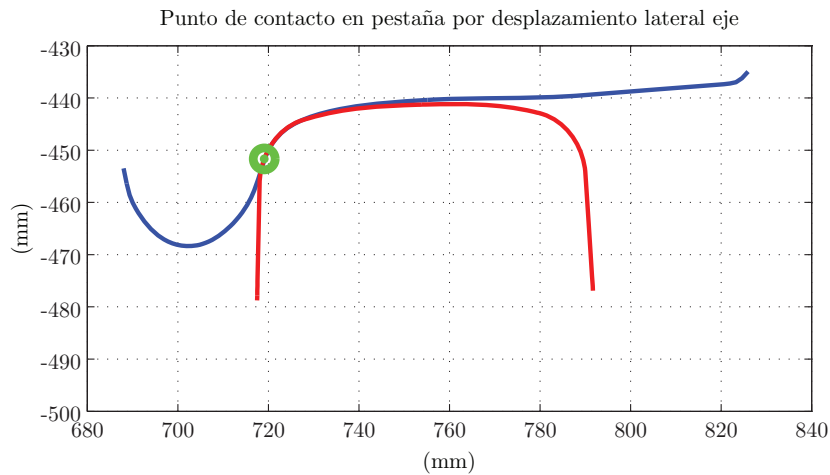


Figura 3.14. Punto de contacto en pestaña de la rueda

se plantea resolver el problema desde un enfoque elástico tridimensional mediante la creación de tablas en las que se puede interpolar los valores de las coordenadas a lo largo de la simulación dinámica.

3.3.2. Contacto rígido

En esta aproximación al problema de contacto, el par cinemático rueda-carril pasa a ser de tipo leva, por lo que este enfoque da lugar a una formulación matemática en la que el eje posee cuatro grados de libertad. De ellos, dos pueden considerarse independientes y otros dos dependientes, debido a las condiciones de contacto enumeradas

anteriormente.

Tomando como coordenadas independientes el desplazamiento longitudinal x y el lateral u del eje, y los giros según las direcciones longitudinal de la vía, θ , y el vertical, ψ , se observa que las restricciones cinemáticas solamente aparecen para los movimientos parásitos del eje u y ψ , debido a la simetría radial del eje.

Por tanto, la posición de los puntos de contacto estará determinada a partir de los valores de las coordenadas independientes y se obtendrá mediante la resolución del denominado *problema de posición*. La solución de este problema genera las denominadas *funciones de restricción* que expresan los valores de las coordenadas dependientes y de los parámetros geométricos que participan en la dinámica del eje, en función de las coordenadas independientes.

3.3.2.1. Problema de posición

La solución del problema de posición conduce a la obtención de los puntos de contacto y la normal a los perfiles en dichos puntos. El problema se puede plantear de forma bidimensional, considerando sólo el desplazamiento lateral del eje, u , o tridimensional, incluyendo el lazo del eje, ψ . Los perfiles de la rueda y del carril se deben introducir mediante alguna función que permita definir analíticamente su geometría. Se suelen emplear polinomios de interpolación (splines) que describen los perfiles a partir de ciertos puntos de control medidos sobre las superficies [93].

Se trata de un problema básicamente geométrico en el caso rígido, que se puede resolver previamente a la simulación dinámica para un número suficientemente elevado de posiciones del eje, o bien acoplar un sistema de ecuaciones algebraico con las variables que definen los perfiles.

La primera aproximación consiste en resolver el problema geométrico de posición y obtener los valores de las coordenadas secundarias numéricamente en tablas cuyas entradas dependen de las coordenadas independientes. Estas tablas podrán interpolarse mediante polinomios que permitan describir estas funciones de forma analítica. De este modo, el problema de contacto se preprocesa antes de la simulación dinámica, agilizando el proceso de cálculo de las fuerzas de contacto durante la simulación. Para encontrar los puntos de contacto, una alternativa consiste en bajar el eje sobre el carril hasta que la distancia entre perfiles se anula [42]. Otra alternativa se presenta en la referencia [122] y consiste en el planteamiento de un sistema de ecuaciones matemáticas a partir de las condiciones de contacto.

En la segunda aproximación se plantean las ecuaciones que resuelven el problema geométrico y se resuelven simultáneamente con las ecuaciones del movimiento [110]. En este caso se integran las ecuaciones algebraicas que describen de forma analítica el problema geométrico de posición a las ecuaciones diferenciales del movimiento, y se añaden las variables que definen los perfiles a las coordenadas del problema.

3.3.2.2. Funciones de restricción

Tal y como se ha descrito, mediante la resolución del problema de posición se obtienen los valores de las coordenadas dependientes y de los parámetros geométricos que determinan la posición y conicidad en los puntos de contacto, definidos en la sección 3.2.1. Estos valores se calculan a partir de las funciones de restricción cinemática correspondientes:

$$\begin{aligned} w &= \Gamma^w(u, \psi) \\ \theta &= \Gamma^\theta(u, \psi) \\ \gamma_i &= \Gamma^\gamma(u, \psi), \quad i = 1, 2 \\ r_i &= \Gamma^r(u, \psi), \quad i = 1, 2 \\ e_i &= \Gamma^e(u, \psi), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

3.3.3. Fuerzas en el contacto

En el contacto entre la rueda y el carril aparecen una serie de fuerzas en el área de contacto debidas al fenómeno de pseudodeslizamiento y a la fricción entre las superficies. En la figura 3.15 se muestran estas fuerzas con la nomenclatura empleada en esta Tesis: X fuerza en la dirección longitudinal, T fuerza en la dirección transversal, y M momento de spin. Estas fuerzas dependen, por un lado, de la forma y el tamaño del área de contacto, y de la distribución de presiones normales, obtenidas en la resolución del problema normal. Y por otro lado, su valor depende de las velocidades de pseudodeslizamiento determinadas a partir de la cinemática del eje. El modelado de estas fuerzas influye de forma notable en los resultados que se pueden obtener en la simulación del vehículo [52, 84].

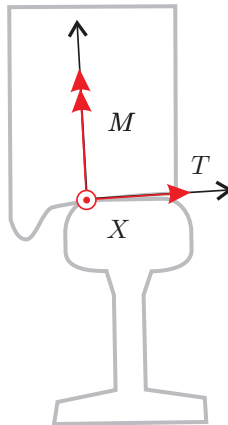


Figura 3.15. Fuerzas en el contacto

A continuación se describen dos de los modelos más habituales en la simulación dinámica de vehículos ferroviarios, con objeto de justificar su empleo en los modelos desarrollados en esta Tesis. El primer modelo es el denominado Teoría Lineal de Kalker. Se trata que se emplea de manera habitual para explicar el comportamiento dinámico de un eje montado y como referencia en el desarrollo de nuevos modelos de contacto. Mediante la aplicación de esta teoría se puede conseguir una linealización de las ecuaciones del movimiento del vehículo ferroviario. Esta linealización permite realizar análisis de estabilidad, de confort o de modos de vibración.

El segundo modelo es el denominado de Johnson-Vermeulen y se va a emplear en el modelo no lineal desarrollado en esta Tesis. Se trata de un modelo aproximado que posee una precisión cercana al algoritmo FASTSIM de Kalker con un coste computacional mucho menor [57]. En la figura 3.16, extraída de la referencia anterior, se compara la fuerza longitudinal calculada en función del pseudodeslizamiento para ambos modelos.

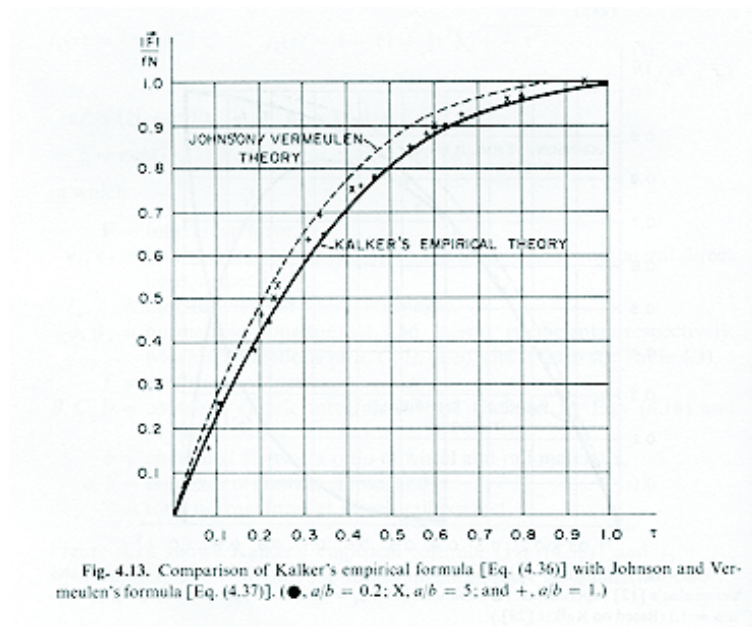


Figura 3.16. Fuerza longitudinal en el contacto según modelos de Johnson-Vermeulen y FASTSIM

3.3.3.1. Teoría lineal de Kalker

Esta teoría fue desarrollada por Kalker a partir de una idea de De Pater. La teoría de Kalker corresponde a un planteamiento tridimensional de tipo cuasiestático. Parte de la hipótesis que toda la zona de contacto, calculada a través de la teoría de Hertz, es zona de adhesión (coeficiente de rozamiento infinito). Este modelo, caracterizado por

ser lineal con respecto a las velocidades de pseudodeslizamiento, es aplicable a casos en los que la velocidad de pseudodeslizamiento es pequeña (trazados rectilíneos con pequeñas oscilaciones), y es especialmente útil para plantear problemas de estabilidad linealizados que conducen a problemas de autovalores. Empleando la nomenclatura definida anteriormente, se denomina X a la componente de la fuerza en la dirección longitudinal al contacto, T a la componente de la fuerza en dirección transversal al contacto y M al momento de spin. Los valores de dichas fuerzas pueden ser calculados a partir de las velocidades de pseudodeslizamiento (ξ_x, ξ_y, ξ_{sp}) mediante la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} X &= -f_{11} \xi_x \\ T &= -f_{22} \xi_y - f_{23} \xi_{sp} \\ M &= f_{23} \xi_y - f_{33} \xi_{sp} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} f_{11} &= (ab) G C_{11} & f_{22} &= (ab) G C_{22} \\ f_{23} &= (ab)^{3/2} G C_{23} & f_{33} &= (ab)^2 G C_{33} \end{aligned}$$

siendo:

- f_{ij} los coeficientes de pseudodeslizamiento que se calculan a través de los coeficientes de adhesión C_{ij} . Estos coeficientes C_{ij} se pueden encontrar en [60].
- a y b los semiejes de la elipse de contacto en dirección longitudinal y transversal respectivamente).
- G módulo de elasticidad transversal obtenido a partir de los módulos de Young y coeficientes de Poisson de los materiales de rueda y carril.

3.3.3.2. Modelo no lineal de Johnson-Vermeulen

Johnson [56] desarrolló una formulación para resolver el problema de rodadura de cuerpos esféricos sin spin, a partir de una extensión al caso tridimensional de la teoría de Carter [18]. Posteriormente Vermeulen y Johnson [114] generalizaron la resolución para el caso de cuerpos no esféricos. Suponiendo contacto herciano, Vermeulen y Johnson supusieron el área de contacto como una elipse de semiejes a y b en la que hay necesariamente una área de adhesión y una de deslizamiento bien definidas. Por analogía al problema normal de contacto desarrollado por Hertz, deducen que el área de adhesión es elíptica, tal como se muestra en la figura 3.17. En esta deducción existe un error ya que un punto que entra deslizando en el área de contacto no puede pasar por una zona de adhesión. De este modo, las áreas marcadas como *error* en la figura no serían de deslizamiento.

Pese a este error, con esta deducción se desarrolla un planteamiento por analogía a la teoría de Carter [57]. Definiendo:

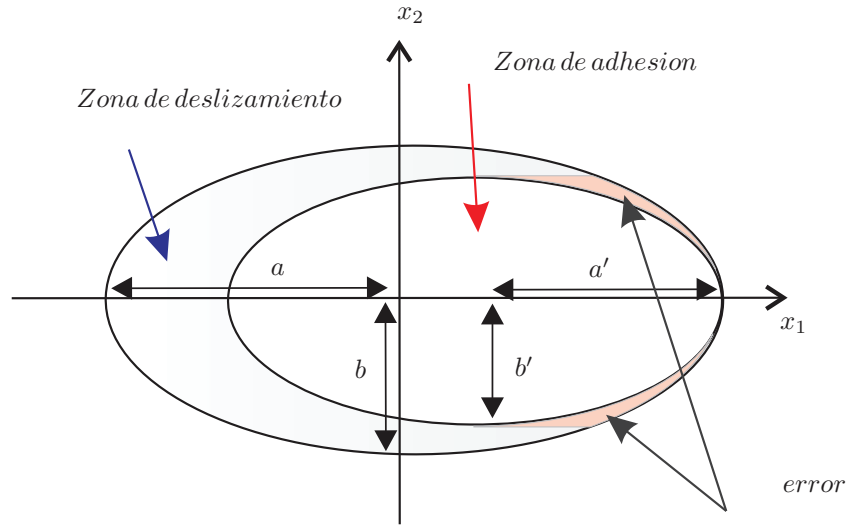


Figura 3.17. Zonas de adhesión y deslizamiento según Johnson y Vermeulen

$$\gamma = \frac{a'}{a}$$

$$\beta = \frac{3\mu F_3}{\pi abG}$$

donde:

- a y b son los semiejes de la elipse de contacto en dirección longitudinal y transversal respectivamente.
- a' y b' son los semiejes de la elipse de adhesión en dirección longitudinal y transversal respectivamente.
- G módulo de elasticidad transversal obtenido a partir de los módulos de Young y coeficientes de Poisson de los materiales de rueda y carril.
- μ es el coeficiente de fricción.
- F_3 es la fuerza normal al contacto.

La relación entre fuerzas y velocidades de pseudodeslizamiento vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\xi_x = -\frac{\pi\beta}{C_{11}} \frac{X}{\sqrt{X+T}}(1-\gamma)$$

$$\xi_y = -\frac{\pi\beta}{C_{22}} \frac{T}{\sqrt{X+T}}(1-\gamma)$$

donde:

- C_{ij} son los coeficientes de adhesión, calculados por Johnson de forma aproximada y de forma exacta por Kalker [60].
- X, T son las fuerzas tangenciales en el plano de contacto en dirección longitudinal y transversal respectivamente.
- ξ_x, ξ_y son las velocidades de pseudodeslizamiento.

De este modo, el algoritmo de cálculo de las fuerzas en función de las velocidades de pseudodeslizamiento es:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{3\mu N}{\pi abG} \\ \vec{e} &= (C_{11}\xi_x, C_{22}\xi_y) \\ \gamma &= 1 - \frac{|\vec{e}|}{\pi\beta} \\ F &= \begin{cases} \mu N(1 - \gamma^3) & \text{si } 0 \leq \gamma \leq 1 \\ \mu N & \gamma \geq 1 \end{cases} \\ (X, T) &= -F \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}\end{aligned}$$

El modelo de Johnson y Vermeulen fue mejorado por Shen, Hedrick y Elkins [108] incluyendo el spin en el cálculo de \vec{e} :

$$\vec{e} = (C_{11}\xi_1, C_{22}\xi_2 + \sqrt{ab}C_{23}\xi_{sp})$$

El momento de spin M se puede considerar calculándolo mediante la Teoría Lineal de Kalker.

3.4. Dinámica de baja frecuencia de un eje montado aislado

De forma empírica se puede comprobar que si un eje se mueve a baja velocidad y es desplazado lateralmente desde su posición de equilibrio, oscilará con una frecuencia similar a la cinemática (ecuación 3.2) pero con amplitudes que irán disminuyendo hasta volver a la posición inicial. Del mismo modo, a partir de una cierta velocidad se observa la formación de un movimiento de lazo del eje con amplitudes considerables y sostenido en el tiempo. Este movimiento introduce un nivel de excitación muy elevado en la dinámica del vehículo. Esta excitación puede producir una pérdida de

confort importante y llega a poner en riesgo la propia integridad del vehículo y de la vía (ver figura 3.18).

Para explicar estos comportamientos se deben emplear modelos dinámicos del eje montado. Estos modelos deben incluir todas las acciones que aparecen sobre el eje. Entre ellas, las acciones que provienen del contacto rueda-carril son las que disipan la energía del sistema, generando ese movimiento subamortiguado del eje a baja velocidad.

Además, se deben considerar las fuerzas debidas a las suspensiones y las acciones gravitatorias. Respecto de éstas últimas, conviene destacar que un desplazamiento lateral provocará un incremento de altura del centro de masas del eje, de forma que éste de manera natural tenderá a regresar a la posición centrada en la que tiene el mínimo de energía potencial. Este fenómeno se conoce como *rigidez gravitacional*. Sin embargo, se trata de acciones conservativas, por lo que la energía potencial se transforma en energía cinética en la posición centrada, de forma que el eje podría mantener la oscilación indefinidamente.

La explicación del fenómeno de entrada en lazo del eje montado es más compleja y se muestra en la sección 3.5.1.1 empleando un modelo simplificado de la dinámica de un eje montado, que se desarrolla en el siguiente apartado.

3.4.1. Modelo lineal de un eje montado

Para derivar unas ecuaciones simplificadas del movimiento de un eje se va a emplear la aproximación al problema de contacto rueda-carril establecida por Joly en la referencia [58]. En esta aproximación se sustituyen los perfiles de rueda y carril reales por sus circunferencias osculatrices en el punto de contacto nominal. De este modo se pueden generar funciones de restricción analíticas que al integrarse en las ecuaciones del movimiento del eje dan lugar a una expresión lineal de las mismas.

$$\theta = \frac{\gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} u$$

$$w = \frac{1}{2(\rho - \rho')} \left(\frac{e_o + \rho \gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} \right)^2 u^2 + \frac{\gamma_o}{2} \{(\rho + 2r_o) \gamma_o - e_o\} \psi^2 \quad (3.4)$$

donde:

- γ_o es la conicidad de la rueda en la posición nominal centrada sobre la vía
- e_o es la semidistancia transversal entre los puntos de contacto (ancho de vía)
- ρ y ρ' son los radios de curvatura de los perfiles de la rueda y del carril en el punto de contacto
- r_o es el radio nominal de la rueda (ver figura 3.19)



Figura 3.18. Estado de la vía tras ensayo de entrada en lazo (extraído de [88]).

Mediante el uso de estas funciones y el empleo del modelo de la Teoría Lineal de Kalker, descrito en la sección 3.3.3.1, las ecuaciones del movimiento de un eje montado se expresan en la forma de la ecuación 3.5:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} m^e + I_x \left(\frac{\gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} \right)^2 & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{2f_{22} e_o}{V(e_o - r_o \gamma_o)} & \frac{2f_{23}}{V} - \frac{I_y V \gamma_o}{e_o r_o - r_o^2 \gamma_o} \\ \frac{I_y V \gamma_o}{e_o r_o - r_o^2 \gamma_o} - \frac{2f_{23} e_o}{V(e_o - r_o \gamma_o)} & \frac{2f_{11} e_o^2}{V} + \frac{2f_{33}}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{W}{\rho - \rho'} \left(\frac{e_o + \rho \gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} \right)^2 - \frac{2f_{23} \gamma_e}{\rho \gamma_o r_o} & -2f_{22} \\ \frac{2f_{11} \gamma_e e_o}{r_o} - \frac{2f_{33} \gamma_e}{\rho \gamma_o r_o} & 2f_{23} + W \gamma_o \{(\rho + 2r_o) \gamma_o - e_o\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

donde:

- m^e , I_x , I_y y I_z son la masa del eje y sus momentos de inercia respecto a los ejes x_j , y_j y z_j .

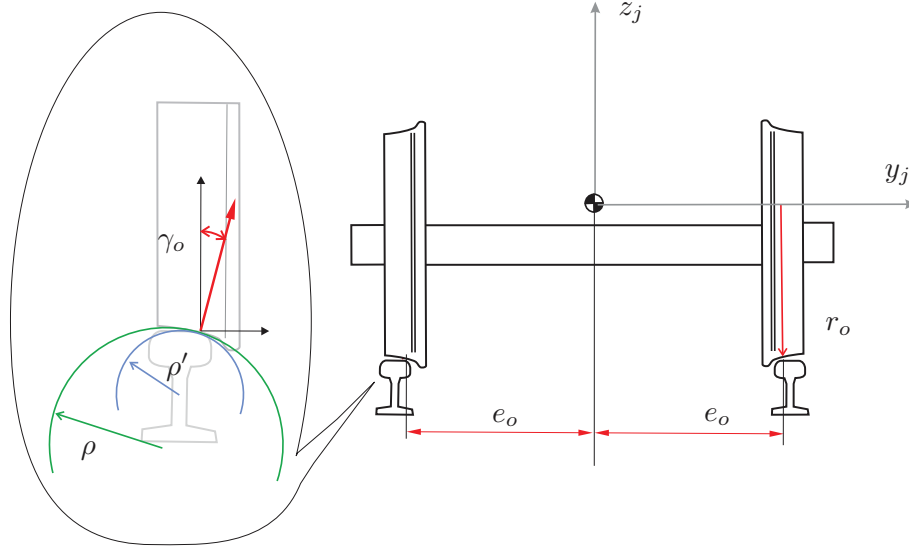


Figura 3.19. Definición de los parámetros de contacto que aparecen en las funciones de restricción según Joly

- W es la fuerza gravitatoria aplicada sobre el eje.
- f_{11} , f_{22} , f_{23} y f_{33} son los coeficientes longitudinal, transversal, cruzado y de spin, respectivamente, del modelo de la Teoría Lineal de Kalker.
- V es la velocidad de circulación.
- γ_e es la conicidad equivalente de las ruedas que puede calcularse gracias a la simplificación de las geometrías de los perfiles mediante la ecuación 3.6.

$$\gamma_e = \frac{\rho \gamma_o}{\rho - \rho'} \frac{e_o + \rho' \gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} \quad (3.6)$$

3.5. Problemas dinámicos en baja frecuencia

En esta sección se van a describir los problemas que aparecen en un vehículo ferroviario asociados a su comportamiento dinámico en baja frecuencia. Considerando el vehículo como un sistema multicuerpo, dentro del rango de baja frecuencia encontramos dos tipos de problemas:

- Por un lado aparecen problemas de vibraciones relacionados con la interacción entre los distintos cuerpos que forma el sistema (caja, bogies, ejes) debida a los enlaces elásticos que los unen a través de las suspensiones. La selección y cálculo

de las propiedades de rigidez y amortiguamiento de los distintos elementos de las suspensiones para que las frecuencias propias de los distintos modos de vibración de los cuerpos que forman el vehículo tomen valores adecuados son objeto del Capítulo 4.

- Por otro lado están los problemas relacionados con los movimientos de baja frecuencia de la caja, que se encuentran limitados por el gálibo de la vía [55].

Además de éstos, existen otros dos problemas propios de la dinámica de vehículos ferroviarios: la estabilidad y el guiado en curva. Estos problemas están directamente relacionados con la rodadura empleada por los vehículos ferroviarios mediante ruedas guiadas sobre carriles.

Cuando se emplean rodaduras convencionales formadas por bogies y ejes rígidos, estos problemas están íntimamente relacionados entre sí. De hecho obligan a alcanzar una solución de compromiso en el diseño de las suspensiones de estos vehículos. Esto es debido a que la variación de algunos parámetros geométricos, inerciales o elásticos del sistema produce efectos contrarios sobre la solución a cada uno de estos problemas.

En caso de emplear rodaduras con ruedas independientes, estos problemas siguen existiendo pero su naturaleza y el modo de abordarlos son distintos. En un eje montado el mismo fenómeno físico encargado del guiado en curva es el responsable de su inestabilidad dinámica a partir de una determinada velocidad denominada *crítica*. Sin embargo, un eje con ruedas independientes no tiene capacidad de guiado en curva y su estabilidad dinámica no es dependiente de la velocidad (ver sección 3.6).

A pesar del amplio conocimiento que existe en la actualidad acerca de estos fenómenos, el compromiso de diseño que se debe establecer entre los problemas de estabilidad y guiado en curva para obtener un buen comportamiento dinámico del vehículo sigue siendo un tema de investigación abierto [37]. Una de las soluciones tecnológicas que se está investigando es el empleo de sistemas de control activos para el guiado de rodaduras, equipadas con eje convencional o con ruedas independientes. Se trata básicamente de utilizar actuadores o motores para mover la rodadura de forma que adopte una posición óptima sobre la vía en cada instante. En la referencia [46] se describen varias alternativas para la realización práctica de dicha solución y se clasifican en función de su grado de desarrollo y viabilidad.

En los siguientes apartados se realiza una descripción de estos problemas dinámicos específicos de los vehículos ferroviarios. La forma en que estos problemas condicionan el diseño de los vehículos ferroviarios actuales se trata en el Capítulo 4.

3.5.1. Estabilidad

Las fuerzas que aparecen en el contacto rueda-carril no son conservativas y pueden transferir parte de la energía del movimiento de avance del vehículo hacia otros movimientos parásitos del sistema. De este modo, cuando se alcanza una determinada *velocidad crítica*, el eje se vuelve inestable generando un movimiento de lazo

de gran amplitud limitado únicamente por el contacto de la pestaña con el carril, también conocido como *hunting*.

Además de este problema de inestabilidad del eje, existe otro asociado a la caja. Esta inestabilidad proviene de la transferencia de energía desde el movimiento de los bogies y las rodaduras hacia los movimientos de la caja a través de las uniones caja-bogie (suspensión secundaria, dispositivo de transmisión de esfuerzos longitudinales o amortiguadores antilazo, por ejemplo).

3.5.1.1. Inestabilidad del eje

En las referencias [43, 53, 63, 119] se describen las sucesivas contribuciones que han permitido conocer la dinámica de baja frecuencia de un eje convencional. Se atribuye a Matsudaira en 1960 [71] la primera explicación del fenómeno de inestabilidad dinámica del eje, a partir de una analogía con los problemas de inestabilidad que aparecen en aeroelasticidad. Matsudaira concluyó que añadir rigidez al sistema permitía que el eje fuese estable hasta cualquier velocidad crítica siempre que se uniese al bogie mediante la rigidez adecuada. En la referencia [117], Wickens ofrece la solución clásica al problema de estabilidad de un eje montado basada en el empleo de valores óptimos de las suspensiones.

El problema aparece debido a la realimentación del movimiento de lazo del eje. El mismo mecanismo que permite guiar el eje entre los dos carriles, puede hacerlo inestable a partir de una cierta velocidad. Este mecanismo se describe a continuación, empleando el modelo lineal desarrollado en la sección 3.4.1, y la descripción de la referencia [118].

En la figura 3.20 se indican las fuerzas que aparecen en el contacto debidas al movimiento de lazo del eje. Empleando como coordenadas generalizadas el desplazamiento lateral, u , y el giro respecto de la dirección vertical, ψ , se pueden obtener estas fuerzas en función de las velocidades de pseudodeslizamiento, ξ_x, ξ_y , según la Teoría Lineal de Kalker.

Si el eje gira centrado sobre la vía, ambas ruedas tendrán el mismo radio de contacto. Si el eje se desplaza lateralmente, entonces el radio será distinto en cada rueda. Teniendo en cuenta que ambas ruedas son solidarias al mismo eje montado, entonces las velocidades en los puntos de contacto serán ligeramente distintas y se generará un pseudodeslizamiento en la dirección longitudinal, ξ_x , y por lo tanto fuerzas longitudinales en el contacto, X . Estas fuerzas provocarán un par de lazo que será proporcional al desplazamiento lateral del eje, a la conicidad equivalente y al coeficiente que relaciona ξ_x y X , f_{11} . Este par guía al eje de nuevo hacia la posición centrada, con lo que se consigue el autoguiado del eje.

Del mismo modo, cuando el eje gira con un determinado ángulo de lazo, aparece una fuerza lateral. Sin embargo, las fuerzas que aparecen en ambos casos son distintas, dando lugar a la asimetría de la matriz de rigidez (ecuación 3.5), y por lo tanto a un término circulatorio, que hace al sistema no conservativo. De ese modo se establece una

realimentación sobre el movimiento del eje que es la responsable de la inestabilidad del mismo.

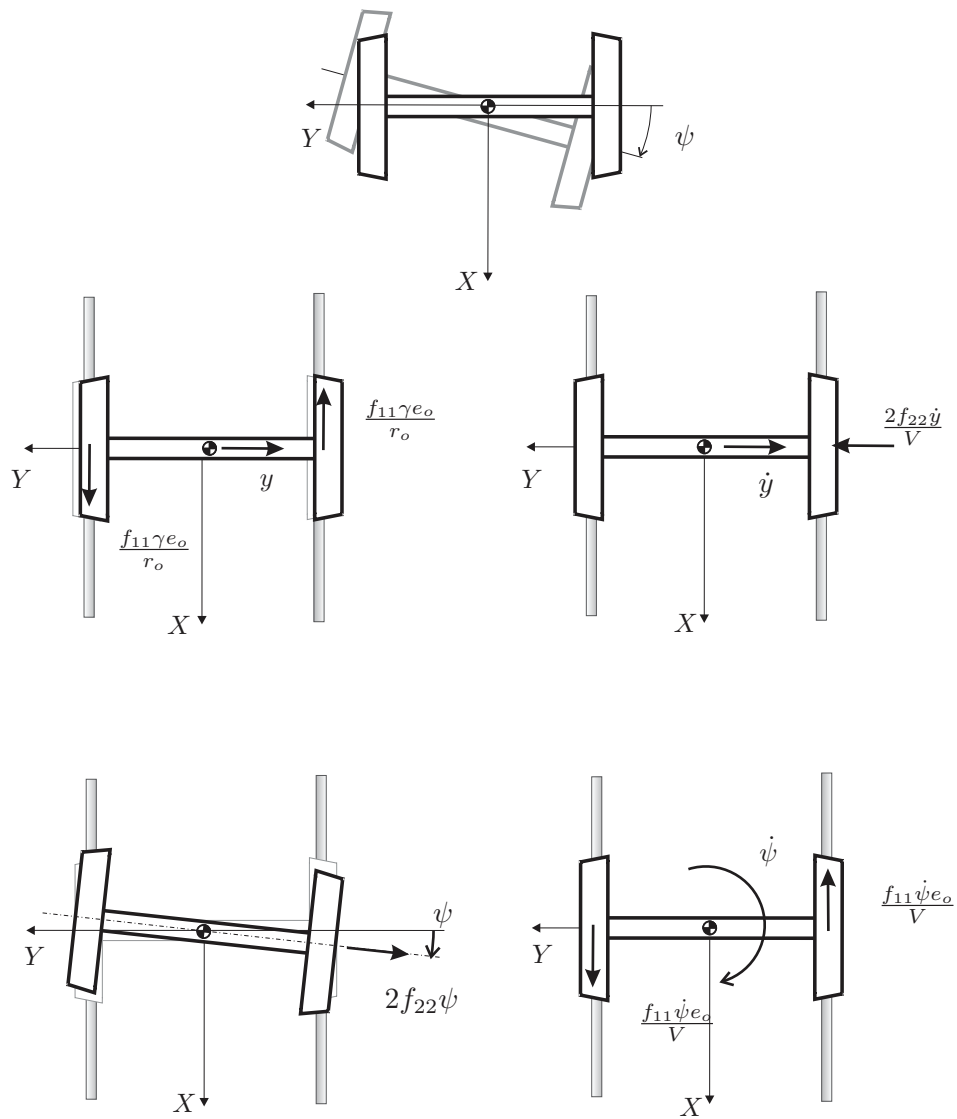


Figura 3.20. Fuerzas producidas por los pseudodeslizamientos debidos al movimiento de lazo del eje

Matemáticamente, se puede comprobar la aparición de este fenómeno aplicando la 2ª Ley de Newton sobre el eje:

$$\begin{aligned}
m\ddot{u} &= T^{izq} + T^{der} = -2f_{22} \frac{\xi_y}{V} = -2f_{22} \left(\frac{\dot{u}}{V} - \psi \right) \\
I_z \ddot{\psi} &= (X^{der} - X^{izq}) e_o = (\xi_x^{izq} - \xi_x^{der}) \frac{f_{11} e_o}{V} = 2 \left(-\dot{\psi} e_o - \frac{\gamma V}{r_o} y \right) \frac{f_{11} e_o}{V}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial. Al hacerlo, adquieren la forma habitual de una ecuación del movimiento y se pueden observar dos detalles:

- La matriz de amortiguamiento tiende a 0 con la velocidad, lo cual implica que la capacidad para disipar energía decrece a medida que aumenta la velocidad.
- La matriz de rigidez no es simétrica, por lo que no se cumple el principio de Maxwell-Betti basado en la conservación de la energía. Esto significa que el sistema tiene capacidad para introducir energía sobre los grados de libertad u y ψ .

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2f_{22}}{V} & 0 \\ 0 & \frac{2f_{11}e_o^2}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2f_{22} \\ \frac{2\gamma f_{11}e_o}{r_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \psi \end{Bmatrix} = 0 \tag{3.8}$$

Para bajas velocidades, el mecanismo de guiado explicado anteriormente es capaz de atenuar el movimiento del eje frente a cualquier perturbación. Sin embargo, a medida que la velocidad aumenta, la misma perturbación inicial puede conseguir que el movimiento del eje se haga inestable incrementando notablemente su amplitud. El eje a cualquier velocidad va a intentar oscilar aproximadamente a la frecuencia cinemática correspondiente (ver ecuación 3.2). Como esta frecuencia es proporcional a la velocidad, entonces a baja velocidad las fuerzas de inercia serán pequeñas. Sin embargo, a altas velocidades, las fuerzas de inercia dominarán sobre el resto, ya que la frecuencia será más alta. Al disminuir la capacidad de disipación de energía de las fuerzas en el contacto con la velocidad, la energía del movimiento de avance del vehículo transferida hacia el movimiento de lazo del eje provocará el aumento de las amplitudes y lo mantendrá en el tiempo. Existirá por tanto una velocidad a la cual se establecerá este fenómeno, denominada *velocidad crítica*.

Del mismo modo, si se considera el eje montado en un bogie con una suspensión, existirá una *velocidad crítica del bogie*. Esta velocidad aparece debido a la excitación del movimiento de lazo del bogie por la coincidencia de la frecuencia de lazo de los ejes con la frecuencia propia del modo de lazo del bogie.

Según esta aproximación lineal, el comportamiento del eje aislado depende fundamentalmente de la velocidad. Frente a una perturbación lateral, para velocidades por debajo de la crítica la respuesta del eje sería una oscilación subamortiguada que tendería a la posición centrada, mientras que para velocidades iguales o mayores que la velocidad crítica, la respuesta sería una oscilación con amplitud creciente y que sólo estaría limitada por el toque de pestaña.

Un análisis más realista del eje, que incluya una teoría de contacto no lineal, pone de manifiesto la naturaleza no lineal de su comportamiento dinámico [113]. El comportamiento ya no depende únicamente de la velocidad, sino también de la amplitud de la perturbación lateral. De este modo, determinadas combinaciones de velocidad y amplitud lateral producirán una respuesta de círculo límite, característica de los sistemas no lineales, en la que el eje mantiene una oscilación de amplitud constante sin regresar a la posición centrada.

En la figura 3.21 se puede observar el comportamiento al que se hace referencia. Se representa la respuesta del eje en función de la velocidad y de la amplitud lateral. Para determinadas combinaciones de estas variables, pequeñas variaciones en su valor dan lugar a respuestas completamente distintas. Esta situación se conoce como *bifurcación* en la dinámica de sistemas no lineales.

En este caso, la velocidad crítica, V_{cr} , se definiría como la velocidad máxima que se puede alcanzar sin que el eje entre en un círculo límite. Esto lleva a que en ocasiones la velocidad crítica real del vehículo sea menor que la estimada mediante técnicas lineales [90].

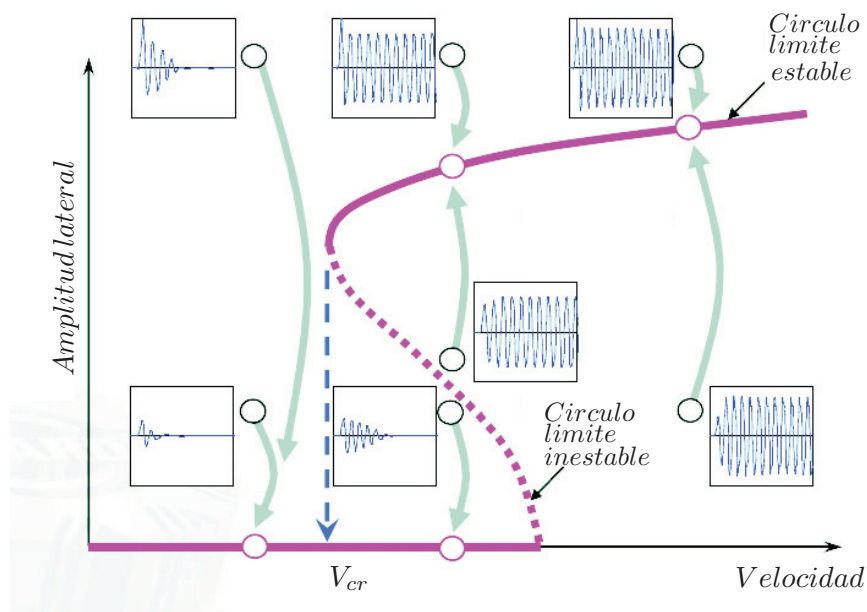


Figura 3.21. Amplitud del círculo límite en función de la velocidad (extraída de [92])

De este modo, frente a la práctica tradicional recomendada en las normas de emplear parámetros linealizados, como la conicidad equivalente, en la actualidad se ha demostrado la necesidad de hacer un análisis no lineal para determinar la estabili-

dad de un vehículo ferroviario [89]. En la referencia [88] se estudia la influencia de la geometría del contacto mediante el análisis de distintas combinaciones de perfiles de rueda y vías. Los resultados obtenidos en este estudio demuestran que las velocidades críticas pueden ser más restrictivas desde una aproximación lineal o desde una aproximación no lineal, sin que a priori se pueda predecir cuál de las velocidades será más baja.

En la figura 3.22 se muestran dos tipos de bifurcaciones distintos que caracterizan estos comportamientos. En una bifurcación *supercrítica*, la velocidad crítica teórica corresponde a la obtenida desde una perspectiva lineal, de forma que la velocidad crítica real será superior al considerar las no linealidades presentes en el vehículo. Sin embargo, en una bifurcación *subcrítica*, la velocidad crítica obtenida desde una aproximación lineal sobreestima la velocidad crítica real según los cálculos considerando las no linealidades del problema.

En general, este análisis no lineal de la estabilidad se realiza mediante ensayos con software de simulación en los que se hace un barrido en velocidad para distintas perturbaciones laterales y se observa si esta perturbación permanece en forma de círculo límite o se desvanece. En la figura 3.23 se muestra un ejemplo de esta metodología [88].

Una aproximación alternativa a este problema se puede encontrar en la referencia [101]. En esta referencia se emplea una metodología analítica para determinar la estabilidad mediante un análisis de bifurcaciones de las ecuaciones del movimiento no lineales.

3.5.1.2. Inestabilidad de caja

Este problema se percibe como un incremento importante de los movimientos laterales y verticales de la caja, con el consiguiente deterioro del confort. Esta inestabilidad de caja se puede producir por dos razones: por la coincidencia de alguna frecuencia natural de la caja con la frecuencia cinemática del eje o del bogie; o bien, por el acoplamiento del movimiento del bogie con el movimiento de la caja en caso de emplear uniones caja-bogie con valores de rigidez y amortiguamiento inadecuados.

En el primer caso, se trata de un fenómeno de resonancia que se puede atenuar mediante amortiguamiento. Sin embargo, aumentar la tasa de amortiguamiento aumenta la transmisibilidad de vibraciones a alta frecuencia, por lo que debe alcanzarse un compromiso para evitar un deterioro del confort.

El movimiento del bogie puede excitar los modos de lazo y vaivén de la caja, en incluso el de cabeceo. En esa situación, parte de la energía cinética del bogie es transferida a la caja, de forma que el amortiguamiento relativo del modo del bogie aumenta, mientras el amortiguamiento del modo de la caja disminuye.

La situación descrita en el segundo caso justifica el empleo de suspensiones secundarias con una baja rigidez lateral y el uso de sistemas de transmisión de esfuerzos

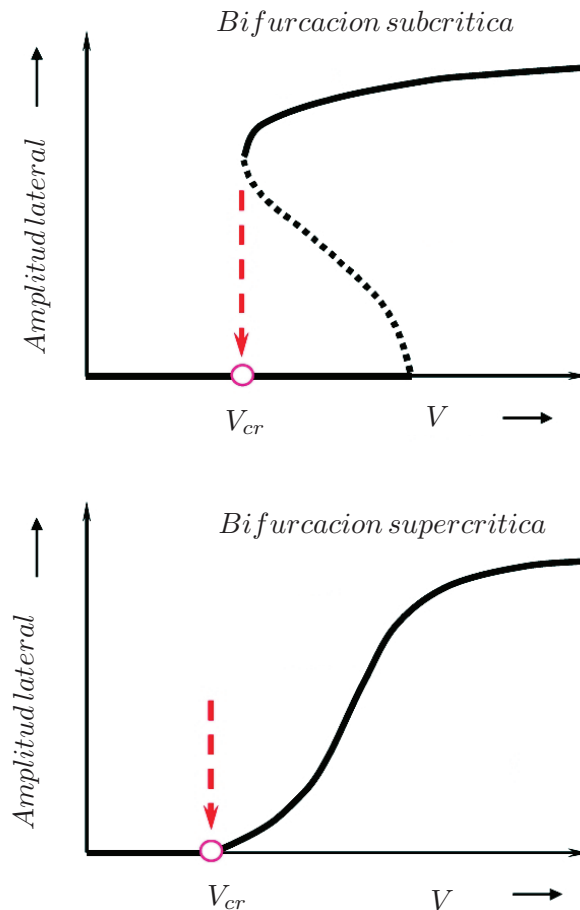


Figura 3.22. Tipos de bifurcaciones en el análisis no lineal de la velocidad crítica (extraída de [88])

longitudinales caja-bogie que no acoplen sus movimientos laterales.

Si la unión entre bogie y caja es muy rígida en dirección transversal, como sucede con algunos vagones, entonces esta inestabilidad es capaz de hacer descarrilar el vehículo. Sin embargo, para la mayoría de trenes de pasajeros, equipados con una suspensión secundaria convencional, se trata de un problema de confort, más que de un problema de seguridad. De hecho, el confort se puede deteriorar rápidamente para los modos con menor amortiguamiento, aunque la caja siga siendo perfectamente estable. Esto justifica el empleo de un amortiguamiento mínimo del 10% para todos los modos de la caja.

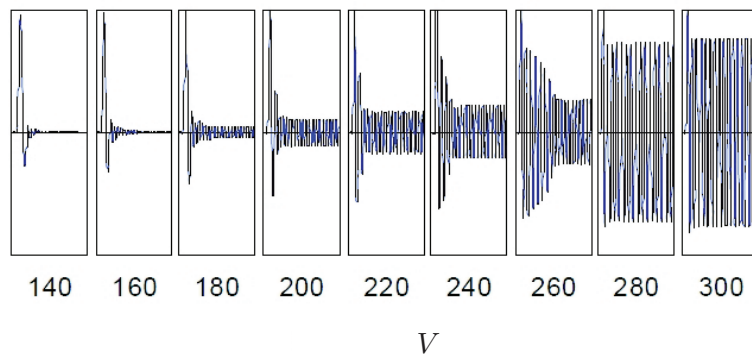


Figura 3.23. Ejemplo de determinación de la velocidad crítica no lineal mediante simulación

La influencia de los diversos parámetros de diseño sobre el problema de la inestabilidad de caja es realmente compleja, por lo que es difícil definir un criterio único para evitarlo. En general, una baja conicidad equivalente y un bajo coeficiente de fricción facilita la aparición de este problema. También los valores de las rigideces de la suspensión secundaria y la unión caja-bogie tienen un fuerte influencia, de forma que se suelen preferir valores bajos en la dirección lateral [120].

Estos problemas de inestabilidad dinámica se deben anticipar desde el diseño preliminar del vehículo. Evitarlos o minimizarlos justifica los criterios de diseño que se describen en el Capítulo 4.

3.5.2. Comportamiento en curva

Durante el trazado de una curva por parte de un vehículo ferroviario se desarrollan esfuerzos sobre la vía que inscriben a los ejes en la curva. Estos esfuerzos son críticos sobre la seguridad del vehículo y desde el punto de vista de los costes de explotación del ferrocarril.

Así mismo, la aceleración lateral percibida por los pasajeros en la curva debe mantenerse dentro de unos límites para garantizar el confort de los pasajeros. Esta aceleración tendrá componentes de media-alta frecuencia debidas a las irregularidades de la vía y componentes de frecuencia más baja debidas a los movimientos de la caja provocados por el trazado de la curva.

Estos problemas pueden estudiarse en el rango de la baja frecuencia. Las implicaciones de estos problemas sobre el comportamiento dinámico del vehículo se presentan a continuación.

3.5.2.1. Esfuerzos de guiado en curva

Las fuerzas en el contacto entre la rueda y el carril que se generan en curva pueden alcanzar una magnitud considerable. Estas fuerzas tienen un efecto negativo sobre la explotación del vehículo si no se encuentran dentro de un rango de valores adecuado. Por un lado, unos esfuerzos elevados en el guiado del vehículo en curva provocan el desgaste de los perfiles de las ruedas y del carril lo que genera considerables gastos de mantenimiento. Además, estos esfuerzos pueden sobrecargar los elementos de sujeción de la vía y degradar la superficie de los carriles, empeorando la calidad de la rodadura. Por otro lado, los esfuerzos de guiado influyen directamente sobre la probabilidad de descarrilo, ya que una inadecuada combinación de fuerzas lateral Y y vertical Q puede conseguir que una rueda remonte el carril [34] (ver figura 3.24).

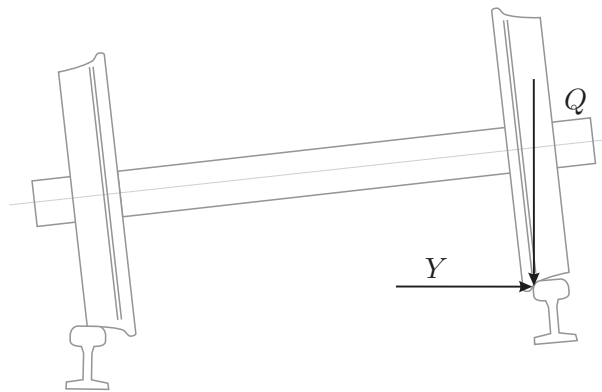


Figura 3.24. Fuerza lateral de guiado Y y vertical Q

Un modelo clásico ampliamente utilizado para analizar el descarrilo de vehículos ferroviarios es el denominado *criterio de Nadal* [74]. Según este modelo, el descarrilo se puede producir si el cociente entre la fuerza lateral y la fuerza vertical supera el valor obtenido en la siguiente ecuación:

$$\frac{Y}{Q} = \frac{\operatorname{tg}(\gamma) - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg}(\gamma)}$$

Los parámetros empleados en este modelo se muestran en la figura 3.25 y se enumeran a continuación:

- N es la fuerza normal al contacto.
- T es la fuerza tangencial al contacto en dirección transversal.
- Y y Q son las fuerzas en el contacto expresadas según sus componentes en dirección lateral y vertical respectivamente.
- γ es el ángulo de contacto.

- μ es el coeficiente de fricción.

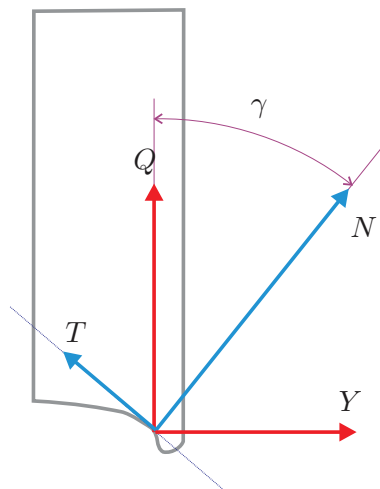


Figura 3.25. Criterio de Nadal

Los esfuerzos de guiado dependen de múltiples variables, desde la velocidad del vehículo y las características geométricas de la curva hasta las propiedades inerciales de los sólidos del vehículo, los perfiles de rodadura empleados, y de forma importante, de las propiedades elásticas de los elementos de las suspensiones del vehículo.

En una primera aproximación al problema se puede suponer que un eje en una curva se desplazará lateralmente debido al efecto de la fuerza centrífuga. Este desplazamiento estará limitado por la rigidez gravitacional y las fuerzas en el contacto. En caso de que la fuerza centrífuga sea muy alta, la pestaña será la que permita mantenerlo dentro de la vía (ver figura 3.26). Según esta aproximación, el eje adoptaría una posición radial en el plano de la vía y la fuerza en la pestaña sería la encargada de contrarrestar la fuerza centrífuga. Así, estas fuerzas serían más grandes cuanto mayor fuese la velocidad.

Sin embargo, se han documentado descarrilos a baja velocidad desde el inicio del ferrocarril que contradicen esta teoría intuitiva [69]. En la referencia anterior se realiza el primer análisis de la dinámica de un eje en curva tras el descarrilo de una locomotora durante una maniobra a baja velocidad, cuya suspensión se había hecho más rígida pensando en mejorar la tracción. La presencia de las uniones elásticas entre los ejes y el bogie impide a los ejes inscribirse libremente en curva. Por un lado, obligan al primer eje a mantener la línea recta de forma que la rueda exterior puede llegar a tocar con la pestaña el carril. Y por otro lado, estas uniones son capaces de generar las fuerzas necesarias para que los ejes remonten los carriles.

En la referencia [43] se realiza una recopilación de las sucesivas contribuciones que llevaron a la explicación del guiado de un eje en curva. Elkins y Gostling en la referencia [36] obtuvieron un modelo que permite explicar el comportamiento de un eje

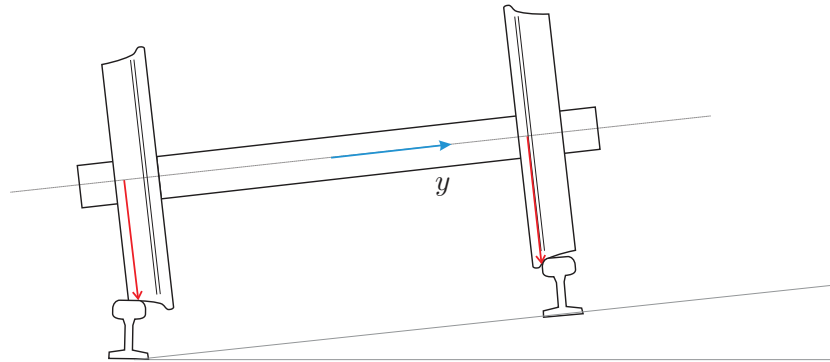


Figura 3.26. eje montado trazando una curva

montado en curva. Su modelo fue validado mediante una serie de ensayos experimentales. Según esta explicación, un eje montado en un bogie mediante una suspensión deberá desplazarse lateralmente y girar respecto del eje vertical para intentar situarse en posición radial. Si no alcanza esta posición radial, el eje tendrá un ángulo de ataque no nulo. Un ángulo positivo es el caso más desfavorable desde el punto de vista del guiado en curva ya que provoca el mayor desgaste. La posición óptima del eje sería un ligero desplazamiento lateral junto con un pequeño ángulo de ataque negativo [97].

En cualquier caso, el desplazamiento y giro del eje en la curva provocarán la aparición de condiciones de pseudodeslizamiento de forma que las fuerzas en el contacto equilibren a las fuerzas de la suspensión. Si las fuerzas en el contacto son mayores que la fuerza de rozamiento máxima disponible, entonces se producirá un deslizamiento que conducirá al toque entre la pestaña de la rueda y el carril.

Una rigidez alta respecto al lazo del eje resulta contraproducente para la inscripción del eje en curva, pero su efecto sobre la estabilidad es positivo, por lo que se deberá alcanzar una solución de compromiso en el diseño de las suspensiones [118]. En curvas de radio amplio, las fuerzas en el contacto pueden ser suficientes para evitar el toque de la pestaña con un diseño adecuado. Sin embargo, en general, en curvas de radio pequeño es muy difícil evitar este contacto. En estas curvas de radio pequeño, la fuerza de guiado lateral, crece notablemente sea cual sea el valor de esta rigidez, lo cual ha dado lugar a innovaciones que buscan conseguir un efecto de autoguiado de los ejes en la curva mediante mecanismos que conectan ambos ejes en el mismo bogie [86, 100].

3.5.2.2. Velocidad de paso por curva

Otro aspecto importante del comportamiento en curva relacionado con la dinámica de baja frecuencia es la limitación de la velocidad para garantizar el confort de los pasajeros. El nivel de la aceleración lateral a la que puede estar sometido el pasajero durante el trazado de una curva influye sobre el confort percibido por el mismo [111].

Para disminuir esta aceleración, las curvas poseen un peralte. Gracias al peralte, el pasajero estará sometido a una aceleración no compensada que es la aceleración lateral total menos la componente de aceleración compensada por la gravedad:

$$a_{nc} = \frac{v^2}{R_c} \cos \alpha_j^x - g \cdot \sin \alpha_j^x$$

Donde:

- a_{nc} es la aceleración no compensada.
- v es la velocidad de circulación del vehículo.
- R_c es el radio de la curva.
- α_j^x es el ángulo de peralte.
- g es la aceleración de la gravedad.

En curva, una caja apoyada sobre una suspensión secundaria tenderá a inclinarse en sentido opuesto al peralte debido a la flexibilidad de la suspensión, por lo que aparece un fenómeno que reduce la mejora aportada por el peralte. Este fenómeno se mide mediante el denominado *coeficiente de souplesse*, S , que mayor la aceleración realmente percibida por el pasajero frente a la aceleración no compensada por el peralte. Para vehículos convencionales, un valor habitual de este coeficiente es 0,4.

$$a_{real} = (1 + S) a_{nc} \quad (3.9)$$

Existe un límite a la aceleración lateral máxima que condiciona la velocidad máxima de circulación en una curva en función del radio de la curva y el peralte. Un valor de $0,65 - 0,8 m/s^2$ es habitual para vehículos convencionales. Con objeto de aumentar la velocidad de paso por curva se han desarrollado vehículos ferroviarios con la capacidad de bascular la caja para aumentar el peralte de forma artificial, bajando el nivel de aceleración lateral percibido por el pasajero. Esta basculación puede ser:

- Pasiva, de forma que es la propia fuerza centrífuga la que consigue inclinar la caja. Este es el sistema empleado en el tren Talgo (ver sección 2.3.5). En este tren la suspensión secundaria se sitúa por encima del centro de masas de la caja y posee un coeficiente de souplesse negativo.
- Activa, con actuadores y sistemas de control automáticos que aumentan el balanceo de la caja para compensar la aceleración lateral. Esta es la forma de basculación más extendida. En la referencia [51] se plantean diferentes configuraciones para la realización práctica de dichos sistemas, mientras en la referencia [33] se describe el sistema empleado por los trenes Pendolinos.

La activación del sistema de basculación se suele realizar a partir de las señales de giróscopos y acelerómetros montados en los bogies. Este procedimiento puede tener cierto retraso en los primeros coches debido a que las señales se generan

simultáneamente con la entrada en curva. Una alternativa a este procedimiento es el sistema ofertado por la empresa CAF, denominado SIBI [16]. Este sistema emplea la geolocalización vía GPS para situar el tren sobre el trazado que conoce previamente, de forma que se puede anticipar la basculación.

3.6. Dinámica de baja frecuencia de las ruedas independientes

En esta sección se van a presentar las principales diferencias en el comportamiento dinámico de rodaduras equipadas con ruedas independientes frente a rodaduras que montan ejes rígidos convencionales. Se presta especial atención al modo en el que se pueden modelar dichas diferencias a la hora de incluir ruedas independientes en un modelo de vehículo ferroviario.

En la referencia [29] se describe el estado del arte a finales de la década de los 90. En esos años se realizaron numerosos ensayos de trenes equipados con ruedas independientes de forma simultánea por distintas administraciones ferroviarias y grupos de investigación. En esa referencia se enumeran las principales características dinámicas de este tipo de rodaduras, obtenidas a partir de los ensayos experimentales.

Los principales fenómenos observados en los que coinciden los diferentes estudios realizados son:

- La vibración lateral en la caja se reduce considerablemente, tanto en recta como en curva, y desaparece el movimiento de oscilación cinemática. Esto hace que la velocidad crítica sea mucho mayor que la de un eje montado para valores de suspensión similares.
- Aparece una tendencia en una de las ruedas a tocar pestaña de forma continua; esta tendencia puede mantenerse en la misma rueda aunque se cambie el sentido de la marcha.
- Aparece también un movimiento de oscilación de lazo cuya frecuencia es independiente de la velocidad, a diferencia del eje montado, y cuya amplitud disminuye al bajar el coeficiente de rozamiento (desaparece con lluvia). Esta oscilación parece generarse por pequeños toques de pestaña (en transiciones o por la tendencia antes mencionada).
- Algunos estudios señalan una disminución del desgaste y de la potencia consumida comparando con vehículos de eje montado. Según esos estudios, la fuerza lateral sobre los carriles disminuye, sobre todo cuando se negocian curvas de radio pequeño.

Se desarrollaron algunos modelos teóricos [19, 32, 38] que se validaron con las medidas experimentales disponibles. Algunas conclusiones de esta comparación son:

- Para modelar la dinámica de las ruedas independientes es recomendable considerar el giro independiente de ambas ruedas, asignando un grado de libertad a cada una de ellas.
- La región de estabilidad en función de la velocidad, con los valores habituales de la suspensión, es mucho mayor que para el eje montado.
- El valor de la rigidez al lazo del bastidor de la rodadura con ruedas independientes parece ser fundamental para conseguir un buen confort. Debe ser lo mayor posible, sin comprometer la capacidad de guiado en curva.
- Una cierta irregularidad, asimetrías de carga, pequeñas holguras o defectos de montaje pueden hacer que el eje con ruedas independientes se desplace lateralmente de forma continua descendrándose respecto de la vía. En la referencia [32] se describe este fenómeno y en la referencia [19] se proporciona una demostración matemática. En caso de que cesase la excitación, el movimiento de retorno a la posición centrada nominal se realiza de forma lenta y sobreamortiguada sin oscilaciones, siendo este movimiento independiente de la velocidad.
- La componente de fuerza longitudinal en el contacto es despreciable, por ser el giro de cada rueda libre, siempre que no actúen frenos o tracción en esa rueda. Esto se puede modelar anulando la fuerza longitudinal X [32, 35].
- Es importante no emplear perfiles con posibilidad de multicontacto, ya que empeora el desgaste de forma considerable.

Según las referencias mencionadas, el empleo de ruedas independientes permite mejorar la estabilidad y aumentar la velocidad crítica. Por contra, se pierde la capacidad para inscribirse en curva y mantenerse centrado en recta a pesar de las irregularidades, excepto por la rigidez gravitacional. De este modo, la necesidad de emplear un sistema de guiado auxiliar ha hecho que la implementación de rodaduras con ruedas independientes sea más bien excepcional en la historia del ferrocarril. Una excepción notable es el tren Talgo, que emplea un sistema de guiado pasivo, descrito en la sección 2.3.4, y cuya explotación comercial se remonta a mediados del siglo XX.

En la actualidad existe un renovado interés por este tipo de rodaduras ya que su combinación con sistemas de control activo es prometedora [46]. Las fuerzas o pares que se deben aplicar a las ruedas independientes para conseguir el guiado son en general pequeñas, lo que permite abaratar y aligerar los sistemas de control empleados. En las referencias [50, 67, 72] se pueden encontrar ejemplos de este tipo de desarrollos.

Capítulo 4

Elementos para el diseño de vehículos ferroviarios

*En tiempos de crisis la imaginación es más efectiva que el intelecto.
A. Einstein.*

Capítulo 5

Modelos de comportamiento dinámico

*La práctica debe siempre ser edificada sobre la buena teoría.
Leonardo Da Vinci*

5.1. Introducción

En este capítulo se va a desarrollar el modelado de la dinámica de baja frecuencia de un tren articulado. Se va a emplear una metodología original cuyas principales características son el uso de coordenadas naturales para describir los movimientos de las cajas y la sustitución de la articulación entre cajas por ecuaciones de restricción equivalentes, evitando la incorporación de coordenadas adicionales para modelar los mecanismos involucrados. Esta metodología puede ser empleada para el modelado de cualquier tren articulado, si bien en esta Tesis se va a aplicar a un tren Talgo.

El modelo desarrollado se va a realizar sobre un tren Talgo de la 7^a generación. La idea es demostrar la viabilidad de la metodología propuesta sobre un tren cuyo modelado es complejo por las particularidades de su diseño, de forma que a priori la metodología será válida para el modelado de otros trenes articulados más sencillos.

El modelo debe ser capaz de reproducir la dinámica de baja frecuencia del vehículo permitiendo la realización de análisis de estabilidad y de comportamiento en curva, entre otros. Para ello se desarrollará un modelo general del vehículo que admita el contacto rueda-carril con los perfiles reales y grandes desplazamientos, así como otros elementos no lineales del contacto y de la suspensión. El modelo se va a construir de forma recursiva para poder analizar distintos tamaños de composición.

En la próxima sección 5.2 se describen las hipótesis empleadas para generar un modelo simplificado del tren. A continuación, en la sección 5.3 se van a desarrollar la cinemática del rodal y las fuerzas del contacto rueda-carril, teniendo en cuenta la aproximación de contacto rígido y el empleo de ruedas independientes. En la sección 5.4 se desarrolla la ecuación del movimiento del modelo general empleando la formulación de Lagrange. Esta ecuación se construye de forma modular y permite incorporar distintos modelos de comportamiento para los distintos elementos de suspensión y unión del vehículo, así como del contacto rueda-carril.

En la sección 5.5 se resuelve esta ecuación del movimiento para analizar el comportamiento en curva del tren y realizar un análisis paramétrico para su diseño preliminar en el capítulo 6. Con este fin es necesario disponer de un algoritmo para la integración temporal del sistema de ecuaciones diferencial-algebraico no lineal resultante. Además, se deberá construir un circuito en el que se pueda simular el comportamiento dinámico.

En la sección 5.6 se desarrolla un modelo lineal del tren a partir del modelo general mediante la consideración de algunas hipótesis simplificativas adicionales. Este modelo permitirá realizar el análisis de estabilidad desde una perspectiva lineal y el análisis modal del vehículo para detectar resonancias perjudiciales para el confort.

Finalmente, en la sección 5.7 se describe un modelo simplificado para el estudio de la dinámica lateral de las cajas de la composición. En este modelo sólo se tienen en cuenta los desplazamientos laterales de los enganches, considerando los rodales fijos. De este modo, sólo intervienen las suspensiones caja-rodal y las suspensiones entre cajas en el plano horizontal. El objetivo es analizar la presencia de modos inestables

en la dinámica lateral de un tren articulado. Estos modos aparecen en el modelo lineal desarrollado en esta Tesis, cuando se emplean determinados valores de los parámetros, y están asociados a las uniones entre cajas. También aparecen en el modelo lineal de un TGV descrito en la referencia [49].

5.2. Composición articulada

En esta sección se va a explicar la metodología empleada para el modelado de un tren articulado. La hipótesis principal que sustenta esta metodología es suponer que el comportamiento de la articulación entre cajas es equivalente al de un par esférico desde el punto de vista cinemático. De este modo, el enganche entre las cajas es un punto común a ambas, pero las cajas pueden girar respecto de este punto. Bajo esta hipótesis, la dinámica de una caja se puede analizar a partir del movimiento de sus dos enganches en cada extremo, tal y como se verá en la sección 5.3.1.

Esta hipótesis se ajusta a la disposición mecánica real empleada en el AGV, descrita en el capítulo 2. En el caso de un tren Talgo, esta hipótesis se corresponde con el funcionamiento mecánico del mecanismo portapesos, descrito en la sección 2.3.3. Se trata de un mecanismo formado por barras articuladas que permite el balanceo relativo entre cajas y no impide los otros giros respecto de los ejes transversal y vertical (ver figura 5.1). El gancho de tracción entre las cajas es el que limita los desplazamientos relativos entre los extremos de las cajas pero actúa como una articulación frente a los giros relativos respecto de las direcciones transversal y vertical.

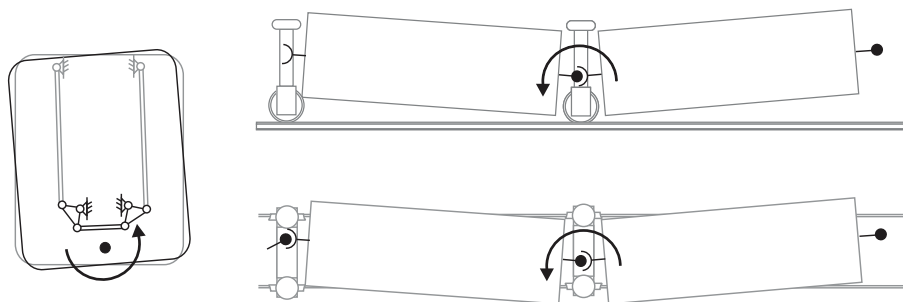


Figura 5.1. Articulación entre cajas equivalente a un par esférico

Para modelar el tren Talgo es necesario además tener en cuenta los mecanismos de guiado pasivo de las rodaduras. En este caso, en vez de introducir estos mecanismos en el modelo, creando barras y pares cinemáticos, con sus grados de libertad correspondientes, se han modelado mediante ecuaciones de restricción que representan el efecto que producen sobre las rodaduras.

Gracias a estas consideraciones, el modelo desarrollado va a emplear un número de coordenadas muy bajo con respecto a un modelo convencional desarrollado mediante

coordenadas cartesianas en los centros de masa que incluyese todas las barras de los mecanismos auxiliares.

5.2.1. Coordenadas naturales

Las coordenadas naturales, desarrolladas por el profesor García de Jalón a principios de los años 80 [25, 26], permiten describir el movimiento de los mecanismos de una forma intuitiva y visual [23]. La idea básica consiste en usar coordenadas cartesianas de tres o más puntos no alineados para definir la posición de un sólido en el espacio.

En la figura 5.2 se muestra la definición básica de coordenadas naturales en un mecanismo articulado plano. Como se puede apreciar, en general, este tipo de coordenadas se define en los enlaces cinemáticos entre las barras, empleando un número menor de coordenadas para el mismo problema, comparando con el modelado mediante coordenadas cartesianas de los centros de masas. En la referencia [23] se repasan las principales características de este tipo de coordenadas y sus aplicaciones.

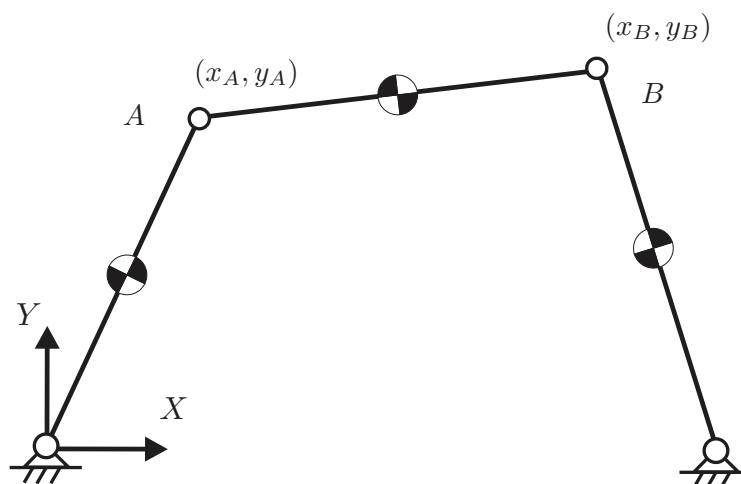


Figura 5.2. Definición de coordenadas naturales en un mecanismo articulado

La metodología propuesta en esta Tesis consiste en definir coordenadas naturales asociadas a los pares esféricos formados por los enganches entre cajas. Se van a considerar los desplazamientos laterales, y , y verticales, z , de los enganches en los extremos de las cajas. Estas coordenadas se van a emplear para calcular los movimientos de los centros de masas de las cajas y sus giros de cabeceo y lazo. Esto va a permitir simplificar el desarrollo de las ecuaciones del movimiento, ya que los enlaces elásticos entre las cajas, y entre la caja y los rodales, se encuentran precisamente alrededor de los enganches, por lo que se facilita la formulación de los términos correspondientes en las ecuaciones del movimiento, con expresiones compactas (ver sección 5.4.2). Además, el número de coordenadas del modelo será menor gracias a que los giros de cabeceo, φ ,

y lazo, β , de las cajas se van a calcular a partir de los movimientos de los enganches extremos.

Estos giros se pueden calcular de forma aproximada según se expresa en las siguientes ecuaciones 5.2 y 5.1 para la caja j -ésima de una composición, teniendo en cuenta que los desplazamientos laterales de los enganches serán más pequeños que la longitud de las cajas:

$$\varphi_j = \frac{z_j - z_{j+1}}{a_j} \quad (5.1)$$

$$\beta_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} \quad (5.2)$$

La variable a_j hace referencia a la longitud entre enganches, que puede ser distinta para cada coche dependiendo de su tipo. En la figura 5.3 se justifican gráficamente las ecuaciones antes enunciadas.

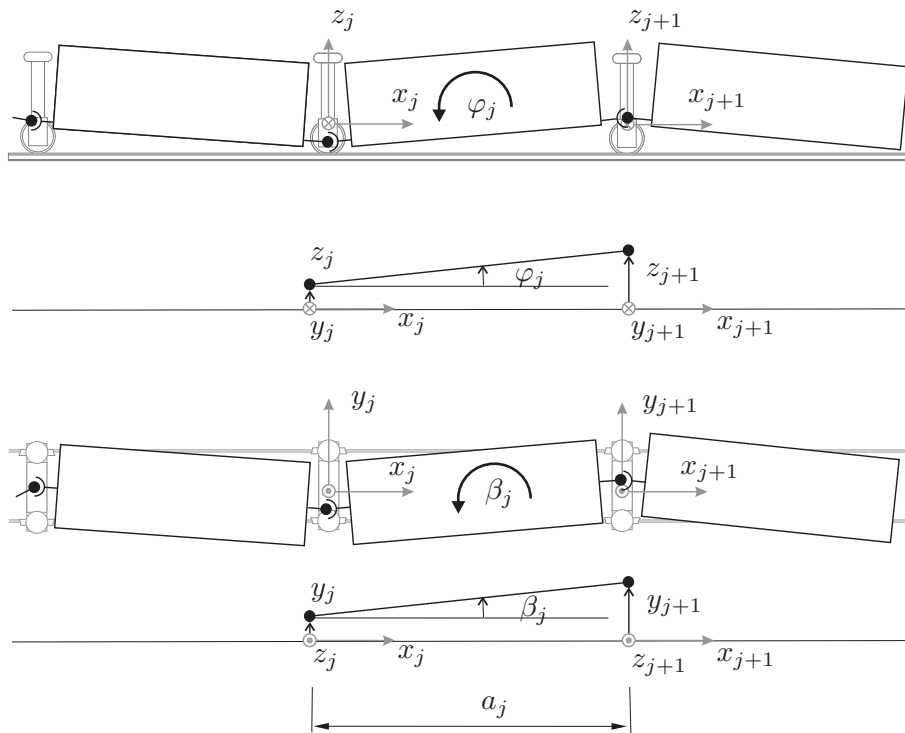


Figura 5.3. Giros de cabeceo y lazo de la caja

El desplazamiento longitudinal de los enganches no se incluye en este modelado ya que se impone el movimiento en dicha dirección a través de una velocidad constante del vehículo, por lo que no se asigna una coordenada x a los enganches.

El balanceo de la caja no se puede expresar a partir de los movimientos de los enganches, por lo que se le asignará un coordenada independiente, ϕ .

5.2.2. Guiado de los rodales

Tal y como se ha visto en la sección 2.3.4, los mecanismos de guiado de los rodales están diseñados para mantener las ruedas alineadas radialmente con el centro de la curva (ver figura 5.4(a)). En lugar de modelar estos mecanismos encargados del guiado de los rodales, en esta Tesis se propone implementar unas ecuaciones de restricción equivalentes empleando las coordenadas naturales definidas en los enganches.

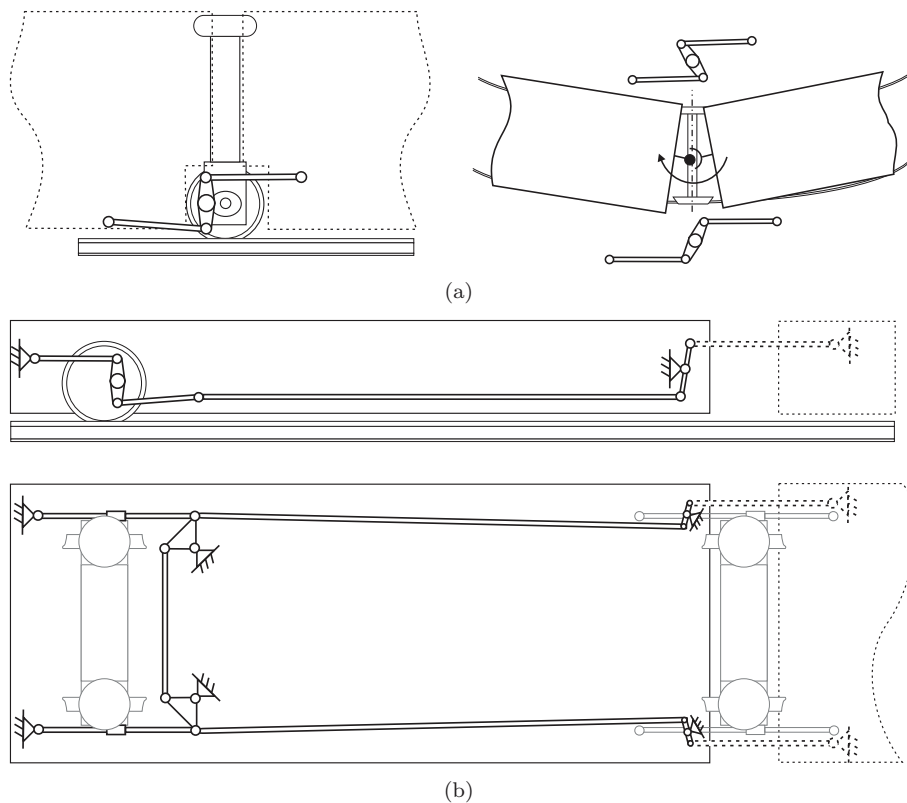


Figura 5.4. Mecanismos de guiado: a) rodales intermedios; b) rodales extremos

Los giros de lazo de las cajas, β , se pueden expresar en función de los desplazamientos laterales de los enganches según la ecuación 5.2. El mecanismo de guiado de un rodal intermedio mantendrá al rodal en la bisectriz del ángulo formado por las dos cajas en el plano horizontal (ver figura 5.5). Así pues, el ángulo de lazo del rodal respecto del sistema de referencia localizado en el enganche j , ψ_j , podrá expresarse como la media de los ángulos de lazo de las cajas debidos a los desplazamientos laterales de

los enganches, β_j y β_{j-1} , más un término ψ_{0j} que es la media de los lazos de las cajas adyacentes debidas a la geometría de la vía. Esta variable es distinta de cero para una transición o incluso para una curva de radio constante si las longitudes de los coches no son iguales (ver sección 5.5.2). La ecuación 5.3 expresa esta restricción:

$$\psi_j = \frac{1}{2} (\beta_j + \beta_{j-1}) + \psi_{0j} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{a_{j-1}} \right) + \psi_{0j} \quad (5.3)$$

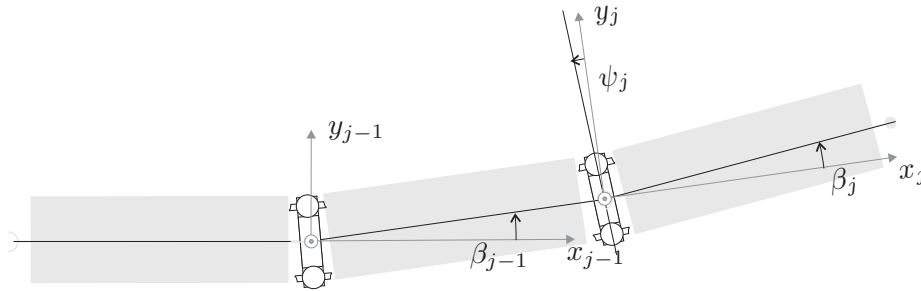


Figura 5.5. Lazo de un rodal intermedio

En el caso de un rodal extremo, el mecanismo de guiado obliga a las ruedas a alinearse según la bisectriz del ángulo formado entre la última y penúltima caja (o primera y segunda), pero lo hacen respecto de la propia caja, por lo que la alineación con respecto de la vía no es completamente radial (ver figuras 5.4(b) y 5.7). De este modo, el ángulo de ataque no es nulo pero sí pequeño, lo que minimiza el desgaste de los perfiles. Las ecuaciones 5.4 describen esta restricción para los dos rodales extremos de la composición, según la numeración definida en la figura 5.6:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (-\psi_2 + \beta_1) = \dots \\ \dots &= \left(\frac{3}{2} \frac{y_2 - y_1}{a_1} - \frac{1}{2} \frac{y_3 - y_2}{a_2} \right) + \psi_{01} \\ \psi_N &= (-\psi_{N-1} + \beta_{N-1}) = \dots \\ \dots &= \left(\frac{3}{2} \frac{y_N - y_{N-1}}{a_{N-1}} - \frac{1}{2} \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{a_{N-2}} \right) + \psi_{0N} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Esta restricción se ha verificado mediante la implementación de un modelo del mecanismo de guiado de un rodal extremo en el software de simulación dinámica Working Model 3D. Con la simulación realizada se ha comprobado que el rodal extremo gira aproximadamente la mitad del ángulo relativo entre cajas respecto de la caja donde está montado. En la figura 5.8 se muestra una captura de pantalla de la simulación.

Desde un punto de vista matemático, el sistema de ecuaciones se complica al acoplarse un conjunto de ecuaciones algebraicas a las ecuaciones diferenciales del movimiento.

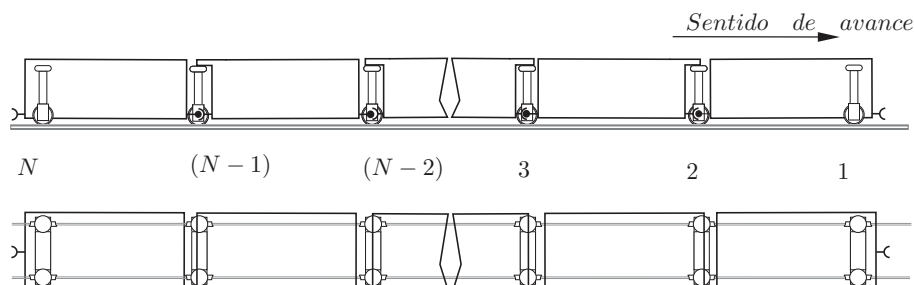


Figura 5.6. Numeración empleada para denominar los sucesivos rodajes de la composición

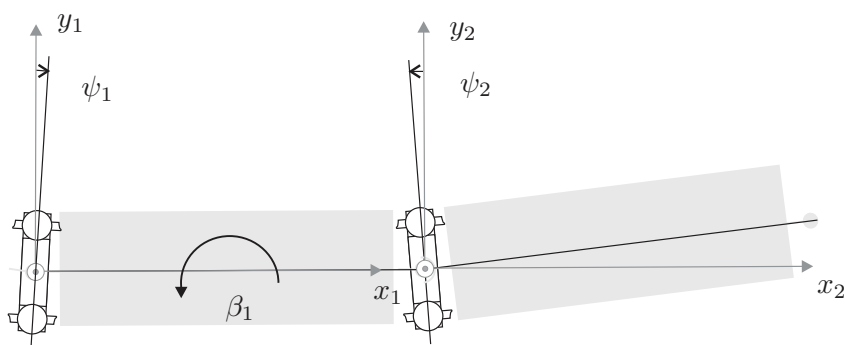


Figura 5.7. Lazo de un rodal extremo

Sin embargo, es una dificultad menor dado que el sistema de ecuaciones del movimiento de este modelo ya era diferencial-algebraico al emplear un modelo de contacto rueda-carril rígido (ver sección 5.3.2). Así pues, desde un punto de vista computacional, se prefiere emplear estas ecuaciones frente a la alternativa de modelar los mecanismos de guiado mediante barras y pares cinemáticos adicionales.

Una limitación de esta metodología es que la menor composición que se puede analizar debe tener 5 coches como mínimo, para que las ecuaciones de restricción de los rodajes extremos tengan sentido. Sin embargo, no es una limitación importante dado que los trenes Talgo en raras ocasiones se ven en composiciones tan cortas, excepto algún tren laboratorio, y nunca se explotan comercialmente en dichas condiciones.

5.3. Rodadura

En las siguientes secciones, se describe el sistema de coordenadas empleado y las ecuaciones cinemáticas que permiten calcular las velocidades de pseudodeslizamiento en el punto de contacto. Posteriormente se van a desarrollar las ecuaciones del movimiento

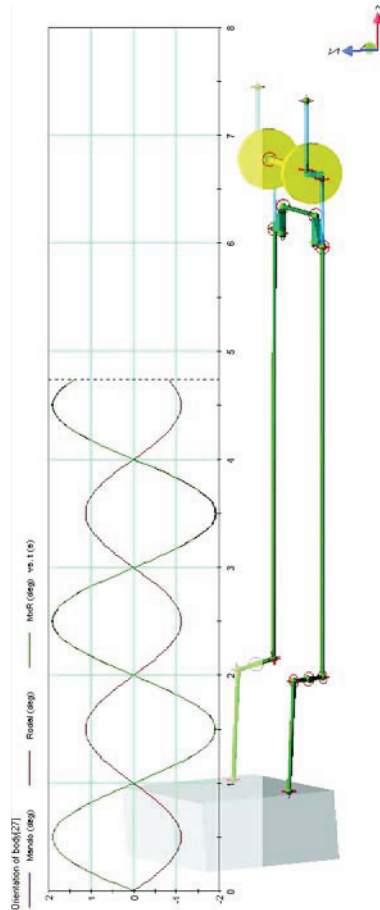


Figura 5.8. Modelo del mecanismo de guiado de un rodal extremo en Working Model 3D

del rodal, tras incorporar las funciones de restricción que aparecen al suponer contacto rígido y las fuerzas en el contacto mediante modelos habituales de la dinámica ferroviaria.

5.3.1. Cinemática

Para deducir las relaciones cinemáticas del sistema, se va a suponer una velocidad del vehículo constante, V . En la Figura 5.9 se muestran las coordenadas y los sistemas de referencia empleados para definir el movimiento del sistema.

Los tres sistemas de referencia empleados son:

- Un sistema de referencia fijo (x^0, y^0, z^0)

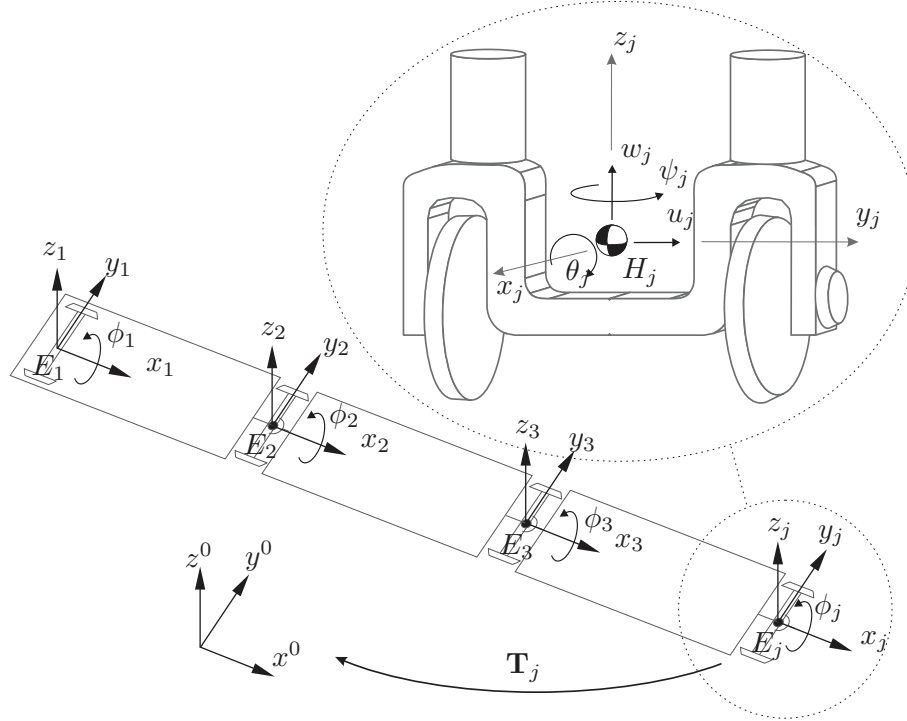


Figura 5.9. Definición de los sistemas de coordenadas empleados en el modelo

- Un sistema de referencia local asociado al rodal, (u_j, w_j) , cuyo origen coincide con su centro de masas en la posición centrada, H_j . Su eje transversal, u_j , coincide con el eje de simetría lateral y es positivo hacia la izquierda según el sentido de la marcha. Su eje vertical, w_j , es perpendicular al plano de la vía y tiene sentido ascendente.
- Un sistema de referencia asociado al enganche (x_j, y_j, z_j) . Este sistema de referencia se mueve con la velocidad del vehículo sobre la vía, su origen coincide con el enganche en la posición centrada, E_j , y gira con los carriles en caso de trazar una curva peraltada para mantenerse siempre paralelo al plano de la vía. Su eje x_j es paralelo al eje longitudinal de la vía y es positivo en el sentido de la marcha. Su eje y_j es lateral, paralelo al plano de la vía y positivo hacia la izquierda según el sentido de la marcha. Su eje z_j es perpendicular al plano de la vía y tiene sentido vertical ascendente.

La velocidad de la caja j se puede calcular a partir de las velocidades de sus dos enganches, E_j y E_{j+1} . La velocidad de un enganche E_j se puede obtener de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v}_j^E = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \right) + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y}_j \\ \dot{z}_j \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

donde \mathbf{v}_j es la velocidad absoluta del origen del sistema de referencia asociado al enganche (ecuación 5.7), y $\boldsymbol{\Omega}_j$ es la velocidad angular de este sistema (ecuación 5.7), en la que se han considerado los giros en x por el peralte y en z por el trazado de la curva en el plano horizontal (ver sección del circuito de la vía 5.5.2).

\mathbf{T}_j es la matriz de rotación que permite transformar los movimientos desde el sistema de referencia local del enganche al sistema de referencia absoluto (ecuación 5.6). Esta matriz de rotación se obtiene a partir de una secuencia de giros 3-1-2 (lazo-balanceo-cabeceo) habitual en dinámica de vehículos (ver figura 5.10); es decir, giro α_j^z respecto del eje z^0 , después giro α_j^x respecto del eje $x^{0'}$, y finalmente giro α_j^y respecto del eje $y^{0''}$.

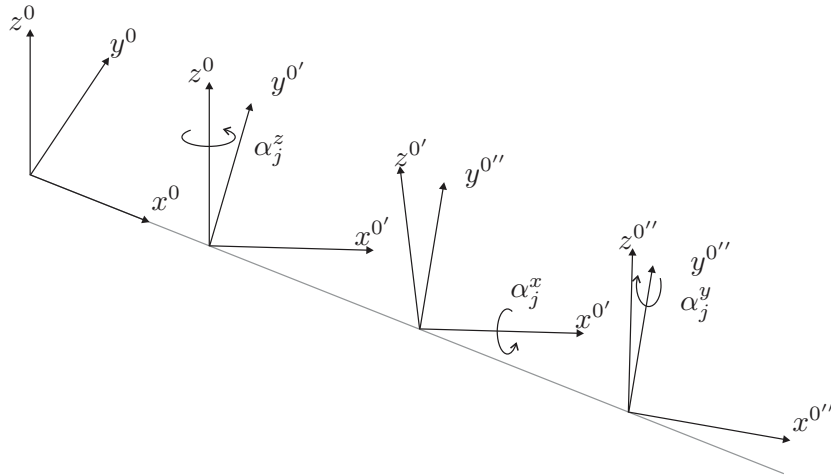


Figura 5.10. Secuencia de giros empleada en la matriz de rotación

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \cos \alpha_j^y \cos \alpha_j^z - \sin \alpha_j^x \sin \alpha_j^y \sin \alpha_j^z & -\cos \alpha_j^x \sin \alpha_j^z & \sin \alpha_j^y \cos \alpha_j^z + \sin \alpha_j^x \cos \alpha_j^y \sin \alpha_j^z \\ \cos \alpha_j^y \sin \alpha_j^z + \sin \alpha_j^x \sin \alpha_j^y \cos \alpha_j^z & \cos \alpha_j^x \cos \alpha_j^z & \sin \alpha_j^y \sin \alpha_j^z - \sin \alpha_j^x \cos \alpha_j^y \cos \alpha_j^z \\ -\cos \alpha_j^x \sin \alpha_j^y & \sin \alpha_j^x & \cos \alpha_j^x \cos \alpha_j^y \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\Omega}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \dot{\alpha}_j^z + \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_j^z) \\ \sin(\alpha_j^z) \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\alpha}_j^x \quad (5.7)$$

Si se considera que el centro de masas está en el centro de la caja en dirección longitudinal y se denomina h_j a la altura del centro de masas de la caja respecto de

los enganches, entonces su velocidad se puede obtener a partir de la media de las velocidades de los enganches más un término debido al balanceo de la caja como:

$$\mathbf{v}_j^G = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_j^E + \mathbf{v}_{j+1}^E) + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ -h_j \dot{\phi}_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 5.2 y 5.1, se puede expresar la velocidad angular de una caja en el sistema de referencia de un enganche como:

$$\omega_j^{\text{cb}} = \mathbf{T}_j^T \boldsymbol{\Omega}_j + \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_j \\ \frac{1}{a_j} (\dot{z}_j - \dot{z}_{j+1}) \\ \frac{1}{a_j} (\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j) \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Las aceleraciones se obtienen derivando las velocidades con respecto del tiempo. Sabiendo que el término $\dot{\mathbf{T}}_j \mathbf{v}$ se puede calcular como $\boldsymbol{\Omega}_j \times (\mathbf{T}_j \mathbf{v})$, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_j^E &= \dot{\mathbf{v}}_j + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \right) + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left[\boldsymbol{\Omega}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \right) \right] + \\ &+ \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_j \\ \ddot{z}_j \end{Bmatrix} + 2 \left[\boldsymbol{\Omega}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y}_j \\ \dot{z}_j \end{Bmatrix} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_j^G = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{v}}_j^E + \dot{\mathbf{v}}_{j+1}^E) + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ -h_j \ddot{\phi}_j \\ 0 \end{Bmatrix} + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ -h_j \dot{\phi}_j \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (5.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_j^{\text{cb}} = \mathbf{T}_j^T \dot{\boldsymbol{\Omega}}_j + \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_j \\ \frac{1}{a_j} (\ddot{z}_j - \ddot{z}_{j+1}) \\ \frac{1}{a_j} (\ddot{y}_{j+1} - \ddot{y}_j) \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

La velocidad del centro de masas del rodal, H_j , se puede obtener como:

$$\mathbf{v}_j^H = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ u_j \\ w_j \end{Bmatrix} \right) + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{u}_j \\ \dot{w}_j \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Los giros del rodal θ_j y ψ_j son pequeños debido a que el primero está limitado por el toque de pestaña y el segundo está restringido por el mecanismo de guiado. Así, se pueden realizar simplificaciones a la hora de obtener las expresiones cinemáticas del rodal sin pérdida de precisión. En este sentido, la velocidad angular de las masas no

rotativas del rodal (yugo y torretas) se puede obtener en el sistema de referencia local del rodal mediante la siguiente ecuación:

$$\omega_j^f = \mathbf{T}_j^T \boldsymbol{\Omega}_j + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_j \\ \theta_j \dot{\psi}_j \\ \dot{\psi}_j \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

Así pues, la velocidad angular de las ruedas se puede calcular a partir de la velocidad angular del yugo junto con su propia velocidad de rotación respecto de su eje de revolución. De este modo, teniendo en cuenta que se montan ruedas independientes, se debería asociar una coordenada independiente a cada rueda para considerar sus diferentes velocidades de rotación. En una primera aproximación al problema se ha supuesto que la diferencia entre ellas no es importante y que su contribución a las fuerzas de contacto es despreciable, por lo que se ha considerado que su velocidad de rotación respecto a su eje de revolución es constante e igual a V/r , donde r es el radio de rodadura de las ruedas. La expresión de la velocidad angular de las ruedas en el sistema de referencia asociado al rodal queda entonces:

$$\omega_j^w = \omega_j^f + \begin{Bmatrix} 0 \\ V/r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

Las derivadas de estas expresiones con respecto del tiempo corresponden a la aceleración del centro de masas del rodal y a su aceleración angular:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_j^H &= \dot{\mathbf{v}}_j + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ u_j \\ w_j \end{Bmatrix} \right) + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left[\boldsymbol{\Omega}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ u_j \\ w_j \end{Bmatrix} \right) \right] + \\ &+ \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_j \\ \ddot{w}_j \end{Bmatrix} + 2 \left[\boldsymbol{\Omega}_j \times \left(\mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{u}_j \\ \dot{w}_j \end{Bmatrix} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\dot{\omega}_j^w = \dot{\omega}_j^f = \mathbf{T}_j^T \dot{\boldsymbol{\Omega}}_j + \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_j \\ \dot{\theta}_j \dot{\psi}_j + \theta_j \ddot{\psi}_j \\ \ddot{\psi}_j \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

5.3.2. Restricciones cinemáticas

El contacto rueda-carril establece unas restricciones cinemáticas entre los distintos parámetros del movimiento del rodal que pueden considerarse a través de sendas funciones de u y ψ , tal y como se ha descrito en la sección 3.3. Teniendo en cuenta

que el sistema de guiado está diseñado para minimizar el ángulo de ataque del eje se puede despreciar la contribución de la coordenada ψ en las funciones de restricción.

Los parámetros del movimiento del rodal que intervienen en las ecuaciones del movimiento del sistema a través de las fuerzas generalizadas son (ver figura 5.11):

- e es la distancia transversal desde el centro de masas del rodal hasta la vertical del punto de contacto medida según el eje local u_j .
- r es la distancia vertical desde el centro de masas del rodal hasta el punto de contacto medida según el eje local w_j .
- ϵ es el ángulo que forma el radio de contacto con el plano $u_j - w_j$ debido al lazo ψ del rodal.
- γ es la conicidad en el punto de contacto y equivale a la dirección de la fuerza normal N respecto al plano vertical.

De esta forma aparece un conjunto de restricciones holónomas y esclerónomas que se consideran a través de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} w &= \Gamma^w(u) \\ \theta &= \Gamma^\theta(u) \\ \gamma_i &= \Gamma^\gamma(u), \quad i = 1, 2 \\ r_i &= \Gamma^r(u), \quad i = 1, 2 \\ e_i &= \Gamma^e(u), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Los subíndices 1 y 2 se corresponden con rueda izquierda y rueda derecha respectivamente.

Estas funciones se obtienen a partir de la resolución del denominado *problema de posición*, en el que se calculan los valores de estas variables para distintas posiciones del eje. En la referencia [122] se describe un procedimiento para la resolución del problema de posición en el caso rígido. Este procedimiento se ha implementado en una aplicación informática [11]. El problema se resuelve previamente a la simulación y su solución genera las funciones de restricción para la rueda y el carril empleados en el ensayo con el ancho de vía y la inclinación correspondientes.

En este caso, esta solución consiste en una serie de valores de las variables antes enunciadas para varios valores del desplazamiento lateral del rodal, u . Para obtener funciones de restricción continuas se interpolan el resto de valores mediante el empleo de polinomios de Akima [3] ajustados a la nube de puntos (ver un ejemplo en la figura 5.12).

Los polinomios de Akima son funciones cúbicas de la forma:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^3$$

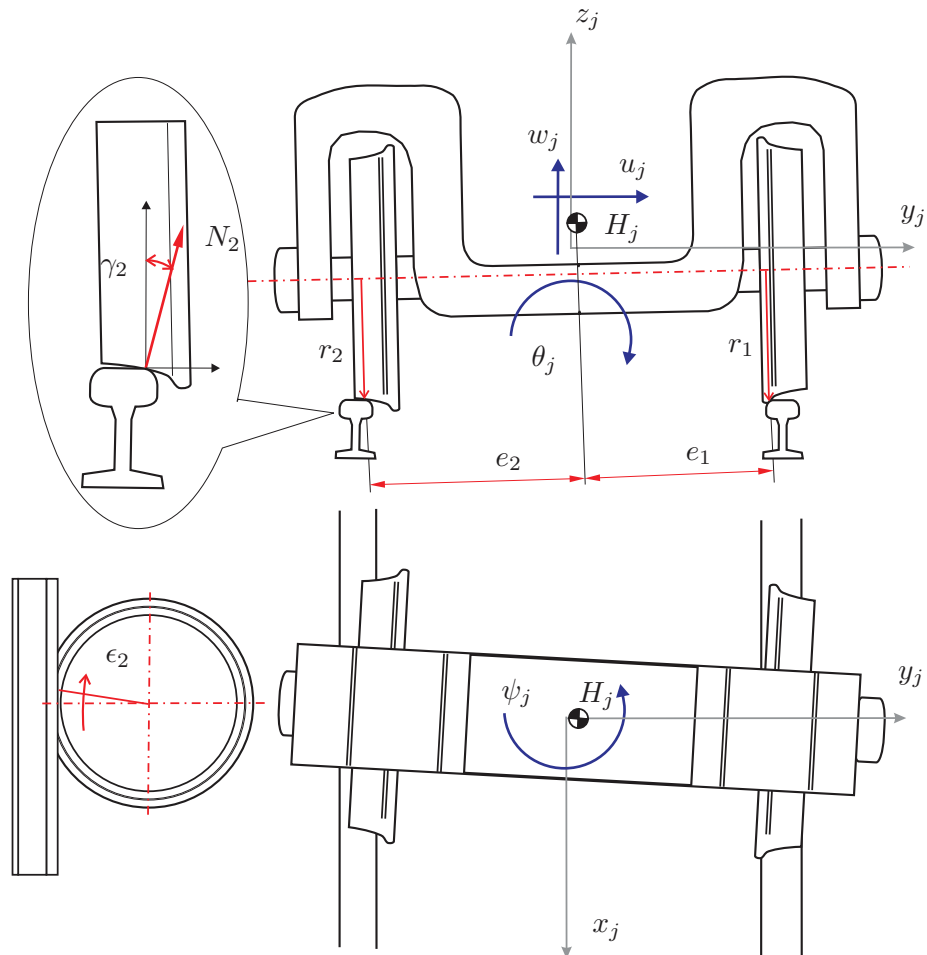


Figura 5.11. Parámetros que definen el movimiento del rodal

Permiten interpolar y ajustar una curva a una nube de puntos (x_i, y_i) , o bien, $(u, \Gamma(u))$, mediante el cálculo de los coeficientes (a_0, a_1, a_2, a_3) para cada tramo entre puntos [4]. Los polinomios de Akima presentan una ventaja importante desde el punto de vista computacional y es que su derivada tiene una expresión analítica sencilla y es continua (ver figura 5.13):

$$y'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_i) + 3a_3(x - x_i)^2$$

Así, la obtención de las parciales de las funciones de restricción con respecto a las variables del problema que aparecen en las ecuaciones del movimiento 5.18 se resuelven de forma analítica, mejorando la eficiencia computacional.

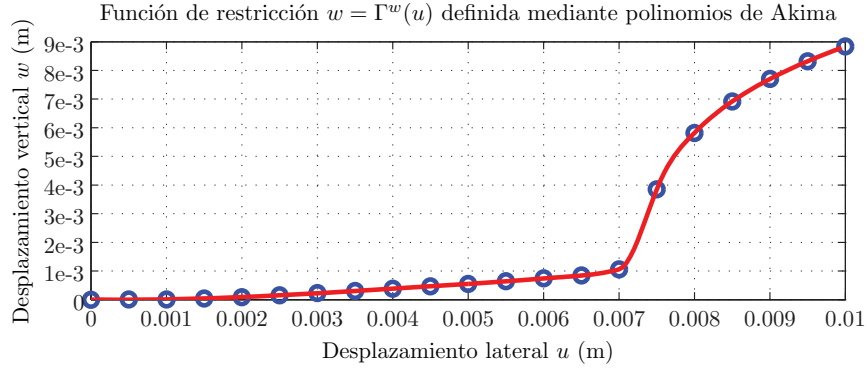


Figura 5.12. Ejemplo de uso de los polinomios de Akima

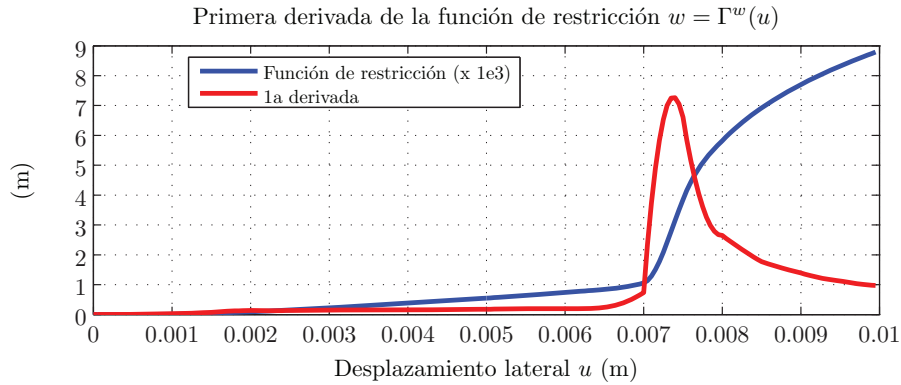


Figura 5.13. Primera derivada de una función de restricción expresada mediante polinomios de Akima

5.3.3. Velocidades de pseudodeslizamiento

El cálculo de las velocidades de pseudodeslizamiento se realiza a partir del cálculo de las velocidades de los puntos de contacto normalizadas mediante la velocidad del vehículo (ver figura 5.14). Para ello, en primer lugar se determina la posición del punto de contacto mediante la siguiente expresión:

$$\vec{R}_{P_{1,2}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ u \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\cos \theta \text{ sen } \psi & \cos \psi \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \psi \text{ sen } \theta & -\cos \psi \text{ sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ e_{1,2} \\ r_{1,2} \end{Bmatrix}$$

Se calcula la velocidad del punto de contacto en el sistema de referencia local asociado al área de contacto a partir de la suma de las componentes de la velocidad absoluta del punto en dicho sistema de referencia, más la velocidad asociada a los movimientos parásitos del rodal, u y ψ . La velocidad absoluta del punto se calcula a partir de la

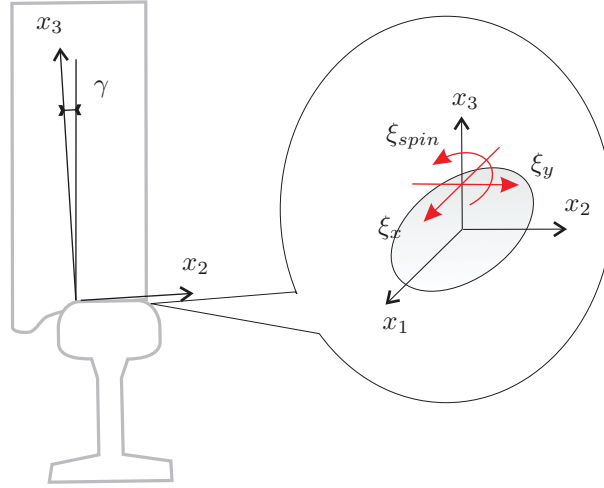


Figura 5.14. Velocidades de pseudodeslizamiento

posición del punto de contacto y de la velocidad angular de la rueda, obtenida en la ecuación 5.15,

De este modo, las velocidades de pseudodeslizamiento se pueden calcular de forma aproximada mediante las siguientes expresiones [75]:

$$\xi_{1,2}^x = \frac{1}{V} \left(\omega_w^y R_{P_{1,2}}^z - \omega_w^z R_{P_{1,2}}^y \right)$$

$$\xi_{1,2}^y = \frac{1}{V} \left[\cos \gamma_{1,2} \left(\omega_w^z R_{P_{1,2}}^x - \omega_w^x R_{P_{1,2}}^z + \dot{u} - V\psi \right) + \sin \gamma_{1,2} \left(\omega_w^x R_{P_{1,2}}^y - \omega_w^y R_{P_{1,2}}^x + \dot{w} \right) \right]$$

$$\xi_{1,2}^{spin} = \frac{1}{V} \left(-\omega_w^y \sin \gamma_{1,2} + \omega_w^z \cos \gamma_{1,2} \right)$$

Las variables que intervienen en el cálculo son:

- ω_w^x, ω_w^y y ω_w^z son las componentes de la velocidad angular de la rueda calculada según la ecuación 5.15.
- $R_{P_{1,2}}^x, R_{P_{1,2}}^y$ y $R_{P_{1,2}}^z$ son las componentes del vector de posición del punto de contacto en la rueda.
- $\gamma_{1,2}$ es la conicidad en el punto de contacto.
- V es la velocidad del vehículo.
- \dot{u} y \dot{w} son las velocidades de los desplazamientos lateral y vertical del rodal respectivamente.
- ψ es el ángulo de lazo del rodal.

5.4. Formulación de la ecuación del movimiento

Para deducir la ecuación del movimiento, hacemos uso de las ecuaciones de Lagrange escritas para un sistema de coordenadas dependientes. De este modo, aplicadas al conjunto de coordenadas elegido, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial L}{\partial y_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_j} + \dots \\
 \dots \quad & \lambda_{j-1}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_j, y_{j-1}, y_{j-2})}{\partial y_j} + \lambda_j^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_{j+1}, y_j, y_{j-1})}{\partial y_j} + \lambda_{j+1}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_{j+2}, y_{j+1}, y_j)}{\partial y_j} = Q_j^y \\
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} - \frac{\partial L}{\partial z_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_j} = Q_j^z \\
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_j} - \frac{\partial L}{\partial \phi_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}_j} = Q_j^\phi \\
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial L}{\partial u_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_j} + \lambda_j^w \frac{\partial \Gamma^w(u_j)}{\partial u_j} + \lambda_j^\theta \frac{\partial \Gamma^\theta(u_j)}{\partial u_j} = Q_j^u \\
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j} - \frac{\partial L}{\partial w_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{w}_j} - \lambda_j^w = Q_j^w \\
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} - \frac{\partial L}{\partial \theta_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_j} - \lambda_j^\theta = Q_j^\theta \\
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_j} - \frac{\partial L}{\partial \psi_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}_j} - \lambda_j^\psi = Q_j^\psi
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

siendo L el Lagrangiano; R la función de disipación de Rayleigh; $\lambda_j^\psi, \lambda_j^w$ y λ_j^θ los multiplicadores de Lagrange; y $Q_j^y, Q_j^z, Q_j^\phi, Q_j^u, Q_j^w, Q_j^\theta$ y Q_j^ψ , las fuerzas generalizadas.

Los multiplicadores de Lagrange asociados al desplazamiento vertical, λ^w , y al balanceo del rodal, λ^θ , representan las restricciones al movimiento sobre estos grados de libertad debidas al contacto. Los multiplicadores tienen en cuenta la contribución de las fuerzas normales sobre estos movimientos, de forma que λ^w es la fuerza neta en dirección vertical debida a las fuerzas normales y λ^θ es el momento según el eje x producido por estas fuerzas.

De este modo, los multiplicadores se calculan a partir de las fuerzas normales y los parámetros de la posición del punto de contacto en las ruedas (ver figura 5.11). Si se considera que el ángulo de lazo del rodal, ψ , va a ser muy pequeño por la presencia del mecanismo de guiado, la posición del punto de contacto vendrá definida por un problema bidimensional en el plano $u - w$ del sistema de referencia del rodal. Las expresiones para el cálculo de los multiplicadores serán:

$$\begin{aligned}
 \lambda^w &= N_1 \cos \gamma_1 + N_2 \cos \gamma_2 \\
 \lambda^\theta &= (r_1 \sin \theta + e_1 \cos \theta) N_1 \cos \gamma_1 - (r_1 \cos \theta - e_1 \sin \theta) N_1 \sin \gamma_1 \dots \\
 &\quad - (e_2 \cos \theta - r_2 \sin \theta) N_2 \cos \gamma_2 + (e_2 \sin \theta + r_2 \cos \theta) N_2 \sin \gamma_2
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Así pues, el cálculo de las fuerzas normales en las ruedas se puede realizar a partir de estos multiplicadores de Lagrange, junto con los parámetros de los puntos de contacto, resolviendo de forma analítica el sistema de ecuaciones anterior 5.4 para las dos variables, N_1 y N_2 .

5.4.1. Términos derivados de la energía cinética

La energía cinética de las cajas puede ser obtenida mediante la ecuación siguiente:

$$E_k^{cb} = \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2} m_j^{cb} (\mathbf{v}_j^G)^T \mathbf{v}_j^G + \frac{1}{2} (\omega_j^{cb})^T \mathbf{I}_j^{cb} \omega_j^{cb} \right)$$

siendo m_j^{cb} la masa; \mathbf{I}_j^{cb} la matriz principal de inercia de cada caja; y N el número de rodales.

Los términos derivados de la energía cinética se obtienen de:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial q_j} = \\ & \frac{d}{dt} \left(m_j^{cb} (\mathbf{v}_j^G)^T \frac{\partial \mathbf{v}_j^G}{\partial \dot{q}_j} + m_{j-1}^{cb} (\mathbf{v}_{j-1}^G)^T \frac{\partial \mathbf{v}_{j-1}^G}{\partial \dot{q}_j} + (\omega_j^{cb})^T \mathbf{I}_j^{cb} \frac{\partial \omega_j^{cb}}{\partial \dot{q}_j} + (\omega_{j-1}^{cb})^T \mathbf{I}_{j-1}^{cb} \frac{\partial \omega_{j-1}^{cb}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \\ & - \left(m_j^{cb} (\mathbf{v}_j^G)^T \frac{\partial \mathbf{v}_j^G}{\partial q_j} + m_{j-1}^{cb} (\mathbf{v}_{j-1}^G)^T \frac{\partial \mathbf{v}_{j-1}^G}{\partial q_j} + (\omega_j^{cb})^T \mathbf{I}_j^{cb} \frac{\partial \omega_j^{cb}}{\partial q_j} + (\omega_{j-1}^{cb})^T \mathbf{I}_{j-1}^{cb} \frac{\partial \omega_{j-1}^{cb}}{\partial q_j} \right) \end{aligned}$$

en donde q_j corresponde a cada una de las tres coordenadas y_j, z_j, ϕ_j . Expresamos a través de $\mathbf{T}_j^{<i>}$ a la i -ésima columna de la matriz \mathbf{T}_j . Sabiendo que $\dot{\mathbf{T}}_j^{<i>} = \boldsymbol{\Omega}_j \times \mathbf{T}_j^{<i>}$, los términos de las ecuaciones del movimiento derivados de la energía cinética son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial y_j} &= 0.5 \left((\dot{\mathbf{v}}_j^G)^T m_j^{cb} + (\mathbf{v}_{j-1}^G)^T m_{j-1}^{cb} \right) \mathbf{T}_j^{<2>} - \frac{1}{a_j} (\dot{\omega}_j^{cb})^T \mathbf{I}_j^{cb <3>} + \frac{1}{a_{j-1}} (\dot{\omega}_{j-1}^{cb})^T \mathbf{I}_{j-1}^{cb <3>} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial \dot{z}_j} - \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial z_j} &= 0.5 \left((\dot{\mathbf{v}}_j^G)^T m_j^{cb} + (\mathbf{v}_{j-1}^G)^T m_{j-1}^{cb} \right) \mathbf{T}_j^{<3>} + \frac{1}{a_j} (\dot{\omega}_j^{cb})^T \mathbf{I}_j^{cb <2>} - \frac{1}{a_{j-1}} (\dot{\omega}_{j-1}^{cb})^T \mathbf{I}_{j-1}^{cb <2>} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial \dot{\phi}_j} - \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial \phi_j} &= -h_j m_j^{cb} (\dot{\mathbf{v}}_j^G)^T \mathbf{T}_j^{<2>} + (\dot{\omega}_j^{cb})^T \mathbf{I}_j^{cb <1>} - h_j m_j^{cb} (\mathbf{v}_j^G)^T (\boldsymbol{\Omega}_j \times \mathbf{T}_j^{<2>}) \end{aligned}$$

Para el rodal, la energía cinética es:

$$E_k^b = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} m_j^b (\mathbf{v}_j^H)^T \mathbf{v}_j^H + \frac{1}{2} (\omega_j^w)^T \mathbf{I}_j^w \omega_j^w + \frac{1}{2} (\omega_j^f)^T \mathbf{I}_j^f \omega_j^f \right)$$

donde \mathbf{I}_j^w e \mathbf{I}_j^f corresponden respectivamente a las matrices de inercia con respecto al centro de masas del rodal del conjunto formado por las ruedas y del bastidor del rodal, y m_j^b es la masa del rodal.

Las derivadas de la expresión anterior contenidas en la ecuación de Lagrange son del tipo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k^{cb}}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(m_j^b (\mathbf{v}_j^H)^T \frac{\partial \mathbf{v}_j^H}{\partial \dot{q}_j} + (\omega_j^w)^T \mathbf{I}_j^w \frac{\partial \omega_j^w}{\partial \dot{q}_j} + (\omega_j^f)^T \mathbf{I}_j^f \frac{\partial \omega_j^f}{\partial \dot{q}_j} \right) - \\ &- \left(m_j^b (\mathbf{v}_j^H)^T \frac{\partial \mathbf{v}_j^H}{\partial q_j} + (\omega_j^w)^T \mathbf{I}_j^w \frac{\partial \omega_j^w}{\partial q_j} + (\omega_j^f)^T \mathbf{I}_j^f \frac{\partial \omega_j^f}{\partial q_j} \right) \end{aligned}$$

Operando para cada coordenada, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^b}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial E_k^b}{\partial u_j} &= m_j^b (\dot{\mathbf{v}}_j^H)^T \mathbf{T}_j^{<2>} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^b}{\partial \dot{w}_j} - \frac{\partial E_k^b}{\partial w_j} &= m_j^b (\dot{\mathbf{v}}_j^H)^T \mathbf{T}_j^{<3>} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^b}{\partial \dot{\theta}_j} - \frac{\partial E_k^b}{\partial \theta_j} &= \{ (\dot{\omega}_j^f)^T \mathbf{I}_j^b \}^{<1>} - \dot{\psi}_j \{ (\omega_j^w)^T \mathbf{I}_j^w + (\omega_j^f)^T \mathbf{I}_j^f \}^{<2>} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k^b}{\partial \dot{\psi}_j} - \frac{\partial E_k^b}{\partial \psi_j} &= (\dot{\omega}_j^f)^T \mathbf{I}_j^b \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_j \\ 1 \end{Bmatrix} + \dot{\theta}_j \{ (\omega_j^f)^T \mathbf{I}_j^f + (\omega_j^w)^T \mathbf{I}_j^w \}^{<2>} \end{aligned}$$

siendo \mathbf{I}_j^b la matriz de inercia del rodal (suma de las matrices \mathbf{I}_j^w y \mathbf{I}_j^f).

5.4.2. Suspensión y elementos de unión

Además de las articulaciones correspondientes a la unión entre cajas y al mecanismo de guiado, las cajas están unidas a través de un conjunto de amortiguadores longitudinales (ver figura 5.15). Estos amortiguadores son de frente rígido y se encargan de proveer la suficiente rigidez al lazo de la composición para asegurar la estabilidad del conjunto, mientras proporcionan el amortiguamiento necesario para atenuar las perturbaciones que aparezcan en el plano horizontal de las cajas. El comportamiento de estos elementos es función del efecto hidráulico y de la flexibilidad de las distintas partes del amortiguador [5]. Un modelo habitual consiste en considerar un amortiguador viscoso (lineal) en serie con una rigidez [31]. Este modelo es válido para el comportamiento a baja frecuencia del amortiguador [21].

Existe otro amortiguador transversal entre las cajas para atenuar los movimientos laterales (ver figura 5.15). La curva característica de este amortiguador es prácticamente lineal, por lo que se puede modelar mediante amortiguamiento viscoso.

En una primera aproximación, el efecto de los amortiguadores entre cajas puede ser condensado en tres valores (ver figura 5.16) correspondientes a los movimientos relativos que tiene lugar entre ellas. De esta forma definimos d_ϕ , d_φ y d_ψ , que se corresponden con el amortiguamiento viscoso equivalente respecto de los giros de balanceo,

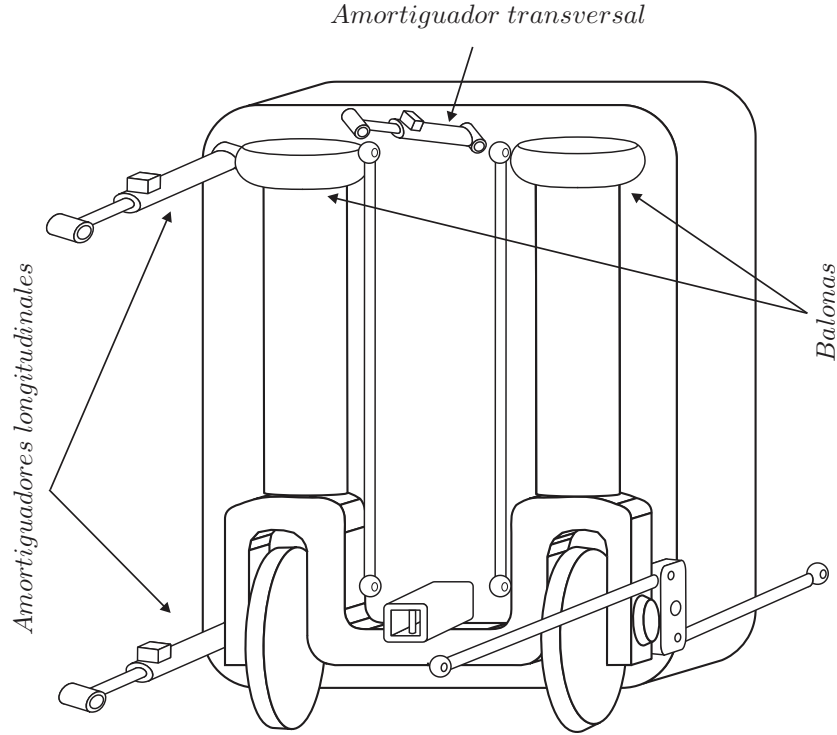


Figura 5.15. Elementos de unión entre cajas

cabeceo y lazo entre cajas, respectivamente. Estos valores pueden ser obtenidos a través de las propiedades viscosas de los amortiguadores y la posición de sus puntos de anclaje.

Las velocidades angulares relativas entre la caja j y la $j - 1$ puede calcularse como:

$$\Delta_j = \omega_j^{cb} - \mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_{j-1} \omega_{j-1}^{cb}$$

La función de disipación de Rayleigh correspondiente al amortiguamiento viscoso entre cajas es:

$$R^{cb} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N-1} \Delta_j^T \mathbf{D}_j \Delta_j$$

siendo \mathbf{D}_j la matriz diagonal $(d_\phi, d_\varphi, d_\psi)$ correspondiente a la unión entre la caja j y la $j - 1$. Los términos correspondientes en la ecuación del movimiento del sistema se obtienen a partir de la función de Rayleigh:

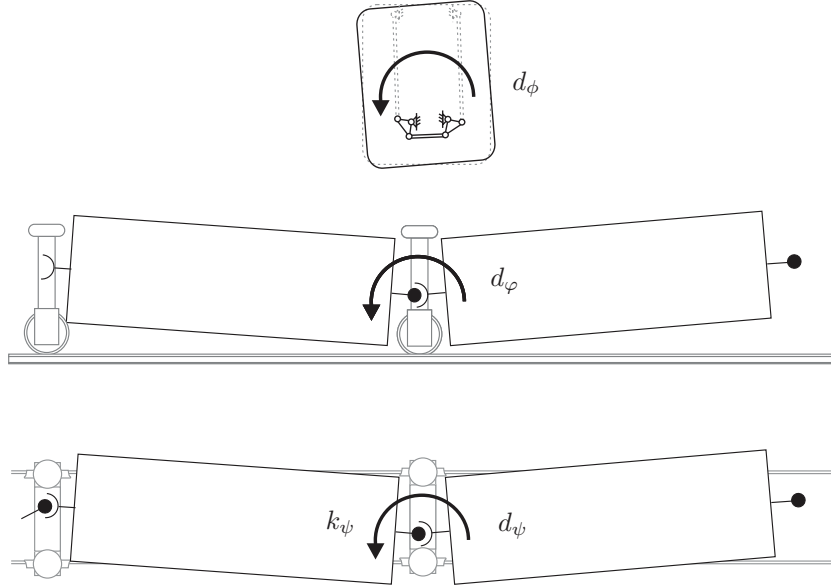


Figura 5.16. Modelado de los elementos de unión entre cajas según movimientos relativos

$$\begin{aligned}\frac{\partial R^{cb}}{\partial \dot{y}_j} &= \frac{1}{a_{j-1}} \Delta_{j-1}^T \mathbf{D}_{j-1}^{<3>} - \frac{1}{a_j} \Delta_j^T \mathbf{D}_j^{<3>} + \frac{1}{a_j} \Delta_{j+1}^T \mathbf{D}_{j+1} \mathbf{T}_{j+1}^T \mathbf{T}_j^{<3>} \\ &\quad - \frac{1}{a_{j-1}} \Delta_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_{j-1}^{<3>} \\ \frac{\partial R^{cb}}{\partial \dot{z}_j} &= \frac{-1}{a_{j-1}} \Delta_{j-1}^T \mathbf{D}_{j-1}^{<2>} + \frac{1}{a_j} \Delta_j^T \mathbf{D}_j^{<2>} - \frac{1}{a_j} \Delta_{j+1}^T \mathbf{D}_{j+1} \mathbf{T}_{j+1}^T \mathbf{T}_j^{<2>} \\ &\quad + \frac{1}{a_{j-1}} \Delta_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_{j-1}^{<2>} \\ \frac{\partial R^{cb}}{\partial \dot{\phi}_j} &= \Delta_j^T \mathbf{D}_j^{<1>} - \Delta_{j+1}^T \mathbf{D}_{j+1} \mathbf{T}_{j+1}^T \mathbf{T}_j^{<1>}\end{aligned}$$

La rigidez al lazo entre cajas que proporcionan los amortiguadores longitudinales se modela mediante una rigidez al giro, k_ψ . La energía elástica asociada a este movimiento puede ser calculada como:

$$U^{cb} = \sum_{j=2}^{N-1} \left(\frac{1}{2} k_\psi \left[\Theta_j + \frac{1}{a} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) \right] \right)^2 \quad (5.20)$$

donde Θ_j es el giro relativo medido según el eje vertical entre la caja j y la $j-1$ cuando los desplazamientos laterales de los ganchos son nulos (ver sección 5.5.2.2). La aportación de este término a la ecuación del movimiento es:

$$\frac{\partial U^{cb}}{\partial y_j} = \frac{k_\psi}{a} (\Theta_{j+1} - 2\Theta_j + \Theta_{j-1}) + \frac{k_\psi}{a^2} (y_{j+2} - 4y_{j+1} + 6y_j - 4y_{j-1} + y_{j-2})$$

La caja y el rodal están unidos a través de un amortiguador transversal situado en la parte inferior (dos en el caso de los rodales extremos) y de las balonas neumáticas que constituyen la suspensión secundaria del vehículo (ver figura 5.17). El amortiguador tiene una característica prácticamente lineal por lo que se introduce mediante amortiguamiento viscoso.

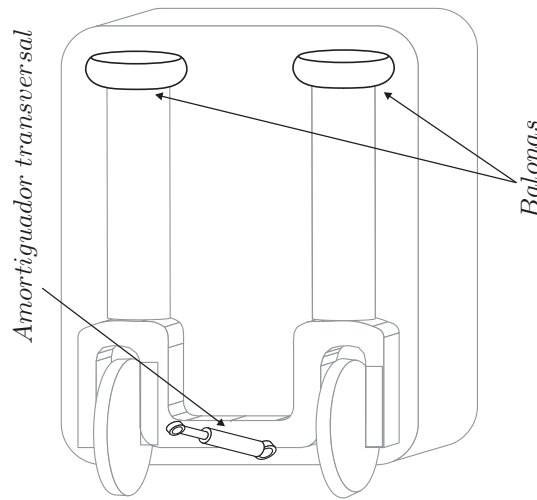


Figura 5.17. Elementos de unión entre caja y rodal

Para modelar las suspensiones neumáticas existen distintos modelos que permiten abordar diferentes problemas en cuanto su diseño y utilización [6, 94]. El modelo implementado en esta Tesis es el modelo de Nishimura, empleado por el programa de simulación dinámica de vehículos ferroviarios ADAMS/Rail [73]. Con este modelo, los valores de rigidez y amortiguamiento verticales, k_z/d_z , se pueden estimar a partir de un modelo elástico con amortiguamiento viscoso equivalente para bajas frecuencias [76]. Los valores de k_1 , k_2 , k_3 y c (ver figura 5.18) dependen de las características neumáticas de la balona: volúmenes de depósito y resorte, diámetro del orificio, área efectiva, gradiente del área respecto a la altura del resorte y presión inicial. Finalmente, los valores de rigidez y amortiguamiento en el plano horizontal, tanto en dirección x como y , dependen de las características mecánicas de la carcasa de la balona fundamentalmente y se deben obtener mediante ensayo experimental.

La caja j -ésima está apoyada sobre el rodal j -ésimo a través de la suspensión del vehículo (ver figura 5.19). Sea b la altura del plano de la suspensión con respecto al gancho y c la semidistancia transversal entre resortes.

Las propiedades de la suspensión afectarán a los términos obtenidos de la energía

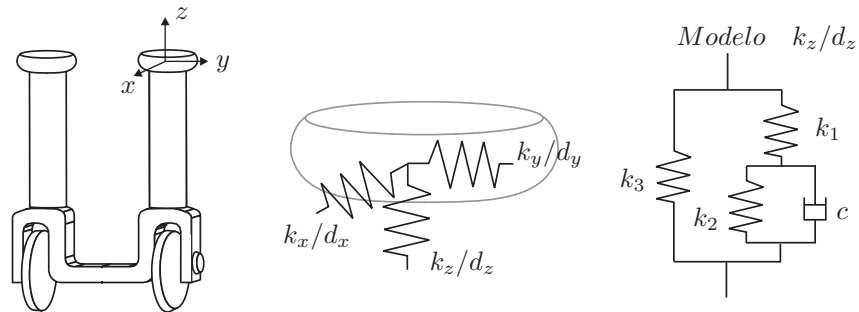


Figura 5.18. Apoyo de la caja en el rodal a través de las balonas neumáticas de la suspensión secundaria

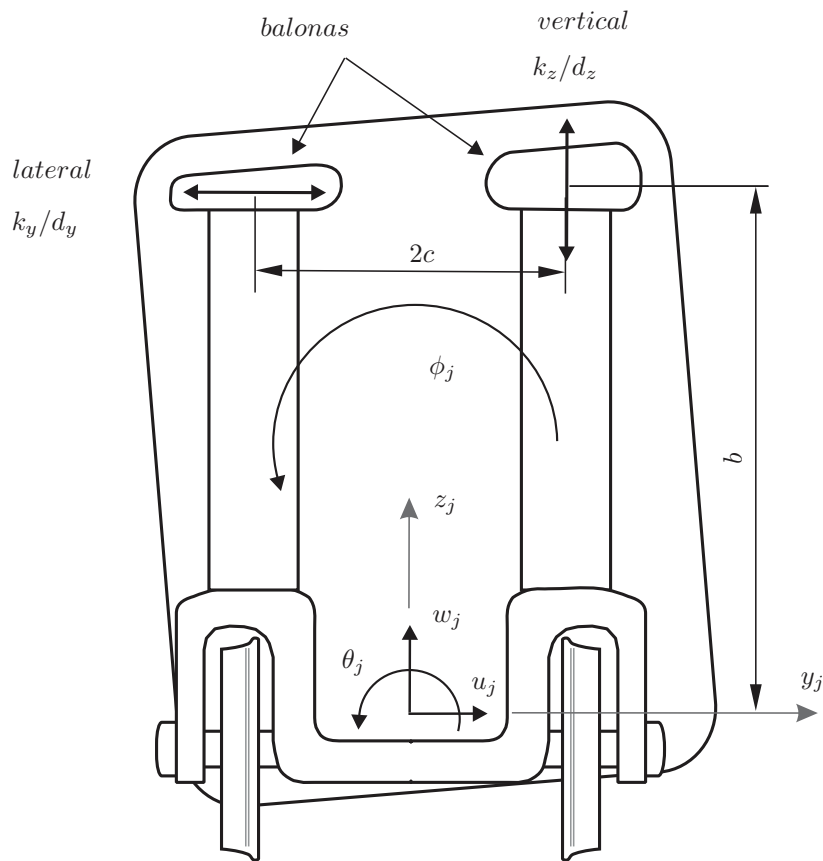


Figura 5.19. Apoyo de la caja en el rodal a través de las balonas neumáticas de la suspensión secundaria

elástica y a la función de disipación de Rayleigh, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^s}{\partial y_j} + \frac{\partial R^s}{\partial \dot{y}_j} &= 2k_y (y_j - b\phi_j - u_j + b\theta_j) + 2d_y (\dot{y}_j - b\dot{\phi}_j - \dot{u}_j + b\dot{\theta}_j) \\ \frac{\partial U^s}{\partial z_j} + \frac{\partial R^s}{\partial \dot{z}_j} &= 2k_z (z_j - w_j) + 2d_z (\dot{z}_j - \dot{w}_j) \\ \frac{\partial U^s}{\partial \phi_j} + \frac{\partial R^s}{\partial \dot{\phi}_j} &= 2k_y (-by_j + b^2\phi_j + bu_j - b^2\theta_j) + 2k_z c^2 (\phi_j - \theta_j) + \\ &\quad + 2d_y (-b\dot{y}_j + b^2\dot{\phi}_j + b\dot{u}_j - b^2\dot{\theta}_j) + 2d_z c^2 (\dot{\phi}_j - \dot{\theta}_j) \\ \frac{\partial U^s}{\partial u_j} + \frac{\partial R^s}{\partial \dot{u}_j} &= 2k_y (-y_j + b\phi_j + u_j - b\theta_j) + 2d_y (-\dot{y}_j + b\dot{\phi}_j + \dot{u}_j - b\dot{\theta}_j) \\ \frac{\partial U^s}{\partial w_j} + \frac{\partial R^s}{\partial \dot{w}_j} &= 2k_z (-z_j + w_j) + 2d_z (-\dot{z}_j + \dot{w}_j) \\ \frac{\partial U^s}{\partial \theta_j} + \frac{\partial R^s}{\partial \dot{\theta}_j} &= 2k_y (by_j - b^2\phi_j - bu_j + b^2\theta_j) + 2k_z c^2 (-\phi_j + \theta_j) + \\ &\quad + 2d_y (b\dot{y}_j - b^2\dot{\phi}_j - b\dot{u}_j + b^2\dot{\theta}_j) + 2d_z c^2 (-\dot{\phi}_j + \dot{\theta}_j) \end{aligned}$$

5.4.3. Fuerzas generalizadas

Las fuerzas generalizadas Q asociadas a cada coordenada incluyen las fuerzas en el contacto y las gravitatorias, y podrían incluir cualquier otro elemento no lineal que se considerara en el modelo.

A partir de las propiedades mecánicas de los materiales de la rueda y el carril, junto con las fuerzas normales anteriormente calculadas, se determinan las propiedades del contacto necesarias para realizar el cálculo de las fuerzas tangenciales. Estas propiedades son:

- Coeficientes de la Teoría Lineal de Kalker. A estos coeficientes se les aplica un factor de corrección, cuyo valor habitual es de 0,7 en las simulaciones de dinámica de vehículos ferroviarios [91].
- Dimensiones de la elipse de contacto obtenidas a partir de la Teoría de Hertz.
- Módulo G de elasticidad transversal obtenido a partir de los módulos de Young y coeficientes de Poisson de los materiales de rueda y carril.

Para completar los datos de entrada al modelo de contacto tangencial es necesario añadir el coeficiente de rozamiento, μ . Con todos estos datos, se resuelven las fuerzas tangenciales mediante el modelo de Johnson-Vermeulen modificado por Shen, Hedrick y Elkins [108] descrito en la sección 3.3.3.2. Las fuerzas calculadas son:

- $X_{1,2}$, fuerza longitudinal.

- $T_{1,2}$, fuerza lateral.
- $M_{1,2}$, momento de spin.

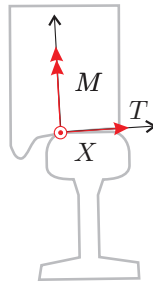


Figura 5.20. Fuerzas tangenciales

La fuerza $X_{1,2}$ es prácticamente nula cuando se emplean ruedas independientes, tal y como se ha justificado en la sección 3.6.

Al despreciar la componente longitudinal de las fuerzas de contacto por disponer de ruedas independientes, el cálculo de las fuerzas generalizadas queda como sigue (ver figura 5.21):

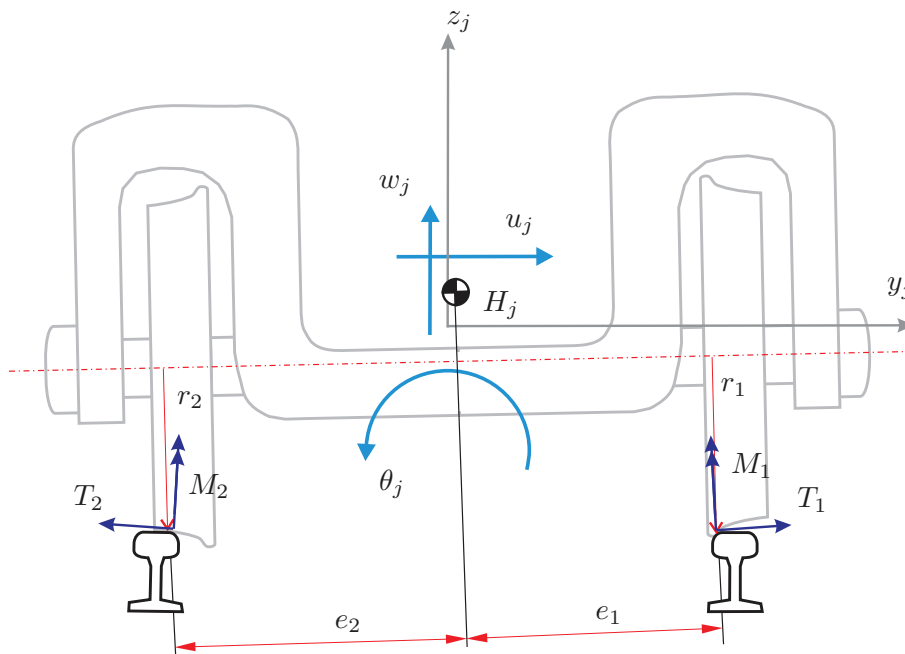


Figura 5.21. Fuerzas en el contacto y parámetros geométricos que aparecen en el cálculo de las fuerzas generalizadas

$$\begin{aligned}
Q_j^y &= -m_j^{cb} g \sin \alpha_j^x \\
Q_j^z &= m_j^{cb} g (\cos \alpha_j^x - 1) \\
Q_j^\phi &= m_j^{cb} g \sin \alpha_j^x h \\
Q_j^u &= -m_j^b g \sin \alpha_j^x + T_{j1} \cos \gamma_{j1} + T_{j2} \cos \gamma_{j2} \\
Q_j^w &= -(m_j^{cb} + m_j^b) g \cos \alpha_j^x + T_{j1} \sin \gamma_{j1} + T_{j2} \sin \gamma_{j2} \\
Q_j^\theta &= r_{j1} T_{j1} \cos \gamma_{j1} + r_{j2} T_{j2} \cos \gamma_{j2} + e_{j1} T_{j1} \sin \gamma_{j1} + e_{j2} T_{j2} \sin \gamma_{j2} \\
Q_j^\psi &= M_{j1} \cos \gamma_{j1} + M_{j2} \cos \gamma_{j2}
\end{aligned}$$

Las variables que aparecen en estas expresiones son:

- $T_{j1,2}$, fuerza lateral.
- $M_{j1,2}$, momento de spin.
- $e_{j1,2}$ es la distancia transversal desde el centro de masas del rodal hasta la vertical del punto de contacto medida según el eje local u_j .
- $r_{j1,2}$ es la distancia vertical desde el centro de masas del rodal hasta el punto de contacto medida según el eje local w_j .
- m_j^{cb} y m_j^b , son las masas de la caja y del rodal, respectivamente.
- h es la altura desde el centro de gravedad de la caja al enganche.
- g es la aceleración de la gravedad.
- α_j^x es el ángulo de peralte de la curva.

5.4.4. Vehículos en posiciones extremas de la composición

La presencia del mecanismo de guiado de los rodales extremos modifica sus funciones de restricción al lazo, ecuación 5.4. De este modo, aparecen nuevas funciones de restricción:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \Gamma^{\psi_1}(y_3, y_2, y_1) \\
\psi_N &= \Gamma^{\psi_N}(y_N, y_{N-1}, y_{N-2})
\end{aligned}$$

Esto modifica la expresión de las ecuaciones asociadas a los desplazamientos laterales de los enganches y_1 hasta y_3 , y de y_{N-2} hasta y_N . Las ecuaciones resultantes son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_1} + \lambda_1^\psi \frac{\partial \Gamma^{\psi_1}(y_3, y_2, y_1)}{\partial y_1} + \lambda_2^\psi \frac{\partial \Gamma^{\psi_N}(y_3, y_2, y_1)}{\partial y_1} = Q_1^y$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} - \frac{\partial L}{\partial y_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_2} + \lambda_1^\psi \frac{\partial \Gamma^{\psi_1}(y_3, y_2, y_1)}{\partial y_2} + \lambda_2^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_3, y_2, y_1)}{\partial y_2} + \lambda_3^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_4, y_3, y_2)}{\partial y_2} = Q_2^y$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} - \frac{\partial L}{\partial y_3} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_3} + \lambda_1^\psi \frac{\partial \Gamma^{\psi_1}(y_3, y_2, y_1)}{\partial y_3} + \lambda_2^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_3, y_2, y_1)}{\partial y_3} + \lambda_3^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_4, y_3, y_2)}{\partial y_3} \\ + \lambda_4^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_5, y_4, y_3)}{\partial y_3} = Q_3^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{N-2}} - \frac{\partial L}{\partial y_{N-2}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_{N-2}} + \lambda_N^\psi \frac{\partial \Gamma^{\psi_N}(y_N, y_{N-1}, y_{N-1})}{\partial y_{N-2}} + \lambda_{N-1}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_N, y_{N-1}, y_{N-2})}{\partial y_{N-2}} \\ + \lambda_{N-2}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_{N-1}, y_{N-2}, y_{N-3})}{\partial y_{N-2}} = Q_{N-2}^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{N-1}} - \frac{\partial L}{\partial y_{N-1}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_{N-1}} + \lambda_N^\psi \frac{\partial \Gamma^{\psi_N}(y_N, y_{N-1}, y_{N-1})}{\partial y_{N-1}} + \lambda_{N-1}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_N, y_{N-1}, y_{N-2})}{\partial y_{N-1}} \\ + \lambda_{N-2}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_{N-1}, y_{N-2}, y_{N-3})}{\partial y_{N-1}} = Q_{N-1}^y \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_N} - \frac{\partial L}{\partial y_N} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_N} + \lambda_N^\psi \frac{\partial \Gamma^{\psi_N}(y_N, y_{N-1}, y_{N-2})}{\partial y_N} + \lambda_{N-1}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_N, y_{N-1}, y_{N-2})}{\partial y_N} = Q_N^y$$

Los términos de la ecuación del movimiento relativos a la energía potencial asociada a la unión elástica entre cajas, ecuación 5.20, también deben ser modificadas con respecto al planteamiento general.

$$\frac{\partial U^{cb}}{\partial y_1} = \frac{k_\psi}{a} \Theta_2 + \frac{k_\psi}{a^2} (y_3 - 2y_2 + y_1)$$

$$\frac{\partial U^{cb}}{\partial y_2} = \frac{k_\psi}{a} (\Theta_3 - 2\Theta_2) + \frac{k_\psi}{a^2} (y_4 - 4y_3 + 5y_2 - 2y_1)$$

$$\frac{\partial U^{cb}}{\partial y_{N-1}} = \frac{k_\psi}{a} (-2\Theta_{N-1} + \Theta_{N-2}) + \frac{k_\psi}{a^2} (-2y_N + 5y_{N-1} - 4y_{N-2} + y_{N-3})$$

$$\frac{\partial U^{cb}}{\partial y_N} = \frac{k_\psi}{a} \Theta_{N-1} + \frac{k_\psi}{a^2} (y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2})$$

5.5. Modelo no lineal

Para poder realizar simulaciones dinámicas del modelo descrito es necesario disponer de un método numérico para la resolución de las ecuaciones del movimiento y de un circuito de vía por el que circule el vehículo. En esta sección se describen: en primer lugar, el método empleado para la integración temporal de las ecuaciones del movimiento; y en segundo lugar, la implementación del circuito.

5.5.1. Integración temporal

La aplicación de las leyes de la Dinámica al modelo no lineal conduce a un sistema de ecuaciones diferencial-algebraicas, DAE (*Differential-Algebraic Equations*), ecuación 5.18.

Este tipo de ecuaciones se clasifican en dos grupos: implícitas y semiexplícitas. Las ecuaciones semiexplícitas se escriben:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, z, y) \\ 0 &= g(t, z, y) \end{aligned} \quad (5.21)$$

con condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$ y $z(t_0) = z_0$. Mientras que la teoría de existencia y unicidad de la solución para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) es completa, para las ecuaciones diferencial-algebraicas es incompleta. Puede ocurrir que no exista solución para este tipo de ecuaciones. Incluso si existen, que no sean únicas. Otra característica destacable en este tipo de ecuaciones es la resolubilidad de las mismas tanto analítica como numéricamente. Estas consideraciones son de gran importancia a la hora de escoger un integrador.

Las ecuaciones diferencial-algebraicas se clasifican en función de su índice diferencial o simplemente su índice, que se define como el número de veces que debe ser diferenciada la ecuación diferencial-algebraica para obtener una ecuación diferencial ordinaria. El índice también se puede definir como el número de diferenciaciones necesario para resolver y' en función de y y t únicamente. Para un índice mayor la integración es más complicada. La ecuación del movimiento de un mecanismo restringido, como la que describe el modelo desarrollado en esta Tesis, es semiexplícita de índice 3:

$$\begin{aligned} M(q)q'' &= Q(t, q, q') - \Phi_q^T(q)\lambda \\ \Phi(t, q) &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde q son las posiciones, q' son las velocidades, q'' son las aceleraciones, y Q son los términos de fuerzas. Las ecuaciones 5.22 pueden ser transformadas en un sistema de primer orden mediante el siguiente cambio de variable $q' = s$, lo que lleva a:

$$\begin{aligned} M(q)s' &= Q(t, q, s) - \Phi_q^T(q)\lambda \\ q' &= s \\ \Phi(t, q) &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

La manera de resolver una ecuación diferencial-algebraica consiste en aproximar y' en la ecuación 5.21 mediante una fórmula de diferencias finitas o un método implícito de Runge-Kutta, y resolver el sistema de ecuaciones algebraico no-lineal resultante mediante algún método iterativo para aproximar y .

En las referencias [9, 30] se describen los integradores habituales para la resolución de sistemas de ecuaciones diferencial-algebraicos, haciendo especial mención a los propios de la dinámica de vehículos. Del mismo modo, en la referencia [24] se desarrolla una metodología para la simulación dinámica de mecanismos, con un capítulo dedicado en exclusiva a la problemática de la integración temporal. En todos los casos se recomienda el empleo de integradores temporales tipo BDF (*Backward Differentiation Formula*). Esta aproximación es una de las opciones utilizadas en programas comerciales para la integración de las ecuaciones de movimiento de mecanismos restringidos. De hecho, los algoritmos implementados en el solver de ADAMS/Rail son distintas versiones de este método [73].

El método BDF consiste en aplicar directamente la fórmula de diferencias finitas al sistema de ecuaciones. El procedimiento consiste en sustituir las aproximaciones de diferencias finitas:

$$q'_{n+1} = \frac{1}{\Delta t \beta_0} \left(q_{n+1} - \sum_{i=0}^p \alpha_i q_{n-i} \right)$$

$$s'_{n+1} = \frac{1}{\Delta t \beta_0} \left(s_{n+1} - \sum_{i=0}^p \alpha_i s_{n-i} \right)$$

en las ecuaciones de movimiento 5.23 para formar el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no-lineales con q_{n+1} y s_{n+1} como incógnitas:

$$M(q_{n+1}) \frac{1}{\Delta t \beta_0} \left(s_{n+1} - \sum_{i=0}^p \alpha_i s_{n-i} \right) = Q_{n+1} - \Phi_q^T(q_{n+1}) \lambda_{n+1}$$

$$\frac{1}{\Delta t \beta_0} \left(q_{n+1} - \sum_{i=0}^p \alpha_i q_{n-i} \right) = s_{n+1}$$

$$\Phi(t, q_{n+1}) = 0$$

La solución de este sistema se puede obtener mediante un método iterativo de Newton-Raphson si se dispone de la matriz Jacobiana. En cualquier caso, se puede obtener una solución menos precisa mediante el método de la secante o mediante iteración de punto fijo.

Existen distintas implementaciones de este tipo de integradores. Algunas son de dominio público [81] y otras son propiedad de una empresa [48]. Pese a ser más eficientes desde el punto de vista del coste computacional, el empleo de estos integradores supone la pérdida de control sobre el funcionamiento del programa. Debido a la singularidad del modelado presentado en esta Tesis, se ha implementado un integrador propio de forma que se pueda determinar el origen de un fallo, en el caso de una falta de convergencia o en el caso de errores numéricos considerables. Se pretende disponer de un algoritmo robusto que permita distinguir si el responsable de un fallo es el integrador, los parámetros utilizados, o el propio modelo.

El método implementado en esta Tesis es un método BDF conocido como algoritmo de Gear [10]. El algoritmo de Gear de orden k es una ecuación implícita que tiene la siguiente forma:

$$y^{i+1} = a_0(k)y^i + a_1(k)y^{i-1} + \dots + a_{k-1}(k)y^{i-k+1} + \Delta t b_{-1}(k)f(y^{i+1}, t^{i+1}) \quad (5.24)$$

donde la nomenclatura $a_i(k)$ pone de manifiesto que cada coeficiente depende del orden del método empleado. El método de Gear es A-estable para orden 1 y 2, es decir, no existe limitación del tamaño del paso temporal Δt para la estabilidad del proceso de integración. Pero es rígidamente estable para orden 3 a 6, es decir, no incluyen el eje imaginario del plano complejo en su región de estabilidad absoluta.

Los $k + 1$ coeficientes $a_0(k), \dots, a_{k-1}(k)$ y $b_{-1}(k)$ deben ser determinados de manera que la ecuación 5.24 sea exacta para soluciones polinómicas de grado k . La tabla 5.1 muestra los coeficientes para el algoritmo de orden 1 hasta 4. Para inicializar el método son necesarios k valores de y : $y^i, y^{i-1}, \dots, y^{i-k+1}$.

Tabla 5.1. Coeficientes de los algoritmos de Gear

| Orden | y^i | y^{i-1} | y^{i-2} | y^{i-3} | $\Delta t f^{i+1}$ |
|-------|-------|-----------|-----------|-----------|--------------------|
| 1° | 1 | | | | 1 |
| 2° | 4/3 | -1/3 | | | 2/3 |
| 3° | 18/11 | -9/11 | 2/11 | | 6/11 |
| 4° | 48/25 | -36/25 | 16/25 | -3/25 | 12/25 |

donde $f^{i+1} = f(y^{i+1}, t^{i+1})$

En tanto que los algoritmos de Gear son métodos multipaso implícitos, es necesario resolver un sistema de ecuaciones implícito en cada instante de tiempo. Podemos escribir la fórmula del siguiente modo:

$$y^{i+1} - b_{-1} \Delta t f(y^{i+1}, t^{i+1}) - \sum_{j=0}^{k-1} (a_j y^{i-j}) = 0 \quad (5.25)$$

Aplicando el algoritmo de Newton-Raphson a la ecuación 5.25 se llega a:

$$\Delta y^{i+1} = (1 - b_{-1} \frac{\partial f^{i+1}}{\partial y^{i+1}})^{-1} \left[y^{i+1} - \Delta t b_{-1} f^{i+1} - \sum_{j=0}^{k-1} (a_j y^{i-j}) \right] \quad (5.26)$$

La ecuación 5.26 es el corrector de Newton-Raphson para implementar el método de Gear.

La implementación del algoritmo presenta una serie de dificultades numéricas:

- La aplicación directa de los métodos BDF a problemas con restricciones en desplazamientos da lugar a dificultades por la amplificación del error numérico. Estas dificultades se pueden evitar reduciendo el valor numérico de la tolerancia del error en las iteraciones del método de Newton-Raphson asociado. Sin embargo, esto aumentará el número de iteraciones, disminuyendo la velocidad de cálculo [9].
- Se puede demostrar que para problemas DAE de índice m , la matriz Jacobiana empleada en el método de Newton-Raphson tiene una condición del orden de $O(1/(\Delta t^m))$. En consecuencia, la implementación práctica del método está limitada por los errores numéricos de redondeo debidos a tamaños pequeños del paso temporal [24].
- Pueden aparecer inestabilidades debidas a cambios repentinos en los valores de las variables del sistema como resultado de impactos o la aparición o desaparición repentina de restricciones. En cualquier momento en el que existe una situación de discontinuidad en la respuesta, el método BDF intenta ajustar un polinomio a través de dicha discontinuidad, por lo que el paso debe ser disminuido drásticamente. Esto produce una matriz de iteración mal condicionada, tal y como se ha justificado en el punto anterior, y el método de Newton-Raphson puede parar cerca de una solución y aun así ser incapaz de converger. Estos problemas pueden evitarse en cierta medida a costa de reinicializar la integración con condiciones iniciales consistentes que provienen de las derivadas de las ecuaciones de restricción. Esta reinicialización produce retrasos en el proceso de integración [24]. Otra forma de minimizar estos problemas es realizar un modelado suavizado de las discontinuidades. Por ejemplo, describiendo mediante una función arco tangente un impacto de tipo escalón.
- Los métodos multipaso como el BDF no se puede inicializar solos. Un método de orden k necesita $(k - 1)$ valores iniciales de la suficiente precisión que deben ser obtenidos por otros métodos que pueden hacer el método sensible a los valores iniciales. Además, este problema se agrava cuando o bien el paso temporal o el orden del método BDF se cambia durante el proceso de integración. La solución a esta dificultad pasa por iniciar el método con orden 1, utilizando condiciones iniciales consistentes obtenidas mediante un análisis estático previo [9].

5.5.2. Circuito de vía

En esta sección se va a describir el procedimiento mediante el cual se calculan los parámetros de la vía que intervienen en la cinemática del sistema (sección 5.3.1), en las ecuaciones de restricción (ecuaciones 5.3 y 5.4) y en los términos de las ecuaciones del movimiento asociados al giro relativo en dirección vertical entre cajas (ecuación 5.20).

En la figura 5.22 se muestra un trazado típico para la evaluación del comportamiento en curva de un vehículo ferroviario. Este trazado consiste en un tramo recto inicial,

seguido de una curva de transición, que enlaza con un tramo curvo de radio constante, para acabar con otra transición y finalmente un tramo recto.

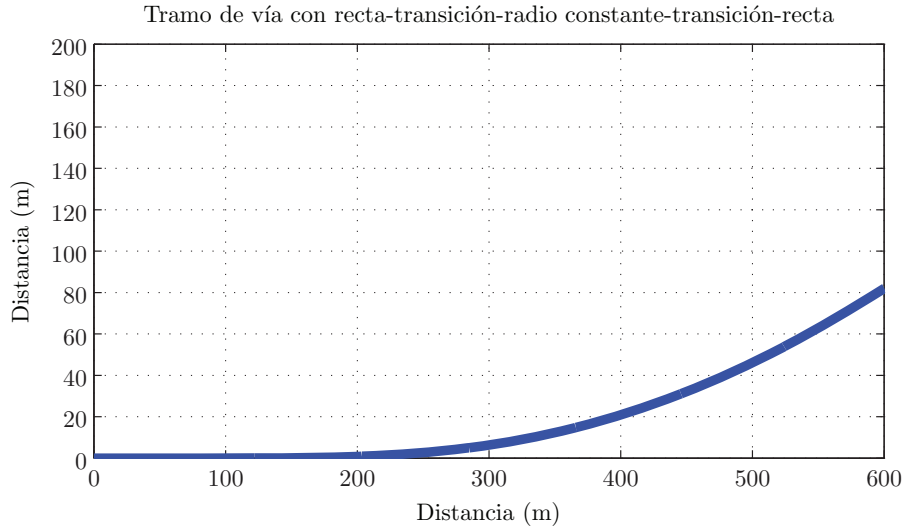


Figura 5.22. Circuito de vía

La variable que se suele emplear para definir un análisis dinámico en curva es la máxima aceleración lateral en el plano de la vía, a_{lat}^{via} , que es la aceleración lateral no compensada por el peralte de la curva. Esta variable se utiliza porque su valor viene fijado por las administraciones ferroviarias y las distintas normativas, ya que influye directamente sobre la seguridad de marcha y el ripado de los carriles [78]. La velocidad de paso del vehículo, V , necesaria para que se alcance dicha aceleración se puede calcular a partir de su definición, en función de los parámetros geométricos que caracterizan la curva:

$$a_{lat}^{via} = \frac{V^2}{R_c} \cos \alpha^x - g \cdot \sin \alpha^x \simeq \frac{V^2}{R_c} \cos \alpha^x - g \cdot \frac{a_p}{a_o} \quad (5.27)$$

En la figura 5.23 se muestran estos parámetros geométricos:

- α_j^x es el ángulo de peralte
- a_o , distancia transversal entre los puntos de contacto sobre los carriles.
- R_c , radio de la curva. En la figura 5.23 se denomina ρ_c de forma genérica dado que en los tramos de transición no tendrá un valor constante.
- a_p , altura de peralte.

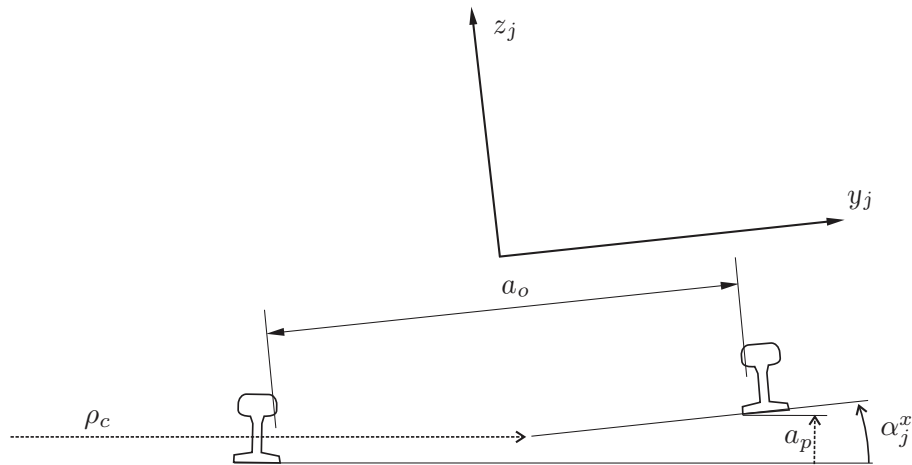
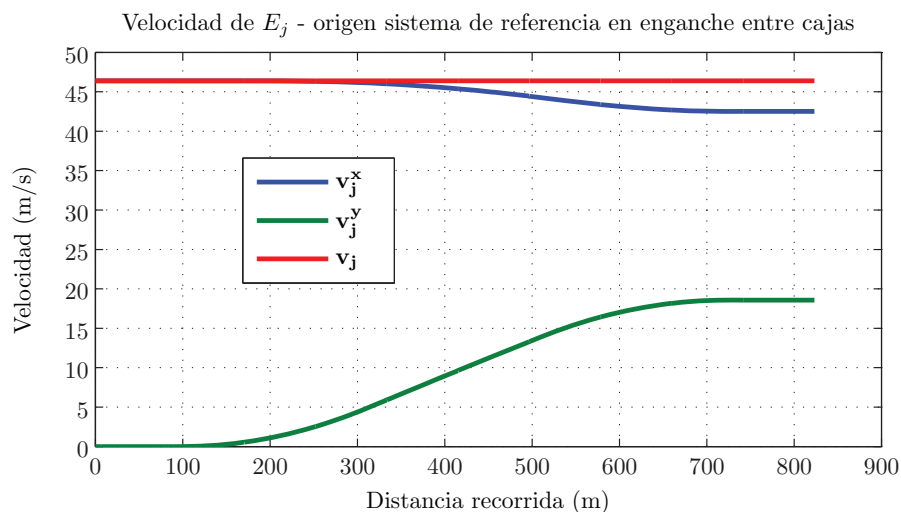


Figura 5.23. Parámetros de la curva

5.5.2.1. Cálculo de la cinemática de los sistemas de referencia

Para cada sistema de referencia (x_j, y_j, z_j) asociado a un enganche E_j se deben determinar la velocidad y aceleración de su origen, \mathbf{v}_j y $\dot{\mathbf{v}}_j$, así como su velocidad y aceleración angular, $\boldsymbol{\Omega}_j$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_j$, que intervienen en las ecuaciones de la sección 5.3.1. A modo de ejemplo, en las figuras 5.24 y 5.25 se muestran las evoluciones de la velocidad del punto E_j y de la velocidad angular asociada al sistema de referencia con origen en ese punto, para el circuito de vía descrito anteriormente.

Figura 5.24. Ejemplo de cálculo de la velocidad de E_j

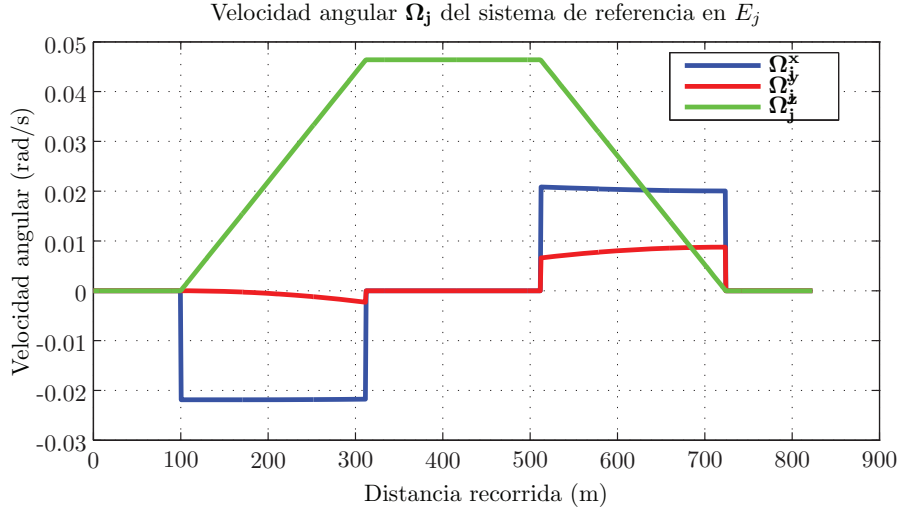


Figura 5.25. Ejemplo de cálculo de la velocidad angular del sistema de referencia basado en E_j

Se ha programado una rutina que permite calcular la cinemática de los sistemas de referencia asociados a la vía a partir las longitudes de cada tramo y de los parámetros geométricos mostrados en la figura 5.23. El tramo recto inicial debe alojar toda la composición y permitir que la integración se inicie con condiciones iniciales consistentes. También se definen las longitudes de los tramos curvos: de transición y de radio constante. Se verifica que la longitud del tramo de transición sea mayor que la longitud mínima exigible para mantener una velocidad de balanceo de la vía adecuada y se emplean clotoides con leyes de altura lineales para su definición, según procedimiento habitual de RENFE [27].

El cálculo se realiza a partir de la posición teórica del enganche en la vía, s , origen del sistema de referencia, calculada mediante la velocidad y el tiempo transcurrido en la simulación. Esta variable s permite determinar en qué tramo del circuito se encuentra el sistema de referencia y así poder aplicar las ecuaciones cinemáticas correspondientes a cada tipo de tramo: recto, clotoide o radio constante.

Los parámetros que se calculan son (ver figura 5.27 y figura 5.26):

- Coordenadas (x_{E_j}, y_{E_j}) que permiten determinar el vector de posición en coordenadas absolutas del enganche, \vec{r}_{E_j} .
- Giros, velocidades y aceleraciones del sistema de referencia en coordenadas locales respecto de la dirección vertical, $\alpha_j^z, \dot{\alpha}_j^z$ y $\ddot{\alpha}_j^z$, y de la dirección longitudinal, $\alpha_j^x, \dot{\alpha}_j^x$ y $\ddot{\alpha}_j^x$. En una primera aproximación no se han considerado rampas, de forma que los giros respecto de la dirección lateral son nulos. Con estos giros se calculan los términos de la matriz de transformación, \mathbf{T}_j (ecuación 5.6).

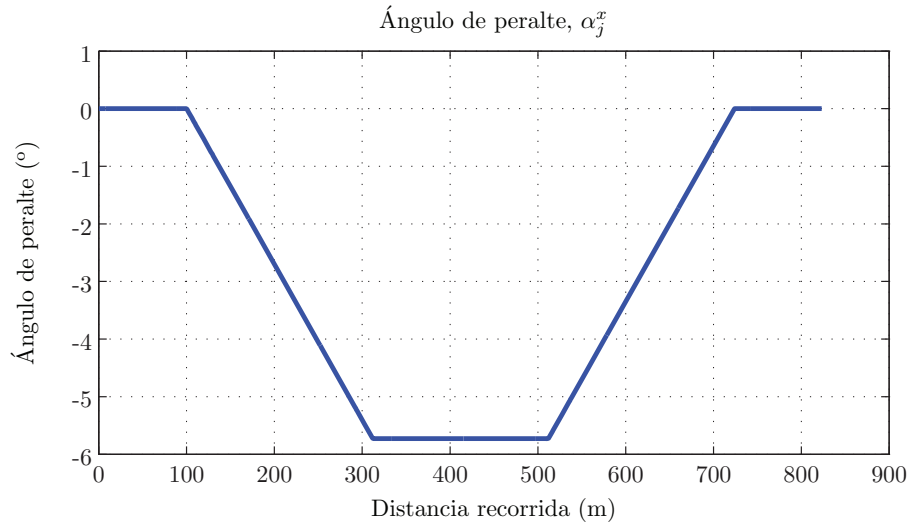


Figura 5.26. Ejemplo de cálculo del ángulo de peralte α_j^x

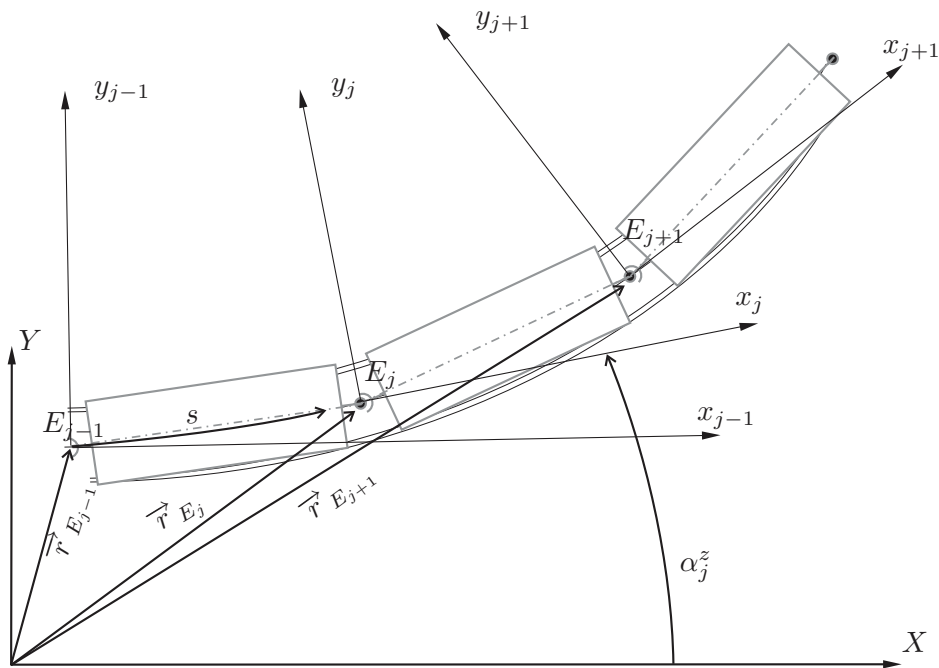


Figura 5.27. Cálculo de la cinemática de la vía

5.5.2.2. Cálculo de los giros ψ_{0j} y Θ_j

El giro ψ_{0j} se refiere al lazo que tendría el rodal al trazar una curva debido al mecanismo de guiado en caso de que los desplazamientos laterales de los enganches fuesen nulos. El ángulo Θ_j se refiere al giro relativo según la dirección vertical que aparece entre dos cajas debido al trazado de la curva, aunque los desplazamientos de los enganches fuesen nulos. En la figura 5.28 se muestran gráficamente.

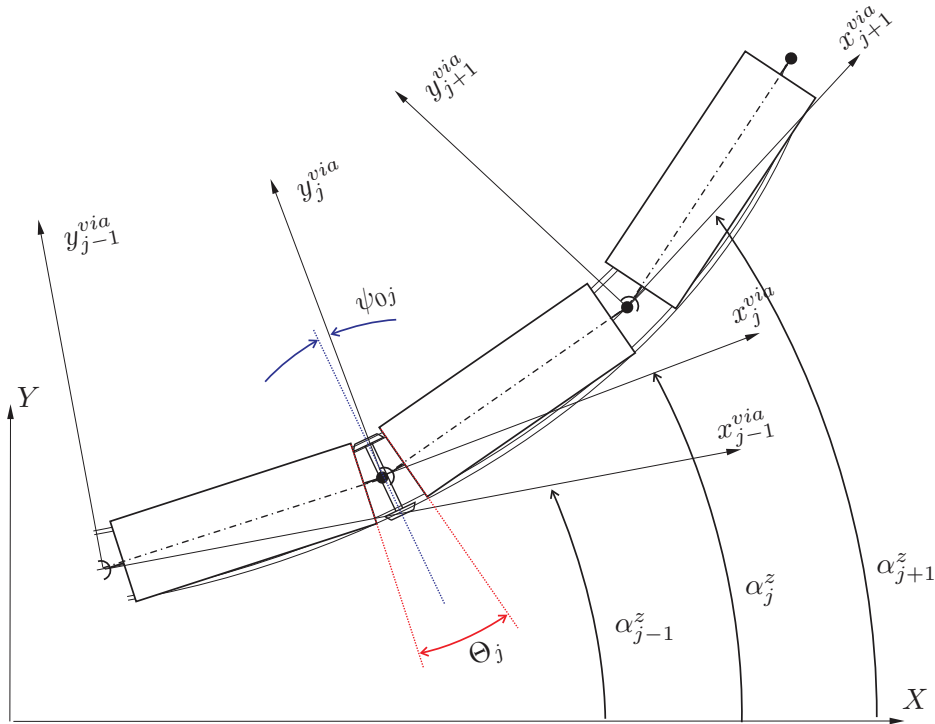


Figura 5.28. Cálculo de ψ_{0j} y de Θ_j

Tal y como se ha descrito en la sección 2.3.4, el mecanismo de guiado obliga al rodal a orientarse según la bisectriz del ángulo relativo entre dos cajas adyacentes. De este modo, el ángulo de ataque del rodal tiene un valor muy bajo. Desde un punto de vista físico, este ángulo de ataque corresponde con el giro relativo según el eje vertical respecto del sistema de referencia asociado al enganche y cuya dirección lateral se mantiene radial en todo instante. Este giro será nulo si la longitud de los coches adyacentes es la misma y el radio de la curva es constante, pero estas condiciones no se cumplen para el modelo desarrollado en la Tesis porque cada coche tiene una longitud distinta, o podría tenerla, y durante la transición el radio de curvatura varía.

El cálculo de este ángulo ψ_{0j} se puede abordar desde distintas aproximaciones. Se pueden emplear los vectores de posición que definen cada caja y que se calculan a partir de la diferencia entre los vectores de posición que apuntan a cada enganche: $\vec{r}_{E_j} - \vec{r}_{E_{j-1}}$.

Otra aproximación consiste en emplear los giros respecto de la dirección vertical de los propios sistemas de referencia: α_{j-1}^z , α_j^z y α_{j+1}^z , tal y como se muestra en la figura 5.28 y se expresa en la ecuación 5.28, para los rodales intermedios, y en la ecuación 5.29, para los rodales extremos.

Ambas aproximaciones ofrecen resultados prácticamente idénticos, y pese a que la primera es completamente exacta, se ha implementado la segunda dado que el coste computacional es menor. En la figura 5.29 se indica la evolución del valor de esta variable para el primer rodal de una composición en un tramo de vía con recta-transición-radio constante-transición-curva. Se puede observar que no es nulo en el tramo de radio constante, ya que depende de las longitudes de los coches adyacentes.

$$\psi_{oj} = \frac{\alpha_{j+1}^z + \alpha_{j-1}^z - 2\alpha_j^z}{4} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \psi_{o1} &= -\frac{\alpha_3^z + \alpha_1^z - 2\alpha_2^z}{4} \\ \psi_{oN} &= -\frac{\alpha_N^z + \alpha_{N-2}^z - 2\alpha_{N-1}^z}{4} \end{aligned} \quad (5.29)$$

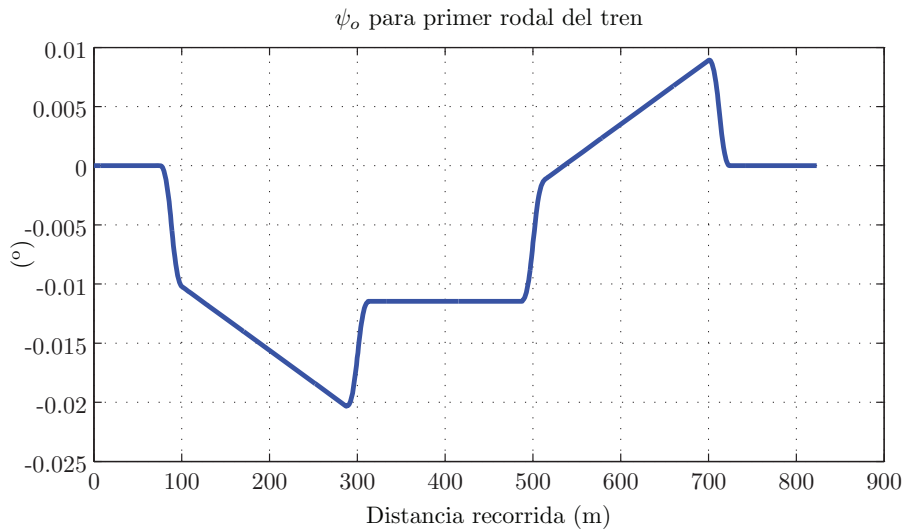


Figura 5.29. Ejemplo de cálculo de ψ_{o1}

El giro Θ_j sólo tiene sentido para las posiciones intermedias. Siguiendo una aproximación análoga a la anterior, este giro se puede calcular con la suficiente precisión empleando la siguiente ecuación:

$$\Theta_j = \alpha_j^z - \alpha_{j-1}^z \quad (5.30)$$

5.6. Modelo lineal

En esta sección se va a desarrollar el modelo lineal que permitirá realizar un análisis de los modos de vibración del tren en el próximo capítulo. Para ello se van a considerar varias hipótesis simplificativas:

- Se va a emplear un modelo lineal de contacto y perfiles de rueda y carril simplificados.
- Se va a asumir la hipótesis de pequeños desplazamientos a la hora de desarrollar las ecuaciones del movimiento, por lo que no se van a introducir los términos cinemáticos debidos a la presencia de una curva.
- Se va a linealizar el comportamiento de todos los elementos de suspensión y uniones del tren.

Sin embargo, se van a mantener las hipótesis iniciales empleadas para el desarrollo de modelo completo y descritas en la sección 5.2.

5.6.1. Formulación. Hipótesis simplificativas

Para derivar las ecuaciones del movimiento del rodal en el modelo lineal se va a emplear la aproximación al problema de contacto rueda-carril establecida por Joly en la referencia [58] y descrita en la sección 3.4.1. En la figura 5.30 se muestran los parámetros empleados en dicha aproximación para el rodal:

- γ_o es la conicidad de la rueda en la posición nominal centrada sobre la vía.
- e_o es la semidistancia transversal entre los puntos de contacto.
- ρ y ρ' son los radios de curvatura de los perfiles de la rueda y del carril en el punto de contacto.
- r_o es el radio nominal de la rueda.

Según este modelo lineal, las ecuaciones del movimiento de un eje montado se pueden expresar en la forma de la ecuación 3.5. Para tener en cuenta el giro independiente de las ruedas en el caso de un rodal, se obliga a que las fuerzas de contacto en dirección longitudinal sean nulas haciendo que el coeficiente f_{11} sea cero en esta ecuación, tal y como se justificó en la sección 3.6. Así, las ecuaciones del movimiento lineales para un rodal se pueden expresar como:

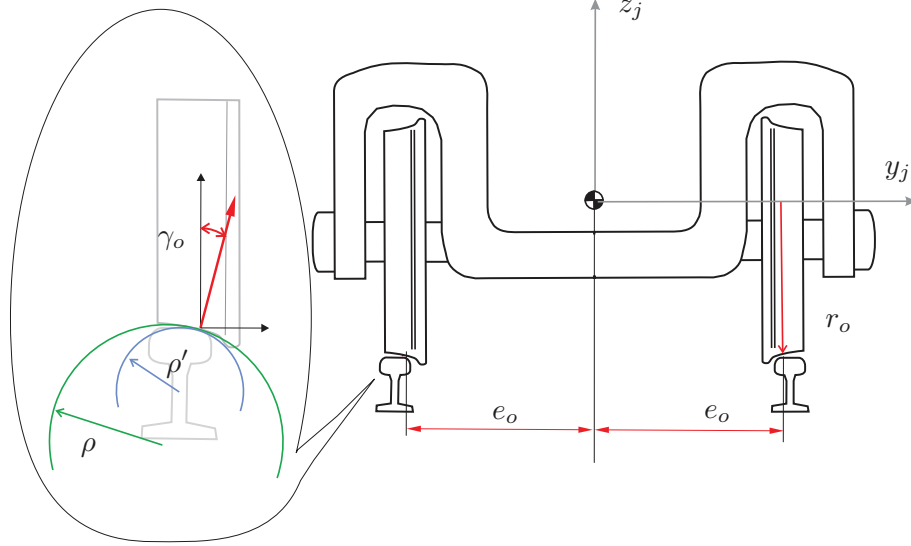


Figura 5.30. Parámetros de contacto para un rodal empleados en la aproximación de Joly

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} m^e + I_x \left(\frac{\gamma_o}{e_o - r_o} \right)^2 & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_j \\ \ddot{\psi}_j \end{Bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{2f_{22}e_o}{V(e_o - r_o)\gamma_o} & \frac{2f_{23}}{V} - \frac{I_y V \gamma_o}{e_o r_o - r_o^2 \gamma_o} \\ \frac{I_y V \gamma_o}{e_o r_o - r_o^2 \gamma_o} - \frac{2f_{23}e_o}{V(e_o - r_o)\gamma_o} & \frac{2f_{33}}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{\psi}_j \end{Bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{W}{\rho - \rho'} \left(\frac{e_o + \rho \gamma_o}{e_o - r_o} \right)^2 - \frac{2f_{23}\gamma_e}{\rho \gamma_o r_o} & -2f_{22} \\ -\frac{2f_{33}\gamma_e}{\rho \gamma_o r_o} & 2f_{23} + W\gamma_o \{(R + 2r_o)\gamma_o - e_o\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ \psi_j \end{Bmatrix} \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

donde

- m^e , I_x y I_z son la masa del rodal y sus momentos de inercia respecto a los ejes x_j y z_j .
- I_y es el momento de inercia de las masas rotativas respecto del eje y_j .
- W es la fuerza gravitatoria aplicada sobre el rodal.
- f_{22} , f_{23} y f_{33} son los coeficientes longitudinal, transversal, cruzado y de spin, respectivamente, del modelo lineal de contacto de Kalker.
- V es la velocidad del tren.
- γ_e es la conicidad equivalente.

5.6.2. Ecuación del movimiento del modelo lineal

Mediante el empleo de estas ecuaciones del movimiento para el rodal se eliminan las ecuaciones del movimiento para las coordenadas u_j , w_j , θ_j y ψ_j en el sistema de ecuaciones 5.18 y se sustituyen por las ecuaciones 5.31. A estas ecuaciones se les añaden los términos provenientes de los elementos de suspensión y unión obtenidos a partir de la función de disipación de Rayleigh y la función potencial elástica asociada, tal y como se hacía en el modelo general, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \left[m^e + I_x \left(\frac{\gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} \right)^2 \right] \ddot{u}_j + \frac{2 f_{22} e_o}{V (e_o - r_o \gamma_o)} \dot{u}_j + \\ & \quad + \left(\frac{2 f_{23}}{V} - \frac{I_y V \gamma_o}{e_o r_o - r_o^2 \gamma_o} \right) \dot{\psi}_j + \\ & \quad + \left(\frac{W}{\rho - \rho'} \left(\frac{e_o + \rho \gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} \right)^2 - \frac{2 f_{23} \gamma_e}{\rho \gamma_o r_o} \right) u_j - 2 f_{22} \psi_j + \\ & \quad + 2 k_y (-y_j + b_j \phi_j + u_j) + 2 d_y (-\dot{y}_j + b_j \dot{\phi}_j + \dot{u}_j) = 0 \quad (5.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z \ddot{\psi}_j + \left(\frac{I_y V \gamma_o}{r_o e_o - r_o^2 \gamma_o} - \frac{2 f_{23} e_o}{V (e_o - r_o \gamma_o)} \right) \dot{u}_j + \frac{2 f_{33}}{V} \dot{\psi}_j - \\ - \frac{2 f_{33} \gamma_e}{\rho \gamma_o r_o} u_j + (2 f_{23} + W \gamma_o \{ (R + 2 r_o) \gamma_o - e_o \}) \psi_j = \lambda_j^\psi \quad (5.33) \end{aligned}$$

Agrupando los términos, estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{UU} & 0 \\ 0 & M_{\Psi\Psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_j \\ \ddot{\psi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{UU} & D_{U\Psi} \\ D_{\Psi U} & D_{\Psi\Psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{\psi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{UU} & K_{U\Psi} \\ K_{\Psi U} & K_{\Psi\Psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ \psi_j \end{Bmatrix} + \\ & \quad + \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_j} \\ \frac{\partial U}{\partial \psi_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}_j} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda_j^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi (y_{j+1}, y_j, y_{j-1}, \psi_j)}{\partial \psi_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.34) \end{aligned}$$

La obtención de los términos de estas matrices, junto con las ecuaciones del movimiento para las coordenadas de las cajas, (y, z, ϕ) , se realiza mediante el mismo procedimiento empleado en el modelo no lineal, pero teniendo en cuenta las simplificaciones establecidas para la linealización.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} + \frac{\partial U}{\partial y_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_j} + \\ + \lambda_{j-1} \frac{\partial \Gamma^\psi(y_j, y_{j-1}, y_{j-2}, \psi_{j-1})}{\partial y_j} + \lambda_j \frac{\partial \Gamma^\psi(y_{j+1}, y_j, y_{j-1}, \psi_j)}{\partial y_j} + \\ + \lambda_{j+1} \frac{\partial \Gamma^\psi(y_{j+2}, y_{j+1}, y_j, \psi_{j+1})}{\partial y_j} = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_j} + \frac{\partial U}{\partial z_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_j} = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_j} + \frac{\partial U}{\partial \phi_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}_j} = 0 \quad (5.37)$$

Las expresiones de la energía potencial, U , y de la función de disipación, R , son:

$$\begin{aligned} U = \sum_{j=1}^N \{k_j^y (y_j - b_j \phi_j - u_j + b_j \theta_j)^2\} + \\ + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{k_j^z}{2} [(z_j - c_j \phi_j - w_j + c_j \theta_j)^2 + (z_j - c_j \phi_j - w_j - c_j \theta_j)^2] \right\} + \\ + \sum_{j=2}^{N-1} \left\{ \frac{k_j^\psi}{2} \left[\frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{a_{j-1}} \right]^2 + \frac{k_j^\phi}{2} (\phi_{j+1} - \phi_j)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} R = \sum_{j=1}^N \left\{ d_j^y (\dot{y}_j - b_j \dot{\phi}_j - \dot{u}_j + b_j \dot{\theta}_j)^2 \right\} + \\ + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d_j^z}{2} [(\dot{z}_j - c_j \dot{\phi}_j - \dot{w}_j + c_j \dot{\theta}_j)^2 + (\dot{z}_j - c_j \dot{\phi}_j - \dot{w}_j - c_j \dot{\theta}_j)^2] \right\} + \\ + \sum_{j=2}^{N-1} \left\{ \frac{d_j^\psi}{2} \left[\frac{\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j}{a_j} - \frac{\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1}}{a_{j-1}} \right]^2 + \frac{d_j^\phi}{2} (\dot{\phi}_{j+1} - \dot{\phi}_j)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde

- k_j^y , k_j^z , d_j^y y d_j^z son la rigidez (k) y el amortiguamiento viscoso (d) de la suspensión j en las direcciones lateral, y , y vertical, z
- c_j es la semidistancia entre balonas de la suspensión j
- b_j es la altura del plano de la suspensión respecto del gancho E_j
- k_j^ψ , k_j^ϕ , d_j^ψ y d_j^ϕ son las propiedades viscoelásticas de las uniones entre cajas, según los giros relativos en direcciones, x , (superíndice ϕ) y z (superíndice ψ)

Teniendo en cuenta que las coordenadas w_j y θ_j son de un orden de magnitud inferior numéricamente, los términos de las ecuaciones 5.35 a 5.37, y de la ecuación 5.34, son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_j} &= 2 k_y (y_j - b_j \phi_j - u_j) + 2 d_y (\dot{y}_j - b_j \dot{\phi}_j - \dot{u}_j) + \\
&+ \frac{k_{j-1}^\psi}{a_{j-1}} \left[\frac{y_j - y_{j-1}}{a_{j-1}} - \frac{y_{j-1} - y_{j-2}}{a_{j-2}} \right] - k_j^\psi \left(\frac{1}{a_{j-1}} + \frac{1}{a_j} \right) \left[\frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{a_{j-1}} \right] + \\
&\quad + \frac{k_{j+1}^\psi}{a_j} \left[\frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{a_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} \right] + \\
&+ \frac{d_{j-1}^\psi}{a_{j-1}} \left[\frac{\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1}}{a_{j-1}} - \frac{\dot{y}_{j-1} - \dot{y}_{j-2}}{a_{j-2}} \right] - d_j^\psi \left(\frac{1}{a_{j-1}} + \frac{1}{a_j} \right) \left[\frac{\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j}{a_j} - \frac{\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1}}{a_{j-1}} \right] + \\
&\quad + \frac{d_{j+1}^\psi}{a_j} \left[\frac{\dot{y}_{j+2} - \dot{y}_{j+1}}{a_{j+1}} - \frac{\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j}{a_j} \right] \quad (5.40)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_j} = 2 k_z z_j + 2 d_z \dot{z}_j \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \phi_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}_j} &= 2 k_y (-b_j y_j + b_j^2 \phi_j + b_j u_j) + 2 k_z c_j^2 \phi_j + \\
&\quad + 2 d_y (-b_j \dot{y}_j + b_j^2 \dot{\phi}_j + b_j \dot{u}_j) + 2 d_z c_j^2 \dot{\phi}_j - \\
&\quad - k_j^\phi (\phi_{j+1} - \phi_j) + k_{j-1}^\phi (\phi_j - \phi_{j-1}) \\
&\quad - d_j^\phi (\dot{\phi}_{j+1} - \dot{\phi}_j) + d_{j-1}^\phi (\dot{\phi}_j - \dot{\phi}_{j-1}) \quad (5.42)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_j} = 2 k_y (-y_j + b_j \phi_j + u_j) + 2 d_y (-\dot{y}_j + b_j \dot{\phi}_j + \dot{u}_j) \quad (5.43)$$

La energía cinética de las cajas se calcula a partir de su masa m_j^{cb} y de sus momentos principales de inercia, (I_j^x , I_j^y y I_j^z), tal y como sigue:

$$T = \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} m_j^{cb} (\mathbf{v}_j^G)^2 + \frac{1}{2} (\omega_j^{cb})^T \begin{bmatrix} I_j^x & 0 & 0 \\ 0 & I_j^y & 0 \\ 0 & 0 & I_j^z \end{bmatrix} \omega_j^{cb} \right\} \quad (5.44)$$

Las velocidades de los *cdm* de las cajas y sus velocidades angulares se calculan teniendo en cuenta la hipótesis de pequeños desplazamientos según las expresiones:

$$\mathbf{v}_j^G = \left\{ \begin{array}{c} V \\ \frac{1}{2} (\dot{y}_j + \dot{y}_{j+1}) - h_j \dot{\phi}_j \\ \frac{1}{2} (\dot{z}_j + \dot{z}_{j+1}) \end{array} \right\} \quad (5.45)$$

$$\omega_j^{cb} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\phi}_j \\ (\dot{z}_j - \dot{z}_{j+1})/a_j \\ (\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j)/a_j \end{array} \right\} \quad (5.46)$$

donde

- h_j es la altura del *cdm* respecto del enganche.
- a_j es la distancia entre los enganches j y $j + 1$.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 5.44, se obtiene la energía cinética de las cajas, cuya contribución a las ecuaciones 5.35 a 5.37 es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} &= \frac{1}{2} m_j^{cb} \left[\frac{1}{2} (\ddot{y}_j + \ddot{y}_{j+1}) - h_j \ddot{\phi}_j \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} m_{j-1}^{cb} \left[\frac{1}{2} (\ddot{y}_{j-1} + \ddot{y}_j) - h_{j-1} \ddot{\phi}_{j-1} \right] + \\ &\quad + I_{j-1}^z \left[(\ddot{y}_j - \ddot{y}_{j-1}) / a_{j-1}^2 \right] - I_j^z \left[(\ddot{y}_{j+1} - \ddot{y}_j) / a_j^2 \right] \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_j} &= \frac{1}{2} m_j^{cb} (\ddot{z}_j + \ddot{z}_{j+1}) + \frac{1}{2} m_{j-1}^{cb} (\ddot{z}_{j-1} + \ddot{z}_j) + \\ &\quad + I_j^y \left[(\ddot{z}_j - \ddot{z}_{j+1}) / a_j^2 \right] - I_{j-1}^y \left[(\ddot{z}_{j-1} - \ddot{z}_j) / a_{j-1}^2 \right] \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_j} = I_j^x \ddot{\phi}_j - m_j^{cb} h_j \left[\frac{1}{2} (\dot{y}_j + \dot{y}_{j+1}) - h_j \ddot{\phi}_j \right] \quad (5.49)$$

Mediante el empleo de la ecuación de restricción 5.3, y las expresiones derivadas de las ecuaciones 5.40 hasta 5.43, y de 5.47 hasta 5.49, se pueden escribir las ecuaciones del movimiento tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} m_j^{cb} \left[\frac{1}{2} (\ddot{y}_j + \ddot{y}_{j+1}) - h_j \ddot{\phi}_j \right] + \frac{1}{2} m_{j-1}^{cb} \left[\frac{1}{2} (\ddot{y}_{j-1} + \ddot{y}_j) - h_{j-1} \ddot{\phi}_{j-1} \right] + \\ &\quad + I_{j-1}^z \left[\frac{\ddot{y}_j - \ddot{y}_{j-1}}{a_{j-1}^2} \right] - I_j^z \left[\frac{\ddot{y}_{j+1} - \ddot{y}_j}{a_j^2} \right] + 2 k_y (y_j - b_j \phi_j - u_j) + \\ &\quad + 2 d_y (\dot{y}_j - b_j \dot{\phi}_j - \dot{u}_j) - k_j^\psi \left(\frac{1}{a_{j-1}} + \frac{1}{a_j} \right) \left[\frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{a_{j-1}} \right] + \\ &\quad + \frac{k_{j-1}^\psi}{a_{j-1}} \left[\frac{y_j - y_{j-1}}{a_{j-1}} - \frac{y_{j-1} - y_{j-2}}{a_{j-2}} \right] + \frac{k_{j+1}^\psi}{a_j} \left[\frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{a_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} \right] + \\ &\quad + \frac{d_{j-1}^\psi}{a_{j-1}} \left[\frac{\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1}}{a_{j-1}} - \frac{\dot{y}_{j-1} - \dot{y}_{j-2}}{a_{j-2}} \right] + \frac{d_{j+1}^\psi}{a_j} \left[\frac{\dot{y}_{j+2} - \dot{y}_{j+1}}{a_{j+1}} - \frac{\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j}{a_j} \right] + \\ &\quad - d_j^\psi \left(\frac{1}{a_{j-1}} + \frac{1}{a_j} \right) \left[\frac{\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j}{a_j} - \frac{\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1}}{a_{j-1}} \right] + \\ &\quad + \lambda_{j-1} \frac{1}{2 a_{j-1}} + \lambda_j \left(\frac{1}{2 a_{j-1}} - \frac{1}{2 a_j} \right) - \lambda_{j+1} \frac{1}{2 a_j} = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_j^{cb}(\ddot{z}_j + \ddot{z}_{j+1}) + \frac{1}{2}m_{j-1}^{cb}(\ddot{z}_{j-1} + \ddot{z}_j) + I_j^y [(\ddot{z}_j - \ddot{z}_{j+1})/a_j^2] - \\ - I_{j-1}^y [(\ddot{z}_{j-1} - \ddot{z}_j)/a_{j-1}^2] + 2k_z z_j + 2d_z \dot{z}_j = 0 \quad (5.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_j^x \ddot{\phi}_j - m_j^{cb} h_j \left[\frac{1}{2}(\dot{y}_j + \dot{y}_{j+1}) - h_j \ddot{\phi}_j \right] + \\ + 2d_z c_j^2 \dot{\phi}_j - d_j^\phi (\dot{\phi}_{j+1} - \dot{\phi}_j) + d_{j-1}^\phi (\dot{\phi}_j - \dot{\phi}_{j-1}) + \\ + 2d_y(-b_j \dot{y}_j + b_j^2 \dot{\phi}_j + b_j \dot{u}_j) - k_j^\phi (\phi_{j+1} - \phi_j) + \\ + 2k_y(-b_j y_j + b_j^2 \phi_j + b_j u_j) + 2k_z c_j^2 \phi_j + k_{j-1}^\phi (\phi_j - \phi_{j-1}) = 0 \quad (5.52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[m^e + I_x \left(\frac{\gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} \right)^2 \right] \ddot{u}_j + \frac{2f_{22} e_o}{V(e_o - r_o \gamma_o)} \dot{u}_j + \\ + \left(\frac{2f_{23}}{V} - \frac{I_y V \gamma_o}{e_o r_o - r_o^2 \gamma_o} \right) \dot{\psi}_j + \\ + \left(\frac{W}{\rho - \rho'} \left(\frac{e_o + \rho \gamma_o}{e_o - r_o \gamma_o} \right)^2 - \frac{2f_{23} \gamma_e}{\rho \gamma_o r_o} \right) u_j - 2f_{22} \psi_j + \\ + 2k_y(-y_j + b_j \phi_j + u_j) + 2d_y(-\dot{y}_j + b_j \dot{\phi}_j + \dot{u}_j) = 0 \quad (5.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z \ddot{\psi}_j + \left(\frac{I_y V \gamma_o}{r_o e_o - r_o^2 \gamma_o} - \frac{2f_{23} e_o}{V(e_o - r_o \gamma_o)} \right) \dot{u}_j + \frac{2f_{33}}{V} \dot{\psi}_j - \\ - \frac{2f_{33} \gamma_e}{\rho \gamma_o r_o} u_j + (2f_{23} + W \gamma_o \{(R + 2r_o)\gamma_o - e_o\}) \psi_j = \lambda_j \quad (5.54) \end{aligned}$$

La aplicación de estas simplificaciones sobre las ecuaciones de los coches extremos, descritas en la sección 5.4.4, conduce a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1^{cb} \left[\frac{1}{2}(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) - h_1 \ddot{\phi}_1 \right] - I_1^z [(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1)/a_1^2] + \\ + 2k_y(y_1 - b_1 \phi_1 - u_1) + 2d_y(\dot{y}_1 - b_1 \dot{\phi}_1 - \dot{u}_1) + \\ + \frac{k_2^\psi}{a_1} \left[\frac{y_3 - y_2}{a_2} - \frac{y_2 - y_1}{a_1} \right] + \frac{d_2^\psi}{a_1} \left[\frac{\dot{y}_3 - \dot{y}_2}{a_2} - \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{a_1} \right] - \\ - \lambda_1 \frac{3}{2a_1} - \lambda_2 \frac{1}{2a_1} = 0 \quad (5.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}m_2^{cb} \left[\frac{1}{2}(\ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) - h_2 \ddot{\phi}_2 \right] + \frac{1}{2}m_1^{cb} \left[\frac{1}{2}(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) - h_1 \ddot{\phi}_1 \right] + I_1^z [(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1)/a_1^2] - \\
& - I_2^z [(\ddot{y}_3 - \ddot{y}_2)/a_2^2] + 2k_y(y_2 - b_2 \phi_2 - u_2) + 2d_y(\dot{y}_2 - b_2 \dot{\phi}_2 - \dot{u}_2) - \\
& - k_2^\psi \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \left[\frac{y_3 - y_2}{a_2} - \frac{y_2 - y_1}{a_1} \right] + \frac{k_3^\psi}{a_2} \left[\frac{y_4 - y_3}{a_3} - \frac{y_3 - y_2}{a_2} \right] - \\
& - d_2^\psi \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \left[\frac{\dot{y}_3 - \dot{y}_2}{a_2} - \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{a_{j-1}} \right] + \frac{d_3^\psi}{a_2} \left[\frac{\dot{y}_4 - \dot{y}_3}{a_3} - \frac{\dot{y}_3 - \dot{y}_2}{a_2} \right] + \\
& + \lambda_1 \left(\frac{3}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{1}{2a_1} - \frac{1}{2a_2} \right) - \lambda_3 \frac{1}{2a_1} = 0 \quad (5.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}m_3^{cb} \left[\frac{1}{2}(\ddot{y}_3 + \ddot{y}_4) - h_3 \ddot{\phi}_3 \right] + \frac{1}{2}m_2^{cb} \left[\frac{1}{2}(\ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) - h_2 \ddot{\phi}_2 \right] + I_2^z [(\ddot{y}_3 - \ddot{y}_2)/a_2^2] - \\
& - I_3^z [(\ddot{y}_4 - \ddot{y}_3)/a_3^2] + 2k_y(y_3 - b_3 \phi_3 - u_3) + 2d_y(\dot{y}_3 - b_3 \dot{\phi}_3 - \dot{u}_3) + \\
& + \frac{k_2^\psi}{a_2} \left[\frac{y_3 - y_2}{a_2} - \frac{y_2 - y_1}{a_1} \right] - k_3^\psi \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \left[\frac{y_4 - y_3}{a_3} - \frac{y_3 - y_2}{a_2} \right] + \\
& + \frac{k_4^\psi}{a_3} \left[\frac{y_5 - y_4}{a_4} - \frac{y_4 - y_3}{a_3} \right] + \frac{d_2^\psi}{a_2} \left[\frac{\dot{y}_3 - \dot{y}_2}{a_2} - \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{a_1} \right] - \\
& - d_3^\psi \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \left[\frac{\dot{y}_4 - \dot{y}_3}{a_3} - \frac{\dot{y}_3 - \dot{y}_2}{a_2} \right] + \frac{d_4^\psi}{a_3} \left[\frac{\dot{y}_5 - \dot{y}_4}{a_4} - \frac{\dot{y}_4 - \dot{y}_3}{a_3} \right] - \\
& - \lambda_1 \frac{1}{2a_2} + \lambda_2 \frac{1}{2a_2} + \lambda_3 \left(\frac{1}{2a_2} - \frac{1}{2a_3} \right) - \lambda_4 \frac{1}{2a_3} = 0 \quad (5.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}m_{N-3}^{cb} \left[\frac{1}{2}(\ddot{y}_{N-3} + \ddot{y}_{N-2}) - h_{N-3} \ddot{\phi}_{N-3} \right] + \\
& + I_{N-3}^z [(\ddot{y}_{N-2} - \ddot{y}_{N-3})/a_{N-3}^2] - I_{N-2}^z [(\ddot{y}_{N-1} - \ddot{y}_{N-2})/a_{N-2}^2] + \\
& + 2k_y(y_{N-2} - b_{N-2} \phi_{N-2} - u_{N-2}) + 2d_y(\dot{y}_{N-2} - b_{N-2} \dot{\phi}_{N-2} - \dot{u}_{N-2}) + \\
& + \frac{k_{N-3}^\psi}{a_{N-3}} \left[\frac{y_{N-2} - y_{N-3}}{a_{N-3}} - \frac{y_{N-3} - y_{N-4}}{a_{N-4}} \right] + \frac{k_{N-1}^\psi}{a_{N-2}} \left[\frac{y_N - y_{N-1}}{a_{N-1}} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{a_{N-2}} \right] - \\
& - k_{N-2}^\psi \left(\frac{1}{a_{N-3}} + \frac{1}{a_{N-2}} \right) \left[\frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{a_{N-2}} - \frac{y_{N-2} - y_{N-3}}{a_{N-3}} \right] + \\
& + \frac{d_{N-3}^\psi}{a_{N-3}} \left[\frac{\dot{y}_{N-2} - \dot{y}_{N-3}}{a_{N-3}} - \frac{\dot{y}_{N-3} - \dot{y}_{N-4}}{a_{N-4}} \right] + \frac{d_{N-1}^\psi}{a_{N-2}} \left[\frac{\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}}{a_{N-1}} - \frac{\dot{y}_{N-1} - \dot{y}_{N-2}}{a_{N-2}} \right] - \\
& - d_{N-2}^\psi \left(\frac{1}{a_{N-3}} + \frac{1}{a_{N-2}} \right) \left[\frac{\dot{y}_{N-1} - \dot{y}_{N-2}}{a_{N-2}} - \frac{\dot{y}_{N-2} - \dot{y}_{N-3}}{a_{N-3}} \right] + \\
& + \lambda_N \frac{1}{2a_{N-2}} - \lambda_{N-1} \frac{1}{2a_{N-2}} + \lambda_{N-2} \left(\frac{1}{2a_{N-3}} - \frac{1}{2a_{N-2}} \right) + \lambda_{N-3} \frac{1}{2a_{N-3}} = 0 \quad (5.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_{N-1}^{cb} \left[\frac{1}{2} (\ddot{y}_{N-1} + \ddot{y}_N) - h_{N-1} \ddot{\phi}_{N-1} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{2} m_{N-2}^{cb} \left[\frac{1}{2} (\ddot{y}_{N-2} + \ddot{y}_{N-1}) - h_{N-2} \ddot{\phi}_{N-2} \right] + \\
& \quad + I_{N-2}^z [(\ddot{y}_{N-1} - \ddot{y}_{N-2}) / a_{N-2}^2] - I_{N-1}^z [(\ddot{y}_N - \ddot{y}_{N-1}) / a_{N-1}^2] + \\
& \quad + 2 k_y (y_{N-1} - b_{N-1} \phi_{N-1} - u_{N-1}) + 2 d_y (\dot{y}_{N-1} - b_{N-1} \dot{\phi}_{N-1} - \dot{u}_{N-1}) + \\
& + \frac{k_{N-2}^\psi}{a_{N-2}} \left[\frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{a_{N-2}} - \frac{y_{N-2} - y_{N-3}}{a_{N-3}} \right] + \frac{d_{N-2}^\psi}{a_{N-2}} \left[\frac{\dot{y}_{N-1} - \dot{y}_{N-2}}{a_{N-2}} - \frac{\dot{y}_{N-2} - \dot{y}_{N-3}}{a_{N-3}} \right] - \\
& \quad - k_{N-1}^\psi \left(\frac{1}{a_{N-2}} + \frac{1}{a_{N-1}} \right) \left[\frac{y_N - y_{N-1}}{a_{N-1}} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{a_{N-2}} \right] + \\
& \quad - d_{N-1}^\psi \left(\frac{1}{a_{N-2}} + \frac{1}{a_{N-1}} \right) \left[\frac{\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}}{a_{N-1}} - \frac{\dot{y}_{N-1} - \dot{y}_{N-2}}{a_{N-2}} \right] + \\
& - \lambda_N \left(\frac{3}{2 a_{N-1}} + \frac{1}{2 a_{N-2}} \right) + \lambda_{N-1} \left(\frac{1}{2 a_{N-2}} - \frac{1}{2 a_{N-1}} \right) + \lambda_{N-2} \frac{1}{2 a_{N-2}} = 0 \quad (5.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_{N-1}^{cb} \left[\frac{1}{2} (\ddot{y}_{N-1} + \ddot{y}_N) - h_{N-1} \ddot{\phi}_{N-1} \right] + I_{N-1}^z [(\ddot{y}_N - \ddot{y}_{N-1}) / a_{N-1}^2] + \\
& \quad + 2 k_y (y_N - b_N \phi_N - u_N) + 2 d_y (\dot{y}_N - b_N \dot{\phi}_N - \dot{u}_N) + \\
& + \frac{k_{N-1}^\psi}{a_{N-1}} \left[\frac{y_N - y_{N-1}}{a_{N-1}} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{a_{N-2}} \right] + \frac{d_{N-1}^\psi}{a_{N-1}} \left[\frac{\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}}{a_{N-1}} - \frac{\dot{y}_{N-1} - \dot{y}_{N-2}}{a_{N-2}} \right] + \\
& \quad + \lambda_N \frac{3}{2 a_{N-1}} + \lambda_{N-1} \frac{1}{2 a_{N-1}} = 0 \quad (5.60)
\end{aligned}$$

5.6.3. Planteamiento matricial

Para poder realizar un análisis modal del tren, se deriva un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de las ecuaciones del movimiento anteriores. Este sistema tiene la forma habitual:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

donde \mathbf{x} contiene las coordenadas independientes del modelo lineal, \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{D} es la matriz de amortiguamiento y \mathbf{K} es la matriz de rigidez. Las coordenadas independientes en el vector \mathbf{x} son y_j , z_j , ϕ_j y u_j desde $j=1$ a N .

Las consideraciones necesarias para llevar a cabo esta transformación son:

- El multiplicador de Lagrange asociado a la coordenada ψ_j se sustituye por su expresión en función del resto de coordenadas obtenida de la ecuación 5.33. Esta expresión se sustituye en las ecuaciones de las coordenadas y_j del sistema 5.18.
- Las coordenadas del rodal se reducen a u_j dado que las coordenadas w_j y θ_j son dependientes según las ecuaciones 3.4, y la coordenada ψ_j se sustituye por

su expresión en función de las coordenadas y_j de los coches adyacentes al rodal, ecuaciones 5.3 y 5.4. Sustituyendo en la ecuación 5.34, para un rodal intermedio la expresión de su ecuación del movimiento sería:

$$\begin{aligned}
& M_j^{uu} \ddot{u}_j + D_j^{uu} \dot{u}_j + \left(\frac{-D_j^{u\psi}}{2a_{j-1}} \dot{y}_{j-1} + \frac{D_j^{u\psi}}{2} \left(\frac{1}{a_{j-1}} - \frac{1}{a_j} \right) \dot{y}_j + \frac{D_j^{u\psi}}{2a_j} \dot{y}_{j+1} \right) + \dots \\
& K_j^{uu} u_j + \left(\frac{-K_j^{u\psi}}{2a_{j-1}} y_{j-1} + \frac{K_j^{u\psi}}{2} \left(\frac{1}{a_{j-1}} - \frac{1}{a_j} \right) y_j + \frac{K_j^{u\psi}}{2a_j} y_{j+1} \right) = 0 \\
& \left(\frac{-M_j^{\psi\psi}}{2a_{j-1}} \ddot{y}_{j-1} + \frac{M_j^{\psi\psi}}{2} \left(\frac{1}{a_{j-1}} - \frac{1}{a_j} \right) \ddot{y}_j + \frac{M_j^{\psi\psi}}{2a_j} \ddot{y}_{j+1} \right) + \dots \\
& D_j^{\psi u} \dot{u}_j + \left(\frac{-D_j^{\psi\psi}}{2a_{j-1}} \dot{y}_{j-1} + \frac{D_j^{\psi\psi}}{2} \left(\frac{1}{a_{j-1}} - \frac{1}{a_j} \right) \dot{y}_j + \frac{D_j^{\psi\psi}}{2a_j} \dot{y}_{j+1} \right) + \dots \\
& K_j^{\psi u} u_j + \left(\frac{-K_j^{\psi\psi}}{2a_{j-1}} y_{j-1} + \frac{K_j^{\psi\psi}}{2} \left(\frac{1}{a_{j-1}} - \frac{1}{a_j} \right) y_j + \frac{K_j^{\psi\psi}}{2a_j} y_{j+1} \right) = 0
\end{aligned} \tag{5.62}$$

De forma que aparecerán términos acoplados entre las variables u_j y y_j , que se añaden a los derivados de la suspensión entre caja y rodal.

Mediante el ensamblado de todos los términos se llega al sistema de ecuaciones 5.61. El desarrollo completo de dicho ensamblado se puede encontrar en la referencia [98].

5.7. Modelo de dinámica lateral

En esta sección se va a describir un modelo simplificado desarrollado para el estudio de la dinámica lateral de las cajas de la composición. A partir de los resultados obtenidos con el modelo lineal, descritos en la sección 6.2, se propone la obtención de un modelo no lineal que permita determinar la influencia de los modos inestables detectados en estos resultados sobre el comportamiento dinámico del tren. Estos modos inestables están asociados a movimientos en el plano horizontal de las cajas y por lo tanto sólo se van a considerar estos movimientos en este modelo. Así, en un primera aproximación sólo se consideran los desplazamientos laterales de los enganches, siguiendo la metodología propuesta en esta Tesis. Los rodales se suponen fijos, de forma que se trata de un modelo de masas concentradas unidas mediante elementos elásticos y amortiguadores, tal y como se muestra en la figura 5.31.

Se van a modelar las uniones entre cajas mediante amortiguadores longitudinales de frente rígido considerando un modelo no lineal habitual en la literatura [31]. Este modelo consiste en un amortiguador no lineal con una rigidez en serie.

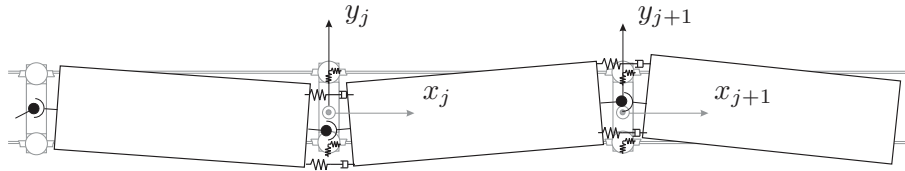


Figura 5.31. Modelo simplificado de dinámica lateral

Las suspensiones neumáticas entre cajas y rodapiés se modelan mediante la aproximación descrita en la sección 5.4.2. De esta forma, los parámetros empleados en este modelo son (ver figura 5.32):

- k_x y k_y , rigideces de las balonas en el plano horizontal, según las direcciones x, y respectivamente.
- c_x y c_y , amortiguamiento de las balonas en el plano horizontal, según las direcciones x, y respectivamente.
- b , distancia transversal entre centros de las balonas.
- k_s , rigidez en serie que modela la flexibilidad del amortiguador de frente rígido y cuyo valor se obtiene a partir del ajuste de datos experimentales.
- c , curva característica del amortiguador de frente rígido y cuyos valores se obtienen a partir del ajuste de datos experimentales.
- d , distancia transversal entre los amortiguadores longitudinales.

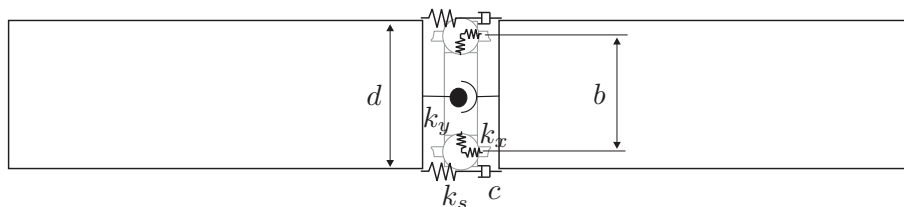


Figura 5.32. Parámetros del modelo de dinámica lateral

Capítulo 6

Aplicación de los modelos

*Mantente ávido por saber y tal vez llegarás a ser sabio.
Isocrates*

Capítulo 7

Conclusiones y futuros trabajos

*Si quieres comprender la palabra felicidad, tienes que entenderla como recompensa y
no como fin.*

Antoine de Saint-Exúpery

Anexo A

Modelo de Klingel

Se considera un modelo simplificado de la geometría de los perfiles de rueda (tronco de cono) y carril (hilo rígido). La forma troncocónica de los perfiles de las ruedas se utiliza para guiar el movimiento del eje entre los carriles. Este guiado proviene de la aparición de una diferencia de radios de contacto entre ambas ruedas en caso de un desplazamiento lateral del eje. Esta diferencia de radios hace que el extremo del eje que monta la rueda cuyo radio de contacto aumenta tenga una velocidad lineal mayor que el otro extremo, por lo que se genera una rotación que mueve al eje hacia la posición centrada. Si no existiera algún mecanismo que disipe energía en el sistema, este movimiento de lazo se mantendría indefinidamente en el tiempo una vez iniciado por la perturbación lateral del eje.

En la figura A.1 se muestra el modelo de eje empleado por Klingel para estudiar su movimiento.

En la figura A.2 se muestra una posición del eje desplazado lateralmente y como varían los radios de contacto en consecuencia:

$$\begin{aligned}r_d &= r_o - \gamma_o y \\ r_i &= r_o + \gamma_o y\end{aligned}$$

Esta variación de los radios hace que cada rueda tenga una velocidad lineal distinta por lo que aparece un giro respecto del eje vertical, ψ , con una velocidad angular, $\dot{\psi}$:

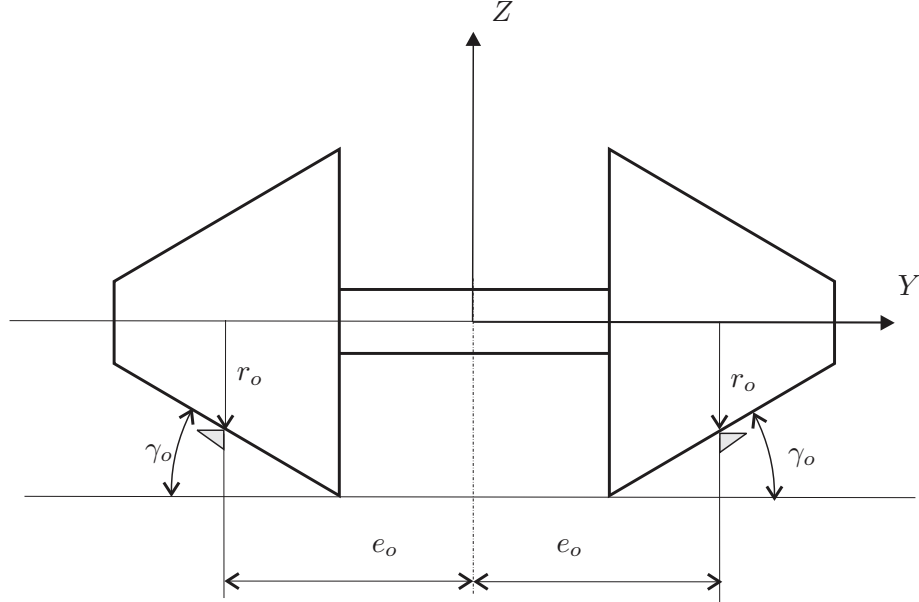


Figura A.1. Eje montado del modelo de Klingel en su posición nominal centrado en la vía

$$\begin{aligned} \vec{v}_i - \vec{v}_d &= \vec{\psi} \times \vec{r}_{di} \Rightarrow |\vec{v}_i - \vec{v}_d| = |\vec{\psi} \times \vec{r}_{di}| \\ \Omega \cdot (r_i - r_d) &= \dot{\psi} \cdot 2e_o \\ \Omega \cdot (2\gamma_o y) &= \dot{\psi} \cdot 2e_o \\ \frac{V}{r_o} \cdot (2\gamma_o y) &= \dot{\psi} \cdot 2e_o \\ \dot{\psi} &= \left(\frac{V \cdot \gamma_o}{r_o \cdot e_o} \right) y \end{aligned}$$

Al girar según el eje vertical, aparece una velocidad lateral, \dot{y} , que se puede calcular considerando pequeños desplazamientos según la expresión:

$$\dot{y} = V\psi \quad (\text{A.1})$$

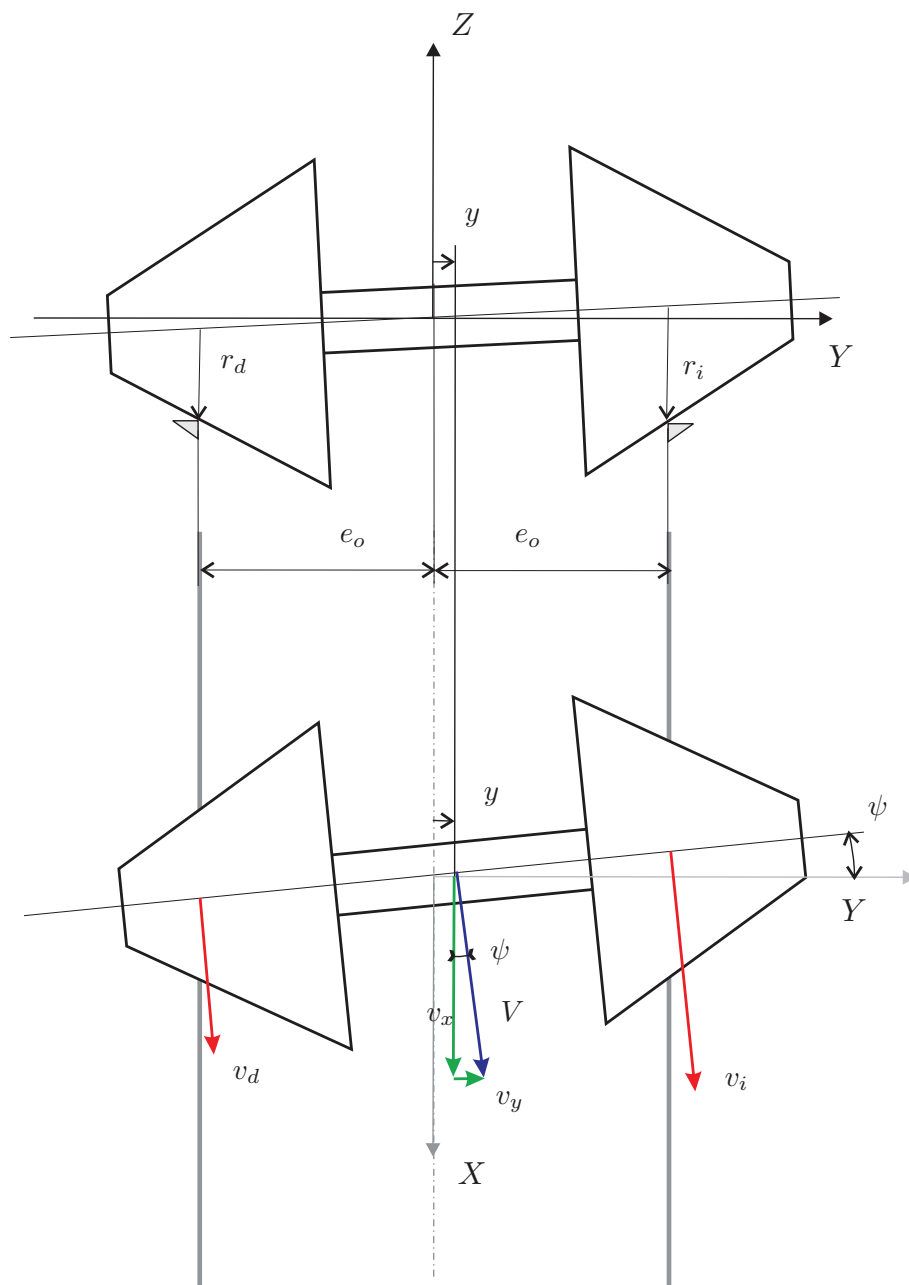


Figura A.2. Cinemática del eje según el modelo de Klingel

Teniendo en cuenta esta relación, se puede obtener una ecuación diferencial que determina el movimiento lateral del eje, y :

$$\begin{aligned} v_y = \dot{y} &\simeq \psi \cdot V \quad \rightarrow \quad \ddot{y} \simeq \dot{\psi} \cdot V \\ \ddot{y} &= \left(\frac{V^2 \cdot \gamma_o}{r_o \cdot e_o} \right) y \\ \ddot{y} - \left(\frac{V^2 \cdot \gamma_o}{r_o \cdot e_o} \right) y &= 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{V^2 \cdot \gamma_o}{r_o \cdot e_o}} \end{aligned}$$

Del mismo modo, es posible obtener una ecuación análoga para el giro respecto del eje vertical, ψ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{\psi} = \left(\frac{V \cdot \gamma_o}{r_o \cdot e_o} \right) y \\ \dot{y} = \psi \cdot V \end{cases} &\quad \rightarrow \quad \ddot{\psi} = \left(\frac{V^2 \cdot \gamma_o}{r_o \cdot e_o} \right) \psi \\ \ddot{\psi} - \left(\frac{V^2 \cdot \gamma_o}{r_o \cdot e_o} \right) \psi &= 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{V^2 \cdot \gamma_o}{r_o \cdot e_o}} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] ISO 2631-1. Mechanical vibration and shock - evaluation of human exposure to whole-body vibration - part 1: General requirements, 1997.
- [2] A. K. W. Ahmed, C. Liu, and I. Haque. Computer simulation of steady state curving performance of high speed articulated train sets. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 20(4):365–389, 1996.
- [3] H. Akima. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 17(4):589–602, OCT 1970.
- [4] H. Akima. A method of univariate interpolation that has the accuracy of a 3rd-degree polynomial. *Acm Transactions on Mathematical Software*, 17(3):341–366, SEP 1991.
- [5] A. Alonso and J. G. Giménez. Damper modelling and its implementation in railway simulation program. *Non-smooth Problems in Vehicle Systems Dynamics*, pages 123–135, 2010.
- [6] A. Alonso, J. G. Giménez, J. Nieto, and J. Vinolas. Air suspension characterisation and effectiveness of a variable area orifice. *Vehicle System Dynamics*, 48(Supplement 1):271–286, 2010.
- [7] A. Alonso, J. G. Giménez, and L. M. Martín. Spin moment calculation and its importance in railway dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 223(5):453–460, 2009.
- [8] ALSTOM-Transport. <http://www.transport.alstom.com>.
- [9] M. Arnold. Simulation algorithms in vehicle system dynamics. Technical report, 2004.
- [10] U. M. Ascher and L. R. Petzold. *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. Society for Industrial Mathematics, 1998.
- [11] L. Baeza. *Desarrollo de modelos para el estudio de la dinámica de vehículos ferroviarios*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, 1999.

- [12] L. Baeza, J. Carballeira, A. Roda, and J. E. Tarancon. Method for obtaining the modal properties of articulated trains equipped with independently rotating wheels. *Vehicle System Dynamics*, 44(11):841–856, 2006.
- [13] L. Baeza, P. Vila, G. Xie, and S. D. Iwnicki. Prediction of rail corrugation using a rotating flexible wheelset coupled with a flexible track model and a non-hertzian/non-steady contact model. *Journal of Sound and Vibration*, 330(18-19):4493–4507, 2011.
- [14] L. Baron and B. Ciry. L'automotrice à grande vitesse d'alstom: l'agv. *Revue générale des chemins de fer*, (OCT):19–33, 2009.
- [15] C. E. Bell, D. Horak, and J. K. Hedrick. Stability and curving mechanics of rail vehicles. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 103:181, 1981.
- [16] CAF. <http://www.caf.es/caste/home/index.php>.
- [17] J. Carballeira, L. Baeza, A. Rovira, and E. García. Technical characteristics and dynamic modelling of talgo trains. *Vehicle System Dynamics*, 46:301–316, 2008.
- [18] F. W. Carter. On the action of locomotive driving wheel. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 112:151–157, 1926.
- [19] W. Choromanski and J. Kisilowski. Dynamics of railway trucks with wheelset with independently rotating wheels and controlled slip. *Vehicle System Dynamics*, 18:108–125, 1989.
- [20] C. Cole. Longitudinal train dynamics. in *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, S. Iwnicki (editor), Taylor and Francis, 2006.
- [21] A. Conde-Mellado, E. Gomez, and J. Vinolas. Advances on railway yaw damper characterisation exposed to small displacements. *International Journal of Heavy Vehicle Systems*, 13(4):263–280, 2006.
- [22] M. Daffos. *Les Bogies*. SNCF, 1994.
- [23] J. García de Jalón. Twenty-five years of natural coordinates. *Multibody System Dynamics*, 18(1):15–33, 2007.
- [24] J. García de Jalón and E. Bayo. *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems. The real time challenge*. Springer New York, 1994.
- [25] J. García de Jalón, M. A. Serna, and R. Avilés. Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms–i velocities and accelerations. *Mechanism and Machine Theory*, 16(5):543–556, 1981.
- [26] J. García de Jalón, M. A. Serna, and R. Avilés. Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms–ii position problems. *Mechanism and Machine Theory*, 16(5):557–566, 1981.

- [27] J.M. García Díaz de Villegas. *Ferrocarriles (Apuntes de clase)*. Universidad de Cantabria, 1998.
- [28] G. Diana, F. Cheli, A. Collina, R. Corradi, and S. Melzi. The development of a numerical model for railway vehicles comfort assessment through comparison with experimental measurements. *Vehicle System Dynamics*, 38(3):165–183, 2002.
- [29] R. V. Dukkipati, S.N. Swamy, and M. O. M. Osman. Independently rotating wheel systems for railway vehicles - a state-of-the-art review. *Vehicle System Dynamics*, 21(5):297–330, 1992.
- [30] E. Eich-Soellner and C. Führer. *Numerical methods in multibody dynamics*. Teubner Stuttgart, 1998.
- [31] B. M. Eickhoff, J. R. Evans, and A. J. Minnis. A review of modelling methods for railway vehicle suspension components. *Vehicle System Dynamics*, 24(6):469–496, 1995.
- [32] B. M. Eickhoff and R. F. Harvey. Theoretical and experimental evaluation of independently rotating wheels for railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 18:190–202, 1989.
- [33] A. Elia. Fiat pendolino: developments, experiences and perspectives. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 212(1):7–17, 1998.
- [34] J. Elkins and H. Wu. New criteria for flange climb derailment. In *Railroad Conference, 2000. Proceedings of the 2000 ASME/IEEE Joint*, pages 1–7. IEEE, 2000.
- [35] J. A. Elkins. The performance of 3-piece trucks equipped with independently rotating wheels. *Vehicle System Dynamics*, 18:203–216, 1989.
- [36] J. A. Elkins and R. J. Gostling. A general quasi-static curving theory for railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 6(2):100–106, 1977.
- [37] J. Evans and M. Berg. Challenges in simulation of rail vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 47(8):1023–1048, 2009.
- [38] F. Frederich. Dynamics of a bogie with independent wheels. *Vehicle System Dynamics*, 18:217–232, 1989.
- [39] J. Förstberg. *Ride comfort and motion sickness in tilting trains*. PhD thesis, KTH, 2000.
- [40] H. Fujimoto and M. Miyamoto. Lateral vibration and its decreasing measure of a shinkansen train (decrease of train vibration with yaw damper between cars). *Vehicle System Dynamics*, 25:188–199, 1996.

- [41] E. García and J. Chiva. Dynamic simulations of talgo track-inspection trainset. In *16th European ADAMS User Conference*, Germany, 2001.
- [42] E. García-Vadillo. Wheel/rail contact: Geometrical study. *Vehicle System Dynamics*, 13(4):207, 1984.
- [43] A. O. Gilchrist. The long road to solution of the railway hunting and curving problems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 212(3):219–226, 1998.
- [44] J. L. López Gómez. Trenes talgo pendulares y de alta o muy alta velocidad - <http://www.aecientificos.es>, 2010.
- [45] A. Goicoechea-Omar. Un nuevo sistema ferroviario de transporte por rodadura elevada, marzo 1936.
- [46] R. Goodall, S. Bruni, and T. X. Mei. Concepts and prospects for actively controlled railway running gear. *Vehicle System Dynamics*, 44:60–70, 2006.
- [47] R. Goodall and H. Li. Solid axle and independently-rotating railway wheelsets-a control engineering assessment of stability. *Vehicle System Dynamics*, 33(1):57–67, 2000.
- [48] Numerical Algorithms Group. <http://www.nag.com>.
- [49] I. Haque and M.Ñagurka. Modelling and linear analysis of high-speed articulated trainsets. *International Journal of Vehicle Design*, 26(2-3):249–263, 2001.
- [50] M. Hoshi, N. Murakami, H. Kono, Y. Ookubo, T. Arai, and H. Aruga. Development of bogie for user friendly, extra low floor, light rail vehicle (lrv) using independent wheel system and next generation lrv. *Mitsubishi Heavy Industries, Ltd. Technical Review*, 44(2):1, 2007.
- [51] B. H. Huber. The bogie-based tilt option-simplicity and flexibility. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 212(1):19–32, 1998.
- [52] S. Iwnicki. Simulation of wheel-rail contact forces. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 26(10):887–900, 2003.
- [53] S. Iwnicki. *Handbook of railway vehicle dynamics*. Taylor and Francis, 2006.
- [54] S. Iwnicki. Future trends in railway engineering. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(12):2743–2750, 2009.
- [55] D.M. Johnson. Gauging issues. in *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, S. Iwnicki (editor), Taylor and Francis, 2006.
- [56] K. L. Johnson. The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. *Journal of Applied Mechanics*, 25:339–346, 1958.

- [57] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge Univ Press, 1987.
- [58] R. Joly. Transverse stability of a railway vehicle. possibilities of the 'wheel-rail' guided system. *Rail International*, 15(7):13, 1984.
- [59] J. J. Kalker. A fast algorithm for the simplified theory of rolling-contact. *Vehicle System Dynamics*, 11(1):1–13, 1982.
- [60] J. J. Kalker. *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1990.
- [61] W. Kik and J. Piotrowski. A fast approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling. In *Proceedings of 2nd mini. conf. Contact Mechanics and Wear of Rail Wheel Systems*, pages 52–61, 1996.
- [62] W. Klingel. Über den lauf der eisenbahnwagen auf gerader bahn. *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens*, 20:113–123, 1883.
- [63] K. Knothe and F. Bohm. History of stability of railway and road vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 31, 5(6):283–323, 1999.
- [64] V. Kottenhahn. Rolling stock to eliminate the gaps in the high speed network - tilting trains in germany. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 212(1):85–102, 1998.
- [65] F. Lacôte. Traction advances offer lower costs and higher capacity. *Railway Gazette International*, 159(4):206, 2003.
- [66] F. Lacôte and C. Pujol. Le developpement d'un materiel ferroviarie. In *30ème Congrès de l'AFAV*, jun 2008.
- [67] B. Liang and S. Iwnicki. An experimental study of independently rotating wheels for railway vehicles. 2007.
- [68] X.Y. Long, Q.C. Wei, and F.Y. Zheng. Dynamic analysis of railway transition curves. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 224(1):1, 2010.
- [69] J. Mackenzie. Resistance on railway curves as an element of danger. *Proc.Instn.Civ.Engrs*, 74:1–83, 1883.
- [70] G. R. M. Mastinu. On the optimal design of railway passenger vehicles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 215(2):111–124, 2001.
- [71] T. Matsudaira. Paper awarded prize in the competition sponsored by the office of research and experiment of the international union of railways. 1960.

- [72] Y. Michitsuji and Y. Suda. Running performance of power-steering railway bogie with independently rotating wheels. *Vehicle System Dynamics*, 44:71–82, 2006.
- [73] MSC.SOFTWARE. Adams/rail 2005r2 online help.
- [74] M.J. Nadal. Theorie de la stabilite des locomotives. part ii: Mouvement de lacet. In *Annales des Mines*, volume 10, pages 232–255, 1896.
- [75] D. E. Newland. Steering a flexible railway truck on curved track. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 91:908–918, 1969.
- [76] N. Oda and S. Nishimura. Vibration of air suspension bogies and their design. *Bulletin of JSME*, 13(55):43–50, 1970.
- [77] UIC International Union of Railways. <http://www.railway-energy.org>.
- [78] UIC International Union of Railways. Leaflet 518 - testing and approval of railway vehicles from the point of view of their dynamic behaviour - safety - track fatigue - ride quality, 2009.
- [79] UIC International Union of Railways. Necessities for future high speed rolling stock. Technical report, 2010.
- [80] I. Okamoto. Shinkansen bogies. *Japan Railway and Transport Review*, 19:46–53, 1999.
- [81] L.R. Petzold. <http://www.netlib.org/ode/>.
- [82] J. Piotrowski and H. Chollet. Wheel-rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact. *Vehicle System Dynamics*, 43(6):455–483, 2005.
- [83] J. Piotrowski and W. Kik. A simplified model of wheel-rail contact mechanics for non-hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations. *Vehicle System Dynamics*, 46(1):27–48, 2008.
- [84] O. Polach. A fast wheel-rail forces calculation computer code. *Vehicle System Dynamics*, 33:728–739, 1999.
- [85] O. Polach. Coupled single-axle running gears - a new radial steering design. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F-Journal of Rail and Rapid Transit*, 216(3):197–206, 2002.
- [86] O. Polach. Curving and stability optimisation of locomotive bogies using interconnected wheelsets. *Vehicle System Dynamics*, 41:53–62, 2004.
- [87] O. Polach. Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit. *Wear*, 258(7-8):992–1000, 2005.

- [88] O. Polach. Influence of wheel/rail contact geometry on the behaviour of a railway vehicle at stability limit. *Proceedings ENOC-2005, Eindhoven University of Technology, The Netherlands*, pages 2203–2210, 2005.
- [89] O. Polach. Comparability of the non-linear and linearized stability assessment during railway vehicle design. *Vehicle System Dynamics*, 44:129–138, 2006.
- [90] O. Polach. On non-linear methods of bogie stability assessment using computer simulations. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F-Journal of Rail and Rapid Transit*, 220(1):13–27, 2006.
- [91] O. Polach, M. Berg, and S. Iwnicki. Simulation. in *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, S. Iwnicki (editor), Taylor and Francis, 2006.
- [92] O. Polach and A. Vetter. Methods for running stability prediction and their sensitivity to wheel/rail contact geometry. In *Paper on the 6th International Conference on Railway Bogies and Running Gears, Budapest, Hungary*, pages 13–16, 2004.
- [93] J. Pombo, J. Ambrosio, and M. Silva. A new wheel-rail contact model for railway dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 45(2):165–189, 2007.
- [94] M. Presthus. Derivation of air spring model parameters for train simulation. Technical Report 2002:059 CIV, Lulea University of Technology, 2002.
- [95] IZT Berlin R.Ñolte. Evaluation of energy efficiency technologies for rolling stock and train operation of railways. Technical report, UIC, 2003.
- [96] F.J. Redtenbacher. *Die Gesetze des Lokomotiv-Baues (The Laws of Construction of Locomotives)*. F. Bassermann, Mannheim, 1855.
- [97] M. Rosenberger, P. Dietmaier, J. Payer, and K. Six. The influence of the wheelsets' relative kinematics of railway vehicles on wheel/rail wear in curved track. *Vehicle System Dynamics*, 46(Supplement 1):403–414, 2008.
- [98] A. Rovira. *Desarrollo de un modelo eficaz de cálculo de la dinámica de trenes articulados (Proyecto Final de Carrera)*. 2004.
- [99] J. Santamaría, E.G. Vadillo, and J. Gómez. A comprehensive method for the elastic calculation of the two-point wheel-rail contact. *Vehicle System Dynamics*, 44(sup1):240–250, 2006.
- [100] H. Scheffel. Unconventional bogie designs-their practical basis and historical background. *Vehicle System Dynamics*, 24(6):497–524, 1995.
- [101] G. Schupp. Bifurcation analysis of railway vehicles. *Multibody System Dynamics*, 15(1):25–50, 2006.
- [102] G. Schupp, C. Weidemann, and L. Mauer. Modelling the contact between wheel and rail within multibody system simulation. *Vehicle System Dynamics*, 41(5):349–364, 2004.

- [103] S. I. Seo, J. S. Kim, and S. H. Cho. Development of a hybrid composite bodyshell for tilting trains. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F (Journal of Rail and Rapid Transit)*, 222:1–13, 2008.
- [104] A. A. Shabana, M. Tobaa, H. Sugiyama, and K. E. Zaazaa. On the computer formulations of the wheel/rail contact problem. *Nonlinear Dynamics*, 40(2):169–193, 2005.
- [105] A. A. Shabana, E. K. Zaazaa, L. J. Escalona, and J. R. Sany. Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 269(1-2):295, 2004.
- [106] P. Shackleton and S. Iwnicki. Comparison of wheel-rail contact codes for railway vehicle simulation: an introduction to the manchester contact benchmark and initial results. *Vehicle System Dynamics*, 46(1):129–149, 2008.
- [107] G. Shen and I. Pratt. The development of a railway dynamics modelling and simulation package to cater for current industrial trends. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 215(3):167, 2001.
- [108] Z. Y. Shen, J. K. Hedrick, and J. A. Elkins. A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamic analysis. *Vehicle System Dynamics*, 12(1):79–83, 1983.
- [109] Siemens-AG. The multiple-unit train for the european high-speed network: ICE 3 for german rail and netherlands railways - <http://www.siemens-trains.com>.
- [110] B. Simeon, C. Führer, and P. Rentrop. Differential-algebraic equations in vehicle system dynamics. *Surveys on Mathematics for Industry*, 1:1–37, 1991.
- [111] H. Suzuki, H. Shiroto, and K. Tezuka. Effects of low frequency vibration on train motion sickness. *Quarterly Report of RTRI*, 46(1):35–39, 2005.
- [112] PATENTES TALGO S.L. <http://www.talgo.com>.
- [113] H. True. On the theory of nonlinear dynamics and its applications in vehicle systems dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 31(5):393–421, 1999.
- [114] P. J. Vermeulen and K. L. Johnson. Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential forces. *Journal of Applied Mechanics*, 31(2), 1964.
- [115] E.A.H. Vollebregt, S.D. Iwnicki, G. Xie, and P. Shackleton. Assessing the accuracy of different simplified frictional rolling contact algorithms. *Vehicle System Dynamics*, 50(1):1–17, 2012.
- [116] C. Weidemann. State-of-the-art railway vehicle design with multi-body simulation. *Journal of Mechanical Systems for Transportation and Logistics*, 3(1):12–26, 2010.

- [117] A. H. Wickens. The dynamic stability of railway vehicle wheelsets and bogies having profiled wheels. *International Journal of Solids and Structures*, 1(3):319–341, 1965.
- [118] A. H. Wickens. Stability of high speed trains. *Physics in Technology*, 4:1–17, 1973.
- [119] A. H. Wickens. The dynamics of railway vehicles - from Stephenson to Carter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F-Journal of Rail and Rapid Transit*, 212(3):209–217, 1998.
- [120] A. H. Wickens. *Fundamentals of rail vehicle dynamics: guidance and stability*. Taylor and Francis, 2003.
- [121] X. Xue, S. Ingleton, J. Roberts, and M. Robinson. Qualitative comparison of the characteristics of articulated and non-articulated trains and their effects on impact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 225(1):24, 2011.
- [122] G. Yang. *Dynamic analysis of railway wheelsets and complete vehicle systems*. PhD thesis, 1993.

