

*Utilidad de los modelos de viscoelasticidad
en el aprendizaje de la ingeniería de
materiales poliméricos*
*Usefulness of viscoelastic models in learning
polymer materials engineering*

V. Fombuena, T. Boronat, L. Sánchez-Nácher,
D. García-Sanoguera, R. Balart

GRUPO DE INNOVACIÓN DE PRÁCTICAS ACADÉMICAS (GIPA)
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

vifombor@upv.es, tboronat@dimm.upv.es, lsanchez@mcm.upv.es,
dagarsa@dimm.upv.es, rbalart@mcm.upv.es

Abstract

El presente artículo realiza una breve descripción sobre los modelos matemáticos de viscoelasticidad más simples: Modelo de Maxwell y Modelo de Kelvin-Voigt. No obstante, estos modelos básicos poseen una serie de limitaciones ya que se desvían de forma considerable de la realidad. Así pues, un modelo más apropiado en el estudio de la viscoelasticidad en polímeros es el modelo de Burgers. Mediante la resolución de un caso práctico se pone de manifiesto la utilidad de los modelos matemáticos en la comprensión y predicción por parte del alumnado del comportamiento mecánico de un polímero en un proceso como la fluencia y/o relajación donde interviene la variable tiempo.

The present article makes a brief description about the simplest mathematical models of viscoelasticity: Maxwell Model and Kelvin-Voigt Model. However, these basic models have a number of limitations because it has considerable differences from reality. Thus, the Burgers model is studied due to is an appropriate model to study the viscoelasticity in polymers. By solving a practical case, the usefulness for students of mathematical models related with process such as creep or relaxation and their understanding and prediction of the mechanical behaviour has been revealed.

Keywords: Viscoelasticity, Maxwell Model, Kelvin-Voigt Model, Combined Model, Fluency.

Palabras clave: Viscoelasticidad, Modelo Maxwell, Modelo Kelvin-Voigt, Modelo Combinado, Fluencia.

1. Introducción

En ingeniería es de gran utilidad conocer el comportamiento mecánico de materiales poliméricos para optimizar el diseño y el cálculo de sus componentes. Se trata de responder cómo va a ser el comportamiento de un polímero bajo unas determinadas condiciones de uso. En esta situación, se plantean preguntas como: ¿Va a ser suficientemente resistente para soportar determinados esfuerzos? ¿Va a ser suficientemente tenaz para soportar determinados golpes sin romper? ¿Se va a deformar el polímero cierta magnitud cuando actúa cierta fuerza sobre éste?

Además, hay que tener en cuenta que, en polímeros, más que en cualquier tipo de material utilizado en ingeniería, la temperatura y el tiempo desempeñan un papel fundamental en el comportamiento mecánico. Tradicionalmente, los alumnos están familiarizados en el proceso de estimar las propiedades mecánicas de materiales sin tener en cuenta variables como el tiempo. Por ejemplo, les resulta relativamente sencillo e interpretable determinar cuál va a ser la resistencia de un polímero mediante la realización de ensayo de tracción en el que se obtiene información sobre su tensión de rotura, su módulo elástico, su alargamiento a la rotura, etc. También han adquirido la competencia de comprender y cuantificar la capacidad de absorción de energía ante un impacto mediante la información que aporta el ensayo de impacto Charpy.

En este sentido, los alumnos son capaces de abordar problemas ligados a la “elasticidad y resistencia de materiales”, que está presente en cualquier Plan de Estudios ligado a la disciplina de Ingeniería Mecánica. Por otro lado, los alumnos adquieren competencias en el estudio del comportamiento de fluidos donde conceptos como viscosidad, fluidez, reología, etc. adquieren gran relevancia en el marco de la formación en Ingeniería Mecánica. De hecho, es habitual encontrar asignaturas ligadas a “Ingeniería de fluidos” en la formación del Ingeniero Mecánico. No obstante, cuando el alumno se enfrente al estudio de materiales poliméricos, se enfrenta a un problema que ninguna de las dos disciplinas anteriores es capaz de abordar de forma independiente. Los materiales poliméricos poseen un comportamiento dual, viscoelástico. Por un lado ofrecen una respuesta elástica (correspondiente a su comportamiento como sólido elástico), inmediata y no dependiente de la variable tiempo y, por otro lado, presentan una respuesta viscosa típica de un fluido viscoso. Por ello, la viscoelasticidad debe ser abordada desde un planteamiento doble, mediante la combinación de un comportamiento puramente elástico (sólido) y un comportamiento puramente viscoso (fluido).

Bajo este marco, al alumno se le plantean preguntas como: ¿Cómo se va a comportar un polímero si es sometido a una fuerza constante de tracción durante un tiempo prolongado? ¿Va a tener la misma resistencia? ¿Se va a deformar más?. En definitiva, se trata de conocer el comportamiento mecánico a largo plazo (dependiente del tiempo). Para ello se tiene la necesidad de determinar los fenómenos que se producen y que condicionan la aplicación de materiales poliméricos en ingeniería, ya que, como se ha indicado previamente, estos presentan un comportamiento dual viscoelástico: se comportan como sólidos y como fluidos exhibiendo propiedades características de ambos.

En el siguiente artículo se lleva a cabo una introducción a los modelos matemáticos capaces de simular el comportamiento viscoelástico de los polímeros, pudiendo predecir cuál va a ser su comportamiento a largo plazo a fluencia (trabajo bajo tensión constante). De esta forma se pretende que el alumnado sea capaz de aplicar modelos matemáticos para predecir el comportamiento de un polímero a largo plazo.

2. Modelos básicos de viscoelasticidad

Los materiales poliméricos ofrecen una respuesta dual, elástica y viscosa. Por un lado, presentan una deformación inmediata, como consecuencia de la aplicación de una carga sobre ellos, y una deformación dependiente del tiempo como respuesta a la aplicación de una carga constante en el tiempo. Esta deformación creciente con el tiempo se conoce como fluencia viscoelástica y puede ser significativa incluso a temperatura ambiente, tal y como se observa en materiales viscoelásticos como la maicena o siliconas que son capaces de reaccionar de forma distinta en función de la velocidad a la cual se le apliquen las cargas.

En un material elástico cuando se aplica una carga y se mantiene constante, la deformación es instantánea y proporcional a la carga aplicada. Este es el comportamiento que tradicionalmente se ha representado mediante un muelle o resorte, cuyo comportamiento se rige mediante la ley de Hooke —Ecuación (1)—, donde σ representa la tensión aplicada, ε representa la elongación y la constante de proporcionalidad viene definida por ξ . Según la Ecuación (1), la deformación en un elemento puramente elástico es inmediata y no depende de la variable tiempo (Bryan, 1999).

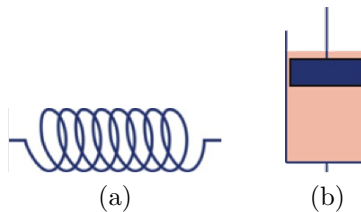


Figura 1: Representación esquemática del elemento físico representativo del comportamiento de un a) sólido elástico—muelle o resorte y b) líquido viscoso—émbolo o pistón.

$$\sigma = \xi \cdot \varepsilon. \quad (1)$$

Por el contrario, en un material puramente viscoso (fluido newtoniano), la deformación no es instantánea; es decir, la respuesta del material va a depender del tiempo. Hay que tener en cuenta que esta deformación no es reversible o recuperable. Tradicionalmente este tipo de comportamiento viscoso se ha representado mediante un émbolo con un fluido en su interior, cuyo comportamiento se rige por la ley de Newton —Ecuación (2), véase (Georgiopoulos et al., 2015)—. Según esta expresión, la tensión aplicada (σ) es proporcional a velocidad de deformación ($d\varepsilon/dt$) y la constante de proporcionalidad viene representada por la constante viscosa del fluido en el interior del émbolo (η).

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (2)$$

Por lo tanto, para poder explicar matemáticamente cómo va a ser el comportamiento viscoelástico, se requiere la combinación de ambos elementos. Cada uno de los elementos, se caracteriza por un parámetro o constante del elemento. Así pues, la constante elástica del modelo elástico se representa como (ξ) y la constante viscosa del elemento viscoso se representa como (η). Así pues, al combinar estos dos elementos básicos en serie o en paralelo, se obtienen dos modelos simples que contemplan, simultáneamente, un comportamiento elástico y uno viscoso.

El modelo de Maxwell considera el elemento elástico y el elemento viscoso acoplados en serie mientras que el acoplamiento en paralelo de ambos elementos corresponde a una disposición

según el modelo de Kelvin-Voigt. Como se deduce, cada uno de estos modelos básicos viene definido por dos parámetros, uno correspondiente a la constante elástica (ξ) y otro correspondiente a la constante viscosa (η).

a) Modelo viscoelástico de Maxwell

El modelo de Maxwell considera que el comportamiento de un polímero viscoelástico viene definido por una combinación de un elemento elástico y un elemento viscoso acoplados en serie (Figura 2).

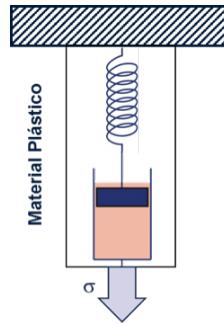


Figura 2: Representación esquemática del modelo viscoelástico de Maxwell con acoplamiento en serie de elemento elástico y elemento viscoso.

Al aplicar una fuerza (o tensión si se considera el área) sobre un polímero, éste se comportará de forma dual. Por un lado, ofrecerá una deformación o alargamiento instantáneo definido por la ley de Hooke. Esta respuesta elástica se produce de forma inmediata y no cambia con el tiempo. No obstante, como el polímero también presenta una naturaleza de líquido viscoso, la deformación irá incrementando con el paso del tiempo según indica la ley de Newton para fluidos newtonianos. En este sentido, la variación de la deformación con el tiempo será proporcional a (σ/η) .

Hay que tener en cuenta que dado el acoplamiento en serie de ambos componentes (elástico o elemento 1 y viscoso o elemento 2), la deformación total del polímero (ε) será la suma de la deformación puramente elástica (ε_1) y la componente viscosa (ε_2) —véase la Ecuación (3)—. Como se intuye, la deformación elástica (ε_1) será independiente del tiempo mientras que la deformación viscosa (ε_2) será creciente con el tiempo.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{3}$$

Por otra parte, las tensiones, al estar conectadas en serie serán idénticas para ambos elementos (condiciones de isotensión):

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{4}$$

Si se tiene en cuenta la variable tiempo, que es lo que se pretende analizar en este tipo de problema, y se despejan las deformaciones correspondientes al elemento elástico —Ecuación (1)— y elemento viscoso —Ecuación (2)— con sus correspondientes leyes se tiene que:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{\xi} \frac{d\sigma_1}{dt}. \tag{5}$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma_2. \tag{6}$$

Derivando la Ecuación (3) con respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt}. \tag{7}$$

Substituyendo las Ecuaciones (5), (6) y (7), y considerando que las tensiones son las mismas —según la Ecuación (4)— se tiene la expresión general del modelo viscoelástico de Maxwell:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\xi} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma_2 = \frac{1}{\xi} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma. \tag{8}$$

Una vez definidas las bases del Modelo Maxwell veamos cómo explicar algunos fenómenos de largo plazo en materiales poliméricos. Si nos centramos en un caso de fluencia, implica que la tensión aplicada es constante ($\sigma = \sigma_0 = \text{cte}$). Si la tensión es constante, por tanto, su derivada con respecto al tiempo será cero, con lo cual, en la expresión general del Modelo Maxwell, uno de los términos se anulará, quedando una expresión como la mostrada a continuación:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma_0. \tag{9}$$

La integral de la Ecuación (9) da una expresión de tipo lineal, donde K es una constante de integración, relacionada con la respuesta inmediata del elemento elástico en el modelo de Maxwell y corresponde con la deformación del resorte al soportar la tensión constante σ_0 , de tal manera que la constante K adquiere el valor de σ_0/ξ tal y como se muestra en la expresión (10):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma_0 \implies \int d\varepsilon = \int \frac{1}{\eta} \sigma_0 dt \implies \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + K = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{\xi}. \tag{10}$$

Gráficamente se puede comprobar cómo un elemento viscoelástico que trabaja a tensión constante, tendrá una deformación con respuesta inmediata debido al elemento elástico del polímero ($\varepsilon_0 = \sigma_0/\xi$) y una deformación lineal creciente con el tiempo debido a la respuesta viscosa del polímero ($\varepsilon = \sigma_0 t/\eta$) siendo $\sigma_0 t/\eta$ la pendiente de dicha recta —véase (Ferry, 1980)—.

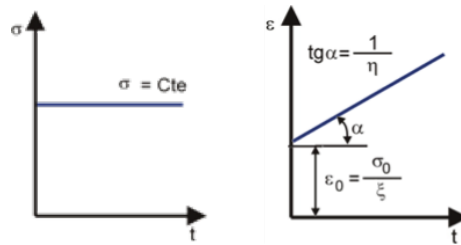


Figura 3: Representación de la deformación con respecto al tiempo según el modelo de Maxwell bajo la acción de una tensión constante.

El modelo de Maxwell posee una serie de puntos fuertes y limitaciones. En relación a la fluencia es capaz de estimar la deformación elástica inicial pero la fluencia viscosa con el paso del tiempo es lineal, con lo cual no se ajusta a la realidad, tal y como se puede intuir. No obstante, el modelo de Maxwell es un modelo sencillo, de fácil interpretación y análisis, que sirve como base para posteriores sistemas más complejos.

b) Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

En este modelo se considera el comportamiento viscoelástico de un polímero como el descrito por un acoplamiento en paralelo de un émbolo y un resorte tal y como se muestra en la Figura 4.

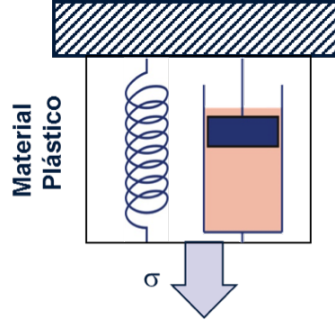


Figura 4: Representación esquemática del modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt con acoplamiento en paralelo de elemento elástico y elemento viscoso.

En esta configuración hay que tener en cuenta que, al aplicar una tensión al polímero, parte de la energía será almacenada por el muelle y el resto se disipará progresivamente al desplazarse el émbolo, lo que motiva una deformación dependiente del tiempo. Al cesar la carga, se recuperará la forma original en función de la energía que se había quedado almacenada en el muelle, pero no así en la del émbolo.

Las condiciones de contorno que derivan del acoplamiento en paralelo en el modelo de Kelvin-Voigt son dos. Por una parte, las tensiones soportadas por el material plástico serán la suma de la tensión en el muelle (σ_1) y la tensión en el émbolo (σ_2) tal y como se muestra en la Ecuación (11) y, por otra parte, la deformación de los dos elementos será idéntica, puesto que están conectados en paralelo (condiciones de isodeformación) —Ecuación (12)—:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (11)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (12)$$

Tomando como referencia la expresión de la aditividad de las tensiones —Ecuación (11)—, teniendo en cuenta la variable tiempo y despejando las tensiones de la parte elástica —Ley de Hooke, Ecuación (12)— y la parte viscosa —Ley de Newton, Ecuación (2)—, se obtiene la expresión general del Modelo de Kelvin-Voigt.

$$\sigma = \xi \varepsilon_1 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \xi \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (13)$$

Si se estudia la validez del modelo de Kelvin-Voigt frente a un fenómeno a largo plazo como es la fluencia ($\sigma = \sigma_0 = \text{cte}$), en la expresión general del modelo no se anula ningún término. Se trata de una ecuación diferencial cuya solución viene dada por la Ecuación (4):

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\xi} (1 - e^{-\xi/\eta t}). \quad (14)$$

Si se representa gráficamente este comportamiento (Figura 5) se observa que cuando el material trabaja en condiciones de tensión constante, experimenta una fluencia creciente con el paso del tiempo y además de forma exponencial. No obstante, un aspecto importante es que

la deformación en el $t = 0$, es decir, en el instante inicial, es nula, aspecto que no cuadra con la realidad de los fenómenos de fluencia, caracterizados por una deformación instantánea inicial y otra creciente de forma exponencial (Costanzi, Cebon, 2011; Shan et al., 2016).

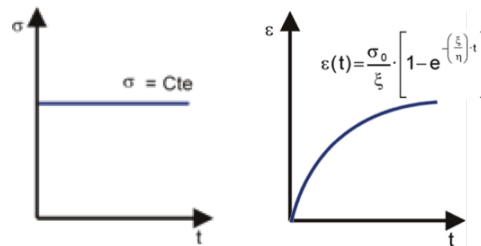


Figura 5: Representación de la deformación con respecto al tiempo según el modelo de Kelvin-Voigt bajo la acción de una tensión constante.

En términos generales, la expresión básica del modelo Kelvin-Voigt, explica de forma bastante satisfactoria un comportamiento real como es la fluencia, teniendo en cuenta una fluencia de tipo exponencial en función del tiempo. Esto, por ejemplo, no lo considera el modelo de Maxwell. Por contraposición, el modelo de Kelvin-Voigt no explica la deformación instantánea, mientras que el modelo de Maxwell ofrece una buena aproximación de la deformación elástica inicial.

Por tanto, de forma global, el modelo de Maxwell acierta muy bien en explicar la deformación inicial elástica, pero falla en el modo en que ocurre la deformación creciente, puesto que la realidad demuestra que esta no es lineal sino exponencial. Por otra parte, el modelo de Kelvin-Voigt explica el crecimiento de la deformación de tipo exponencial, pero no es capaz de determinar una deformación inicial.

Una posible solución para obtener una mejor aproximación al comportamiento viscoelástico real en un polímero es la combinación de ambos modelos en serie, en lo que se denomina, un modelo combinado (modelo de Burgers) tal y como se muestra en la Figura 6. Al estar acoplados en serie un modelo de Maxwell y un modelo básico de Kelvin-Voigt, la deformación total (ϵ) será la suma de la deformación correspondiente al modelo de Maxwell (ϵ_M) y la resultante del modelo de Kelvin-Voigt (ϵ_{KV}). Así pues, teniendo en cuenta las deformaciones con el tiempo correspondientes al modelo de Maxwell y de Kelvin-Voigt, representadas en las Ecuaciones (10), ϵ_M , y (14), ϵ_{KV} , respectivamente, es posible aproximar la deformación total en el modelo combinado o de Burgers según la siguiente expresión (Potter, Wiggert, 1991 y Roylance, 2001):

$$\epsilon = \epsilon_M + \epsilon_{KV}. \tag{15}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{\xi_M} + \frac{\sigma_0}{\eta_M}t + \frac{\sigma_0}{\xi_{KV}}(1 - e^{-\xi_{KV}/\eta_{KV}t}). \tag{16}$$

A continuación, se plantea un caso real, donde poder determinar numéricamente los valores de los diferentes parámetros que conforman el modelo combinado y que pueden servir al alumnado para predecir y validar el comportamiento viscoelástico de un polímero en función del tiempo y en función de diferentes estados tensionales.

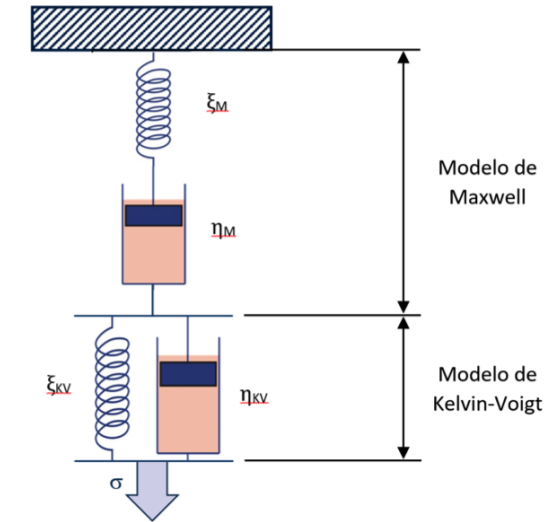


Figura 6: Representación esquemática del modelo viscoelástico de Burgers o modelo combinado que contempla el acoplamiento en serie de un elemento de Maxwell y un elemento de Kelvin-Voigt.

3. Comportamiento viscoelástico en polímeros mediante modelo combinado de burgers

Para el aprendizaje en el manejo de los modelos matemáticos de comportamiento viscoelástico en polímeros, se plantea la siguiente actividad en prácticas para que el alumnado determine y valide el comportamiento viscoelástico de un polímero mediante los modelos matemáticos combinados, a partir de resultados obtenidos experimentalmente. Para ello, en un ensayo experimental previo, se somete a una probeta de policloruro de vinilo (PVC) de 10 mm de anchura y 4 mm de espesor a un ensayo de fluencia donde súbitamente se le aplica una fuerza de 1750 N.

Posteriormente esta carga se mantiene constante en el tiempo, dando lugar a un proceso de fluencia. Si se considera que el material posee un comportamiento que se ajusta al modelo combinado Maxwell y Kelvin-Voigt (modelo de Burgers), se pretende estimar los valores numéricos de los diferentes parámetros que definen cada uno de los elementos que forma el sistema.

Como se ha descrito previamente, el modelo de Burgers es un modelo de cuatro parámetros que vienen definidos por:

- ξ_M : Constante elástica del resorte en el elemento de Maxwell
- η_M : Constante viscosa del émbolo en el elemento de Maxwell
- ξ_{KV} : Constante elástica del resorte en el elemento de Kelvin-Voigt
- η_{KV} : Constante viscosa del émbolo en el elemento de Kelvin-Voigt

A partir del gráfico representado en la Figura 7, es posible hacer algunas consideraciones para el cálculo de los diferentes parámetros. En primer lugar, para $t = 0$, la Ecuación (16) queda notablemente simplificada:

$$\varepsilon_{t=0} = \frac{\sigma_0}{\xi_M}. \quad (17)$$

De tal manera que la deformación para este instante inicial o deformación inmediata/instantánea permite estimar el parámetro correspondiente a la constante elástica del resorte en el ele-

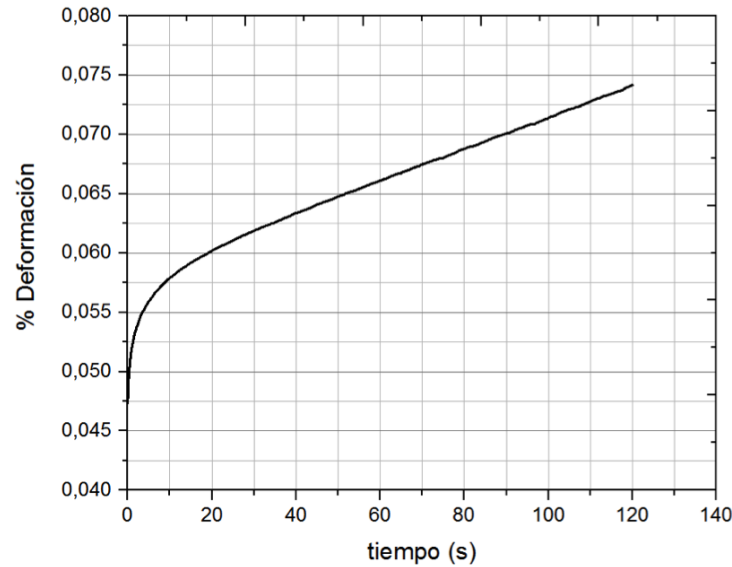


Figura 7: Representación % Deformación y tiempo de un PVC sometido a fluencia.

mento de Maxwell (ξ_M). El valor de la tensión se calcula según la fuerza aplicada y la sección de la probeta ensayada:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1750N}{10 \cdot 4mm^2} = 43.75 \text{ MPa.} \quad (18)$$

Al observar la deformación instantánea en la Figura 7, se aprecia que adquiere un valor en torno a 4,73%. De esta manera, según la Ecuación (17), la constante elástica del resorte en el elemento de Maxwell (ξ_M) se puede obtener al dividir la tensión a la que está sometida la probeta de PVC a fluencia entre el alargamiento instantáneo (valor obtenido en $t = 0$ en el gráfico), obteniendo un resultado de:

$$\xi_M = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{t=0}} = \frac{43.75MPa}{0.0473} = 924.9 \text{ MPa.} \quad (19)$$

El cálculo de la constante viscosa del émbolo en el elemento de Maxwell (η_M) se puede estimar teniendo en cuenta el comportamiento lineal que predice el modelo de Maxwell según este parámetro. Al observar la Figura 7, se aprecia claramente como a partir de un tiempo superior a 40 segundos, el comportamiento es prácticamente lineal creciente. La pendiente de esta recta está directamente relacionada con la constante viscosa del émbolo en el modelo de Maxwell tal y como se evidencia en la Ecuación (10). Para ello, el primer paso es determinar la pendiente de la gráfica % deformación-tiempo, en el tramo en que la fluencia tiene un comportamiento lineal. Este tramo, está comprendido entre los 40 y los 120 segundos. En este caso, mediante un ajuste lineal, el valor de la pendiente de la recta en este tramo temporal es de $1.33 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Si se observa la ecuación general del Modelo de Maxwell para fluencia —Ecuación (10)—, el cociente entre la tensión aplicada y la pendiente de la zona donde la fluencia tiene un comportamiento lineal, es el valor de la constante viscosa del émbolo en dicho modelo (η_M), resultando:

$$\begin{aligned} \text{Pendiente zona lineal: } m = \frac{\sigma_0}{\eta_M} &\implies \eta_M = \frac{\sigma_0}{m}, \\ \eta_M &= \frac{43.75MPa}{1.33 \cdot 10^{-4}s^{-1}} = 3.28 \text{ MPa} \cdot s. \end{aligned} \quad (20)$$

Para estimar la constante elástica del resorte en el elemento de Kelvin-Voigt (ξ_{KV}), hay que tener en cuenta la deformación tal y como la explica el modelo de Kelvin-Voigt. Observando la Figura 5 y en la Ecuación (14), la deformación según el modelo de Kelvin-Voigt, crece de forma exponencial hasta un valor máximo de σ_0/σ_{KV} .

Si se observa la Figura 7, el tramo de tiempo comprendido entre $t = 0$ segundos y $t = 40$ segundos muestra claramente un crecimiento exponencial hasta alcanzar un comportamiento lineal definido por la pendiente m calculada previamente. Así pues, para conocer el valor máximo de deformación que se alcanza con el crecimiento exponencial, debe prolongarse la línea recta hasta $t=0$ segundos y determinar el valor correspondiente de deformación (5.8%). Considerando que de forma instantánea el material se ha deformado 4.76%, la diferencia entre ambos valores (Figura 8), es la que indica el máximo valor de deformación que se puede alcanzar en el crecimiento exponencial, resultado un valor de 1.07%.

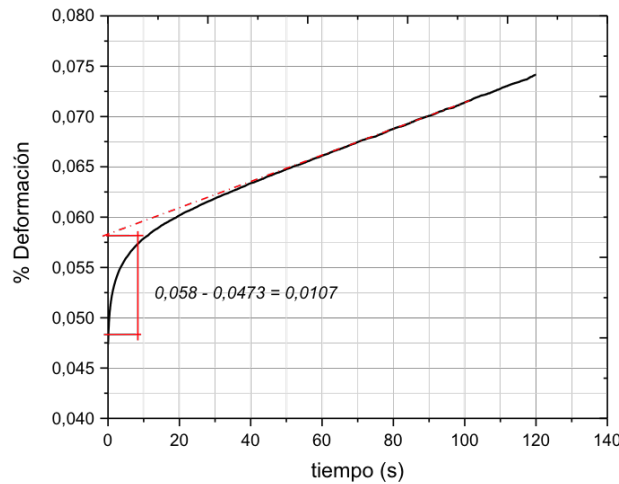


Figura 8: Determinación del % Deformación máximo en la zona de crecimiento exponencial hasta alcanzar régimen lineal.

Según la Ecuación (16), el valor máximo correspondiente a la función exponencial adquiere el valor de σ_0/ξ_{KV} . Así pues, el cociente entre la tensión constante aplicada y la deformación máxima correspondiente al modelo de Kelvin-Voigt, obtenida gráficamente, da lugar a la constante elástica del émbolo en el modelo de Kelvin-Voigt (ξ_{KV}).

$$\Delta\text{deformación: } \Delta\text{def} = \frac{\sigma_0}{\xi_{KV}} \implies \xi_{KV} = \frac{\sigma_0}{\Delta\text{def}},$$

$$\xi_{KV} = \frac{43.75\text{MPa}}{0.0107} = 4088.7 \text{ MPa.} \quad (21)$$

Finalmente, conocidos tres de los cuatro parámetros del modelo, para la estimación del último parámetro, la constante viscosa del émbolo en el modelo de Kelvin-Voigt (η_{KV}), se aplica la Ecuación (16) con la deformación correspondiente a un tiempo comprendido en la zona de crecimiento exponencial (zona de transición). En la Figura 7, se puede seleccionar un tiempo de unos 10 segundos para el cálculo, ya que se encuentra en esta zona transitoria de carácter exponencial. Una vez definido este valor de tiempo, a partir de la gráfica se obtiene el valor correspondiente de deformación, resultando un valor de 5.8%. Con esta información y con los tres parámetros que se han calculado previamente, es posible plantear la siguiente

expresión, de sencilla resolución para el cálculo de la constante viscosa del émbolo en el elemento de Kelvin-Voigt (η_{KV}).

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\xi_M} + \frac{\sigma_0}{\eta_M}t + \frac{\sigma_0}{\xi_{KV}}(1 - e^{-\xi_{KV}/\eta_{KV} \cdot t}) \implies 0.058 = \frac{43.75}{924.9} + \frac{43.75}{3,28}10 + \frac{43.75}{4088.7}(1 - e^{-4088.7/\eta_{KV} \cdot 10}),$$

$$\eta_{KV} = 21011.2 \text{ MPa} \cdot \text{s}. \quad (22)$$

Con estos cuatro parámetros obtenidos, cada uno perteneciente a un elemento elástico y viscoso en los Modelos de Maxwell y Kelvin-Voigt combinados, podemos llevar a cabo la simulación del comportamiento del polímero. La Ecuación (23) muestra claramente que la deformación en este material polimérico es una función de la tensión aplicada y del tiempo de duración de dicha tensión.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{924.9} + \frac{\sigma}{3.28}t + \frac{\sigma}{4088.7}(1 - e^{4088.7/21011.2 \cdot t}) \implies \varepsilon = f(\sigma, t). \quad (23)$$

Por ejemplo, en la Figura 9, en color negro, se puede apreciar la modelización obtenida en relación al comportamiento viscoelástico de policloruro de vinilo (PVC) frente a una tensión constante de 43.75 MPa. Al disponer de los cuatro parámetros del modelo combinado o modelo de Burgers, es posible estimar las curvas de fluencia para diferentes niveles de tensión aplicada tal y como se muestra en la Figura 9 para tensiones de 80 y 25 MPa. Con ello, el alumno dispone de una herramienta matemática que rige el comportamiento mecánico a largo plazo de un material y puede utilizarla para la obtención de diferentes curvas representativas de la viscoelasticidad como fluencia y relajación así como para determinar cualquier valor de la terna (σ, ε, t) , conociendo previamente las otras dos.

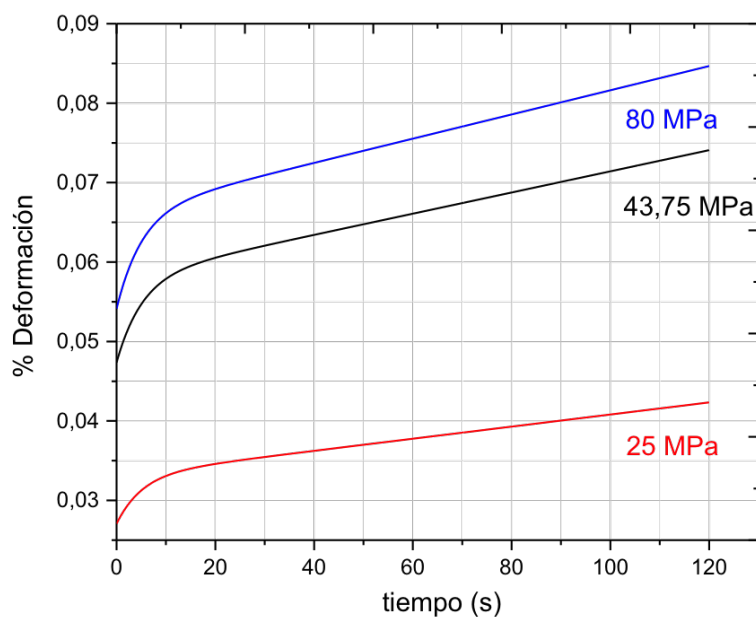


Figura 9: Representación de las curvas de fluencia de PVC a diferentes tensiones mediante el modelo combinado o modelo de Burgers con cuatro parámetros.

4. Conclusiones

Destacar que los modelos matemáticos que consideran la combinación en serie (Maxwell) o en paralelo (Kelvin-Voigt) de elementos simples se ajustan en cierta medida al comportamiento real de un polímero sometido a una tensión constante (fluencia). No obstante, poseen una serie de limitaciones que pueden ser solucionadas mediante la aplicación combinada de un modelo de Maxwell y un modelo de Kelvin-Voigt. Se trata de un modelo más complejo de cuatro parámetros: el elemento elástico (muelle o resorte) perteneciente al Modelo Maxwell, elemento viscoso (representado por un émbolo) del Modelo Maxwell, el elemento elástico perteneciente al Modelo Kelvin-Voigt y elemento viscoso del Modelo Kelvin-Voigt.

La resolución de los cuatro parámetros del modelo combinado, puede realizarse mediante diversos ajustes matemáticos y simplificaciones del modelo, lo cual permite la obtención de un modelo que se ajusta muy bien a los datos reales. Además, la obtención de los parámetros y su posterior aplicación en la ecuación general del modelo combinado, permite la predicción del comportamiento de un material sometido a diferentes estados tensionales.

Mediante la aplicación de estos modelos matemáticos, el alumnado puede comprender con mayor facilidad los procesos de comportamiento mecánico en un largo periodo de tiempo. Además, la obtención de los parámetros a través de datos experimentales les permite predecir el comportamiento de un polímero en una aplicación concreta, en función del estado tensional al que esté sometido.

Referencias

-  [Bryan H. \(1999\).](#)
Engineering Composite Materials.
Cambridge: IOM Communications.
-  [Georgiopoulos P., Kontou E. and Christopoulos A. \(2015\).](#)
Short-term creep behavior of a biodegradable polymer reinforced with wood-fibers.
Composites Part B-Engineering 80, 134-144.
-  [Ferry D. \(1980\).](#)
Viscoelastic properties of polymers.
Wiley, New York.
-  [Costanzi M., Cebon, D. \(2011\).](#)
Generalized Phenomenological Model for the Viscoelasticity of Bitumen.
Acta Materialia 141(5).
-  [Shan L., Tan Y., Zhang H., Xu Y. \(2016\).](#)
Analysis of Linear Viscoelastic Response Function Model for Asphalt Binders.
Journal of Materials in Civil Engineering 28(6).
-  [Potter M.C., Wiggert D.C. \(1991\).](#)
Mechanics of fluids.
Prentice-Hall Inc.
-  [Roylance D. \(2001\).](#)
Engineering Viscoelasticity.
Elsevier Science.