

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DE MASTER

**ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA SINGULARIDAD DE
ESQUINA EN GRIETAS TRIDIMENSIONALES
MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS
FINITOS**

Presentada por: D. Juan Sancho Pérez

Dirigida por: Dr. D. Eugenio Giner Maravilla

Valencia, enero de 2014

AGRADECIMIENTOS

Gracias a mi tutor Eugenio por su paciencia, y por enseñarme tantas cosas nuevas, dedicándome parte de su preciado tiempo.

A todo el equipo del Máster por brindarme la oportunidad de ampliar mis conocimientos.

A Alicia por animarme siempre a continuar y esforzarme por terminar las cosas con la mayor brevedad posible y alcanzar mis metas académicas.

A mi familia por todo el apoyo y ayuda que he recibido siempre en el ámbito académico y personal.

RESUMEN

La presente tesina final de máster consiste en un análisis numérico de la singularidad de esquina o vertex. La singularidad de esquina está presente en sólidos 3D que contienen una grieta que intersecta una o más superficies del sólido. Esta singularidad depende de múltiples factores que la hacen más o menos influyente, como son el espesor, el tipo de carga, geometría del frente y el tipo de material (coeficiente de Poisson).

En esta tesina se aborda el análisis de dicha singularidad mediante el método de elementos finitos, usando el programa Abaqus CAE para el cálculo y el programa Matlab para el post-procesado de datos.

En primer lugar se abordan cuestiones teóricas sobre el cálculo de los factores y magnitudes básicas de mecánica de la fractura y se explica la metodología empleada para analizar la singularidad de esquina. Esta metodología se comprueba en 2D antes de pasar a 3D mediante un estudio de convergencia. El análisis de la singularidad se lleva a cabo después de explicar la teoría, obteniendo así tablas y gráficas con el objetivo de un mejor conocimiento del comportamiento del material cerca del vertex.

Palabras clave: mecánica de la fractura, integral J, factor de intensidad de tensiones, T-Stress, singularidad de esquina, vertex.

ABSTRACT

This final master thesis consists of a numerical analysis of the corner singularity or vertex . The corner singularity is present in 3D solid containing a crack that intersects one or more solid surfaces. This singularity depends on multiple factors that make it more or less influential, such as thickness, type of load, geometry of the front and type of material (Poisson's ratio).

In this thesis the analysis of the singularity is approached by the finite element method, using the Abaqus CAE software for the calculation and Matlab for post-processing data.

Firstly questions about the calculation of the factors and basic fracture mechanics magnitudes are discussed, and the methodology used to analyze the corner singularity is explained. This methodology is checked before 2D-3D extension through a convergence study. The analysis of singularity is performed after explaining the theory, obtaining tables and charts that define the behavior of the material near the vertex.

Keywords: fracture mechanics, J integral, stress intensity factor, T-Stress, corner singularity, vertex.

RESUM

Aquesta tesina final de màster consisteix en una anàlisi numèric de la singularitat de cantonada o vertex. La singularitat de cantonada és present en sòlids 3D que contenen una esquerdada que intersecciona una o més superfícies del sòlid. Aquesta singularitat depèn de múltiples factors que la fan més o menys influent, com són el gruix, el tipus de càrrega, geometria del front i el tipus de material (coeficient de Poisson).

En aquesta tesina s'aborda l'anàlisi d'aquesta singularitat mitjançant el mètode d'elements finits, fent servir el programa Abaqus CAE per al càlcul i el programa Matlab per al post-processament de dades.

En primer lloc s'aborden qüestions teòriques sobre el càlcul dels factors i magnituds bàsiques de mecànica de la fractura i s'explica la metodologia emprada per analitzar la singularitat de cantonada. Aquesta metodologia es comprova en 2D abans de passar a 3D mitjançant un estudi de convergència. L'anàlisi de la singularitat es porta a terme després d'explicar la teoria, obtenint així taules i gràfiques amb l'objectiu d'un millor coneixement del comportament del material a prop del vertex.

Paraules clau: mecànica de la fractura, integral J, factor d'intensitat de tensions, T-Stress, singularitat de cantonada, vertex.

Índice general

Agradecimientos	i
Resumen	iii
Abstract	v
Resum	vi
Índice general	ix
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES.....	1
1.1.1 Motivación.....	1
1.1.2 Antecedentes Mecánica de la Fractura.....	2
1.1.3 Antecedentes de la singularidad de esquina.....	4
1.2 OBJETIVOS.....	6
1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS DE MÁSTER.....	7
2 REVISIÓN DE LOS CAMPOS DE WILLIAMS Y MÉTODOS DE EXTRACCIÓN	8
2.1 ECUACIONES DE LOS CAMPOS DE TENSIONES	8
2.2 MÉTODOS ENERGÉTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL J	14
2.2.1 Introducción.....	14
2.2.2 Los métodos energéticos mediante el MEF	15
2.2.3 Integrales de contorno.....	16
2.2.3.1 La integral de contorno J	16
2.2.3.2 Evaluación numérica de la integral J mediante el MEF	25
2.2.3.3 Integral de interacción para T-Stress	29
2.3 IMPOSICIÓN DE CONDICIONES DE CONTORNO DE CAMPOS DE WILLIAMS ..	31
3 COMPROBACIÓN DEL MÉTODO DE APLICACIÓN DE CARGAS MEDIANTE ESTUDIO DE CONVERGENCIA EN 2D	32
3.1 IMPLEMENTACIÓN EN ABAQUS CAE	32
3.1.1 Llamada del input y la subrutina.....	32
3.1.2 Estructura de la subrutina	33
3.1.3 Variables de la subrutina.....	34
3.1.4 Uso de la subrutina desde el input.....	35
3.2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO	36
3.2.1 Geometría	36
3.2.2 Mallado.....	37
3.3 ELEMENTOS CUADRILÁTEROS LINEALES.....	38
3.4 ELEMENTOS CUADRILÁTEROS CUADRÁTICOS	41
3.5 CONCLUSIÓN	44

4	DESCRIPCIÓN DEL MODELO 3D.....	45
4.1	GEOMETRÍA.....	45
4.2	DETALLE DEL MALLADO.....	47
4.3	COMPARACIÓN MODELO 3D EN DEFORMACIÓN PLANA CON EL MODELO 2D	49
5	ANÁLISIS DEL MODELO 3D EN DEFORMACIÓN PLANA	51
5.1	ESTUDIO VALORES DE J, K Y T	51
5.2	EXTRAPOLACIONES MEDIANTE LOS CAMPOS DE TENSIONES	53
6	ANÁLISIS DE LA SINGULARIDAD DE ESQUINA.....	55
6.1	MORFOLOGÍA DE LA SINGULARIDAD DE ESQUINA	55
6.2	ESTUDIO VALORES DE J, K Y T	58
6.3	ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE POISSON.....	61
6.3.1	<i>Resultados sin T-Stress aplicado</i>	<i>61</i>
6.3.2	<i>Resultados con T-Stress</i>	<i>66</i>
6.4	EXTRAPOLACIONES MEDIANTE LOS CAMPOS DE TENSIONES	67
6.4.1	<i>Extrapolaciones de K_I.....</i>	<i>67</i>
6.4.2	<i>Extrapolaciones de tensiones debidas a la singularidad de esquina</i>	
	<i>representadas en log-log</i>	<i>69</i>
6.4.2.1	<i>Caso de Poisson 0.15 (plano Z=1).....</i>	<i>71</i>
6.4.2.2	<i>Caso de Poisson 0.3 (plano Z=1).....</i>	<i>77</i>
6.4.2.3	<i>Caso de Poisson 0.4 (plano Z=1).....</i>	<i>83</i>
6.4.4	<i>Extrapolaciones de tensiones en deformación plana (plano Z=1)..</i>	<i>89</i>
6.4.5	<i>Comentario de los resultados en tensiones.....</i>	<i>94</i>
6.5	EXTRAPOLACIONES MEDIANTE CAMPOS DE DESPLAZAMIENTOS.....	95
6.5.1	<i>Extrapolaciones de desplazamientos debidas a la singularidad de</i>	
	<i>esquina representadas en log-log.....</i>	<i>96</i>
6.5.1.1	<i>Caso de Poisson 0.15 (plano Z=1).....</i>	<i>96</i>
6.5.1.3	<i>Caso de Poisson 0.3 (plano Z=1).....</i>	<i>103</i>
6.5.1.4	<i>Caso de Poisson 0.4 (plano Z=1).....</i>	<i>110</i>
6.5.2	<i>Extrapolaciones de deformaciones.....</i>	<i>116</i>
6.5.3	<i>Extrapolaciones de desplazamientos en DP (plano Z=1)</i>	<i>121</i>
6.5.4	<i>Comentario de los resultados en desplazamientos.....</i>	<i>126</i>
7	CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS.....	128
7.1	CONCLUSIONES	128
7.2	DESARROLLOS FUTUROS	129
8	BIBLIOGRAFÍA.....	130
9	ANEXO	132
9.1	ARCHIVOS INPUT ABAQUS	132
9.2	SUBROUTINAS ABAQUS.....	138
9.3	RUTINAS MATLAB	141
9.3.1	<i>Post-proceso J, K_I y T a lo largo del frente</i>	<i>141</i>

9.3.2	<i>Post-proceso tensiones</i>	149
9.3.3	<i>Post-proceso desplazamientos</i>	166

1 INTRODUCCIÓN

Resumen del capítulo:

En este capítulo se presenta, en primer lugar, la motivación y antecedentes de la tesis, se describen los objetivos que se pretende alcanzar y se concluirá el capítulo describiendo cómo se ha organizado y estructurado la Tesis.

1.1 MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES

1.1.1 Motivación

Uno de los puntos más importantes en el diseño mecánico de componentes de máquinas es la identificación del modo de fallo más probable y la elaboración de un criterio para su detección. Estos fallos ocurren, incluso cuando la estructura o pieza en servicio se halla sobredimensionada respecto a la teoría de la resistencia de materiales, debido a procesos de fatiga y fractura. La fractura es un proceso de fallo mecánico que, a nivel muy básico, puede definirse como la consecuencia de la rotura de los enlaces interatómicos existentes en los sólidos. Desde un punto de vista macromecánico puede verse como la separación de un componente por ruptura en dos o más piezas debido a la propagación de grietas. El estudio del efecto de la existencia de grietas y defectos en las estructuras, usando la aproximación de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL), es una de las herramientas de las que se dispone para evitar fallos prematuros y catastróficos.

1.1.2 Antecedentes Mecánica de la Fractura

Concepto de Mecánica de la Fractura

En el mundo del diseño mecánico de componentes es fundamental reconocer la **presencia de defectos internos** en mayor o menor grado. Estos defectos internos son los que condicionan importantes propiedades de los componentes en servicio, como pueden ser su resistencia última a rotura, su tenacidad o fragilidad, su capacidad de soportar cargas cíclicas (fatiga), su resistencia bajo corrosión, etc.

La disciplina de la Ingeniería Mecánica que se encarga del estudio del comportamiento del material bajo cargas en servicio *teniendo en cuenta la presencia de defectos internos* se conoce como **Mecánica de la Fractura**.

Por tanto supone un acercamiento al comportamiento real de los materiales, en contraste con planteamientos más generales como los de la Elasticidad y Resistencia de Materiales, que no cuentan en sus desarrollos teóricos con la presencia interna de defectos o grietas. No se trata simplemente de alcanzar mayor precisión con respecto a los cálculos realizados de forma clásica. Como veremos, en muchas ocasiones la utilización de métodos de diseño basados en la Mecánica de la Fractura es la única forma de realizar un diseño correcto, ya que los resultados pueden diferir radicalmente con respecto a los realizados de forma clásica mediante principios de Resistencia de Materiales.

Sus aplicaciones son numerosas. La más inmediata consiste en relacionar cuantitativamente el nivel de carga aplicada a un componente y el tamaño y posición geométrica de una grieta. También se emplea en fatiga, ya que permite predecir cuánto tiempo será necesario para que una grieta alcance una longitud *crítica*. Incluso puede predecir en qué condiciones una grieta que progresa rápidamente puede ser detenida. De ahí que las

industrias químicas, navales, aeroespaciales, nucleares, etc. tengan en cuenta hoy en día sus principios.

La Mecánica de la Fractura es una disciplina relativamente reciente. Se puede afirmar que comienza a existir como tal con los trabajos de A.A. Griffith en 1921, que permanecieron “olvidados” hasta que en 1948 los planteamientos de G.R. Irwin y E. Orowan provocaron un interés creciente por este enfoque hasta nuestros días.

El método de elementos finitos en Mecánica de la Fractura

La simulación numérica en la Mecánica de la Fractura tiene especial importancia a la hora de diseñar estructuras mecánicas bajo el criterio de tolerancia al fallo. Para estructuras complejas, la robustez y la precisión de cálculo son prerequisites esenciales en el diseño de nuevas piezas cuando se utilizan métodos numéricos.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es uno de los métodos más implementados en el cálculo ingenieril debido a su simplicidad y versatilidad, y desde los años 70 hasta nuestros días ha pasado a dominar la disciplina de los métodos numéricos en Mecánica de la Fractura.

Uno de los temas más importantes en la Mecánica de la Fractura es el estudio de la propagación de grieta y su dirección de propagación en piezas mecánicas (Chang y Pu 1996). En este contexto, varios criterios han sido propuestos para predecir el comportamiento de una grieta en el interior de un material, entre otros los basados en el cálculo de la tasa de liberación de energía G (véase p.ej. Knowles y Sternberg 1972). Existen varios métodos para el cálculo de G en problemas 2D de la Mecánica de la Fractura Elástico Lineal (MFEL).

En el estudio del efecto mecánico de la presencia de grietas, una de las magnitudes usadas para evaluar su influencia son los FIT, parámetros que caracterizan los campos asintóticos cerca de la singularidad. Para su obtención a partir de un modelo numérico se suelen emplear técnicas de postproceso basadas en métodos energéticos. Estos métodos energéticos pueden utilizar la solución aproximada de elementos finitos en puntos alejados de la singularidad y, por lo tanto, evitar la zona de mayor error en los resultados, o pueden utilizar algún tipo de solución mejorada para reducir el error y, además, son relativamente simples de implementar.

1.1.3 Antecedentes de la singularidad de esquina

En el estudio de grietas reales tridimensionales no solo se identifica el estado singular asociado al frente de grieta y estudiado por la MFEL, sino que también existen otros tipos de singularidades. Una de ellas, conocida como singularidad del borde libre o de esquina, se origina en la intersección del frente de grieta con una superficie libre. Este efecto es totalmente tridimensional y por tanto no admite una aproximación bidimensional. Existen algunos estudios sobre el desarrollo teórico para esta singularidad, pero no se dispone de una expresión analítica. Sin embargo, se sabe que presenta un comportamiento con cierta simetría esférica y un orden de singularidad, no igual, pero cercano al comportamiento asociado al frente de grieta. Aunque en su proximidad los conceptos asociados al frente de grieta no pueden ser rigurosamente aceptados, es habitual aplicarlos, como por ejemplo el concepto y valor de los FIT. A pesar de su influencia en el comportamiento a fatiga y debido a su pequeña región de influencia, suele ignorarse en los estudios de grietas tridimensionales. Sin embargo para obtener conclusiones correctas debe ser tenido en cuenta, ya que influye sobre la morfología de propagación de la grieta.

En el estudio de las grietas tridimensionales se acepta la aproximación bidimensional de deformación plana, que es avalada por diversos trabajos, en donde a través de diversos desarrollos se llega a expresiones analítica. Por tanto, el análisis tridimensional de grietas, utilizando conceptos de la teoría de MFEL, se realiza, aceptando las hipótesis del estado 2D de tensión o deformación plana, al no disponer de una aproximación mejor, a pesar de no verificarse para el estado tridimensional real.

Como se ha comentado, en una grieta tridimensional aparece otro tipo de singularidad en el campo de tensiones, en la intersección de la grieta con una superficie libre, Fig. 1.1, singularidad que se conoce como vertex, de borde libre o singularidad de esquina. Uno de los efectos de esta intersección es producir una reducción drástica de los valores calculados de K_I en problemas en modo I cuando el frente de grieta interseca perpendicularmente con la superficie libre.

En mecánica de la fractura no existen muchos trabajos que presenten resultados teóricos sobre el estado tensional existente en el punto del vertex, siendo las formulaciones disponibles aplicables solo en casos particulares. También existen estudios experimentales para intentar obtener información del comportamiento de la singularidad de borde libre.

Debido a la falta de resultados analíticos o experimentales que permitan el desarrollo de un modelo, la consideración de este efecto se suele realizar mediante métodos numéricos, aunque lo habitual en los estudios prácticos es ignorar su existencia, al considerarse la región de influencia de esta singularidad pequeña en relación al efecto total de la grieta. Sin embargo, la presencia de la singularidad asociada al vertex modifica el comportamiento en fatiga, con lo que, para realizar un estudio correcto, es necesario su introducción.

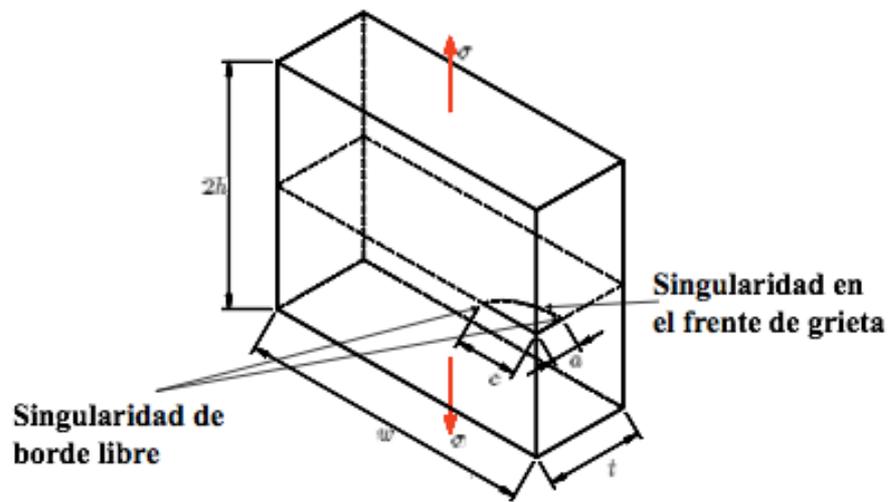


Figura 1.1. Esquema de singularidad de esquina o de borde libre.

1.2 OBJETIVOS

El objetivo del trabajo es el análisis de los campos elásticos que aparecen en las cercanías del borde libre cuando el frente de grieta de una grieta 3D intersecta la superficie libre. Se trata de un campo elástico dominado por la llamada “singularidad de esquina” o “vertex” que se superpone a los campos clásicos de la singularidad de Williams (en modo I, éstos últimos sólo dominan en la zona interna del frente de grieta). Para ello se realizará un modelo detallado de la zona cercana a la singularidad de esquina, pudiéndose imponer al submodelo las condiciones de contorno propias del campo lejano. Se estudiará la variación de magnitudes que produce la singularidad de esquina con diferentes coeficientes de Poisson.

1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS DE MÁSTER

En primer lugar, en el capítulo 2 se detallan las expresiones matemáticas para la descripción de los campos de tensiones y desplazamientos en los puntos cercanos al extremo de grieta para problemas bidimensionales. A continuación, se presentarán los métodos energéticos que se han utilizado en esta tesis para el cálculo de las diferentes magnitudes de interés (integral J , FIT K_I y K_{II} y el T -Stress) en los problemas estudiados. Estos métodos se basan en el cálculo de integrales de contorno o de integrales de dominio. Al final del capítulo se explican las condiciones de contorno aplicadas en el modelo.

El capítulo 3 es un estudio de convergencia en 2D para verificar la funcionalidad del método empleado para la aplicación de las condiciones de contorno de Neumann. Obteniendo resultados cada vez más precisos se converge hacia una solución más refinada, lo cual indica que el método es fiable.

En el capítulo 4, se detalla el modelo físico empleado así como su malla. Al final del capítulo se realiza una comparación del modelo 3D en deformación plana y el modelo 2D con deformación plana, con el fin de obtener el mismo resultado y así asegurar los resultados futuros.

En el capítulo 5, se realiza un análisis de los resultados obtenidos para el caso de deformación plana.

En el capítulo 6, se realiza un análisis de la singularidad de esquina en varios apartados, empezando por la morfología de la singularidad, mostrando valores de J , K y T a lo largo de Z y por último unos ajustes para las tensiones y desplazamientos en escala logarítmica.

Las conclusiones extraídas de todo el trabajo realizado se recogen en el capítulo 7.

La memoria recoge una lista de referencias bibliográficas en el capítulo 8.

El documento termina en el capítulo 9, el anexo que recoge los archivos de programación de Abaqus y Matlab utilizados a lo largo de esta Tesina.

2 REVISIÓN DE LOS CAMPOS DE WILLIAMS Y MÉTODOS DE EXTRACCIÓN

En el presente capítulo se hará una breve introducción sobre las ecuaciones para describir los campos de tensiones y desplazamientos en problemas con singularidades, así como una introducción teórica de la integral J , ya que se usará para la evaluación del comportamiento de los modelos en los que se basa esta Tesina. A continuación, se hará una revisión de los métodos energéticos más importantes para la evaluación del FIT en la MFEL. Después se describirá el método que se usará para generar el campo de tensiones deseado y se detallará el objetivo de este método, que es el fundamento de esta Tesina.

2.1 ECUACIONES DE LOS CAMPOS DE TENSIONES

En este apartado se presentan las ecuaciones que describen los campos de tensiones y de desplazamientos en presencia de singularidades, lo que permite modelar una singularidad mediante el MEF.

Antes de describir el estado tensional en el entorno de una grieta, conviene dar algunas definiciones y notaciones que sirvan como referencia. Consideremos la Figura 2.1, en la que se presenta el frente de grieta de un sólido 3D. Se puede observar cómo es posible, en cada punto del frente de grieta, definir un sistema de coordenadas cartesiano local con el eje x_3 tangente al frente de grieta, el eje x_2 perpendicular a la superficie local de la grieta y el eje x_1 perpendicular al frente de grieta. También es posible definir un sistema de referencia polar (r, θ) en el plano (x_1, x_2) del sistema previamente definido, lo que permite estudiar el comportamiento de una sección del sólido considerado.

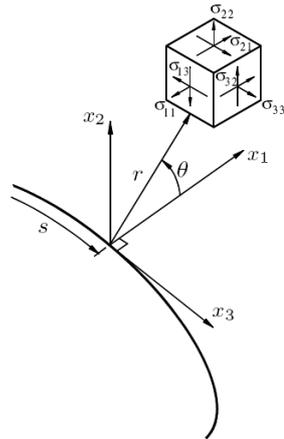


Figura 2.1. Sistemas de referencia cartesiano y polar utilizados para definir los campos de tensiones y desplazamientos en un punto cercano al frente de grieta en MFEL.

En la proximidad del frente de una grieta perteneciente a un sólido 3D, un campo tensional dado se puede considerar debido a la superposición de tres modos de carga al que el cuerpo se ve sometido. Dichos modos, llamados modo I, modo II y modo III, se representan en la **Figura 2.2**:

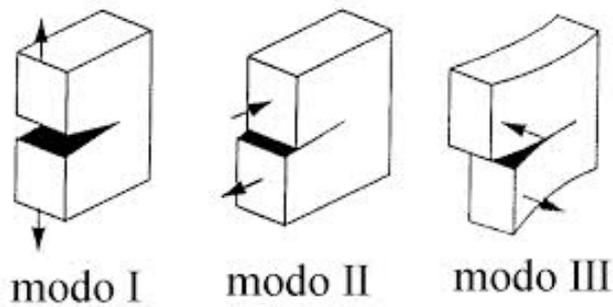


Figura 2.2. Modos de carga y de apertura de grieta.

Los tres modos actúan como se describe a continuación:

Modo I: este tipo de carga hace que la grieta se abra (o se cierre) en dirección perpendicular a la superficie local de la misma, es decir en dirección x_2 . Este modo de carga se genera mediante tensiones normales.

Modo II: este tipo de carga hace que las dos superficies de la grieta deslicen en la dirección del eje x_1 , y se genera mediante tensiones de tipo tangencial.

Modo III: este tipo de carga hace que las dos superficies de la grieta deslicen en la dirección del eje x_3 . Como para el modo II, el modo III es generado por tensiones tangenciales.

La descripción analítica de los campos de tensiones y desplazamientos en proximidad de una grieta en problemas de la MFEL fue obtenida por Williams [21].

De acuerdo con la nomenclatura de la Figura 2.1, las ecuaciones de Williams corresponden a una expansión en serie cuyos primeros términos, para un problema de la MFEL, son:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \\ & - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T + O(r^{1/2}) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^{1/2}) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{33} = 0 \text{ (en tensión plana)}$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \text{ (en deformación plana)} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + O(r^{1/2}) + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.5)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.6)$$

donde $O(r^{1/2})$ indica términos proporcionales a $r^{1/2}$ y los puntos suspensivos indican términos de orden superior a r . Los términos de orden $O(r^{1/2})$ y superiores son los que normalmente se desprecian para describir un estado tensional en proximidad del frente de grieta, ya que en ese caso $r \rightarrow 0$ y los términos proporcionales a $r^{-1/2}$ (términos singulares) son los que dominan sobre los otros términos.

En las ecuaciones anteriores aparecen tres parámetros (K_I , K_{II} y K_{III}), llamados factores de intensidad de tensiones (FIT) para modo I, modo II y modo III respectivamente. Estos parámetros caracterizan la severidad de una grieta para el respectivo modo de carga y, como se puede observar en las diferentes expresiones, son parámetros caracterizantes del estado tensional: conocidos los FIT, quedan totalmente determinados los campos elásticos de tensiones y desplazamientos en las cercanías del extremo de grieta. Se deduce que cualquier grieta con los mismos FIT tendrá asociado el mismo campo de tensiones en el extremo de grieta.

Cabe además señalar que existe una relación explícita (demostrada por Irwin en 1957, ver p.ej. Gdoutos [10]) entre los FIT y la **tasa de liberación de energía total G^1** , definida como:

$$G = - \frac{d\Pi}{da} \quad (2.7)$$

siendo a la longitud de grieta y Π la energía potencial total del sistema, que a su vez se define como:

$$\Pi = U + F$$

¹ La tasa de liberación de energía G representa la energía disponible para el crecimiento de una grieta. Si la variación de la energía disponible es igual o mayor que la necesaria para romper la cohesión del material existente en el extremo de grieta, esa grieta progresará. Dependiendo de cada material, habrá una resistencia característica que deberá ser vencida para que la grieta progrese. En el caso de la MFEL, siempre es $G=J=J_1$.

(2.8)

donde U es la energía potencial de deformación elástica y F es la energía potencial de las fuerzas exteriores aplicadas (que equivale al trabajo cambiado de signo realizado por éstas, asumiendo que son constantes).

La tasa de liberación de energía G y los FIT están relacionados mediante la expresión:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (2.9)$$

siendo las tasas de liberación de energía asociadas a cada modo de carga

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} ; G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} ; G_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.10)$$

y donde $E' = E$ en tensión plana, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ en deformación plana y ν es el coeficiente de Poisson.

Se puede además observar en la ec. (2.1) la presencia de un término no singular, T . Este término constante, llamado *T-Stress*, es un parámetro importante a la hora de considerar el ángulo inicial de propagación de una grieta en un cuerpo sometido a cargas en modo mixto (Kim y Paulino 2003 [13]). En su trabajo, Tong [20] llevó a cabo ensayos mecánicos en probetas y describió la influencia del *T-Stress* en al menos tres aspectos relacionados con la propagación de una grieta en un cuerpo:

1. En la tasa de crecimiento de la grieta
2. En la forma geométrica del frente de grieta
3. En la estabilidad direccional

La propagación de una grieta en un cuerpo y la influencia del *T-Stress* en este aspecto no es objeto de esta tesis. Aún así, cabe destacar que en esta tesis se ha incluido el parámetro *T-Stress* en el cálculo de las tensiones aplicadas a problemas bidimensionales, y se ha calculado su valor

en la fase de postproceso de datos para compararlo con el valor fijado inicial.

Con respecto a los desplazamientos, los primeros términos del desarrollo del campo de desplazamientos en puntos cercanos al extremo de grieta son:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) + \dots \quad (2.11)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) + \dots \quad (2.12)$$

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots \quad (2.13)$$

donde μ es el módulo de rigidez a cizalladura y κ es la constante de Kolosov, que toma los siguientes valores según el tipo de estado tensional:

$$\begin{aligned} \kappa &= 3 - 4\nu && \text{en deformación plana} \\ \kappa &= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} && \text{en tensión plana} \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2 MÉTODOS ENERGÉTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL J

En este apartado se hará una revisión de los principales métodos energéticos para el cálculo de la integral J , aplicables mediante el MEF.

En Giner 2001 [11] es posible encontrar una revisión más amplia y detallada de los métodos energéticos y, además, una revisión de los métodos locales para el cálculo de los FIT y de las integrales J y J_2 mediante el MEF en problemas de MFEL.

2.2.1 Introducción

El Método de los Elementos Finitos se ha consolidado durante las últimas cuatro décadas como el método numérico más versátil para el análisis de problemas de la mecánica del sólido. Tras el establecimiento de las bases del método, muy pronto surgieron aplicaciones directas a la Mecánica de la Fractura. Desde entonces el número de referencias en la literatura acerca de la aplicación del MEF a la Mecánica de la Fractura ha crecido de forma imparable.

Las técnicas que permiten evaluar los FIT y/o la integral J se dividen en dos grandes grupos:

- **Métodos locales (o directos):** tras un análisis numérico del problema, la evaluación de los FIT se realiza a partir de los campos de desplazamientos y/o tensiones obtenidos en el entorno de grieta. Por eso, necesitan de una correcta modelización de la singularidad.
- **Métodos globales (o indirectos):** se basan en planteamientos energéticos extendidos a zonas que no necesariamente corresponden al entorno de grieta, lo que hace innecesaria una modelización precisa de la singularidad. El parámetro caracterizante calculable con estos métodos es la tasa de liberación de energía G , permitiendo así la estimación indirecta de los FIT.

El objetivo de esta tesis es el análisis de la singularidad de esquina en 3D. Por ello tan solo se hará una breve incisión de las bases teóricas para el cálculo de la integral J , necesaria en los cálculos realizados.

2.2.2 Los métodos energéticos mediante el MEF

El enfoque sobre el que se fundamentan los métodos energéticos (o indirectos) permite estimar J . Comparados con los métodos de tipo local, estos métodos presentan notables ventajas que los hacen especialmente indicados para la estimación del error de discretización inducido en la evaluación de las magnitudes previamente citadas. Ello es debido a que presentan características muy destacables, a saber:

- Permiten obtener resultados precisos utilizando mallas relativamente bastas y sin necesidad de ningún refinamiento especial en el entorno de grieta. Estos métodos implican la evaluación global de ciertas magnitudes energéticas, haciendo intervenir en su cómputo elementos alejados del extremo de grieta, en zonas donde los campos de EF son aproximados con mayor exactitud. Su elevada precisión es una consecuencia del fundamento mismo del MEF: minimización de forma global de un funcional de carácter energético². Por tanto, estos métodos hacen innecesaria la utilización de elementos singulares³.
- Los métodos energéticos se prestan a una estimación del error de discretización cometido al utilizar el MEF. La solución aproximada dada por el MEF es la que mejor representa la solución exacta de entre todas las disponibles con una malla dada y es interpretable como la solución que mejor se ajusta desde un punto de vista de

² Minimización del funcional *energía potencial total* Π .

³ Elementos singulares: elementos específicos que permiten modelar de forma adecuada el comportamiento singular en el entorno del extremo de grieta. Su utilización reduce las exigencias en cuanto a los refinamientos necesarios para modelar correctamente el comportamiento teórico. Evidentemente, la utilización de elementos singulares en combinación con la implementación de métodos energéticos puede contribuir a la obtención de una solución más precisa.

mínimos cuadrados. En general, y dado que el error de discretización de EF está distribuido por todos los elementos de la malla en mayor o menor grado, técnicas globales de estimación que consideren el error de discretización en un gran número de elementos de la malla permitirán evaluar mucho mejor el error cometido.

Entre los métodos energéticos más importantes cabe señalar:

- Diferencias finitas de U .
- Integrales de contorno (integral J y otras integrales).
- Método de las funciones de extracción.
- Método de la Integral de Dominio Equivalente (EDI).
- Método de la derivada de la matriz de rigidez.
- Método del cierre virtual de grieta (VCCT).

En general, un gran inconveniente de los métodos energéticos es su dificultad para separar las contribuciones energéticas asociadas a cada uno de los modos de apertura de grieta y así obtener estimaciones independientes de K_I , K_{II} y K_{III} . Sin embargo, con el fin de paliar este inconveniente, existen técnicas específicas para desacoplar los modos, que no se abarcarán en esta Tesina.

2.2.3 Integrales de contorno

2.2.3.1 La integral de contorno J

La evaluación correcta del campo de deformaciones en las inmediaciones de una entalla o grieta con el objetivo de permitir su caracterización suele presentar dificultades (en especial si se considera un comportamiento no lineal del material). Este hecho llevó a Rice [18] a proponer la conocida integral de contorno J , originariamente para una

entalla en un problema bidimensional en el que el campo de tensiones sólo depende de dos coordenadas cartesianas x e y .

Bajo las hipótesis de sólido homogéneo con comportamiento elástico (no necesariamente lineal), libre de fuerzas por unidad de volumen y contorno de la entalla libre de fuerzas por unidad de superficie aplicadas, Rice definió su integral J como sigue (teniendo en cuenta la disposición de la entalla con arreglo al sistema de referencia mostrado en la Figura 2.3):

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} d\Gamma \right) \quad (2.15)$$

donde Γ es cualquier camino que rodee el extremo de entalla (cuyo contorno es Γ_t), recorrido en sentido antihorario desde una cara de la entalla a la otra, W es la energía de deformación por unidad de volumen, \mathbf{T} es el vector de tracciones en el contorno Γ (fuerzas por uds.), \mathbf{u} es el vector de desplazamientos y $d\Gamma$ es un elemento diferencial de arco de la curva Γ .

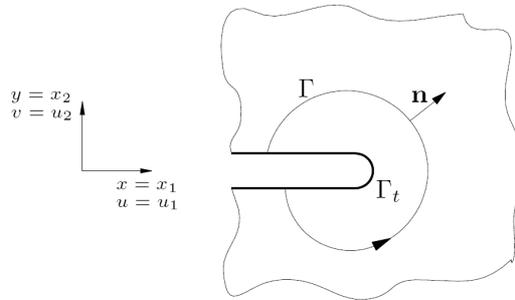


Figura 2.3. Entalla en un dominio bidimensional. Γ es cualquier curva que contenga el fondo de entalla Γ_t .

La densidad de energía de deformación W para el caso elástico (lineal o no) viene dada por la expresión⁴

⁴ En gran parte de este capítulo se utiliza la notación tensorial y el correspondiente criterio de suma respecto a los índices repetidos.

$$W = W(x, y) = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.16)$$

en la que ε_{ij} es el tensor de deformaciones infinitesimales. Por otra parte, las componentes del vector de tracciones \mathbf{T} sobre el contorno Γ se definen, con arreglo al vector normal unitario \mathbf{n} indicado en la Figura 2.1, como:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.17)$$

Conviene remarcar que la ec. (2.15) está planteada para una entalla del tipo mostrado en la Figura 2.3 cuyas caras son paralelas al eje x_1 , resultando evidente que una grieta alineada con dicho eje es un caso límite del mismo problema.

***J* como integral independiente del camino**

La independencia de la integral J con respecto al camino Γ utilizado para su evaluación es sin duda la propiedad que ha hecho de este método energético uno de los más versátiles en las técnicas numéricas aplicadas a Mecánica de la Fractura. Así, es posible estimar J en zonas alejadas del extremo de la entalla o grieta, donde los gradientes de deformación no son elevados y donde la solución numérica del problema suele ser razonablemente precisa. Rice [18] demostró que la integral que aparece en la ec. (2.15) es nula cuando se evalúa a lo largo de un *contorno cerrado* Γ^* que encierre un dominio *libre de singularidades* A^* de forma que las funciones a integrar presenten continuidad C^1 . En estas condiciones es aplicable el teorema de Green⁵ y la ec. (2.15) se puede escribir utilizando notación indicial como:

$$\oint_{\Gamma^*} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = \int_{A^*} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right) dx_1 dx_2 \quad (2.18)$$

⁵ Bajo otras expresiones se le denomina también teorema de Gauss o de la divergencia.

Por otra parte, la derivada de la energía de deformación por unidad de volumen se puede expresar del siguiente modo:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (2.19)$$

ya que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

(puesto que por hipótesis se ha supuesto ausencia de fuerzas por udv. en el dominio):

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (2.20)$$

lo que implica que la integral que aparece en las ecs. (2.15) y (2.18) es nula si Γ^* es un contorno cerrado:

$$J = \oint_{\Gamma^*} \left(W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = 0 \quad (2.21)$$

Si se elige convenientemente el camino Γ^* (ver Figura 2.4) resulta inmediato demostrar la independencia de J con respecto al camino tomado: la contribución de los tramos del camino que recorren las caras de la entalla, Γ_2 y Γ_4 , es nula ya que en ellos se verifica que $dx_2=0$ y que $T_i=0$ al estar las caras de entalla libres de fuerzas aplicadas. Por tanto, para que se cumpla la ec. (2.21), la contribución de Γ_1 y Γ_3 ha de ser necesariamente la misma, aunque con signos opuestos debido al sentido diferente con el que se recorren dichos tramos. Es decir, J tiene el mismo valor si se evalúa con caminos que partan de la cara inferior plana de la entalla, terminen en la cara superior y sean recorridos en igual sentido.

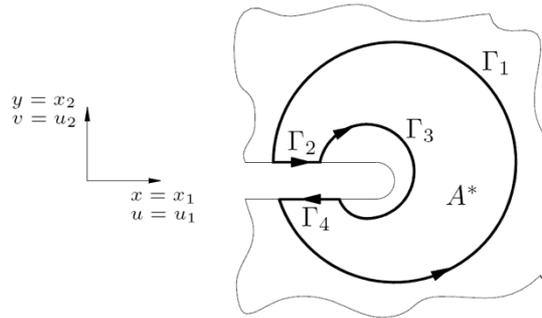


Figura 2.4. Camino cerrado $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ utilizado en la demostración de J como independiente del camino.

Sentido físico de la integral J

El hecho de presentar la integral J como un parámetro aplicable a entallas permite dar un cierto sentido físico (Rice [18]). Si se escoge como camino aquél que recorre el fondo de entalla Γ_t (ver Figura 2.3) la ec. (2.15) se reduce a:

$$J = \int_{\Gamma_t} W dx_2 \tag{2.22}$$

ya que $T_i=0$ al estar las superficies de la entalla libres de fuerzas aplicadas. Por consiguiente, J es una medida del grado de deformación alcanzado en el fondo de entalla, evaluado a través de una integral de la densidad de energía de deformación. Obviamente, se pierde este sentido físico cuando se trata de un extremo de grieta, ya que entonces Γ_t es infinitamente pequeño y, bajo la hipótesis de comportamiento elástico, W es infinitamente grande.

Relación entre J y K_I en MFEL

En Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal es conocido que el campo de tensiones en el entorno de la grieta está dominado por la singularidad de tipo $\frac{1}{\sqrt{r}}$, donde r es la distancia al extremo de grieta. Las tensiones del campo elástico bidimensional en coordenadas polares (r, θ) con origen en el extremo de grieta vienen dadas por las ecs. (2.1)- (2.6).

Para el modo I el campo está caracterizado únicamente por K_I a través de ecuaciones del tipo siguiente ($i, j = 1, 2$):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \dots \quad (2.23)$$

donde los puntos suspensivos indican términos acotados que son despreciables en todo entorno de grieta suficientemente pequeño comparado con las dimensiones del problema y con la longitud de grieta. Si se considera una grieta lateral semiinfinita en un dominio infinito con comportamiento elástico lineal, es evidente que estos términos acotados son despreciables para toda distancia finita desde el extremo de grieta. En esta situación se puede evaluar J tomando un camino circular Γ de radio r desde el extremo de grieta e integrar el campo elástico singular antes mencionado.

Expresando la ec. (2.15) en coordenadas polares resulta:

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left(W(r, \theta) \cos \theta - \mathbf{T}(r, \theta) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(r, \theta) \right) d\theta \quad (2.24)$$

Si se tiene en cuenta que el campo de deformaciones viene dado por expresiones del tipo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^I(\theta, \kappa) + \dots \quad (2.25)$$

(donde κ es la constante de Kolosov y g_{ij}^I son funciones diferentes según se trate de *deformación plana* o *tensión plana*) es inmediato observar de nuevo la independencia de J con respecto al radio r del camino tomado tras sustituir en la ec. (2.24), ya que los términos del integrando son esencialmente productos de tensiones y deformaciones y por tanto

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \propto \frac{1}{r} \quad (2.26)$$

Llevando a cabo la integración de la ec. (2.24) resulta

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.27)$$

donde E' equivale a

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{en deformación plana} \quad (2.28)$$

$$E' = E \quad \text{en tensión plana}$$

Este resultado es generalizable a otros problemas reales de dimensión finita, incluso con pequeña plastificación en el fondo de grieta (*small scale yielding*) siempre que se pueda encontrar una zona lo suficientemente pequeña comparada con las dimensiones del problema y la longitud de grieta y suficientemente alejada de la zona de plastificación. En otras palabras, una zona donde el campo elástico esté regido por las ecs. (2.23) con términos acotados despreciables. La gran ventaja que ofrece la invariancia de J con respecto al camino tomado es que permite su evaluación lejos de la zona dominada por las ecs. (2.23), donde el campo elástico (en general, analíticamente desconocido) es estimado con mucha mayor precisión cuando se utilizan métodos numéricos.

La ec. (2.27) se puede generalizar a otros modos de apertura de grieta o su combinación:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.29)$$

Dado que la relación entre J y K es la misma que la relación entre la tasa de liberación de energía G y K (ver ec. (2.9)), este planteamiento prueba la equivalencia $J=G$ en MFEL. Obviamente existe una demostración directa de la relación entre J y G sin necesidad de utilizar el concepto de K , como se muestra en el apartado siguiente.

Relación entre J y $\frac{d\Pi}{da}$

Rice demostró también la relación existente entre J y la tasa de liberación de energía por unidad de área de grieta formada (ver p.ej. Gdoutos [10]). Considérese una grieta en un cuerpo bidimensional (espesor unidad) con comportamiento elástico *no necesariamente lineal*, como el mostrado en la Figura 2.5. Sea el contorno del sólido Γ , dividido en dos porciones Γ_T y Γ_u , tales que $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_u$ y $\Gamma = \Gamma_T \cap \Gamma_u = \emptyset$. Sobre Γ_T se suponen aplicadas fuerzas por unidad de superficie \mathbf{T} que se consideran *independientes* de la longitud de grieta a , al igual que las restricciones en desplazamientos aplicadas sobre Γ_u . Se considera ausencia de fuerzas por udv. y que $T_i=0$ en las caras de grieta. Además se supone que el sistema de referencia x_1, x_2 es fijo en el extremo de grieta y avanza con ella, que la grieta está orientada en la dirección x_1 y cuando avanza lo hace en dicha dirección.

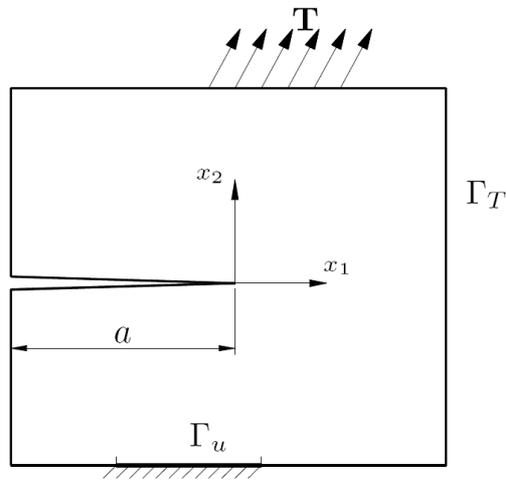


Figura 2.5. Grieta en un sólido bidimensional elástico (lineal o no) bajo la acción de tracciones \mathbf{T} . Notar los sistemas de referencia utilizados.

Si A es el área total del sólido, la energía potencial total Π (definida por la ec. (2.8)) se puede expresar como:

$$\Pi = \int_A W dA - \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.30)$$

Derivando Π respecto a la longitud de grieta a y dado que se ha supuesto que \mathbf{T} es independiente de a

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{dW}{da} dA - \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} d\Gamma \quad (2.31)$$

Notar que la segunda integral en la ec. (2.31) se puede extender a la totalidad del contorno del cuerpo Γ , debido a que los desplazamientos prescritos en Γ_u son también independientes de a . Al ser a asimilable al tiempo t (puesto que a es una función monótona creciente con t) el operador a se puede interpretar como el operador *derivada material* $\frac{d}{dt}$, utilizado en Mecánica del Medio Continuo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.32)$$

ya que se utiliza una descripción euleriana (o espacial) al ser el sistema x_1, x_2 móvil con el extremo de grieta. Se puede escribir entonces

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial x_1}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.33)$$

dado que $\frac{\partial x_1}{\partial a} = -1$. De esta forma, la ec. (2.31) queda

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA - \int_{\Gamma} T_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad (2.34)$$

Por otro lado, bajo la hipótesis de comportamiento elástico, se cumple de manera análoga a lo visto en la ec. (2.19):

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right) \quad (2.35)$$

Si se interpreta $\frac{\partial u_i}{\partial a}$ como una "velocidad" virtual cinemáticamente admisible a partir de la posición de equilibrio, el Principio de las Potencias

Virtuales establece que la potencia virtual debida a las fuerzas externas aplicadas ha de ser igual a la potencia consumida por las fuerzas internas en la deformación del cuerpo:

$$\int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right) dA = \int_A \frac{\partial W}{\partial a} dA \quad (2.36)$$

donde se ha utilizado la ec. (2.35), lo que permite simplificar la ec. (2.34). Haciendo uso del teorema de Green para la integral extendida sobre el área A (aplicable, ya que la singularidad se encuentra sobre el contorno Γ) se puede escribir del siguiente modo, análogo al visto en la ec. (2.18)

$$-\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{\partial W}{\partial x_1} dA - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = \int_{\Gamma} W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = J \quad (2.37)$$

Evidentemente, al cumplirse las hipótesis que aseguran la independencia de J con respecto al camino tomado, el contorno del cuerpo Γ no es el único que cumple la ec. (2.18).

En el supuesto de comportamiento *elástico lineal* y por definición de la tasa de liberación de energía G (ver ec. (2.7)), se cumple que $J=G$ como ya se había demostrado anteriormente. Sin embargo, en la relación dada por la ec. (2.37) el comportamiento no ha de ser necesariamente lineal, aunque sí elástico. Esta importante conclusión es la que ha permitido interpretar J como una generalización de G para comportamiento plástico, y justifica la extensa aplicación que se ha hecho de este método en los últimos 30 años (favorecida también por la facilidad de estimar J experimentalmente).

2.2.3.2 Evaluación numérica de la integral J mediante el MEF

En este apartado se dan indicaciones acerca de la evaluación numérica de la integral J , restringida a expresiones como la ec. (2.15) y sus correspondientes hipótesis de carga. En estas condiciones, J es simplemente una integral de línea.

El camino a tomar Γ es arbitrario y supondremos en el desarrollo que sigue que está formado por *tramos rectilíneos*. Es preferible escoger un camino alejado del entorno del extremo de grieta, con el fin de evitar la

zona donde los campos solución del MEF son peor estimados. El camino Γ puede intersectar los lados de los elementos o bien recorrerlos exactamente (ver Figura 2.6). Desde un punto de vista topológico la segunda opción es la más recomendable, pues hace innecesaria la búsqueda de los puntos de intersección de Γ con los lados de los elementos que atraviesa. Además, en este caso los puntos inicial y final del tramo recorrido en el elemento coinciden con nodos. En cualquiera de las dos situaciones, por las propiedades de la integral se puede escribir:

$$J = \sum_{e=1}^{N_e \cap \Gamma} J_e \quad (2.38)$$

donde N_e es el número de elementos atravesados por Γ . Si se denomina Γ_e a la porción de camino Γ que atraviesa el elemento e , J_e será

$$J_e = \int_{\Gamma_e} \left(W n_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) d\Gamma_e \quad (2.39)$$

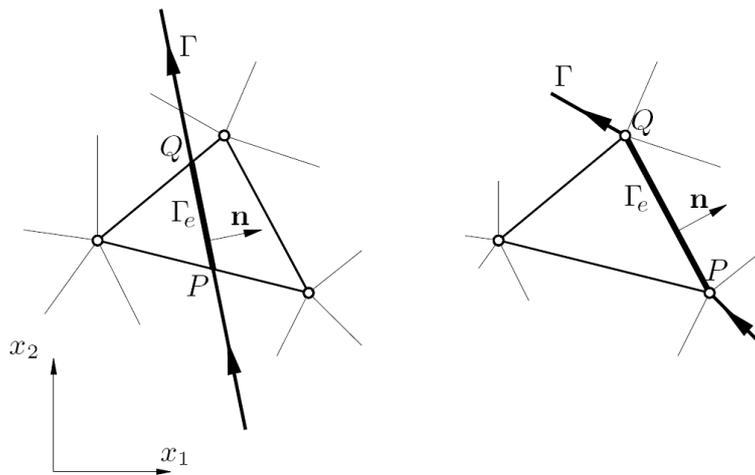


Figura 2.6. Intersección del camino Γ con un elemento. El tramo comprendido es Γ_e . Dcha: el camino se superpone a un lado.

Es conveniente realizar un cambio de coordenadas a un sistema de referencia unidimensional $\xi \in [-1,1]$ de forma que el punto P de la Figura 2.6 esté asociado con la coordenada local $\zeta=-1$ y el punto Q con la coordenada local $\zeta=1$. La integral en el sistema de referencia unidimensional será

$$J_e = \int_{-1}^1 \left(Wn_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \frac{\overline{PQ}}{2} d\xi \quad (2.40)$$

donde \overline{PQ} es la distancia entre los puntos P y Q en el sistema de referencia global (x_1, x_2) . En estas condiciones es inmediato aproximar la integral numéricamente mediante la cuadratura de Gauss en N_G puntos:

$$J_e \approx \frac{\overline{PQ}}{2} \sum_{m=1}^{N_G} H_m \left(Wn_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right)_{\xi_m} \quad (2.41)$$

donde la expresión entre paréntesis corresponde al integrando de la ec. (2.40) evaluado en la coordenada ξ_m asociada al punto de Gauss m y a su respectivo peso de Gauss H_m . Si se utilizan elementos lineales con una formulación en desplazamientos, los campos de tensiones y deformaciones son constantes en cada elemento. Es suficiente entonces tomar un único punto de Gauss, $m=1$, de coordenada unidimensional $\xi_1=0$ y peso $H_1=2$. Si se utilizan elementos cuadráticos, el integrando de la ec. (2.40) deja de ser constante y es necesario realizar la integración numérica unidimensional al menos con dos puntos de Gauss, $m=2$. Los campos de tensiones y deformaciones se pueden estimar en las coordenadas ξ_m con una interpolación lineal a partir de sus valores en los puntos P y Q ($\zeta=-1$ y $\zeta=1$, respectivamente). En la tabla siguiente (Tabla 2.1) se dan los pesos y las coordenadas de los puntos de Gauss para integración unidimensional:

n	$\pm \xi_i$	H_i	Integra exactamente
1	0	2	p=1
2	$\pm \sqrt{\frac{1}{3}}$	1	p=3
3	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}} ; 0$	$\frac{5}{9} ; \frac{8}{9}$	p=5
4	$\pm \sqrt{\frac{\left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}} ; \pm \sqrt{\frac{\left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36} ; \frac{18 + \sqrt{30}}{36}$	p=7
5	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}} ; \pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}} ; 0$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900} ; \frac{322 + 13\sqrt{70}}{900} ; \frac{128}{225}$	p=9

Tabla 2.1. Puntos de integración, pesos de la Cuadratura de Gauss y máximo grado de polinomios integrados exactamente.

Con elementos cuadriláteros es posible definir el camino Γ de forma que pase precisamente por los puntos de integración en cada elemento. De este modo se aprovecha la superconvergencia del gradiente de la solución en los puntos de integración (ver Figura 2.7). Para ello es necesario tomar un camino tal que sea paralelo a los lados del elemento, aprovechando así que los puntos de integración unidimensional coinciden con los puntos de integración bidimensional utilizada en la formulación de EF. Este planteamiento implica que la malla ha de estar distribuida y ordenada convenientemente e impide que se pueda tomar un camino Γ totalmente arbitrario. Con elementos triangulares en general no es posible hacer coincidir los puntos ξ_m de la integración unidimensional con los puntos de superconvergencia.

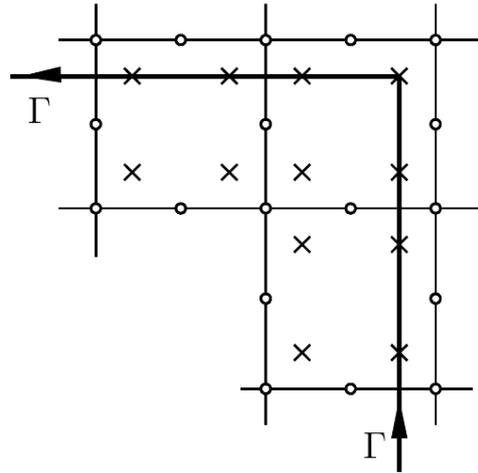


Figura 2.7. Camino de integración Γ tomado sobre los puntos de superconvergencia (puntos de integración) de elementos cuadriláteros cuadráticos.

2.2.3.3 Integral de interacción para T-Stress

Un procedimiento preciso y eficiente para calcular t_{11} a lo largo del frente de grieta en tres dimensiones, es la integral de interacción propuesta por Nakamura y Parks [34].

En una posición s dada del frente de grieta la integral de dominio sobre un volumen finito $V(s)$ que rodea el frente de la grieta se puede calcular como:

$$\bar{I}(s) = \int_{V(s)} \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^L}{\partial x_k} + \sigma_{ij}^L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^L \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right] dV$$

donde u_i^L , σ_{ij}^L y ε_{ij}^L son los campos de soluciones auxiliares correspondientes a deformación plana (ver [15] para más detalles) y q_k son los componentes de la función de ponderación espacial utilizada para formular la integral de dominio. El valor $I(s)$ se divide entonces por la extensión de grieta virtual asociada con el volumen finito que rodea la ubicación s , obteniéndose:

$$I(s) = \frac{\bar{I}(s)}{\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} q_l(s') n_l(s') ds'}$$

donde $n_l(s)$ es un vector unitario que da la dirección de la extensión de la grieta virtual. En un modelo de elementos finitos, ϵ es la distancia que generalmente se toma como la distancia del elemento contiguo, al frente de grieta. Una vez que $I(s)$ está calculada, se puede demostrar que t_{11} se puede calcular como:

$$t_{11}(s) = \frac{E}{(1 - \nu^2)} [I(s) + \nu \epsilon_{33}(s)] \quad (2.42)$$

donde $\epsilon_{33}(s)$ es la deformación a través del espesor evaluado en la ubicación s del frente de la grieta. Como se ha comentado en la siguiente sección, este valor siempre es diferente de cero (incluso para una placa de espesor infinito).

Es importante remarcar que, una vez t_{11} es conocido a través de la ecuación. (2.42), t_{33} se puede obtener fácilmente. En resumen, la integral de interacción es el método recomendado para calcular t_{ii} gracias a su consistencia, confiabilidad y facilidad de aplicación con muy poca intervención del usuario.

2.3 IMPOSICIÓN DE CONDICIONES DE CONTORNO DE CAMPOS DE WILLIAMS

Mediante las ecuaciones de Williams se pueden conocer los campos de tensiones producidos por la singularidad de una grieta. En general, los términos acotados son despreciables para casos en los que la tensión calculada esté cerca del extremo de grieta.

El método utilizado consiste en aplicar en un modelo, las tensiones de Williams aplicadas en el contorno del sólido. De esta manera generamos el estado tensional deseado en el extremo de grieta, para un estado en modo I particularizado por K_I . Eliminamos la influencia de los términos acotados y se obtiene un modelo generalizado para el estudio de la singularidad del extremo de grieta. De esta manera el modelo generado tiene la ventaja de ser un modelo reducido y con las condiciones de carga muy controladas.

El software de cálculo utilizado es Abaqus. Mediante este software se han programado unas subrutinas que permiten aplicar las condiciones de contorno deseadas, en nuestro caso calcula para cada punto del contorno las tensiones de Williams del punto determinado y aplica esta tensión mediante el cálculo de fuerzas equivalentes en los nodos correspondientes.

Estas subrutinas están programadas en Fortran y son la base para el estudio que realizaremos en tres dimensiones a lo largo de la Tesina.

En el siguiente capítulo se hará una demostración del método en 2D, para verificar la eficacia y mostrar los resultados obtenidos.

3 COMPROBACIÓN DEL MÉTODO DE APLICACIÓN DE CARGAS MEDIANTE ESTUDIO DE CONVERGENCIA EN 2D

El objetivo del estudio de convergencia es verificar que la implementación del método de aplicación de cargas mediante la subrutina UTRACLOAD de Abaqus CAE es correcta y proporciona resultados fiables. Se procederá a explicar cómo se ha llevado a cabo dicha implementación y se expondrán algunos ejemplos de los comandos utilizados. Después se proporcionarán los resultados del estudio de convergencia.

3.1 IMPLEMENTACIÓN EN ABAQUS CAE

3.1.1 Llamada del input y la subrutina

Abaqus CAE permite la implementación de subrutinas mediante Fortran para realizar procesos personalizados, no contemplados específicamente en la programación general de Abaqus.

En esta Tesina se ha utilizado la subrutina UTRACLOAD para aplicar las cargas deseadas en el contorno. Para implementar el uso de la subrutina se ha de especificar en el archivo de llamada (el archivo de llamada es un ejecutable “.bat” generado desde un fichero de texto), al input de Abaqus de la siguiente manera:

```
cmd /k abaqus job=nombre_input user=nombre_subrutina  
interactive
```

Donde *nombre_input* corresponde al nombre del fichero que contiene los datos de entrada para Abaqus sin incluir la extensión “.inp”, y donde *nombre_subrutina* corresponde al nombre del fichero de texto en lenguaje Fortran programado con las variables que Abaqus puede procesar. Tampoco se incluye la extensión en el ejecutable, aunque al igual que el input, ambos deben llevar la extensión correspondiente, en el caso de la subrutina: “.for”.

3.1.2 Estructura de la subrutina

En la ayuda de Abaqus obtenemos la estructura de la subrutina, la cual se muestra a continuación:

```
SUBROUTINE UTRACLOAD( ALPHA, T_USER, KSTEP,
KINC, TIME, NOEL,
NPT, COORDS, DIRCOS, JLTYP, SNAME )
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
DIMENSION T_USER(3), TIME(2), COORDS(3),
DIRCOS(3,3)
CHARACTER*80 SNAME

      user coding to define ALPHA and T_USER

RETURN
END
```

user coding to define ALPHA and T_USER → en el espacio que ocupa esta frase se incluye el código para definir las variables ALPHA y T_USER, las cuales caracterizan la carga calculada y aplicada que devuelve la subrutina. El significado de cada variable que interviene se explica en el siguiente apartado.

3.1.3 Variables de la subrutina

Variables de necesaria definición:

- **ALPHA**: módulo del vector de carga distribuida por unidad de superficie, las unidades son FL² para cargas en superficies, FL¹ para cargas en aristas y FL para cargas puntuales.
- **T_USER**: vector unitario que define la dirección de la carga calculada en ALPHA. Se define T_USER(1) como dirección X, T_USER(2) dirección Y y T_USER(3) dirección Z.

Variables informativas:

- KSTEP: número de Step.
- KINC: número de incremento.
- TIME(1): Valor actual del tiempo de paso o el valor actual del factor de proporcionalidad de la carga, en un paso Riks.
- TIME(2): valor actual del tiempo total.
- NOEL: número de elemento.
- NPT: número de punto de integración.
- COORDS: matriz de coordenadas del punto de integración.
- DIRCOS: orientación de la cara o el borde de la configuración de referencia.
- JLTYP: identificador del tipo de carga.
- SNAME: nombre de la superficie que se esta procesando.

Mediante código en Fortran se han utilizado las variables informativas para asignar valores a *ALPHA* y *T_USER*, los cuales caracterizan la carga aplicada correspondiente a cada nodo. Un ejemplo del código sería:

$$ALPHA=DSQRT((tx**2)+(ty**2)+(tz**2))$$
$$T_user(1)=(tx/abs(ALPHA))$$
$$T_user(2)=(ty/abs(ALPHA))$$
$$T_user(3)=(tz/abs(ALPHA))$$

Donde t_x , t_y y t_z son las tensiones de Williams calculadas mediante código usando las coordenadas de cada punto de integración mediante la variable *COORDS*, despreciando los términos no singulares.

Un ejemplo mas detallado de la implementación de la subrutina puede encontrarse en el anexo, apartado 9.2.

3.1.4 Uso de la subrutina desde el input

Una vez se declara y programa la subrutina el ultimo paso es utilizar la subrutina desde el archivo input que se desee ejecutar. Para ello se usan unos comandos similares a cuando se declaran cargas puntuales o distribuidas en un modelo cualquiera, pero con la particularidad que en vez de declarar el valor de dicha carga, el valor será devuelto por la subrutina *UTRACLOAD*. La llamada de la subrutina quedaría de la siguiente manera:

```
*DSLOAD
SUPERFICIE_DER, TRVECNU
**
*DSLOAD
SUPERFICIE_SUP, TRVECNU
**
*DSLOAD
SUPERFICIE_IZQ, TRVECNU
```

Cada superficie corresponde con una cara del sólido en la que se aplican las tensiones de Williams.

El comando de carga utilizado es **DSLOAD*, que utiliza la superficie definida seguida de ella, junto con el tipo de carga que se especifica a continuación de la superficie, en este caso *TRVECNU*. *TRVECNU* indica al comando **DSLOAD* que el valor de la carga se obtiene mediante subrutina. En el caso de usar tan solo *TRVEC*, el usuario debe indicar el módulo y dirección de la carga en cuestión.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

3.2.1 Geometría

En este capítulo se procede a calcular el estado tensional en un sólido definido por los siguientes parámetros geométricos: $W=4a$, $H=8a$, tensión plana y $a=1$ de grieta. Se considera un modelo de un ancho cuatro veces superior a la grieta, lo que denominamos $4a$. Para el modelado en elementos finitos se utilizará un modelo simétrico en dirección "Y", por lo que el modelo que se verá a continuación es de $4a \times 4a$ y una grieta de $a=1$ unidad. Representa el modelo de una placa infinita con grieta de longitud a .

Las condiciones de contorno serán:

- Restricción del extremo de grieta en dirección X
- Restricción en dirección Y para generar la simetría
- Tensiones de Williams aplicadas en el contorno, exceptuando el extremo de grieta y la simetría.

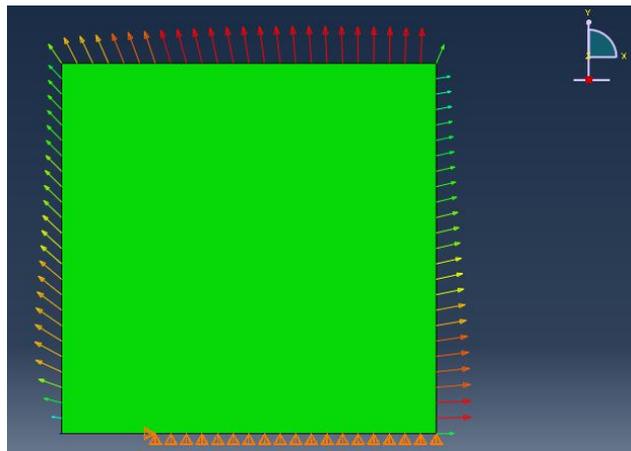


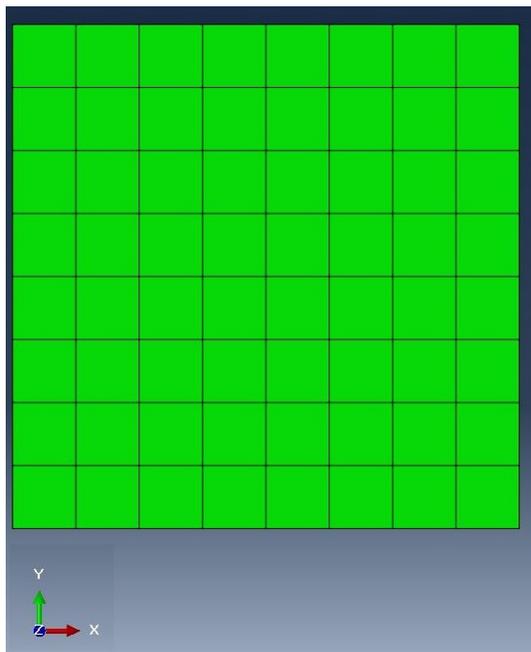
Figura 3.1. Ejemplo de cargas aplicadas.

El estudio de convergencia realizado consiste en resolver mediante elementos finitos el problema anteriormente descrito para distintas mallas y distintos elementos. El caso de carga aplicado es el que provoca un FIT en modo I de valor la unidad ($K_I=1$).

En el análisis se calcula la integral J y los valores de K_I . Como el valor de K_I es conocido como dato inicial del problema, se puede obtener el error obtenido en el proceso como: $\text{Error}(K_I) = K_I \text{ aplicado} - K_I \text{ calculado}$.

3.2.2 Mallado

Las mallas son estructuradas con elementos cuadriláteros de primer orden y segundo orden. Todos los elementos son iguales en cada malla, pero para cada caso estudiado el tamaño del elemento es modificado (refinamiento h-uniforme).



A la izquierda puede observarse el mallado para el caso 1, en el cual el tamaño del elemento es de 0.5.

- Caso1 $\rightarrow h=0.5$
- Caso2 $\rightarrow h=0.25$
- Caso3 $\rightarrow h=0.167$
- Caso4 $\rightarrow h=0.125$
- Caso5 $\rightarrow h=0.1$
- Caso6 $\rightarrow h=0.071$
- Caso7 $\rightarrow h=0.056$
- Caso8 $\rightarrow h=0.045$

Figura 3.2. Tipología de malla del modelo 2D para el estudio de convergencia, ejemplo del caso 1, tamaño del elemento de 0.5

3.3 ELEMENTOS CUADRILÁTEROS LINEALES

Elementos cuadriláteros Lineales						
Caso	Elementos Lado	Elementos Totales	$h(e)$	K_I Aplicado	K_I Calculado	Error(K_I)
1	8	64	0,500	1	0,9352	0,0648
2	16	256	0,250	1	0,9678	0,0322
3	24	576	0,167	1	0,9783	0,0217
4	32	1024	0,125	1	0,9837	0,0163
5	40	1600	0,100	1	0,9868	0,0132
6	56	3136	0,071	1	0,9905	0,0095
7	72	5184	0,056	1	0,9925	0,0075
8	88	7744	0,045	1	0,9938	0,0062

Tabla 3.1. Resultados del estudio para elementos lineales.

En la tabla superior se puede observar como el valor de K_I calculado mediante la integral J va convergiendo hacia el valor conocido conforme se va aumentando el numero de elementos, o lo que es lo mismo, a medida que se utilizan elementos más pequeños. Esto demuestra la fiabilidad del método utilizado para la aplicación de la carga.

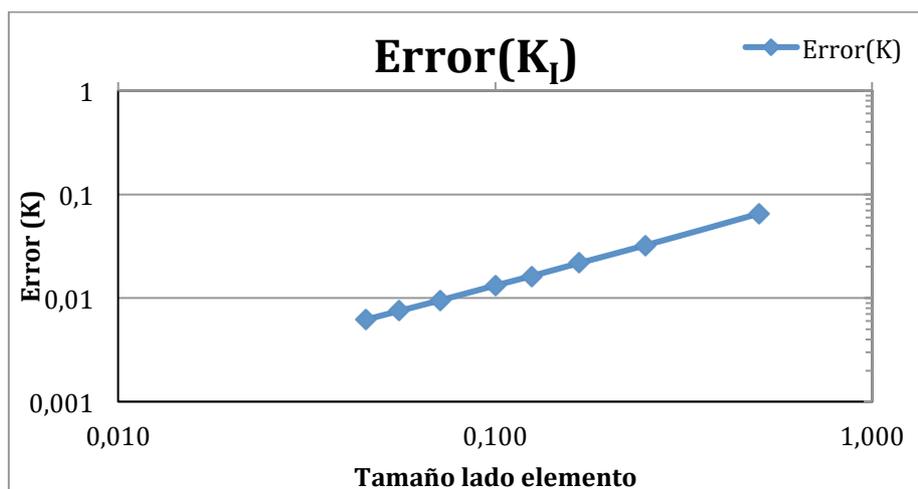


Figura 3.3. Representación del error en función del tamaño del elemento con elementos lineales en escala logarítmica.

3 COMPROBACIÓN DEL MÉTODO DE APLICACIÓN DE CARGAS MEDIANTE ESTUDIO DE CONVERGENCIA EN 2D

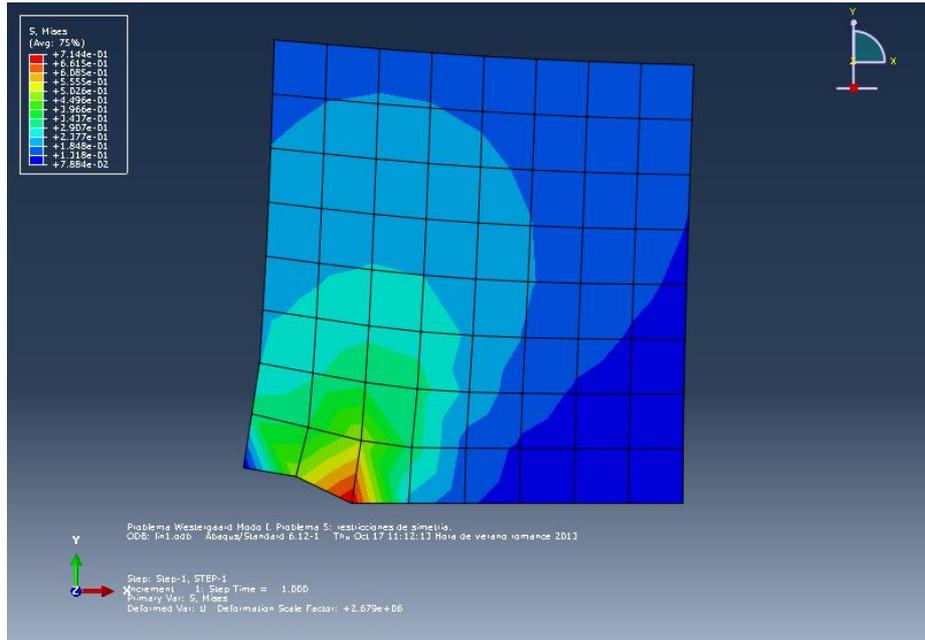


Figura 3.4. Caso 1, tensiones de von Mises cuad. lineales

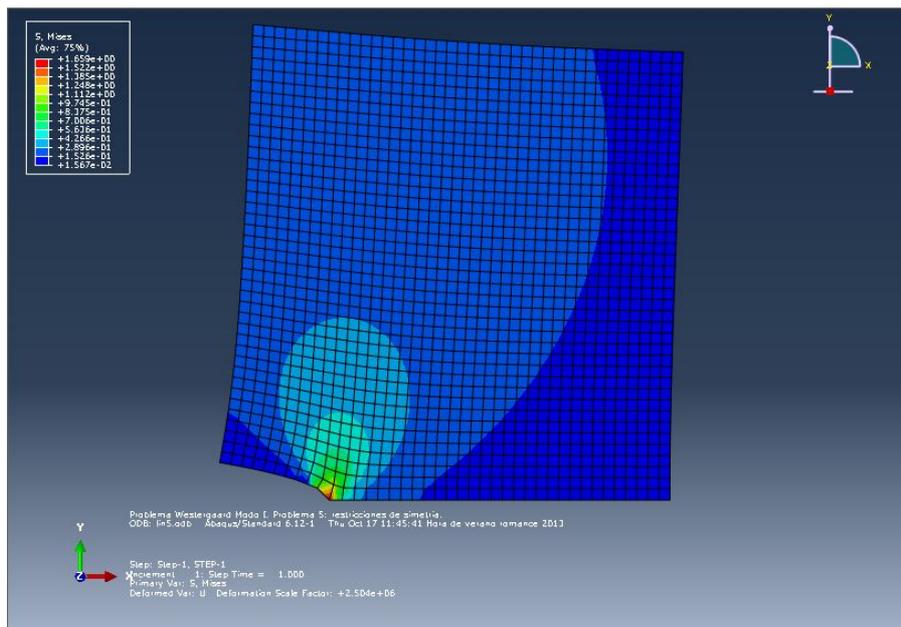


Figura 3.5. Caso 5, tensiones de von Mises cuad. lineales

3 COMPROBACIÓN DEL MÉTODO DE APLICACIÓN DE CARGAS MEDIANTE ESTUDIO DE CONVERGENCIA EN 2D

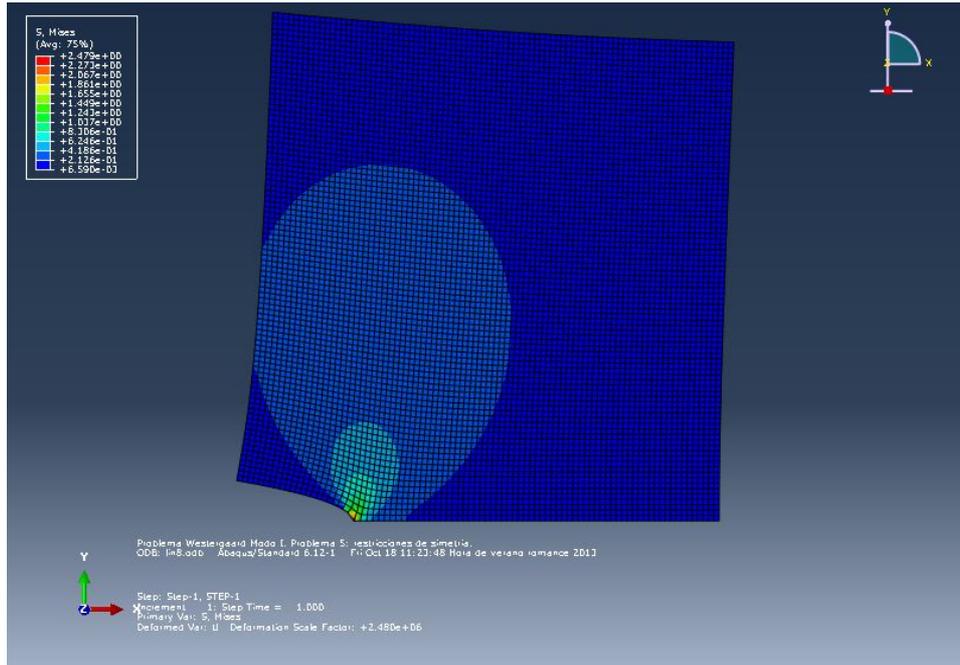


Figura 3.6. Caso 8, tensiones de von Mises cuad. lineales

En la figura 3.3, podemos observar la tendencia a disminuir el error al disminuir el tamaño del elemento. Cosa que se confirma en la representación gráfica de las tensiones de von Mises en las figuras 3.4, 3.5 y 3.6. En la primera figura los resultados son imprecisos, pero en la última figura se observan resultados mucho más precisos.

3.4 ELEMENTOS CUADRILÁTEROS CUADRÁTICOS

Elementos cuadriláteros cuadráticos						
Caso	Elementos Lado	Elementos Totales	h(e)	K _I Aplicado	K _I Calculado	Error(K)
1	8	64	0,500	1	0,9572	0,0428
2	16	256	0,250	1	0,978	0,022
3	24	576	0,167	1	0,9852	0,0148
4	32	1024	0,125	1	0,9888	0,0112
5	40	1600	0,100	1	0,991	0,009
6	56	3136	0,071	1	0,9936	0,0064
7	72	5184	0,056	1	0,995	0,005
8	88	7744	0,045	1	0,9959	0,0041
9	400	160000	0,01	1	0,9991	0,0009

Tabla 3.2. Resultados del estudio para elementos cuadráticos.

Para los elementos cuadriláteros cuadráticos se observa la misma tendencia pero con más precisión, teniendo resultados precisos a partir de 1600 elementos.

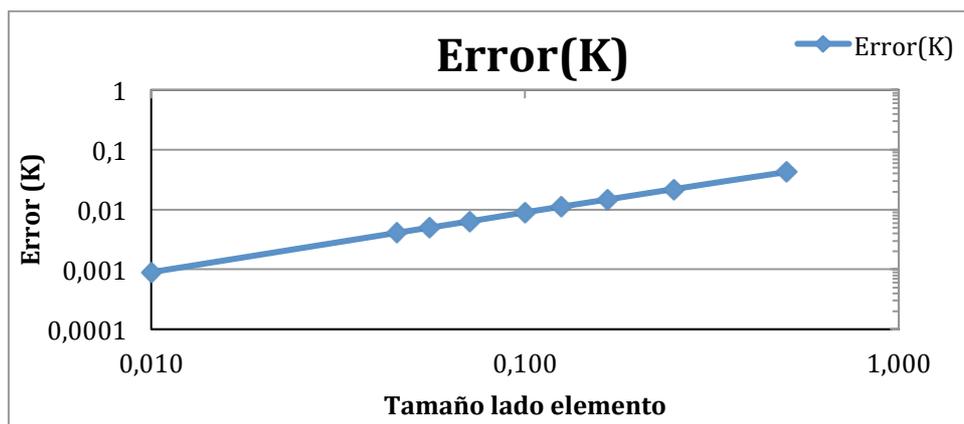


Figura 3.7. Representación del error en función del tamaño del elemento con elementos cuadráticos en escala logarítmica.

Para el caso cuadrático se decidió calcular un modelo con 400 elementos de lado, para destacar la linealidad de la convergencia en escala log-log, que se puede observar en la gráfica superior.

3 COMPROBACIÓN DEL MÉTODO DE APLICACIÓN DE CARGAS MEDIANTE ESTUDIO DE CONVERGENCIA EN 2D

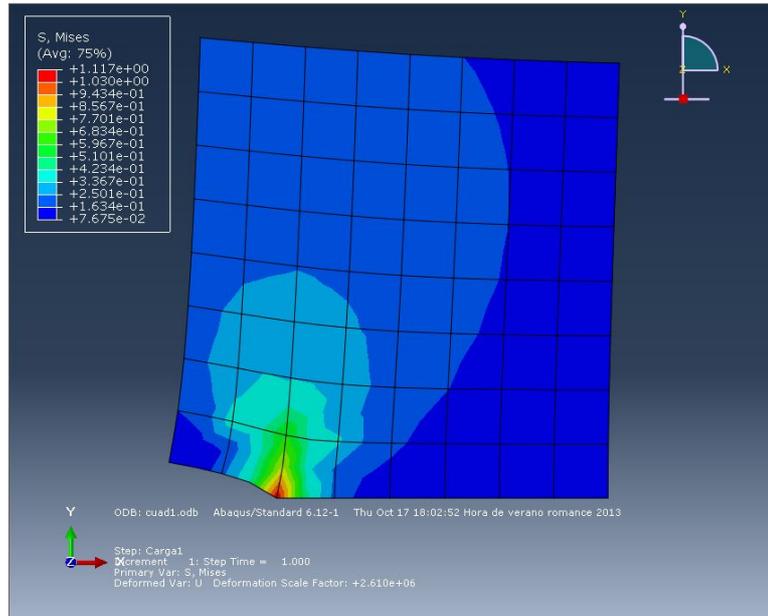


Figura 3.8. Caso 1, tensiones de von Mises cuad. cuadráticos

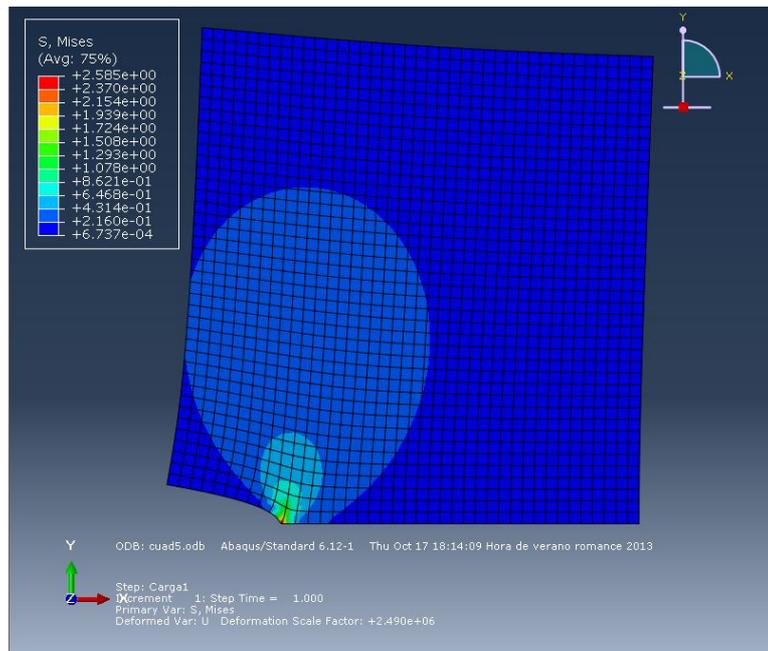


Figura 3.9. Caso 5, tensiones de von Mises cuad. cuadráticos

3 COMPROBACIÓN DEL MÉTODO DE APLICACIÓN DE CARGAS MEDIANTE ESTUDIO DE CONVERGENCIA EN 2D

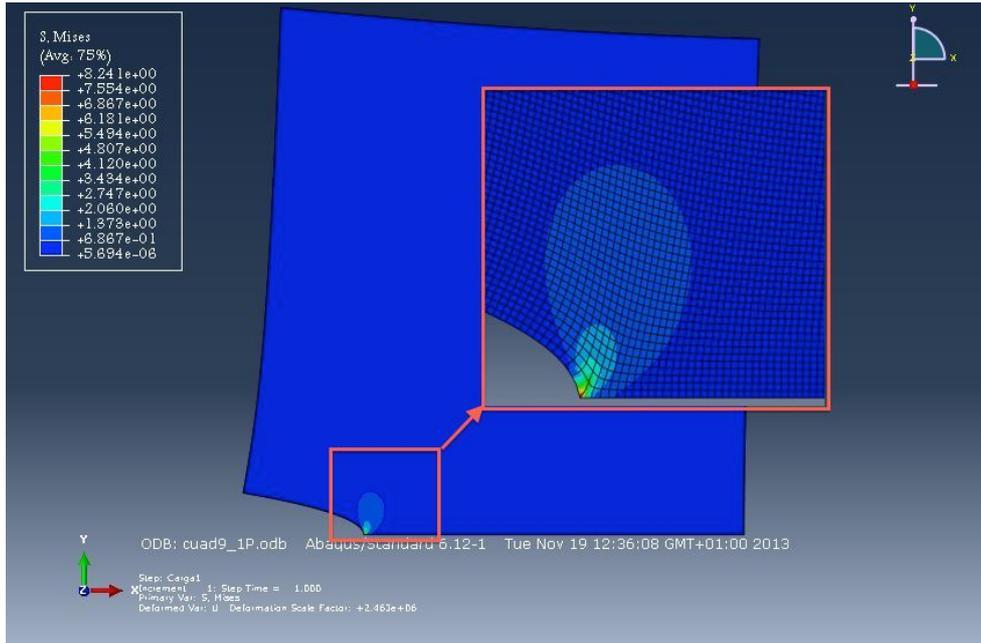


Figura 3.10. Caso 9, tensiones de von Mises cuad. cuadráticos

3.5 CONCLUSIÓN

En la tabla inferior podemos observar que no existe mucha diferencia en el error de cálculo de K_I entre los elementos lineales o cuadráticos y presentan las misma pendiente, ya que el refinamiento es h-uniforme, en lugar de h-adaptativo.

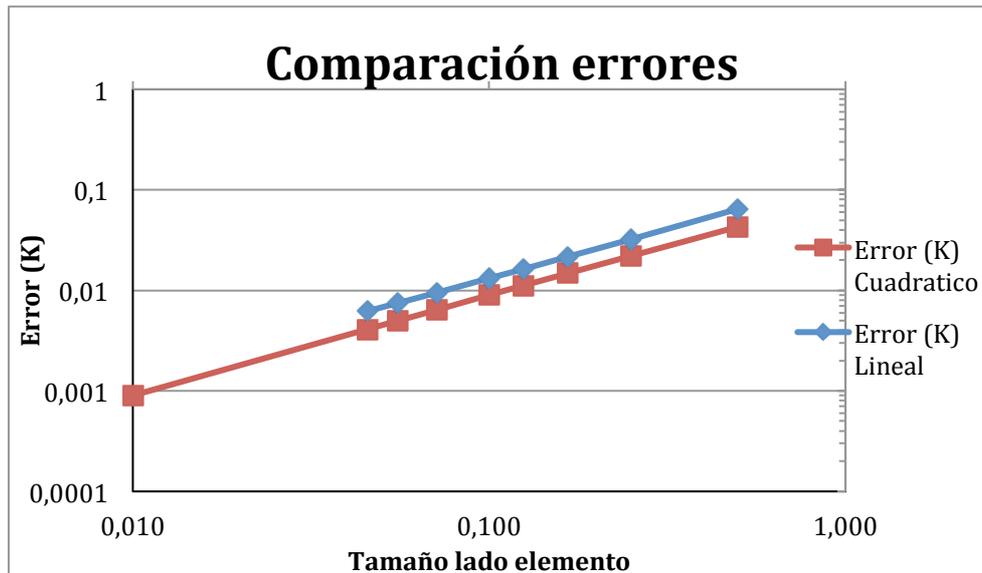


Figura 3.11. Representación conjunta del Error en función del tamaño del elemento para los dos estudios realizados.

Sin embargo, se observa en la sucesión de gráficas que conforme se mejora la precisión del modelo, se obtienen tensiones más altas, algo que cabía de esperar ya que se trata de una grieta y el comportamiento teórico de este tipo de singularidades es que las tensiones tienden a infinito. Por lo tanto, en el punto $r=0$, (frente de la grieta), las tensiones tienden a infinito conforme se mejora la precisión.

4 DESCRIPCIÓN DEL MODELO 3D

4.1 GEOMETRÍA

En este capítulo se procede a calcular el estado tensional en un sólido definido por los siguientes parámetros geométricos: anchura $W=2a$, altura $H=2a$, espesor $t=2a$ y $a=1$ de grieta lateral (“W” definida en dirección X, “H” definida en dirección Y, y “t” definida en dirección Z). El origen de coordenadas está situado en el centro de W, H y t. Por tanto, $Z=0$ es el plano medio y $Z=1$ es la superficie libre.

El modelo completo es simétrico en Z e Y, por lo tanto tan solo se modelará un cuarto.

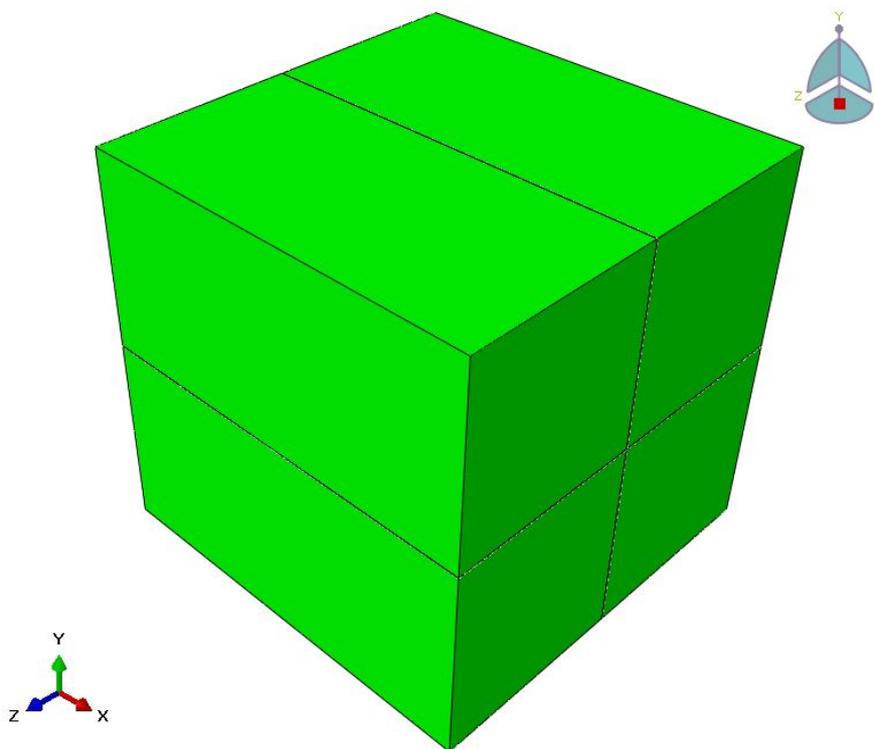


Figura 4.1. Representación espejada del sólido completo utilizado en la simulación, los cálculos se realizan con $\frac{1}{4}$ de la figura para reducir el coste computacional.

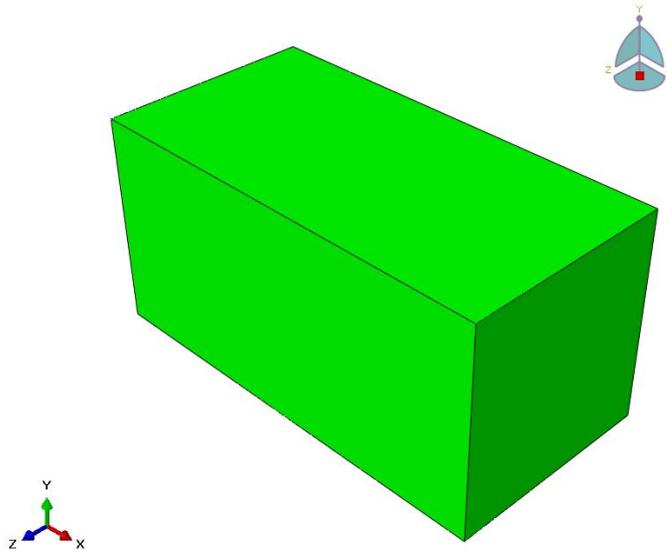


Figura 4.2. Representación de $\frac{1}{4}$ del sólido (el utilizado en las simulaciones).

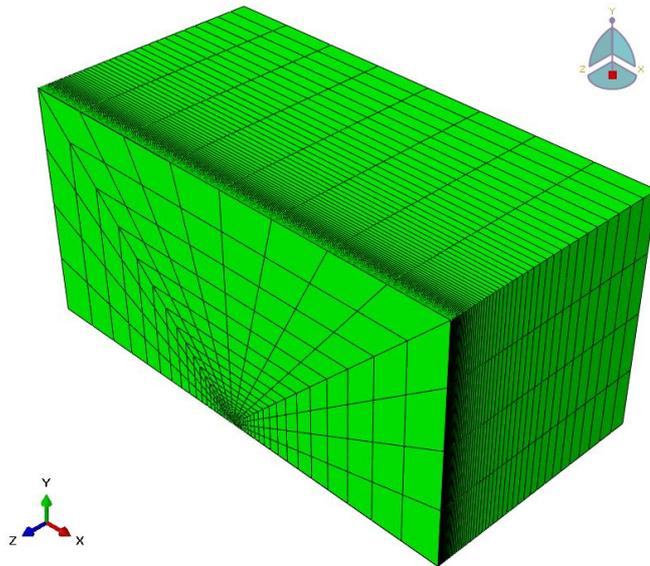


Figura 4.3. Representación malla de $\frac{1}{4}$ del sólido (el utilizado en las simulaciones).

4.2 DETALLE DEL MALLADO

El mallado será mediante elementos hexaédricos distribuidos de la manera más estructurada posible, realizando una malla mas refinada en las zonas de la singularidad de grieta y de esquina.

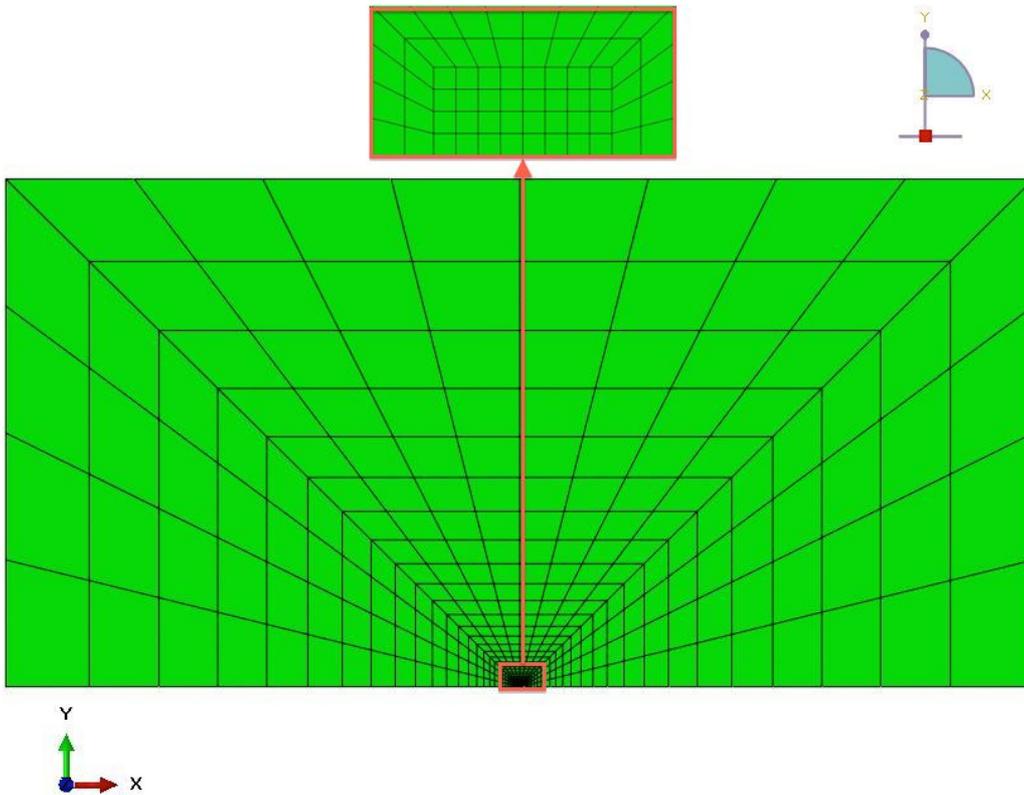


Figura 4.4. Malla en XY con detalle de la zona de grieta

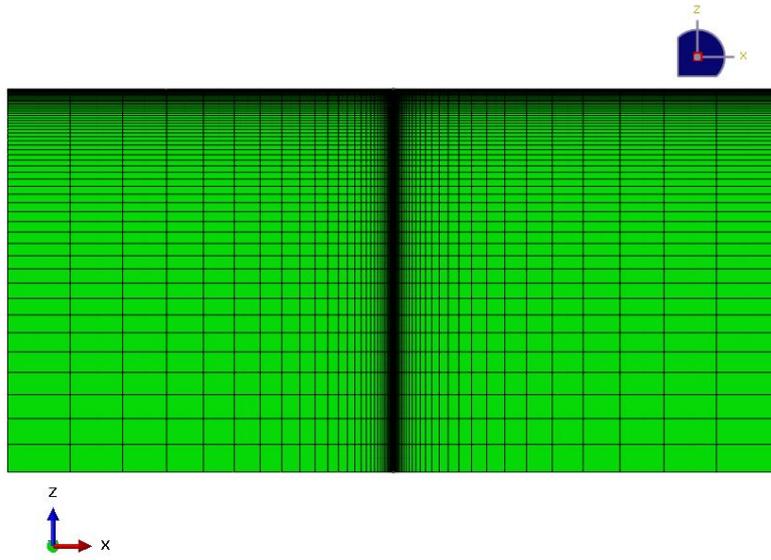


Figura 4.5. Malla en ZX (vista inferior).

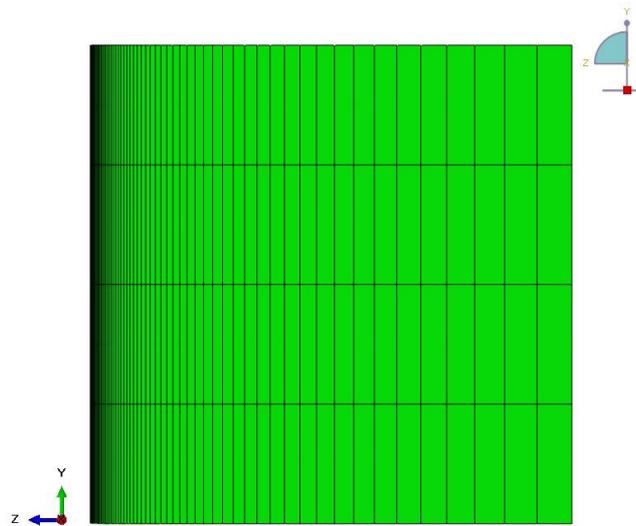


Figura 4.6. Malla en ZY (vista lateral).

4.3 COMPARACIÓN MODELO 3D EN DEFORMACIÓN PLANA CON EL MODELO 2D

Para comprobar la precisión del modelo en 3D propuesto, se realiza una comparación del modelo 3D definiendo restringiendo los desplazamientos en Z de la cara libre del modelo (Cara XY en $Z=1$). De esta manera estamos en un estado de deformación plana y el resultado debe ser idéntico al de 2D.

Los resultados han salido exactamente iguales para cada caso estudiado. Se probó primero con elementos 3D con integración reducida, pero los resultados discrepaban del caso 2D, por ello **todos los cálculos de los modelos de 3D han sido realizados con integración normal** (no reducida).

Las graficas que se muestran a continuación están representadas bajo los mismos límites. El resultado es idéntico para cada corte en Z del modelo 3D que para el modelo de 2D. En el gráfico se muestran representadas las tensiones de von Mises, aunque las Tensiones en X, Y y los desplazamientos son idénticos, así como el valor de la integral J y K_I .

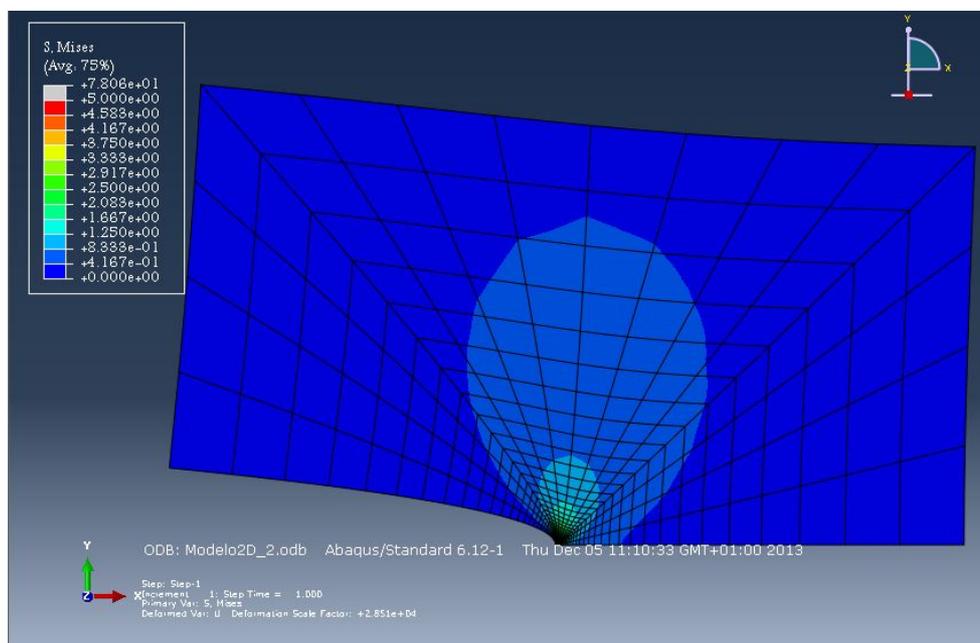


Figura 4.7. Solución del modelo 2D

4 DESCRIPCIÓN DEL MODELO 3D

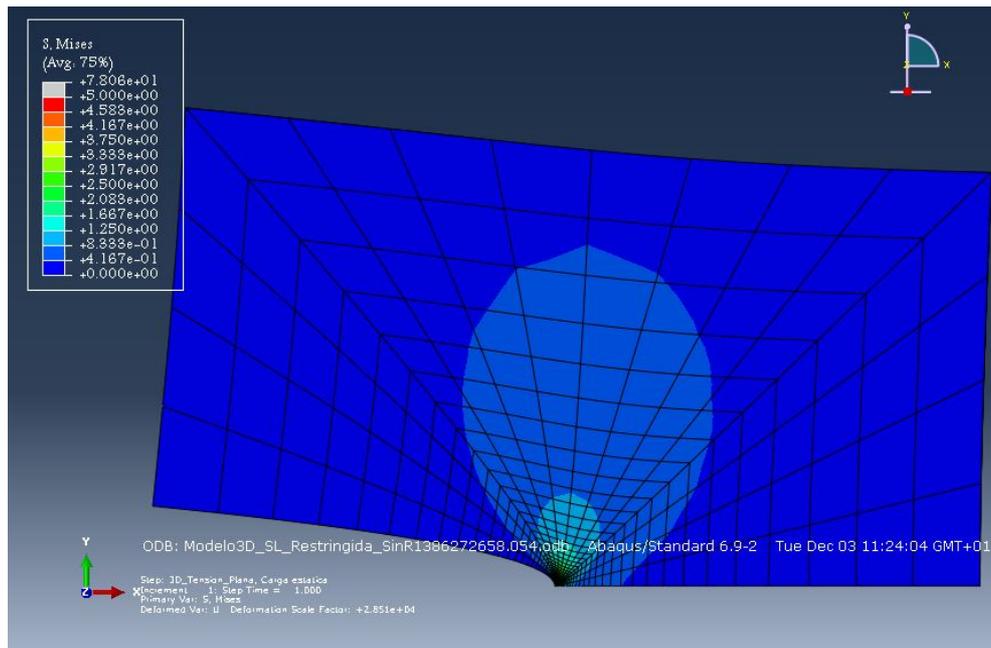


Figura 4.8. Solución del modelo 3D con la superficie libre restringida

A la vista de los resultados queda comprobado que el modelo 3D ofrece unos buenos resultados, y que la integración reducida no debe ser usada en nuestros modelos, para poder obtener una mejor precisión.

5 ANÁLISIS DEL MODELO 3D EN DEFORMACIÓN PLANA

5.1 ESTUDIO VALORES DE J, K Y T

Mediante el cálculo de la integral J se puede estudiar el comportamiento de los factores de intensidad de tensiones, muy relevantes en mecánica de la fractura. Como se ha explicado en el apartado 2.2.3.1 con la ecuación 2.25, mediante el valor de J se pueden obtener los valores de K_I , teniendo en cuenta que en este modelo se utiliza el modo I como único modo de carga. En el caso de tener más modos de carga, habría que utilizar la integral de interacción I. Internamente abaqus utiliza esta integral, ya que puede predecir los valores de K_{II} y K_{III} , aunque en este estudio basta con conocer el valor de la integral J para la obtención de K_I .

Los resultados obtenidos concuerdan con lo esperado, ya que son idénticas soluciones a lo largo del frente de grieta. Si hubiera habido algún fallo en el modelo los resultados no serían tan satisfactorios.

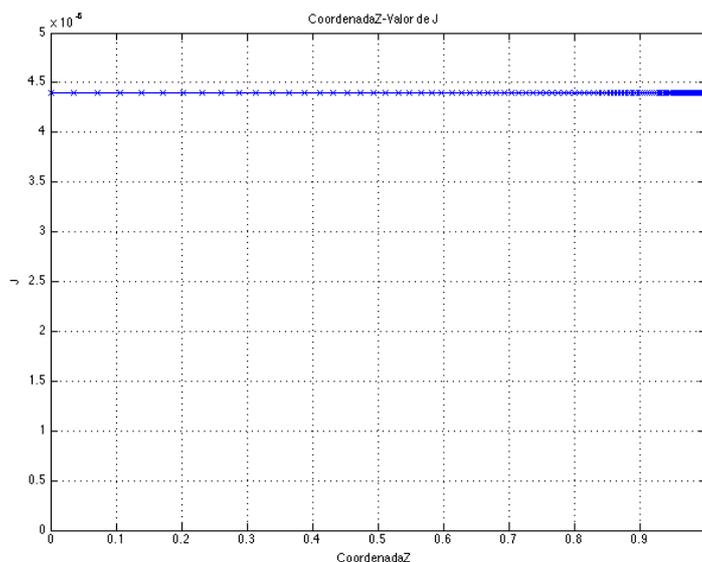


Figura 5.1. Valor de J a lo largo de Z en el modelo 3D deformación plana.

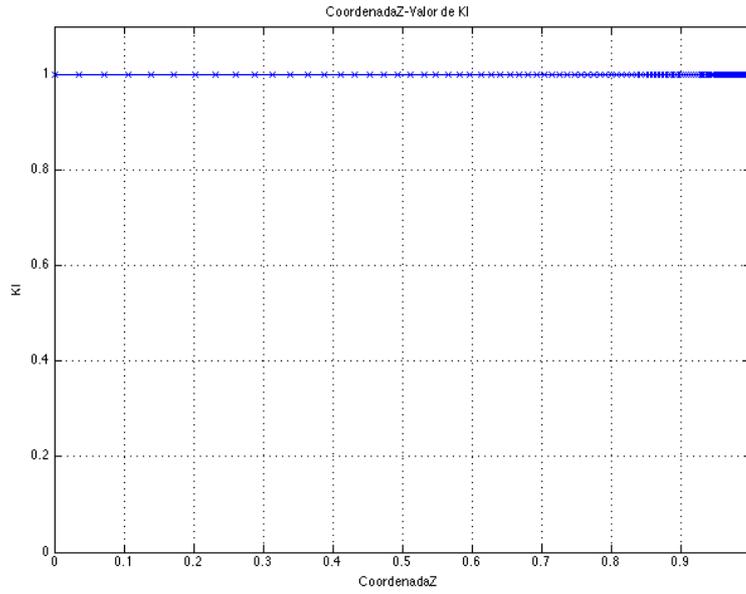


Figura 5.2. Valor de K_I a lo largo de Z en el modelo 3D deformación plana.

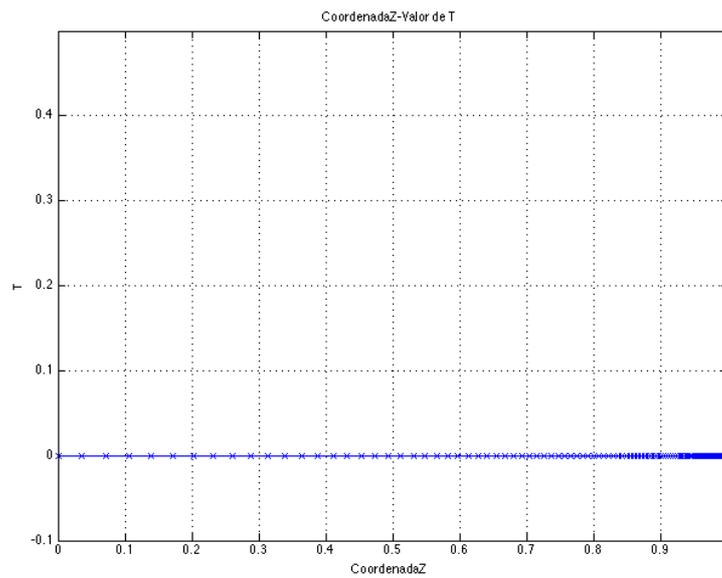


Figura 5.3. Valor del T-Stress a lo largo de Z en el modelo 3D deformación plana.

En la figura 5.2, el factor K_I a lo largo del frente, tiene un valor de aproximadamente 1, lo cual es de esperar ya que es el valor de K_I aplicado mediante las condiciones de contorno anteriormente descritas.

Estos cálculos han sido realizados sin T-stress, por lo tanto es correcta la gráfica que muestra el T-stress calculado a lo largo del frente. Esto demuestra que la precisión del modelo es buena, y muy precisa al calcular la integral J.

5.2 EXTRAPOLACIONES MEDIANTE LOS CAMPOS DE TENSIONES

Se ha conseguido obtener los factores de K_I mediante un método de extrapolación de los valores obtenidos mediante elementos finitos. Este método consiste en utilizar las expresiones de Williams que permiten obtener las tensiones con un K_I dado pero a la inversa, es decir, mediante el ajuste de las tensiones de EF obtener el valor K_I que las produce.

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^{1/2}) + \dots$$

Para el caso de $\theta=0$ y tomando limite cuando $r \rightarrow 0$, la expresión quedaría como:

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \rightarrow K_I = \sigma_{22} * \sqrt{2\pi r}$$

Y se puede observar que mediante el valor de σ_{22} y el valor de r , podemos calcular un valor de K_I correspondiente, si se ajusta una recta a estos valores, el resultado es una recta que tiende a cortar al eje Y para $r=0$, en el valor K_I estimado correspondiente a ese caso de tensiones.

Estos cálculos se han realizado mediante las tensiones obtenidas con elementos finitos y una rutina de matlab que realiza los cálculos anteriormente descritos. Después se han representado en gráficas que se muestran a continuación.

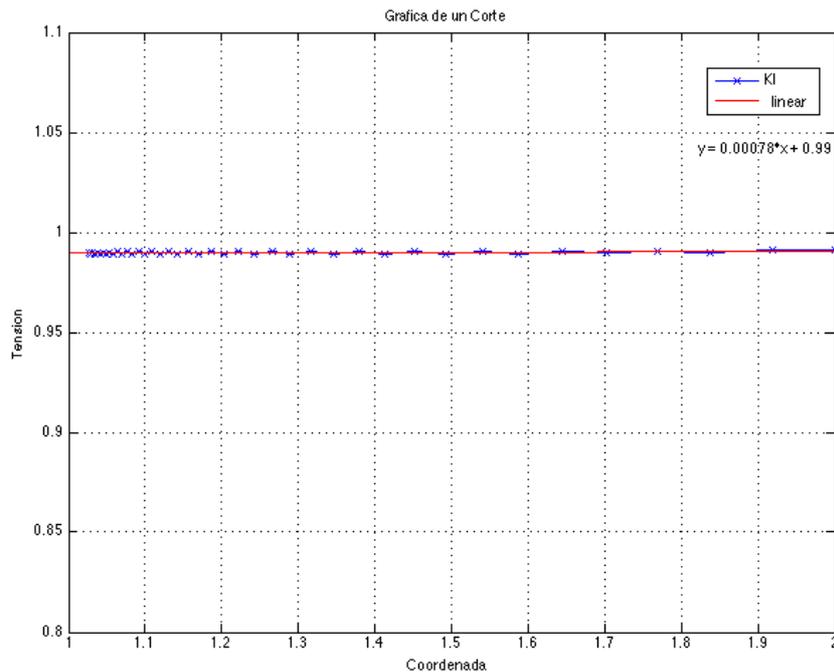


Figura 5.4. Extrapolacion de K_I mediante los campos de tensiones de elementos finitos.

Se puede observar en la figura 5.4 que la línea de tendencia del ajuste realizado, estima que el K_I de la extrapolación realizada es igual a 0.99, lo que señala que la extrapolación es un método aceptable para la obtención del factor de intensidad de tensiones “ K_I ”.

Al haber creado un modelo con las condiciones de contorno anteriormente descritas, la extrapolación se obtiene como una línea recta prácticamente horizontal. Esto es gracias al método de aplicación de carga empleado, ya que si no la influencia de otros términos habría modificado la solución obtenida y se habría obtenido una curva o una recta más inclinada.

6 ANÁLISIS DE LA SINGULARIDAD DE ESQUINA

6.1 MORFOLOGÍA DE LA SINGULARIDAD DE ESQUINA

La singularidad de esquina se debe a la estricción de la sección provocada en casos 3D por el coeficiente de Poisson, en un sólido con alguna singularidad de grieta. Es la intersección de la singularidad de grieta con la superficie libre la que provoca la singularidad de esquina.

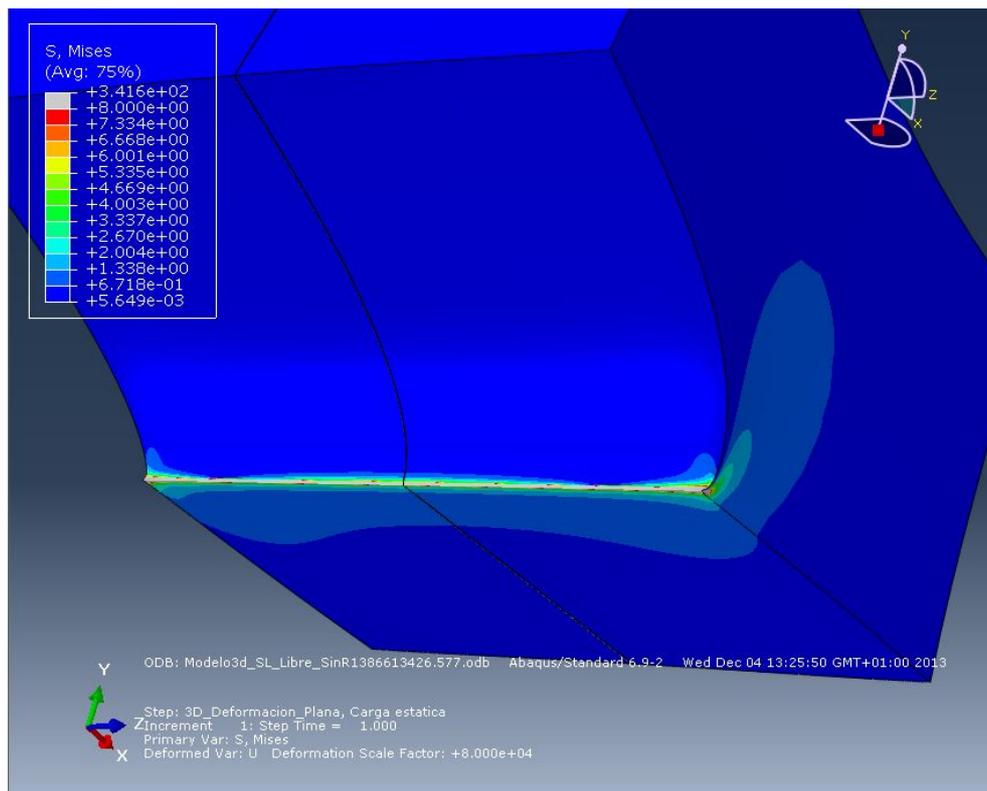


Figura 6.1. Representación de las tensiones de von Mises a lo largo del frente de grieta, modelo en espejo respecto al plano medio XY.

La influencia de la singularidad de esquina depende principalmente de algunos factores, como son el espesor del sólido en dirección de la grieta, el valor del coeficiente de Poisson y las condiciones de contorno a las que está sometido el sólido en cuestión.

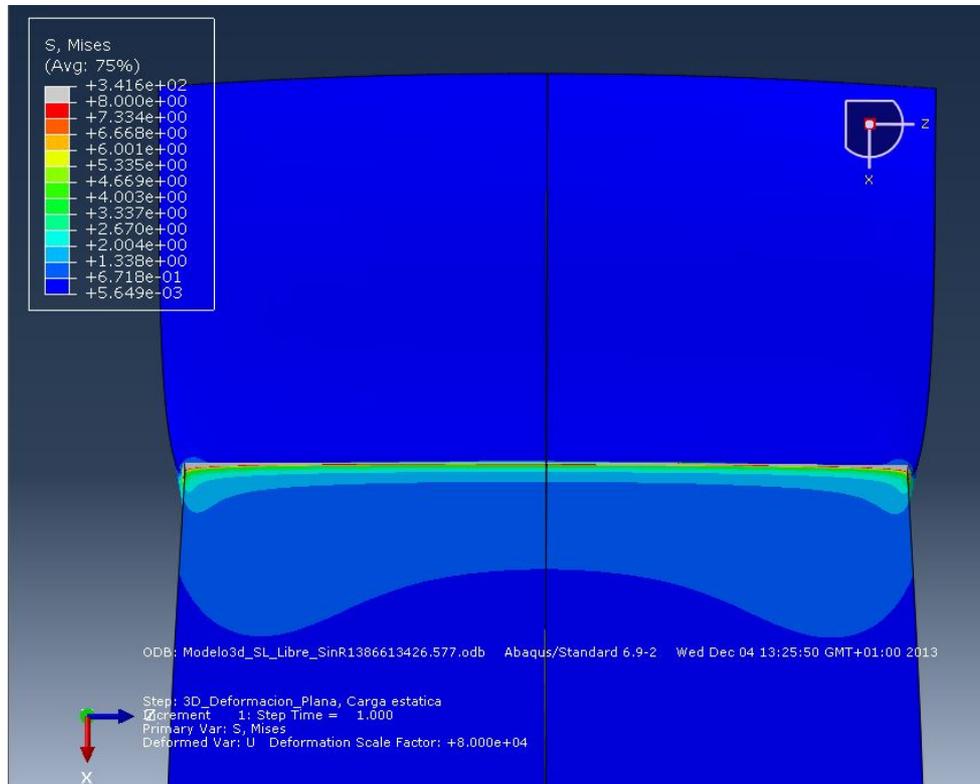


Figura 6.2. Tensiones de von Mises en frente de grieta, detalle de la morfología en espejo respecto XY.

En las figuras 6.1 y 6.2 se muestran representaciones del modelo 3D anteriormente descrito, con la simetría en XY activa, por lo tanto se observarán 2 cuartos del sólido simulado. Lo destacable de estas imágenes es la morfología que adquiere el sólido al estar bajo la influencia de la singularidad de esquina. Se representan las tensiones de von Mises.

Se puede observar en las figuras 6.1 y 6.2, cómo la distribución de tensiones a lo largo del eje Z (frente de grieta), va cambiando debido a la presencia de la esquina, produciéndose un estado tensional particular en el origen de la singularidad de esquina.

En la figura 6.2, se puede observar claramente la estricción que se produce en el frente de grieta, además de la distribución de tensiones, que nos demuestra que las tensiones en dicho frente, son mucho más altas (teóricamente infinitas), que en el resto de la pieza.

Las imágenes anteriores nos muestran claramente la existencia de la singularidad de esquina y su morfología, algo de necesario conocimiento para comprender todos los análisis y resultados de este trabajo.

6.2 ESTUDIO VALORES DE J, K Y T

Mediante el cálculo de la integral J se puede estudiar el comportamiento de los factores de intensidad de tensiones, muy relevantes en mecánica de la fractura. Como se ha explicado en el apartado 2.2.3.1 con la ecuación 2.25, mediante el valor de J se pueden obtener los valores de K_I , teniendo en cuenta que en este modelo se utiliza el modo I como único modo de carga. En el caso de tener más modos de carga, habría que utilizar la integral de interacción I. Internamente abaqus utiliza esta integral, ya que puede predecir los valores de K_{II} y K_{III} , aunque en este estudio basta con conocer el valor de la integral J para la obtención de K_I .

Los siguientes resultados se ven influenciados por la presencia de la singularidad de esquina y demuestran claramente que dicha singularidad afecta al comportamiento mecánico del material de una manera importante.

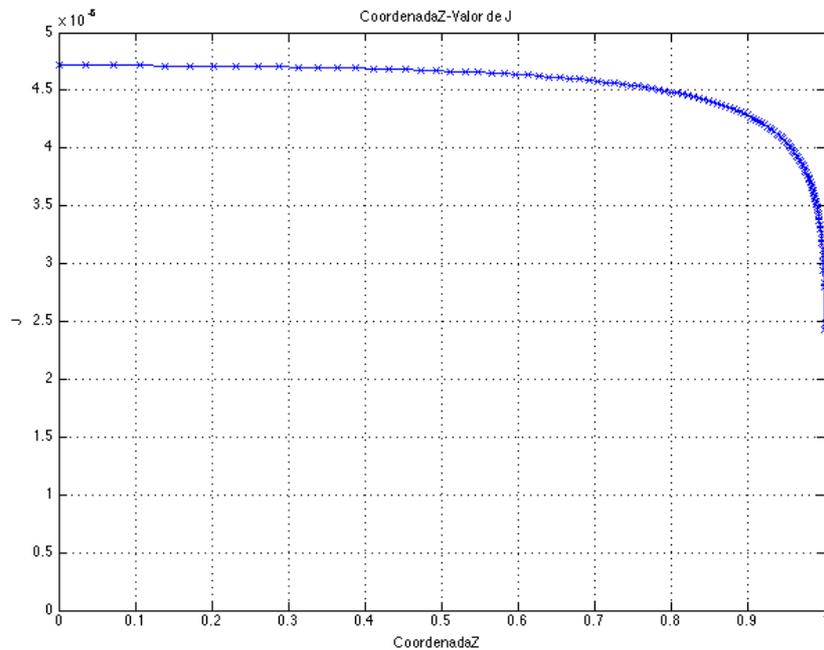


Figura 6.3. Valor de J a lo largo de Z en modelo 3D.

En la figura 6.3, se observa que el valor de J cae al acercarse al borde libre del extremo de grieta, acercándose a un valor que tiende a 0.

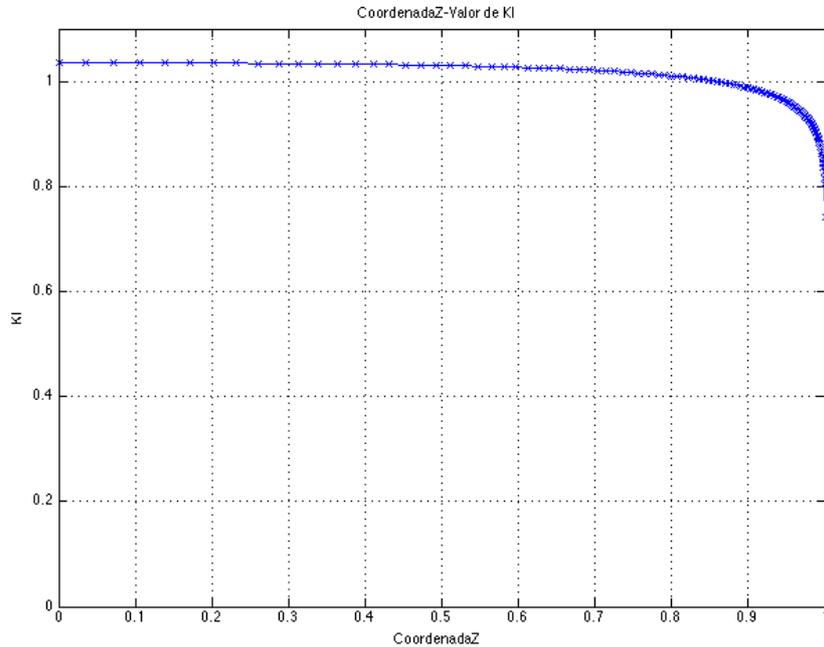


Figura 6.4. Valor de K_I a lo largo de Z en modelo 3D.

El valor de K_I se ve afectado a lo largo de todo el frente de grieta debido a la singularidad de esquina, produciéndose un aumento de dicho factor en el interior del sólido y una disminución en los extremos libres.

Este fenómeno origina la morfología final del avance de la grieta por fatiga. Por ello los sólidos afectados por la singularidad tienen una velocidad de crecimiento de grieta mayor por el interior del sólido que por el exterior en algunos momentos de la propagación de grieta, ello provoca la geometría curva del frente final de grieta en crecimiento de fatiga (aunque este aspecto no es estudiado en la presente Tesina).

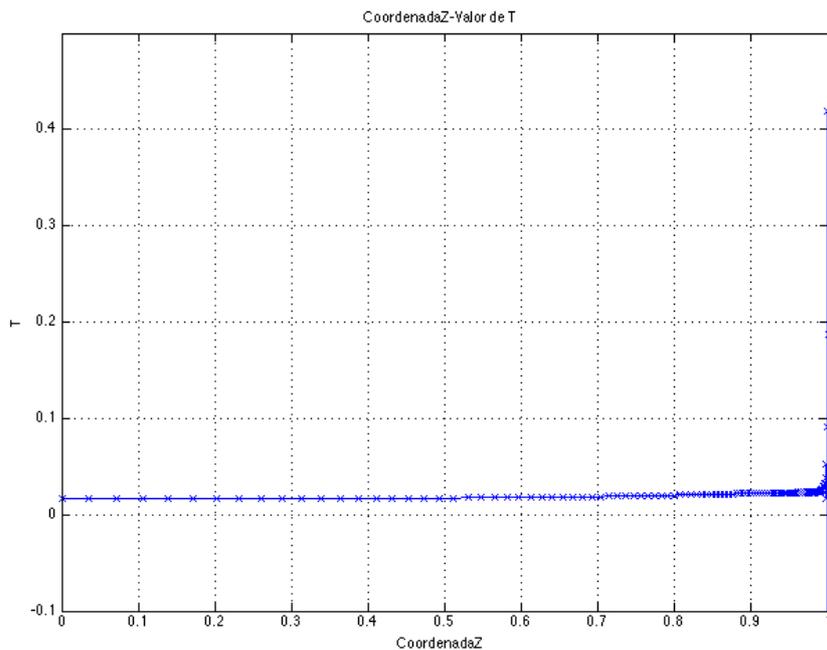


Figura 6.5. Valor de T-Stress a lo largo de Z en modelo 3D.

Es interesante señalar que el T-Stress que debería ser nulo, se ve perturbado también por la presencia de la singularidad de esquina, destacando que al acercarse al extremo libre comienza a tomar valores no acotados.

Esto indica que el método para calcular el T-Stress mediante Abaqus no es un método fiable para casos en 3D afectados por la singularidad de esquina. El método utilizado por Abaqus es la integral de interacción "I", la cual fue definida por Nakamura y Parks en 1992 [15]. Cuando ellos definieron esta integral de interacción, lo hicieron para casos de deformación plana, pero en este caso no existe deformación plana, por lo que no es un método aplicable para el cálculo del T-Stress.

6.3 ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE POISSON

En este apartado se comparan los resultados de J, K y T para diferentes valores del coeficiente de Poisson. De esta manera se puede observar que dicho coeficiente es un factor fundamental en la influencia de la singularidad de esquina, pues es el origen de las contracciones transversales.

6.3.1 Resultados sin T-Stress aplicado

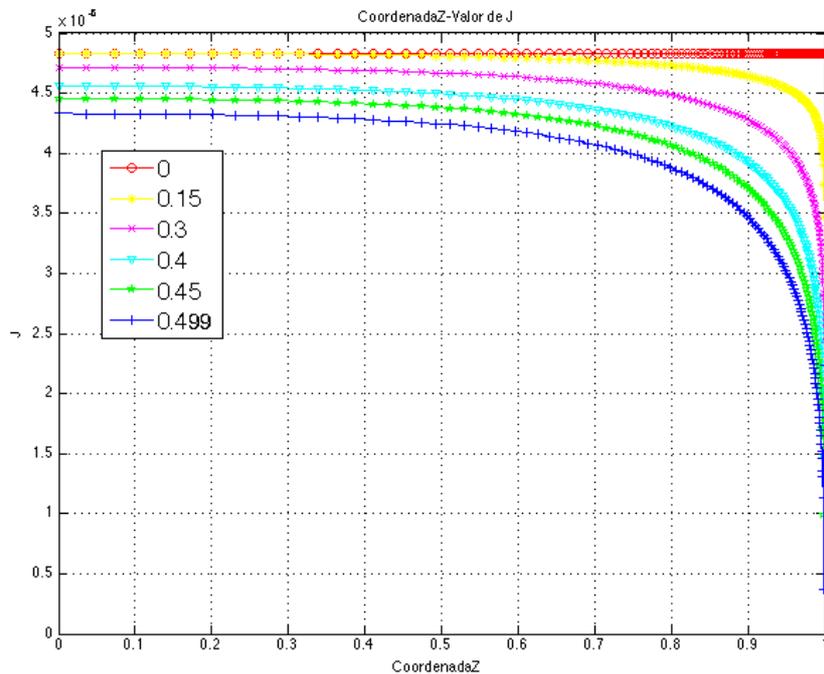


Figura 6.6. Valor de J a lo largo de Z en modelo 3D para diferentes coeficientes de Poisson.

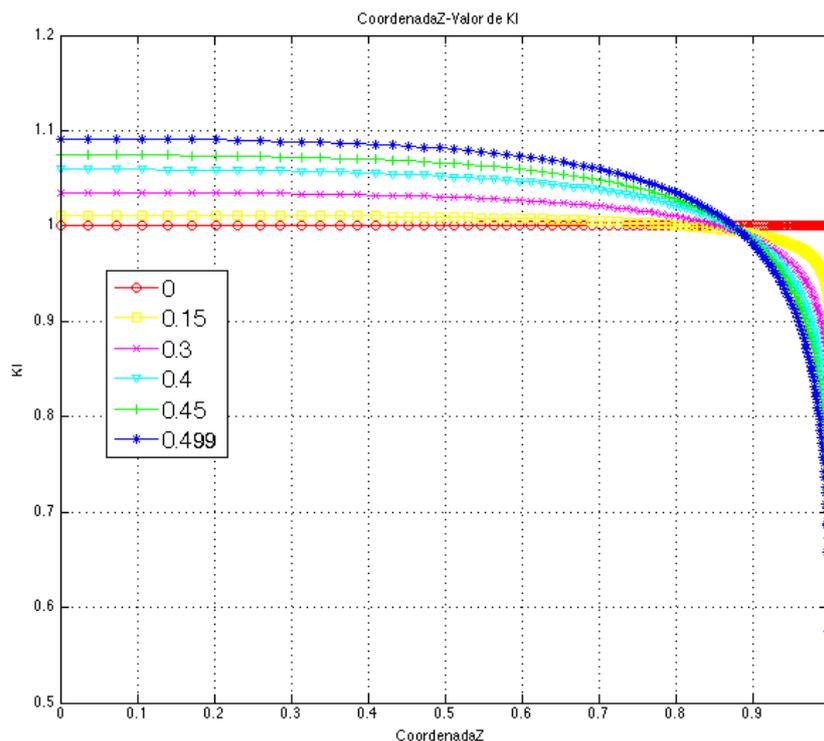


Figura 6.7. Valor de K_I a lo largo de Z en modelo 3D para diferentes coeficientes de Poisson.

En las figuras 6.6 y 6.7 se puede observar una influencia notable de la singularidad de esquina, que aumenta conforme nos acercamos a $Z=1$. Algo destacable de estas figuras es el caso de Poisson=0, en el cual la influencia de la singularidad de esquina desaparece y tan solo existe la singularidad de Williams caracterizada por K_I .

En la figura 6.7 se observa la disminución de K_I al acercarse a la singularidad de esquina, y un aumento en el centro del sólido que se podría decir que compensa la disminución de K_I en los extremos. Este fenómeno es el responsable de la geometría de las grietas producidas por fatiga en los sólidos suficientemente gruesos, que da lugar a un frente curvo en lugar de un frente recto.

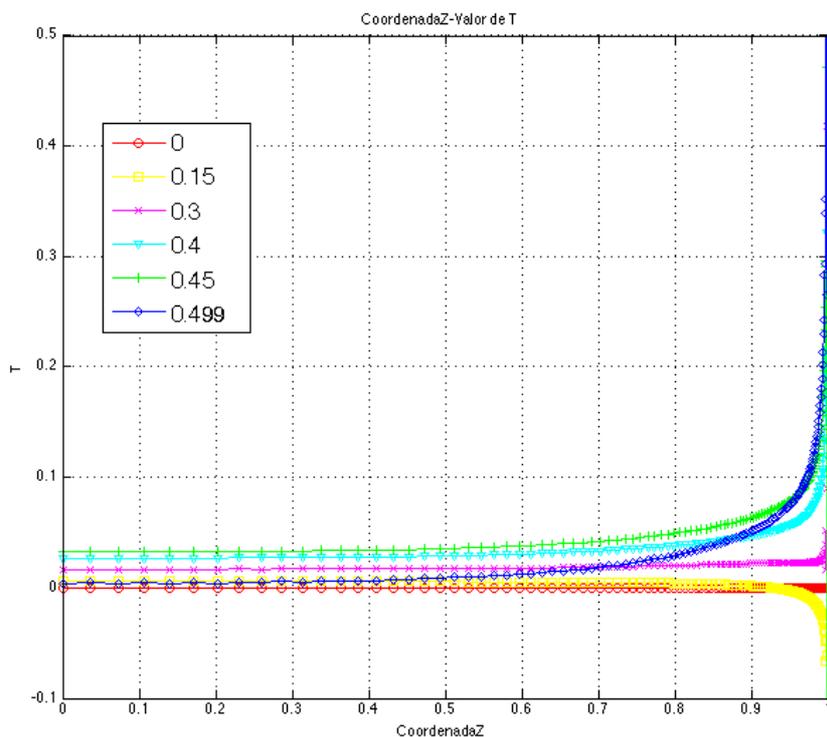


Figura 6.8. Valor de T-Stress a lo largo de Z en modelo 3D para diferentes coeficientes de Poisson.

En la figura 6.8 se puede volver a ver la misma tendencia que en la figura 6.5 respecto al cálculo del T-Stress mediante la integral de interacción que utiliza Abaqus internamente. El T-Stress calculado en la figura debería ser 0 para todos los casos con diferentes valores del coeficiente de Poisson. En lugar de obtener ese resultado se obtienen unos valores distintos de 0, que se acentúan cerca de la singularidad. Además se observa que no solo influye la cercanía a la singularidad, sino que el valor del coeficiente de Poisson influye mucho en el valor del T-Stress mínimo en valor absoluto, después la singularidad aumenta dicho valor. Estos resultados son similares a los de Nakamura y Parks en 1992 [15], aunque en este caso los resultados cuentan con una mayor discretización.

Es decir, para valores de $\nu \neq 0$ se obtienen valores falsos de T-stress no esperados. Esto es debido a que el método de la integral de interacción supone hipótesis de deformación plana que no se cumple en este caso.

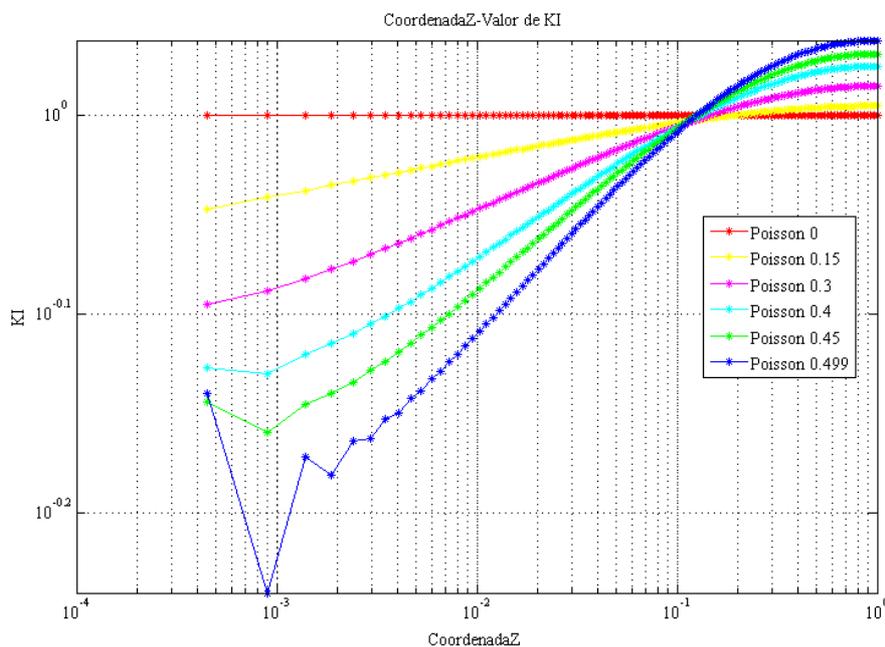


Figura 6.9. Valor de K_I a lo largo de Z en modelo 3D para diferentes coeficientes de Poisson representado en escala Log-Log. (Origen trasladado a singularidad de esquina)

En la figura 6.9 se han representado los valores de K_I para diferentes coeficientes de Poisson a lo largo del frente de grieta, con el origen en el vertex para poder comparar con la solución de Benthem [6]. El resultado son las curvas de la figura, las cuales muestran una tendencia lineal en escala log-log al acercarse a la singularidad de esquina. Estas rectas obtenidas señalan que la singularidad de esquina debe estar definida por una ecuación potencial de forma similar a las ecuaciones de Williams, al menos en dirección Z. Esta pendiente va aumentando con el valor del coeficiente de Poisson, lo cual demuestra que la influencia de la singularidad aumenta con dicho coeficiente.

También se observa que las curvas se cruzan aproximadamente en $(r/t) = 0.15$. Esto podría significar que el dominio de la singularidad de esquina abarca hasta dicho valor de r , ya que al superar ese valor la recta logarítmica se convierte en curva, debido posiblemente por que la esquina no ejerce tanta influencia y queda mezclada con la singularidad de Williams.

Valor de Poisson	0	0.15	0.30	0.40	0.45	0.499
Valor de pendiente obtenido	0	0,0185	0,0437	0,0679	0,0842	0,1054
Valor obtenido por Giner con PGD [4]	0	0,017	0,049	0,087	0,116	-
Valor de Benthem	0	0,016	0,048	0,087	0,116	-

Tabla 6.1. Pendientes de las rectas de la figura 6.9 (calculadas de $Z=0,004$ a $0,05$).

El resultado obtenido en las pendientes muestra un error creciente ligado al coeficiente de Poisson. La figura 6.9 muestra para valores de $Z < 0,004$ un error numérico demasiado grande, esto provoca que los resultados de la tabla 6.1 no coincidan con los resultados que obtuvo Giner mediante PGD [4], los cuales se acercan a los resultados analíticos de Benthem [6].

Estos resultados que no se ajustan tan bien a las pendientes de Benthem [6] señalan a una mala discretización de la malla para este tipo de problema. Ello provoca que los resultados para Poisson 0.4 sean menos precisos que los resultados para Poisson 0.15 y 0.3. También es posible que mejorasen los resultados aumentando las dimensiones de la pieza, ya que alejar el punto de aplicación de las cargas podría tener una influencia en la solución.

Giner [4] obtuvo los valores mostrados, calculando la pendiente entre $Z=0.001$ y 0.01 . En el modelo calculado los valores en este rango de Z no tienen suficiente precisión como para considerarlos válidos.

6.3.2 Resultados con T-Stress

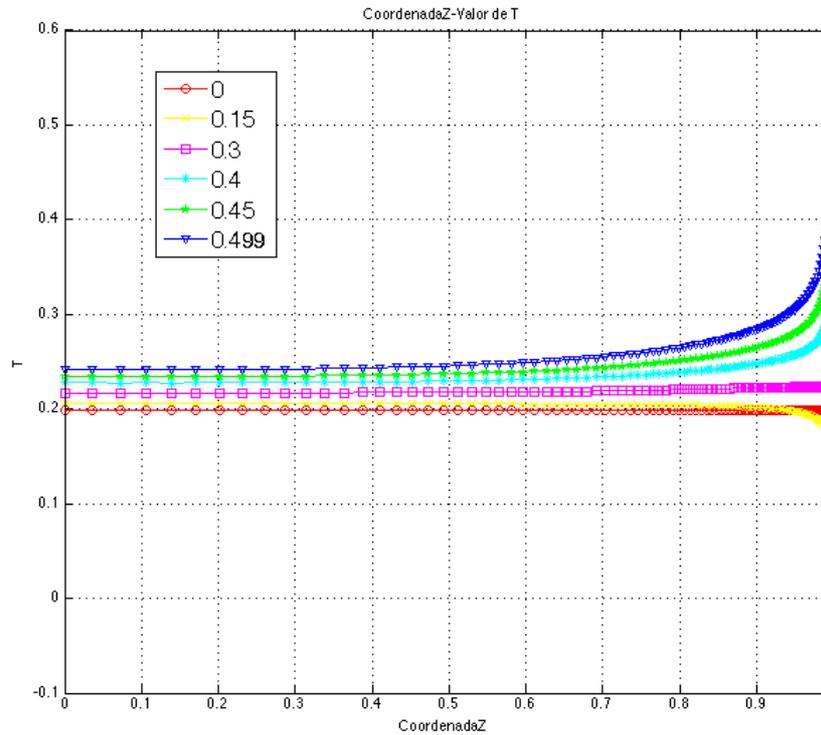


Figura 6.10. Valor de T-Stress a lo largo de Z en modelo 3D con T-Stress aplicado, para diferentes coeficientes de POISSON (T-Stress=0.2).

En la figura 6.9 se observan resultados similares a la figura 6.8, pero desplazados un valor positivo de 0.2, que es el T-Stress aplicado. La única diferencia se puede ver para el caso de Poisson=0.499, en el cual la curva no se cruza con las demás, que es lo que se observaba en la figura 6.8. De nuevo el T-stress únicamente queda bien estimado en el caso de $\nu=0$.

6.4 EXTRAPOLACIONES MEDIANTE LOS CAMPOS DE TENSIONES

Los campos de tensiones están calculados con “Abaqus CAE” y extraídos a un fichero de texto mediante la opción “Report” del mismo programa. Mediante la programación de rutinas de Matlab se lee el fichero y se introduce en unas matrices para realizar las operaciones deseadas (se adjuntan en el anexo).

6.4.1 Extrapolaciones de K_I

En este apartado se va a realizar un análisis de las extrapolaciones en el modelo de elementos finitos con singularidad de esquina. Para extrapolar K_I se va a proceder como en el apartado 5.2.

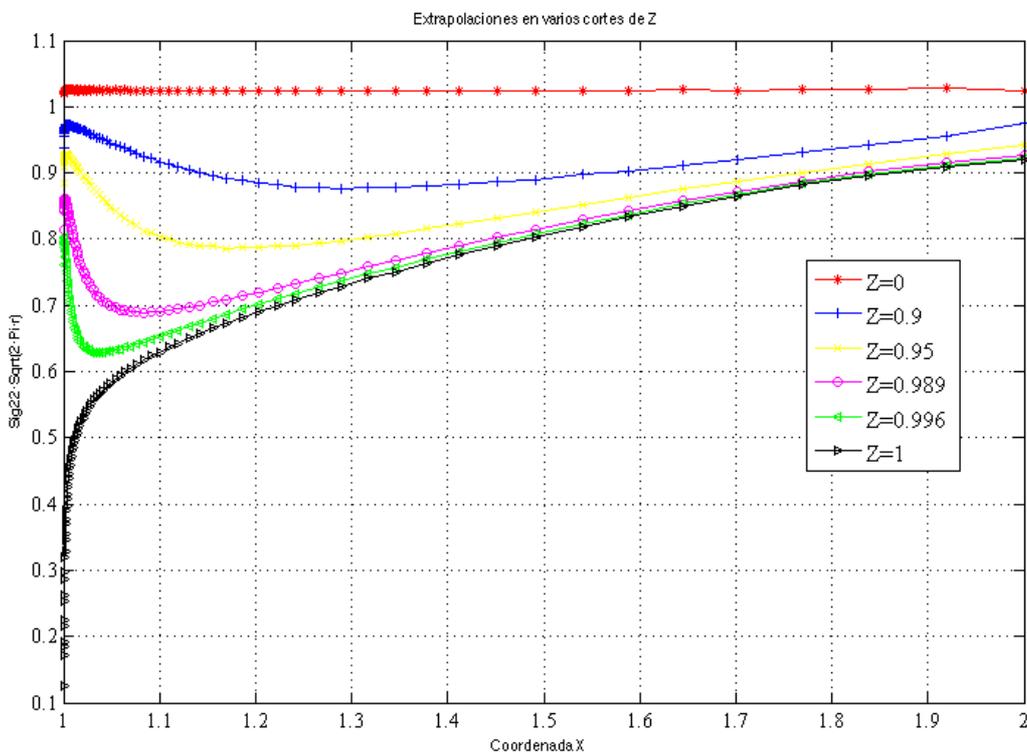


Figura 6.11. Extrapolaciones de K_I vs. X en modelo 3D para distintos valores de Z.

En la figura 6.10 se han reunido los resultados de las extrapolaciones de K_I para varios valores de Z , es decir, se muestran los resultados para 6 secciones del sólido simulado.

Lo más destacable de la figura es la diferente estabilidad en la tendencia de la solución de los dos extremos $Z=0$ y $Z=1$, esto se debe a que la solución en $Z=1$ está definida únicamente por la solución de la singularidad de esquina y $Z=0$ tiene poca influencia de la esquina.

Los tramos mostrados empiezan desde $Z=0.9$, ya que entre 0 y 0.9 la influencia de la esquina es mucho menor.

El uso de esta figura deja claro que la obtención del K_I por este método cerca de la esquina, es un método poco fiable, aunque esta figura muestra claramente la influencia que tiene la esquina en todas las soluciones cerca de su zona de dominio.

6.4.2 Extrapolaciones de tensiones debidas a la singularidad de esquina representadas en log-log

Una vez se han extraído las tensiones de resultados del modelo de elementos finitos y se obtiene la matriz de elementos finitos que incluye cada nodo con su coordenada y sus tensiones, se calcula otra matriz que contiene las tensiones de Williams para cada nodo y las tensiones debidas a la singularidad de esquina. Las tensiones de Williams se calculan mediante la coordenada de cada nodo y las debidas a la singularidad de esquina tal como indica la ecuación 6.1. Asumiendo la linealidad de la solución elástica se puede escribir:

$$\begin{aligned}\sigma_{FE} &= \sigma_{Williams} + \sigma_{Vertex} \\ \sigma_{Vertex} &= \sigma_{FE} - \sigma_{Williams}\end{aligned}\tag{6.1}$$

Con las tensiones de vertex en una matriz se observan los cálculos obtenidos para $Z=1$, superficie libre en la que se encuentra la singularidad de esquina. En esta superficie las tensiones calculadas de Williams son nulas, debido a que K_I debería ser nulo en la superficie libre, es decir, las tensiones debidas al vertex son la solución directa de elementos finitos para el caso de la superficie libre.

Las extrapolaciones que se mostrarán a continuación son de varios “camino” de “r” contenidos en el plano $Z=1$. Los planos diferentes tienen un valor de K_I impreciso y su cálculo sería posible, pero tan solo aproximado. Los “camino” escogidos inician en el centro de la singularidad de esquina, en “r=0” y terminan al intersectar con la superficie límite del sólido en la dirección correspondiente. El ángulo “ θ ” define la dirección del “camino” calculado. Los ángulos escogidos son: 0 , $\pi/4$, $\pi/2$, $3 * \pi/4$ y π . Se detalla mejor en la tabla 6.2.

Path	r inicio	r fin	Theta (θ)
1	0	1	0
2	0	1,41	$\pi/4$
3	0	1	$\pi/2$
4	0	1,41	$3 \pi/4$
5	0	1	π

Tabla 6.2. Caminos calculados en tensiones

A continuación se muestran las gráficas representadas con los mismos límites en ejes X e Y para poder comparar los resultados de una manera más sencilla. Se han representado las tensiones logarítmicas para ajustar a una recta y las tensiones lineales para poder comprobar la veracidad de cada recta, ya que las tensiones Log-Log han de representarse en valor absoluto. Ello provoca ciertos “rebotes” e incongruencias matemáticas que no se producen en la realidad. Es el caso por ejemplo de la figura 6.18, las pendientes se representan al final de cada apartado en una tabla, no mostrando aquellas que no tienen un sentido físico o están mal calculadas por cuestiones de falta de precisión del método de elementos finitos.

Se representan los casos de Poisson 0.15, 0.3, 0.4 y el caso de deformación plana, las conclusiones se exponen al final del apartado. En dichas representaciones se han tomado las soluciones de elementos finitos con $r > 0.0005$, ya que valores más cerca de la singularidad no tienen suficiente precisión. Para el cálculo de las pendientes se toman valores desde $r = 0.0005$ hasta $r = 0.025$, con el fin de considerar únicamente el campo de acción del vertex.

6.4.2.1 Caso de Poisson 0.15 (plano Z=1)

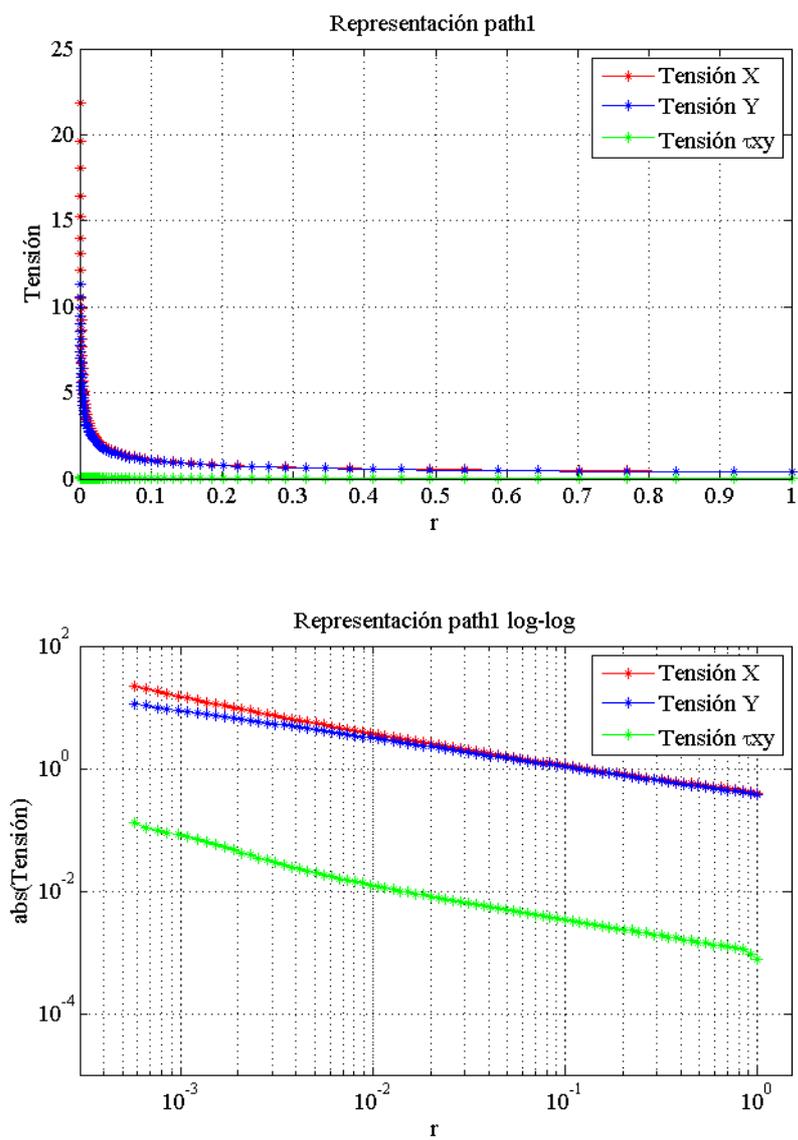


Figura 6.12. Tensiones Path 1 a lo largo de “r” con Poisson 0.15

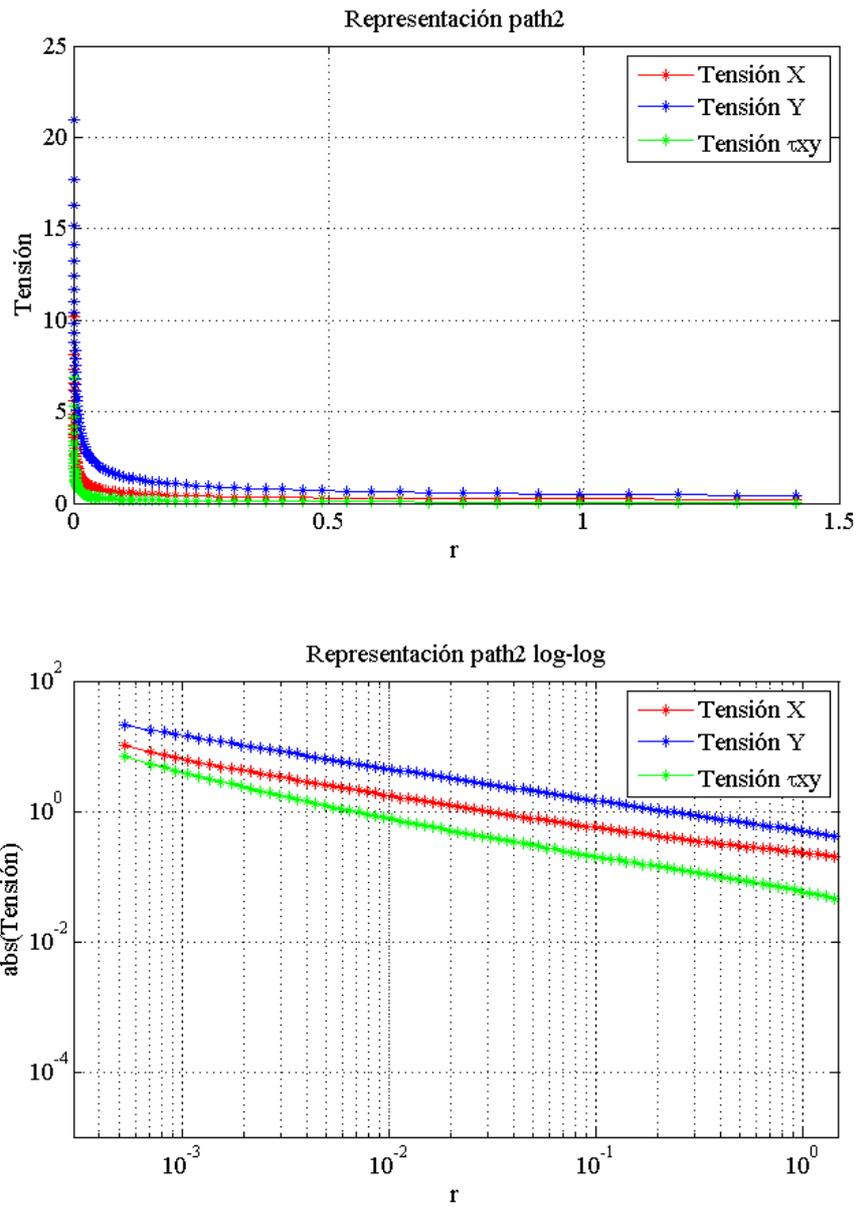


Figura 6.13. Tensiones Path 2 a lo largo de "r" con Poisson 0.15

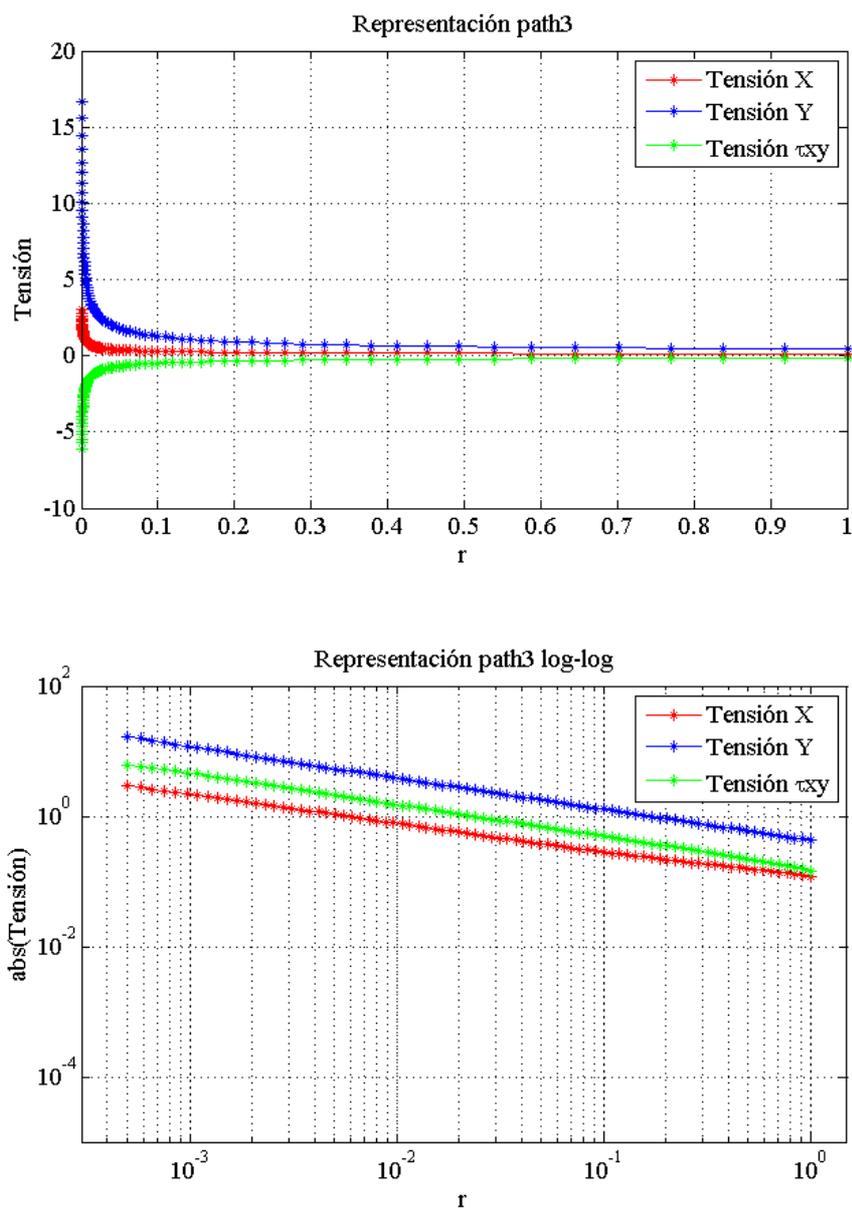


Figura 6.10. Tensiones Path 3 a lo largo de "r" con Poisson 0.15

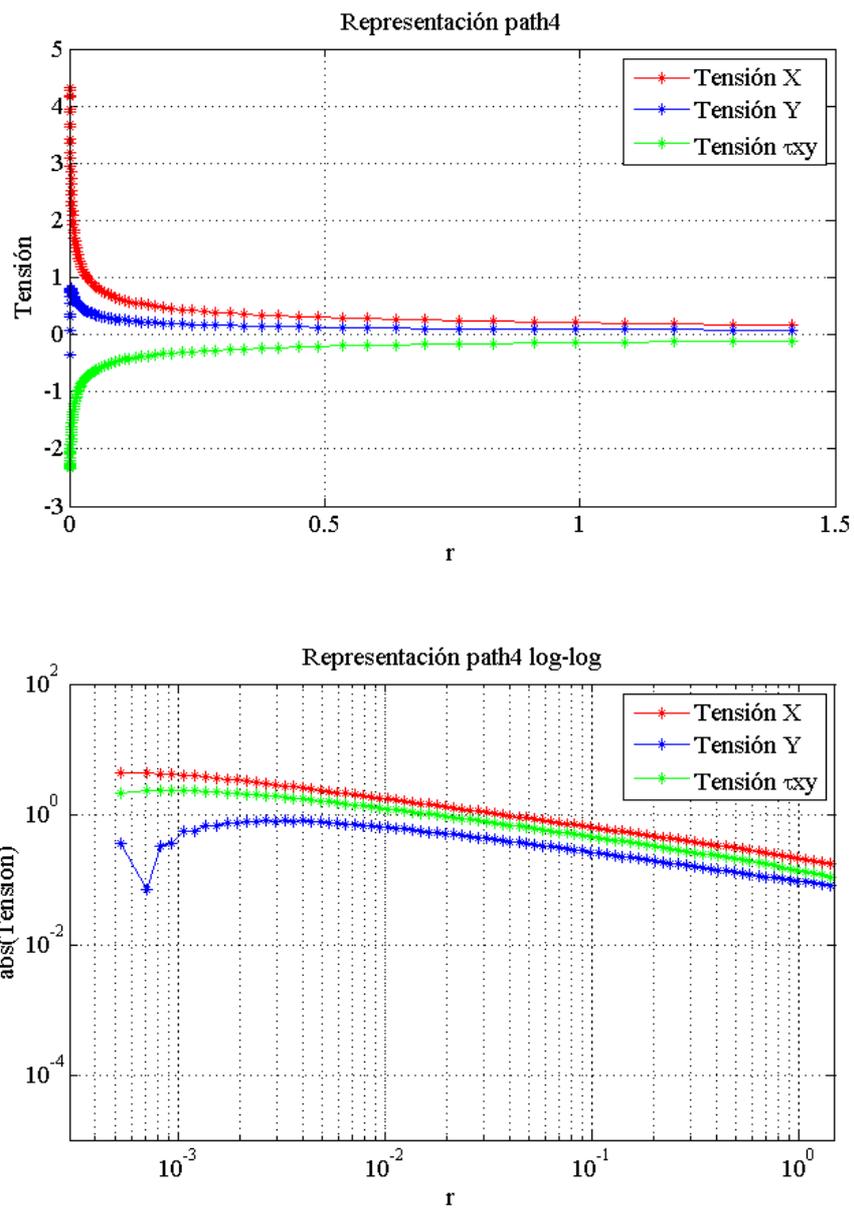


Figura 6.15. Tensiones Path 4 a lo largo de "r" con Poisson 0.15

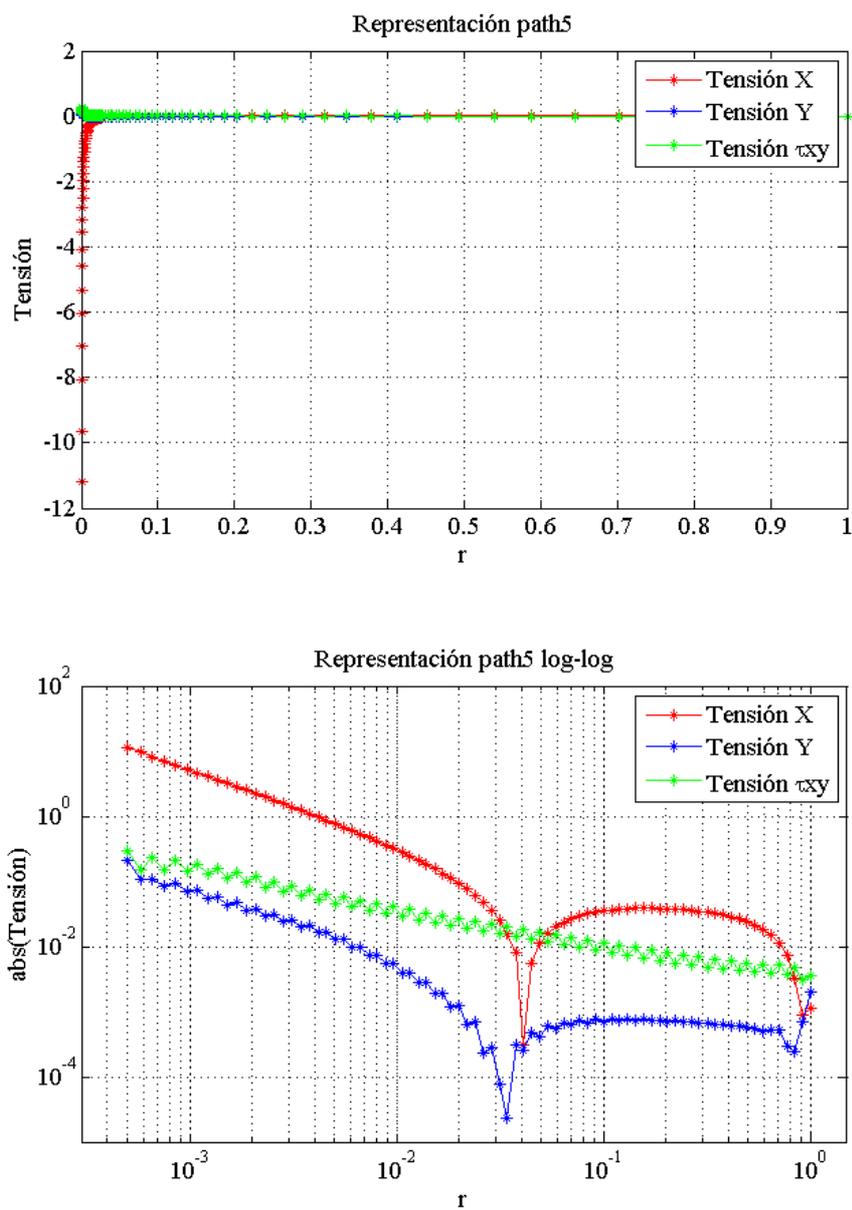


Figura 6.11. Tensiones Path 5 a lo largo de "r" con Poisson 0.15

Poisson 0.15						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m σ_x	m σ_y	m τ_{xy}
1	0	1	0	-0,601	-0,4543	-0,7775
2	0	1,41	$\pi/4$	-0,5635	-0,5127	-0,7014
3	0	1	$\pi/2$	-0,4505	-0,4869	+0,4797
4	0	1,41	$3 \pi/4$	-0,3721	0,1201	+0,2855
5	0	1	π	-	-	-

Tabla 6.3. Resultados de la pendiente de cada Path para Poisson=0.15

6.4.2.2 Caso de Poisson 0.3 (plano Z=1)

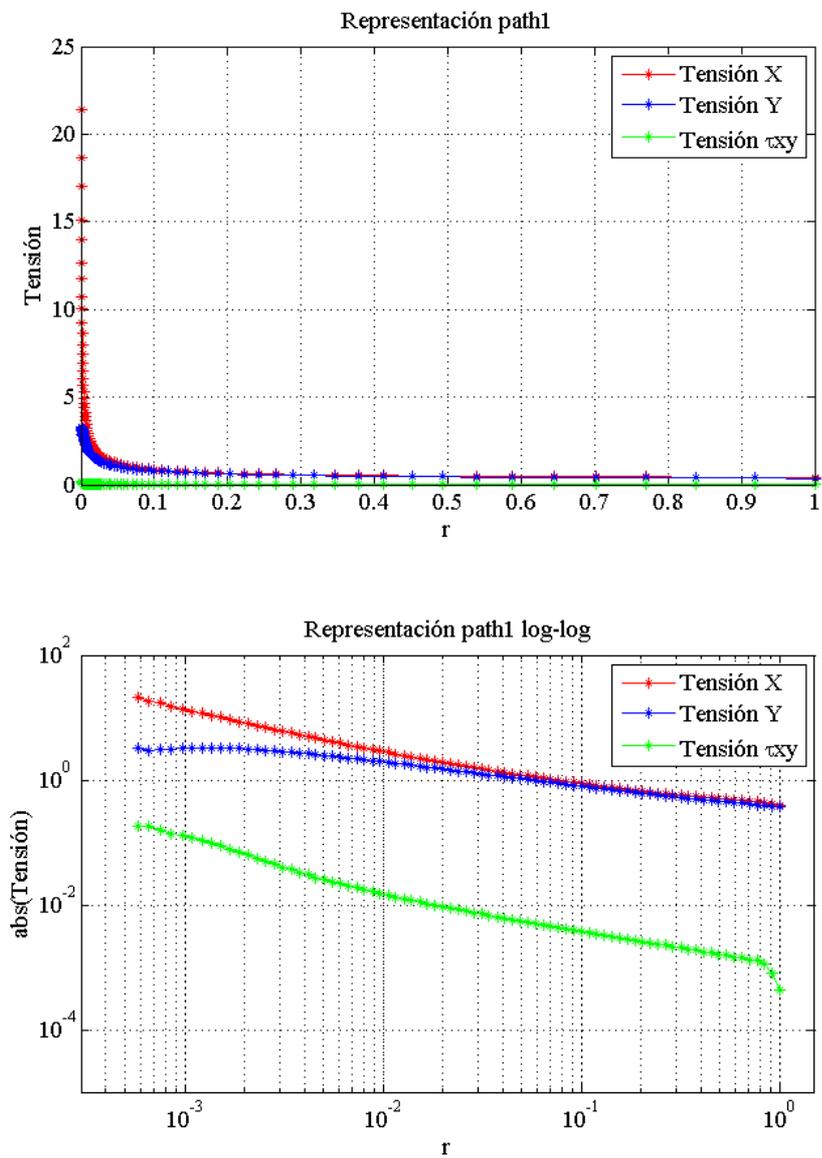


Figura 6.12. Tensiones Path 1 a lo largo de “r” con Poisson 0.3

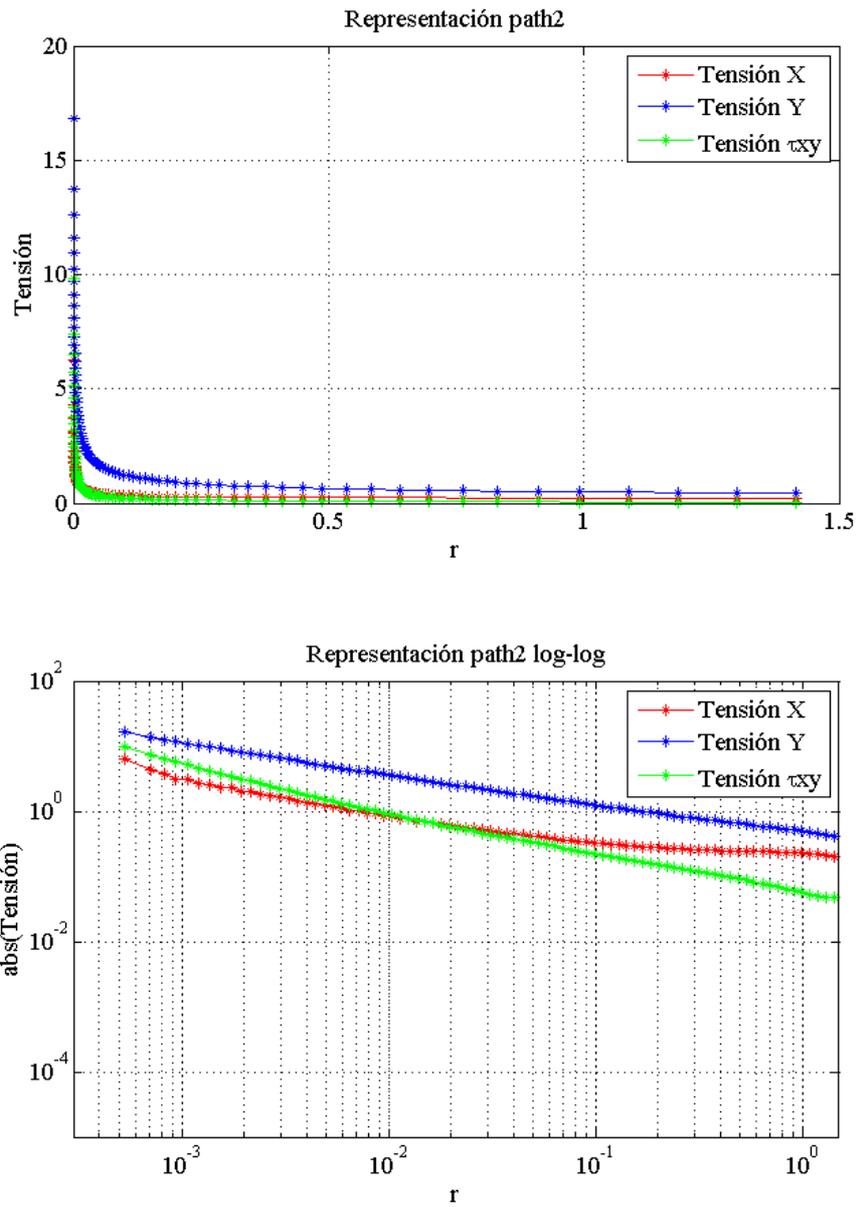


Figura 6.13. Tensiones Path 2 a lo largo de “r” con Poisson 0.3

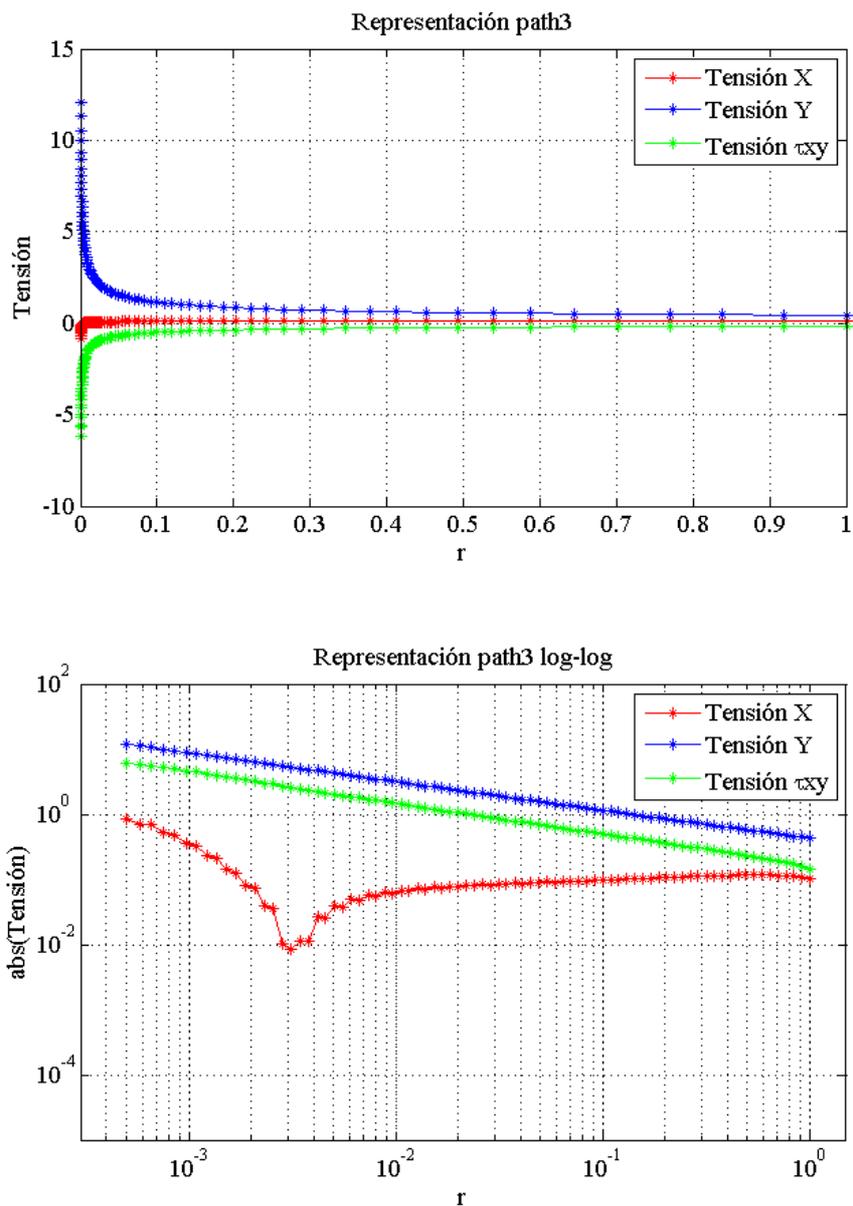


Figura 6.14. Tensiones Path 3 a lo largo de “r” con Poisson 0.3

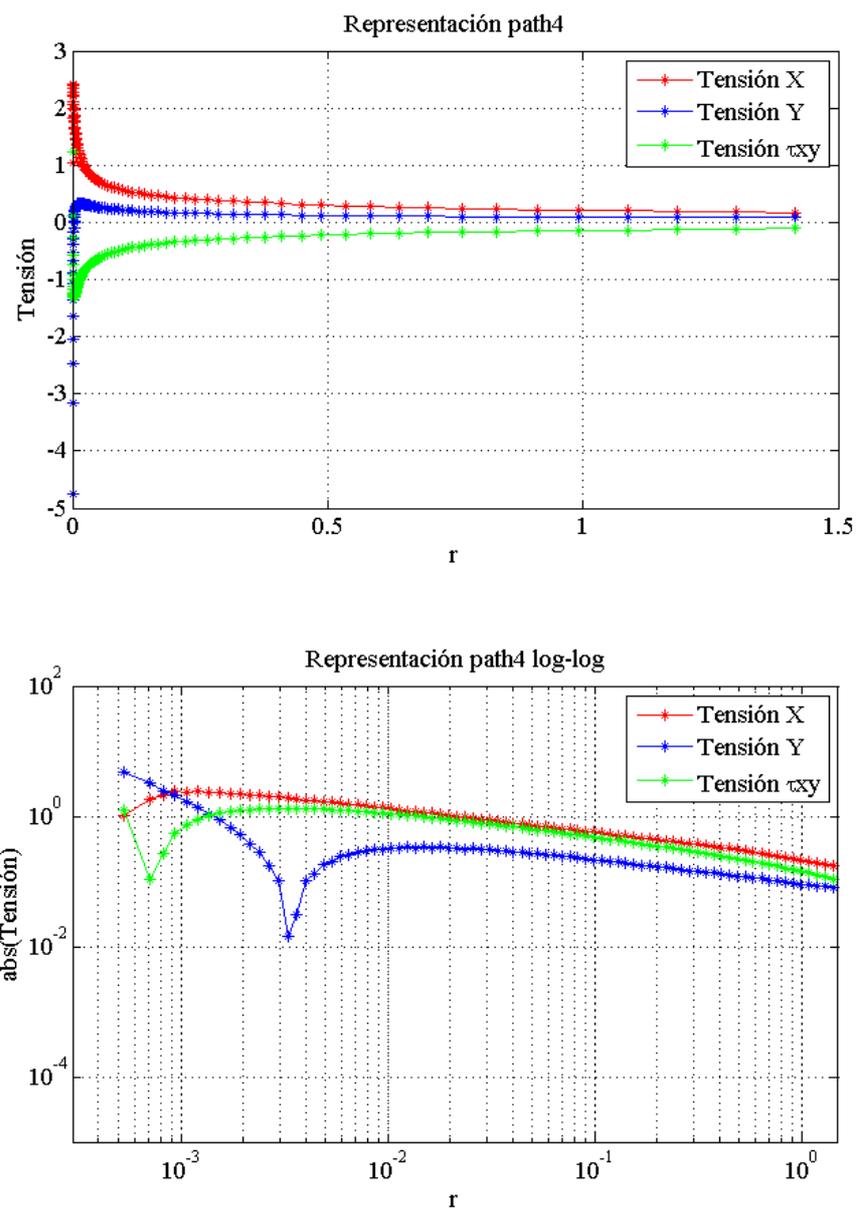


Figura 6.20. Tensiones Path 4 a lo largo de "r" con Poisson 0.3

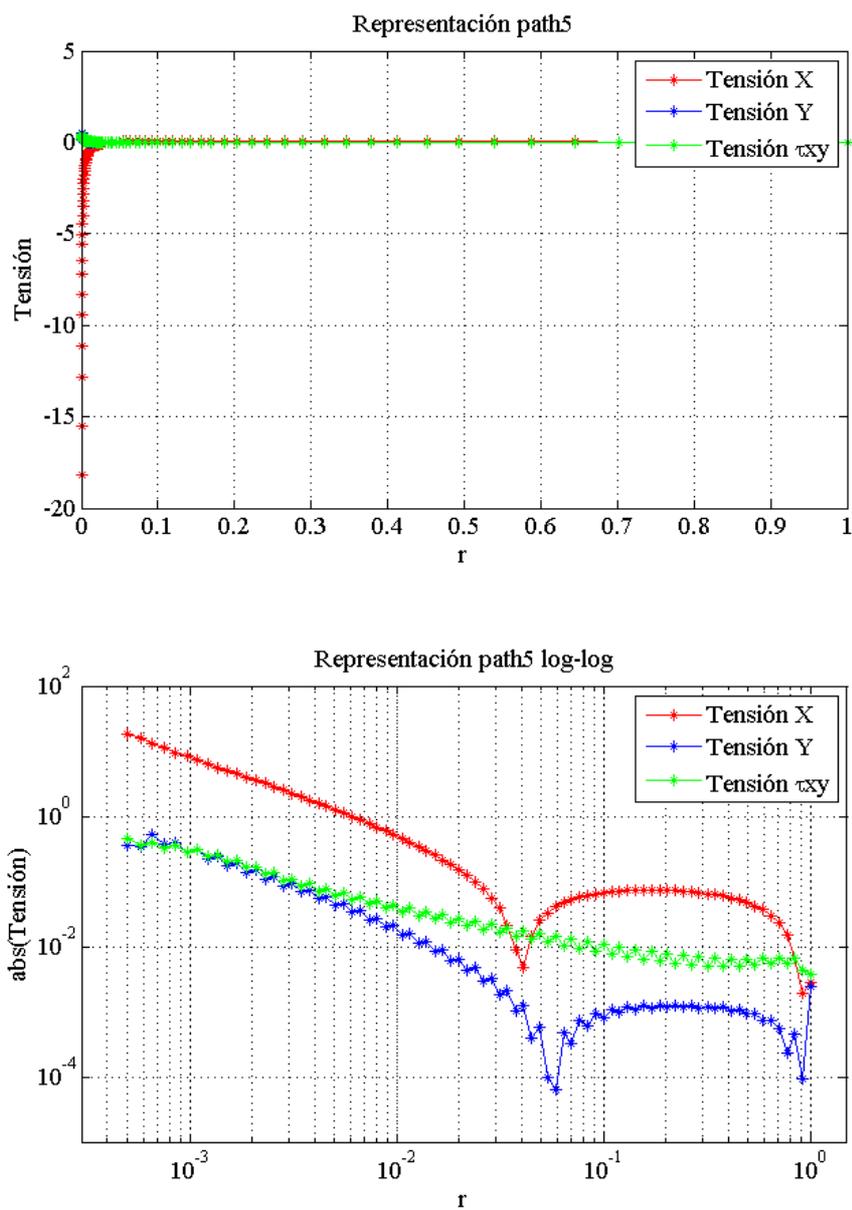


Figura 6.15. Tensiones Path 5 a lo largo de "r" con Poisson 0.3

Poisson 0.3						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m σ_x	m σ_y	m τ_{xy}
1	0	1	0	-0,6651	-0,2372	-0,8836
2	0	1,41	$\pi/4$	-0,577	-0,5019	-0,762
3	0	1	$\pi/2$	-	-0,445	+ 0,4908
4	0	1,41	$3 \pi/4$	-0,211	+ 0,5348	-
5	0	1	π	-	-	-

Tabla 6.4. Resultados de la pendiente de cada path para Poisson=0.3

En la figura 6.13 y 6.14, podemos observar los “rebotes” debidos a la transición de positivo a negativo o viceversa. Esto se ve únicamente en las figuras en escala logarítmica al haber tomado valor absoluto.

En la figura 6.15 correspondiente al path 5 que es la cara de grieta, las soluciones de elementos finitos no son válidas, ya que la solución debería ser nula, pero elementos finitos da lugar a un valor promedio con los nodos superiores a esta superficie y se obtienen resultados erróneos, pues las condiciones de contorno de Neumann no se cumplen exactamente. Las pendientes para el path 5 no están calculadas para ningún caso.

Se puede observar en la tabla 6.2, que las pendientes de las tensiones τ_{xy} del Path 3 y las σ_y del path 4, están cambiadas de signo respecto a las figuras correspondientes. Esto se debe a que el logaritmo está calculado sobre el valor absoluto de las tensiones. Si las tensiones son negativas, esta pendiente es positiva.

6.4.2.3 Caso de Poisson 0.4 (plano Z=1)

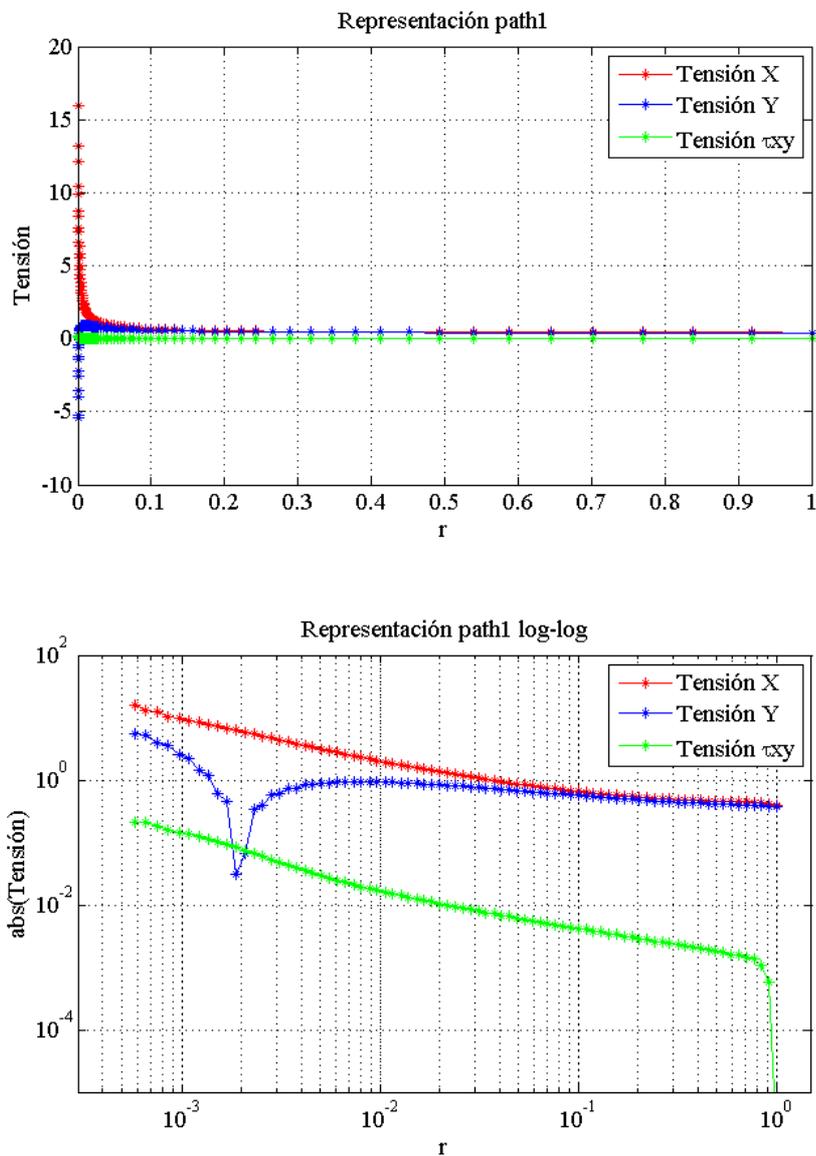


Figura 6.16. Tensiones Path 1 a lo largo de “r” con Poisson 0.4

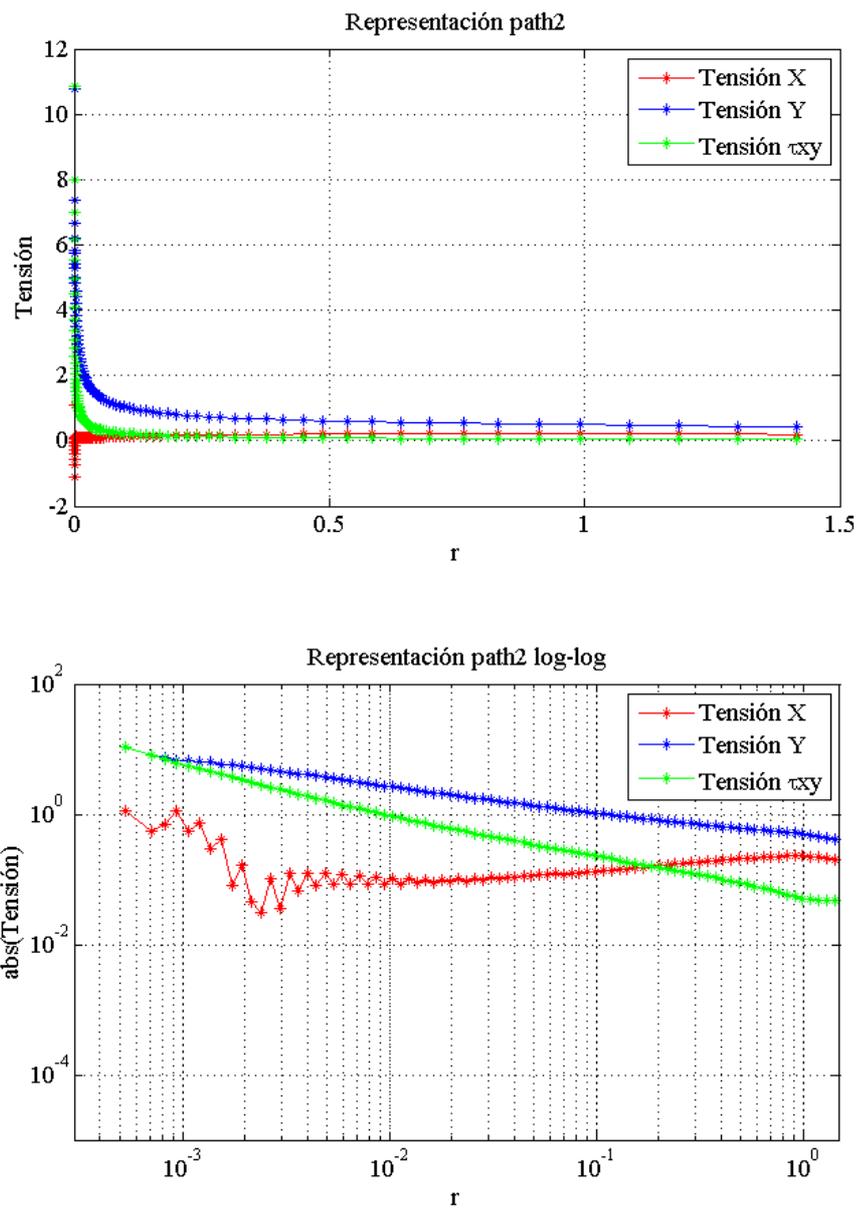


Figura 6.17. Tensiones Path 2 a lo largo de “r” con Poisson 0.4

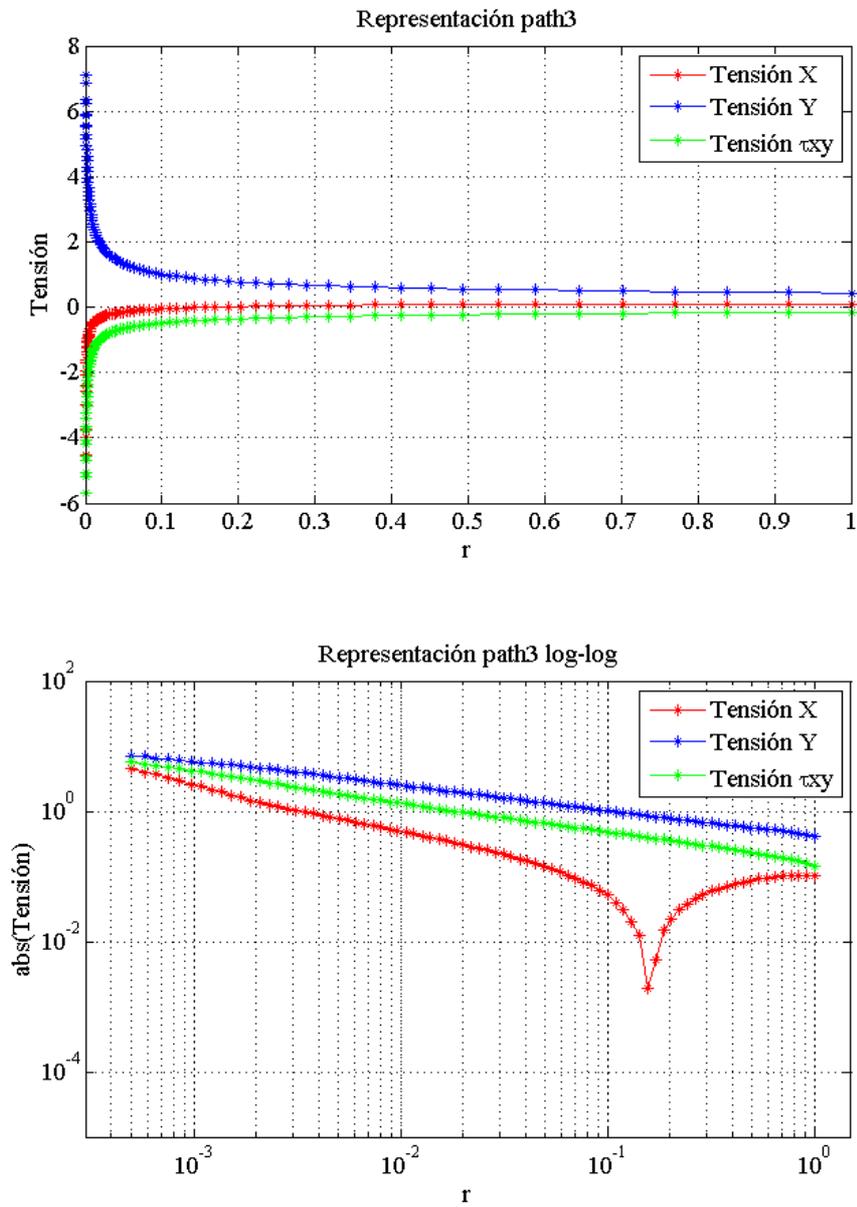


Figura 6.18. Tensiones Path 3 a lo largo de “r” con Poisson 0.4

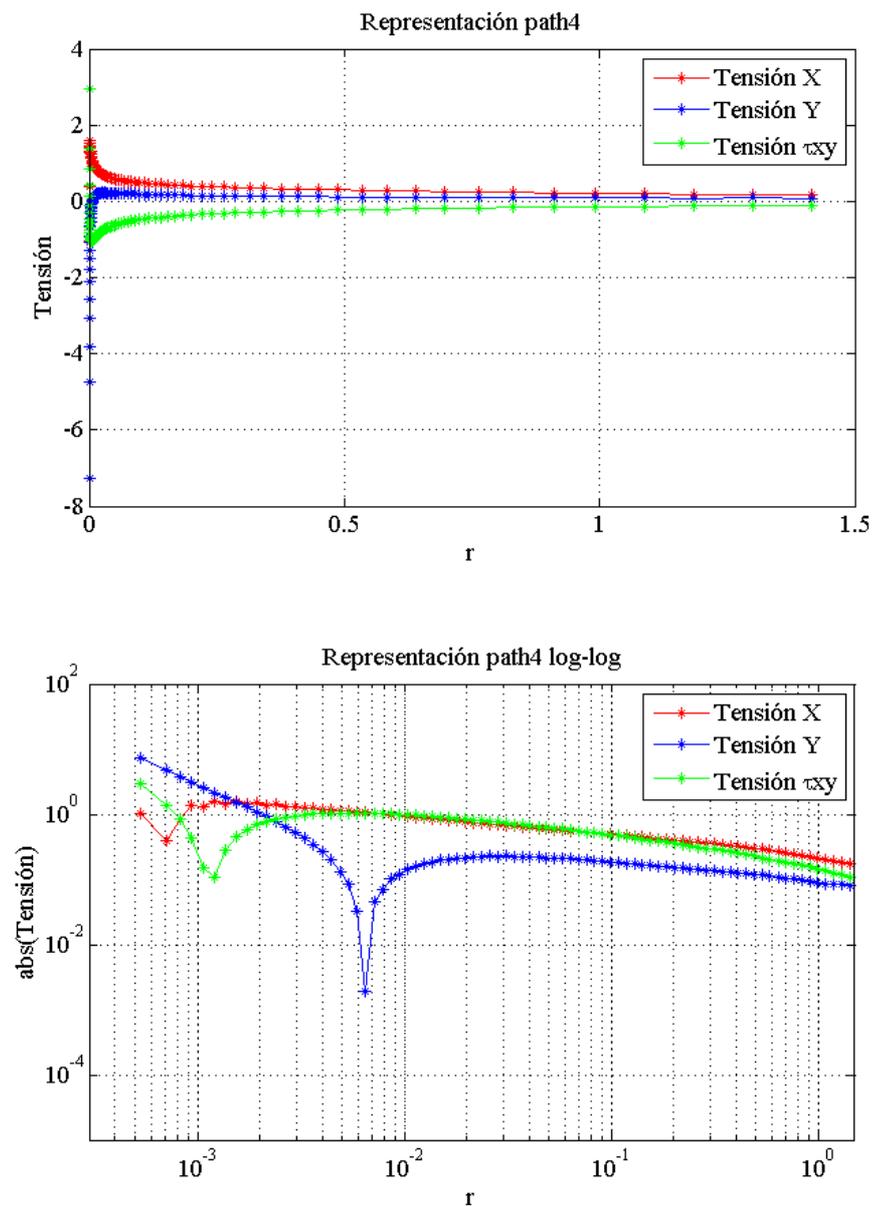


Figura 6.25. Tensiones Path 4 a lo largo de “r” con Poisson 0.4

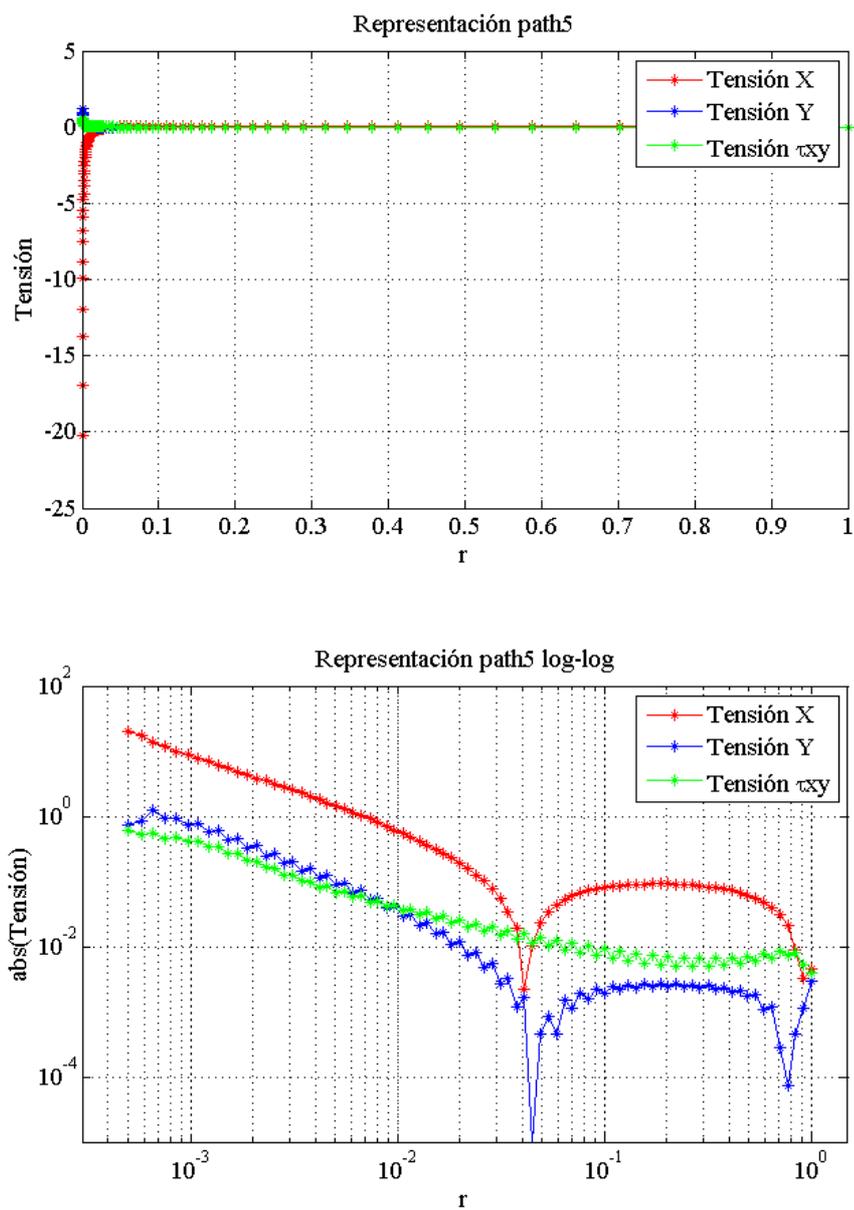


Figura 6.19. Tensiones Path 5 a lo largo de "r" con Poisson 0.4

Poisson 0.4						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m σ_x	m σ_y	m τ_{xy}
1	0	1	0	-0,6736	-	-0,8946
2	0	1,41	$\pi/4$	-	-0,4278	-0,7755
3	0	1	$\pi/2$	0,7092	-0,3638	0,4904
4	0	1,41	$3 \pi/4$	-	1,1005	-
5	0	1	π	-	-	-

Tabla 6.5. Resultados de la pendiente de cada Path para Poisson=0.4

Análogamente al apartado anterior, los resultados que se observan en las figuras 6.22, 6.23, 6.24, 6.25 y 6.26 son similares a los obtenidos anteriormente pero el dominio de la singularidad de esquina aumenta, por lo que los cálculos son sensiblemente menos precisos.

En la figura 6.23 se puede ver para las tensiones X una fluctuación debida al antes mencionado efecto del coeficiente de Poisson.

6.4.4 Extrapolaciones de tensiones en deformación plana (plano Z=1)

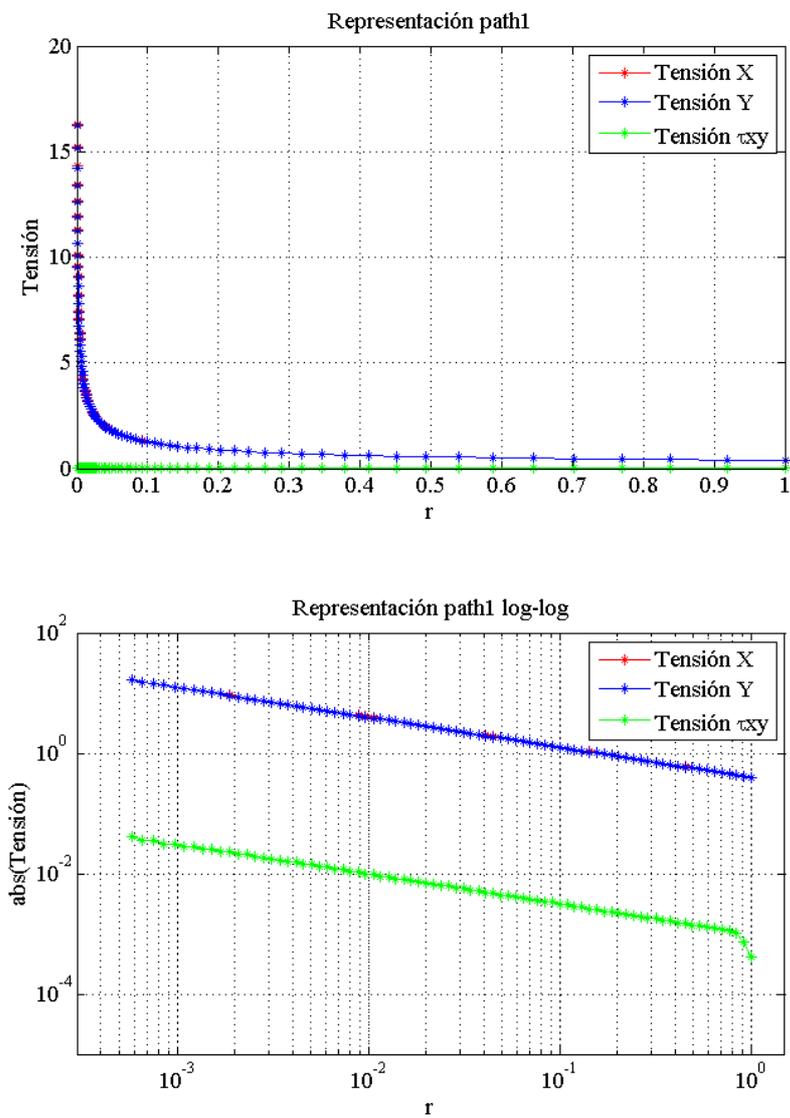


Figura 6.20. Tensiones path 1 a lo largo de "r" en DP.

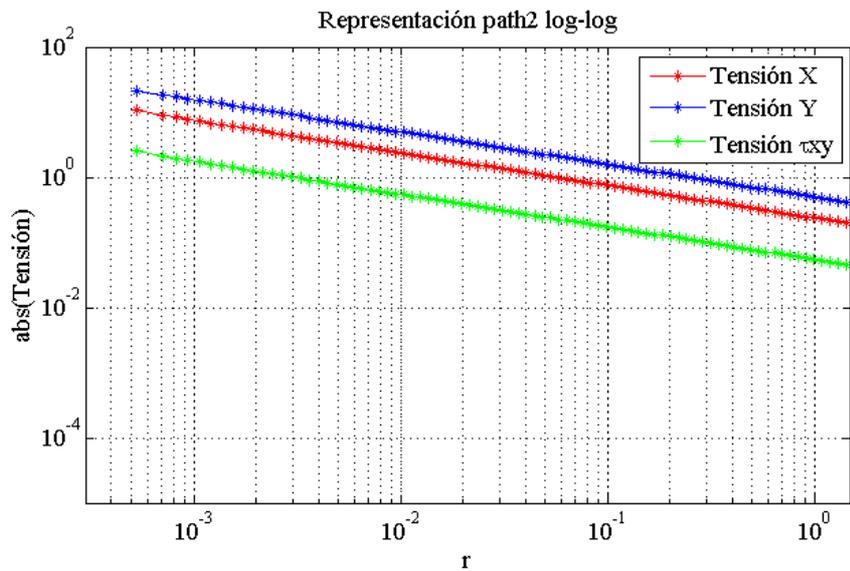
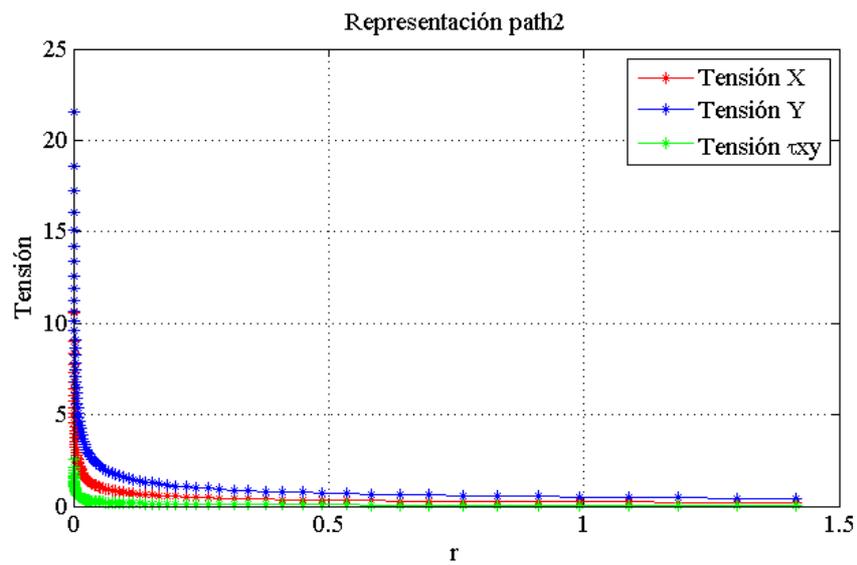


Figura 6.21. Tensiones path 2 a lo largo de “r” en DP.

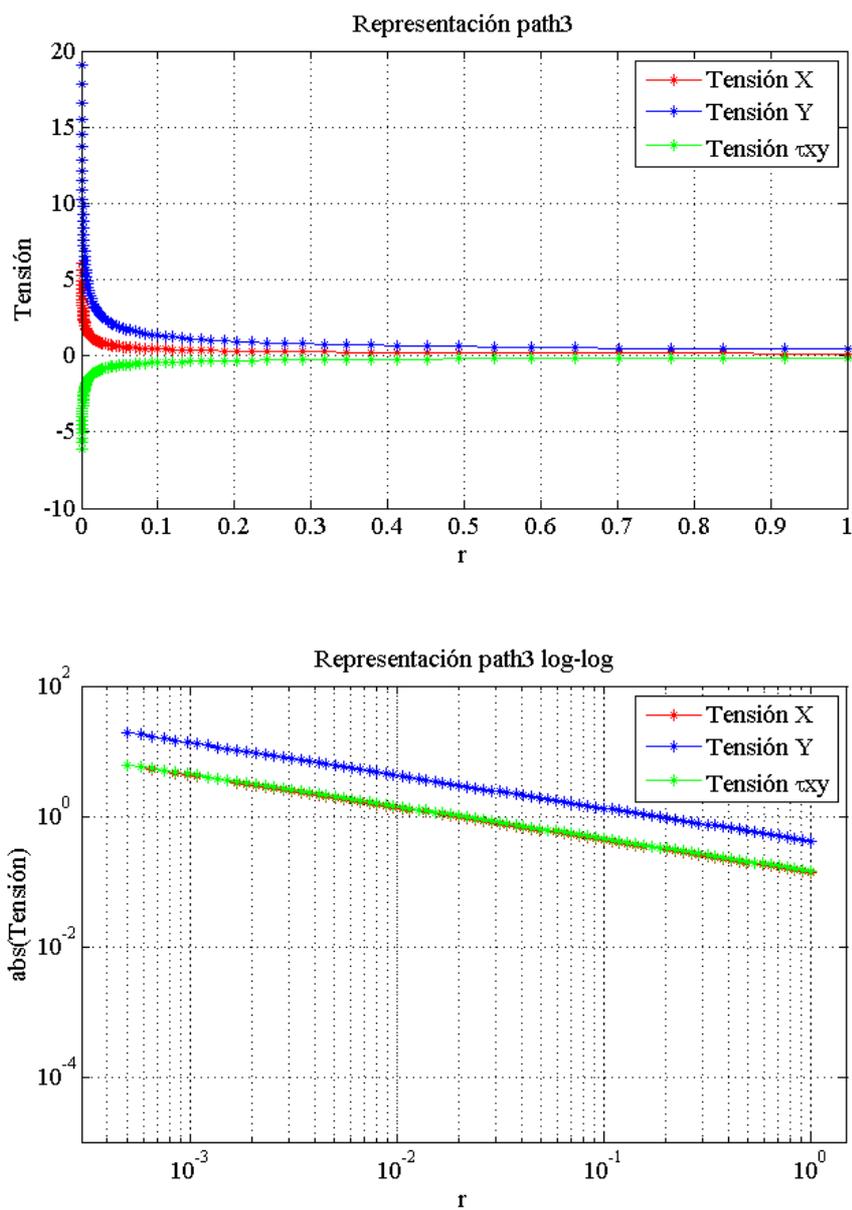


Figura 6.22. Tensiones path 3 a lo largo de "r" en DP.

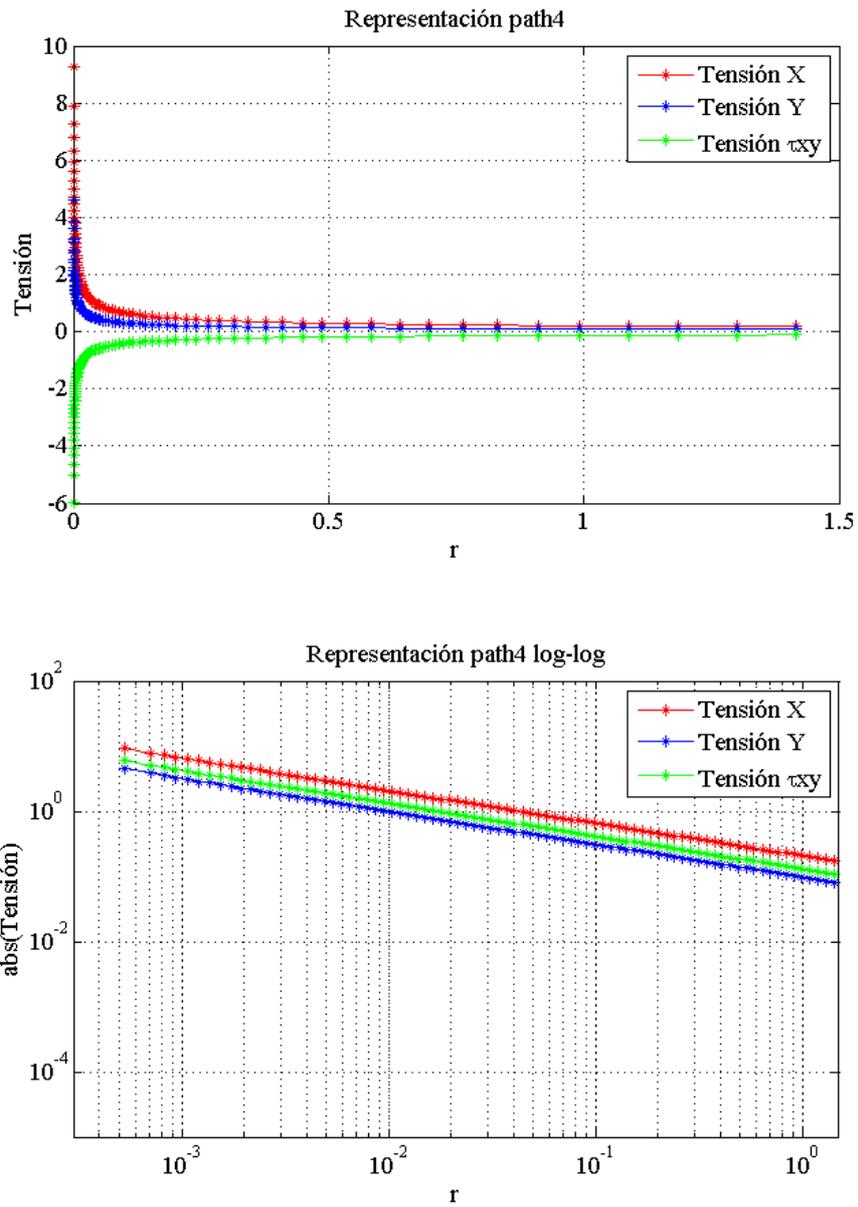


Figura 6.23. Tensiones path 4 a lo largo de "r" en DP.

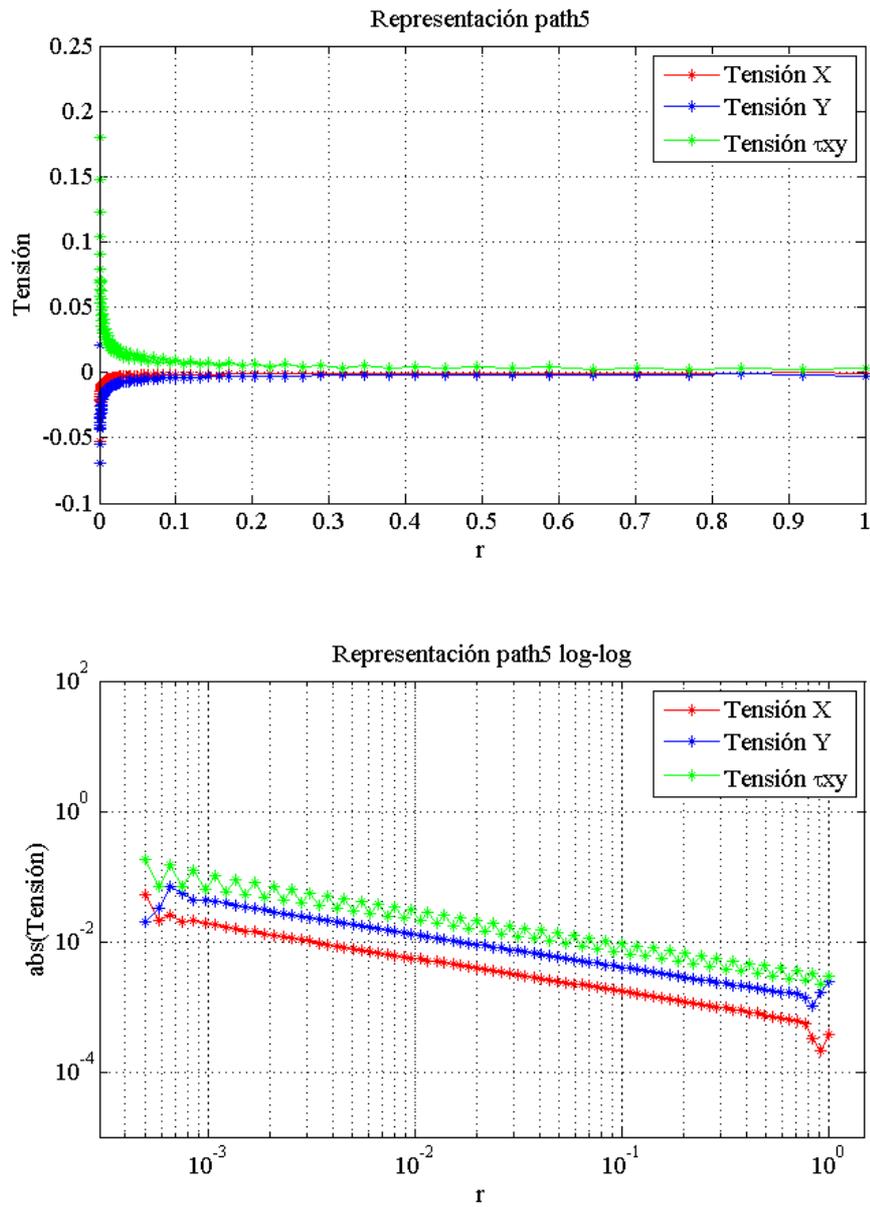


Figura 6.31. Tensiones path 5 a lo largo de "r" en DP.

Deformación Plana						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m σ_x	m σ_y	m τ_{xy}
1	0	1	0	-0,4977	-0,4978	-0,4876
2	0	1,41	$\pi/4$	-0,5033	-0,498	-0,5093
3	0	1	$\pi/2$	-0,497	-0,5038	+ 0,4919
4	0	1,41	$3 \pi/4$	-0,5036	-0,5132	+ 0,5079
5	0	1	π	-	-	-

Tabla 6.6. Resultados de la pendiente de cada Path para DP

En este apartado de deformación plana se observa que las pendientes se acercan todas a $\frac{1}{2}$, que representan las condiciones de Williams impuestas como condiciones de contorno en el modelo. Obtener estos resultados de esta manera, demuestra que los resultados anteriores para las tensiones de la singularidad de esquina, han sido obtenidos mediante un procedimiento aceptable. Cabe destacar que este apartado (6.4.3) no representa en ningún caso a la singularidad de esquina, ya que como hemos explicado sin la contracción provocada por el coeficiente de Poisson no existe singularidad de esquina.

6.4.5 Comentario de los resultados en tensiones

Los resultados de las pendientes muestran una diferente pendiente para cada dirección elegida desde el origen de la singularidad. Que se obtengan rectas en escala Log-Log, demuestra la existencia de una tendencia desde el vertex hacia todas las direcciones, la forma analítica de estas expresiones no es trivial, pero estos resultados demuestran que las tensiones deben seguir una expresión del tipo potencial con respecto a la distancia al vertex.

6.5 EXTRAPOLACIONES MEDIANTE CAMPOS DE DESPLAZAMIENTOS

Analogamente al apartado 6.4 se realizan los mismos cálculos con los mismos “camino” (añadiendo uno mas) para los resultados de desplazamientos extraídos de igual forma de los cálculos de “Abaqus”.

Las ventajas de trabajar con desplazamientos son varias:

- Solo se trabaja con 3 componentes U1, U2 y U3
- Están mejor calculados que las tensiones, debido a que elementos finitos obtiene las tensiones de los desplazamientos. Como resultado tenemos mas precisión con los campos de desplazamientos.
- No hay puntos singulares (donde el desplazamiento sea infinito).

Por el contrario tenemos que los desplazamientos de Williams dependen de más variables, las cuales son el modulo de Young (E), el coeficiente de Poisson (ν) y la constante de Kolosov (K).

Path	r inicio	r fin	Theta (θ)
1	0	1	0
2	0	1,41	$\pi/4$
3	0	1	$\pi/2$
4	0	1,41	$3 \pi/4$
5	0	1	π
6	0	1	Frente de Grieta

Tabla 6.7. Caminos calculados para desplazamientos

6.5.1 Extrapolaciones de desplazamientos debidas a la singularidad de esquina representadas en log-log

6.5.1.1 Caso de Poisson 0.15 (plano Z=1)

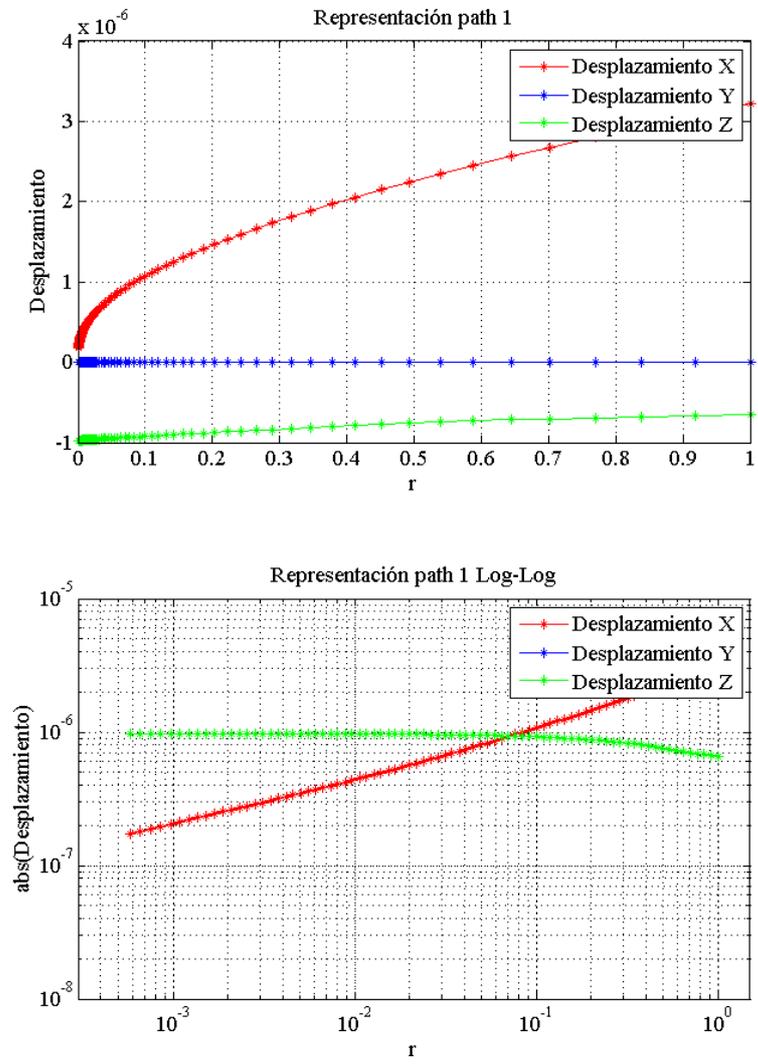


Figura 6.24. Desplazamientos path 1 a lo largo de "r" para Poisson 0.15

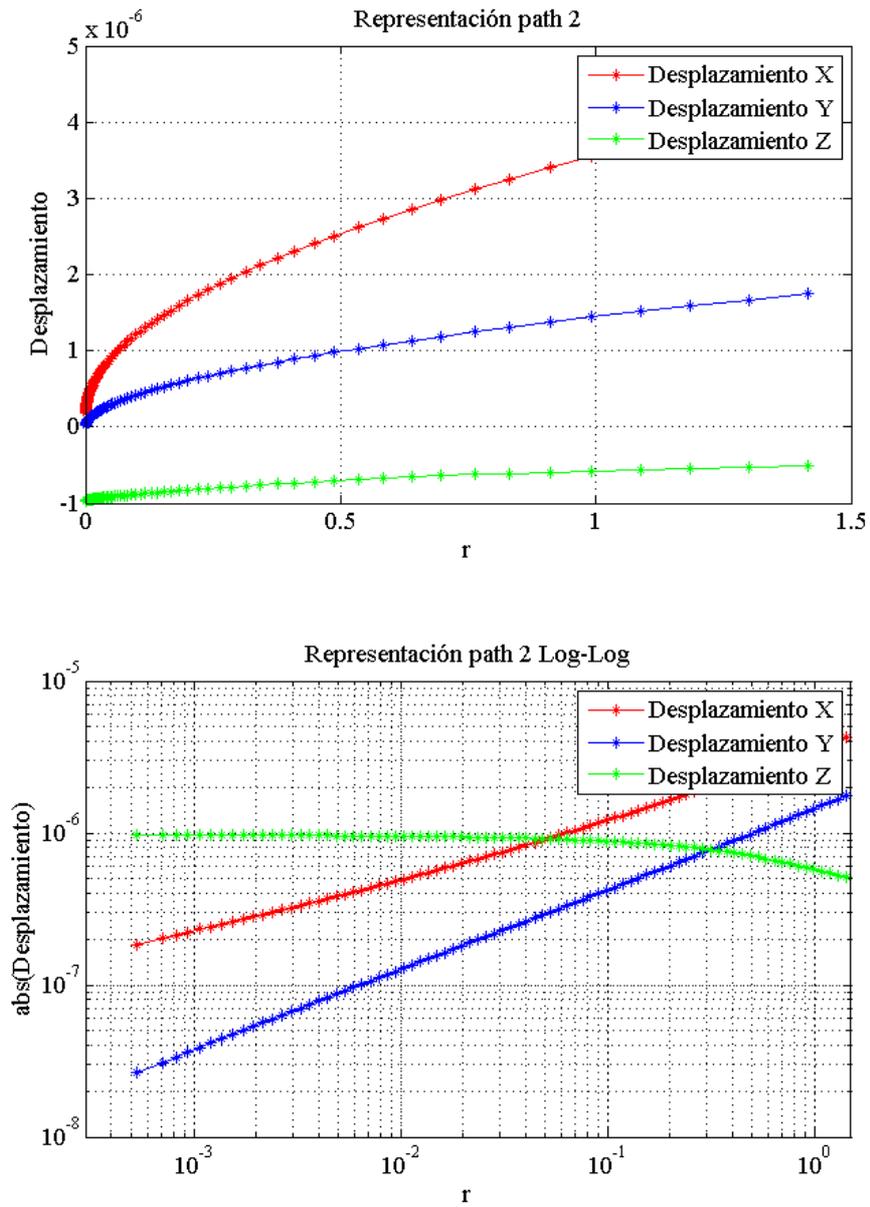


Figura 6.25. Desplazamientos path 2 a lo largo de "r" para Poisson 0.15

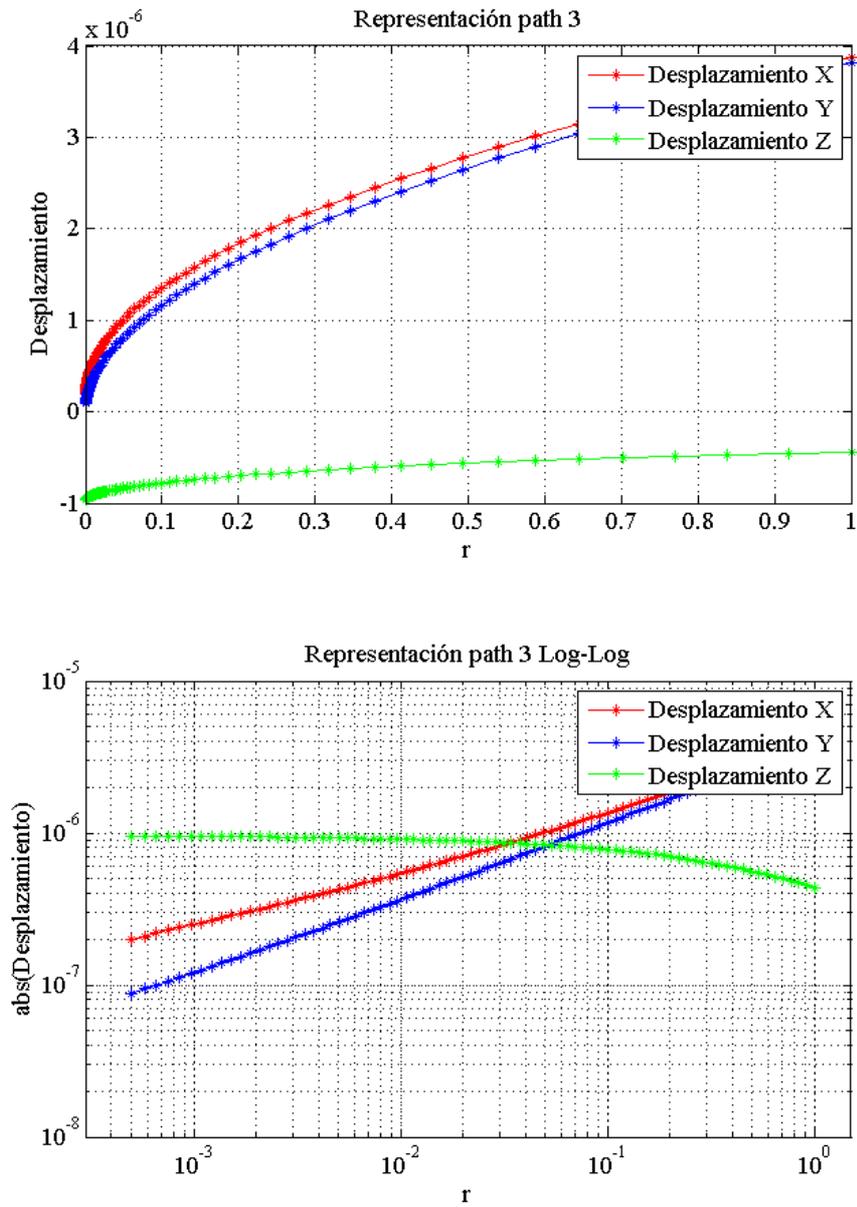


Figura 6.26. Desplazamientos path 3 a lo largo de "r" para Poisson 0.15

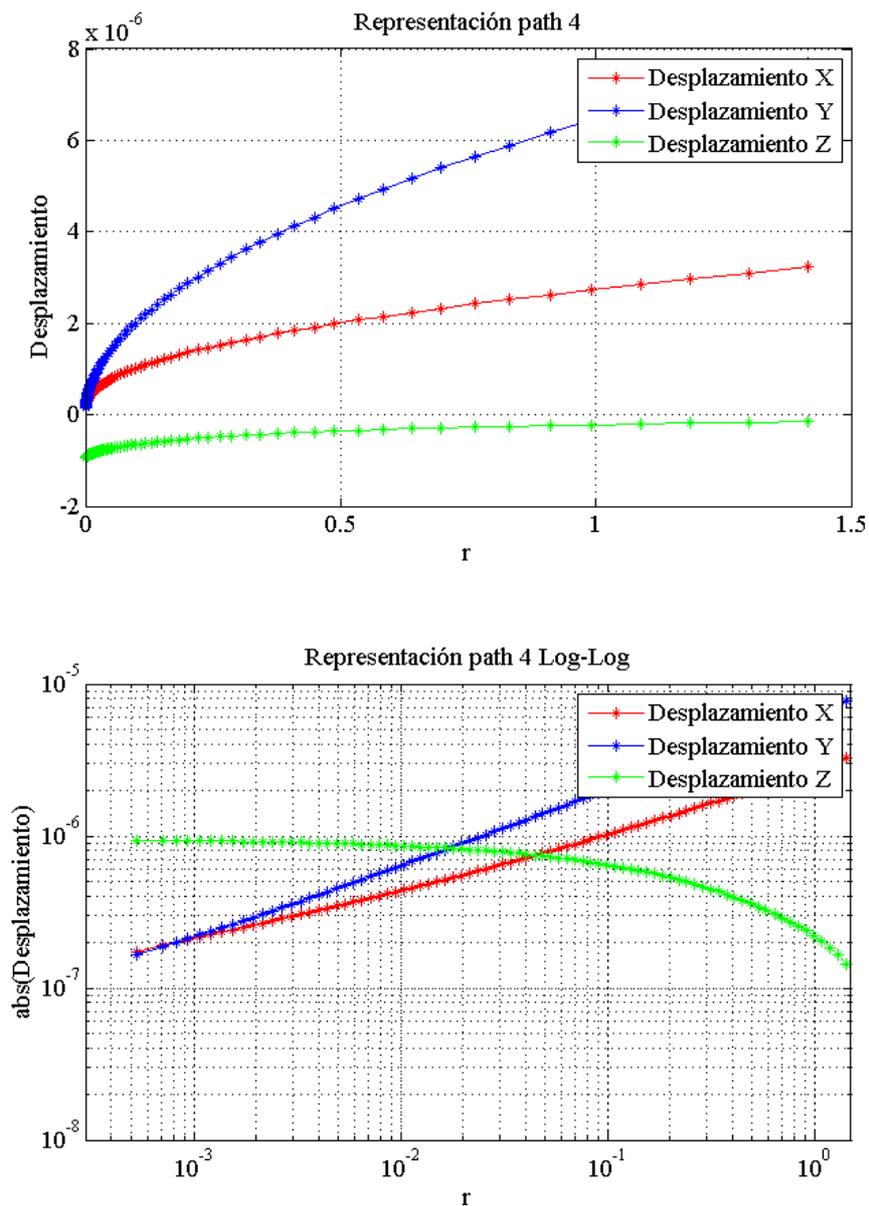


Figura 6.27. Desplazamientos path 4 a lo largo de "r" para Poisson 0.15

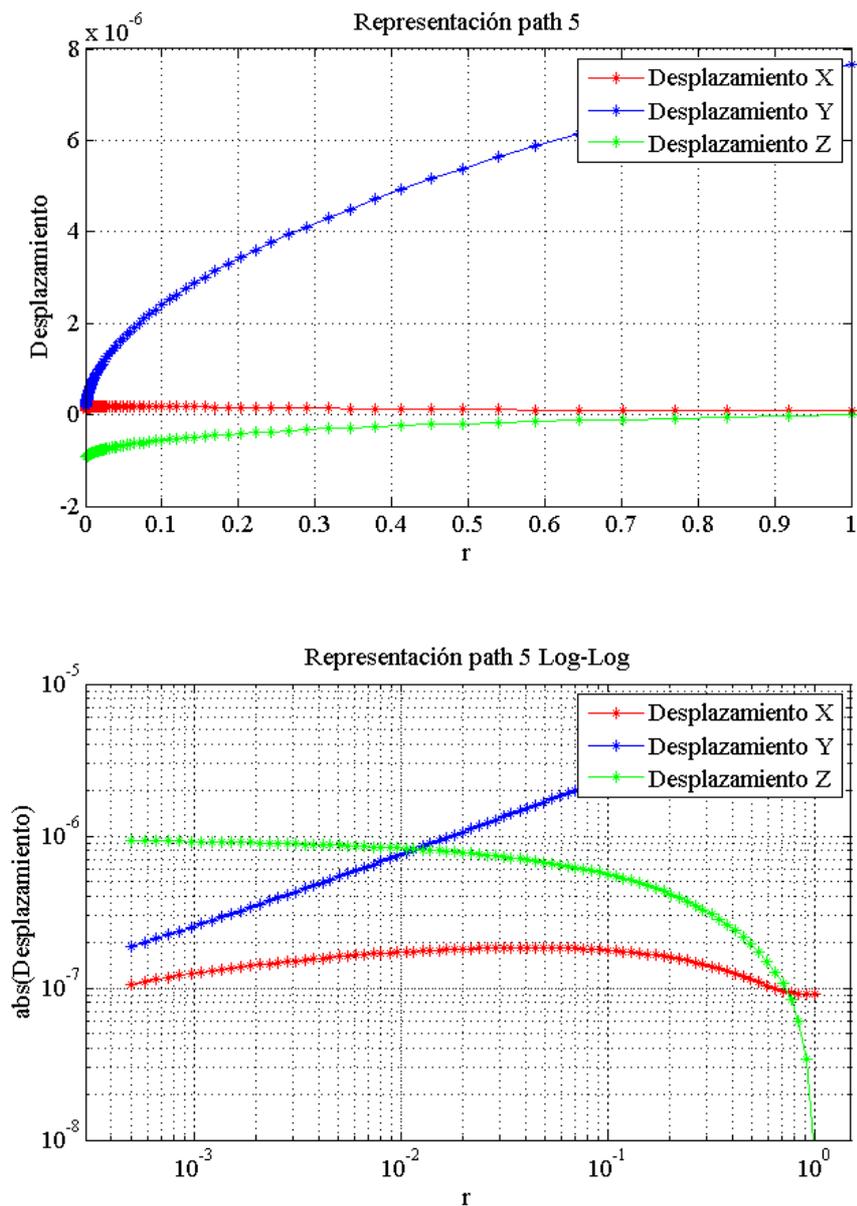


Figura 6.28. Desplazamientos path 5 a lo largo de "r" para Poisson 0.15

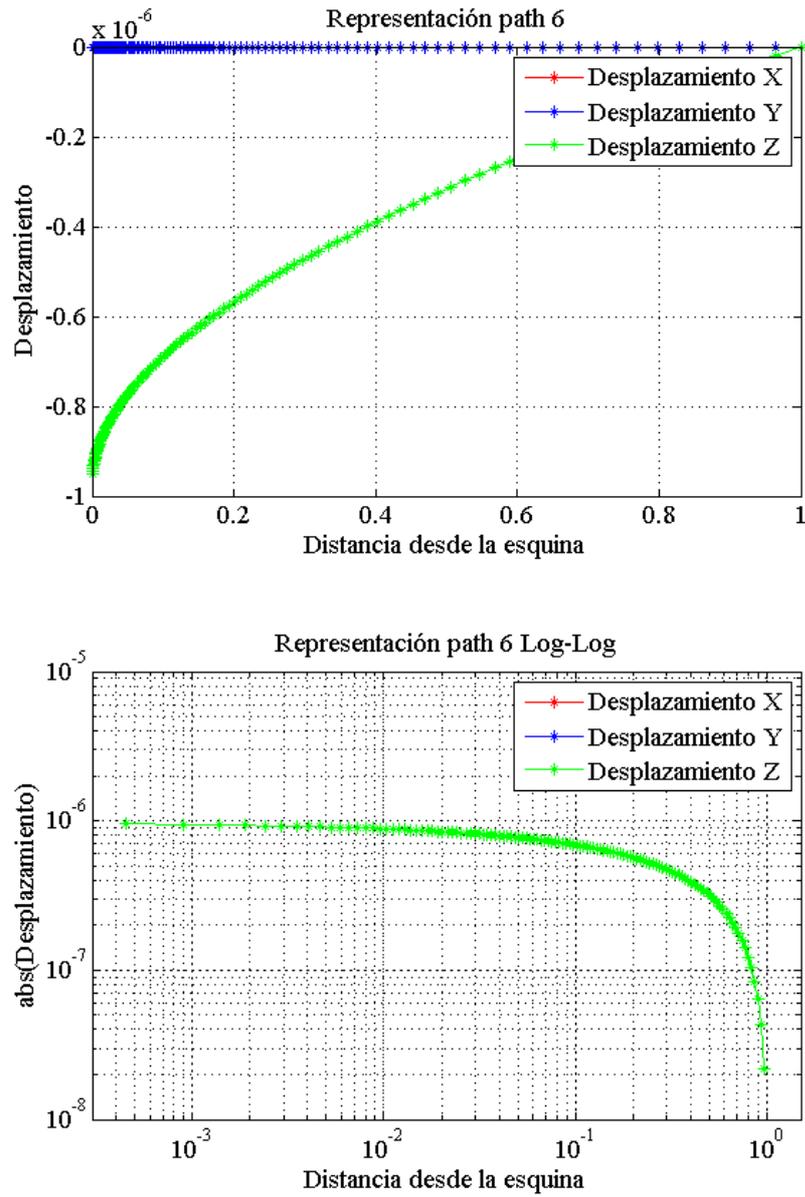


Figura 6.29. Desplazamientos path 6 a lo largo del frente de grieta (no en plano $Z=1$) para Poisson 0.15.

Poisson 0.15						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m Ux	m Uy	m Uz
1	0	1	0	0,3338	-	+0,0036
2	0	1,41	$\pi/4$	0,3389	0,5289	+0,0086
3	0	1	$\pi/2$	0,3411	0,4811	+0,0215
4	0	1,41	$3 \pi/4$	0,3189	0,4723	+0,0403
5	0	1	π	0,134	0,4754	+0,0508
6	0	1	Frente de Grieta	-	-	0,0352

Tabla 6.8. Resultados de la pendiente de cada Path para Poisson 0.15

6.5.1.3 Caso de Poisson 0.3 (plano Z=1)

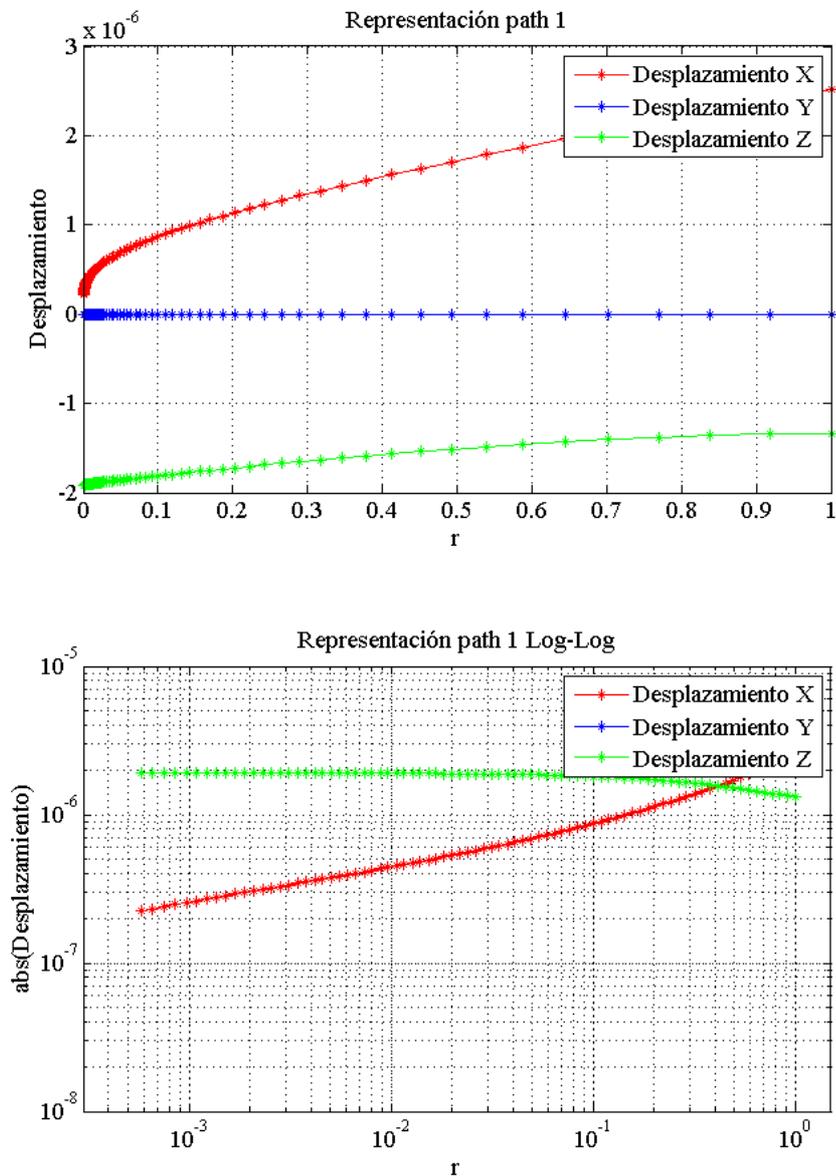


Figura 6.30. Desplazamientos path 1 a lo largo de "r" para Poisson 0.3

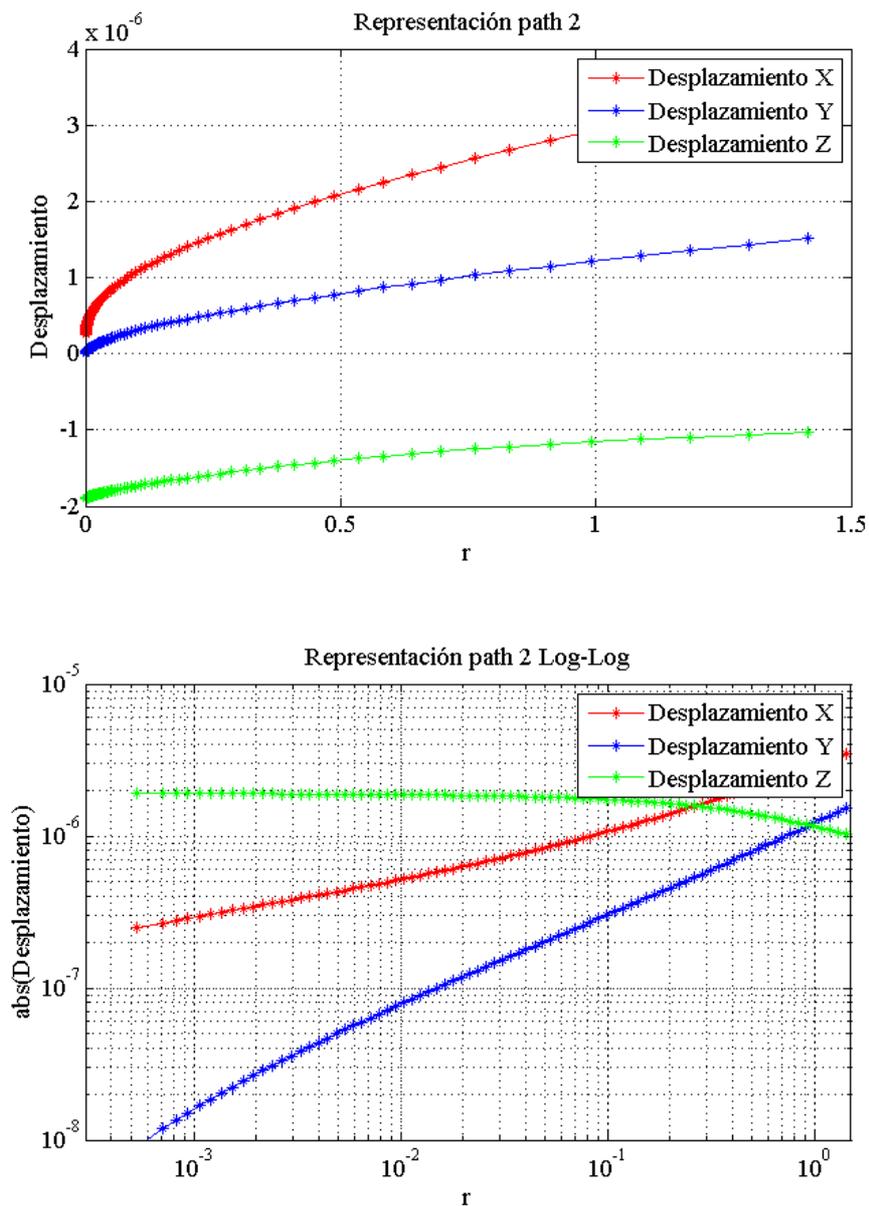


Figura 6.31. Desplazamientos path 2 a lo largo de "r" para Poisson 0.3

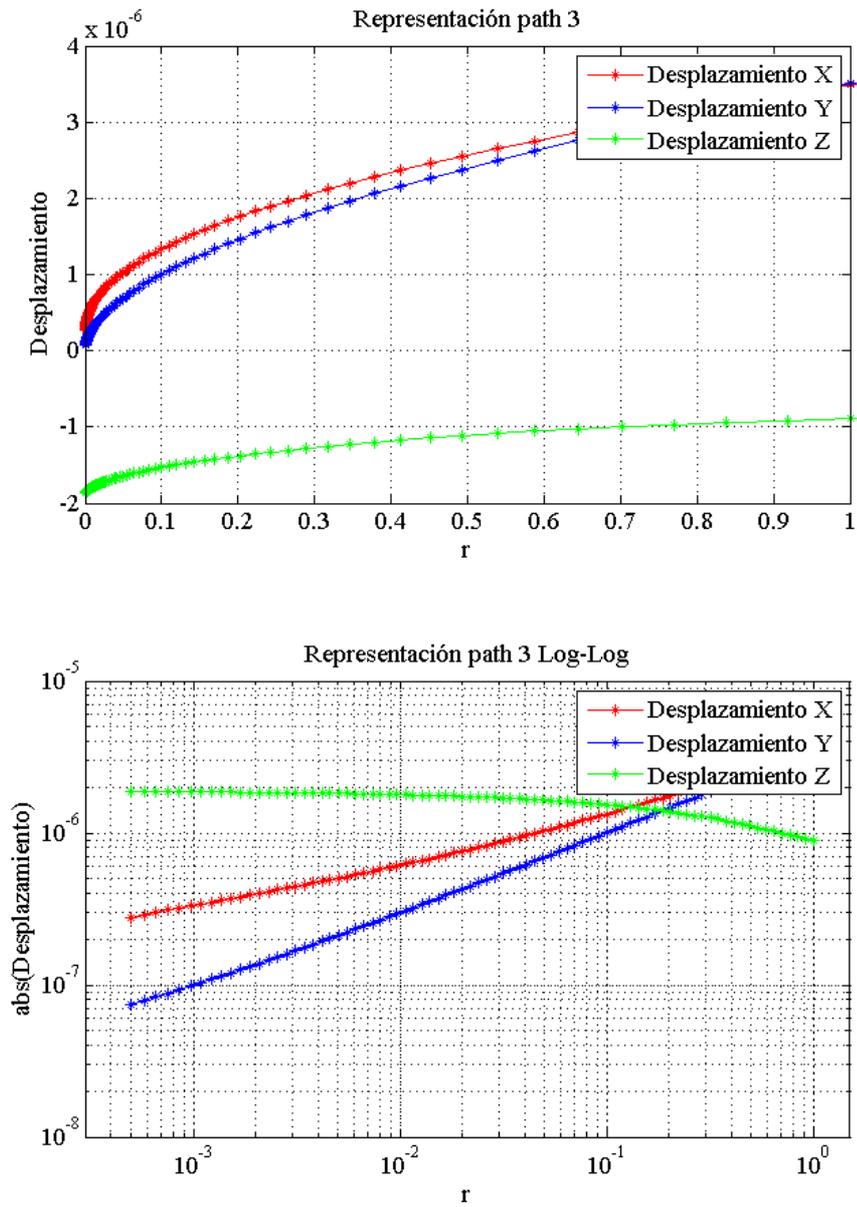


Figura 6.32. Desplazamientos path 3 a lo largo de "r" para Poisson 0.3

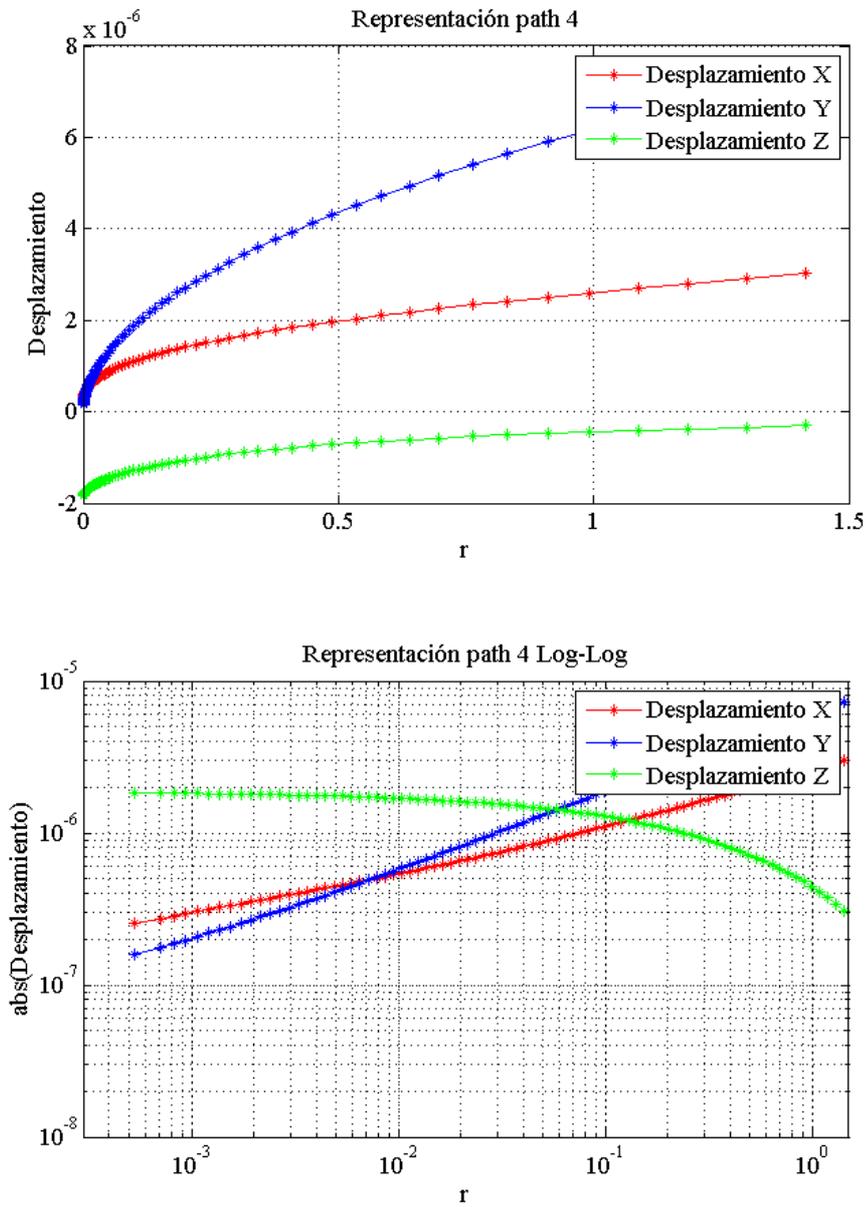


Figura 6.33. Desplazamientos path 4 a lo largo de "r" para Poisson 0.3

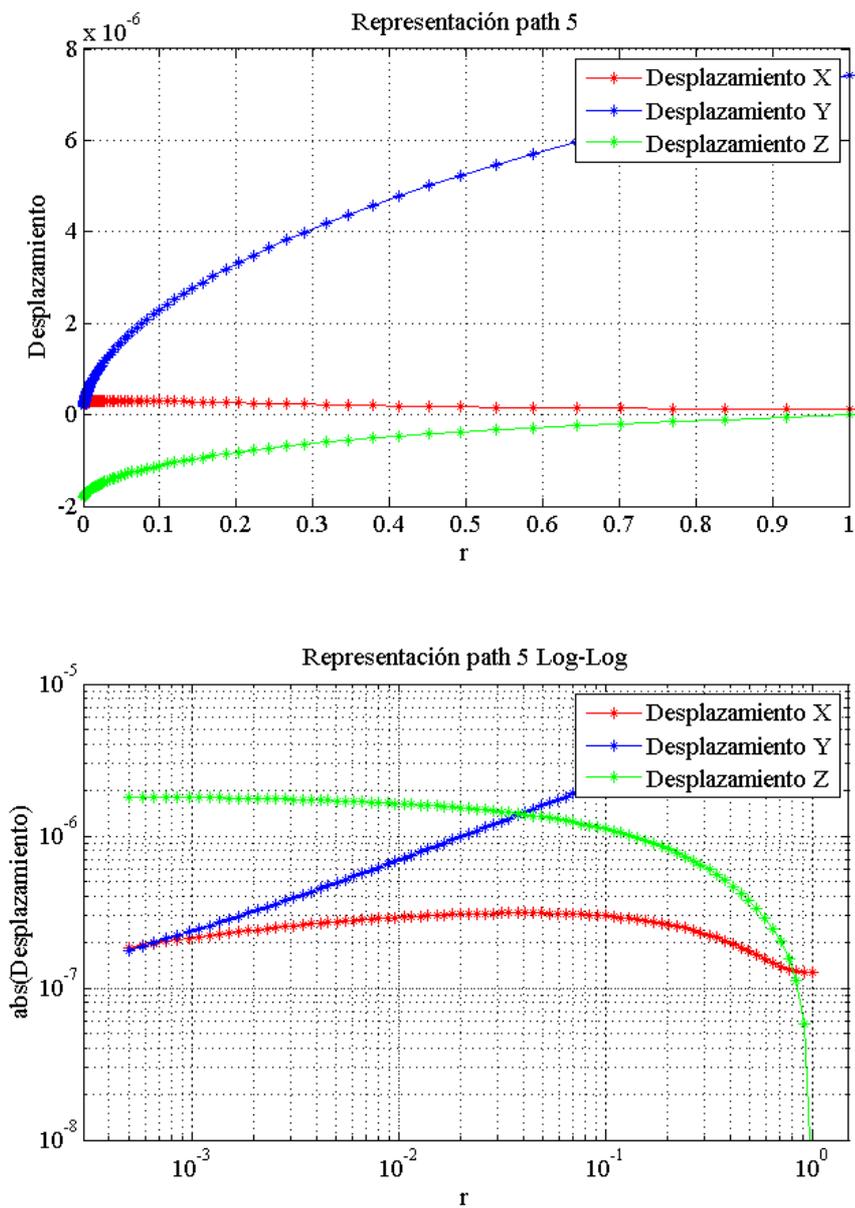


Figura 6.34. Desplazamientos path 5 a lo largo de "r" para Poisson 0.3

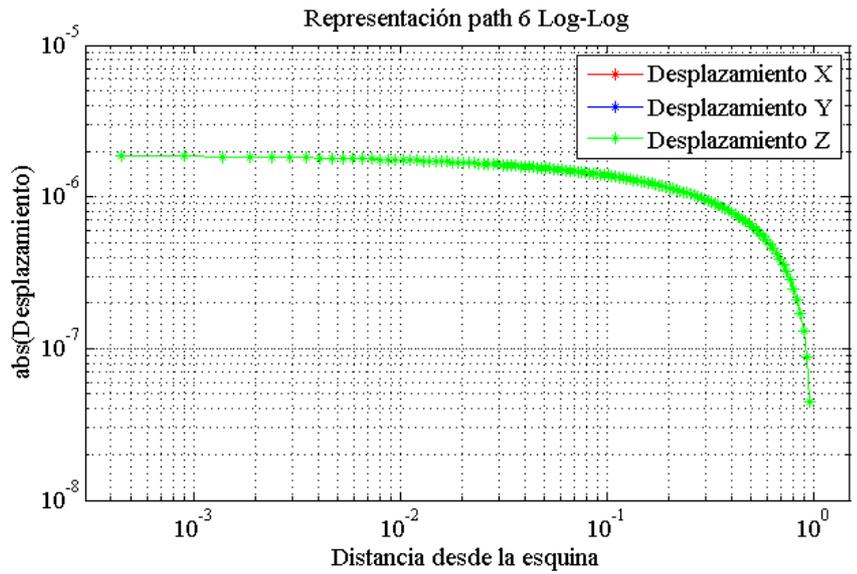
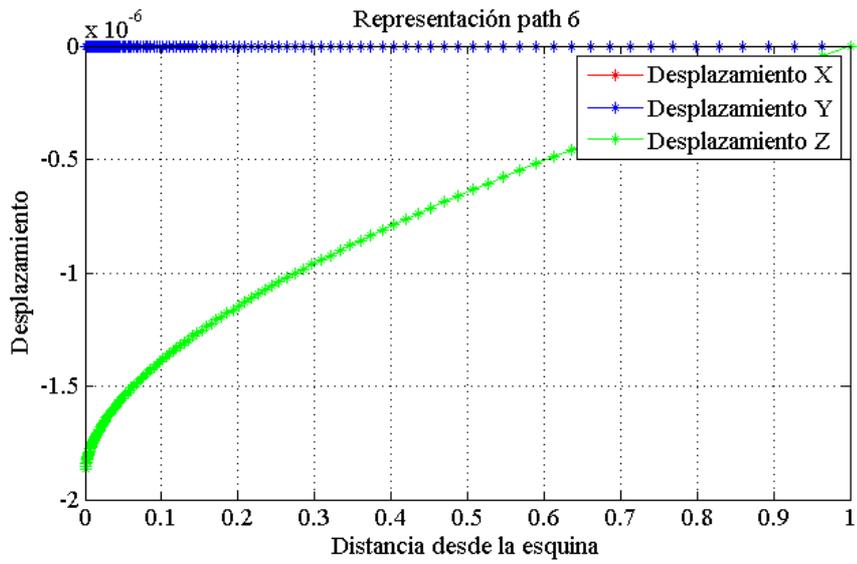


Figura 6.35. Desplazamientos path 6 a lo largo del frente de grieta (no en plano $Z=1$) para Poisson 0.3.

Poisson 0.3						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m Ux	m Uy	m Uz
1	0	1	0	0,2413	-	+0,004
2	0	1,41	$\pi/4$	0,255	0,6814	+0,0085
3	0	1	$\pi/2$	0,2711	0,4807	+0,0203
4	0	1,41	$3 \pi/4$	0,2608	0,4609	+0,0374
5	0	1	π	0,1296	0,4715	+0,0468
6	0	1	Frente de Grieta	-	-	+0,0312

Tabla 6.9. Pendientes para desplazamientos de cada Path para Poisson=0.3

6.5.1.4 Caso de Poisson 0.4 (plano Z=1)

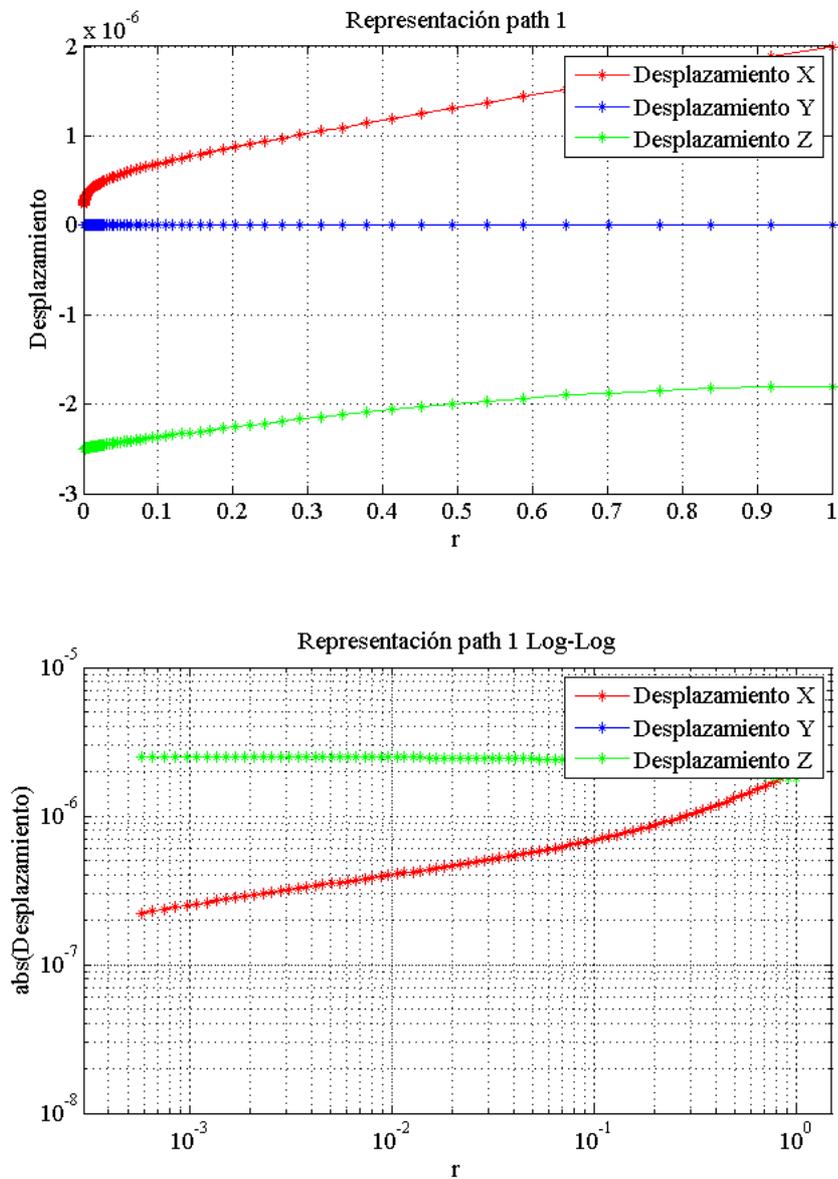


Figura 6.36. Desplazamientos path 1 a lo largo de "r" para Poisson 0.4

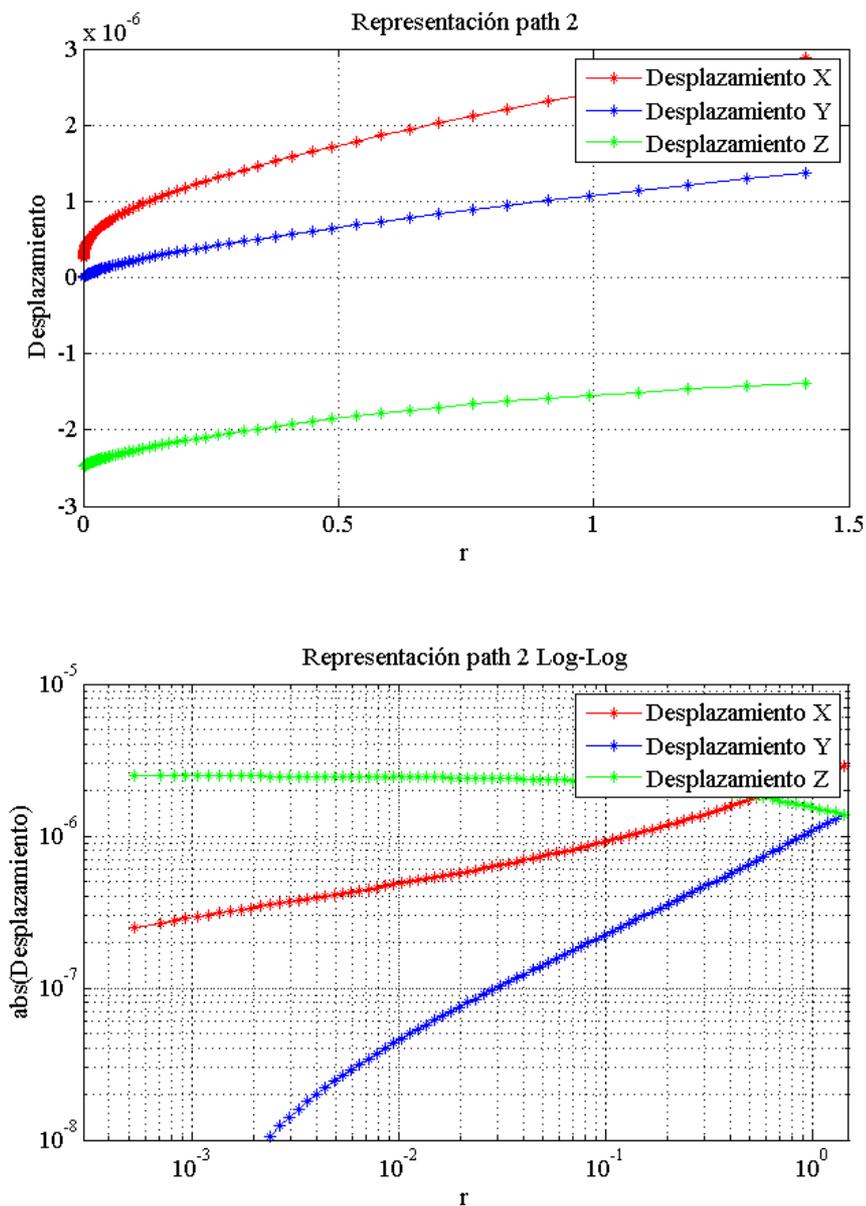


Figura 6.37. Desplazamientos path 2 a lo largo de “r” para Poisson 0.4

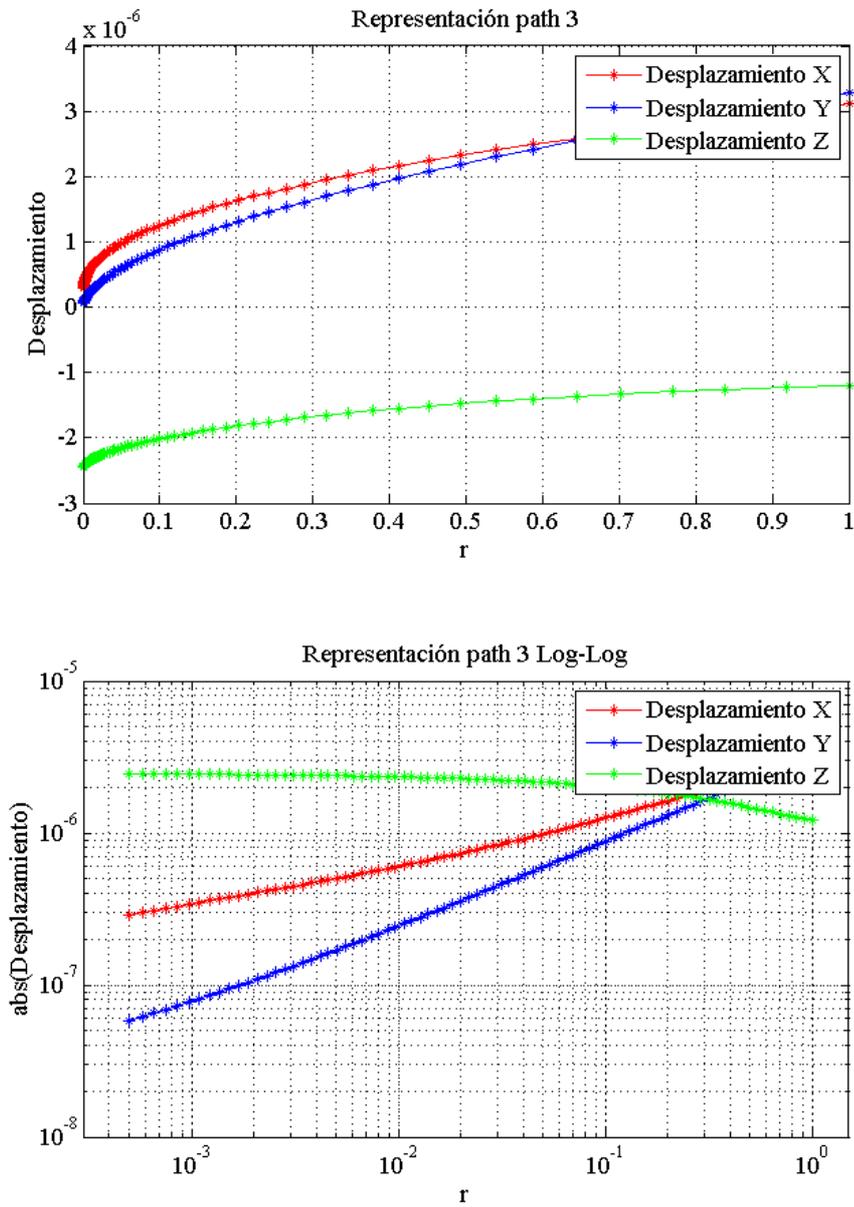


Figura 6.38. Desplazamientos path 3 a lo largo de “r” para Poisson 0.4

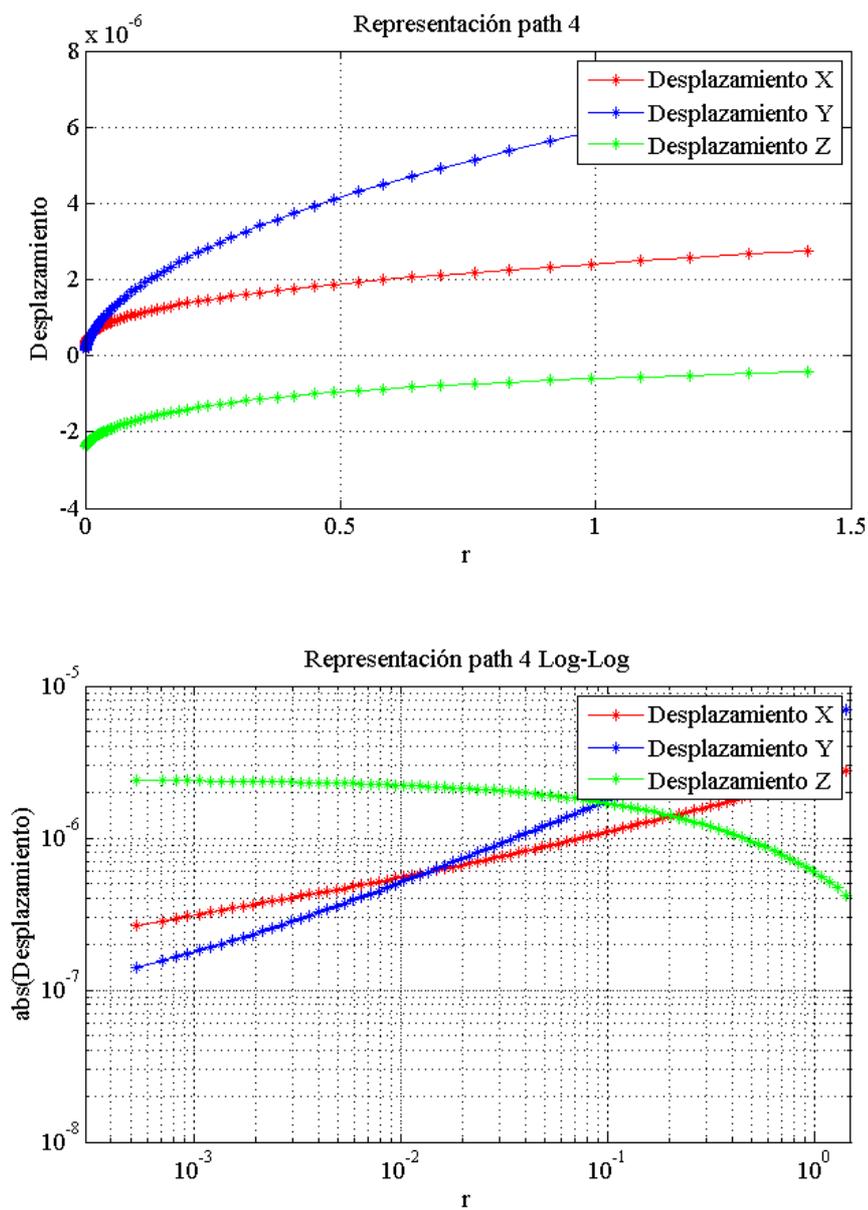


Figura 6.39. Desplazamientos path 4 a lo largo de "r" para Poisson 0.4

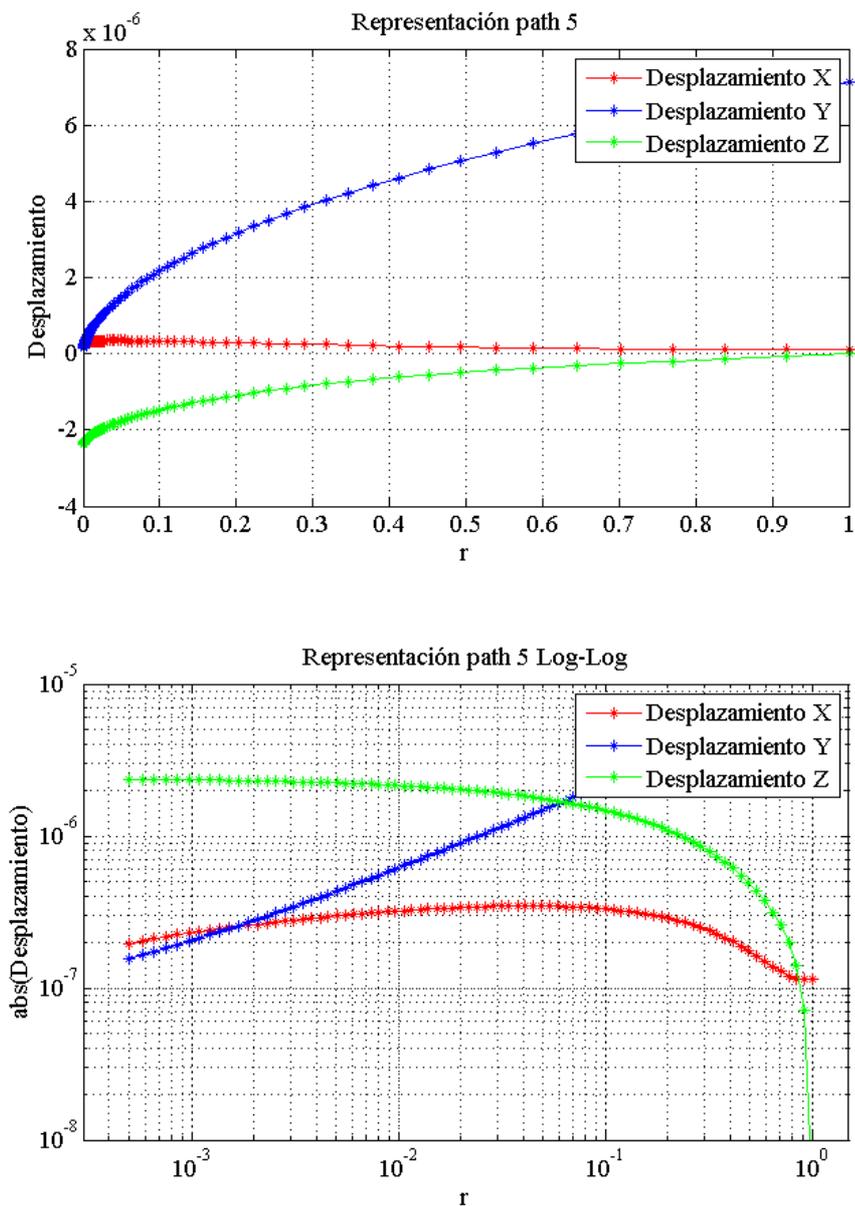


Figura 6.40. Desplazamientos path 5 a lo largo de “r” para Poisson 0.4

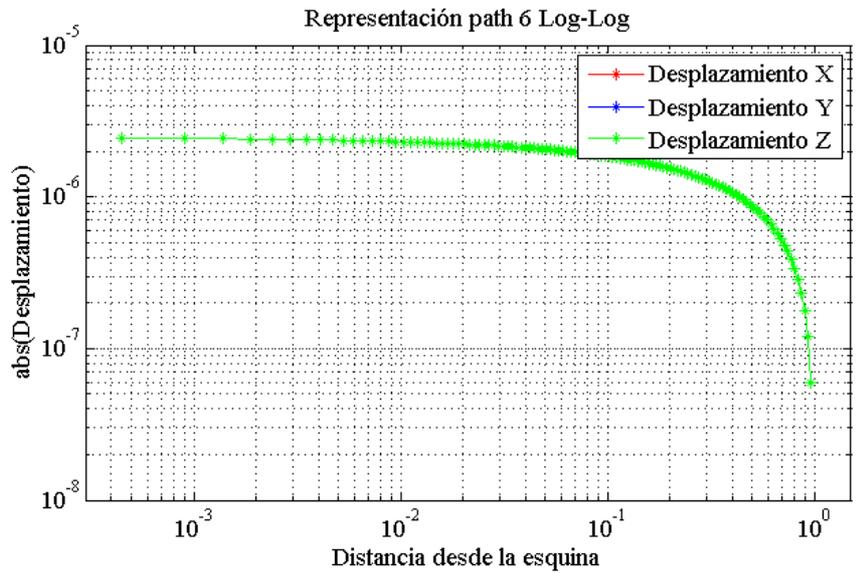
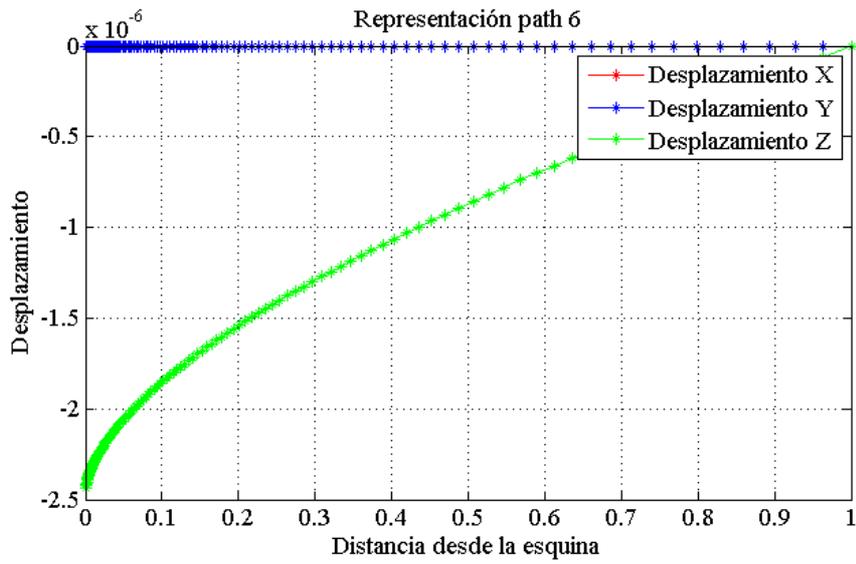


Figura 6.41. Desplazamientos path 6 a lo largo del frente de grieta (no en plano $Z=1$) para Poisson 0.4.

Poisson 0.4						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m Ux	m Uy	m Uz
1	0	1	0	0,2041		+0,0042
2	0	1,41	$\pi/4$	0,2253	-	+0,0083
3	0	1	$\pi/2$	0,2524	0,5013	+0,0192
4	0	1,41	$3 \pi/4$	0,252	0,4677	+0,0349
5	0	1	π	0,1383	0,4845	+0,0431
6	0	1	Frente de Grieta	-	-	+0,0276

Tabla 6.10. Pendientes para desplazamientos de cada Path para Poisson=0.4

6.5.2 Extrapolaciones de deformaciones

Como complemento a la representación de desplazamientos del Path 6, que representa los desplazamientos en Z sobre el frente de grieta, se van a representar las deformaciones en dicho path, para el caso de Poisson 0.15, 0.3 y 0.4.

Estas deformaciones representan a las derivadas de los desplazamientos en Z calculadas en las figuras 6.37, 6.43 y 6.49.

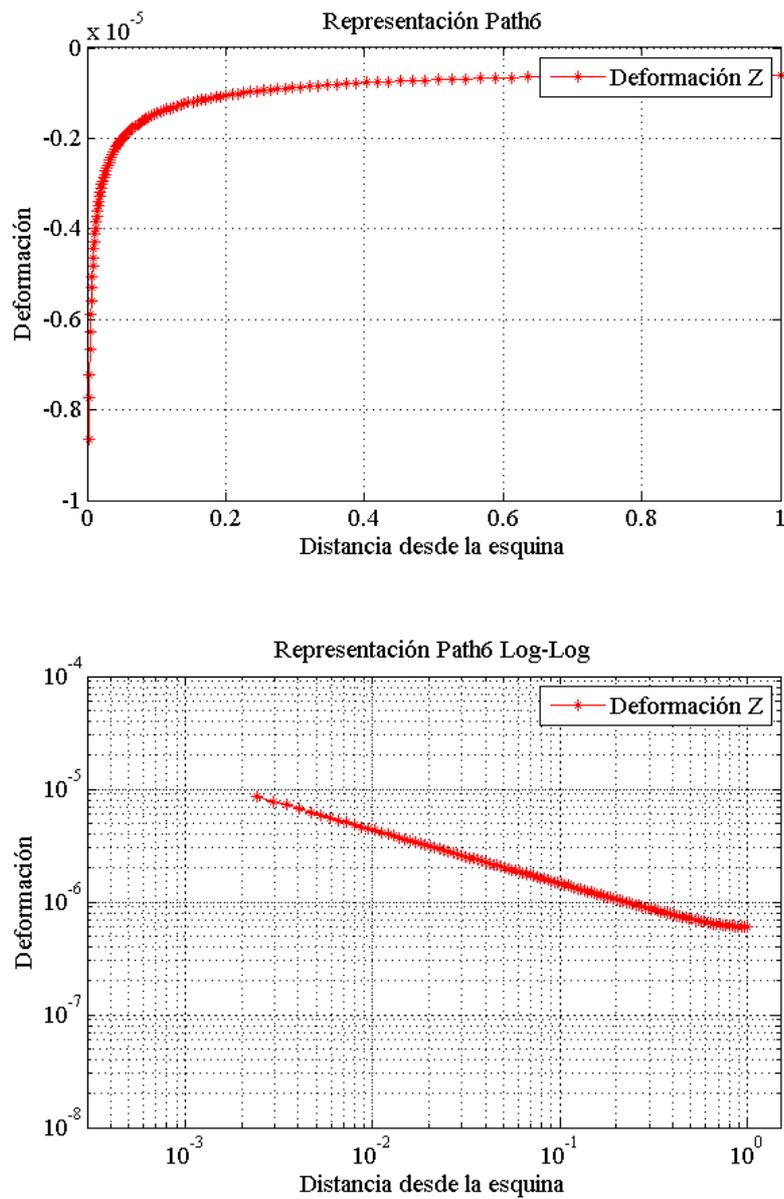


Figura 6.50. Deformaciones path 6 a lo largo del frente para Poisson 0.15

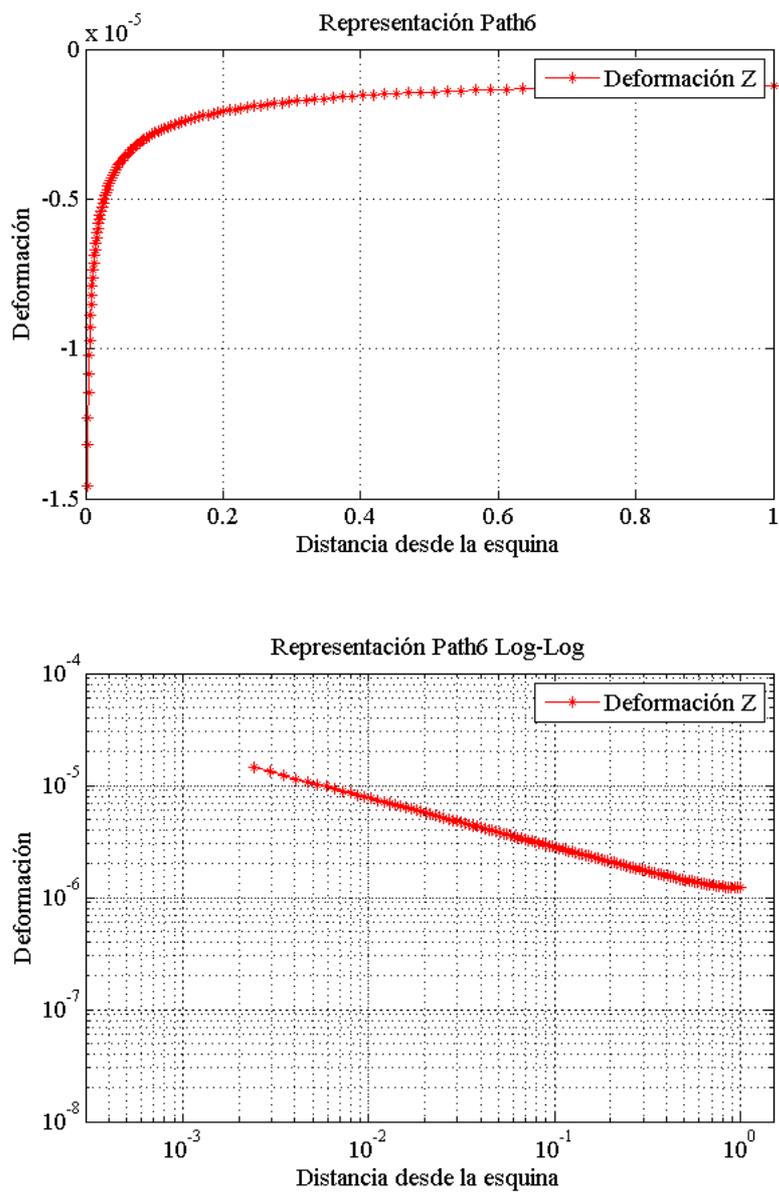


Figura 6.51. Deformaciones path 6 a lo largo del frente para Poisson 0.3

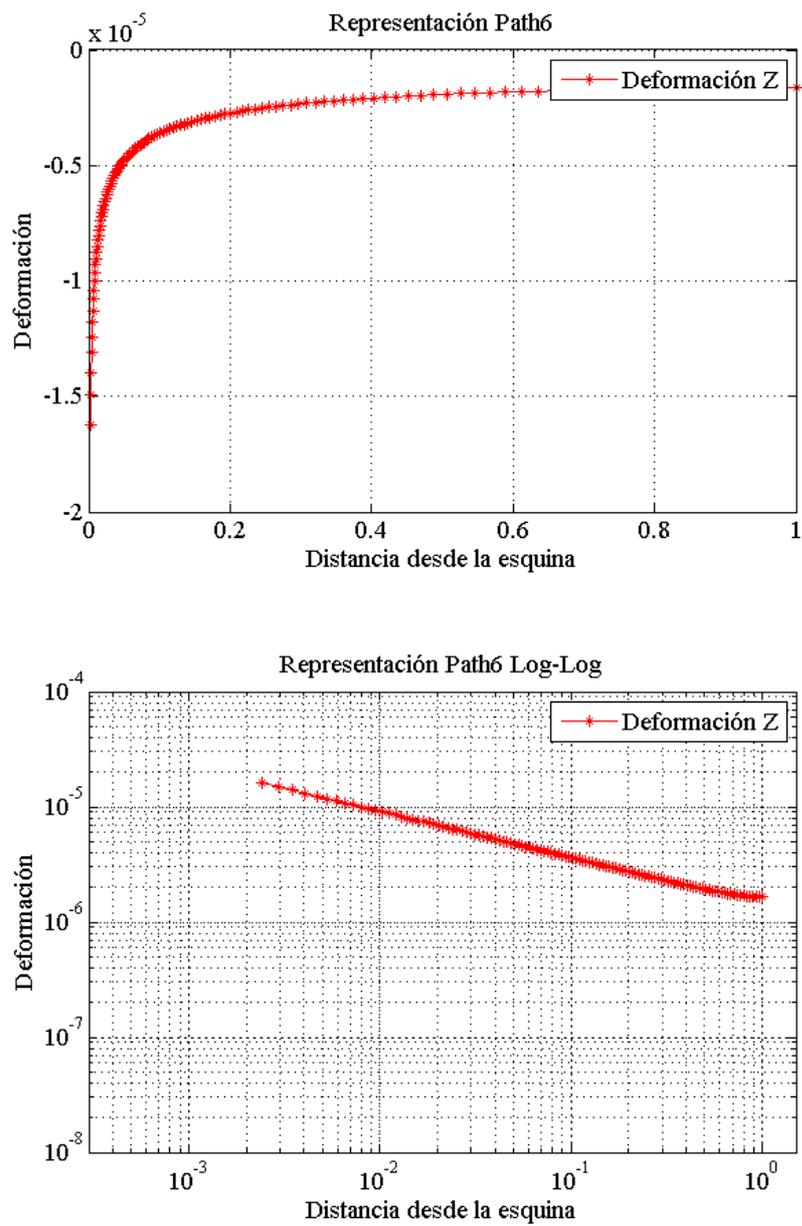


Figura 6.42. Deformaciones path 6 a lo largo del frente para Poisson 0.4

Pendientes de Deformaciones en Frente de grieta						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m ϵ_z P0.15	m ϵ_z P0.3	m ϵ_z P0.4
6	0	1	Frente de Grieta	+0,477	+0,4405	+0,4015

Tabla 6.11. Pendientes para deformaciones en Z del Path 8 para diferentes valores del coeficiente de Poisson.

Los resultados para las deformaciones a lo largo del path 6 son predominantemente lineales en escala logarítmica, se puede observar en la tabla 6.11 que los valores de la pendiente van decreciendo conforme aumenta el coeficiente de Poisson.

6.5.3 Extrapolaciones de desplazamientos en DP (plano Z=1)

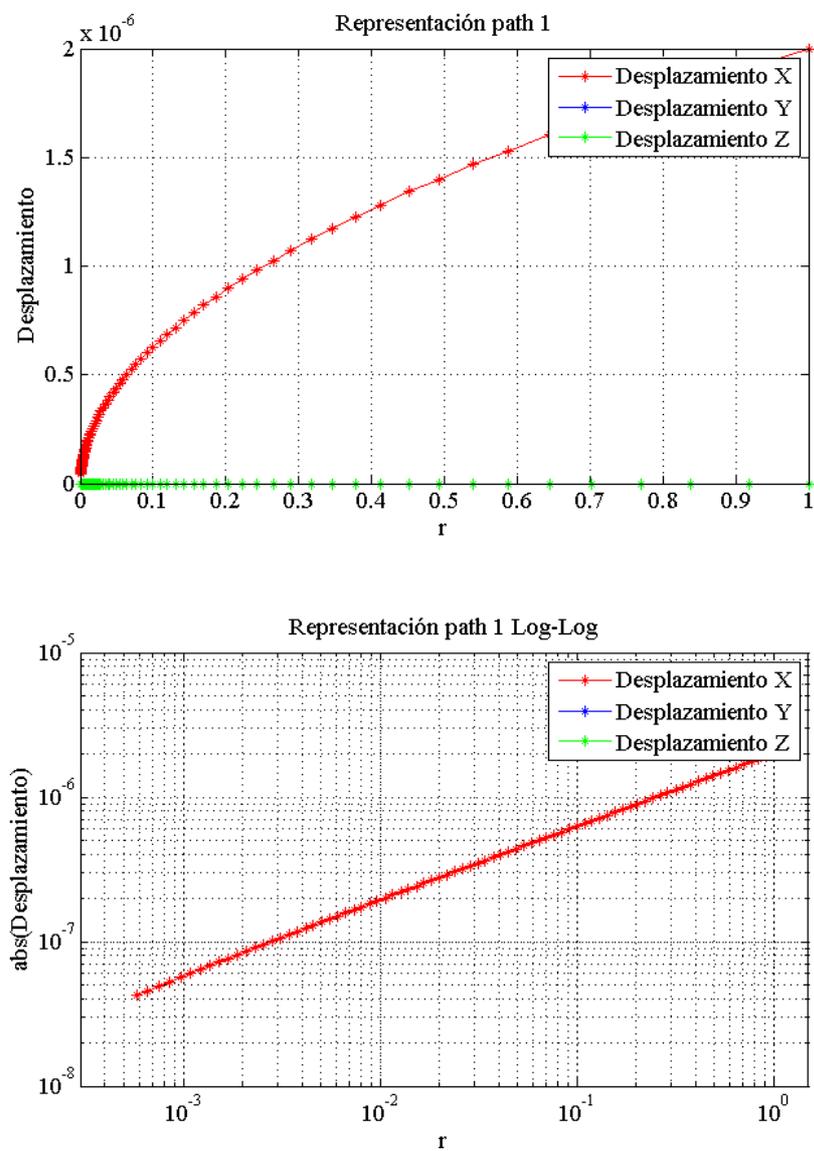


Figura 6.43. Desplazamientos path 1 a lo largo de "r" para DP.

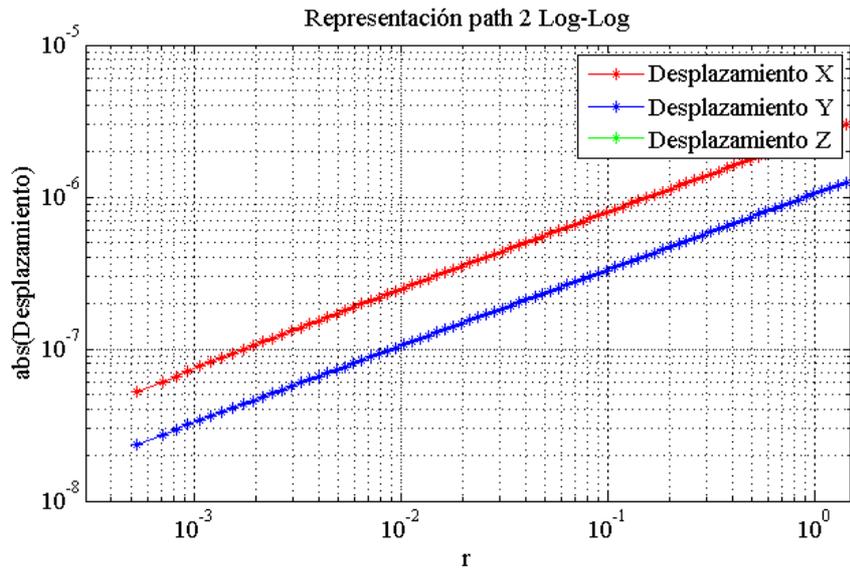
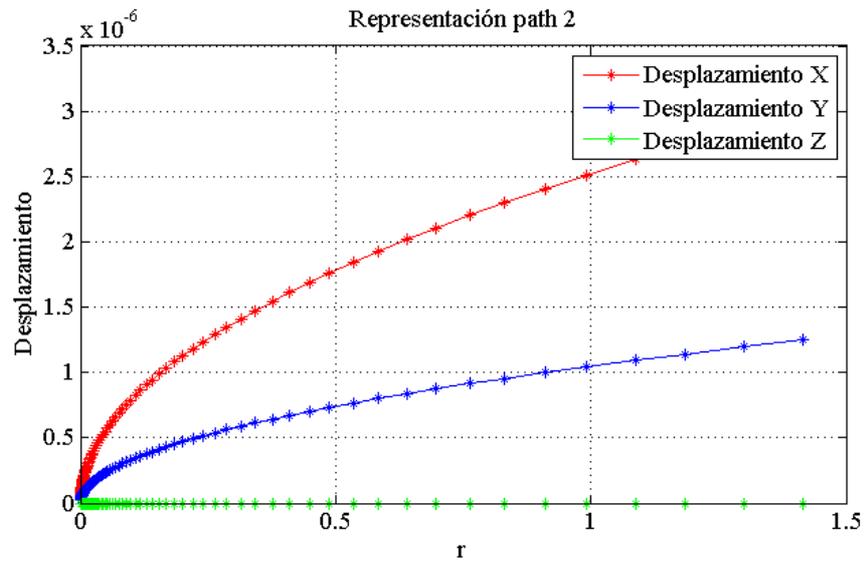


Figura 6.44. Desplazamientos path 2 a lo largo de “r” para DP.

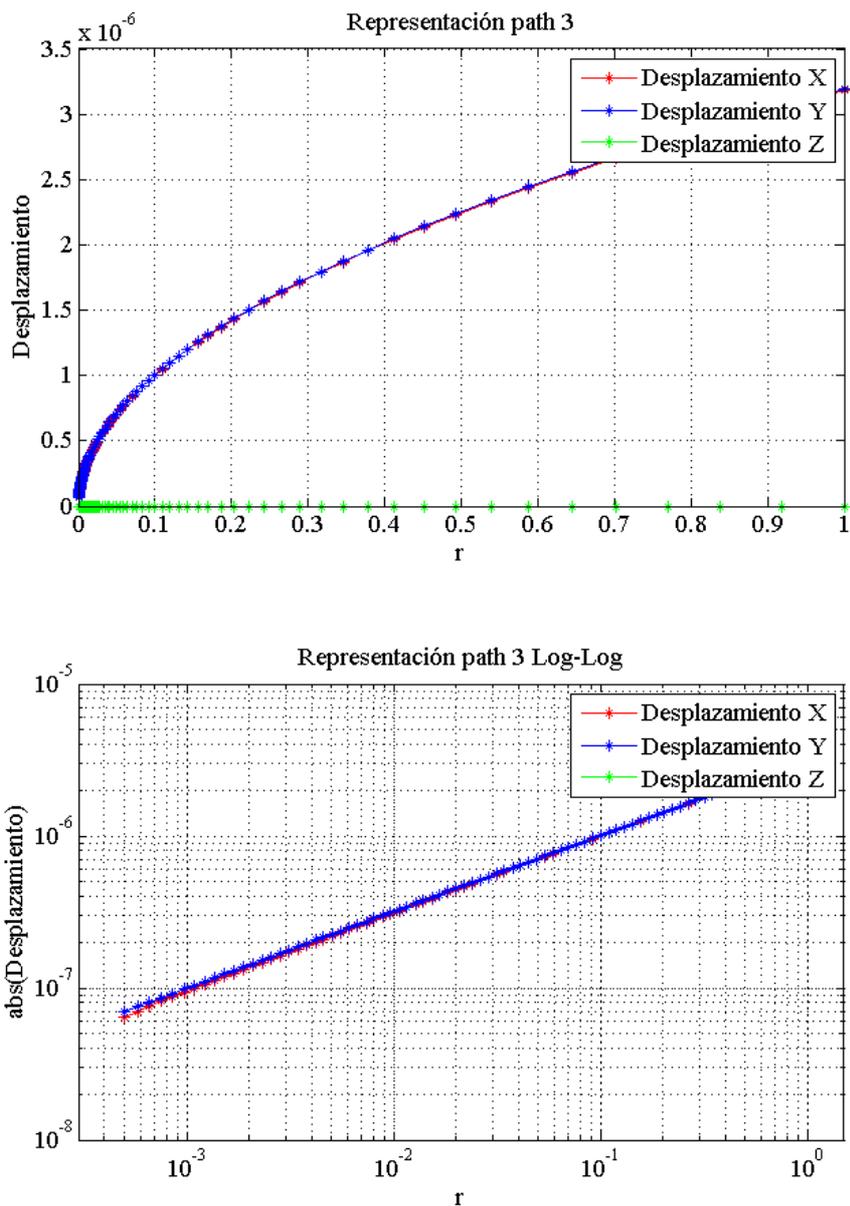


Figura 6.45. Desplazamientos path 3 a lo largo de “r” para DP.

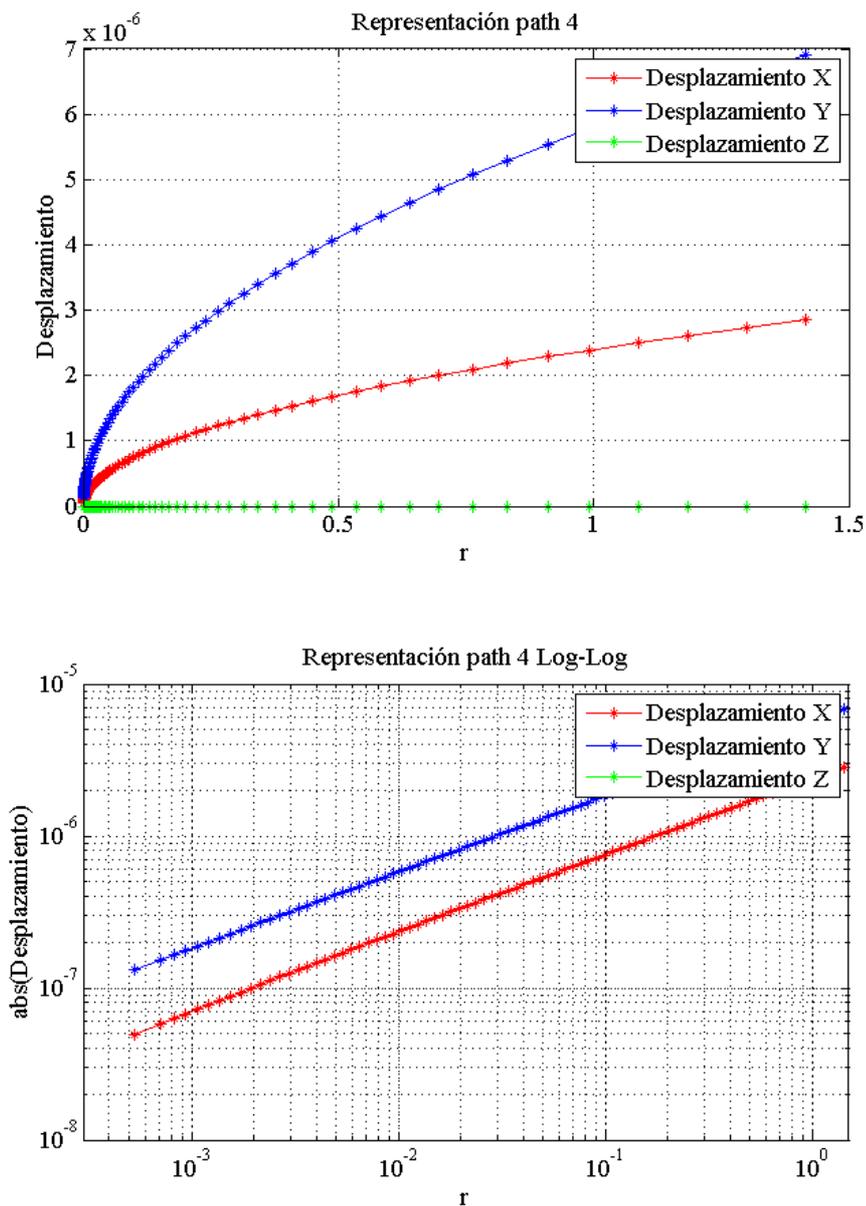


Figura 6.46. Desplazamientos path 4 a lo largo de “r” para DP.

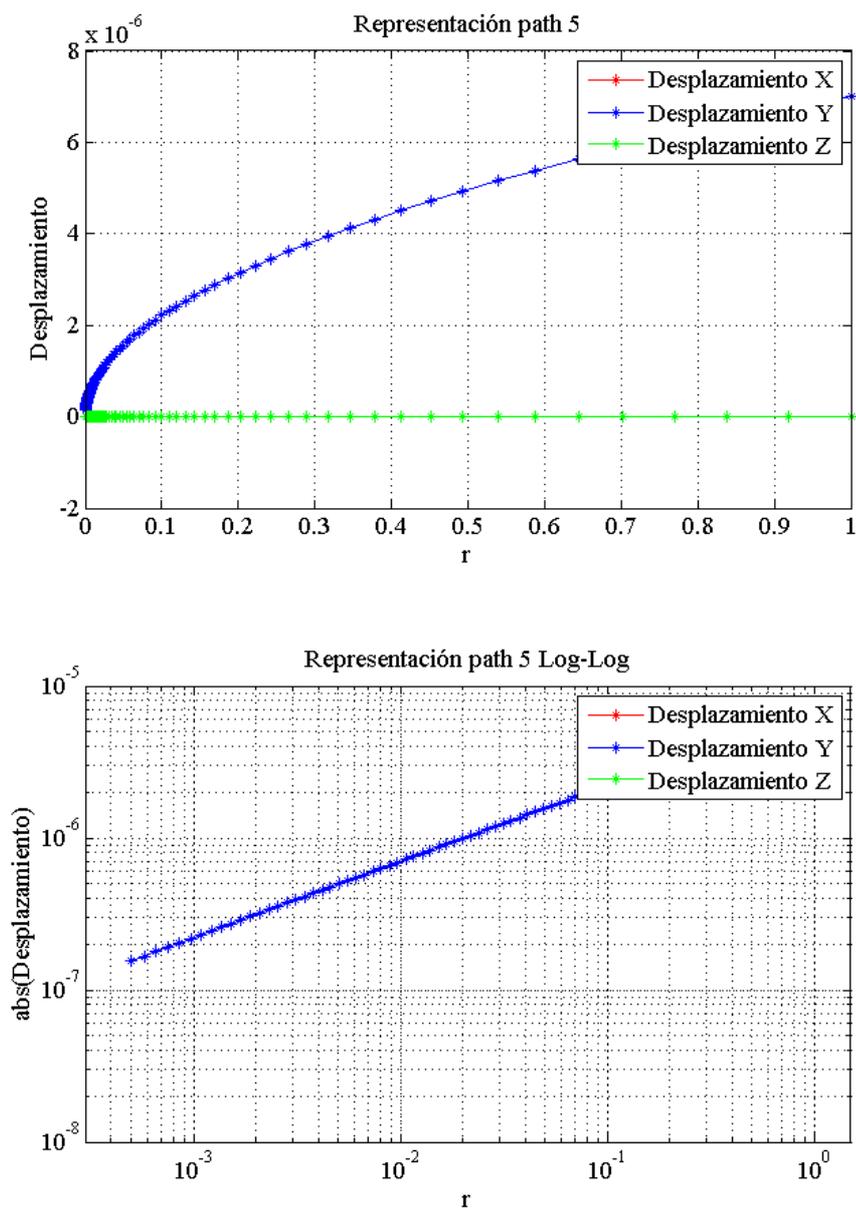


Figura 6.47. Desplazamientos path 5 a lo largo de "r" para DP.

Deformacion plana						
Path	r inicio	r fin	Theta (θ)	m Ux	m Uy	m Uz
1	0	1	0	0,527	-	-
2	0	1,41	$\pi/4$	0,5228	0,5045	-
3	0	1	$\pi/2$	0,5193	0,5055	-
4	0	1,41	$3\pi/4$	0,5228	0,5034	-
5	0	1	π	0	0,5026	-

Tabla 6.12. Pendientes para desplazamientos de cada Path para DP.

Cabe destacar que este apartado (6.5.2) no representa en ningun caso a la singularidad de esquina, ya que como hemos explicado sin la contracción provocada por el coeficiente de Poisson no existe singularidad de esquina. El path 6 en deformación plana no se ha representado por carecer de sentido, ya que los desplazamientos en X, Y y Z son todos nulos.

6.5.4 Comentario de los resultados en desplazamientos

Todas las pendientes de desplazamientos son positivas, ya que se considera el vertex como el origen de las rectas, el Vertex es un punto fijo en todas las direcciones menos en Z, así pues todos los desplazamientos crecen desde el Vertex.

De las soluciones de desplazamientos destaca que las soluciones tienen unas pendientes similares entre sí, a diferencia de las soluciones en tensiones que son más dispares.

Resultados path 3			
Pendiente	Poisson 0.15	Poisson 0.3	Poisson 0.4
m Ux	0,3411	0,2711	0,2524
m Uy	0,4811	0,4807	0,5013
m Uz	0,0215	0,0203	0,0192

Tabla 6.13. Pendientes para desplazamientos del path 3.

Path 6			
Pendiente	Poisson 0.15	Poisson 0.3	Poisson 0.4
m Uz	0,0352	0,0312	0,0276

Tabla 6.14. Pendientes para desplazamientos del path 6.

En las tablas 6.13 y 6.14 se puede observar como el coeficiente de Poisson influye proporcionalmente en el valor de las pendientes que toman los ajustes a los resultados numéricos en los campos de desplazamientos.

7 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Resumen del capítulo:

En este capítulo se recogen las principales conclusiones extraídas de los capítulos anteriores y se enumeran posibles desarrollos futuros que continúan la línea de investigación en la que se enmarca la Tesina aquí presentada.

7.1 CONCLUSIONES

- El modelo creado en esta tesina, mediante las tensiones de Williams aplicadas en el contorno del sólido, proporciona datos sin términos de orden superior para el estudio de la singularidad de grieta y de esquina. Es por tanto un método útil para el análisis general en mecánica de la fractura.
- El análisis de la singularidad de esquina aquí realizado, confirma que la singularidad de esquina está definida por alguna expresiones potenciales, lo que queda reflejado en la rectitud de las curvas logarítmicas al acercarse al origen del vertex.
- Las tensiones que produce la singularidad de esquina son diferentes en cada dirección desde el origen de la misma.
- La influencia de dicha singularidad está limitada a un pequeño campo de acción, en el caso de este caso de espesor de el doble de la longitud de grieta, es de aproximadamente el 15% de longitud de grieta.
- La integral de interacción que utiliza el software comercial Abaqus CAE no aporta resultados totalmente correctos de T-Stress para casos afectados por la singularidad de esquina.
- La precisión del modelo a la hora de calcular las pendientes de K_I a lo largo del frente de grieta desde la singularidad, es insuficiente, ya que los resultados de pendiente se alejan de los que obtuvo Benthem y se observan valores poco precisos en las figuras obtenidas.

- El error de cálculo producido en la obtención de la integral J cerca de la esquina, no permite calcular los campos de Williams cerca de la misma. En la superficie libre ($Z=1$) los campos se pueden considerar puramente vertex, es decir, sin contribución de Williams si el frente es recto. También los desplazamientos Z a lo largo del frente de grieta son resultados pertenecientes al campo de la singularidad de esquina.

7.2 DESARROLLOS FUTUROS

- Mejorar el mallado del modelo para obtener las pendientes que obtuvo Benthem.
- Crear un modelo similar con el frente de grieta curvo y otro con el frente de grieta a distintos ángulos con la superficie libre.
- Una vez mejorada la precisión de los cálculos contrastar con los modelos de interacción entre tensiones de Williams y tensiones vertex que se han propuesto.
- Obtener un modelo que englobe las dos singularidades y que se adapte a los resultados obtenidos.

8 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Atluri SN. "Energetic Approaches and Path-Independent Integrals". Computational Methods in the Mechanics of Fracture, volumen 2 de Computational Methods in Mechanics, capítulo 5, págs. 121-165. North-Holland (Elsevier Science), Amsterdam, 1986.
- [2] Budiansky B, Rice JR. Conservation laws and energy-release rates. *J. Appl. Mech.* 1973;40:201-203.
- [3] Chang JH, Pu LP. Finite Element calculation of Energy Release Rate prior to crack kinking in 2-D Solids. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1996;39(17):3033-3046.
- [4] Eugenio Giner, Brice Bognet, Juan J. Ródenas, Adrien Leygue, F. Javier Fuenmayor, Francisco Chinesta. The Proper Generalized Decomposition (PGD) as a numerical procedure to solve 3D cracked plates in linear elastic fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures.* 50 (2013) 1710–1720.
- [5] Cherepanov GP. *Mechanics of Brittle Fracture.* McGraw-Hill, Nueva York, 1979. Traducido del ruso por De Wit R y Cooley W.
- [6] J.P. Benthem. State of stress at the Vertex of a quarter-infinite crack in a half-space. *Int. J. Solid structures.* 1977; 13:479-492.
- [7] Eischen JW. An improved method for computing the J2 integral. *Eng. Fract. Mech.* 1987;26(5):691-700.
- [8] Eshelby JD. The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity* 1975;5(3-4):321-335.
- [9] T. Nakamura, D.M. Parks. Three-Dimensional stress field near the the crack front of a thin elastic plate. *Journal of applied mechanics* 1988;55:805-813.
- [10] Gdoutos EE. *Fracture Mechanics: an Introduction.* Solid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda, 1993.
- [11] Giner, E. *Estimación del error de discretización en el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones mediante Elementos Finitos.* Tesis Doctoral,

- Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2001.
- [12] Hinton E, Campbell JS. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1974;8(3):461-480.
- [13] Kim J, Paulino GH. T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method. *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* 2003;192(11-12):1463-1494.
- [14] Knowles JK, Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1972;44(3):187-211.
- [15] T. Nakamura, D.M. Parks. Determination of elastic t-stress along three-dimensional crack fronts using an interaction integral. *Int. J. Solid structures.* 1992;29(13):1597-1611.
- [16] Li FZ, Shih CF, Needleman A. A comparison of methods for calculating energy release rate. *Eng. Fract. Mech.* 1985;21(2):405-421.
- [17] S.W. KWON and C.T. SUN. Characteristics of three-dimensional stress fields in plates with a through-the-thickness crack. *Int. J. of Fracture* 2000; 104: 291–315.
- [18] Rice JR. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 1968;35:379-386.
- [19] E. Giner, D. Fernández-Zúñiga, J. Fernández-Sáez, A. Fernández-Canteli. On the J_{x1} -integral and the out-of-plane constraint in a 3D elastic cracked plate loaded in tension. *International Journal of Solids and Structures.* 2010; 47:934–946.
- [20] Tong J. T-stress and its implications for crack growth. *Eng. Fract. Mech.* 2002;69(12), 1325-1337.
- [21] Williams ML. On the Stress Distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.* 1957;24:109-114.

9 ANEXO

9.1 ARCHIVOS INPUT ABAQUS

Archivo input de Abaqus para el modelo 3D. Se utilizan ficheros para reducir el tamaño del input y así manejarlo más fácilmente. Para cambiar el caso calculado se modifican los valores de material y condiciones de contorno, destacadas en negrita. La declaración de cargas mediante subrutina esta subrayada y en negrita, los comandos escritos llaman a la subrutina y la subrutina devuelve los valores correspondientes.

```
*Heading
** Job name: Estudio_Singularidad_de_Esquina Model name: Modelo_3D
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
**
**
*Node, input=.\Ficheros\XYZHexa.prn, nset=TODOSGEOM
*Element, type=C3D20, input=.\Ficheros\topHexa.prn, elset=TODOSGEOM
*Solid Section, elset=TODOSGEOM, material=Material-1
1.,
**
**
**
**
**
*****
**** SETS ****
*****
**
*include, input=.\Ficheros\setsHexa.prn
**
**
*****
*** SURFACES***
*****
**
**
*include, input=.\Ficheros\surfacesHexa.prn
**
**
**
*****
```

```

** CRACK FRONT NODE SETS
*****
**
**
*include, input=.\Ficheros\setsHexaJ.prn
**
**
**
*****
** MATERIALS
*****
**
*Material, name=Material-1
**Elastic
207000., 0.3
**
**
** -----
**
**
*****
** STEPS
*****
**
** STEP: Step-1
**
*Step, name=3D
Carga estatica
*Static
1., 1., 1e-05, 1.
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: BC-1 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
BC-Y, 2, 2
** Name: BC-4 Type: Displacement/Rotation
**Boundary
**Part-1-1.SUPERFICIE_LIBRE, 3, 3
** Name: BC-X Type: Displacement/Rotation
*Boundary
FRENTE_GRIETA, 1, 1
** Name: BC-Z Type: Displacement/Rotation
*Boundary
SYMM_Z, 3, 3

```



```

**
*Restart, write, frequency=1
*Output, field, op=NEW, frequency=1
*Node Output
U, CF
*Element Output
S, E
*Output, history, op=NEW, frequency=0
**
**
** Fin del paso de carga..
*End Step

```

9.2 SUBRUTINAS ABAQUS

Subrutina UTRACLOAD, utilizada para imponer las cargas mediante abaqus. Programada en Fortran.

```

SUBROUTINE UTRACLOAD(ALPHA,T_USER,KSTEP,KINC,TIME,NOEL,NPT,
1 COORDS,DIRCOS,ILTYP,SNAME)
C
C   INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C   DIMENSION T_USER(3), TIME(2), COORDS(3), DIRCOS(3,3)
C   CHARACTER*80 SNAME

C   Para leer el directorio en el que se est· trabajando
c   character*256 OUTDIR
c   integer LENOUTDIR !Longitud de la cadena
c   integer dfich !fichero para depurar
DOUBLE PRECISION :: r, theta, halftheta, costh2, sinh2, cos3th2
DOUBLE PRECISION :: sin3th2, sigx, sigy, tauxy, tx, ty, PI, X, Y

```

```

DOUBLE PRECISION :: KI, KII, a, K, POISSON
C   Para leer el directorio en el que se est- trabajando
c   CALL GETOUTDIR(OUTDIR,LENOUTDIR)
C   Para tener un fichero donde escribir los debug
c   dfich=78
c   OPEN(dfich,STATUS='UNKNOWN',FILE=OUTDIR(1:LENOUTDIR)//
c   1'\debug\debug78.prn')
KI=1.0
KII=0.0
a=1.0
PI = 4*ATAN(1.0)
POISSON=0.3

X=(COORDS(1)-a)
Y=COORDS(2)
IF (X.EQ.0)THEN
theta=(PI/2)
ELSE IF(X>0)THEN
theta=datan((Y/X))
ELSE IF (X<0) THEN
theta=PI+datan((Y/X))
ENDIF

r=abs(dsqrt((X**2)+(Y**2)))
halftheta=theta/2
costh2=dcos(halftheta)
sinth2=dsin(halftheta)
cos3th2=dcos(3*halftheta)
sin3th2=dsin(3*halftheta)

```

```

sigx=((KI/dsqrt(2*PI*r))*cosh2*(1-(sinh2*sin3th2)))-((KII/dsqrt(
12*PI*r))*sinh2*(2+(cosh2*cos3th2)))
sigy=((KI/dsqrt(2*PI*r))*cosh2*(1+(sinh2*sin3th2)))+((KII/dsqrt(
12*PI*r))*sinh2*cosh2*cos3th2)
tauxy=((KI/dsqrt(2*PI*r))*sinh2*cosh2*cos3th2)+((KII/dsqrt(2*PI*
1r))*cosh2*(1-(sinh2*sin3th2)))

```

C Cara derecha

```

IF (SNAME.EQ.'SUPERFICIE_DER') THEN

```

```

tx=sigx

```

```

ty=tauxy

```

```

tz=0

```

C Cara superior

```

ELSE IF (SNAME.EQ.'SUPERFICIE_SUP') THEN

```

```

tx=tauxy

```

```

ty=sigy

```

```

tz=0

```

C Cara izquierda

```

ELSE IF (SNAME.EQ.'SUPERFICIE_IZQ') THEN

```

```

tx=-sigx

```

```

ty=-tauxy

```

```

tz=0

```

```

end if

```

```

ALPHA=DSQRT((tx**2)+(ty**2)+(tz**2))

```

```

T_user(1)=(tx/abs(ALPHA))

```

```

T_user(2)=(ty/abs(ALPHA))

```

```

T_user(3)=(tz/abs(ALPHA))

```

<pre> C DO I=1,100000 C K=0 C READ(DFICH,*,END=15) C K=K+1 C END DO C15 WRITE(dfich,*)(NOEL,x,y,r,theta,tx,ty)='NOEL,COORDS(1),COORDS(2) C 1,r,theta,tx,ty C15 WRITE(dfich,*)sigx,sigy,tauxy c WRITE(*,*)SNAME c close(dfich) RETURN END </pre>
<p>Modo de usar una subrutina mediante el ejecutable .bat, se destaca en negrita la parte que llama a la subrutina que debe estar en el directorio de trabajo.</p>
<pre> cmd /k abq692 cpus=8 scratch="F:/Master/juasanpr/CALCULOS 3D CLUSTER/scratch" job=Modelo3d_SL_Libre_SinR user=subroutine3D_Surfaces2 interactive </pre>

9.3 RUTINAS MATLAB

9.3.1 Post-proceso J, K_I y T a lo largo del frente

Plotear_J.m
<pre> %Plotea los resultados de J a lo largo del frente %Es necesario eliminar los Caracteres del documento en cuestion DatosJ1=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/1-P_0/Valores_J.prn'); DatosJ2=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/2-P_0.15/Valores_J.prn'); </pre>

```

DatosJ3=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi
ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/3-P_0.3/Valores_J.prn');
DatosJ4=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi
ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/4-P_0.4/Valores_J.prn');
DatosJ5=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi
ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/5-P_0.45/Valores_J.prn');
DatosJ6=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi
ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/6-
P_0.499/Valores_J.prn');
CoordNodos=load('Coor_Nod_ 1');
NodosFrente=load('NodosOrdenados.prn');
NodosFrente=NodosFrente';
%

for e=1:size(NodosFrente,1)
    for i=1:size(CoordNodos,1)
        if CoordNodos(i,4)==NodosFrente(e,1)

            Ncoord(e,1)=(NodosFrente(e,1));
            Ncoord(e,2)=(CoordNodos(i,1));
            Ncoord(e,3)=(CoordNodos(i,2));
            Ncoord(e,4)=(CoordNodos(i,3));
        end
    end
end

for i=1:size(NodosFrente,1)

    ZJ(i,1)=(Ncoord(i,4));
    ZJ(i,2)=(DatosJ1(i,8));
    ZJ(i,3)=(DatosJ2(i,8));
    ZJ(i,4)=(DatosJ3(i,8));
    ZJ(i,5)=(DatosJ4(i,8));
    ZJ(i,6)=(DatosJ5(i,8));
    ZJ(i,7)=(DatosJ6(i,8));

end

plot(ZJ(:,1),ZJ(:,2),'r-',ZJ(:,1),ZJ(:,3),'y-',ZJ(:,1),ZJ(:,4),'m-',ZJ(:,1),ZJ(:,5),'c-
',ZJ(:,1),ZJ(:,6),'g-',ZJ(:,1),ZJ(:,7),'b-'), grid on, title('CoordenadaZ-Valor de J'),

```

```

xlabel('CoordenadaZ'), ylabel('J');

saveas(gcf,'GraficaJ','png');
saveas(gcf,'GraficaJ','fig');

```

```

Plotear_KI.m

%Plotea los resultados de J a lo largo del frente
%Es necesario eliminar los Caracteres del documento en cuestion
DatosK1=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/1-P_0/valorKI__.prn');
DatosK2=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/2-P_0.15/valorKI__.prn');
DatosK3=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/3-P_0.3/valorKI__.prn');
DatosK4=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/4-P_0.4/valorKI__.prn');
DatosK5=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/5-P_0.45/valorKI__.prn');
DatosK6=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus_Tesina/3-Estudio_3D/Modelo_3D_SL_Libre/Diferentes_Coeficientes_de
Poisson/Estudio_3D_coeficientes_de_poisson_Sin_T-Stress/6-
P_0.499/valorKI__.prn');
CoordNodos=load('Coor_Nod_ 1');
NodosFrente=load('NodosOrdenados.prn');
NodosFrente=NodosFrente';
%

for e=1:size(NodosFrente,1)
    for i=1:size(CoordNodos,1)
        if CoordNodos(i,4)==NodosFrente(e,1)

            Ncoord(e,1)=(NodosFrente(e,1));
            Ncoord(e,2)=(CoordNodos(i,1));
            Ncoord(e,3)=(CoordNodos(i,2));
            Ncoord(e,4)=(CoordNodos(i,3));
        end
    end
end

```

<pre> end for i=1:size(NodosFrente,1) ZK(i,1)=abs(Ncoord(i,4)-1); ZK(i,2)=(DatosK1(i,8)); ZK(i,3)=(DatosK2(i,8)); ZK(i,4)=(DatosK3(i,8)); ZK(i,5)=(DatosK4(i,8)); ZK(i,6)=(DatosK5(i,8)); ZK(i,7)=(DatosK6(i,8)); end loglog(ZK(:,1),ZK(:,2),'r-',ZK(:,1),ZK(:,3),'y-',ZK(:,1),ZK(:,4),'m-',ZK(:,1),ZK(:,5),'c- ',ZK(:,1),ZK(:,6),'g-',ZK(:,1),ZK(:,7),'b-'), grid on, title('CoordenadaZ-Valor de KI'), xlabel('CoordenadaZ'), ylabel('KI'); %plot(ZK(:,1),ZK(:,4),'r-'), grid on, title('CoordenadaZ-Valor de J'), xlabel('CoordenadaZ'), ylabel('J'); saveas(gcf,'GraficaKI','fig');</pre>
<pre> Plotear_Tstress.m</pre>
<pre> %Plotea los resultados de J a lo largo del frente %Es necesario eliminar los Caracteres del documento en cuestion DatosT1=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/1-P_0/valores_T.prn'); DatosT2=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/2-P_0.15/valores_T.prn'); DatosT3=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/3-P_0.3/valores_T.prn'); DatosT4=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/4-P_0.4/valores_T.prn'); DatosT5=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi ales/Abaqus_Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de</pre>

```

Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/5-P_0.45/valores_T.prn');
DatosT6=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Materi
ales/Abaqus Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de
Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/6-
P_0.499/valores_T.prn');
CoordNodos=load('Coor_Nod_ 1');
NodosFrente=load('NodosOrdenados.prn');
NodosFrente=NodosFrente';
%
for e=1:size(NodosFrente,1)
    for i=1:size(CoordNodos,1)
        if CoordNodos(i,4)==NodosFrente(e,1)

            Ncoord(e,1)=(NodosFrente(e,1));
            Ncoord(e,2)=(CoordNodos(i,1));
            Ncoord(e,3)=(CoordNodos(i,2));
            Ncoord(e,4)=(CoordNodos(i,3));
        end
    end
end

for i=1:size(NodosFrente,1)

    ZT(i,1)=(Ncoord(i,4));
    ZT(i,2)=(DatosT1(i,8));
    ZT(i,3)=(DatosT2(i,8));
    ZT(i,4)=(DatosT3(i,8));
    ZT(i,5)=(DatosT4(i,8));
    ZT(i,6)=(DatosT5(i,8));
    ZT(i,7)=(DatosT6(i,8));

end

plot(ZT(:,1),ZT(:,2),'r-',ZT(:,1),ZT(:,3),'y-',ZT(:,1),ZT(:,4),'m-',ZT(:,1),ZT(:,5),'c-
',ZT(:,1),ZT(:,6),'g-',ZT(:,1),ZT(:,7),'b-'), grid on, title('CoordenadaZ-Valor de T'),
xlabel('CoordenadaZ'), ylabel('T');

saveas(gcf,'GraficaT-Stress','fig');

```

Plotear_KI_LOGLOG.m

```

%Plotea los resultados de KI a lo largo del frente para diferentes Coef. de
%Poisson
clear ZK ZK2 NodosFrente CoordNodos Ncoord DatosK1 DatosK2 DatosK3
DatosK4 DatosK5 DatosK6 DatosK7
%Es necesario eliminar los Caracteres del documento en cuestion
DatosK1=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de
Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/1-P_0/valorKI__.prn');
DatosK2=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de
Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/2-P_0.15/valorKI__.prn');
DatosK3=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de
Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/3-P_0.3/valorKI__.prn');
DatosK4=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de
Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/4-P_0.4/valorKI__.prn');
DatosK5=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de
Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/5-P_0.45/valorKI__.prn');
DatosK6=load('/Users/juansanchoperez/Master_en_Ingenieria_Mecanica_y_Mater
iales/Abaqus Tesina/3-Estudio 3D/Modelo 3D SL Libre/Diferentes Coeficientes de
Poisson/Estudio 3D coeficientes de poisson Sin T-Stress/6-
P_0.499/valorKI__.prn');
CoordNodos=load('Coor_Nod_ 1');
NodosFrente=load('NodosOrdenados.prn');
NodosFrente=NodosFrente';
%

for e=1:size(NodosFrente,1)
    for i=1:size(CoordNodos,1)
        if CoordNodos(i,4)==NodosFrente(e,1)

            Ncoord(e,1)=(NodosFrente(e,1));
            Ncoord(e,2)=(CoordNodos(i,1));
            Ncoord(e,3)=(CoordNodos(i,2));
            Ncoord(e,4)=(CoordNodos(i,3));
        end
    end
end
e=1;
for i=1:size(NodosFrente,1)
    if Ncoord(i,4)<0.999975
        ZK(e,1)=abs(Ncoord(i,4)-1);
    end
end

```

```

ZK(e,2)=(DatosK1(i,8));
ZK(e,3)=(DatosK2(i,8));
ZK(e,4)=(DatosK3(i,8));
ZK(e,5)=(DatosK4(i,8));
ZK(e,6)=(DatosK5(i,8));
ZK(e,7)=(DatosK6(i,8));
e=e+1;
end

end

loglog(ZK(:,1),ZK(:,2),'r-',ZK(:,1),ZK(:,3),'y-',ZK(:,1),ZK(:,4),'m*-
',ZK(:,1),ZK(:,5),'c-',ZK(:,1),ZK(:,6),'g-',ZK(:,1),ZK(:,7),'b*-'), grid on,
title('CoordenadaZ-Valor de KI'), xlabel('CoordenadaZ'), ylabel('KI');

e=1;
for i=1:size(NodosFrente,1)
    if Ncoord(i,4)<0.995938 && Ncoord(i,4)>0.95
        ZK2(e,1)=abs(Ncoord(i,4)-1);
        ZK2(e,2)=(DatosK1(i,8));
        ZK2(e,3)=(DatosK2(i,8));
        ZK2(e,4)=(DatosK3(i,8));
        ZK2(e,5)=(DatosK4(i,8));
        ZK2(e,6)=(DatosK5(i,8));
        ZK2(e,7)=(DatosK6(i,8));
        e=e+1;
    end

end

m0=polyfit(log(ZK2(:,1)),log(ZK2(:,2)),1)
m015=polyfit(log(ZK2(:,1)),log(ZK2(:,3)),1)
m030=polyfit(log(ZK2(:,1)),log(ZK2(:,4)),1)
m040=polyfit(log(ZK2(:,1)),log(ZK2(:,5)),1)
m045=polyfit(log(ZK2(:,1)),log(ZK2(:,6)),1)
m0499=polyfit(log(ZK2(:,1)),log(ZK2(:,7)),1)

saveas(gcf,'GraficaKI','fig');

```

CrearFicheroNodos.m

```

%NODOS: Nombres ficheros a leer y escribir:
NFrente=load('nodos.prn');
NFrente2=load('nodos2.prn');

```

```

% Escrituras de los sets para integral J, etc.
archivowrite='NodosOrdenados.prn';
fid = fopen(archivowrite,'w');
for i=1:(size(NFrente,1))
    fprintf(fid,'%7i, ',NFrente(i));
    % fprintf(fid,'%7i, ',NFrente2(i));
end
fclose(fid);

```

escribirSetsJ.m

```

%NODOS: Nombres ficheros a leer y escribir:
NFrente=load('NodosOrdenados.prn');
NFrente=NFrente';
%
% Escrituras de los sets para integral J, etc.
archivowrite='setsHexaJ.prn';
fid = fopen(archivowrite,'w');
for i=1:size(NFrente,1)
    string=['*nset,nset=CT' int2str(i) '\n'];
    fprintf(fid,string);
    fprintf(fid,'%7i\n',NFrente(i));
end
fclose(fid);
% Escrituras para el comando de Integral J, T-stress, etc.
archivowrite='comandosHexaJ.prn';
fid = fopen(archivowrite,'w');
for i=1:size(NFrente,1)
    string=['CT' int2str(i) ', 1., 0., 0.\n'];
    fprintf(fid,string);
end
fclose(fid);

```

9.3.2 Post-proceso tensiones

Calcular_Tensiones_Vertex.m
<pre> %%Rutina que calcula las tensiones debidas al Vertex o singularidad de %%esquina clear SIGxyzFE SIGxyzW SIGxyzVERTEX clear all %Elegir el modelo deseado con el numero correspondiente indicado abajo %Modelo: 1=Superficie Libre Sin T-Stress Poisson 0.3 % 2=Superficie Libre Sin T-Stress Poisson 0.4 % 3=Superficie Libre Sin T-Stress Poisson 0.45 % 4=Deformacion plana Sin T-Stress % 5=Superficie Libre Sin T-Stress Poisson 0.15 global modelo modelo='5'; Cargar_TensionesFE; Cargar_TensionesW; SIGxyzVERTEX=zeros(size(CoordNodos,1),10); for ee=1:size(CoordNodos,1) SIGxyzVERTEX(ee,1)=(CoordNodos(ee,1)); SIGxyzVERTEX(ee,2)=(CoordNodos(ee,2)); SIGxyzVERTEX(ee,3)=(CoordNodos(ee,3)); SIGxyzVERTEX(ee,4)=(CoordNodos(ee,4)); SIGxyzVERTEX(ee,5)=SIGxyzFE(ee,5)-SIGxyzW(ee,5); SIGxyzVERTEX(ee,6)=SIGxyzFE(ee,6)-SIGxyzW(ee,6); SIGxyzVERTEX(ee,7)=SIGxyzFE(ee,7)-SIGxyzW(ee,7); SIGxyzVERTEX(ee,8)=SIGxyzFE(ee,8)-SIGxyzW(ee,8); SIGxyzVERTEX(ee,9)=SIGxyzFE(ee,9)-SIGxyzW(ee,9); SIGxyzVERTEX(ee,10)=SIGxyzFE(ee,10)-SIGxyzW(ee,10); end </pre>
Cargar_TensionesFE.m
<pre> %%Esta rutina carga las tensiones de cada nodo y las guarda junto con las </pre>

```

%%%coordenadas
global modelo

switch modelo
  case '1'
Sig=load('tensiones_SL_P0.3.prn');
  case '2'
Sig=load('tensiones_SL_P0.4.prn');
  case '3'
Sig=load('tensiones_SL_P0.45.prn');
  case '4'
Sig=load('tensiones_DP.prn');
  case '5'
Sig=load('tensiones_SL_P0.15.prn');
end
%
CoordNodos=load('XYZHexa.prn');
%SIGxyz-->Matriz que contiene en el siguiente orden: 1-Nº de nodo,2-Coord.
%X, 3-Y, 4-Z, 5-Sig11, 6-Sig22, 7-Sig33, 8- Sig12, 9-Sig13, 10-Sig23
%
SIGxyzFE=zeros(size(CoordNodos,1),10);
for i=1:size(CoordNodos,1)

    SIGxyzFE(i,1)=(CoordNodos(i,1));
    SIGxyzFE(i,2)=(CoordNodos(i,2));
    SIGxyzFE(i,3)=(CoordNodos(i,3));
    SIGxyzFE(i,4)=(CoordNodos(i,4));
    SIGxyzFE(i,5)=(Sig(i,2));
    SIGxyzFE(i,6)=(Sig(i,3));
    SIGxyzFE(i,7)=(Sig(i,4));
    SIGxyzFE(i,8)=(Sig(i,5));
    SIGxyzFE(i,9)=(Sig(i,6));
    SIGxyzFE(i,10)=(Sig(i,7));

end

```

Cargar_KI

```

%Plotea los resultados de KI a lo largo del frente
%Es necesario eliminar los Caracteres del documento en cuestion
global modelo

```

```

switch modelo
  case '1'

```

```

DatosKI=load('valorKI__0.3.prn');
    case '2'
DatosKI=load('valorKI__0.4.prn');
    case '3'
DatosKI=load('valorKI__0.45.prn');
    case '4'
DatosKI=load('valorKI__DP.prn');
    case '5'
DatosKI=load('valorKI__0.15.prn');
end

CoordNodos=load('XYZHexa.prn');
NodosFrente=load('NodosOrdenados.prn');
NodosFrente=NodosFrente';
%

for e=1:size(NodosFrente,1)
    for i=1:size(CoordNodos,1)
        if CoordNodos(i,1)==NodosFrente(e,1)

            Ncoord(e,1)=(NodosFrente(e,1));
            Ncoord(e,2)=(CoordNodos(i,2));
            Ncoord(e,3)=(CoordNodos(i,3));
            Ncoord(e,4)=(CoordNodos(i,4));
        end
    end
end
for i=1:size(NodosFrente,1)

    ZKI(i,1)=(Ncoord(i,4));
    ZKI(i,2)=(DatosKI(i,8));
end
%Corrige el valor de KI en la singularidad de esquina, comentar para usar
%el valor de elementos finitos
ZKI(1,2)=0;

```

Cargar_TensionesW.m

```

%%Esta rutina carga las tensiones de cada nodo y las guarda junto con las
%%coordenadas
%NODOS: Nombres ficheros a leer y escribir:
CoordNodos=load('XYZHexa.prn');
global modelo

```

```

switch modelo
  case '1'
    POISSON=0.3;
  case '2'
    POISSON=0.4;
  case '3'
    POISSON=0.45;
  case '4'
    POISSON=0.3;
  case '5'
    POISSON=0.15;
end
%
%SIGxyz-->Matriz que contiene en el siguiente orden: 1-Nj de nodo,2-
Coord.
%X, 3-Y, 4-Z, 5-Sig11, 6-Sig22, 7-Sig33, 8- Sig12, 9-Sig13, 10-Sig23
%
    Cargar_KI;
    %Cargar_KI_MOD;
    % KI=1.0;
    KII=0.0;
    a=1.0;
    PI = 4*atan(1.0);

    inf=99;

SIGxyzW=zeros(size(CoordNodos,1),10);
for i=1:size(CoordNodos,1)

    X=((CoordNodos(i,2))-a);
    Y=(CoordNodos(i,3));
    Z=(CoordNodos(i,4));

    for ii=1:size(ZKI,1)
        if Z==ZKI(ii,1)
            KI=ZKI(ii,2);
        end
    end
end

```

```

if (X==0)
theta=(PI/2);
elseif (X>0)
theta=atan((Y/X));
elseif (X<0)
theta=PI+atan((Y/X));
end

r=abs(sqrt((X^2)+(Y^2)));
halftheta=theta/2;
costh2=cos(halftheta);
sinh2=sin(halftheta);
cos3th2=cos(3*halftheta);
sin3th2=sin(3*halftheta);

sigx=((Kl/sqrt(2*PI*r))*costh2*(1-(sinh2*sin3th2)))-
((Kll/sqrt(2*PI*r))*sinh2*(2+(costh2*cos3th2)));

sigy=((Kl/sqrt(2*PI*r))*costh2*(1+(sinh2*sin3th2)))+((Kll/sqrt(2*PI*r))*sinh
2*costh2*cos3th2);

tauxy=((Kl/sqrt(2*PI*r))*sinh2*costh2*cos3th2)+((Kll/sqrt(2*PI*r))*costh2*(
1-(sinh2*sin3th2)));
sigz=POISSON*(sigx+sigy);

SIGxyzW(i,1)=(CoordNodos(i,1));
SIGxyzW(i,2)=(CoordNodos(i,2));
SIGxyzW(i,3)=(CoordNodos(i,3));
SIGxyzW(i,4)=(CoordNodos(i,4));
SIGxyzW(i,5)=sigx;
SIGxyzW(i,6)=sigy;
%Comentar el siguiente termino en caso de tension plana
%SIGxyzW(i,7)=sigz;
%-----
SIGxyzW(i,8)=tauxy;
% SIGxyzW(i,9)=0;
% SIGxyzW(i,10)=0;
if r==0
SIGxyzW(i,5)=inf;
SIGxyzW(i,6)=inf;

```

```

        %Comentar el siguiente termino en caso de tension plana
        %SIGxyzW(i,7)=sigz;
        %-----
        SIGxyzW(i,8)=inf;
    %     SIGxyzW(i,9)=0;
    %     SIGxyzW(i,10)=0;
    end
end

```

Plotear_Tendencias_Tension_LOGLOG.m

```

%Plotea Un rango definido de la matriz de tensiones y nodos
clear RangoPlot RangoPlot2 RangoPlot3 RangoPlotLog RangoPlotLin titulo
titulolog titulodoble
%2D
%%Elegir el Path deseado:
% 0-Manual
% 1-Theta = 0
% 2-Theta = Pi/4
% 3-Theta = Pi/2
% 4-Theta = 3∑ Pi/4
% 5-Theta = Pi
% 6-Direccion frente de grieta

path='6';

switch path
    %MANUAL
    case '0'
        %1-Nº de nodo, 2-Coord.X, 3-Y, 4-Z, 5-Sig11, 6-Sig22, 7-Sig33, 8-
        Sig12, 9-Sig13, 10-Sig23
        %Variables que se Plotean, Mirar leyenda arriba:
        x=2; %En el Eje X
        y=5; %En el Eje Y
        y2=6;
        y3=8;
        %-----
        %Ejes para Coordenadas del plano de trabajo
        eje1=3;
        eje2=4;

```

```

%Valor de coordenada en eje 1 y 2
coordenada=[0,1];
%RangoPlot=zeros(size(CoordNodos,1),2);
%Valor de caso---> 1=Vertex, 2=FE y 3=Williams, 4=Vertex
Diagonal 45f
%5-Vertex Diagonal 135f
caso='1';
disfrente=0.0005;

case '1'
x=2; y=5; y2=6; y3=8; eje1=3; eje2=4; coordenada=[0,1]; caso='1';
disfrente=0.0005; path=1; titulo='Representacion Path1';
case '2'
x=2; y=5; y2=6; y3=8; eje1=3; eje2=4; coordenada=[0,1]; caso='4';
disfrente=0.0005; path=2; titulo='Representacion Path2';
case '3'
x=3; y=5; y2=6; y3=8; eje1=2; eje2=4; coordenada=[1,1];
caso='1'; disfrente=0.0005; path=3; titulo='Representacion Path3';
case '4'
x=2; y=5; y2=6; y3=8; eje1=3; eje2=4; coordenada=[0,1]; caso='5'; disfrente=-
0.0005; path=4; titulo='Representacion Path4';
case '5'
x=2; y=5; y2=6; y3=8; eje1=3; eje2=4; coordenada=[0,1]; caso='1'; disfrente=-
0.0005; path=5; titulo='Representacion Path5';
case '6'
x=4; y=5; y2=6; y3=8; eje1=3; eje2=2; coordenada=[0,1]; caso='1'; disfrente=-
0.0005; path=6; titulo='Representacion Path6';
end

e=1;
tol=0.00005;
if x==2 || x==4
a=1;
end
if x==3
a=0;
end
switch caso

case '1'

```

```

for i=1:size(CoordNodos,1)

    if [SIGxyzVERTEX(i,eje1),SIGxyzVERTEX(i,eje2)]==coordenada;

        RangoPlot(e,1)=(SIGxyzVERTEX(i,x)-a);
        RangoPlot(e,2)=SIGxyzVERTEX(i,y);
        RangoPlot(e,3)=SIGxyzVERTEX(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=SIGxyzVERTEX(i,y3);
        RangoPlot(e,5)=SIGxyzVERTEX(i,1);
        e=e+1;
    end
end
case '2'
for i=1:size(CoordNodos,1)

    if [SIGxyzFE(i,eje1),SIGxyzFE(i,eje2)]==coordenada;

        RangoPlot(e,1)=SIGxyzFE(i,x)-a;
        RangoPlot(e,2)=SIGxyzFE(i,y);
        RangoPlot(e,3)=SIGxyzFE(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=SIGxyzFE(i,y3);
        nodos(e,1)=SIGxyzFE(i,1);
        e=e+1;
    end
end

case '3'
for i=1:size(CoordNodos,1)

    if [SIGxyzW(i,eje1),SIGxyzW(i,eje2)]==coordenada;

        RangoPlot(e,1)=SIGxyzW(i,x)-a;
        RangoPlot(e,2)=SIGxyzW(i,y);
        RangoPlot(e,3)=SIGxyzW(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=SIGxyzW(i,y3);
        e=e+1;
    end
end
end
%Diagonales:

case '4'
for i=1:size(CoordNodos,1)

```

```

    if [SIGxyzVERTEX(i,eje1),SIGxyzVERTEX(i,eje2)]>=[(SIGxyzVERTEX(i,2)-
a)-tol,1] &
[SIGxyzVERTEX(i,eje1),SIGxyzVERTEX(i,eje2)]<=[(SIGxyzVERTEX(i,2)-a)+tol,1]

        RangoPlot(e,1)=((SIGxyzVERTEX(i,x)-a)/cos(PI/4));
        RangoPlot(e,2)=SIGxyzVERTEX(i,y);
        RangoPlot(e,3)=SIGxyzVERTEX(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=SIGxyzVERTEX(i,y3);
        % numero nodo
        RangoPlot(e,5)=SIGxyzVERTEX(i,1);
        e=e+1;
    end
end
case '5'
for i=1:size(CoordNodos,1)

    if [SIGxyzVERTEX(i,eje1),SIGxyzVERTEX(i,eje2)]>=[(a-
SIGxyzVERTEX(i,2))-tol,1] &
[SIGxyzVERTEX(i,eje1),SIGxyzVERTEX(i,eje2)]<=[(a-SIGxyzVERTEX(i,2))+tol,1]

        RangoPlot(e,1)=((SIGxyzVERTEX(i,x)-a)/cos(PI/4));
        RangoPlot(e,2)=SIGxyzVERTEX(i,y);
        RangoPlot(e,3)=SIGxyzVERTEX(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=SIGxyzVERTEX(i,y3);
        % numero nodo
        RangoPlot(e,5)=SIGxyzVERTEX(i,1);
        e=e+1;
    end
end
end
%Filtrado de valores singulares (Comentar si no procede)
e=1;
for i=1:size(RangoPlot,1)

    if RangoPlot(i,1)>disfrente && x==2 && (path==1 || path==2)
        RangoPlotLog(e,1)=abs(RangoPlot(i,1));
        RangoPlotLog(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
        RangoPlotLog(e,3)=abs(RangoPlot(i,3));
        RangoPlotLog(e,4)=abs(RangoPlot(i,4));
        RangoPlotLin(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlotLin(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlotLin(e,3)=RangoPlot(i,3);
        RangoPlotLin(e,4)=RangoPlot(i,4);
        e=e+1;
    end
end

```

```

end
    if RangoPlot(i,1)<disfrente && x==2 && (path==4 || path==5)
        RangoPlotLog(e,1)=abs(RangoPlot(i,1));
        RangoPlotLog(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
        RangoPlotLog(e,3)=abs(RangoPlot(i,3));
        RangoPlotLog(e,4)=abs(RangoPlot(i,4));
        RangoPlotLin(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlotLin(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlotLin(e,3)=RangoPlot(i,3);
        RangoPlotLin(e,4)=RangoPlot(i,4);
        e=e+1;
    end
    if RangoPlot(i,1)>disfrente && x==3 && RangoPlot(i,1)<2
        RangoPlotLog(e,1)=abs(RangoPlot(i,1));
        RangoPlotLog(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
        RangoPlotLog(e,3)=abs(RangoPlot(i,3));
        RangoPlotLog(e,4)=abs(RangoPlot(i,4));
        RangoPlotLin(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlotLin(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlotLin(e,3)=RangoPlot(i,3);
        RangoPlotLin(e,4)=RangoPlot(i,4);
        e=e+1;
    end
    if RangoPlot(i,1)<disfrente && x==4 && path==6
        RangoPlotLog(e,1)=abs(RangoPlot(i,1));
        RangoPlotLog(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
        RangoPlotLog(e,3)=abs(RangoPlot(i,3));
        RangoPlotLog(e,4)=abs(RangoPlot(i,4));
        RangoPlotLin(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlotLin(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlotLin(e,3)=RangoPlot(i,3);
        RangoPlotLin(e,4)=RangoPlot(i,4);
        e=e+1;
    end
end

titulolog=strcat(titulo,' Log-Log');
titulodoble=strcat(titulo,' Dos Graficas');
RangoPlot = sortrows(RangoPlot);
RangoPlotLog = sortrows(RangoPlotLog);
RangoPlotLin = sortrows(RangoPlotLin);
Guardar_Matrices_en_Ficheros;

figure(1);

```

```

plot(RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,2), '-*r', RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,3),
'-*b', RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,4), '-*g'), grid on, title(titulo), xlabel('r'),
ylabel('Tension');
legend('Tensión X','Tensión Y','Tensión Txy');
saveas(gcf,titulo,'fig');
figure(2);
loglog(RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,2), '-*r',
RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,3), '-*b', RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,4), '-
*g'); grid on, title(titulolog), xlabel('r'), ylabel('Tension'),axis([0.0003 1.5 1E-5 1E2]);
legend('Tensión X','Tensión Y','Tensión Txy');
saveas(gcf,titulolog,'fig');
figure(3);
hFig = figure(3);
set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
set(hFig,'Position',[0 0 660 1100])
subplot(2,1,1)
loglog(RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,2), '-*r',
RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,3), '-*b', RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,4), '-
*g'); grid on, title(titulolog), xlabel('r'), ylabel('Tension'),axis([0.0003 1.5 1E-5 1E2]);
legend('Tensión X','Tensión Y','Tensión Txy');
subplot(2,1,2)
plot(RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,2), '-*r', RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,3),
'-*b', RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,4), '-*g'), grid on, title(titulo), xlabel('r'),
ylabel('Tension');
legend('Tensión X','Tensión Y','Tensión Txy');
saveas(gcf,titulodoble,'fig');

%Calculo de Pendientes en un tramo cercano a la singularidad, se calcula
%la pendiente cerca de la singularidad para mas precision
e=1;
for i=1:size(RangoPlotLog,1)

    if RangoPlotLog(i,1)<0.025
        RangoPlot3(e,1)=abs(RangoPlotLog(i,1));
        RangoPlot3(e,2)=abs(RangoPlotLog(i,2));
        RangoPlot3(e,3)=abs(RangoPlotLog(i,3));
        RangoPlot3(e,4)=abs(RangoPlotLog(i,4));
        e=e+1;
    end
end
mx=polyfit(log(RangoPlot3(:,1)),log(RangoPlot3(:,2)),1)
my=polyfit(log(RangoPlot3(:,1)),log(RangoPlot3(:,3)),1)
mtx=polyfit(log(RangoPlot3(:,1)),log(RangoPlot3(:,4)),1)

```

Guardar_Matrices_en_Ficheros.m

```

%Se elige el caso para guardar alguna de las matrices de las rutinas de
%matlab en un fichero de texto
% 1-Matriz de Tensiones elementos finitos
% 2-Matriz de Tensiones Williams
% 3-Matriz de Tensiones Vertex
% 4-Matriz del Rango elegido para Plotear, sin filtrar y filtrado
caso='4';

switch caso

    case '1'
file = fopen('SIGxyzFE.txt', 'w');

for k=1:size(SIGxyzFE,1)
fprintf(file, '%i %f %f %f %f %f %f %f %f %f\n',
SIGxyzFE(k,1),SIGxyzFE(k,2),SIGxyzFE(k,3),SIGxyzFE(k,4),SIGxyzFE(k,5),SIGxy
zFE(k,6),SIGxyzFE(k,7),SIGxyzFE(k,8),SIGxyzFE(k,9),SIGxyzFE(k,10));
end

fclose(file)

    case '2'
file = fopen('SIGxyzW.txt', 'w');

for k=1:size(SIGxyzFE,1)
fprintf(file, '%i %f %f %f %f %f %f %f %f %f\n',
SIGxyzFE(k,1),SIGxyzFE(k,2),SIGxyzFE(k,3),SIGxyzFE(k,4),SIGxyzFE(k,5),SIGxy
zFE(k,6),SIGxyzFE(k,7),SIGxyzFE(k,8),SIGxyzFE(k,9),SIGxyzFE(k,10));
end

fclose(file)

    case '3'
file = fopen('SIGxyzVERTEX.txt', 'w');

for k=1:size(SIGxyzFE,1)
fprintf(file, '%i %f %f %f %f %f %f %f %f %f\n',
SIGxyzFE(k,1),SIGxyzFE(k,2),SIGxyzFE(k,3),SIGxyzFE(k,4),SIGxyzFE(k,5),SIGxy
zFE(k,6),SIGxyzFE(k,7),SIGxyzFE(k,8),SIGxyzFE(k,9),SIGxyzFE(k,10));
end

fclose(file)

```

```

case '4'
file = fopen('RangoPlot.txt', 'w');
file2 = fopen('RangoPlot2.txt', 'w');
for k=1:size(RangoPlot,1)
fprintf(file, '%f %f %f %f \n',
RangoPlot(k,1),RangoPlot(k,2),RangoPlot(k,3),RangoPlot(k,4));
end
for k=1:size(RangoPlot2,1)
fprintf(file2, '%f %f %f %f \n',
RangoPlot2(k,1),RangoPlot2(k,2),RangoPlot2(k,3),RangoPlot2(k,4));
end
fclose(file)
fclose(file2)

end

```

Plotear_Extrapolacion_Varios_Valores_De_Z.m

```

%Plotea Un rango definido de la matriz de tensiones y nodos
clear RangoPlot RangoPlot2 RangoPlot3
%2D
%1-Nº de nodo, 2-Coord.X, 3-Y, 4-Z, 5-Sig11, 6-Sig22, 7-Sig33, 8- Sig12, 9-Sig13,
10-Sig23
%Variables que se Plotean, Mirar leyenda arriba:
x=2; %En el Eje X
y=6; %En el Eje Y
%-----
%Ejes para Coordenadas del plano de trabajo
eje1=3;
eje2=4;
%Valor de coordenada en eje 1 y 2

coordenada=[0,ZKI(121,1)
             0,ZKI(63,1)
             0,ZKI(41,1)
             0,ZKI(19,1)
             0,ZKI(9,1)
             0,ZKI(1,1)];

% Casos
% 1-VERTEX
% 2-FE
% 3-WILLIAMS
% 4-VERTEX TOL
caso='2';

```

```

tol=0.0;
switch caso

    case '1'
        for ee=1:size(coordenada,1)
            e=1;
            for i=1:size(CoordNodos,1)
                if [SIGxyzVERTEX(i,eje1),SIGxyzVERTEX(i,eje2)]
                    ==[coordenada(ee,1),coordenada(ee,2)]
                        RangoPlot(e,(ee*2)-1)=SIGxyzVERTEX(i,x);
                        RangoPlot(e,(ee*2))=SIGxyzVERTEX(i,y);
                        e=e+1;
                    end
                end
            end
        end

    case '2'
        ii=1;
        for ee=1:size(coordenada,1)
            e=1;

            for i=1:size(CoordNodos,1)

                if
                    [SIGxyzFE(i,eje1),SIGxyzFE(i,eje2)]==[coordenada(ee,1),coordenada(ee,2)]
                        RangoPlot(e,ii)=SIGxyzFE(i,x);
                        RangoPlot(e,(1+ii))=SIGxyzFE(i,y);
                        e=e+1;
                    end
                end
            end
            ii=ii+2;
        end

    case '3'
        for ee=1:size(coordenada,1)
            e=1;

            for i=1:size(CoordNodos,1)

                if [SIGxyzW(i,eje1),SIGxyzW(i,eje2)]
                    ==[coordenada(ee,1),coordenada(ee,2)]
                        RangoPlot(e,(ee*2)-1)=SIGxyzW(i,x);
                        RangoPlot(e,(ee*2))=SIGxyzW(i,y);
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        e=e+1;
    end
end
end
%caso 1 con tolerancias
case '4'

    ii=1;
    for ee=1:size(coordenada,1)
        e=1;

        for i=1:size(CoordNodos,1)

            if (([SIGxyzVERTEX(i,eje1),SIGxyzVERTEX(i,eje2)] <=
[coordenada(ee,1)+tol,coordenada(ee,2)+tol]) &
([SIGxyzVERTEX(i,eje1),SIGxyzVERTEX(i,eje2)] >= [coordenada(ee,1)-
tol,coordenada(ee,2)-tol]))
                RangoPlot(e,ii)=SIGxyzVERTEX(i,x);
                RangoPlot(e,(1+ii))=SIGxyzVERTEX(i,y);
                e=e+1;
            end
        end
        ii=ii+2;
    end

end

%Separacion en matrices, para poder ordenar cada serie en funcion de X
Plot1=[RangoPlot(:,1) RangoPlot(:,2)];
Plot2=[RangoPlot(:,3) RangoPlot(:,4)];
Plot3=[RangoPlot(:,5) RangoPlot(:,6)];
Plot4=[RangoPlot(:,7) RangoPlot(:,8)];
Plot5=[RangoPlot(:,9) RangoPlot(:,10)];
Plot6=[RangoPlot(:,11) RangoPlot(:,12)];
Plot1=sortrows(Plot1);
Plot2=sortrows(Plot2);
Plot3=sortrows(Plot3);
Plot4=sortrows(Plot4);
Plot5=sortrows(Plot5);
Plot6=sortrows(Plot6);

%Filtrado de valores singulares (Comentar si no procede)
e=1;
for i=1:size(Plot1,1)

```

```

if Plot1(i,1)>1.0004 && x==2
RangoPlot2(e,1)=Plot1(i,1);
RangoPlot2(e,2)=(Plot1(i,2)*(sqrt(2*PI*((Plot1(i,1)-a)))));
RangoPlot2(e,3)=(Plot2(i,2)*(sqrt(2*PI*((Plot1(i,1)-a)))));
RangoPlot2(e,4)=(Plot3(i,2)*(sqrt(2*PI*((Plot1(i,1)-a)))));
RangoPlot2(e,5)=(Plot4(i,2)*(sqrt(2*PI*((Plot1(i,1)-a)))));
RangoPlot2(e,6)=(Plot5(i,2)*(sqrt(2*PI*((Plot1(i,1)-a)))));
RangoPlot2(e,7)=(Plot6(i,2)*(sqrt(2*PI*((Plot1(i,1)-a)))));

RangoPlot3(e,1)=Plot1(i,1);
RangoPlot3(e,2)=Plot1(i,2);
RangoPlot3(e,3)=Plot2(i,2);
RangoPlot3(e,4)=Plot3(i,2);
RangoPlot3(e,5)=Plot4(i,2);
RangoPlot3(e,6)=Plot5(i,2);
RangoPlot3(e,7)=Plot6(i,2);

e=e+1;

end
if RangoPlot(i,1)>0.0005 && x==3
RangoPlot2(e,1)=RangoPlot(i,1);
RangoPlot2(e,2)=RangoPlot(i,2);
RangoPlot2(e,3)=(RangoPlot(i,2)*(sqrt(2*PI*((RangoPlot(i,1))))));
e=e+1;

end
end

% figure=plot(RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,2),'r', RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,3), 'b',
RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,4), 'b', RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,5), 'b',
RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,6), 'b', RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,7), 'b',
RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,8), 'b', RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,9), 'b',
RangoPlot(:,1),RangoPlot(:,10), 'b'), grid on, title('Grafica de un Corte'),
xlabel('Coordenada'), ylabel('Tension');

figure1=plot(RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,2),'-r',
RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,3), '-+b', RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,4), '-xy',
RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,5), '-om', RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,6), '-<g',

```

```
RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,7), '->k'); grid on, title('Grafica de un Corte'),  
xlabel('Coordenada'), ylabel('Tension');  
saveas(gcf,'GraficaExtrapolacionesKI','fig');  
% figure2=plot(RangoPlot3(:,1),RangoPlot3(:,2),'-r',  
RangoPlot3(:,1),RangoPlot3(:,3), '-+b', RangoPlot3(:,1),RangoPlot3(:,4), '-xy',  
RangoPlot3(:,1),RangoPlot3(:,5), '-om', RangoPlot3(:,1),RangoPlot3(:,6), '-<g',  
RangoPlot3(:,1),RangoPlot3(:,7), '->k'); grid on, title('Grafica de un Corte'),  
xlabel('Coordenada'), ylabel('Tension');  
% saveas(gcf,'GraficaTensiones','fig');  
%figure=plot(RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,2)), grid on, title('Grafica de un Corte'),  
xlabel('Coordenada'), ylabel('Tension');
```

9.3.3 Post-proceso desplazamientos

Calcular_Desplazamientos_Vertex.m
<pre> %%Rutina que calcula las tensiones debidas al Vertex o singularidad de %%esquina clear DESxyzFE DESxyzW DESxyzVERTEX clear all %Elegir el modelo deseado con el numero correspondiente indicado abajo %Modelo: 1=Def plana sin T-Stress % 2=Superficie Libre Sin T-Stress Poisson 0.3 % 3=Superficie Libre Sin T-Stress Poisson 0.4 global modelo modelo='3'; Cargar_DesplazamientosFE; Cargar_DesplazamientosW; %DESxyz-->Matriz que contiene en el siguiente orden: 1-Nj de nodo,2-Coord. %X, 3-Y, 4-Z, 5-Desplazamiento X (U1), 6-Desplazamiento en Y (U2) 7- Desplazamiento Z (U3) DESxyzVERTEX=zeros(size(CoordNodos,1),7); for ee=1:size(CoordNodos,1) DESxyzVERTEX(ee,1)=DESxyzFE(ee,1); DESxyzVERTEX(ee,2)=DESxyzFE(ee,2); DESxyzVERTEX(ee,3)=DESxyzFE(ee,3); DESxyzVERTEX(ee,4)=DESxyzFE(ee,4); DESxyzVERTEX(ee,5)=DESxyzFE(ee,5)-DESxyzW(ee,5); DESxyzVERTEX(ee,6)=DESxyzFE(ee,6)-DESxyzW(ee,6); DESxyzVERTEX(ee,7)=DESxyzFE(ee,7)-DESxyzW(ee,7); end </pre>
Cargar_DesplazamientosFE.m
<pre> %%Esta rutina carga las tensiones de cada nodo y las guarda junto con las %%coordenadas %NODOS: Nombres ficheros a leer y escribir: clear DES CoordNodos DESxyzFE global modelo switch modelo case '1' DES=load('desplazamientos_DefPlana_Sin_T.prn'); case '2' </pre>

```

DES=load('desplazamientos_SL_SinT.prn');
    case '3'
DES=load('desplazamientos_SL_P0.4.prn');
end
%CoordNodos=load('Coor_Nod_ 1');
%
CoordNodos=load('XYZHexa.prn');
%DESxyz-->Matriz que contiene en el siguiente orden: 1-Nº de nodo,2-Coord.
%X, 3-Y, 4-Z, 5-Desplazamiento X (U1), 6-Desplazamiento en Y (U2) 7-
Desplazamiento Z (U3)
%
DESxyzFE=zeros(size(CoordNodos,1),7);
for i=1:size(CoordNodos,1)
    DESxyzFE(i,1)=(CoordNodos(i,1));
    DESxyzFE(i,2)=(CoordNodos(i,2));
    DESxyzFE(i,3)=(CoordNodos(i,3));
    DESxyzFE(i,4)=(CoordNodos(i,4));
    DESxyzFE(i,5)=(DES(i,2));
    DESxyzFE(i,6)=(DES(i,3));
    DESxyzFE(i,7)=(DES(i,4));
end

```

Cargar_DesplazamientosW.m

```

%%Esta rutina carga las tensiones de cada nodo y las guarda junto con las
%%coordenadas
%NODOS: Nombres ficheros a leer y escribir:
clear CoordNodos DESxyzW
CoordNodos=load('XYZHexa.prn');

global modelo

switch modelo
    case '1'
        POISSON=0.3;
    case '2'
        POISSON=0.3;
    case '3'
        POISSON=0.4;
end
%
%DESxyz-->Matriz que contiene en el siguiente orden: 1-Nº de nodo,2-Coord.
%X, 3-Y, 4-Z, 5-Desplazamiento X (U1), 6-Desplazamiento en Y (U2) 7-
Desplazamiento Z (U3)
%

```

```

Cargar_KI;
% KI=1.0;
KII=0.0;
KIII=0.0;
a=1.0;
PI = 4*atan(1.0);
E=207000;
MU=E/(2*(1+POISSON));
Kolosov=3-(4*POISSON); %DEF PLANA
% Kolosov=(3-POISSON)/(1+POISSON); %TENSION PLANA

```

```
DESxyzW=zeros(size(CoordNodos,1),7);
```

```
for i=1:size(CoordNodos,1)
```

```
    X=((CoordNodos(i,2))-a);
```

```
    Y=(CoordNodos(i,3));
```

```
    Z=(CoordNodos(i,4));
```

```
    for ii=1:size(ZKI,1)
```

```
        if Z==ZKI(ii,1)
```

```
            KI=ZKI(ii,2);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    if (X==0)
```

```
        theta=(PI/2);
```

```
    elseif (X>0)
```

```
        theta=atan((Y/X));
```

```
    elseif (X<0)
```

```
        theta=PI+atan((Y/X));
```

```
    end
```

```
    r=abs(sqrt((X^2)+(Y^2)));
```

```
    halftheta=theta/2;
```

```
    costh2=cos(halftheta);
```

```
    sinh2=sin(halftheta);
```

```
    cos3th2=cos(3*halftheta);
```

```
    sin3th2=sin(3*halftheta);
```

```
    U1=(KI/(2*MU))*sqrt(r/(2*PI))*(costh2*(Kolosov-cos(theta)));
```

```
    U2=(KI/(2*MU))*sqrt(r/(2*PI))*(sinh2*(2+Kolosov+cos(theta)));
```

```
    U3=((2*KIII)/MU)*sqrt(r/(2*PI))*sinh2;
```

```

DESxyzW(i,1)=(CoordNodos(i,1));
DESxyzW(i,2)=(CoordNodos(i,2));
DESxyzW(i,3)=(CoordNodos(i,3));
DESxyzW(i,4)=(CoordNodos(i,4));
DESxyzW(i,5)=U1;
DESxyzW(i,6)=U2;
DESxyzW(i,7)=U3;
end

```

Plotear_Tendencias_Desplazamientos_LOGLOG.m

```

%Plotea Un rango definido de la matriz de desplazamientos y nodos
clear RangoPlot RangoPlot2 RangoPlot3 RangoPlotLog RangoPlotLin
%2D
%%Elegir el Path deseado:
% 0-Manual
% 1-Theta = 0
% 2-Theta = Pi/4
% 3-Theta = Pi/2
% 4-Theta = 3*Pi/4
% 5-Theta = Pi

path='6';

switch path
  %MANUAL
  case '0'
      %DESxyz-->Matriz que contiene en el siguiente orden: 1-Nf de
nodo,2-Coord.
      %X, 3-Y, 4-Z, 5-Desplazamiento X (U1), 6-Desplazamiento en Y
(U2) 7-Desplazamiento Z (U3)
      %
      x=2; %En el Eje X
      y=5; %En el Eje Y
      y2=6;
      y3=8;
      %-----
      %Ejes para Coordenadas del plano de trabajo
      eje1=3;

```

```

    eje2=4;
    %Valor de coordenada en eje 1 y 2
    coordenada=[0,1];
    %RangoPlot=zeros(size(CoordNodos,1),2);
    %Valor de caso--> 1=Vertex, 2=FE y 3=Williams, 4=Vertex
Diagonal 45f
    %5-Vertex Diagonal 135f
    caso='1';
    disfrente=0.0005;

    case '1'
x=2; y=5; y2=6; y3=7; eje1=3; eje2=4; coordenada=[0,1]; caso='1';
disfrente=0.0005; path=1; titulo='Representacion Path1';
    case '2'
x=2; y=5; y2=6; y3=7; eje1=3; eje2=4; coordenada=[0,1]; caso='4';
disfrente=0.0005;path=2;titulo='Representacion Path2';
    case '3'
x=3; y=5; y2=6; y3=7; eje1=2; eje2=4; coordenada=[1,1];
caso='1';disfrente=0.0005;path=3;titulo='Representacion Path3';
    case '4'
x=2; y=5; y2=6; y3=7; eje1=3; eje2=4; coordenada=[0,1]; caso='5';disfrente=-
0.0005;path=4;titulo='Representacion Path4';
    case '5'
x=2; y=5; y2=6; y3=7; eje1=3; eje2=4; coordenada=[0,1]; caso='1';disfrente=-
0.0005;path=5; titulo='Representacion Path5';
    case '6'
x=4; y=5; y2=6; y3=7; eje1=3; eje2=2; coordenada=[0,1]; caso='1';disfrente=-
0.0005;path=6; titulo='Representacion Path6';
end

e=1;
tol=0.00005;
    if x==2
        a=1;
    end
    if x==3
        a=0;
    end
switch caso

    case '1'

for i=1:size(CoordNodos,1)

```

```

    if [DESxyzVERTEX(i,eje1),DESxyzVERTEX(i,eje2)]==coordenada;

        RangoPlot(e,1)=(DESxyzVERTEX(i,x)-a);
        RangoPlot(e,2)=DESxyzVERTEX(i,y);
        RangoPlot(e,3)=DESxyzVERTEX(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=DESxyzVERTEX(i,y3);
        RangoPlot(e,5)=DESxyzVERTEX(i,1);
        e=e+1;
    end
end
case '2'
for i=1:size(CoordNodos,1)

    if [DESxyzFE(i,eje1),DESxyzFE(i,eje2)]==coordenada;

        RangoPlot(e,1)=DESxyzFE(i,x)-a;
        RangoPlot(e,2)=DESxyzFE(i,y);
        RangoPlot(e,3)=DESxyzFE(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=DESxyzFE(i,y3);
        nodos(e,1)=DESxyzFE(i,1);
        e=e+1;
    end
end

case '3'
for i=1:size(CoordNodos,1)

    if [DESxyzW(i,eje1),DESxyzW(i,eje2)]==coordenada;

        RangoPlot(e,1)=DESxyzW(i,x)-a;
        RangoPlot(e,2)=DESxyzW(i,y);
        RangoPlot(e,3)=DESxyzW(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=DESxyzW(i,y3);
        e=e+1;
    end
end
%Diagonales:
case '4'
for i=1:size(CoordNodos,1)

    if
[DESxyzVERTEX(i,eje1),DESxyzVERTEX(i,eje2)]>=[(DESxyzVERTEX(i,2)-a)-tol,1]

```

```

& [DESxyzVERTEX(i,eje1),DESxyzVERTEX(i,eje2)]<=[(DESxyzVERTEX(i,2)-
a)+tol,1]

    RangoPlot(e,1)=((DESxyzVERTEX(i,x)-a)/cos(PI/4));
    RangoPlot(e,2)=DESxyzVERTEX(i,y);
    RangoPlot(e,3)=DESxyzVERTEX(i,y2);
    RangoPlot(e,4)=DESxyzVERTEX(i,y3);
    % numero nodo
    RangoPlot(e,5)=DESxyzVERTEX(i,1);
    e=e+1;
end
end
case '5'
for i=1:size(CoordNodos,1)

    if [DESxyzVERTEX(i,eje1),DESxyzVERTEX(i,eje2)]>=[(a-
DESxyzVERTEX(i,2))-tol,1] &
[DESxyzVERTEX(i,eje1),DESxyzVERTEX(i,eje2)]<=[(a-
DESxyzVERTEX(i,2))+tol,1]

        RangoPlot(e,1)=((DESxyzVERTEX(i,x)-a)/cos(PI/4));
        RangoPlot(e,2)=DESxyzVERTEX(i,y);
        RangoPlot(e,3)=DESxyzVERTEX(i,y2);
        RangoPlot(e,4)=DESxyzVERTEX(i,y3);
        % numero nodo
        RangoPlot(e,5)=DESxyzVERTEX(i,1);
        e=e+1;
    end
end
end
%Filtrado de valores singulares (Comentar si no procede)
e=1;
for i=1:size(RangoPlot,1)

    if RangoPlot(i,1)>disfrente && x==2 && (path==1 || path==2)
        RangoPlotLog(e,1)=abs(RangoPlot(i,1));
        RangoPlotLog(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
        RangoPlotLog(e,3)=abs(RangoPlot(i,3));
        RangoPlotLog(e,4)=abs(RangoPlot(i,4));
        RangoPlotLin(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlotLin(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlotLin(e,3)=RangoPlot(i,3);
        RangoPlotLin(e,4)=RangoPlot(i,4);
        e=e+1;
    end
end

```

```

end
    if RangoPlot(i,1)<disfrente && x==2 && (path==4 || path==5)
        RangoPlotLog(e,1)=abs(RangoPlot(i,1));
        RangoPlotLog(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
        RangoPlotLog(e,3)=abs(RangoPlot(i,3));
        RangoPlotLog(e,4)=abs(RangoPlot(i,4));
        RangoPlotLin(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlotLin(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlotLin(e,3)=RangoPlot(i,3);
        RangoPlotLin(e,4)=RangoPlot(i,4);
        e=e+1;
    end
    if RangoPlot(i,1)>disfrente && x==3 && RangoPlot(i,1)<2
        RangoPlotLog(e,1)=abs(RangoPlot(i,1));
        RangoPlotLog(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
        RangoPlotLog(e,3)=abs(RangoPlot(i,3));
        RangoPlotLog(e,4)=abs(RangoPlot(i,4));
        RangoPlotLin(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlotLin(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlotLin(e,3)=RangoPlot(i,3);
        RangoPlotLin(e,4)=RangoPlot(i,4);
        e=e+1;
    end
    if RangoPlot(i,1)<disfrente && x==4 && path==6
        RangoPlotLog(e,1)=abs(RangoPlot(i,1));
        RangoPlotLog(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
        RangoPlotLog(e,3)=abs(RangoPlot(i,3));
        RangoPlotLog(e,4)=abs(RangoPlot(i,4));
        RangoPlotLin(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlotLin(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlotLin(e,3)=RangoPlot(i,3);
        RangoPlotLin(e,4)=RangoPlot(i,4);
        e=e+1;
    end
end

titulolog=strcat(titulo,' Log-Log');
titulodoble=strcat(titulo,' Dos Graficas');
RangoPlot = sortrows(RangoPlot);
RangoPlotLog = sortrows(RangoPlotLog);
RangoPlotLin = sortrows(RangoPlotLin);

figure(1);
plot(RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,2), '-*r', RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,3),

```

```

'-'*b', RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,4), '-'*g'), grid on, title(titulo), xlabel('r'),
ylabel('Desplazamiento');
legend('Desplazamiento X','Desplazamiento Y','Desplazamiento Z');
saveas(gcf,titulo,'fig');
figure(2);
loglog(RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,2), '-'*r',
RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,3), '-'*b', RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,4), '-'
*g'); grid on, title(titulolog), xlabel('r'), ylabel('Desplazamiento'),axis([0.0003 1.5 1E-
8 1E-5]);
legend('Desplazamiento X','Desplazamiento Y','Desplazamiento Z');
saveas(gcf,titulolog,'fig');
figure(3);
hFig = figure(3);
set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
set(hFig,'Position',[0 0 660 1100])
subplot(2,1,2)
plot(RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,2), '-'*r',
RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,3), '-'*b', RangoPlotLin(:,1),RangoPlotLin(:,4), '-'
*g'), grid on, title(titulo), xlabel('r'), ylabel('Desplazamiento');
legend('Desplazamiento X','Desplazamiento Y','Desplazamiento Z');
subplot(2,1,1)
loglog(RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,2), '-'*r',
RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,3), '-'*b', RangoPlotLog(:,1),RangoPlotLog(:,4), '-'
*g'); grid on, title(titulolog), xlabel('r'), ylabel('Desplazamiento'),axis([0.0003 1.5 1E-
8 1E-5]);
legend('Desplazamiento X','Desplazamiento Y','Desplazamiento Z');
saveas(gcf,titulodoble,'fig');

%Calculo de Pendientes en un tramo cercano a la singularidad, se calcula
%la pendiente cerca de la singularidad para mas precision
e=1;
for i=1:size(RangoPlotLog,1)

    if RangoPlotLog(i,1)<0.025
        RangoPlot3(e,1)=abs(RangoPlotLog(i,1));
        RangoPlot3(e,2)=abs(RangoPlotLog(i,2));
        RangoPlot3(e,3)=abs(RangoPlotLog(i,3));
        RangoPlot3(e,4)=abs(RangoPlotLog(i,4));
        e=e+1;
    end
end
mx=polyfit(log(RangoPlot3(:,1)),log(RangoPlot3(:,2)),1)
my=polyfit(log(RangoPlot3(:,1)),log(RangoPlot3(:,3)),1)
mz=polyfit(log(RangoPlot3(:,1)),log(RangoPlot3(:,4)),1)

```

```

Plotear_Rango_Deseado2D.m

%Plotea Un rango definido de la matriz de desplazamientos y nodos
clear RangoPlot RangoPlot2
%2D
%DESxyz-->Matriz que contiene en el siguiente orden: 1-Nº de nodo,2-Coord.
%X, 3-Y, 4-Z, 5-Desplazamiento X (U1), 6-Desplazamiento en Y (U2) 7-
Desplazamiento Z (U3)
%Variables que se Plotean, Mirar leyenda arriba:
x=2; %En el Eje X
y=6; %En el Eje Y
%-----
%Ejes para Coordenadas del plano de trabajo
eje1=3;
eje2=4;
%Valor de coordenada en eje 1 y 2
coordenada=[0,1];
%RangoPlot=zeros(size(CoordNodos,1),2);
%Valor de caso---> 1=Vertex, 2=FE y 3=Williams
caso='1';
e=1;
tol=0.1;

switch caso

    case '1'
        for i=1:size(CoordNodos,1)

            if [DESxyzVERTEX(i,eje1),DESxyzVERTEX(i,eje2)]==coordenada;

                RangoPlot(e,1)=DESxyzVERTEX(i,x);
                RangoPlot(e,2)=DESxyzVERTEX(i,y);
                e=e+1;
            end
        end
    case '2'
        for i=1:size(CoordNodos,1)

            if [DESxyzFE(i,eje1),DESxyzFE(i,eje2)]==coordenada;

                RangoPlot(e,1)=DESxyzFE(i,x);
                RangoPlot(e,2)=DESxyzFE(i,y);

```

```

        e=e+1;
    end
end

    case '3'
for i=1:size(CoordNodos,1)

    if [DESxyzW(i,eje1),DESxyzW(i,eje2)]==coordenada;

        RangoPlot(e,1)=DESxyzW(i,x);
        RangoPlot(e,2)=DESxyzW(i,y);
        e=e+1;
    end
end

%caso 1 con tolerancias
    case '4'

        for i=1:size(CoordNodos,1)

            if (([DESxyzFE(i,eje1),DESxyzFE(i,eje2)] <=
[coordenada(1,1)+tol,coordenada(1,2)+tol]) &
([DESxyzFE(i,eje1),DESxyzFE(i,eje2)] >= [coordenada(1,1)-tol,coordenada(1,2)-
tol]))

                RangoPlot(e,1)=DESxyzFE(i,x);
                RangoPlot(e,2)=DESxyzFE(i,y);
                e=e+1;
            end
        end
end
end
% %Filtrado de valores singulares (Comentar si no procede)
% for i=1:size(RangoPlot,1)
%
%     if RangoPlot(i,1)<1.0004 && RangoPlot(i,1)>0.9997
%
%         RangoPlot(i,1)=0;
%         RangoPlot(i,2)=0;
%
%     end
% end
%
% Filtrado de valores singulares (Comentar si no procede)
e=1;

```

```

for i=1:size(RangoPlot,1)

%     if RangoPlot(i,1)>1.00004
RangoPlot2(e,1)=abs(RangoPlot(i,1)-a);
RangoPlot2(e,2)=abs(RangoPlot(i,2));
e=e+1;
end
% end

RangoPlot2 = sortrows(RangoPlot2);

%figure=plot(RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,2), '-*r'), grid on, title('Grafica de un
Corte'), xlabel('Coordenada'), ylabel('Tension');
figure=loglog(RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,2), '-*r'); grid on, title('Grafica de un
Corte'), xlabel('Coordenada'), ylabel('Tension');
m=polyfit(log(RangoPlot2(:,1)),log(RangoPlot2(:,2)),1)
% my=polyfit(log(RangoPlot2(:,1)),log(RangoPlot2(:,3)),1)
% mtxy=polyfit(log(RangoPlot2(:,1)),log(RangoPlot2(:,4)),1)
saveas(figure,'GraficaRango.fig');

```

Plotear_Extrapolacion_Desplazamientos.m

```

%Plotea Un rango definido de la matriz de desplazamientos y nodos
clear RangoPlot RangoPlot2
%2D
PI = 4*atan(1.0);
%DESxyz-->Matriz que contiene en el siguiente orden: 1-Nº de nodo,2-Coord.
%X, 3-Y, 4-Z, 5-Desplazamiento X (U1), 6-Desplazamiento en Y (U2) 7-
Desplazamiento Z (U3)
%Variables que se Plotean, Mirar leyenda arriba:
x=2; %En el Eje X
y=6; %En el Eje Y
%-----
%Ejes para Coordenadas del plano de trabajo
eje1=3;
eje2=4;
%Valor de coordenada en eje 1 y 2
coordenada=[0,1];
theta=PI;
%RangoPlot=zeros(size(CoordNodos,1),2);
%Valor de caso---> 1=Vertex, 2=FE y 3=Williams
caso='2';
e=1;

```

```

tol=0.1;

switch caso

    case '1'
    for i=1:size(CoordNodos,1)

        if [DESxyzVERTEX(i,eje1),DESxyzVERTEX(i,eje2)]==coordenada;

            RangoPlot(e,1)=DESxyzVERTEX(i,x);
            RangoPlot(e,2)=DESxyzVERTEX(i,y);
            e=e+1;
        end
    end
    case '2'
    for i=1:size(CoordNodos,1)

        if [DESxyzFE(i,eje1),DESxyzFE(i,eje2)]==coordenada;

            RangoPlot(e,1)=DESxyzFE(i,x);
            RangoPlot(e,2)=DESxyzFE(i,y);
            e=e+1;
        end
    end
    case '3'
    for i=1:size(CoordNodos,1)

        if [DESxyzW(i,eje1),DESxyzW(i,eje2)]==coordenada;

            RangoPlot(e,1)=DESxyzW(i,x);
            RangoPlot(e,2)=DESxyzW(i,y);
            e=e+1;
        end
    end

    %caso 1 con tolerancias
    case '4'

    for i=1:size(CoordNodos,1)

        if (([DESxyzFE(i,eje1),DESxyzFE(i,eje2)] <=
[coordenada(1,1)+tol,coordenada(1,2)+tol]) &

```

```

([DESxyzFE(i,eje1),DESxyzFE(i,eje2)] >= [coordenada(1,1)-tol,coordenada(1,2)-
tol]))
    RangoPlot(e,1)=DESxyzFE(i,x);
    RangoPlot(e,2)=DESxyzFE(i,y);
    e=e+1;
end
end
end

RangoPlot = sortrows(RangoPlot);

POISSON=0.3;
E=207000;
MU=E/(2*(1+POISSON));
Kolosov=3-(4*POISSON); %DEF PLANA
% Kolosov=(3-POISSON)/(1+POISSON); %TENSION PLANA

halftheta=theta/2;
costh2=cos(halftheta);
sinh2=sin(halftheta);
cos3th2=cos(3*halftheta);
sin3th2=sin(3*halftheta);
costh=cos(theta);
%Filtrado de valores singulares (Comentar si no procede)
e=1;
for i=1:size(RangoPlot,1)

    if RangoPlot(i,1)<1 && x==2 && y==6
        RangoPlot2(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlot2(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlot2(e,3)=(RangoPlot(i,2)*2*MU)/(sqrt(abs(RangoPlot(i,1)-
a)/(2*PI))*sinh2*(Kolosov-costh)));
        % RangoPlot2(e,3)=(RangoPlot(i,2)*2*MU)/(sqrt(abs(RangoPlot(i,1)-
a)/(2*PI))*sinh2*(Kolosov+1-(2*(costh^2)))));
        e=e+1;

    end
    if RangoPlot(i,1)>1.004 && x==2 && y==5
        RangoPlot2(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlot2(e,2)=RangoPlot(i,2);
        RangoPlot2(e,3)=(RangoPlot(i,2)*2*MU)/(sqrt(abs(RangoPlot(i,1)-

```

```

a)/(2*PI))*cosh2*(Kolosov-cosh));
    e=e+1;

    end
    if RangoPlot(i,1)>0.00005 && x==3
        theta=PI/2;
        halftheta=theta/2;
        sinh2=sin(halftheta);
        sin3th2=sin(3*halftheta);

        RangoPlot2(e,1)=RangoPlot(i,1);
        RangoPlot2(e,2)=RangoPlot(i,2);

RangoPlot2(e,3)=(RangoPlot(i,2)*4*MU)/(sqrt(abs(RangoPlot(i,1))/(2*PI))*(((2*Kol
osov)+1)*sinh2)-sin3th2));

%
RangoPlot2(e,3)=(RangoPlot(i,2)*2*MU)/(sqrt(RangoPlot(i,1)/2*PI)*(Kolosov-
cos(theta))*sinh2);

        e=e+1;

    end
end

figure=plot(RangoPlot2(:,1),RangoPlot2(:,3), '-*r'), grid on, title('Grafica de un
Corte'), xlabel('Coordenada'), ylabel('Despl');
saveas(figure,'GraficaExtrapolacion.fig');

```