
Desenvolupament de nous mètodes per a la resolució d'equacions i sistemes d'equacions no lineals i aplicacions

Juliol 2018

CARLES TERUEL FERRAGUD

Doctorat en Matemàtiques

Directors:

José Luis Hueso Pagoaga i Eulalia Martínez Molada

Institut Universitari de Matemàtica Multidisciplinar

Universitat Politècnica de València

im²



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

*A la família,
pel seu recolzament
en els bons moments i
en els no tan bons.*

*A Mercè,
la més menuda... per ara.*

*Als vers amics,
als que desitjant estar en altre lloc
estaven al meu costat,
i als que estant en altre lloc
desitjaven estar al meu costat.*

*A José Luis i Lali,
pel seu assessorament,
consell i ajuda.*

*Només
és útil aquell coneixement
que ens fa ser millors.
Sòcrates*

*És millor encendre un ciri
que maleir l'obscuritat.
Confuci*

Índex

Agraïments	IX
Resum	XI
1 Introducció	1
2 Bases de l'anàlisi numèrica	9
2.1 Introducció	10
2.2 Expressió general d'un sistema	12
2.2.1 Ordre de convergència	13
2.2.2 Índex d'eficiència	14
2.3 Equacions i sistemes no lineals	15
2.3.1 Mètodes de resolució d'equacions no lineals	15
2.3.2 Mètodes de resolució de sistemes no lineals	20
2.3.3 Expressió de l'error	21
2.3.4 Índex d'eficiència computacional	22
2.4 Estudi de la convergència	23
2.5 Dinàmica	24
3 Estudi de l'eficiència	27
3.1 Aproximant la derivada	28
3.2 Nous mètodes iteratius	32
3.3 Nous mètodes òptims	34
3.4 Treballant amb el mètode de Jarratt	35
3.5 Exemples numèrics	36
3.6 Comportament dinàmic	38
3.7 Conclusió	46

4	Família òptima ordre 4	51
4.1	Noves famílies de mètodes iteratius	52
4.2	Eficiència computacional	59
4.3	Exemples numèrics	62
4.4	Dinàmica dels mètodes	63
4.5	Conclusió	66
5	Convergència sense jacobià	67
5.1	Operadors de diferències dividides	68
5.2	Resultat principal	69
5.3	Aproximacions per diferències dividides	72
5.4	Nous mètodes iteratius	74
5.5	Experiència numèrica	76
5.6	Estudi dinàmic	80
5.7	Conclusions	85
6	Mètodes eficients amb memòria	87
6.1	Mètodes iteratius tipus predictor-corrector	90
6.2	Convergència dels algorismes en dos passos	92
6.2.1	Algorisme predictor-corrector estàndard	93
6.2.2	Algorisme predictor-corrector millorat	95
6.2.3	Taxa de convergència i índex d'eficiència per als al- gorismes en dos passos	97
6.3	Convergència dels algorismes multipas	100
6.3.1	Algorismes generals	100
6.3.2	Mètodes iteratius proposats	102
6.3.3	Anàlisi exhaustiva de l'eficiència computacional . . .	106
6.3.4	Simulacions numèriques	112
6.4	Dinàmica d'un mètode amb memòria	112
6.4.1	Mètode del punt mitjà amb memòria	114
6.4.2	L'algorisme proposat	117
6.5	Conclusions	118
7	Arrels múltiples	123
7.1	Introducció	123
7.2	Desenvolupament de nous mètodes	126

7.3	Mètodes lliures de derivades	129
7.4	Proves numèriques	132
7.5	Conclusions	138
8	Problema dels N cossos	139
8.1	Introducció	139
8.2	Conques d'atracció	143
8.3	Solucions en sèries de potències	150
8.4	Estimacions inicials	154
8.5	Conclusions	160
9	Convergència semilocal	163
9.1	Introducció	164
9.2	Convergència semilocal	167
9.2.1	Resultat principal	168
9.3	Sobre l'accessibilitat del procés iteratiu	177
9.4	Resolució Numèrica d'un tipus de problema	181
9.4.1	Existència i unicitat de la solució	182
9.4.2	Configuració d'un esquema de diferències finites . . .	185
10	Conclusions	191
	Apèndix A Catàleg de mèrits	195
A.1	Publicacions	195
A.2	Congressos	196
A.3	Altres mèrits	197
	Bibliografia	201

Agraïments

En 2013 jo estava realitzant el Màster Interuniversitari en Investigació Matemàtica per un interès personal en complementar la meua formació en aquesta àrea, però no tenia en ment realitzar els estudis de doctorat. No he amagat mai que les matemàtiques sempre m'han resultat interessants i que eren una de les meues primeres opcions en el moment de triar carrera universitària. Finalment vaig cursar els estudis d'Enginyer de Telecomunicació, la qual cosa amb el temps m'ha obert moltes portes, possiblement més de les que m'imaginava quan els vaig començar.

Però acabada l'enginyeria volia aprofundir en el coneixement de les matemàtiques; per aquest motiu em trobava realitzant aquest màster i també, per aquest motiu, vaig sol·licitar participar en la beca de formació en abril del 2013. Durant la beca José Luis i Eulalia, em plantejaren nous reptes i m'obriren els ulls a noves perspectives, una d'elles la de la possibilitat de realitzar aquest doctorat.

És per això que en primer lloc he d'agrair a Eulalia i José Luis, per haver-me donat l'oportunitat de col·laborar i formar part del seu equip d'investigació, és a dir per oferir-me un món nou de possibilitats. El seu consell constant i la seua guia han sigut inestimables. Sense ells no haguera pogut fer aquest camí. Sense ells aquesta tesi no seria ni una mínima part del que és. Gràcies por tot.

A la meua família. En especial, a Juan Fermín i Maria, els meus pares que no acabaven d'entendre allò que el seu fill estava fent, però no han deixat de recolzar-me i suportar-me, quan amb els nervis d'una presentació

per a un congrés, pel començament d'un nou curs, amb un projecte que no funcionava... ni tan sols jo mateix em suportava. Pels valors que m'heu trasmés, les experiències, per totes les facilitats i oportunitats que m'heu donat, per estar al meu costat, una part d'aquest treball és vostre.

A tanta gent que m'ha acompanyat estos anys, en els bons moments i en els més complicats. No intentaré fer un llistat, perquè és impossible no deixar-me molta gent que ha sigut i és important per a mi. Tots vosaltres formeu ja part de mi i de la meua història. Gràcies de nou.

Algemesí, 6 de juliol 2018.

Resum

La necessitat de resoldre equacions i sistemes d'equacions no lineals sorgeix de manera natural en discretitzar les equacions integrodiferencials que modelen els problemes dels quals s'encarreguen les diferents branques de les ciències i l'enginyeria. Actualment, es pot fer ús dels ordinadors com a eines per facilitar totes les tasques entorn a la seua resolució. Amb la millora dels dispositius, el desenvolupament de les tècniques de computació i l'aritmètica de precisió variable, s'ha generalitzat la demanda de mètodes iteratius que resolguen de forma ràpida i eficient les equacions i sistemes d'equacions. L'anàlisi numèrica és la branca de les matemàtiques que respon a aquests requeriments. En aquest treball tractarem alguns aspectes d'interés d'aquesta àrea. En concret, mostrarem una aproximació de la derivada que ens permeta modificar un resultat per obtenir mètodes d'ordre $p + 2$ a partir d'altres d'ordre p , de manera que es mantinguen les propietats de convergència i estudiarem la millora de l'eficiència d'aquesta tècnica, degut al menor nombre d'avaluacions funcionals, aplicada a mètodes de diferent ordre. Un altre resultat s'ha assolit generalitzant el mètode de Sharma, i construint així famílies de mètodes d'ordre 4 òptims i d'ordre 6; amb l'estudi del nombre d'operacions obtindrem els dos mètodes més eficients de la família dels quals estudiarem la seua dinàmica. Una altra línia d'investigació consisteix en l'estudi de les diverses estratègies per aproximar el càlcul de les jacobianes, així els operadors de diferències dividides han contribuït a aquests objectius. Nosaltres hem desenvolupat un operador de diferències dividides que, tot i ser més senzill que d'altres ja coneguts, manté les propietats de convergència dels mètodes amb derivades. Posteriorment hem adaptat les famílies de mètodes d'ordre 4 i 6 per a equacions amb arrels múltiples obtenint també mètodes lliures de deri-

vades aplicant l'operador en diferències dividides anteriors. A continuació hem considerat hem realitzat l'estudi del comportament dinàmic de certs mètodes aplicats sobre el problema dels N cossos. Finalment hem obtingut certs resultats referents a la convergència semilocal. Els resultats teòrics s'han contrastat amb diverses experiències numèriques.

Resumen

La necesidad de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales surge de manera natural en discretizar las ecuaciones integro-diferenciales que modelan los problemas de los que se encargan las diferentes ramas de las ciencias y la ingeniería. Actualmente, se puede hacer uso de los ordenadores como herramientas para facilitar todas las tareas en torno a su resolución. Con la mejora de los dispositivos, el desarrollo de las técnicas de computación y la aritmética de precisión variable, se ha generalizado la demanda de métodos iterativos que resuelvan de forma rápida y eficiente las ecuaciones y sistemas de ecuaciones. El Análisis Numérico es la rama de las matemáticas que responde a estos requerimientos. En este trabajo trataremos algunos aspectos de interés de esta área. En concreto, mostraremos una aproximación de la derivada que nos permita modificar un resultado para obtener métodos de orden $p + 2$ a partir de otros de orden p , de modo que se mantengan las propiedades de convergencia y estudiaremos la mejora de la eficiencia de esta técnica, debido al menor número de evaluaciones funcionales, aplicada a métodos de diferente orden. Otro resultado se ha alcanzado generalizando el método de Sharma, y generando así familias de métodos de orden 4 óptimos y de orden 6; con el estudio del número de operaciones obtendremos los dos métodos más eficientes de la familia de los que estudiaremos su dinámica. Otra línea de investigación consiste en el estudio de las diversas estrategias para aproximar el cálculo de las jacobiana, así los operadores de diferencias divididas han contribuido a estos objetivos. Nosotros hemos desarrollado un operador de diferencias divididas que, a pesar de ser más sencillo que otros ya conocidos, conserva las propiedades de convergencia de los métodos con derivadas. Posteriormente hemos adaptado las familias de métodos de orden 4 y 6 para ecuaciones con

raíces múltiples obteniendo también métodos libres de derivadas aplicando el operador en diferencias divididas anteriores. A continuación hemos considerado hemos realizado el estudio del comportamiento dinámico de ciertos métodos aplicados sobre el problema de los N cuerpos. Finalmente hemos obtenido ciertos resultados referentes a la convergencia semilocal. Los resultados teóricos se han contrastado con diversas experiencias numéricas.

Abstract

The need to solve equations and systems of nonlinear equations arises naturally in discretizing the integro-differential equations that model the problems that are responsible for the different branches of science and engineering. Currently, computers can be used as tools to facilitate all tasks related to their resolution. With the improvement of the devices, the development of computing techniques and variable accuracy arithmetic, the demand for iterative methods has been generalized to solve the equations and equation systems quickly and efficiently. Numerical Analysis is the branch of mathematics that meets these requirements. In this paper we will discuss some aspects of interest in this area. In particular, we will show an approximation of the derivative that allows us to modify a result to obtain methods of order $p + 2$ from others of order p , so that the convergence properties are maintained and we will study the improvement of the efficiency of this technique, due to the smallest number of functional evaluations, applied to methods of different order. Another result has been achieved by generalizing the Sharma method, and thus constructing families of order 4 optimal and order methods 6; With the study of the number of operations, we will obtain the two most efficient methods of the family from which we will study its dynamics. Another line of research consists in the study of the various strategies to approximate the calculation of the Jacobins, thus the operators of divided differences have contributed to these objectives. We have developed a divided difference operator that, while being simpler than other ones already known, maintains the convergence properties of methods with derivatives. Later we have adapted families of order methods 4 and 6 for equations with multiple roots, also obtaining derivative free methods by applying the operator in previous divided differences. Below we have

considered that we have done the study of the dynamic behavior of certain methods applied to the problem of the N -bodies. Finally we have obtained certain results referring to semilocal convergence. The theoretical results have been contrasted with several numerical experiences.



Introducció

*Pel què fa a la ciència, l'autoritat d'un miler
no és superior a l'humil raonament d'un home.*

Galileo Galilei

SI quelcom caracteritza a l'ésser humà, com espècie és, sens dubte, la seua habilitat per resoldre problemes. És cert que s'ha pogut comprovar un comportament intel·ligent en moltes altres espècies del regne animal per assolir un objectiu puntual i trobar solucions particulars a una situació problemàtica. Ara bé, hom estarà d'acord que la capacitat no sols de resoldre el problema concret, sinó la destresa de trobar procediments generals, teòrics, i més encara la possibilitat de transmetre als seus congèneres tant les respostes com els procediments són característiques de l'ésser humà.

A mesura en què s'ha incorporat l'anàlisi racional als diversos camps, s'han manifestat amb més claredat aquesta capacitat per resoldre diversos problemes i ha provocat grans bots qualitius en les activitats relacionades. Tant és així, que es pot identificar la influència de la reflexió intel·lectual en cadascuna de les àrees a partir de la riquesa i la profunditat de les abstraccions que involucren. No és d'estranyar que certes branques del saber, entre

les quals destaquen clarament les matemàtiques, evidencien les seues potencialitats per generalitzar conceptes i establir-ne relacions i generar models per entendre el món, a través de la naturalesa dels conceptes abstractes amb els quals treballen. Galileu, considerat el pare de la ciència moderna, comentava que les matemàtiques són l'alfabet amb que Déu ha escrit l'univers; més enllà de la literalitat de l'expressió és indiscutible que les diverses ciències, han hagut de recórrer inevitablement a l'ús de les matemàtiques per formalitzar els seus coneixements; assolir els seus objectius, que no són altres que el de comprendre el món i desenvolupar les eines per modificar-lo; i unir-se trobant relacions que acosten els diferents coneixements per enfrontar els nous problemes de manera conjunta. Aquesta transversalitat i punt d'encontre són algunes de les característiques més importants de les matemàtiques.

En una situació pràctica, un problema matemàtic no és més que la modelització d'un fenomen físic. Aquest model matemàtic és la imatge abstracta de l'objecte d'estudi i es representa mitjançant una gran diversitat d'equacions: transcendents, amb derivades ordinàries o amb derivades parcials, subjectes a condicions inicials o de frontera (o combinacions d'ambdues), equacions integrals o integrodiferencials, tant en dimensió finita com en dimensió infinita, majorment no lineals. Una vegada establert el model, és habitual desitjar conèixer les magnituds dels diferents paràmetres sota certes restriccions de caire físic, artístic o de disseny, de recursos disponibles o fins i tot, perquè no dir-ho, d'inversió econòmica. Finalment, s'hauran de resoldre aquestes equacions.

En els casos en el quals no som capaços de trobar la solució analítica o aquesta és massa costosa d'aconseguir, optem per obtenir una aproximació a aquesta mitjançant procediments numèrics. Aquests seran vàlids si calculen de forma eficient i amb suficient precisió la solució als problemes expressats matemàticament. El model matemàtic implementat en algorismes logiconumèrics en un ordinador, permet estudiar les qualitats del procés original i uneix els avantatges de la teoria i de l'experiment. Treballar amb un model matemàtic i no amb el fenomen d'estudi permet estudiar i pronosticar les seues propietats d'estat -avantatge teòric- en forma relati-

vament ràpida i a baix cost. Tanmateix, els algorismes numèrics permeten, recolzant-se en la potència del càlcul dels ordinadors, verificar les qualitats del fenomen d'estudi en una forma no accessible per a enfocaments teòrics, és ací on s'aprecia l'avantatge pràctic. D'aquesta forma, ens endinsem en els terrenys de l'anàlisi numèrica. Generalment es considera que l'**anàlisi numèrica** és la ciència i l'art d'obtindre solucions numèriques per als problemes. Per tant, l'anàlisi numèrica és simultàniament branca de la matemàtica aplicada i de les ciències de la computació.

Tot i que com a ciència es pot considerar una disciplina prou jove, es troba clarament documentada la utilització d'algunes tècniques numèriques ja en les primeres grans societats. Així, per exemple, un dels problemes que ha estat present en totes les civilitzacions des de l'egípcia fins els nostres dies és el càlcul d'arrels quadrades. Aquest mètode aproximat, denominat mètode babilònic, data de voltants de 1700 abans de Crist. Malgrat no existir evidència que mostre l'ús del càlcul aproximat de $\sqrt{2}$ pels babilonis. La tauleta YBC 7289 ([1]) de la Yale Babylonian Collection és la prova de què coneixien la famosa regla d'Heró per acotar el radical per excés i per defecte.

A través de les diverses cultures: egípcia, xinesa, grega, àrab... podríem seguir l'aparició de nous algorismes i teoremes per resoldre les noves situacions pràctiques a les quals s'havien d'enfrontar, el càlcul de l'arrel de 5 per part dels pitagòrics en la proporció àuria, el teorema xinès dels residus, els recobriments plans a les parets dels edificis àrabs... són només alguns exemples entre la gran quantitat que es podrien citar.

Entre tots els algorismes s'han de destacar aquells desenvolupats amb el propòsit de ser aplicats als models físics o equacions per als quals no es coneixia una resolució algebraica. Un cas particular d'especial interès és el còmput de les arrels d'un polinomi, que per al cas concret de l'equació de segon grau ja es descriu un mètode general en escrits àrabs del segle IX. Cardano, Scipione, Tartaglia i Ferrari aconseguiren a mitjans del segle XVI la resolució de les equacions de tercer grau o cúbiques i la de quart grau. Els posteriors intents per trobar un procediment aplicable a les equacions de cinqué grau i superiors foren infructuosos, car aquestos mètodes no són

possibles; així ho demostraren Abel i Galois a primeries del segle XIX com un dels resultats principals del seu desenvolupament de la teoria dels grups resolubles.

Tant és així que el problema de la resolució d'equacions i sistemes d'equacions no lineals figura entre els més importants en la teoria i la pràctica, no solament de les matemàtiques aplicades, sinó també de moltes branques de les ciències, l'enginyeria, la física, la informàtica, l'astronomia, les finances... Per comprovar el gran interès que aquest tema ha despertat tant històricament com en l'actualitat només cal revisar l'ampla bibliografia produïda els darrers anys i la llarga llista de grans matemàtics que hi han treballat.

A partir de la segona meitat del segle XIX, amb les noves màquines de calcular, i especialment des de començaments del segle XX, amb el desenvolupament dels ordinadors, es donà un gran impuls a la modelització matemàtica. La construcció dels grans gratacels, les noves infraestructures com autopistes o ponts, els grans telescopis i l'exploració de l'univers, la física de partícules o la tecnologia mèdica entre d'altres se n'han beneficiat enormement amb les noves tècniques de computació. Potser tot començà en els anys 40 i 50 amb les investigacions militars, en especial amb la creació d'escuts de defensa antiaèria contra míssils nuclears en Estats Units i la Unió Soviètica. A partir dels anys 60 i 70, l'aparició de les computadores digitals es reconsiderà l'anàlisi numèrica que es mostrà com un ullal fructífer de nous mètodes, un doll profund de tècniques enriquides i contribuïdor a les ciències informàtiques, un camp de extens de gran interès on centrar les esforços d'investigadors matemàtics.

Fins eixe moment, alguns autors com [2] consideren que les matemàtiques dels segles XVIII, XIX i gran part del XX havien sigut marcades per un clar esperit dialèctic -estricteament lògic i deductiu-, menyspreant fins a cert punt allò que anomenen la matemàtica algorísmica. Justifiquen que, per continuar un exemple amb el qual ja hem treballat, si bé llargament es mantingué, davant la impossibilitat de trobar un fórmula explícita que permetera calcular-les en funció dels coeficients com es fa per a les

equacions de segon i tercer grau; la conjetura que un polinomi de grau n , $p_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ ha de tindre exactament n arrels, una vegada considerades les seues multiplicitats. La qüestió subsegüent era: quines garanties tenim de l'existència d'eixe nombre d'arrels? Els teoremes que Gauss fou el primer en demostrar, asseguren dialècticament la seua existència, però no permeten la seua obtenció algorísmica. Per tant el nou interrogant serà: en última instància, quins altres recursos ens valen per obtindre arrels aproximades? Es reobri una àrea d'estudi que al llarg de la història de la matemàtica no sempre ha estat potenciada adientment i de vegades ni tan sols ben considerada. En canvi, els últims anys per fer front als reptes d'una societat tecnificada centrada en les aplicacions i la possibilitat de la seua implementació, els enfocaments algorísmics tornen a ser objecte d'anàlisi.

Ara bé, contraposar la recerca teòrica a la recerca algorísmica, i voler enfrontar-les, és una gran errada. Henrici [3] senyala que:

La matemàtica dialèctica és una ciència rigorosament lògica, en la qual els enunciats són, siguen vertaders o falsos, i on els objectes de propietats especificades, o existeixen, o no existeixen. La matemàtica algorísmica és un instrument per a la resolució de problemes. En la primera no solament interessa l'existència d'un objecte matemàtic; interessen sobretot les credencials de la seua existència. La matemàtica dialèctica és un joc intel·lectual en el qual es desenvolupa segons regles sobre les quals existeix ampli consens. Les regles de la matemàtica algorísmica poden variar segons la urgència del problema amb el què estem tractant. Mai haguérem aconseguit posar un home en la Lluna si ens haguérem entestat en què les trajectòries foren calculades amb rigor analític. Les regles poden variar també en funció de l'equip de computació disponible. La matemàtica dialèctica invita a la contemplació. La algorísmica, a l'acció. La matemàtica dialèctica proporciona intel·ligència i intuïció dels problemes. La matemàtica algorísmica genera resultats.

Així, per aconseguir aquestes solucions, s'ha de ser conscient que l'elecció del procediment concret per encarar un problema s'han de con-

siderar els mitjans a l'abast per realitzar els càlculs, actualment l'anàlisi numèrica va de la mà de l'evolució dels ordinadors. Ara bé, cadascuna de les ferramentes de còmput posseeix unes limitacions pròpies, en el cas dels ordinadors són les característiques de memòria i de programació, o fins i tot ser elles mateixa fonts de nous errors, ja que els càlculs digitals comporta discretitzar funcions contínues de variable contínua.

Després d'haver obtingut alguna classe de solució del problema mitjançant un algorisme, l'anàlisi numèrica tracta d'establir acotacions relatives a quant pot arribar a diferir la solució calculada de la solució vertadera, encara que desconeguda. Deixant al marge fallades de la màquina, errades de programació, i altres errors humans; hauran de sorgir errors a conseqüència d'haver convertit en discretes variables que inicialment eren contínues, del truncament dels processos infinits o de la conversió en finites d'expressions infinites, a més a més les màquines de càlcul no operen amb precisió infinita, sinó que treballen amb un cert nombre de xifres exactes. L'anàlisi numèrica ha d'examinar com es reconeix que s'ha trobat una bona solució amb l'anàlisi de l'error, els criteris per a la determinació d'aquest error impliquen l'assoliment de solucions distintes. Idealment, el propi ordinador serà capaç de calcular finalment les cotes d'error de l'algorisme emprat.

Així, i tal com ho explica [2], l'anàlisi numèrica s'ocupa tant de les estratègies aplicables a la computació com de l'avaluació dels resultats obtinguts. Per tant, un treball de recerca en aquest camp hauria de consistir en:

- 1-. La formació d'algorismes.
- 2-. L'anàlisi de l'error, incloent els errors de truncament i arrodoniment.
- 3-. L'estudi de la convergència, incloent el de la taxa o velocitat de convergència.
- 4-. La comparació d'algorismes, per a jutjar la utilitat relativa de diferents algorismes en diferents situacions.

L'esperit algorísmic pur quedaria satisfet només amb els passos 1 i 4, açò és, la invenció dels algorismes i la comprovació en problemes típics per conèixer com funcionen. En demanar un anàlisi acurat de l'error, així com demostracions de convergència i l'estudi de la taxa de convergència, s'introdueix la concepció dialèctica a l'elaboració dels algorismes. I així es configura l'anàlisi numèrica com una branca sòlida dins del camp de les matemàtiques.

Aquesta serà la forma de procedir en aquest treball, el qual és una recollida del treball fet durant el període comprés entre abril de 2013 i gener de 2018 per un grup de recerca conformat per investigadors del Institut de Matemàtica Multidisciplinar (IMM) i l'Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada (IUMPA). El treball s'estructura al voltant de diferents vies d'actuació en la recerca matemàtica, per tant mostrarem una breu recollida de conceptes previs (capítol 2). La generació de nous mètodes aplicables a equacions no lineals mitjançant tècniques d'increment de l'ordre de convergència és un resultat conegut, ara bé la influència en l'índex d'eficiència de substituir la funció derivada per una aproximació adient es tracta al capítol 3. Treballant ja en els sistemes d'equacions no lineals, el capítol 4 és dedica a la generalització d'un mètode que proveeix una família òptima d'ordre 4. Finalment, un resultat semblant al del capítol 3 aplicable per a sistemes es desenvolupa al capítol 5, en aquest cas l'aproximació de la matriu jacobiana es realitzarà amb un nou operador de diferències dividides. El capítol 6 presenta el desenvolupament de mètodes iteratius amb memòria. Per al capítol 7 es reprenen idees ja presentades, adaptant la família de mètodes d'ordre 4 per a equacions amb arrels múltiples i es presenta una versió lliure de derivades. L'estudi de l'adequació d'aplicar el mètode de Newton al problema dels N cossos conforma el contingut del capítol 8 i la dificultat de preveure cap a quina solució convergeix una estimació inicial motiva que al capítol 9 es realitze una breu anàlisi sobre la convergència semilocal del mètode de Newton amb k passos amb la jacobina congelada. Un breu estudi de la dinàmica d'alguns mètodes relacionats s'inclou per finalitzar cada capítol.

Seguint aquesta estructura es pretén assolir els següents objectius:

- Revisió dels conceptes bàsics relacionats amb l'anàlisi numèrica, en concret en aquells aspectes referents a la resolució d'equacions i sistemes d'equacions no lineals.
- Generalització d'alguns resultats publicats a diverses revistes matemàtiques per la generació de nous mètodes.
- Desenvolupament de nous algorismes, preferiblement òptims en el sentit de Traub, i l'estudi de les condicions per les quals s'assoleix o no aquest nivell òptim.
- Millora d'algun dels mètodes presentats adaptant-los per a la resolució d'equacions que presenten arrels múltiples.
- Obtenció d'un mètode eficient amb memòria i comparació amb d'altres existents per a la resolució d'equacions.
- Càlcul de diferents paràmetres referents a aquestos nous mètodes: l'eficiència, el cost computacional, nombre d'operacions, el nombre d'avaluacions funcionals...
- Comprovació dels resultats obtinguts realitzant simulacions numèriques, per posar èmfasi en les possibilitats d'aplicació real d'aquestos resultats, algunes d'elles seran models obtinguts en diferents camps.
- Estudi de la dinàmica d'algunes de les propostes elaborades.



Bases per a un treball d'anàlisi numèrica

*Em parec a l'home que portava un maó
per mostrar al món com era sa casa.*

Bertolt Brecht

Índex

2.1	Introducció	10
2.2	Expressió general d'un sistema	12
2.2.1	Ordre de convergència	13
2.2.2	Índex d'eficiència	14
2.3	Equacions i sistemes no lineals	15
2.3.1	Mètodes de resolució d'equacions no lineals . . .	15
2.3.2	Mètodes de resolució de sistemes no lineals . . .	20
2.3.3	Expressió de l'error	21
2.3.4	Índex d'eficiència computacional	22
2.4	Estudi de la convergència	23
2.5	Dinàmica	24

2.1 Introducció

EN diverses branques de la ciència i l'enginyeria, el plantejament de models per al seu objecte d'estudi, desemboca sovint en problemes que requereixen determinar la solució d'una equació o d'un sistema d'equacions no lineals. En la pràctica, pot resultar impossible, o almenys excessivament costós, trobar la solució exacta d'aquestes equacions. En aquestes situacions es recorre a l'aproximació numèrica mitjançant tècniques iteratives. D'entre aquestes tècniques, la més coneguda i, a més a més, la més utilitzada és el mètode de Newton que té una convergència quadràtica sota certes condicions raonables.

Un dels objectius principals d'aquesta àrea de l'anàlisi numèrica consisteix en tractar de millorar l'ordre de convergència dels algorismes; òbviament, açò comporta complicar l'expressió iterativa, per exemple amb la inclusió de derivades d'ordre superior, com és el cas de les famílies de mètodes de Chebyshev o Halley. Aquesta millora sovint s'aconsegueix mitjançant la realització un major nombre d'avaluacions funcionals, aquest és el cas de la família de mètodes del tipus Steffensen o també amb l'execució de dos o més passos com el mètode d'Ostrowski que assoleixen ordre de convergència 4. En els darrers anys s'han publicat nombrosos articles sobre les famílies esmentades on s'han obtingut increments en l'ordre de convergència.

El concepte de l'índex d'eficiència d'un algorisme iteratiu per a la resolució d'una equació no lineal, fou introduït en [4]. A partir d'aquell moment, els nous mètodes s'han avaluat entre altres paràmetres per l'equilibri que establien entre aquest índex i l'ordre de convergència. De fet, el propi Traub conjeturà quin era l'índex òptim d'un mètode iteratiu per a resoldre una equació no lineal sense memòria, relacionant ambdós conceptes. Ara bé, actualment es considera la conveniència dels nous procediments per a la resolució de sistemes des d'un punt de vista més ample analitzant l'eficiència des del punt de vista del cost computacional, el nombre d'operacions, el nombre d'avaluacions funcionals...

Des d'aquesta perspectiva més àmplia s'han d'estudiar els mètodes aplicats als problemes d'enginyeria que es modelen mitjançant equacions en derivades parcials, equacions integrals, problemes de valors inicials o de frontera, etc. que solen freturar de solució en forma tancada, per a la resolució numèrica dels quals es discretitzen donant lloc, en molts casos, a sistemes d'equacions no lineals. Exemples d'aquest procedir els trobem en models dinàmics de reactors químics [5] o en els problemes de transferència radioactiva [6]. Per a la resolució de sistemes el procediment més emprats és fer ús del mètode de Newton, adaptat convenientment a espais multidimensionals.

Ara bé, la dificultat a l'hora de demostrar ordres de convergència elevats i la complexitat que suposa el treball en derivades d'ordre superior en diverses variables justifica que l'evolució que s'ha produït en aquestos mètodes i les seues variants haja resultat més lenta que per al cas escalar. Tot i això, ha existit una forta motivació pel desenvolupament de mètodes d'alt ordre per a sistemes, tant és així que les primeres variants del mètode de Newton per a sistemes, referenciades a [4], que sols presenten convergència cúbica ja suposen un gran avantatge respecte els mètodes d'ordre 2.

En aplicacions per a les quals es necessita molta resolució, la introducció de l'aritmètica de precisió variable ha afavorit el desenvolupament de mètodes d'alt ordre. En els últims anys, una de les tècniques utilitzades per millorar mètodes existents ha sigut la composició de mètodes coneguts donant lloc a algorismes del tipus predictor-corrector. Aquesta tècnica ha d'anar acompanyada de modificacions addicionals que permeten controlar el nombre d'operacions i avaluacions funcionals. Aquestes modificacions són principalment de tres tipus:

- 1-. Desenvolupament basat en fórmules de quadratura interpolatòria, per exemple [7] o [8].
- 2-. Estenent les fórmules per a una variable en les quals apareixen derivades d'ordre superior i aproximant aquestes de diferents formes, com en [9] i [10].

- 3-. Finalment, motivats per la naturalesa discreta d'alguns dels paràmetres d'aquestes aplicacions ha esperonat la recerca dels mètodes on es prescindeix de l'ús de les derivades, per obtenir mètodes del tipus Steffensen, com per exemple [11].

Un aspecte addicional a tindre en compte és que en tots aquests algorismes és necessari resoldre un o més sistemes lineals en cadascun dels passos del procés iteratiu. Considerant la importància de l'esforç computacional que aquesta operació suposa, resulta interessant analitzar la influència que sobre el mètode i la seua convergència tindria l'aplicació de diferents tècniques de resolució de sistemes lineals. Habitualment el software disponible utilitza la descomposició LU del sistema lineals i la resolució del doble sistema triangular.

2.2 Expressió general d'un sistema d'equacions

La resolució d'equacions no lineals és un problema que sorgeix freqüentment, i de forma natural, de l'estudi d'una ampla varietat de problemes pràctics, com per exemple per a la determinació de paràmetres en realitzar un ajust mínim-quadràtic, la discretització d'una equació diferencial no lineal mitjançant diferències finites, etc. L'expressió general d'un sistema d'equacions no lineals és:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

on cadascuna de les $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, pot ser una funció no lineal respecte a qualsevol de les variables.

Aquest sistema es pot expressar també de la forma $F(x) = 0$, on F és la funció vectorial $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Les funcions f_1, f_2, \dots, f_n reben el nom de **funcions coordenades** de F .

2.2.1 Ordre de convergència

Per trobar de forma aproximada un **zero de la funció** $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, és a dir, una solució \bar{x} , (denotada també per α) de l'equació no lineal, $n = 1$, o del sistema d'equacions no lineals, $n > 1$, $F(x) = 0$, s'utilitzen mètodes iteratius, de forma que la solució es pot obtenir com un punt fix d'una funció $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mitjançant el següent esquema iteratiu:

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

on $x^{(0)}$ és l'estimació inicial.

Per clarificar els conceptes relacionats amb la convergència d'un mètode iteratiu, revisarem algunes definicions:

Definició 1:

Siga $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ una successió en \mathbb{R}^n que convergeix a \bar{x} . Aleshores la **convergència** s'anomena:

- (a) **lineal**, si existeix M , $0 < M < 1$, i k_0 tal que

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq M \|x^{(k)} - \bar{x}\|, \quad \forall k \geq k_0.$$

- (b) **d'ordre p** , $p > 1$, si existeix M , $M > 0$, i k_0 tal que

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| \leq M \|x^{(k)} - \bar{x}\|^p, \quad \forall k \geq k_0.$$

La impossibilitat de conèixer el límit de \bar{x} , comporta que en la pràctica es treballa amb l'aproximació a l'ordre computacional de convergència o ACOC introduït a [8].

Definició 2:

Siga \bar{x} un zero de la funció F i suposem que $x^{(k-1)}$, $x^{(k)}$ i $x^{(k+1)}$ són tres iterats consecutius suficientment pròxims a \bar{x} . Aleshores, l'**ordre computacional de convergència ACOC** s'expressa amb la fórmula recollida a [8]:

$$ACOC = \rho \approx \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| / \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|)}. \quad (2.2)$$

2.2.2 Índex d'eficiència

A més a més, per a comparar diferents mètodes, emprarem l'índex d'eficiència introduït a [4], ja que aquest estableix la relació entre l'ordre de convergència i el nombre d'avaluacions funcionals:

Definició 3:

Siga $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$, un mètode iteratiu amb ordre de convergència p de manera que en l'expressió de la funció d'iteració $G(x^{(k)})$ s'utilitzen d avaluacions funcionals. Aleshores, l'índex d'eficiència E (o també EI) del mètode ve donat per

$$EI = p^{1/d} \quad (2.3)$$

Cal notar que aquest concepte fou introduït per al cas unidimensional, on per a la resolució de l'equació no lineal $f(x) = 0$, no s'estableix cap diferència entre les avaluacions de la funció f i de les seues derivades f', f'', \dots, f^n . En els actuals intents de generalitzar l'índex d'eficiència al cas multidimensional, $n > 1$, tracten de considerar el diferent cost d'avaluar la funció vectorial $F(x)$, la seua matriu jacobiana $J_F(x)$ i els operadors multilineals que defineixen les derivades de major ordre.

Per tant, per validar un nou mètode necessàriament s'ha de demostrar quin és el seu ordre de convergència teòric, i a continuació comptar el nombre d'avaluacions funcionals que es realitzen en cada iteració. Amb aquestos paràmetres, calcular l'índex d'eficiència del mètode. També és necessari, per completar el procés, aplicar aquest nou mètode per aproximar la solució de diverses equacions o sistemes concrets amb l'objectiu de confirmar els resultats teòrics i comparar amb els resultats numèrics obtinguts amb els que proporcionen altres mètodes ja coneguts.

Evidentment, un mètode es considera competitiu si presenta un índex d'eficiència millor que el del mètode de Newton i que d'altres mètodes coneguts que s'hagen utilitzat per derivar-lo, en aquest sentit recordem que la conjectura de Traub [13] estableix que un mètode sense memòria que realitzi d avaluacions funcionals en cada iteració pot assolir com a màxim l'ordre de $p = 2^{d-1}$. En aquest cas, es diu que el mètode és **òptim**.

Per exemple, un mètode iteratiu que requerisca realitzar dues avaluacions funcionals permetrà aconseguir un ordre de convergència màxim de $p = 2$, amb tres avaluacions funcionals el màxim ordre serà $p = 4$, amb quatre tindrem $p = 8$ i així successivament.

2.3 Equacions i sistemes no lineals

2.3.1 Mètodes de resolució d'equacions no lineals

Dins de l'anàlisi numèrica, la resolució d'equacions i sistemes no lineals és un dels aspectes més importants, degut a que altres grans blocs com són la resolució d'equacions diferencials o les equacions en derivades parcials i les equacions integrals poden comportar implícitament la resolució d'un sistema no lineal.

Si ens centrem en el cas unidimensional, la necessitat de resoldre una equació $f(x) = 0$, o d'una forma més general $f(x) = g(x)$, fa presència en nombrosos problemes d'aplicació, unes vegades a com un fi en sí mateixa i d'altres com un pas intermedi en el procés de resolució de problemes més complexos. Per aquest motiu, els mètodes iteratius per a l'obtenció aproximada de les arrels d'equacions no lineals han constituït al llarg dels últims anys un important camp d'investigació.

Molts dels resultats publicats sobre aquest tema han consistit en l'obtenció de nous mètodes iteratius que milloren l'ordre de convergència lineal (mètode de la bisecció), superlineal (mètode de la secant) o la convergència quadràtica del mètode de Newton; el qual, per al cas d'arrels simples, pren l'expressió iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.4)$$

Les condicions de convergència d'aquest mètode s'estableixen en el següent resultat:

Siga $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Si $\bar{x} \in [a, b]$ és una arrel de l'equació $f(x) = 0$ tal que $f'(\bar{x}) \neq 0$ (és a dir, és una arrel simple), aleshores la successió d'iterats x_n obtinguda pel mètode de Newton convergeix a \bar{x} , per a qualsevol aproximació inicial x_1 elegida suficientment pròxima a l'arrel. A més a més, aquesta convergència és quadràtica.

El mètode de Newton és d'ordre òptim ja que en cada iteració realitza dues avaluacions funcionals i té ordre 2, per tant el seu índex d'eficiència és $I = 2^{1/2} = 1.4142$.

Aquest increment en l'ordre de convergència s'assoleix a canvi de complicar l'expressió iterativa, per exemple fent ús de derivades d'ordre superior, com és el cas de la família de mètodes de Chebyshev-Halley, que poden expressar-se com:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{T_f(x_n)}{1 - \lambda T_f(x_n)} \right), \quad (2.5)$$

on

$$T_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$$

i λ és un paràmetre real de forma que, amb $\lambda = 0$ s'obté el mètode de Chebyshev, per a $\lambda = 1/2$ resulta el mètode de Halley i per a $\lambda = 1$, el super-Halley. Aquesta família de mètodes descrita a [4] té ordre de convergència 3 i índex d'eficiència $I = 3^{1/3} = 1.4422$.

En la literatura científica existeixen múltiples referències a mètodes d'ordre tres amb el mateix índex d'eficiència ja esmentat, alguns d'ells considerats com clàssics com el mètode del punt mitjà, en [4], i el mètode de [14]. Es podrien enumerar nombrosos mètodes que han aportat novetats

en la recerca, d'entre ells destaquen els enfocaments que per aconseguir convergència cúbica a partir del mètode de Newton es basen en tècniques d'acceleració de la convergència com es mostra a [15] o en la combinació de mètodes coneguts i buscant els coeficients adients [16].

Per a l'ordre 4, en l'actualitat ja es poden considerar clàssics els mètodes presentats a [12],

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

i [17],

$$\begin{aligned} z_n &= x_n - \frac{2f(x_n)}{3f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{1f(x_n)}{2f'(x_n)} \left(\frac{3f'(z_n) + f'(x_n)}{3f'(z_n) - f'(x_n)} \right). \end{aligned}$$

Aquests mètodes realitzen tres avaluacions funcionals per assolir el seu ordre màxim, per tant són òptims, és a dir, per a $d = 3$, $p = 2^{3-1}$, que proporciona un índex d'eficiència de $I = 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874$, el qual es considera un valor molt competitiu.

Tot i que a [18] es mostrava una família de mètodes amb les mateixes característiques que l'acabat d'esmentar, no s'aprofundí en aquest tipus de mètodes. Recentment s'han renovat l'interés en aconseguir mètodes d'ordre 4, especialment si aquestos esdevenen òptims. Així, en [19], treballant a partir de mètodes no òptims d'ordre 4, s'aproxima el valor de la primera derivada emprant funcions ja avaluades, que permet optimitzar l'ordre de la nova família de mètodes. També s'ha desenvolupat una família d'ordre òptim modificant el mètode de King que inclou el mètode d'Ostrowski per a cert valor del paràmetre (vore [20] i [21]). Per altra banda, en [22] es desenvolupa una tècnica per deduir un mètode iteratiu d'ordre 4 a partir un altre mètode qualsevol d'ordre 3 sense afegir cap avaluació de la funció ni de la seua derivada.

Cal assenyalar que el nombre d'articles que estudien mètodes iteratius es redueix en augmentar l'ordre del mètode. Ara bé, tot i que en l'actualitat s'estan publicant mètodes iteratius d'alt ordre com per exemple 6, 7, 8, 9, 12 ó 16, els mètodes òptims d'ordre 4 segueixen sent molt competitius per ser aplicats. Si, finalment, s'opta per desenvolupar un mètode d'alt ordre és habitual començar per un mètode òptim ja conegut, per exemple el mètode d'Ostrowski, i utilitzar diferents procediment. Una de les tècniques més emprades s'explica al següent resultat:

Teorema 1 ([4]): *Siguen $g_1(x)$ i $g_2(x)$ funcions de punt fix per a l'equació $f(x) = 0$. Siguen els mètodes iteratius $x^{(k+1)} = g_1(x^{(k)})$ i $x^{(k+1)} = g_2(x^{(k)})$ d'ordres p_1 i p_2 , respectivament. Aleshores, l'ordre de convergència del mètode iteratiu corresponent a la funció de punt fix $g(x) = g_2(g_1(x))$ és $p_1 p_2$.*

D'aquesta forma es poden obtenir nous mètodes amb un ordre de convergència alt a partir de mètodes ja coneguts. Per exemple, composant un mètode d'ordre p

$$y_k = g_1(x_k)$$

amb el mètode de Newton, s'obté un mètode d'ordre $2p$ definit per:

$$x_{k+1} = g_1(x_k) - \frac{f(g_1(x_k))}{f'(g_1(x_k))}$$

Aquest procediment òbviament incrementa el nombre d'avaluacions funcionals per comporta una reducció de l'índex d'eficiència. De fet, si el mètode inicial fa ús d' n avaluacions funcionals, aleshores el seu índex d'eficiència és $p^{\frac{1}{n}}$; en canvi, el nou mètode tindrà un índex d'eficiència $(2p)^{\frac{1}{n+2}}$, que és menor que el de partida. Per tant, per millorar l'eficiència s'ha de recórrer a realitzar modificacions en el mètode compost de forma que s'eviten algunes avaluacions funcionals, i així que supose la mínima pèrdua en l'ordre de convergència.

Evidentment augmentar l'ordre de convergència sense introduir noves avaluacions funcionals implica que les expressions iteratives posseïsquen una aritmètica més complexa. Ineludiblement, aquesta expressió iterativa comporta un gran nombre d'operacions aritmètiques, com ocorre en tots

els mètodes d'alt ordre. Com exemple del que estem exposant, per a un mètode d'ordre 8, [24], formulat així:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + \alpha f(y_n)}{f(x_n) + (\alpha - 2)f(y_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \left(\varphi \left(\frac{f(y_n)}{f(x_n)} \right) + \frac{f(z_n)}{f(y_n) - \beta f(z_n)} + \frac{4f(z_n)}{f(x_n)} \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

on α i β són números reals i φ és una funció real que ha de verificar certes condicions.

En moltes d'aquestes de les tècniques desenvolupades per a l'obtenció dels mètodes iteratius que aproximen la solució d'equacions no lineals es basa en l'aproximació de la funció a partir dels primers termes de la sèrie de Taylor associada, per tant és habitual que es trobe present en l'expressió la primera derivada (de vegades també la segona derivada) de la funció. El cost addicional i l'error d'arrodoniment que comporta obtindre i avaluar les funcions derivades fa necessari plantejar-se els mètodes lliures de derivades. Aquesta via l'obrí el mètode d'Steffensen i les seues variants, vore [25], [26] o [27]; que fan ús de diferents aproximacions, com per exemple les diferències dividides, per a les funcions derivades. En [26], es pot trobar un exemple d'aquesta classe de mètodes, concretament aquest amb ordre de convergència tres:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)^3}{[f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)][f(x_n) - f(y_n)]}. \end{aligned}$$

Una altra via d'investigació oberta és desenvolupar mètodes amb bona velocitat de convergència tot i que no es tracte amb arrels de la funció simples, hipòtesi habitual en la demostració dels teoremes de convergència,

per exemple [28]. En aquest cas és de gran importància ja que si existeixen arrels múltiples l'ordre de convergència es modifica, per exemple la convergència quadràtica del mètode de Newton es torna lineal en cas de treballar arrels múltiples.

En el cas escalar, una recent publicació [29], fa una interessant recopilació del mètodes multipunt i analitza la seua eficiència, precisió i optimitat.

2.3.2 Mètodes de resolució de sistemes no lineals

Tot i que, s'han publicat nombrosos mètodes iteratius, estables i eficients, per a la resolució aproximada d'equacions no lineals amb un alt ordre de convergència, normalment aquestos no s'adapten per a diverses variables. Aquesta situació es dona per diversos motius com per exemple que algunes operacions aritmètiques no tenen sentit per a $n > 1$, com per exemple l'avaluació d'una funció en el denominador, aquest com és el cas de les variants del mètode d'Ostrowski, i per tant no es poden generalitzar a diverses variables. Un altre motiu és la complexitat que s'incorpora a les demostracions teòriques de l'ordre de convergència degut als operadors multilineals que es troben presents en els desenvolupaments de Taylor.

Ara bé, en molts problemes d'aplicació, en particular aquells que es modelitzen mitjançant equacions diferencials, equacions en derivades parcials i equacions integrals, en ser discretitzades donen lloc a sistemes no lineals. Aquesta és la justificació que, malgrat les dificultats intrínseques, el disseny de mètodes d'alt ordre per al cas multidimensional siga d'un gran importància en la recerca en el camp de l'anàlisi numèrica.

El mètode més conegut per resoldre el problema de trobar les solucions d'un sistema no lineal $F(x) = 0$, n equacions amb n incògnites, és, també en aquest cas, el de Newton, sempre i quan s'acomplisquen unes condicions mínimes com són per exemple la no singularitat en un entorn de la solució de la matriu jacobiana J_F , també denotada habitualment (malgrat l'abús de notació) per $F'(x)$.

Per fer una breu revisió del mètodes publicats els últims anys citarem per exemple els presentats en [31] i [8], en els quals s'empren fórmules de quadratura diferents ordres per aconseguir nous mètodes iteratius amb ordre de convergència tres. Un altre procediment ha consistit en modificar la família Chebyshev-Halley per al cas multidimensional [32], [33] o [34]. En aquest últim es presentava la següent funció d'iteració:

$$\varphi(x) = x - u(x) \left(1 + \frac{1}{2} ((\beta - 2)F'(x) + \lambda F'(x - \beta u(x)))^{-1} (F'(x) - F'(x - \beta u(x))) \right),$$

on β és un nombre real no nul i $u(x) = F'(x)^{-1}F(x)$. Aquest mètode assoleix les millors característiques per a $\lambda = 1$ i $\beta = \frac{3}{2}$, aquest cas correspon a la forma multilinear del cas de Jarratt, d'ordre 4:

$$\varphi(x) = x - \frac{u(x)}{2} \left((3F'(x - \frac{3}{2}u(x)) - F'(x))^{-1} (3F'(x - \frac{3}{2}u(x)) + F'(x)) \right),$$

La família presentada en [35], és en general d'ordre tres, però assoleix quart ordre per als valors $\theta = \pm 1$. En concret per a $\theta = 1$ el mètode queda:

$$\begin{aligned} x_p^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \\ x_{pp}^{(k)} &= x_p^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x_p^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} \left[F(x_{pp}^{(k)}) + F(x_p^{(k)}) + F(x^{(k)}) \right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aquest mètode no requereix actualitzar la matriu jacobiana durant els tres passos que componen cadascuna de les iteracions, la qual cosa repercuteix en benefici de l'índex d'eficiència.

2.3.3 Expressió de l'error

Per al cas multidimensional, es denota $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$ a l'error en la k -èsima iteració del procés iteratiu. L'equació

$$e^{(k+1)} = Le^{(k)p} + O(e^{(k)p+1}),$$

on L és una funció p -lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, és coneguda com l'equació de l'error i p és l'ordre de convergència.

Una altra tècnica per realitzar les demostracions de l'ordre de convergència és emprar el següent resultat:

Teorema 2 (Vore [4]) *Siga $G(x)$ una funció d'iteració de punt fix amb derivades parcials contínues d'ordre p respecte a totes les components de x . El mètode iteratiu $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ és d'ordre p si*

$$G(\bar{x}) = \bar{x};$$

$$\frac{\partial^k g_i(\bar{x})}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} = 0, \quad \text{per a tot } 1 \leq k \leq p-1, \quad 1 \leq i, j_1, \dots, j_k \leq n;$$

$$\frac{\partial^p g_i(\bar{x})}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_p}} \neq 0, \quad \text{per almenys un valor de } i, j_1, \dots, j_p,$$

on g_i són les funcions coordenades de G .

2.3.4 Índex d'eficiència computacional

A més del desenvolupament de mètodes i la demostració del seu ordre de convergència, un altre problema obert, a falta d'un consens ampli, és la definició adient de l'índex d'eficiència per al cas multidimensional i qui sap si enunciar una afirmació semblant a la de Traub que conjeture el màxim ordre que es pot assolir amb un nombre determinat d'avaluacions funcionals i així determinar l'índex d'eficiència òptim. Habitualment, en moltes publicacions, es fa ús de la definició per al cas unidimensional amb la consideració addicional de què es requereixen n avaluacions funcional en cada iteració el còmput de la funció vectorial, i de n^2 avaluacions funcionals per a la matriu jacobiana. Amb aquesta consideració, l'índex d'eficiència per al mètode de Newton és: $I = 2^{\frac{1}{n+n^2}}$.

Tanmateix, aquesta definició per a l'índex d'eficiència, es considera insuficient per a comparar mètodes, perquè la resolució dels sistemes lineals associats al càlcul de la matriu inversa comporten un cost gens menyspreable. Així, s'ha definit l'índex operacional, [30], com $C = p^{1/op}$, on op és la quantitat d'operacions per iteració. En aquesta situació, s'ha de tindre present que el nombre de productes i quocient necessaris per a resoldre m sistemes lineals amb la mateixa matrius de coeficients, emprant

la factorització LU , és:

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n,$$

on n és la grandària del sistema.

Intentant portar aquesta idea més enllà, en [35] es defineix el que anomenen l'índex d'eficiència computacional $EC = p^{1/(d+op)}$, el qual pren en consideració tant el nombre d'avaluacions funcionals com la quantitat d'operacions realitzades.

Anàlogament al cas unidimensional, el comportament dels mètodes iteratius quan el que es pretén és aproximar arrels múltiples, en el cas de diverses variables és un camp obert que s'encarrega d'establir els resultats per aquells sistemes en els quals la matriu jacobiana és singular en alguna solució del sistema, o bé, es troba amb alguna singularitat durant el seu procés iteratiu.

2.4 Estudi de la convergència

L'estudi de la convergència es pot dur a terme de diverses maneres depenent de si l'estudi es centra en les condicions que ha d'acomplir la solució, l'aproximació inicial o l'operador que defineix el mètode iteratiu. Segons el focus d'atenció de la nostra anàlisi es distingeixen tres tipus d'estudis quan ens interessa provar la convergència de la successió d'aproximacions (2.1): local, semilocal i global.

En primer lloc, l'**estudi local** de la convergència es basa en l'anàlisi de les condicions de la solució \bar{x} , a partir de determinades condicions de l'operador G , i proporciona l'anomenada bola de convergència de (2.1), que mostra l'accessibilitat a \bar{x} des de l'estimació inicial x_0 que ha de pertànyer a la bola, consulteu [36], [37] i [38].

En segon lloc, l'**estudi semilocal** de la convergència es basa en la suposició de que es donen certes condicions sobre l'aproximació inicial x_0 i partint de determinades condicions de l'operador G , per obtenir el domini de paràmetres corresponents a eixes condicions requerides a x_0 de manera

que es pot garantir la convergència a la solució \bar{x} de la seqüència que es genera mitjançant el mètode iteratiu, veure [39] i [40]. En tercer lloc, l'**estudi global** de la convergència garanteix, basant-se només en determinades condicions de l'operador G , la convergència de la successió d'aproximacions a la solució \bar{x} en un domini, independentment de l'estimació inicial x_0 , consulteu [41] i [42].

Per tant, podem dir que l'anàlisi de la convergència a partir de la imposició de condicions sobre la solució, sobre l'aproximació inicial o sobre cap d'aquestes, determina el diferent tipus d'estudi realitzat. En qualsevol dels tres casos, hi ha certes condicions que sempre s'exigiran a l'operador G .

L'estudi de la convergència local presenta el desavantatge d'assumir que la solució, que en principi es desconeix, satisfà certes condicions. En general, l'estudi global de la convergència és molt específic pel que fa al tipus d'operadors a considerar, com a conseqüència de l'absència de condicions sobre les aproximacions inicials i sobre la solució.

Siga quin siga el tipus de convergència que s'analitzi, considerar l'estudi dinàmic del mètode permetrà conèixer algunes característiques del comportament global de l'operador, i visualitzar ràpidament si certs punts quan s'empren com estimacions inicials d'un mètode convergiran i en cas de fer-ho, a quina arrel convergiran.

2.5 Dinàmica

Per tant, en aquest treball també estudiarem la dinàmica tant d'una mètode aplicat per a la resolució d'equacions i com la d'altres mètodes per resoldre sistemes d'equacions no lineals. Per tant, convé revisar els alguns conceptes:

Si $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ és un operador racional, condició aquesta que garantirà la seua diferenciabilitat, donat un $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, es defineix l'òrbita de z_0 com el conjunt $z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^p(z_0), \dots$. Un punt $z_f \in \widehat{\mathbb{C}}$ és un punt fix de R si $R(z_f) = z_f$. Un punt fix z_f es diu que és atractiu si $|R'(z_f)| < 1$,

repulsor si $|R'(z_f)| > 1$, i neutral si $|R'(z_f)| = 1$. Pendrà el nom de superatractor si el punt fix z_f aconsegueix $R'(z_f) = 0$. Un punt x_p s'anomena periòdic de període m si $R^m(z_p) = z_p$ on m és el menor enter per al qual s'aconsegueix.

Siga z_f un punt fix superatractor d'una funció R . La conca d'atracció de z_f és el conjunt de punts l'òrbita dels quals tendeix cap al punt fix

$$\mathcal{A}(z_f) = \{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z_f \text{ per a } n \rightarrow \infty\}$$

El **conjunt de Fatou** d'una funció racional R , $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ és el conjunt $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ les òrbites les quals tendeixen a un atractor (punt fix, òrbita periòdica o a l'infinit). El seu complementari en $\widehat{\mathbb{C}}$ és el **conjunt de Julia**, $\mathcal{J}(\mathcal{R})$. És a dir, les *conques d'atracció* dels punts fixos pertanyen al *conjunt de Fatou* i les *fronteres o vores* d'aquestes conques d'atracció formen part del *conjunt de Julia*.

La dinàmica del mètode de Newton i d'altres mètodes iteratius d'alt ordre de convergència han sigut amplament estudiats en [43, 44, 45, 46]. En aquestes referències, els mètodes s'apliquen simplement a equacions polinomial en el domini complex.

Aquests conceptes (no sempre els resultats) es poden traspassar a \mathbb{R}^n , mitjançant l'anàlisi adient dels valors propis de la matriu jacobiana de l'operador emprat per iterar.

Per a sistemes d'equacions no lineals també existeixen diferents estudis en la literatura científica sobre el comportament dinàmic de diferents mètodes iteratius, per exemple [48], on s'analitza la dinàmica de mètodes amb majors ordre de convergència que el mètode de Newton. Aquestes investigacions solen interessar-se pel comportament del mètode en el domini complex, en canvi, nosaltres tractarem d'estudiar la dinàmica en el pla real \mathbb{R}^2 aplicant els mètodes sobre un sistema format per equacions polinòmiques de segon grau, que representa la intersecció de dues còniques, ja que ens interessa principalment el comportament dels mètodes per a resoldre sistemes d'equacions no lineals en l'espai real de n dimensions.

Recentment alguns investigadors comencen ha interessar-se per la dinàmica de mètodes lliures de derivades, [49], aplicats a la solució d'equacions polinòmiques tant en el pla complex com en \mathbb{R}^2 . Per a l'anàlisi que durem a terme en aquest treball, prendrem un o l'altre enfocament, és per aquest motiu que en cada cas que estudiem la dinàmica d'un mètode recordarem els conceptes relacionats i com els emprarem.



Increment de l'eficiència de mètodes iteratius per a equacions no lineals ¹

Índex

3.1	Aproximant la derivada	28
3.2	Nous mètodes iteratius	32
3.3	Nous mètodes òptims	34
3.4	Treballant amb el mètode de Jarratt	35
3.5	Exemples numèrics	36
3.6	Comportament dinàmic	38
3.7	Conclusió	46

L A imperant necessitat de tractar amb totes les equacions no lineals que fan presència constant en certs àmbits científics i tecnològics requereix el coneixement i l'ús de mètodes iteratius per resoldre-les. En algunes àrees

¹La base d'aquest capítol és l'article [50] i la comunicació **Efficiently increasing the order of an iterative method for nonlinear equations** presentada al congrés *Mathematical Modelling in Engineering & Human Behaviour*, celebrat del 4 al 6 de setembre de 2013 a València.

pràctiques és suficient amb el mètode de Newton, però per a d'altres, el volum d'equacions a resoldre o la precisió exigida en les solucions obliga a emprar mètodes amb un major ordre de convergència, el qual implica major velocitat en la resolució.

Així, resulta tan interessant la generació de nous mètodes d'alt ordre com l'aplicació de tècniques senzilles que permeten augment l'ordre de convergència de mètodes ja coneguts, més encara si aquesta tècnica pot utilitzar-se repetidament per assolir un ordre tan alt com es desitge (vore [4] i [51]). Per aconseguir aquest propòsit, generalment cal emprar passos addicionals que impliquen el càlcul de les derivades de la funció durant l'iterat, per tant una bona aproximació per aquesta derivada pot comportar avantatges, per exemple en un increment de l'ordre de convergència.

Una extensió d'aquest resultat és aquell que permet la seua aplicació per a mètodes que no compreguen un primer pas de Newton sinó un de tipus Jarratt. El desenvolupament de tots aquests casos i l'estudi de la seua eficiència seran l'objecte d'aquest capítol.

3.1 Emprant una aproximació de la derivada

Alguns autors han desenvolupat tècniques per incrementar l'ordre de un mètode iteratiu establint nous passos tipus Newton. Per exemple, és conegut el fet de que congelant la derivada després del primer pas de Newton, s'obté un mètode de Newton multipas. El següent resultat [4] generalitza aquesta idea:

Teorema 3 (Traub [4])

Assumim que la funció $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un interval obert D té una arrel simple $\alpha \in D$ i que aquesta és suficientment suau, i que la funció d'iteració $\phi(x)$ defineix un mètode iteratiu d'ordre p . Aleshores la funció iterativa composada $\psi(x)$ expressada per

$$\psi(x) = \phi(x) - \frac{f(\phi(x))}{f'(x)} \quad (3.1)$$

defineix un mètode iteratiu d'ordre $p + 1$.

A més, per al cas de sistemes no lineals, Cordero et al. en [51] han probat un resultat similar amb la congelació de la derivada en el segon pas:

Teorema 4 *Siga $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció suficientment diferenciable en un entorn D de α , que és una solució del sistema $F(x) = 0$, la matriu jacobiana del qual és continua i no singular en D . Aleshores, per a una aproximació inicial suficientment pròxima a α , el mètode definit per*

$$\psi(x) = \phi(x, y) - F'(y)^{-1}F(\phi(x, y))$$

on $y = x - F'(x)^{-1}F(x)$ és la iteració del mètode de Newton i $\phi(x, y)$ és la funció d'iteració de un mètode d'ordre p , té ordre de convergència $p + 2$.

Estem interessats en la millora d'aquesta tècnica, per al cas escalar, evitant el càlcul de la derivada en y . Així, utilitzem una aproximació a la derivada que ens permet mantindre l'increment en l'ordre de convergència. Aquesta tècnica pot ser expressada com un mètode iteratiu de dos passos de la següent forma:

$$\begin{aligned} z_k &= \phi(x_k, y_k) \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{f(z_k)}{\tilde{f}'(y_k)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

on $\tilde{f}'(y_k)$ és l'aproximació considerada per a reemplaçar la derivada.

L'aproximació proposada per a $\tilde{f}'(y_k)$ per a $f'(y_k)$ pot obtindre's del truncament en el tercer terme del desenvolupament en sèrie de Taylor de $f(y_k)$:

$$f(y_k) \simeq f(x_k) + f'(x_k)(y_k - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(y_k - x_k)^2$$

D'ací:

$$\frac{1}{2}f''(x_k) \simeq \frac{f(y_k) - f(x_k) - f'(x_k)(y_k - x_k)}{(y_k - x_k)^2}$$

emprant $y_k - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ja que y_k és un pas de Newton

$$f''(x_k) \simeq \frac{2 f(y_k) f'(x_k)^2}{f(x_k)^2}.$$

Fent ús d'aquesta expressió lineal en l'aproximació del desenvolupament de Taylor de $f'(y_k)$ obtenim:

$$\begin{aligned} f'(y_k) &\simeq f'(x_k) + f''(x_k)(y_k - x_k) \\ &= (f(x_k) - 2f(y_k)) \frac{f'(x_k)}{f(x_k)} = \tilde{f}'(y_k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aquest procés ens porta al següent resultat:

Teorema 5 *Siga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció suficientment suau en un entorn D de α , que és una solució de l'equació $f(x) = 0$. Si ϕ és un mètode d'ordre p , aleshores el mètode (3.2), on $\tilde{f}'(y_k)$ prén l'expressió (3.3), té ordre de convergència $p + 2$.*

Demostració: Considerem la sèrie de Taylor per a $f(x_k)$ al voltant de la solució α

$$f(x_k) = c_1 e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4 + c_5 e_k^5 + c_6 e_k^6 + O(e_k^7),$$

on $e_k = x_k - \alpha$ and $c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$, $n \geq 1$ i la seua derivada

$$f'(x_k) = c_1 + 2c_2 e_k + 3c_3 e_k^2 + 4c_4 e_k^3 + 5c_5 e_k^4 + 6c_6 e_k^5 + 7c_7 e_k^6 + O(e_k^7).$$

Per tant, el pas de Newton pot escriure's com

$$\begin{aligned} y_k - \alpha = e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} &= \frac{c_2}{c_1} e_k^2 + \frac{2(c_1 c_3 - c_2^2)}{c_1^2} e_k^3 + \frac{(4c_2^3 - 7c_1 c_3 c_2 + 3c_1^2 c_4)}{c_1^3} e_k^4 \\ &+ \frac{2(-4c_2^4 + 10c_1 c_3 c_2^2 - 5c_1^2 c_4 c_2 + c_1^2(2c_1 c_5 - 3c_3^2))}{c_1^4} e_k^5 \\ &+ \frac{1}{c_1^5} (16c_2^5 - 52c_1 c_3 c_2^3 + 28c_1^2 c_4 c_2^2 + c_1^2(33c_3^2 - 13c_1 c_5)) c_2 \\ &+ c_1^3 (5c_1 c_6 - 17c_3 c_4) e_k^6 + O(e_k^7) \end{aligned}$$

i la funció en aquest punt com

$$\begin{aligned} f(y_k) &= c_2 e_k^2 + \left(2c_3 - \frac{2c_2^2}{c_1}\right) e_k^3 + \left(\frac{5c_2^3}{c_1^2} - \frac{7c_3 c_2}{c_1} + 3c_4\right) e_k^4 \\ &+ \frac{2(-6c_2^4 + 12c_1 c_3 c_2^2 - 5c_1^2 c_4 c_2 + c_1^2(2c_1 c_5 - 3c_3^2))}{c_1^3} e_k^5 \\ &+ \frac{1}{c_1^4} (28c_2^5 - 73c_1 c_3 c_2^3 + 34c_1^2 c_4 c_2^2 + c_1^2(37c_3^2 - 13c_1 c_5)) c_2 \\ &+ c_1^3 (5c_1 c_6 - 17c_3 c_4) e_k^6 + O(e_k^7). \end{aligned}$$

Substituïnt aquestes expressions en l'aproximació construïda per a $f'(y_k)$ (3.3), $\tilde{f}'(y_k)$, aquesta pren la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(y_k) &= (f(x_k) - 2f(y_k)) \frac{f'(x_k)}{f(x_k)} \\ &= c_1 + \left(\frac{2c_2^2}{c_1} - c_3 \right) e_k^2 + \left(-\frac{4c_2^3}{c_1^2} + \frac{6c_3c_2}{c_1} - 2c_4 \right) e_k^3 \\ &\quad + \left(\frac{8c_2^4}{c_1^3} - \frac{16c_3c_2^2}{c_1^2} + \frac{4(c_3^2 + 2c_2c_4)}{c_1} - 3c_5 \right) e_k^4 + O(e_k^5).\end{aligned}$$

Considerem la següent expressió de l'error per a un mètode d'ordre p , $z_k = \phi(x_k, y_k)$:

$$\begin{aligned}z_k - \alpha &= B_p e_k^p + B_{p+1} e_k^{p+1} + B_{p+2} e_k^{p+2} + O(e_k^{p+3}) \\ f(z_k) &= B_p c_1 e_k^p + B_{p+1} c_1 e_k^{p+1} + B_{p+2} c_1 e_k^{p+2} + O(e_k^{p+3}) + c_2 B_p^2 e_k^{2p} + O(e_k^{2p+1})\end{aligned}$$

on $B_p, B_{p+1}, B_{p+2} \dots$ són coeficients reals, les quals dependran del mètode específic implementat.

Així, ens trobem amb dos casos:

- per a $p = 2$:

$$f(z_k) = B_p c_1 e_k^p + B_{p+1} c_1 e_k^{p+1} + (B_p^2 c_2 + B_{p+2} c_1) e_k^{p+2} + O(e_k^{p+3})$$

- per a $p > 2$:

$$f(z_k) = B_p c_1 e_k^p + B_{p+1} c_1 e_k^{p+1} + B_{p+2} c_1 e_k^{p+2} + O(e_k^{p+3})$$

Aleshores:

- per a $p = 2$:

$$\frac{f(z_k)}{\tilde{f}'(y_k)} = B_p e_k^p + B_{p+1} e_k^{p+1} + \frac{B_{p+2} c_1 + B_p \left(B_p c_2 - \frac{2c_2^2}{c_1} + c_3 \right)}{c_1} e_k^{p+2} + O(e_k^{p+3})$$

- per a $p > 2$:

$$\frac{f(z_k)}{\tilde{f}'(y_k)} = B_p e_k^p + B_{p+1} e_k^{p+1} + \frac{1}{c_1} \left(B_{p+2} c_1 - B_p \left(\frac{2c_2^2}{c_1} - c_3 \right) \right) e_k^{p+2} + O(e_k^{p+3})$$

i l'error prendrà la següent forma:

-si $p = 2$

$$e_{k+1} = (z_k - \alpha) - \frac{f(z_k)}{\tilde{f}'(y_k)} = \frac{B_p}{c_1} \left(B_p c_2 + \left(\frac{2c_2^2}{c_1} - c_3 \right) \right) e_k^{p+2} + O(e_k^{p+3}).$$

- si $p > 2$

$$e_{k+1} = (z_k - \alpha) - \frac{f(z_k)}{\tilde{f}'(y_k)} = \frac{B_p (2c_2^2 - c_1c_3)}{c_1^2} e_k^{p+2} + O(e_k^{p+3}).$$

□

Aquest resultat permet obtenir nous mètodes que incrementen l'ordre de convergència d'un mètode d'ordre p donat, ϕ .

Aplicant aquest procediment n vegades, l'expressió general pren la forma:

$$\begin{aligned} y_{k0} &= x_k \\ y_{k1} &= y_{k0} - \frac{f(y_{k0})}{f'(y_{k0})} \\ y_{k2} &= \phi(y_{k0}, y_{k1}) \\ y_{k,j+1} &= y_{kj} - \frac{f(y_{kj})}{\tilde{f}'(y_{k1})} ; \quad j = 2, 3, \dots, n+1 \\ x_{k+1} &= y_{k,j+1} \end{aligned}$$

3.2 Nous mètodes iteratius

Ara aplicarem la tècnica anterior al mètode de segon ordre de Newton, al mètode de tercer ordre presentat a [4] i al mètode de quart ordre de [52]. Els nous mètodes es referenciaran amb una lletra i el nombre de passos afegits realitzant aquest procediment.

Malgrat que es pot implementar en qualsevol mètode amb un primer pas de Newton, nosaltres l'hem particularitzat en tres casos:

1.- Partint del mètode de Newton, obtenim mètodes amb ordre de

convergència $2 + 2n$, els quals denotarem com Nn :

$$\begin{aligned}
 y_{k0} &= x_k \\
 y_{k1} &= y_{k0} - \frac{f(y_{k0})}{f'(y_{k0})} \\
 y_{k,j+1} &= y_{kj} - \frac{f(y_{kj})}{\widetilde{f}'(y_{k1})} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \\
 x_{k+1} &= y_{k,j+1}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

2- Considerant com a punt de partida el mètode de Traub [4], es poden aconseguir mètodes amb ordre de convergència $3 + 2n$, anomenats com Tn :

$$\begin{aligned}
 y_{k0} &= x_k \\
 y_{k1} &= y_{k0} - \frac{f(y_{k0})}{f'(y_{k0})} \\
 y_{k2} &= y_{k0} - \frac{f(y_{k0}) + f(y_{k1})}{f'(y_{k0})} \\
 y_{k,j+1} &= y_{kj} - \frac{f(y_{kj})}{\widetilde{f}'(y_{k1})} \quad j = 2, 3, \dots, n + 1 \\
 x_{k+1} &= y_{k,j+1}
 \end{aligned}$$

3- A partir del mètode de quart ordre [52], els mètodes que s'obtenen, als quals ens referirem com Cn , tenen ordre $4 + 2n$:

$$\begin{aligned}
 y_{k0} &= x_k \\
 y_{k1} &= y_{k0} - \frac{f(y_{k0})}{f'(y_{k0})} \\
 y_{k2} &= y_{k1} - \left(2 - \frac{f'(y_{k1})}{f'(y_{k0})}\right) \frac{f(y_{k1})}{f'(y_{k0})} \\
 y_{k,j+1} &= y_{kj} - \frac{f(y_{kj})}{\widetilde{f}'(y_{k1})} \quad j = 2, 3, \dots, n + 1 \\
 x_{k+1} &= y_{k,j+1}
 \end{aligned}$$

Cal remarcar que $N1$, és a dir el mètode de Newton amb un pas del nostre procediment és el mètode d'Ostrowski, el qual és òptim; i $N2$ és l'algorisme proposat per Grau i Diaz-Barrero en [53], però obtés de diferent forma.

3.3 Nous mètodes òptims

Aquesta tècnica pot emprar-se en mètodes els quals utilitzen $f(y_{k1})$ i $f'(y_{k1})$ per evitar avaluar el valor de la derivada resultant; en alguns casos es poden obtenir mètodes òptims. Per exemple, el mètode definit a [52] pot optimitzar-se com segueix:

$$\begin{aligned}
 y_{k0} &= x_k \\
 y_{k1} &= y_{k0} - \frac{f(y_{k0})}{f'(y_{k0})} \\
 y_{k2} &= y_{k1} - \left(2 - \frac{\tilde{f}'(y_{k1})}{f'(y_{k0})}\right) \frac{f(y_{k1})}{f'(y_{k0})} \\
 x_{k+1} &= y_{k2}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Teorema 6 *Siga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció suficientment suau en un entorn D de α , que és la solució de l'equació $f(x) = 0$. Aleshores, el mètode (3.5), on $\tilde{f}'(y_{k1})$ ve donada per (3.3), té ordre de convergència 4 i el mètode és òptim en el sentit de Traub.*

Demostració: Procedint com en els casos anteriors, calculem $f(x_k)$, $f'(x_k)$, $f(y_k)$, $\tilde{f}'(y_k)$.

Per tant, podem trobar l'expressió de l'error per al mètode proposat:

$$\begin{aligned}
 e_{k+1} &= (y_{k1} - \alpha) - \left(2 - \frac{\tilde{f}'(y_{k1})}{f'(y_{k0})}\right) \frac{f(y_{k1})}{f'(y_{k0})} = \\
 &= \frac{(5c_2^3 - c_1c_2c_3)}{c_1^3} e_k^4 - \frac{2(18c_2^4 - 16c_1c_3c_2^2 + c_1^2c_4c_2 + c_1^2c_3^2)}{c_1^4} e_k^5 + O(e_k^6)
 \end{aligned}$$

□

Així es demostra que aquest mètode, denotat per $MC0$, és òptim, i a més de la mateixa forma que abans, l'ordre del mètode pot ser incrementat repetidament en dues unitats, amb la tècnica proposada al Teorema 5 proporcionant-nos per a MCn ordres de convergència $4 + 2n$, evidentment en aquestos casos el mètode ja no serà òptim.

A més, en alguns casos, pot fer-se ús d'aquesta tècnica per aconseguir un mètode òptim, el qual era originalment un mètode no òptim de major

ordre. Açò ocorre, per exemple, amb el mètode de cinqué ordre proposat a [54], que es pot optimitzar com segueix:

$$\begin{aligned} y_{k0} &= x_k \\ y_{k1} &= y_{k0} - \frac{f(y_{k0})}{f'(y_{k0})} \\ y_{k2} &= y_{k1} - \left[1 + \left(\frac{f(y_{k1})}{f(y_{k0})} \right)^2 \right] \frac{f(y_{k1})}{\tilde{f}'(y_{k1})} \\ x_{k+1} &= y_{k2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

i de la mateixa forma que els casos anteriors, pot incrementar-se repetidament l'ordre en dues unitats, amb la tècnica proposada per Hn proveint ordres de convergència $4 + 2n$.

Teorema 7 *Siga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció suficientment suau en un entorn D de α , que és solució d'una equació $f(x) = 0$. Aleshores, el mètode (3.6), on $\tilde{f}'(y_{k1})$ pren l'expressió de (3.3), té ordre de convergència 4 i el mètode és òptim en el sentit de Traub.*

Demostració: Amb les expressions de $f(x_k)$, $f'(x_k)$, $f(y_k)$, $\tilde{f}'(y_k)$, calculem:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= (y_{k1} - \alpha) - \left(1 + \left(\frac{f(y_{k1})}{f(y_{k0})} \right)^2 \right) \frac{f(y_{k1})}{\tilde{f}'(y_{k1})} = \\ &= -\frac{c_2 c_3}{c_1^2} e_n^4 + \frac{4c_2^4 + 2c_1 c_3 c_2^2 - 2c_1^2 c_4 c_2 - 2c_1^2 c_3^2}{c_1^4} e_n^5 + O(e_k^6) \end{aligned}$$

□

3.4 Treballant amb el mètode de Jarratt

La tècnica anterior només pot aplicar-se en mètodes on el pas de Newton s'utilitza com a predictor, per amb un procediment similar pot aplicar-se per al mètode de Jarratt:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{2 f(x_k)}{3 f'(x_k)} \\ z_k &= x_k - \frac{1 f(x_k)}{2 f'(x_k)} \frac{3 f'(y_k) + f'(x_k)}{3 f'(y_k) - f'(x_k)} \end{aligned}$$

Del desenvolupament de Taylor:

$$f(z_k) \simeq f(x_k) + f'(x_k)(z_k - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(z_k - x_k)^2,$$

podem obtenir l'expressió per a la segona derivada:

$$f''(x_k) \simeq 2 \frac{f(z_k) - f(x_k) - f'(x_k)(z_k - x_k)}{(z_k - x_k)^2}$$

El desenvolupament de Taylor per a $f'(z_k)$:

$$f'(z_k) \simeq f'(x_k) + f''(x_k)(z_k - x_k)$$

Substituint en aquesta les expressions per a $f''(x_k)$ i $z_k - x_k$:

$$f'(z_k) \simeq \frac{f'(x_k)}{f(x_k)} \frac{f'(x_k)(4f(z_k) - 5f(x_k)) + 3f'(y_k)(3f(x_k) - 4f(z_k))}{3f'(y_k) + f'(x_k)} := \tilde{f}'(z_k)$$

Aquesta aproximació per a $f'(z_k)$, en permet estendre la tècnica del mètode de Jarratt. Així podem obtenir d'un mètode d'ordre p , altres nous d'ordre $p+2$ afegint en cada pas adicional un única avaluació funcional.

Malauradament, en aquest cas, aquest no és un procediment general per a tots els mètodes on el primer pas de Jarratt és utilitzat com a predictor.

3.5 Exemples numèrics

Ara estudiarem l'aplicació dels mètodes abans definits a la resolució de les següents equacions:

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10;$	$\alpha = 1.365230013414096\dots$
$f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2;$	$\alpha = 0.257530285439860\dots$
$f_3(x) = (x - 1)^3 - 1;$	$\alpha = 2$
$f_4(x) = x^2 + \sin\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{1}{4};$	$\alpha = 0.409992017989137\dots$
$f_5(x) = 10xe^{-x^2} - 1;$	$\alpha = 1.679630610428449\dots$
$f_6(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1;$	$\alpha = -1$

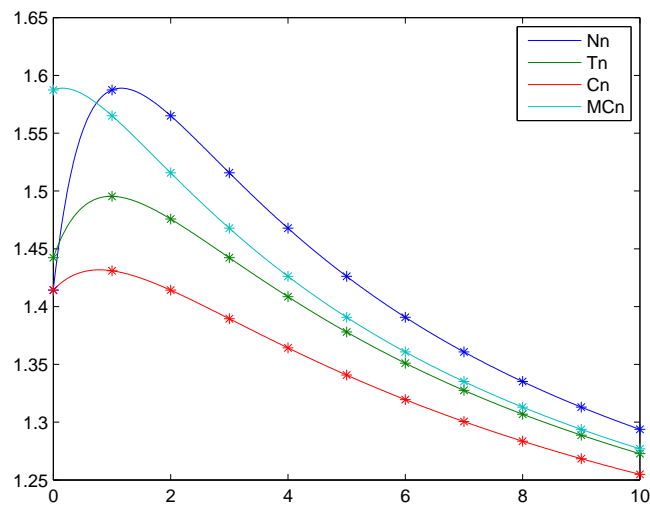


Figura 3.1: Evolució de l'eficiència amb l'increment de passos

El càlculs s'han realitzat amb MATLAB 2010a emprant aritmètica de precisió variable amb 5000 dígits i considerant com a criteri de parada adient $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-1000}$.

L'error, la diferència del valor de la funció entre els dos últims iterats, l'ordre de convergència computacionalment aproximat i el nombre d'iteracions, tal i com s'han definit, que s'obtenen d'aplicar alguns d'aquests mètodes a les funcions d'exemple es mostren a les Taules 3.1, mètodes derivats del de Newton, i 3.2, mètode derivats d'un d'ordre 3, on es pot observar que s'assoleix l'ordre esperat en tots els casos.

A la Taula 3.3 es mostra l'evolució de l'eficiència amb l'augment del nombre de passos per als diferents mètodes. En aquesta taula es pot comprovar que s'assoleix la major eficiència E per a $n = 1$, per a tots els mètodes excepte per a l'últim. Per a MCn i els mètodes que ja són òptims, la seua eficiència no pot millorar-se. Aquesta evolució es mostra gràficament a la Figura 3.1.

3.6 Comportament dinàmic

En [55], els autors analitzen la dinàmica d'un mètode de tercer ordre consistent en un pas de Newton seguit d'un segon pas del mateix tipus, però mantenint la derivada. Ara, estudiarem la dinàmica del mètode d'ordre quatre construït seguint l'esquema (3.2) on el primer pas és el corresponent al mètode de Newton:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)f(y_k)}{(f(x_k) - 2f(y_k))f'(x_k)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aquest mètode iteratiu pot descriure's amb al següent operador:

$$M_f(x) = N_f(x) - \frac{f(x)f(N_f(x))}{(f(x) - 2f(N_f(x)))f'(x)} \quad (3.8)$$

on $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Aleshores, $x_{k+1} = M_f(x_k)$. La dinàmica del mètode per a l'equació $f(x) = 0$ depèn dels punts fixos de l'operador M_f .

Fàcilment es comprova que les arrels simples de f són punts fixos de M_f .

La derivada de l'operador és

$$\begin{aligned} M'_f(x) &= -\frac{f(N_f(x))}{f(x) - 2f(N_f(x))} + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} + \frac{f(x)f(N_f(x))f''(x)}{(f(x) - 2f(N_f(x)))f'(x)^2} \\ &\quad - \frac{f(x)^2f'(N_f(x))f''(x)}{(f(x) - 2f(N_f(x)))f'(x)^3} + \frac{f(x)f(N_f(x))\left(f'(x) - \frac{2f(x)f'(N_f(x))f''(x)}{f'(x)^2}\right)}{(f(x) - 2f(N_f(x)))^2f'(x)} \end{aligned}$$

Si fem ús del fet de què si x es troba pròxim a una arrel simple f , $f(N_f(x)) = O(f(x)^2)$, s'obté que $M'_f(x) = 0$ en les arrels de f , i doncs, aquestes arrels es constitueixen com punts superatractors de l'operadors d'iteració. Així, la dinàmica del mètode depèn dels punts fixos de M_f , els quals en general no es limiten a les arrels de f .

Estudiarem el comportament del mètode (3.7) aplicat a polinomis segon i tercer grau. El següent resultat ens permet reduir l'anàlisi a un pocs casos canònics.

Teorema 8 *Siga $f(x)$ una funció analítica, i $T(x) = \alpha x + \beta$ amb $\alpha \neq 0$ un mapa afí. Definim $g = f \circ T$. Aleshores $M_f = T \circ M_g \circ T^{-1}$ és a dir, M_f i M_g són afins conjugats per T .*

Demostració: Mostrem que $T^{-1}(M_f(x)) = M_g(T^{-1}(x))$. Si denotem com $u = T^{-1}(x) = \frac{x-\beta}{\alpha}$, aleshores $g(u) = f(x)$. Fent ús de la regla de la cadena, tenim que $g'(u) = f'(T(u))T'(u) = \alpha f'(x)$. Ara, provem que la funció d'iteració de Newton de f i g són afins conjugades per T :

$$N_g(T^{-1}(x)) = N_g(u) = u - \frac{f(u)}{g'(u)} = \frac{x-\beta}{\alpha} - \frac{f(x)}{\alpha f'(x)} = T^{-1}(N_f(x))$$

Per tant, tenim que $g(N_g(u)) = g(T^{-1}(N_f(x))) = f(N_f(x))$, i finalment,

$$\begin{aligned} M_g(T^{-1}(x)) &= M_g(u) = N_g(u) - \frac{g(u)g(N_g(u))}{(g(u) - 2g(N_g(u)))g'(u)} \\ &= \frac{N_f(x) - \beta}{\alpha} - \frac{f(x)f(N_f(x))}{(f(x) - 2(f(N_f(x))))\alpha f'(x)} \\ &= T^{-1}(M_f(x)). \end{aligned}$$

□

Aquest teorema manté la seua validesa per a $f(x) = c(f \circ T)(x)$, on $c \neq 0$. Aquest resultat permet reduir l'estudi de la dinàmica de M_f d'una família de funcions a casos més simples. A saber, si f és un polinomi quadràtic, l'anàlisi pot reduir-se a un dels següents casos particular: $f_-(x) = x^2 - 1$, $f_0(x) = x^2$ o $f_+(x) = x^2 + 1$ depenent de si els polinomis tenen dues, una (doble) o ninguna arrel real. De forma similar, qualsevol polinomi cúbic es redueix a un dels següents polinomis cúbics més senzills $f_0(x) = x^3$, $f_+(x) = x^3 + x$, $f_-(x) = x^3 - x$ o a un membre de la família uniparamètrica de mapes cúbics $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$.

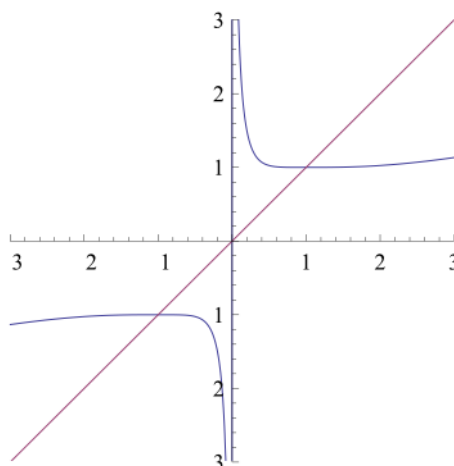


Figura 3.2: Punts fixos de M_{x^2-1} .

Examinem els diferents casos per separat:

a. Polinomis quadràtics

a1. **Cas** $f_0 = x^2$

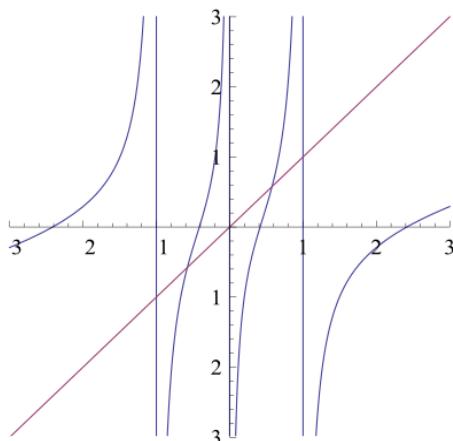
En aquest cas $M_{f_0}(x) = \frac{x}{4}$ és una contracció lineal. L'arrel doble de f_0 és l'únic punt fix de f_0 . Es tracta d'un atractor global, però no d'un superatractor.

a2. **Cas** $f_-(x) = x^2 - 1$

La funció d'iteració per a f_- és $M_{f_-}(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{4x(x^2 + 1)}$. Els seus únics punts fixos són les arrels de f_- , els quals són superatractors. M_{f_-} té una asymptota vertical en $x = 0$ (vore Figura 3.2).

a3. **Cas** $f_+(x) = x^2 + 1$

La funció d'iteració $M_{f_+}(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{4x(x^2 - 1)}$ presenta dos punts fixos $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, els quals són repulsors ja que $M'_{f_+}(x_{1,2}) = 4 > 1$. Hi ha tres asymptotes verticals en $x = 0, \pm 1$. La dinàmica és caòtica perquè f_+ no té arrels reals (vore Figura 3.3)

Figura 3.3: Punts fixos de M_{x^2+1} .b. Polinomis cúbicsb1. **Cas** $f_0(x) = x^3$

En aquest cas $M_{f_0}(x) = \frac{14x}{33}$ és una contracció lineal. L'arrel múltiple de f_0 és l'únic punt fix de f_0 . És un atractor global, però no un superatractor.

b2. **Cas** $f_+(x) = x^3 + x$

En aquest cas, la funció d'iteració que pren la forma $M_{f_+}(x) = \frac{2x^5(7x^4-2x^2-1)}{(3x^2+1)(11x^6+7x^4+5x^2+1)}$ presenta com un punt fix superatractor l'única arrel de f_+ . Per tant, la dinàmica és trivial.

b3. **Cas** $f_-(x) = x^3 - x$

Ara $M_{f_-}(x) = \frac{2x^5(7x^4+2x^2-1)}{(3x^2-1)(11x^6-7x^4+5x^2-1)}$ té cinc punts fixos, les tres arrels de f_- : $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$, són superatractors, i els altres dos, punts fixos estranys, $x_{4,5} \simeq \pm 0,507592$, són repulsors. A més, M_{f_-} té asymptota en els punts $a_{1,2} \simeq \pm 0,504360$ i $a_{3,4} \simeq \pm 0,577350$ (vore Figura 3.4)

b4. **Cas** $f_\gamma(x) = x^3 + \gamma x + 1$

La funció f_γ té dos punts crítics: $x_{\gamma+,-} = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{3}}$. El punt crític positiu és també una arrel doble de f_γ per el valor del paràmetres

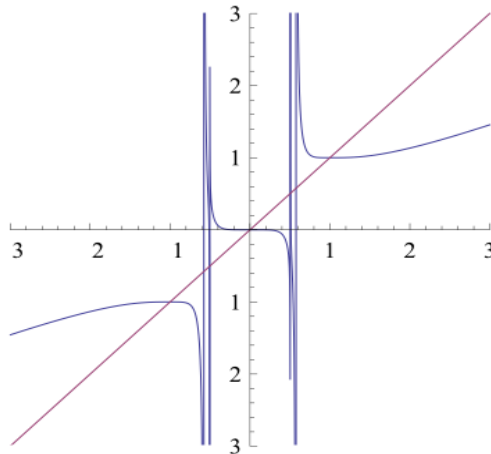


Figura 3.4: Punts fixos i asímptotes de M_{x^3-x} .

$\gamma_* = \frac{-3}{\sqrt{34}} \simeq -1.88988$. Així, en principi, podem considerar tres casos:

- Si $\gamma < \gamma_*$, el polinomi f_γ té tres arrels reals.
- Si $\gamma = \gamma_*$, el polinomi f_γ té una arrel positiva doble i una arrel simple negativa.
- Si $\gamma > \gamma_*$, el polinomi f_γ té sols una arrel real.

Per a $\gamma < \gamma_*$, la funció d'iteració M_{f_γ} té cinc punts fixos separats per quatre asímptotes verticals (Figura 3.5). Els punts fixos que són les tres arrels de f_γ , del tipus superatractors, i els altres dos punts fixos estranys són repulsors.

Per a $\gamma = \gamma_*$, dues asímptotes verticals separen els tres punts fixos de M_{f_γ} (vore Figura 3.6). L'arrel simple de f_γ és superatractora, l'arrel doble és atractora i l'últim punt fix es comporta com a repulsor.

Per al cas $\gamma_* < \gamma < -0,988$, la funció iteració M_{f_γ} té cinc punts (vore Figura 3.7). L'única arrel de f_γ és un punt fix superatractor. Els punts aliens són, en general, repulsors però per a valors grans de γ en

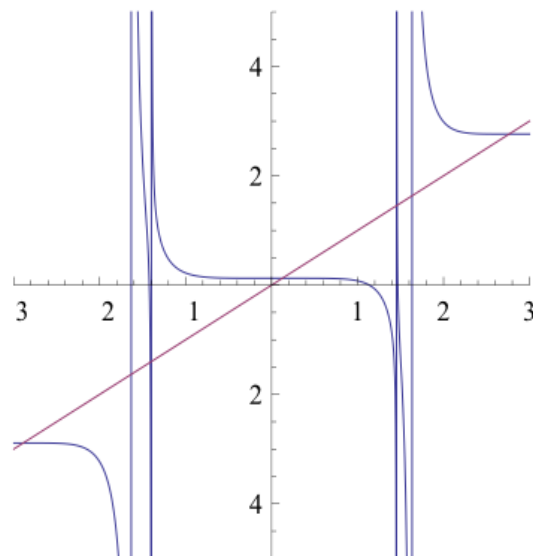


Figura 3.5: Punts fixos i asímptotes de M_{x^3-8x+1} .

aquest interval, un punt fix pot tornar-se atractiu fins juntar-se amb un altre punt fix, i que ambdós desapareguen. Per aquest rang de valors, el mètode presenta el comportament típic de la iteració quadràtica produint bifurcacions i període doblant en aquesta regió, i no aconseguint convergir a l'arrel de la funció per alguns valors inicials de l'interval. La Figura 3.8 mostra els valors dels iterats després de cent iteracions depenent del valor de γ .

Per $-0,988 < \gamma < -0,338$, la funció M_{f_γ} té tres punts fixos com es mostra a la Figura 3.9. Com abans, els punts fixos estranys són repulsors en general, però per a γ pròxims a $-0,338$ els dos punts fixos s'ajunten i desapareixen, produint un comportament caòtic en un interval estret de valors de γ .

Per a $\gamma > -0,388$, l'únic punt fix del mètode és l'arrel del polinomi i aquest és superatractor (vore Figura 3.10).

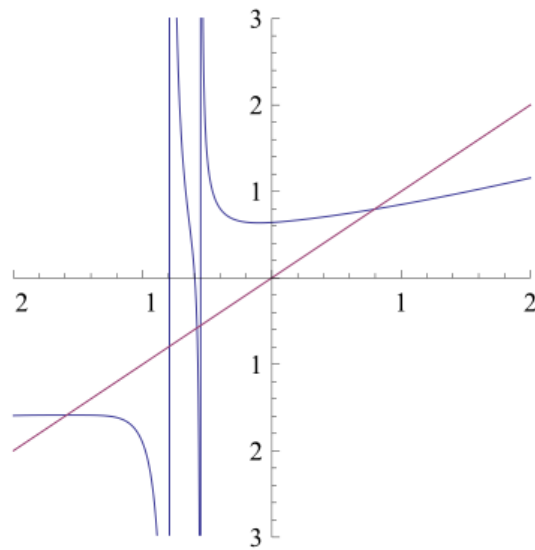


Figura 3.6: Punts fixos i asímptotes de $M_{x^3 - \gamma_* x + 1}$.

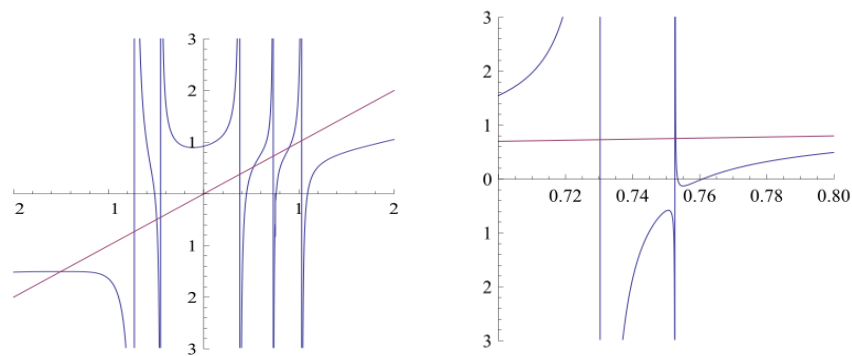


Figura 3.7: Punts fixos i asímptotes de $M_{x^3 - 1.6x + 1}$. Existeixen dues asímptotes molt juntes a un punt fix pròxim a la segona asímptota com es pot observar en la imatge detall de la dreta.

La funció d'iteració té sis asímptotes per a $\gamma_* < \gamma < -1,225$, quatre asímptotes per a $-1,225 < \gamma < 0$, dues per a $0 < \gamma < 0,655$, i ninguna per a $\gamma > 0,655$. Aleshores, la dinàmica es simplifica a mesura que γ creix.

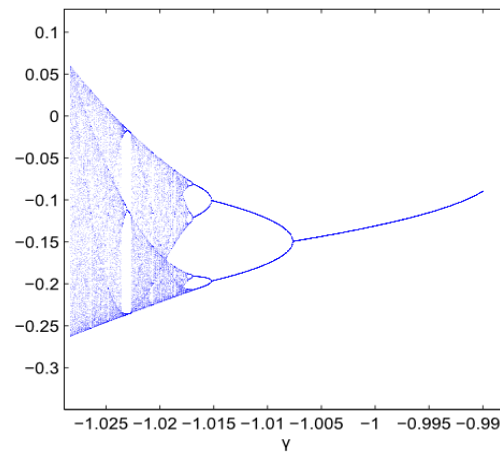


Figura 3.8: Valors després de 100 iteracions.

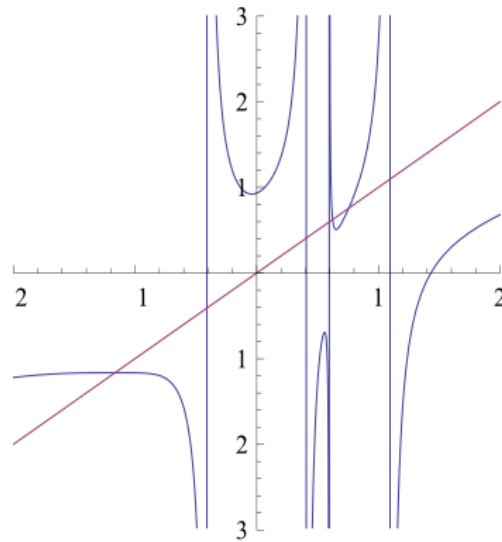


Figura 3.9: Punts fixos i asímptotes de $M_{x^3 - 0.5x + 1}$. La forma de la funció entre les dues últimes asímptotes suggereix la presència de caos.

Finalment, per a $\gamma > 0$, l'únic punt fix del mètode és altrament l'arrel del polinomi i és superatractor. En no haver asímptotes verticals la dinàmica és trivial (vore Figura 3.11).

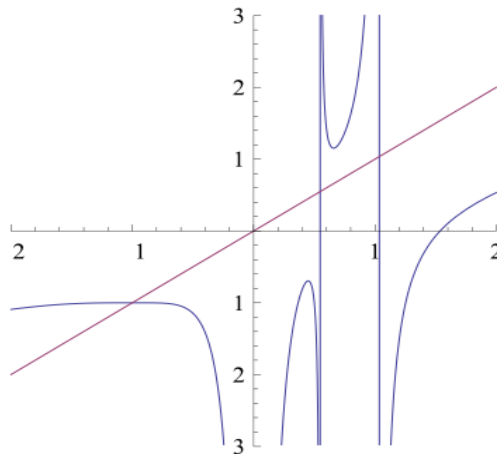


Figura 3.10: Punts fixos i asímptotes de M_{x^3+1} .

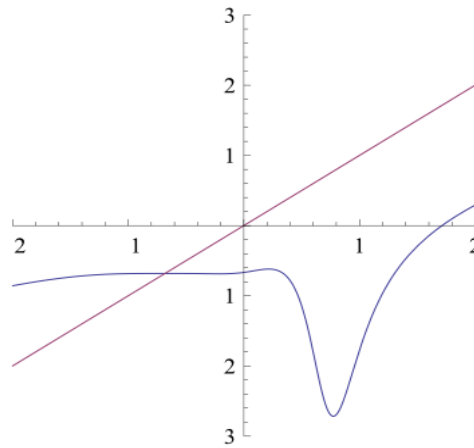


Figura 3.11: M_{x^3+x+1} té un punt fix i cap asímptota.

3.7 Conclusió

En aquest capítol hem presentat una tècnica que permet incrementar l'ordre d'un mètode iteratiu realitzant passos addicionals que no requereixen del càlcul de noves derivades. La tècnica pot ser utilitzada repetida-

ment, incrementant en dues unitats l'ordre de convergència en cada nou pas. Aplicant aquesta tècnica, hem presentat alguns nous mètodes i els hem comparat amb mètodes coneguts emprant en alguns exemples. Els resultats confirmen l'ordre de convergència provat teòricament i mostren el bon comportament d'aquests mètodes. L'estudi dinàmic mostra el seu bon comportament global.

		$N0$	$N1$	$N2$
$f_1,$ $x_0 = 2.25$	$ x_{k+1} - x_k $	1.0510e-125	2.1929e-134	2.6433e-101
	$ f(x_{k+1}) $	8.9422e-250	3.6212e-133	4.3650e-100
	ACOC	2.0000	4.0000	5.9998
$\alpha = 1.36523$	iter	9	5	4
f_2 $x_0 = -1$	$ x_{k+1} - x_k $	7.8546e-107	5.1183e-232	2.8750e-195
	$ f(x_{k+1}) $	2.1786e-213	1.9340e-231	1.0864e-194
	ACOC	2.0000	4.0000	6.0000
$\alpha = 0.25753$	iter	8	5	4
$f_3,$ $x_0 = 1.75$	$ x_{k+1} - x_k $	2.1026e-136	3.2442e-153	5.5195e-116
	$ f(x_{k+1}) $	1.3263e-271	9.7326e-153	1.6559e-115
	ACOC	2.0000	4.0000	5.9999
$\alpha = 2$	iter	9	5	4
$f_4,$ $x_0 = 0.75$	$ x_{k+1} - x_k $	5.8276e-155	6.5389e-155	3.0839e-119
	$ f(x_{k+1}) $	3.3905e-309	6.6651e-155	3.1435e-119
	ACOC	2.0000	4.0000	5.9999
$\alpha = 0.40999$	iter	9	5	4
$f_5,$ $x_0 = 1.25$	$ x_{k+1} - x_k $	9.5288e-158	1.8191e-134	9.7041e-101
	$ f(x_{k+1}) $	2.3992e-314	5.0278e-134	2.6821e-100
	ACOC	2.0000	4.0000	5.9998
$\alpha = 1.67963$	iter	9	5	4
$f_6,$ $x_0 = -0.6$	$ x_{k+1} - x_k $	3.5103e-130	1.3038e-223	4.8346e-202
	$ f(x_{k+1}) $	1.2322e-259	7.8229e-223	2.9007e-201
	ACOC	2.0000	4.0000	6.0000
$\alpha = -1$	iter	8	5	4

Taula 3.1: Resultats numèrics per a les funcions de f_1 a f_6 per als derivats del mètode de Newton.

		$T0$	$T1$	$T2$
$f_1,$ $x_0 = 2.25$ $\alpha = 1.36523$	$ x_{k+1} - x_k $ $ f(x_{k+1}) $ ACOC iter	5.8254e-285 9.6198e-284 3.0000 7	1.4973e-255 2.4726e-254 5.0000 5	2.3084e-138 3.8119e-137 6.9998 4
f_2 $x_0 = -1$ $\alpha = 0.25753$	$ x_{k+1} - x_k $ $ f(x_{k+1}) $ ACOC iter	7.9992e-170 3.0226e-169 3.0000 6	1.3729e-101 5.1876e-101 5.0000 4	9.9847e-288 3.7729e-287 7.0000 4
$f_3,$ $x_0 = 1.75$ $\alpha = 2$	$ x_{k+1} - x_k $ $ f(x_{k+1}) $ ACOC iter	4.8626e-210 1.4588e-209 3.0000 7	8.4123e-201 2.5237e-200 5.0000 5	2.2641e-120 6.7924e-120 7.0006 4
$f_4,$ $x_0 = 0.75$ $\alpha = 0.40999$	$ x_{k+1} - x_k $ $ f(x_{k+1}) $ ACOC iter	3.2188e-121 3.2810e-121 3.0000 6	7.0611e-312 7.1975e-312 5.0000 5	1.1673e-168 1.1899e-168 6.9999 4
$f_5,$ $x_0 = 1.25$ $\alpha = 1.67963$	$ x_{k+1} - x_k $ $ f(x_{k+1}) $ ACOC iter	6.7986e-125 1.8791e-124 3.0000 6	1.4760e-288 4.0796e-288 5.0000 5	6.4574e-150 1.7848e-149 6.9999 4
$f_6,$ $x_0 = -0.6$ $\alpha = -1$	$ x_{k+1} - x_k $ $ f(x_{k+1}) $ ACOC iter	1.0030e-209 6.0183e-209 3.0000 6	6.1587e-112 3.6952e-111 5.0000 4	2.0257e-322 1.2203e-321 7.0001 4

Taula 3.2: Resultats numèrics per a les funcions de f_1 a f_6 per als mètode obtinguts a partir d'un de tercer ordre.

Mètode	d	E	Mètode	d	E
$N0$	2	$2^{1/2} = 1.414214\dots$	$C0$	4	$4^{1/4} = 1.414214\dots$
$N1$	3	$4^{1/3} = 1.587401\dots$	$C1$	5	$6^{1/5} = 1.430969\dots$
$N2$	4	$6^{1/4} = 1.565085\dots$	$C2$	6	$8^{1/6} = 1.414214\dots$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Nn	$2 + n$	$(2(n + 1))^{\frac{1}{2+n}} \rightarrow 1$	Cn	$4 + n$	$(4 + 2n)^{\frac{1}{4+n}} \rightarrow 1$
Mètode	d	E	Mètode	d	E
$T0$	3	$3^{1/3} = 1.442250\dots$	$MC0$	3	$4^{1/3} = 1.587401\dots$
$T1$	4	$5^{1/4} = 1.495349\dots$	$MC1$	4	$6^{1/4} = 1.565085\dots$
$T2$	5	$7^{1/5} = 1.475773\dots$	$MC2$	5	$8^{1/5} = 1.515717\dots$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Tn	$3 + n$	$(3 + 2n)^{\frac{1}{3+n}} \rightarrow 1$	MCn	$3 + n$	$(4 + 2n)^{\frac{1}{3+n}} \rightarrow 1$

Taula 3.3: Evolució de l'eficiència amb n



Creació d'una família òptima d'ordre 4¹

Índex

4.1	Noves famílies de mètodes iteratius	52
4.2	Eficiència computacional	59
4.3	Exemples numèrics	62
4.4	Dinàmica dels mètodes	63
4.5	Conclusió	66

EN moltes situacions, una única equació no és suficient per modelitzar un problema físic, així que cal recórrer a models que involucren sistemes d'equacions no lineals. Altrament, com ha resultat de la discretització d'equacions amb derivades ordinàries, amb derivades parcials, o equacions integrals s'obtenen sistemes d'equacions no lineals.

¹La base d'aquest capítol és l'article [56] i la comunicació **New families of iterative methods with fourth and sixth order of convergence and their dynamics** presentada al congrés *13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, celebrat del 24 al 27 de juny de 2013 a Almeria.

La recerca de mètodes iteratius amb alt ordre de convergència per aproximar una solució d'un sistema no lineal de la forma $F(x) = 0$ és un camp actiu en l'anàlisi numèrica. Actualment, el rang d'aplicacions on es requereix emprar un alt nivell de precisió numèric s'està expandint.

En aquest capítol, generalitzarem la tècnica utilitzada en [57], obtenint una nova família de mètodes iteratius d'ordre quatre. Els procediments emprats en [35, 58] per incrementar l'ordre de convergència d'un mètode iteratiu, que consisteix en realitzar un altre pas de Newton evitant l'avaluació de la matriu jacobiana per obtenir la màxima eficiència, no funciona per al mètode òptim presentat a [57], així que proposem un nou procediment per incrementar l'ordre amb un eficiència raonable.

Òbviament, incloure aquest nou pas en un mètode iteratiu comporta incloure més avaluacions funcionals i, per tant, haver de comprovar que el guany en l'ordre de convergència justifica l'increment del cost computacional. Un estudi més exhaustiu del cost i l'eficiència dels mètodes iteratius per a sistemes no lineals es pot trobar a [59, 60]. No obstant això, introduïrem un nou terme en el cost de l'expressió per a considerar les operacions entre matrius i vectors que es donen en alguns mètodes ací considerats.

4.1 Noves famílies de mètodes iteratius

El nostre objectiu és desenvolupar mètodes d'alt ordre per a sistemes no lineals, motivats per les tècniques exposades a la Secció 2.6 del Capítol 3 de [29] per obtenir mètodes iteratius multipunt del tipus Jarratt en el cas unidimensional. Nosaltres intentarem aplicar algunes de les idees presents a [61] i [62] per al mètode de quart ordre publicat recentment per Sharma et al. [57]. Primerament, generalitzarem aquesta tècnica introduint un nou terme a la seua proposta, obtenint una nova família de mètodes d'ordre 4.

Així, considerarem la família de mètodes expressada per:

$$y_n = x_n - \theta \Gamma_{x_n} F(x_n) \quad (4.1)$$

$$H(x_n, y_n) = \Gamma_{x_n} F'(y_n) \quad (4.2)$$

$$G_s(x_n, y_n) = s_1 I + s_2 H(y_n, x_n) + s_3 H(x_n, y_n) + s_4 H(y_n, x_n)^2 \quad (4.3)$$

$$z_n = x_n - G_s(x_n, y_n) \Gamma_{x_n} F(x_n) \quad (4.4)$$

$$x_{n+1} = z_n \quad (4.5)$$

on $\Gamma_{x_n} = F'(x_n)^{-1}$, i θ , s_1 , s_2 , s_3 , s_4 són constants ha determinar per aconseguir que la família de mètodes siga de l'ordre desitjat. Noteu que, en el cas unidimensional, solament avaluaríem tres funcions, $f(x_n)$, $f'(x_n)$ i $f'(y_n)$, així la família és òptima en el sentit de la conjectura de Kung i Traub, [13].

A partir del desenvolupament en sèrie de Taylor, es pot provar el següent resultat respecte l'ordre de convergència.

Teorema 9 *Siga $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció suficientment diferenciable en el sentit de Fréchet en un entorn convex de D , que continga α , que és solució del sistema $F(x) = 0$, la matriu jacobiana del qual siga continua i no singular en D . Aleshores, per a una aproximació inicial suficientment pròxima a α , la família de mètodes definida per (4.1-4.5) té ordre de convergència local 4 per a la següent relació entre els paràmetres: $s_1 = \frac{5-8s_2}{8}$, $s_3 = \frac{s_2}{3}$, $s_4 = \frac{9-8s_2}{24}$; $\forall s_2 \in \mathbb{R}$ i per a $\theta = \frac{2}{3}$.*

L'equació de l'error que s'obté és:

$$e_{n+1} = \frac{(64s_2 + 117)c_2^3 - 81c_1c_3c_2 + 9c_1^2c_4}{81c_1^3} e_n^4 + O(e_n^5)$$

on $e_n = x_n - \alpha$ i $c_k = \frac{F^{(k)}(\alpha)}{k!}$, $k \geq 1$.

Demostració: Calculant el desenvolupament de Taylor de $F(x_n)$ al voltant de α i considerant que $F(\alpha) = 0$, s'obté que

$$F(x_n) = c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5), \quad (4.6)$$

on $c_k = \frac{F^{(k)}(\alpha)}{k!} \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Diferenciant, obtenim la següent expressió

$$F'(x_n) = c_1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + O(e_n^5)$$

i ara, partint del següent desenvolupament de Taylor:

$$\begin{aligned} \Gamma_{x_n} F(x_n) &= e_n - \frac{c_2}{c_1} e_n^2 + \frac{2(c_2^2 - c_1c_3)}{c_1^2} e_n^3 \\ &\quad + \frac{-4c_2^3 + 7c_1c_2c_3 - 3c_1^2c_4}{c_1^3} e_n^4 + O(e_n^5) \end{aligned}$$

Substituint, aquesta expressió en el primer pas del mètode (4.1), tenim:

$$\begin{aligned} y_n - \alpha &= (1 - \theta) e_n + \frac{c_2 \theta}{c_1} e_n^2 + \frac{2 \theta (c_1c_3 - c_2^2)}{c_1^2} e_n^3 \\ &\quad + \frac{\theta (4c_2^3 - 7c_1c_2c_3 + 3c_1^2c_4)}{c_1^3} e_n^4 + O(e_n^5) \end{aligned}$$

I, aleshores

$$\begin{aligned} F'(y_n) &= c_1 - 2(c_2(\theta - 1))e_n + \left(3c_3(\theta - 1)^2 + \frac{2c_2^2\theta}{c_1}\right)e_n^2 \\ &\quad - \frac{2}{c_1^2}(2c_1^2c_4(\theta - 1)^3 + 2c_2^3\theta + c_1c_2c_3\theta(3\theta - 5))e_n^3 \quad (4.7) \\ &\quad + \frac{1}{c_1^3}\left(6c_1^2c_4c_2\theta(2\theta^2 - 4\theta + 3) + 8c_2^4\theta + c_1c_3c_2^2\theta(15\theta - 26)\right. \\ &\quad \left.+ c_1^2(\theta - 1)(5c_1c_5(\theta - 1)^3 - 12c_3^2\theta)\right)e_n^4 + O(e_n^5) \end{aligned}$$

i substituint ara en (4.2) s'obté:

$$\begin{aligned} H(x_n, y_n) &= \Gamma_{x_n} F'(y_n) = 1 - \frac{2c_2\theta}{c_1} e_n + \frac{3\theta(c_1c_3(\theta - 2) + 2c_2^2)}{c_1^2} e_n^2 \\ &\quad - \frac{4(\theta(c_1^2c_4(\theta^2 - 3\theta + 3) + c_1c_3c_2(3\theta - 7) + 4c_2^3))}{c_1^3} e_n^3 \quad (4.8) \\ &\quad + \frac{1}{c_1^4}\theta(2c_1^2c_4c_2(10\theta^2 - 24\theta + 25) + c_1^2(5c_1c_5(\theta^3 - 4\theta^2 \\ &\quad + 6\theta - 4) + c_3^2(30 - 21\theta))) + c_1c_3c_2^2(39\theta - 100) + 40c_2^4 e_n^4 \\ &\quad + O(e_n^5) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
H(y_n, x_n) = \Gamma_{y_n} F'(x_n) = & 1 + \frac{2\theta c_2}{c_1} e_n + \frac{\theta ((4\theta - 6)c_2^2 - 3(\theta - 2)c_1 c_3)}{c_1^2} e_n^2 \\
& + \frac{4\theta}{c_1^3} \left(2(\theta^2 - 3\theta + 2)c_2^3 + (-3\theta^2 + 9\theta - 7)c_1 c_3 c_2 + (\theta^2 \right. \\
& \left. - 3\theta + 3)c_1^2 c_4 \right) e_n^3 + \frac{1}{c_1^4} \theta \left(4(4\theta^3 - 18\theta^2 + 25\theta - 10)c_2^4 + (-36\theta^3 \right. \\
& \left. + 156\theta^2 - 223\theta + 100)c_1 c_3 c_2^2 + 2(8\theta^3 - 34\theta^2 + 48\theta - 25)c_1^2 c_4 c_2 \right. \\
& \left. + c_1^2 \left((9\theta^3 - 36\theta^2 + 57\theta - 30)c_3^2 - 5(\theta^3 - 4\theta^2 + 6\theta - 4)c_1 c_5 \right) \right) e_n^4 \\
& + O(e_n^5)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Aquestes expressions (4.8) i (4.9) es poden de substituir a (4.3):

$$\begin{aligned}
G_s(x_n, y_n) = & s_1 I + s_2 H(x_n, y_n) + s_3 H(y_n, x_n) + s_4 H(x_n, y_n)^2 \\
= & (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) + \frac{2(s_2 - s_3 + 2s_4)\theta c_2}{c_1} e_n + \frac{2\theta}{c_1^2} \left((3(s_3 \right. \\
& \left. + 2s_4(\theta - 1)) + s_2(2\theta - 3))c_2^2 - 3(s_2 - s_3 + 2s_4)(\theta - 2)c_1 c_3 \right) e_n^2 \\
& + \frac{4\theta}{c_1^3} \left(2(-2s_3 + s_2(\theta^2 - 3\theta + 2) + s_4(4\theta^2 - 9\theta + 4))c_2^3 \right. \\
& \left. - (s_3(3\theta - 7) + s_2(3\theta^2 - 9\theta + 7) + s_4(9\theta^2 - 24\theta + 14))c_1 c_3 c_2 \right. \\
& \left. + (s_2 - s_3 + 2s_4)(\theta^2 - 3\theta + 3)c_1^2 c_4 \right) e_n^3 + \frac{1}{c_1^4} \theta \left(4(10s_3 + s_2(4\theta^3 \right. \\
& \left. - 18\theta^2 + 25\theta - 10) + s_4(20\theta^3 - 72\theta^2 + 75\theta - 20))c_2^4 + (s_3(39\theta \right. \\
& \left. - 100) + s_2(-36\theta^3 + 156\theta^2 - 223\theta + 100) + 2s_4(-72\theta^3 \right. \\
& \left. + 270\theta^2 - 315\theta + 100) \right) c_1 c_3 c_2^2 + 2(s_3(10\theta^2 - 24\theta + 25) \\
& \left. + s_2(8\theta^3 - 34\theta^2 + 48\theta - 25) + 2s_4(12\theta^3 - 46\theta^2 + 60\theta \right. \\
& \left. - 25))c_1^2 c_4 c_2 + c_1^2 (3(s_3(10 - 7\theta) + s_2(3\theta^3 - 12\theta^2 + 19\theta - 10) \right. \\
& \left. + s_4(9\theta^3 - 36\theta^2 + 50\theta - 20))c_3^2 - 5(s_2 - s_3 + 2s_4)(\theta^3 - 4\theta^2 \right. \\
& \left. + 6\theta - 4)c_1 c_5 \right) e_n^4 + O(e_n^5)
\end{aligned}$$

Substituint a (4.4) i (4.5), l'equació de l'error pren la següent expressió:

$$\begin{aligned}
e_{n+1} = & (-s_1 - s_2 - s_3 - s_4 + 1) e_n + \frac{1}{c_1}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - 2s_2\theta + 2s_3\theta \\
& - 4s_4\theta)c_2 e_n^2 + \frac{1}{c_1^2} \left((-3s_3\theta^2 + 6s_4\theta^2 + 6s_3\theta - 12s_4\theta + 2s_1 + 2s_3 + 2s_4 \right. \\
& \left. + s_2(3\theta^2 - 6\theta + 2))c_1c_3 - 2(2s_2\theta^2 + 6s_4\theta^2 - 4s_2\theta + 4s_3\theta - 8s_4\theta + s_1 \right. \\
& \left. + s_2 + s_3 + s_4)c_2^2 \right) e_n^3 + \frac{1}{c_1^3} \left((-32s_4\theta^3 + 84s_4\theta^2 + 26s_3\theta - 52s_4\theta + 4s_1 \right. \\
& \left. + 4s_3 + 4s_4 + s_2(-8\theta^3 + 28\theta^2 - 26\theta + 4))c_2^3 - (-36s_4\theta^3 - 15s_3\theta^2 \right. \\
& \left. + 102s_4\theta^2 + 38s_3\theta - 76s_4\theta + 7s_1 + 7s_3 + 7s_4 + s_2(-12\theta^3 + 39\theta^2 \right. \\
& \left. - 38\theta + 7))c_1c_3c_2 + (4s_3\theta^3 - 8s_4\theta^3 - 12s_3\theta^2 + 24s_4\theta^2 + 12s_3\theta \right. \\
& \left. - 24s_4\theta + 3s_1 + 3s_3 + 3s_4 + s_2(-4\theta^3 + 12\theta^2 - 12\theta + 3))c_1^2c_4 \right) e_n^4 \\
& + O(e_n^5)
\end{aligned}$$

Finalment, per aconseguir el mètode de quart ordre, haurem de solucionar el sistema donat per les condicions C_1, C_2, C_3 i C_4 . Si, a més a més, es satisfieren les condicions C_5, C_6 i C_7 es podria obtenir un ordre de convergència major.

$$C_1 : (1 - s_1 - s_2 - s_3 - s_4) = 0$$

$$C_2 : (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - 2s_2\theta + 2s_3\theta - 4s_4\theta) = 0$$

$$C_3 : (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - 4s_2\theta + 4s_3\theta - 8s_4\theta + 2s_2\theta^2 + 6s_4\theta^2) = 0$$

$$C_4 : (2s_1 + 2s_3 + 2s_4 + 6s_3\theta - 12s_4\theta - 3s_3\theta^2 + 6s_4\theta^2 + s_2(2 - 6\theta + 3\theta^2)) = 0$$

$$\begin{aligned}
C_5 : & (4s_1 + 4s_3 + 4s_4 + 26s_3\theta - 52s_4\theta + 84s_4\theta^2 - 32s_4\theta^3 \\
& + s_2(4 - 26\theta + 28\theta^2 - 8\theta^3)) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_6 : & (7s_1 + 7s_3 + 7s_4 + 38s_3\theta - 76s_4\theta - 15s_3\theta^2 + 102s_4\theta^2 - 36s_4\theta^3 \\
& + s_2(7 - 38\theta + 39\theta^2 - 12\theta^3)) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_7 : & (3s_1 + 3s_3 + 3s_4 + 12s_3\theta - 24s_4\theta - 12s_3\theta^2 + 24s_4\theta^2 + 4s_3\theta^3 - 8s_4\theta^3 \\
& + s_2(3 - 12\theta + 12\theta^2 - 4\theta^3)) = 0
\end{aligned}$$

Malauradament, el sistema conformat per les set condicions no té solució. Malgrat tot, les condicions C_1, C_2, C_3 i C_4 proveeixen una solució

paramètrica:

$$\theta = \frac{2}{3}; s_1 = \frac{5 - 8s_2}{8}; s_3 = \frac{s_2}{3}; s_4 = \frac{9 - 8s_2}{24}, \quad \forall s_2 \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

D'aquesta forma, hem obtingut una família de mètodes òptims de quart ordre, l'expressió de l'error de la qual és:

$$e_{n+1} = \frac{(64s_2 + 117)c_2^3 - 81c_1c_3c_2 + 9c_1^2c_4}{81c_1^3} e_n^4 + O(e_n^5) \quad (4.11)$$

□

Ara ens interessa la millora de l'ordre de convergència d'aquesta família de mètodes, per tant, substituïrem el darrer pas (el qual és trivial) del mètode iteratiu de ordre 4 (4.5) per un nou pas semblant al de (4.4)

$$x_{n+1} = z_n - G_t(x_n, y_n)\Gamma_{y_n}F(z_n) \quad (4.12)$$

on

$$G_t(x_n, y_n) = t_1I + t_2H(x_n, y_n) + t_3H(y_n, x_n) + t_4H(x_n, y_n)^2 \quad (4.13)$$

Per a cadascun dels valors de s_2 , es troba una relació entre les constants t_1 , t_2 , t_3 i t_4 proporcionant una família de mètodes d'ordre sis, així com mostra el següent resultat:

Teorema 10 *Considerant les mateixes condicions que el Teorema 9, la família biparamètrica de mètodes de tres passos (4.12)-(4.13) té ordre de convergència local sis per a la següent relació entre les constants: $t_2 = -\frac{3+8t_1}{8}$, $t_3 = \frac{15-8t_1}{24}$, $t_4 = \frac{9+4t_1}{12}$; $\forall (s_2, t_1) \in \mathbb{R}^2$. L'equació vectorial de l'error pot escriure's així:*

$$e_{n+1} = \frac{-(64s_2 + 117)c_2^3 + 81c_1c_3c_2 - 9c_1^2c_4}{81c_1^4} c_3 e_n^6 + O(e_n^7)$$

on $c_k = \frac{F^{(k)}(\alpha)}{k!}$, $k \geq 1$

Demostració: Reescrivint l'expressió de l'error de la demostració anterior, tenim que:

$$\begin{aligned}
z_n - \alpha = & \frac{((64s_2 + 117)c_2^3 - 81c_1c_3c_2 + 9c_1^2c_4)}{81c_1^3} e_n^4 + \frac{2}{243c_1^4} \left(-2(352s_2 \right. \\
& + 387)c_2^4 + 144(4s_2 + 9)c_1c_3c_2^2 - 270c_1^2c_4c_2 + 9c_1^2(4c_1c_5 - 27c_3^2) \left. \right) e_n^5 \\
& + \frac{2}{243c_1^5} (7(448s_2 + 297)c_2^5 - (5056s_2 + 5625)c_1c_3c_2^3 + (832s_2 \\
& + 1953)c_1^2c_4c_2^2 - 9c_1^2c_2(45c_1c_5 - (128s_2 + 315)c_3^2) + 9c_1^3(7c_1c_6 \\
& - 99c_3c_4)) e_n^6 + O(e_n^7)
\end{aligned}$$

Raonant com en el teorema previ, obtenim els desenvolupaments per als termes de (4.12) i (4.13). Finalment, queda l'expressió de l'error dependent dels paràmetres:

$$\begin{aligned}
e_{n+1} = x_{n+1} - z_n = & - \frac{((64s_2 + 117)c_2^3 - 81c_1c_3c_2 + 9c_1^2c_4)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1)}{81c_1^3} e_n^4 \\
& - \frac{2}{243c_1^4} \left(c_2^4(-64s_2(12t_1 + 10t_2 + 14t_3 + 8t_4 - 11) + 9(99t_1 + 73t_2 \right. \\
& + 125t_3 + 47t_4 - 86)) + 9c_1c_3c_2^2(64s_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1) + 9(17t_1 \\
& + 15t_2 + 19t_3 + 13t_4 - 16)) - 9c_1^2c_4c_2(31t_1 + 29t_2 + 33t_3 + 27t_4 - 30) \\
& + 9c_1^2(4c_1c_5 - 27c_3^2)(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1) \left. \right) e_n^5 + \frac{1}{729c_1^5} \left(-2c_2^5(64s_2(165t_1 \right. \\
& + 107t_2 + 231t_3 + 57t_4 - 147) + 9(813t_1 + 287t_2 + 1443t_3 - 135t_4 - 693)) \\
& + 3c_1c_3c_2^3(64s_2(171t_1 + 139t_2 + 203t_3 + 107t_4 - 158) + 9(1431t_1 + 859t_2 \\
& + 2051t_3 + 335t_4 - 1250)) - 6c_1^2c_4c_2^2(832s_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1) \\
& + 3(707t_1 + 573t_2 + 849t_3 + 447t_4 - 651)) + 9c_1^2c_2(2c_1c_5(143t_1 + 127t_2 \\
& + 3(53t_3 + 37t_4 - 45)) - 3c_3^2(256s_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1) + 9(75t_1 + 59t_2 \\
& + 91t_3 + 43t_4 - 70))) - 27c_1^3(14c_1c_6(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1) - c_3c_4(199t_1 \\
& + 191t_2 + 3(69t_3 + 61t_4 - 66))) \left. \right) e_n^6 + O(e_n^7)
\end{aligned}$$

Imposant les següents condicions:

$$C8 : t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1 = 0,$$

$$C9 : 64s_2(12t_1 + 10t_2 + 14t_3 + 8t_4 - 11) + 9(99t_1 + 73t_2 + 125t_3 + 47t_4 - 86) = 0$$

$$C10 : 64s_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1) + 9(17t_1 + 15t_2 + 19t_3 + 13t_4 - 16) = 0$$

$$C11 : 31t_1 + 29t_2 + 33t_3 + 27t_4 - 30 = 0$$

$$C12 : 64s_2(165t_1 + 107t_2 + 231t_3 + 57t_4 - 147) + 9(813t_1 + 287t_2 + 1443t_3 - 135t_4 - 693) = 0$$

$$C13 : 64s_2(171t_1 + 139t_2 + 203t_3 + 107t_4 - 158) + 9(1431t_1 + 859t_2 + 2051t_3 + 335t_4 - 1250) = 0$$

$$C14 : 832s_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1) + 3(707t_1 + 573t_2 + 849t_3 + 447t_4 - 651) = 0$$

$$C15 : 143t_1 + 127t_2 + 3(53t_3 + 37t_4 - 45) = 0$$

$$C16 : 53t_3 + 37t_4 - 45 = 0$$

$$C17 : 256s_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 1) + 9(75t_1 + 59t_2 + 91t_3 + 43t_4 - 70) = 0$$

$$C18 : 199t_1 + 191t_2 + 3(69t_3 + 61t_4 - 66) = 0$$

Podem trobar les següents solucions:

$$t_2 = \frac{1}{8}(-8t_1 - 3), t_3 = \frac{1}{24}(15 - 8t_1), t_4 = \frac{1}{12}(4t_1 + 9), \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}$$

Per aquestos valors dels paràmetres, l'equació de l'error ve expressada per:

$$e_{n+1} = \frac{c_3 \left(-(64s_2 + 117)c_2^3 + 81c_1c_3c_2 - 9c_1^2c_4 \right) e_n^6}{81c_1^4} + O(e_n^7)$$

la qual prova que el mètode és de sisé ordre de convergència. \square

Observació: Remarquem el fet que si bé el paràmetre s_2 del primer pas del procés iteratiu apareix en aquesta última equació de l'error, i per tant, pot reduir la magnitud d'aquest error; en general, per a cap valor de s_2 es pot aconseguir un mètode de major ordre.

4.2 Eficiència computacional

Amb la intenció de comparar els diferents mètodes, estudiarem la seua eficiència. Emprarem l'índex d'eficiència introduït a [59] i [60], donades per $E = p^{1/C}$, on p és l'ordre de convergència i C és el cost computacional per iteració. Per a un sistema de n equacions no lineals amb n incògnites, l'expressió de C és:

$$C(\mu_0, \mu_1, n) = \mu_0 a_0 n + \mu_1 a_1 n^2 + P(n)$$

Mètode	s_1	s_2	s_3	s_4	t_1	t_2	t_3	t_4
M1 ₄	-1/2	9/8	3/8	0	-	-	-	-
M2 ₄	5/8	0	0	3/8	-	-	-	-
M1 ₆	-1/2	9/8	3/8	0	-9/4	15/8	11/8	0
M2 ₆	5/8	0	0	3/8	-9/4	15/8	11/8	0

Taula 4.1: Paràmetres que defineixen els mètodes seleccionats.

on a_0 i a_1 representen el nombre d'avaluacions de $F(x)$ i $F'(x)$ respectivament, $P(n)$ és el nombre de productes per iteració i μ_0 i μ_1 són les relacions entre els productes i les avaluacions requerides per expressar el valor de $C(\mu_0, \mu_1, n)$ com a productes.

Els millors mètodes de la família definida per (4.1-4.5) des del punt de vista de l'eficiència computacional són els obtesos per a $s_2 = \frac{9}{8}$ i $s_2 = 0$. El primer mètode és el proposat en [57], el qual es denotarà com $M1_4$. El segon mètode el denotarem com $M2_4$.

Per a cadascun dels mètodes de la família de quart ordre, podem aconseguir una nova família diferent de mètodes de sisé ordre amb el nou pas (4.12-4.13). Aquest nou pas simplifica la seua eficiència computacional per al valor $t_1 = -\frac{9}{4}$, que aplicat sobre els dos mètodes considerats $M1_4$ i $M2_4$ proporcionarà els nous mètodes, denotats per $M1_6$ i $M2_6$ respectivament. La Taula 4.1 mostra el valor dels paràmetres dels quatre mètodes considerats per a l'experiència numèrica.

Expressarem el cost computacional per iteració amb la mateixa notació que la utilitzada en [59], on p_0 denota el nombre de productes escalars per iteració, p_1 el nombre total d'operacions corresponent a la resolució completa de sistemes d'equacions lineals (descomposició LU i resolució de dos sistemes triangulars) i p_2 el nombre associat a la resolució de dos sistemes lineals quan la descomposició LU ja està efectuada en un altre pas de la mateixa iteració.

Tot i això, nosaltres incorporarem un nou factor p_3 que és el nombre de productes de matrius per vectors. Aquest incorpora un nou terme en l'expressió total del nombre de productes:

$$P(n) = \frac{n}{6}(2p_1n^2 + (3p_1(k+1) + 6p_2))n + 6p_0 + p_1(3k-5) + 6p_2(k-1) + 6p_3n$$

on es suposa que un quocient és equivalent a k productes.

La Taula 4.2 mostra que l'expressió del cost computacional del mètodes analitzats.

Mètode	a_0	a_1	p_0	p_1	p_2	p_3	$C(\mu_0, \mu_1, n)$
M ₂	1	1	0	1	0	0	$1/6n(-5 + 6\mu_0 + 3n + 6\mu_1n + 2n^2 + 3k(1+n))$
M ₁₄	1	2	4	2	1	1	$1/3n(4 + 3\mu_0 + 9n + 6\mu_1n + 2n^2 + 3k(2+n))$
M ₂₄	1	2	3	2	1	1	$1/3n(1 + 3\mu_0 + 9n + 6\mu_1n + 2n^2 + 3k(2+n))$
M ₁₆	2	2	7	2	3	2	$1/3n(7 + 6\mu_0 + 18n + 6\mu_1n + 2n^2 + 3k(4+n))$
M ₂₆	2	2	6	2	4	2	$1/3n(1 + 6\mu_0 + 21n + 6\mu_1n + 2n^2 + 3k(5+n))$

Taula 4.2: Cost computacional dels diferents mètodes.

Assumim els valors estàndards dels paràmetres μ_0 i μ_1 , les Taules 4.3 i 4.4 mostren l'eficiència resultant.

	M ₂	M ₁₄	M ₂₄	M ₁₆	M ₂₆
$n = 2$	1.05846	1.03818	1.0404	1.03116	1.03011
$n = 4$	1.01292	1.00933	1.00959	1.00833	1.00789
$n = 6$	1.00491	1.00377	1.00383	1.00356	1.00336
$n = 9$	1.00177	1.00143	1.00145	1.00143	1.00135
$n = 12$	1.00083	1.0007	1.0007	1.00072	1.00069
$n = 15$	1.00045	1.00039	1.00039	1.00042	1.0004
$n = 18$	1.00028	1.00024	1.00024	1.00026	1.00025

Taula 4.3: Índex d'eficiència per a diferents valors de n per a $\mu_0 = 1.7$ i $\mu_1 = 0.7$.

	M ₂	M1 ₄	M2 ₄	M1 ₆	M2 ₆
$n = 2$	1.02123	1.02377	1.02462	1.01808	1.01772
$n = 4$	1.0071	1.00703	1.00717	1.00591	1.00569
$n = 6$	1.00329	1.00309	1.00313	1.00279	1.00266
$n = 8$	1.00179	1.00164	1.00166	1.00156	1.00148
$n = 12$	1.00069	1.00063	1.00064	1.00064	1.00061
$n = 16$	1.00034	1.00031	1.00031	1.00033	1.00031
$n = 20$	1.00019	1.00017	1.00017	1.00019	1.00018

Taula 4.4: Índex d'eficiència per a diferents valors de n per a $\mu_0 = 11.5$ i $\mu_1 = 1$.

4.3 Exemples numèrics

En aquesta secció, aplicarem el mètodes prèviament presentats per a resoldre la següent equació integral:

$$y(t) = \frac{t}{e} + \int_0^1 2tse^{-y(s)^2} ds$$

Discretitzant aquesta equació, obtenim els següent sistemes d'equacions no lineals:

$$y_i = \frac{t_i}{e} + 2t_i \sum_{j=1}^n p_j t_j e^{-y_j^2} \quad (4.14)$$

on $t_i \in [0, 1]$, $y_i = y(t_i)$, $p_i \in \mathbb{R}$ for $i = 1, 2, \dots, n$.

Aplicarem a aquest sistema no lineal (4.14) el mètode de Newton, i el més eficient d'entre els nostres mètodes per a dos punts inicials diferents: $x_{0a} = (0.5, 0.5, \dots, 0.5)$ i $x_{0b} = (0.5, -0.5, 0.5, -0.5, \dots)$. La discretització de la integral s'ha realitzat mitjançant la fórmula de Simpson amb 30 subintervalles. Els càlculs han fet ús d'aritmètica de precisió variable amb 1000 dígit de mantissa. La Taula 4.5 mostra els increments dels iterats, l'ordre de convergència computacional *ACOC* i el nombre d'iteracions fins aconseguir la tolerància 10^{-125} .

		$M2$	$M1_4$	$M2_4$	$M1_6$	$M2_6$
x_{0a}	$\ x_{k+1} - x_k\ $	2.1225e-214	3.4406e-272	3.8187e-272	4.3999e-206	4.2176e-206
	ACOC	2.0000	4.0000	4.0000	6.0000	6.0000
	iter	8	5	5	4	4
x_{0b}	$\ x_{k+1} - x_k\ $	5.1892e-222	1.5384e-162	6.6729e-180	4.8624e-152	8.1328e-163
	ACOC	2.0000	4.0000	4.0000	5.9999	6.0000
	iter	9	5	5	4	4

Taula 4.5: Resultats numèrics per a dues estimacions inicials.

No es mostren diferències significatives entre els dos mètodes del mateix ordre de convergència per al primer punt d'iteració inicial, ni en el nombre d'iteracions, ni en l'increment. Malgrat tot, el mètode $M2_4$ es comporta lleugerament millor que $M1_4$ per a la segon estimació inicial, així com els mètodes millorats de sisé ordre.

4.4 Dinàmica dels mètodes

En aquesta secció, estudiarem la dinàmica del mètodes iteratius $M1_4$, $M2_4$, $M1_6$ i $M2_6$ quan els apliquem a un sistema no lineal 2×2 i compararem aquestes amb la dinàmica del mètode de Newton. Així mostrarem que el mètodes són generalment convergent i representarem le seues conques de convergència.

Considerem que el sistema quadràtic següent representa la intersecció entre dues hipèrboles

$$\left. \begin{aligned} (x-3)^2 - 16y^2 &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

En aquest sistema, els eixos d'una hipèrbola són paral·lels a les asímptotes de l'altra. El sistema presenta quatre arrels reals simples. Una solució està pròxima al baricentre de les altres tres. Quan existeixen menys solucions, és a dir arrels múltiples, l'ordre de convergència és menor a l'esperat i fins i tot la convergència falla en certes regions del pla.

Per a comparar, hem executat els mètodes iterant amb una tolerància de 10^{-6} realitzant com a màxim 100 iteracions. El punt inicials

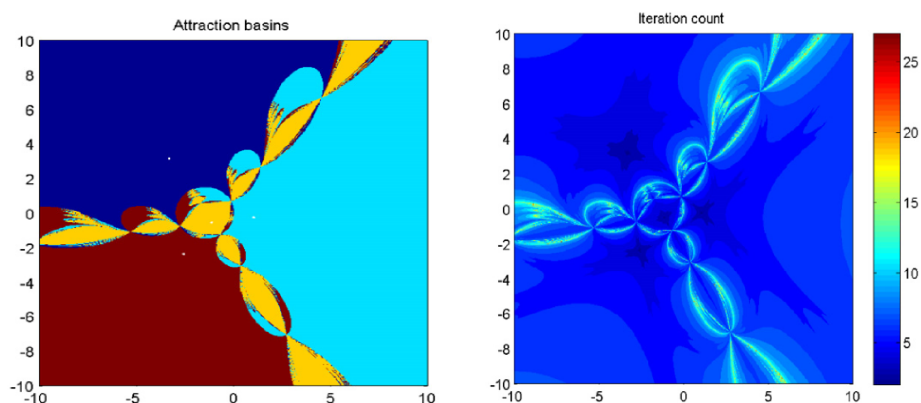


Figura 4.1: Conques d'atracció i nombre d'iteracions per al mètode de Newton.

formen una graella de 512×512 en un rectangle definit sobre el pla real. Les conques d'atracció s'han acolorit en consonància al punt fix al qual convergeixen.

La figura 4.1 mostren les conques d'atracció i el nombre d'iteracions per al mètode de Newton. Les figures 4.2, i 4.3 mostren les conques d'atracció dels mètodes M_{14} , M_{24} , M_{16} i M_{26} , respectivament.

S'observa que la complexitat de les conques augmenta amb l'ordre, però les regions de convergència cobreix quasi tot el pla. Els mètodes M_{24} i M_{26} tenen conques lleugerament més complexes que les seues corresponents M_{14} i M_{16} . Les quatre arrels són superatractores per a tots els mètodes analitzats. Per a un estudi més profund, considerarem l'existència d'òrbites periòdiques i la convergència en casos en els que es presenten arrels dobles.

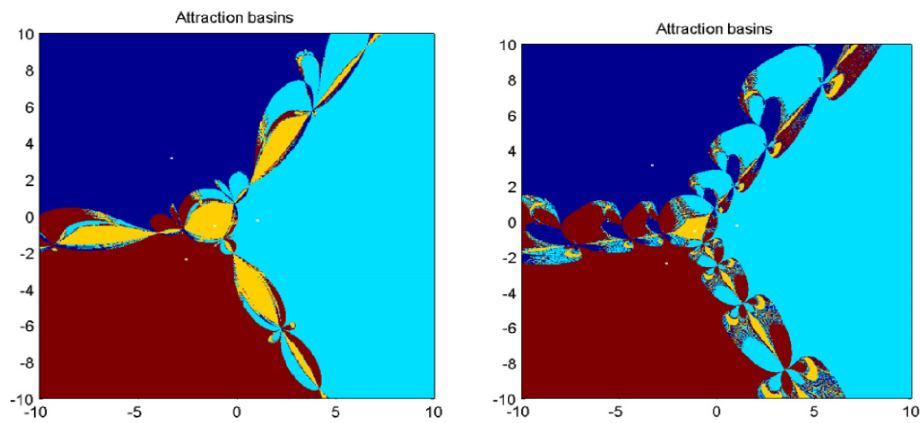


Figura 4.2: Conques d'atracció per als mètodes M_{14} (esquerra) i M_{24} (dreta)

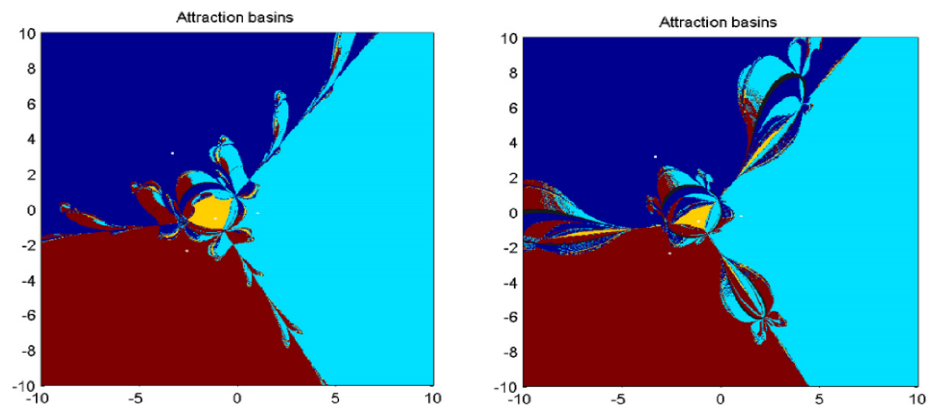


Figura 4.3: Conques d'atracció per als mètodes M_{16} (esquerra) i M_{26} (dreta)

4.5 Conclusió

Com es pot observar en les Taules 4.3 i 4.4, el mètode de Newton $M2$, manté un alt ordre d'eficiència més alt que els altres mètodes. El nostre mètode $M2_4$ sempre obté millors índexs que $M1_4$ ja que realitza menor nombre d'operacions. Malgrat això, $M2_6$ no assoleix l'eficiència de $M1_6$. Encara que els mètodes de quart ordre són bons per a sistemes amb un reduït nombre d'operacions, quan més complex és un sistema, més avantatges proporcionen els mètodes d'ordre sis. De fet, els mètodes de quart ordre són tan bons com els d'ordre sis per a sistemes entre nou i dotze equacions. A partir d'aquest punt, per a sistemes més grans, aquests últims mètodes superen els mètodes de menor ordre. En concret, pel que fa a l'índex d'eficiència, el mètode $M1_6$ es troba més prop que els altres al mètode de Newton.

Les proves dinàmiques mostren que les propietats de la convergència global no empitjoren amb la millora de l'ordre de convergència.



Increment de la convergència per sistemes evitant el càlcul del jacobià¹

Índex

5.1	Operadors de diferències dividides	68
5.2	Resultat principal	69
5.3	Aproximacions per diferències dividides	72
5.4	Nous mètodes iteratius	74
5.5	Experiència numèrica	76
5.6	Estudi dinàmic	80
5.7	Conclusions	85

Com hem mostrat en el Capítol 3 ([51]), es pot demostrar que afegint una modificació del pas de Newton en un mètode iteratiu d'ordre p , s'obté un mètode d'ordre $p + 2$. En eixe mateix capítol, modificaven eixe resultat

¹La base d'aquest capítol és l'article [63] i la comunicació **Dynamics of some iterative methods for nonlinear systems** presentada al congrés *XXIII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones XIII Congreso de Matemática Aplicada*, celebrat del 9 al 13 de setembre de 2013 a Castelló.

per evitar, en el cas escalar, l'avaluació de la derivada de certes funcions millorant així la seua eficiència. Ara, pretenem aconseguir un resultat multidimensional semblant, és a dir, una tècnica que, evitant el càlcul de les matrius jacobianes, permet assolir mètodes de major ordre. No tots els operadors de diferències dividides serviran per aproximar la matriu jacobiana i preservar l'increment en l'ordre de convergència, però en proposarem un operador de diferències dividides que ens permetrà mantindre el resultat anterior.

També demostrarem que aquesta tècnica pot aplicar-se repetidament, s'obtenen així nous mètodes lliures de derivades amb ordre $p + 2n$ aplicant-la n vegades a mètodes d'ordre p .

5.1 Operadors de diferències dividides

Siga F una funció $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ suficientment diferenciable en un conjunt convex $D \subset \mathbb{R}^n$ on es troba α , zero simple de F .

Per aproximar la derivada, $F'(x)$, considerarem l'operador introduït en [64] donat per:

$$[x + h, x; F] = \int_0^1 F'(x + th) dt, \quad (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

Integrant la sèrie de Taylor de $F'(x + th)$ al voltant de x obtenim:

$$[x + h, x; F] = F'(x) + \frac{1}{2}F''(x)h + \frac{1}{6}F'''(x)h^2 + O(h^3).$$

D'aquesta forma, hem obtingut un operador en diferències dividides que aproxima el Jacobià $F'(x)$ amb ordre h . Un canvi de variable ens permet expressar l'operador per al cas simètric:

$$[x + h, x - h; F] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F'(x + th) dt, \quad (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

aleshores, intergrant el desenvolupament de Taylor per a la nova expressió:

$$[x + h, x - h; F] = F'(x) + \frac{1}{6}F'''(x)h^2 + O(h^3), \quad (5.2)$$

que és, una aproximació de segon ordre per al Jacobià, la qual s'anomena aproximació simètrica.

5.2 Resultat principal

En [51] es presenta una tècnica per incrementar des de p fins a $p + 2$ l'ordre de convergència d'un mètode iteratiu. El procediment consisteix en compondre el mètode iteratiu d'ordre p amb una modificació del mètode de Newton que afegeix només una nova avaluació funcional, i així, evitant el càlcul de noves derivades.

Ara pretenem mostrar que aquesta millora en l'ordre de convergència es manté si es substituïxen totes les derivades per aproximacions en diferències dividides simètriques. Aleshores, es poden construir nous mètodes iteratius lliures de derivades.

La expressió iterativa del nou mètode és la següent:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - [x_n + h, x_n - h; F]^{-1} F(x_n), \\ z_n &= \phi(x_n, y_n), \\ w_n &= z_n - [y_n + h, y_n - h; F]^{-1} F(z_n), \end{aligned} \tag{5.3}$$

on $[u + h, u - h; F]$ és una aproximació simètrica per diferències dividides per a $F'(u)$ i ϕ és una funció d'iteració d'un mètode que convergeix amb ordre p . Establim el següent resultat:

Teorema 11 *Siga $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció suficientment suau en un entorn d' α , zero simple de $F(x) = 0$, en $D \subset \mathbb{R}^n$ i el mètode iteratiu $z_n = \phi(x_n, y_n)$ amb ordre de convergència p . Aleshores, el mètode (5.3) té ordre de convergència $p + 2$.*

Demostració: Considerem el desenvolupament de Taylor de $F(x_n)$ al voltant d' α :

$$F(x_n) = \Gamma e_n + A_2 \Gamma e_n^2 + A_3 \Gamma e_n^3 + A_4 \Gamma e_n^4 + A_5 \Gamma e_n^5 + O(e_n^6),$$

sent $\Gamma = F'(\alpha)$, $e_n = x_n - \alpha$ i $A_k = \frac{F'(\alpha)^{-1} F^{(k)}(\alpha)}{k!} \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k = 2, 3$.

Aleshores, les derivades de $F(x_n)$ en l'entorn D d' α prenen la forma:

$$\begin{aligned} F'(x_n) &= \Gamma + 2A_2\Gamma e_n + 3A_3\Gamma e_n^2 + 4A_4\Gamma e_n^3 + 5A_5\Gamma e_n^4 + O(e_n^5), \\ F''(x_n) &= 2A_2\Gamma + 6A_3\Gamma e_n + 12A_4\Gamma e_n^2 + 20A_5\Gamma e_n^3 + O(e_n^4), \\ F'''(x_n) &= 6A_3\Gamma + 24A_4\Gamma e_n + 60A_5\Gamma e_n^2 + O(e_n^3). \end{aligned}$$

Substituint aquestes expressions en (5.2) amb $x = x_n$ i $h = F(x_n)$, l'equació de l'error per a l'aproximació de diferències dividides simètriques queda:

$$\begin{aligned} [x_n + h, x_n - h; F] &= \Gamma + 2A_2\Gamma e_n + A_3\Gamma (\Gamma^2 + 3) e_n^2 \\ &\quad + (2A_2A_3\Gamma^3 + 4A_4 (\Gamma^2 + 1) \Gamma) e_n^3 \\ &\quad + (2A_3^2\Gamma^3 + A_2^2A_3\Gamma^3 + 8A_2A_4\Gamma^3 \\ &\quad + 5A_5 (2\Gamma^2 + 1) \Gamma) e_n^4 + O(e_n^5), \end{aligned}$$

i aleshores es pot deduir l'expressió de l'operador invers:

$$\begin{aligned} [x_n + h, x_n - h; F]^{-1} &= \frac{1}{\Gamma} (I - 2A_2e_n + (4A_2^2 - (3 + \Gamma^2) A_3) e_n^2 \\ &\quad + 2(-4A_2^3 + (6 + \Gamma^2) A_2A_3 - 2(1 + \Gamma^2) A_4) e_n^3 \\ &\quad + (16A_2^4 - (36 + 5\Gamma^2) A_2^2A_3 + (9 + 4\Gamma^2 + \Gamma^4) A_3^2 \\ &\quad + 8(2 + \Gamma^2) A_2A_4 - 5(1 + 2\Gamma^2) A_5) e_n^4) + O(e_n^5). \end{aligned}$$

Ara, realitzarem un pas amb modificat de Newton emprant diferències dividides simètriques resultant:

$$\begin{aligned} y_n - \alpha &= x_n - \alpha - [x_n + h, x_n - h; F]^{-1} F(x_n) = A_2e_n^2 \\ &\quad + (A_3 (\Gamma^2 + 2) - 2A_2^2) e_n^3 + (-A_3A_2 (\Gamma^2 + 7) + A_4 (4\Gamma^2 + 3) + 4A_2^3) e_n^4 \\ &\quad + (A_3A_2^2 (3\Gamma^2 + 20) - 2A_4A_2 (2\Gamma^2 + 5) + 2A_5 (5\Gamma^2 + 2) \\ &\quad - A_3^2 (\Gamma^4 + 3\Gamma^2 + 6) - 8A_2^4) e_n^5 + O(e_n^6), \end{aligned}$$

Açò demostra que la convergència quadràtica roman quan aproximem la matriu jacobiana en el mètode de Newton per diferències dividides simètriques.

Substituint l'expressió prèvia en el desenvolupament de Taylor de $F(y_n)$ en α , obtenim:

$$\begin{aligned} F(y_n) &= A_2\Gamma e_n^2 + \Gamma (A_3 (\Gamma^2 + 2) - 2A_2^2) e_n^3 + \Gamma (-A_3A_2 (\Gamma^2 + 7) \\ &\quad + A_4 (4\Gamma^2 + 3) + 5A_2^3) e_n^4 + \Gamma (A_3A_2^2 (5\Gamma^2 + 24) - 2A_4A_2 (2\Gamma^2 + 5) \\ &\quad + 2A_5 (5\Gamma^2 + 2) - A_3^2 (\Gamma^4 + 3\Gamma^2 + 6) - 12A_2^4) e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned}$$

L'aproximació per a $F'(y_n)$ per a les diferències dividides simètriques és $[y_n + h, y_n - h; F]$ amb $h = F(y_n)$, així tenim que:

$$\begin{aligned} [y_n + h, y_n - h; F] &= F'(y_n) + \frac{1}{6}F'''(y_n)h^2 = \Gamma + 2A_2^2\Gamma e_n^2 \\ &\quad + 2A_2\Gamma(A_3(\Gamma^2 + 2) - 2A_2^2)e_n^3 - A_2\Gamma(A_3A_2(\Gamma^2 + 11) \\ &\quad - 2A_4(4\Gamma^2 + 3) - 8A_2^3)e_n^4 + 2A_2\Gamma(A_3A_2^2(\Gamma^2 + 14) \\ &\quad - 2A_4A_2(2\Gamma^2 + 5) + 2(A_3^2\Gamma^2 + A_5(5\Gamma^2 + 2)))e_n^5 \\ &\quad + O(e_n^6). \end{aligned}$$

Així, si considerem el desenvolupament de Taylor per a $F(z_n)$:

$$\begin{aligned} F(z_n) &= b\Gamma^2 + A_2\Gamma^2(\Gamma + 1)b^2 + \Gamma^2(A_3(\Gamma^2 + 1) + 2A_2^2\Gamma)b^3 \\ &\quad + \Gamma^2(A_4(\Gamma^3 + 1) + A_2^3\Gamma + A_3A_2\Gamma(3\Gamma + 2))b^4 + \Gamma^2(A_5(\Gamma^4 + 1) \\ &\quad + 2A_4A_2\Gamma(2\Gamma^2 + 1) + 3A_3^2\Gamma^2 + A_3A_2^2\Gamma(3\Gamma + 2))b^5 + O(b^6), \end{aligned}$$

on $b = z_n - \alpha = Ke_n^p + O(e_n^{p+1})$, ja que el mètode de partida era d'ordre p . L'últim pas ens proporciona l'equació de l'error del mètode:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= w_n - \alpha = z_n - \alpha - [y_n + h, y_n - h; F]^{-1}F(z_n) \\ &= \left(2A_2^2\Gamma e_n^2 + 2A_2\Gamma(A_3(\Gamma^2 + 2) - 2A_2^2)e_n^3 + A_2\Gamma(-A_3A_2(\Gamma^2 + 11) \right. \\ &\quad + 2A_4(4\Gamma^2 + 3) + 4A_2^3)e_n^4 + 2A_2\Gamma(-3A_3A_2^2(\Gamma^2 - 2) \\ &\quad - 2A_4A_2(2\Gamma^2 + 5) + 2(A_3^2\Gamma^2 + A_5(5\Gamma^2 + 2)))e_n^5 \\ &\quad \left. + O(e_n^6)\right)(Ke_n^p + O(e_n^{p+1})) = 2A_2^2K\Gamma e_n^{p+2} + O(e_n^{p+3}), \end{aligned}$$

Açò desmostra que el mètode proposat té ordre de convergència $p + 2$. \square

Observació 1: Cal emfatitzar que de la mateixa forma que hem demostrat el resultat anterior, no pot demostrar-se que quan substituïm qualsevol matriu jacobiana per un operador de diferències dividides en un mètode iteratiu per a sistemes no lineals, l'ordre de convergència es conserva. El resultat anterior s'ha provat assumint que l'operador simètric de diferències dividides verifica (5.1). Aquest és un resultat teòric però, en la pràctica, hem de definir una forma explícita per a les diferències dividides.

5.3 Aproximacions per diferències dividides

L'aproximació per a la derivada en diverses variables pot construir-se de diferents formes cadascuna de les quals té propietats específiques, com es mostra en [64, 65]. De fet, podem aplicar el següent resultat d'equivalència:

Teorema 12 *Si F satisfà la següent condició de Lipzchitz*

$$\|[x, y; F] - [u, v; F]\| \leq H(\|x - u\| + \|y - v\|)$$

aleshores la igualtat (5.1) es manté per a qualsevol parell de punts distints $(x + h, x) \in D \times D$ si i sols si, per a tot $(u, v) \in D \times D$ amb $u \neq v$ i $2v - u \in D$, la següent relació es satisfà:

$$[u, v; F] = 2[u, 2v - u; F] - [v, 2v - u; F]. \quad (5.4)$$

Com s'ha indicat en [66], l'operador en diferències dividides clàssic es defineix:

$$(\Delta_1 F)_{ij} = \frac{1}{y_j - x_j} \left(F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \right), \quad (5.5)$$

que no verifica aquesta condició per alguns problemes. Els autors mostren un contraexemple (5.5). Amb la intenció de superar aquest inconvenient, ells presenten un nou operador en diferències dividides donat per:

$$(\Delta_2 F)_{ij} = \frac{1}{2(y_j - x_j)} \left(F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + F_i(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - F_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) \right), \quad (5.6)$$

El comportament d'aquests operadors depén de la seua aproximació a la definició de diferències dividides donades per (5.1), el desenvolupament de Taylor de la qual per al component (i, j) és la següent:

$$\int_0^1 D_j F_i(x + th) dt = D_j F_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n D_{kj} F_i(x) h_k + \frac{1}{6} \sum_{k,l=1}^n D_{klj} F_i(x) h_k h_l + O(h^3). \quad (5.7)$$

Aleshores, en [66], s'establí que, mentre (5.5) és una aproximació d'ordre h per a les derivades, (5.6) és una aproximació d'ordre h^2 . Però aquesta aproximació duplica el nombre d'avaluacions funcionals per component en el seu còmput.

Ara presentarem una nova aproximació a la matriu jacobiana, que aconseguim el mateix ordre d'aproximació emprant només dues avaluacions funcionals per iteració. Amb aquesta finalitat, considerem el següent operador de diferències dividides, [64]:

$$(\Delta_3 F)_{ij} := \frac{1}{h_{ij}} \left[F_i \left(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik} e^k + h_{ij} e^j \right) - F_i \left(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik} e^k \right) \right], \quad (5.8)$$

on $\beta \in [0, 1]$, i e^1, \dots, e^n denoten els vectors coordenats. En particular, per a $\beta = 1$, trobem l'operador de diferències dividides (5.5).

Ara, proposem la següent generalització:

$$(\Delta_4 F)_{ij} := \frac{1}{h_{ij}} \left[F_i \left(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik} e^k + h_{ij} e^j + \alpha \sum_{l=j+1}^n h_{il} e^l \right) - F_i \left(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik} e^k + \alpha \sum_{l=j+1}^n h_{il} e^l \right) \right], \quad (5.9)$$

on $\alpha, \beta \in [0, 1]$, i e^1, \dots, e^n denoten els vectors coordenats.

La següent proposició refereix el comportament d'aquests operadors de diferències dividides.

Proposició 1 *Si $F(x)$ és suficientment diferenciable en un obert convex $D \subset \mathbb{R}^n$ que conté α un zero simple de F . Els operadors de diferències dividides $\Delta_3 F$ i $\Delta_4 F$ definides per (5.8) i (5.9), respectivament, verifiquen les següents relacions:*

$$\int_0^1 D_j F_i(x + th) dt - (\Delta_3 F)_{ij} = O(h); \quad \forall \beta \in [0, 1].$$

$$\int_0^1 D_j F_i(x + th) dt - (\Delta_4 F)_{ij} = O(h^2); \quad \text{for } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

$$\forall (i, j) : \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Demostració: Per obtenir les corresponents sèries de Taylor d'ambdós termes de $\Delta_3 F$, tenim:

$$\begin{aligned} [x, x+h, F]_{ij}^{(3)} &= \frac{1}{h_j} \left(F_i(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_k e^k + h_j e^j) - F_i(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_k e^k) \right) \\ &= D_j F_i(x) + \frac{1}{2} \left(2\beta \sum_{k=1}^{j-1} D_{kj} F_i(x) h_k + D_{jj} F_i(x) h_j \right) + O(h^2), \end{aligned}$$

i comparant aquest resultat amb (5.7), podem concloure, així, que aquesta aproximació és d'ordre h per a qualsevol valor de β . De la mateixa forma, per al nou operador tenim que:

$$\begin{aligned} [x, x+h, F]_{ij}^{(4)} &= \frac{1}{h_j} \left(F_i(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_k e^k + h_j e^j + \alpha \sum_{k=j+1}^n h_k e^k) - \right. \\ &\quad \left. - F_i(x + \beta \sum_{k=1}^{j-1} h_k e^k + \alpha \sum_{k=j+1}^n h_k e^k) \right) = \\ &= D_j F_i(x) + \frac{1}{2} \left(2\beta \sum_{k=1}^{j-1} D_{kj} F_i(x) h_k + \right. \\ &\quad \left. + D_{jj} F_i(x) h_j + 2\alpha \sum_{k=j+1}^n D_{kj} F_i(x) h_k \right) + O(h^2), \end{aligned}$$

i ara prenent $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{1}{2}$, trobem que els termes d'ordre h coincideixen amb els de (5.7), corresponent a una aproximació d'ordre h^2 . \square

Observació 2: El nou operador de diferències dividides presentat en (5.9) prenent els valors escaients per als paràmetres $\alpha = 1/2$ i $\beta = 1/2$ tenen el mateix ordre que l'operador definit per (5.6), però solament necessita la meitat d'avaluacions funcionals, així que és una alternativa eficient que permet la construcció de mètodes iteratius lliures de derivades per a sistemes no lineals.

5.4 Nous mètodes iteratius

En aquest apartat, obtindrem nous mètodes amb ordre de convergència 5, aplicant la tècnica abans esmentada per a dos mètodes de convergència

cúbica. Partint d'ells, aproximarem les derivades per diferències dividides, i s'aconseguiran nou mètodes lliures de derivades. El factor decisiu que ens porta a considerar dos mètodes iteratius de tercer ordre és el nostre interès en comparar el seu comportament dinàmic.

Primerament, considerarem el mètode de tercer ordre desenvolupat per Werakoon i Fernando en [15], el qual el denotarem com W_3 . Quan les derivades s'hagen aproximat per les diferències dividides, $\Delta_i F$, denotarem el mètode resultant com W_3^i , amb $i = 1, 2, 3, 4$. Introduïrem un nou pas per aconseguir el mètode de cinqué ordre associat, W_5^i .

L'expressió iterativa general d'aquestos mètodes és:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \Delta_i F(x_n)^{-1} F(x_n), \\ z_n &= x_n - 2(\Delta_i F(y_n) + \Delta_i F(x_n))^{-1} F(x_n), \\ w_n &= z_n - \Delta_i F(y_n)^{-1} F(z_n). \end{aligned}$$

Aplicant el mateix procediment al mètode de tercer ordre de Homeier, [67], obtindrem els mètodes H_3^i i H_5^i amb $i = 1, \dots, 4$, l'expressió iterativa dels quals pren la forma:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \Delta_i F(x_n)^{-1} F(x_n), \\ z_n &= x_n - \frac{1}{2}(\Delta_i F(x_n)^{-1} + \Delta_i F(y_n)^{-1})F(x_n), \\ w_n &= z_n - \Delta_i F(y_n)^{-1} F(z_n). \end{aligned}$$

Observació 3: Podem aplicar la tècnica descrita en el Teorema 11 n vegades, obtenint així mètodes iteratius lliures de derivades d'ordre $p + 2n$, afegint en cada nou pas una única avaluació funcional adicional. L'expressió

iterativa general és:

$$\begin{aligned} y_{n0} &= x_n, \\ y_{n1} &= y_{n0} - \Delta_i F(y_{n0})^{-1} F(y_{n0}), \\ y_{n2} &= \phi_p(y_{n0}, y_{n1}), \\ y_{n,j+1} &= y_{nj} - \Delta_i F(y_{nj})^{-1} F(y_{nj}), \\ x_{n+1} &= y_{n,j+1}, \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

on $\phi_p(y_{n0}, y_{n1})$ és un mètode iteratiu d'ordre de convergència p , en el qual hem reemplaçat qualsevol derivada per l'operador lineal $\Delta_i F$. Remarquem que l'aproximació de la derivada, $\Delta_i F(y_{nj})$, es congela en tot el procés iteratiu.

5.5 Experiència numèrica

En aquesta secció, aplicarem els mètodes desenvolupats W_3^i , W_5^i , H_3^i i H_5^i a diferents exemples. Els càlculs es realitzen amb el programa Matlab en la seua versió 2011b emprant aritmètica de precisió variable amb 2000 dígits de mantissa iterant fins que la distància entre iterats consecutius siga menor que la tolerància 10^{-100} . Les taules mostren el nombre d'iteracions, la distància entre el darrers iterats, $\|x_{n+1} - x_n\|$, la norma de $F(x_{n+1})$ i l'aproximació computacional a l'ordre de convergència *ACOC*.

Exemple 1

Primerament considerem el sistema d'equacions polinomials que s'han estudiat en [66] per establir el comportament diferenciats entre els distints operadors en diferències dividides $\Delta_1 F$ i $\Delta_2 F$:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Per aquest sistema, els operadors $\Delta_2 F$ i $\Delta_4 F$ satisfan la condició (5.4) i així tenen la forma (5.1) i coincideixen. Els mètodes derivats partits d'ells tenen el mateix ordre de convergència com els mètodes respectius que empren derivades. Per altra banda, els mètodes basats en $\Delta_2 F$ i $\Delta_4 F$ tenen ordre de convergència una unitat menor que els mètodes originals.

	iter	$\ x_{n+1} - x_n\ $	$\ F(x_{n+1})\ $	ρ
W_3^1	8	4.6640e-127	4.8757e-254	2.0000
W_5^1	5	9.1220e-125	3.5579e-498	3.9844
H_3^1	8	2.7507e-154	1.696e-308	2.0000
H_5^1	5	4.2090e-167	2.6764e-668	3.9947
W_3^3	9	1.3534e-200	4.1055e-401	2.0000
W_5^3	6	1.3218e-319	1.1249e-1276	4.0000
H_3^3	8	3.5251e-134	2.7853e-268	2.0000
H_5^3	5	3.4784-126	5.3941e-503	4.0000
$W_3^{2,4}$	7	2.1567e-234	5.6075e-702	3.0000
$W_5^{2,4}$	5	6.7517e-160	3.9215e-797	5.0000
$H_3^{2,4}$	6	4.5256e-329	1.1725e-1314	4.0000
$H_5^{2,4}$	5	1.5648e-363	2.0515e-2178	5.9999

Taula 5.1: Resultats de l'exemple 1 amb l'estimació inicial

$$x_0 = (1.25, 0.75)$$

Per aquest sistema, l'ordre de convergència dels mètodes $H_3^{2,4}$ i $H_5^{2,4}$ és major a l'esperada, però el mètodes originals, els quals utilitzen les derivades, tenen el mateix comportament.

Exemple 2

Ara, considerem el següent sistema d'equacions polinomials:

$$\begin{cases} x_1^3 - x_2^3 = 7 \\ x_1^3 x_2^2 x_3 = -8 \\ x_1^2 + x_3^3 = 3 \end{cases}$$

Com en el cas precedent, quan s'empren les aproximacions d'ordre h del jacobiana, que corresponen als operadors $\Delta_1 F$ i $\Delta_3 F$, l'ordre de convergència disminueix. Per tant, comparem els mètodes que fan ús de les diferències dividides d'ordre h^2 , que són $\Delta_2 F$ i $\Delta_4 F$. Cap d'ells verifiquen (5.4), però els mètodes que en fan ús mantenen l'ordre de convergència dels

mètodes originals.

	iter	$\ x_{n+1} - x_n\ $	$\ F(x_{n+1})\ $	ρ
W_3^2	35	1.3868e-114	4.0258e-339	2.9972
H_3^2	35	1.0943e-113	3.4388e-337	3.0201
W_5^2	19	8.2063e-161	3.6522e-799	5.0115
H_5^2	19	4.2397e-168	6.5941e-834	5.0492
W_3^4	8	2.913e-200	3.4921e-309	3.0012
H_3^4	7	2.8594e-137	5.4876e-372	2.9990
W_5^4	6	7.3768e-383	3.5802e-507	5.0000
H_5^4	5	3.5842e-101	8.8475e-502	4.9954

Taula 5.2: Resultat de l'exemple 2 amb l'estimació inicial
 $x_0 = (1.75, 0.75, -0.75)$

	iter	$\ x_{n+1} - x_n\ $	$\ F(x_{n+1})\ $	ρ
W_3^2	NC	—	—	—
H_3^2	NC	—	—	—
W_5^2	NC	—	—	—
H_5^2	NC	—	—	—
W_3^4	NC	—	—	—
H_3^4	30	2.4151e-121	3.6569e-361	2.9999
W_5^4	NC	—	—	—
H_5^4	18	7.4893e-282	5.5655e-1404	5.0009

Taula 5.3: Resultats per a l'exemple 2 amb l'estimació inicial
 $x_0 = (1, 0.25, -0.5)$

La Taula 5.2 mostra, per a l'estimació inicial $x_0 = (1.75, 0.75, -0.75)$, que els ordres de convergència es preserven amb ambdós tipus de diferències dividides, però els mètodes amb diferències dividides $\Delta_4 F$ convergeixen amb menys iteracions. És més, tal com es mostra en la Taula 5.3, quan es considera $x_0 = (1, 0.25, -0.5)$ com estimació inicial, els mètodes que em-

pren $\Delta_2 F$ no convergeix (NC) en qualsevol cas, en canvi el mètode lliure de derivades del mètode de Homeier que utilitza $\Delta_4 F$ convergeix, mantenint la convergència original.

Exemple 3

Finalment, considerem una equació integral del tipus Fredholm-Volterra Hammerstein mostrada en [68]:

$$x(s) = 2 \cos(s) - 2 + 3 \int_0^s \sin(s-t)x(t)^2 dt \\ + \frac{6}{7-6 \cos(1)} \int_0^1 (1-t) \cos(s)^2 (1+x(t)) dt.$$

Per obtenir un problema de dimensió finita, farem ús de la regla del trapezis amb n subintervalls, per tant, $h = 1/n$, nodes $t(i) = ih$ amb $i = 0, \dots, n$ i pesos $p = h/2(1, 2, \dots, 2, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Anomenant $x(t_i) = x_i$, per a $i = 0, \dots, n$, obtenim el següent sistema d'equacions no lineals:

$$x_i = 2 \cos(t_i) - 2 + 3 \sum_{j=0}^i q_{ij} \sin(t_i - t_j) x_j^2 \\ + \frac{6}{7-6 \cos(1)} \cos(t_i)^2 \sum_{i=0}^n p_i (1-t_i) (1+x_i),$$

sent q_{ij} , $j = 0, 1, \dots, i$ els pesos de la regla dels trapezis per a l'interval $[0, x_i]$.

Els resultats numèrics d'aquest últim exemple s'han obtingut amb menor nombre de dígitos en aritmètica de precisió variable, concretament amb 500 dígitos, degut el seu al cost computacional. La Taula 5.4 mostra els resultats d'aplicar els mètodes estudiats al sistema no lineal resultant de la discretització de l'equació integral amb $n = 17$. S'observa que, en tots els casos, s'assoleix l'ordre de convergència previsible. Els mètodes H_3^2 i H_5^2 es comporten com els mètodes originals, els quals computen el jacobià, obtenint ordres de convergència superiors als esperats.

	iter	$\ x_{n+1} - x_n\ $	$\ F(x_{n+1})\ $	ρ
W_3^1	7	1.7034e-109	8.5199e-203	2.9999
H_3^1	6	2.4189e-153	5.1938e-254	4.0000
W_5^1	6	7.3768e-383	4.3899e-507	4.9999
H_5^1	5	7.9047e-161	5.1541e-507	5.9999
W_3^2	7	1.7034e-109	7.1555e-204	2.9999
H_3^2	6	2.4189e-153	5.0185e-251	4.0000
W_5^2	6	7.3768e-383	3.5802e-507	5.0000
H_5^2	5	7.9047e-161	2.1227e-506	5.9999
W_3^3	7	1.0575e-110	1.4805e-252	2.9999
H_3^3	7	4.3911e-155	1.4095e-249	3.9999
W_5^3	6	1.8156e-387	4.7004e-505	4.9999
H_5^3	5	8.6935e-163	3.7347e-507	5.9999
W_3^4	7	1.0575e-110	7.4454e-254	2.9999
H_3^4	6	4.3911e-155	3.4954e-252	3.9999
W_5^4	6	1.8156e-387	2.6638e-506	4.9999
H_5^4	5	8.6935e-163	7.5556e-506	5.9999

Taula 5.4: Resultats per a l'exemple 3 amb l'estimació inicial

$$x_0 = (2, 2, \dots, 2)$$

5.6 Estudi dinàmic

Ara analitzarem el comportament global dels mètodes que hem obtingut considerant el seu comportament dinàmic en la resolució de l'Exemple 1. Així es podrà observar substancials diferències entre mètodes del mateix ordre que no són evidents en l'estudi local de la convergència. La dinàmica dels mètodes que emprem diferències dividides del tipus 1 és més rica que la d'aquells que apliquen les de tipus 2, la qual és semblant a la dels mètodes originals que no aproximen les derivades per diferències dividides.

Per a aquest estudi, els mètodes prendran els valors inicials d'una malla de 600 per 600 punts amb tolerància de 10^{-6} i un màxim de 20 iteracions. Acolorirem les conques d'atracció segons el punt fix corresponent.

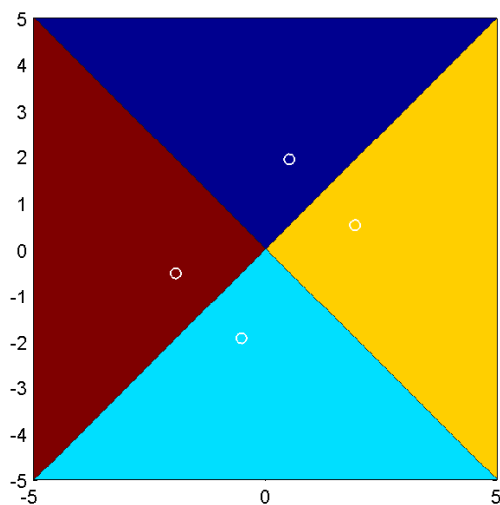
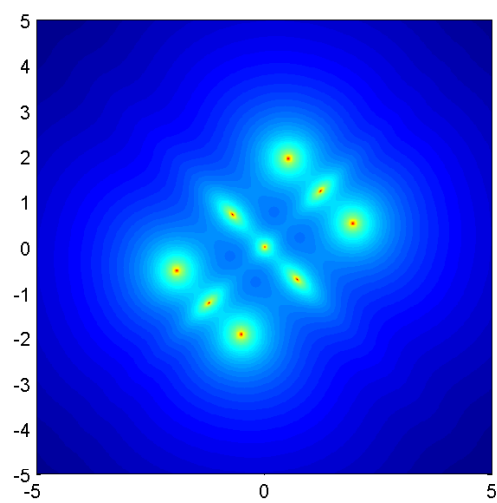
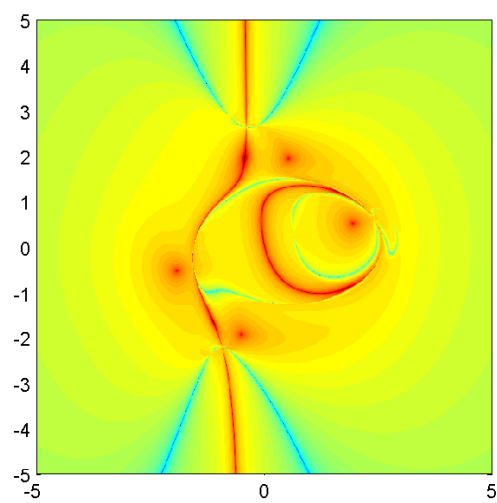


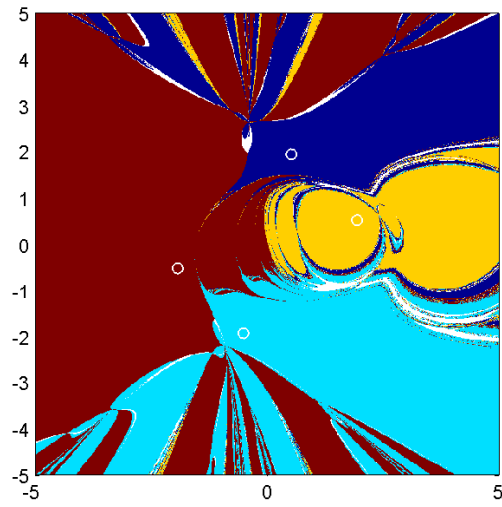
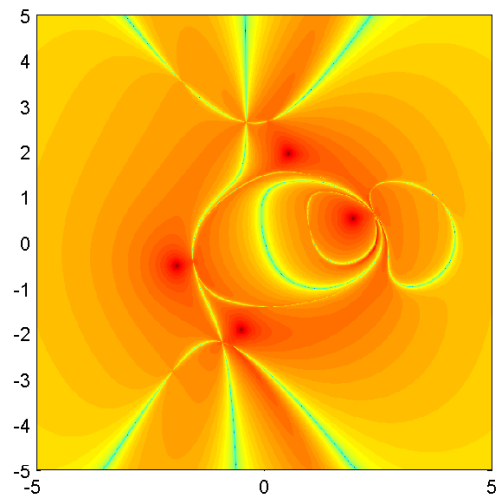
Figura 5.1: Conques de atracció dels mètodes W_{ij}^2 i H_{ij}^2

Els gràfics del nombre d'iteracions s'obtenen donant un color a cada punt inicial dependent del nombre d'iteracions necessari per satisfer una determinada tolerància. Per localitzar els punts fixos de les transformacions, s'assignarà a cadascun un color segons la distància d'eixe punt a la seua imatge. Les tonalitats més obscures corresponen a punt que tenen poca variació amb l'operador.

En tots els mètodes considerats, les quatre solucions del sistema no lineal són punts fixos superatractors de l'operador d'iteració G , per tant el jacobià s'anul·larà en aquestos punts.

Les conques d'atracció dels mètodes que utilitzen les diferències dividides de tipus 2 divideixen el pla en quatre quadrants les fronteres dels quals són rectes equidistants de les solucions més pròximes com es mostra a la Figura 5.1. Aquestos mètodes presenten lleugeres diferències en el nombre d'iteracions per a distints ordres de convergència però la seua dinàmica és similar.

Figura 5.2: Punts fixos de W_{31}^2 Figura 5.3: Punts fixos de W_{31}^1

Figura 5.4: Conques d'atracció de W_{31}^1 Figura 5.5: Punts fixos de H_{32}^1

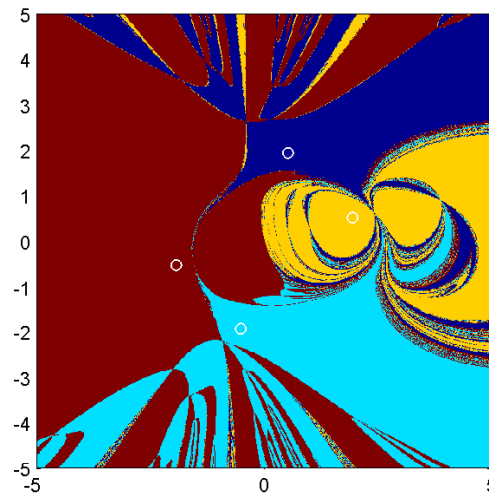


Figura 5.6: Conques d'atracció de H_{32}^1

El mètodes W_3^2 i W_5^2 presenten 9 punts fixos situats en una malla rectangular 3×3 paral·lela a les bisectrius dels quadrants, els vèrtex dels quals són les solucions del sistema, que són punts fixos superatractors (vore Figura 5.2). Els punts mitjans dels costats d'aquest rectangles són punts fixos atractors en la direcció perpendicular al costat corresponent i repulsors en la direcció d'eixe costat. El punt central de la malla situat en l'origen és repulsor. L'existència de més punts fixos en aquest cas no modifica la forma de les conques d'atracció.

El mètodes H_3^2 i H_5^2 sols tenen 4 punts fixos que són les solucions del sistema, motiu pel qual la seua dinàmica és més senzilla.

Els mètodes basats en diferències dividides de tipus 1 presenten una dinàmica més complexa ja que les conques d'atracció es troben fortament barrejades, conformant conjunts de Julia.

El mètodes W_3^1 i W_5^1 presenten altres punts fixos atractors, a més de les solucions del sistema. En la Figura 5.3 s'aprecien uns punts aïllats

corresponents a les solucions, però hi ha altres zones de tonalitats obscures en les proximitats dels punts fixos estranys. Per açò, les conques d'atracció de les solucions no cobreixen tot el pla. Les tonalitats més clares de la Figura 5.4 corresponen a conques d'atracció dels punts fixos addicionals.

Els mètodes H_3^1 i H_5^1 no tenen punts fixos addicionals a les solucions, per tant el seu comportament dinàmic és millor. Les Figures 5.5 i 5.6 mostren els punts fixos i les conques d'atracció, respectivament, del mètode H_3^1 , que es comporta millor que W_3^1 . El mateix ocorre amb els mètodes W_5^1 i H_5^1 .

5.7 Conclusions

Hem analitzat el comportament de diversos mètodes iteratius d'alt ordre per a sistemes no lineals en els quals les derivades s'han aproximat per diferències dividides. Hem considerat quatre operadors de diferències dividides. El mètodes que utilitzen els operadors $\Delta_{1,3}F$ de vegades perden una unitat en l'ordre de convergència i tenen un comportament dinàmic més ric que els mètodes originals, excepte W_3^3 . El mètodes que empren $\Delta_{2,4}F$ mantenen l'ordre de convergència i tenen un comportament global semblant als mètodes originals amb derivades en tots els exemples analitzats. La qüestió sobre si aquest és un fet general o sota quines condicions es manté l'ordre requereix més estudi.



Un tipus eficient de mètodes iteratius d'alt ordre amb memòria per a ecuacions no lineals i la seua dinàmica.¹

Índex

6.1	Mètodes iteratius tipus predictor-corrector . . .	90
6.2	Convergència dels algorismes en dos passos . . .	92
6.2.1	Algorisme predictor-corrector estàndard	93
6.2.2	Algorisme predictor-corrector millorat	95
6.2.3	Taxa de convergència i índex d'eficiència per als algorismes en dos passos	97
6.3	Convergència dels algorismes multipas	100
6.3.1	Algorismes generals	100
6.3.2	Mètodes iteratius proposats	102

¹La base d'aquest capítol és l'article [69] i la comunicació **A Class of Efficient High-order Iterative Methods with Memory for Nonlinear Equations and their Dynamics** presentada al congrés *17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, celebrat del 4 al 8 de juliol de 2017 a Cadis.

6.3.3	Anàlisi exhaustiva de l'eficiència computacional .	106
6.3.4	Simulacions numèriques	112
6.4	Dinàmica d'un mètode amb memòria	112
6.4.1	Mètode del punt mitjà amb memòria	114
6.4.2	L'algorisme proposat	117
6.5	Conclusions	118

EN els capítols precedents, ens hem limitat a aquelles tècniques que no reutilitzen els càlculs d'una iteració en la següent, a excepció del resultat del valor final de la iteració el qual es retorna a l'algorisme en forma d'entrada.

En aquest, en canvi, pretenem obtindre alguns resultats sobre mètodes iteratius amb memòria aplicables a equacions no lineals. El tipus d'algorismes que considerarem es centra en la incorporació d'un mecanisme de memòria sense incrementar el cost computacional. Aquesta classe de mètodes empra com a pas predictor de cada iteració una quantitat que ha sigut calculada en la iteració prèvia, generalment aquest valor serà qui regulava el pendent en el pas corrector previ. D'aquesta forma, no ens cal realitzar càlculs extra i més important evitem noves avaluacions funcionals, i així ens permet obtindre mètodes iteratius d'alt ordre d'una forma senzilla. No s'ha d'oblidar que la conjectura de Traub no es aplicable per a mètodes que incorporen algun tipus de memòria.

Així els darrers anys, alguns autors ([74]-[82]) han investigat l'ús de la memòria per assolir ordres de convergència que sobrepassen els corresponents valors per a l'ordre de convergència indicats a la conjectura de Kung-Traub per als mètodes sense memòria. Aquests estudis freqüentment empen paràmetres autocorrectors que utilitzen les dades prèviament generades d'una forma nova per portar la convergència més enllà. Aquests mètodes es comparen entre si mitjançant el seu *índex d'eficiència*, $EI = \rho^{1/m}$ on ρ és l'ordre de convergència i m és el nombre d'avaluacions funcionals portades a terme per cada iteració, amb el criteri que "major EI = millor mètode". És a dir, el focus s'ha centrat en l'ordre de convergència que es pot aconseguir d'una quantitat específica de dades proporcionades.

Tot i que aquest és un aspecte important, no prenem en consideració la quantitat de treball necessari per crear aquesta aproximació. Els mètodes amb molts paràmetres autocorrectius poden permetre obtenir alts ordres de convergència, requerint però moltes operacions addicionals (FLOPs). Vist des d'aquesta nova perspectiva, l'equivalència “major EI = millor mètode” ja no es pot considerar certa, degut al fet que el treball computacional total per generar una aproximació acceptable pot ser molt major per al mètode amb major EI , fins i tot en el cas de convergir en menys iteracions.

En el nostre treball mantindrem un punt de vista diferent. La nostra intenció serà emprar la memòria per incrementar l'ordre de convergència per damunt dels límits establerts per Kung-Traub per als mètodes sense memòria, però sense incrementar el cost computacional de l'algorisme. Per tant, l'enfocament general és vore la conseqüència de modificar un algorisme general del tipus corrector-predictor de forma que el pendent del pas predictor d'una iteració estiga controlada per el pendent del pas corrector previ i evitar d'aquesta manera, amb l'ús de la memòria, els requeriments de càlculs addicionals. Aquesta idea fou proposada per primera vegada en [75] per realitzar una modificació concreta sobre el mètode de Newton.

Els esquemes multipas de k -passos ($k > 2$) tenen una importància rellevant, ja que permeten obtenir diferents ordres de convergència segons el nombre de passos portats a terme. En aquest sentit cal referir-se a [83], on es genera un mètode iteratiu sense memòria que empra $n + 1$ avaluacions funcionals per iteració i aconsegueix una convergència òptima. Diverses millores s'han publicat basades en aquest esquema. Una d'aquestes en particular, [81], és l'estudi exhaustiu que realitzen els autors per construir una família biparamètrica de mètodes iteratius amb memòria, emprant aquesta memòria per aproximar els paràmetres, i aconsegueixen així, millorar fins $2^n + 2^{n-1}$ i fent ús d'una aproximació adient del segon paràmetre assoleixen ordre de convergència igual a $2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2}$. En ambdós casos el nombre d'avaluacions funcionals es manté en $n + 1$.

No obstant això, els càlculs necessaris per obtenir aquestes altes taxes de convergència han estat computacionalment molt costosos. En

aquest el present capítol, reduïrem aquest cost mitjançant la construcció de mètodes d'alt ordre de manera que l'expressió iterativa pren una forma tan senzilla com ha sigut possible. Amb la incorporació de el pendent del pas corrector previ en la següent iteració, podem demostrar que la taxa de convergència pot incrementar-se fins $2^n + 2^{n-2}$, amb $n + 1$ avaluacions funcionals per iteració. Si bé, aquesta convergència és menor que la proposada a [81], mostrem que la nostra alternativa és competitiva, i de fet, constitueix una millora si es considera el cost que suposen el total de les operacions del mètode.

Per tant, considerem convenient introduir la classe d'algorismes predictor corrector amb memòria en els quals ens centrarem a la següent secció. En la Secció 6.2, obtindrem alguns resultats sobre la convergència d'algorismes de dos passos i derivarem algunes conseqüències respecte la seua eficiència. La Secció 6.3 es dedicarà als algorismes multipas, i proposarem un nou mètode iteratiu multipas amb memòria. També es compararà el cost computacional respecte a d'altres mètodes iteratius de similars característiques publicats recentment. Finalment, realitzarem diverses comprovacions sobre exemples específics i investigarem mitjançant l'estudi dinàmic quin efecte té, pel que fa a la convergència, l'ús d'aquest predictor sobre els mètodes que se'n puguen derivar.

6.1 Mètodes iteratius tipus predictor-corrector

Així com el mètode de Newton és un dels algorismes més populars per trobar arrels d'equacions tant per la seua simplicitat com la seua taxa de convergència quadràtica, existeixen molts altres mètodes més potents i amb velocitats de convergència més ràpides. Sovint l'expressió que prenen aquestos mètodes és la d'equacions implícites. Per exemple, si s'integra $f'(x)$ entre el valor de l'actual iteració i de l'arrel, en principi desconeguda, $\int_{x_n}^{\alpha} f'(x)dx = -f(x_n)$ i s'aplica la Regla del Punt Mitjà per a la integral, s'obté $f'(\frac{1}{2}[x_n + \alpha])(\alpha - x_n) \approx -f(x_n)$, que pot expressar-se amb una equació implícita $\alpha \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\frac{1}{2}[x_n + \alpha])}$. Aquestes expressions són les pròpies dels mètodes coneguts com del tipus predictor corrector ([70]-[72]);

per exemple,

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - f(x_n)\Psi(x_n) \\x_{n+1} &= x_n - f(x_n)\Phi(x_n, y_n)\end{aligned}\tag{6.1}$$

per algunes funcions Ψ and Φ . Concretament per aquest cas, $\Phi(x_n, y_n) = 1/f'(\frac{1}{2}[x_n + y_n])$. És habitual emprar el mètode de Newton com a pas predictor.

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\x_{n+1} &= x_n - f(x_n)\Phi(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{6.2}$$

En aquest sentit, podria vore's aquest tipus d'algorisme com el Mètode de Newton amb un factor correctiu. Malgrat açò, si $\Phi(x_n, y_n)$ no incorpora $f'(x_n)$, aquest predictor incrementa el nombre d'avaluacions funcionals requerides per iteració. Més encara inclou una computació addicional, per a la qual intentarem emprar una quantitat ja calculada en el pas predictor, $\Phi(x_{n-1}, y_{n-1})$, que és el valor que pren el pendent en el pas corrector previ.

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - f(x_n)\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}) \\x_{n+1} &= x_n - f(x_n)\Phi(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{6.3}$$

És habitual referir-se a aquest tipus de mètodes com *algorisme predictor-corrector en dos passos estàndard* o *standard 2-step predictor-corrector algorithm* i el denotarem per *SA*.

A més, com y_n ja és segurament una millora respecte a x_n , podem també podem incorporar $f(y_n)$ en l'algorisme. Aquesta tècnica es pot aplicar mitjançant un esquema del tipus del mètode de Newton, el qual denotarem com *NP*, prenent una forma així:

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\x_{n+1} &= y_n - f(y_n)\Phi(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{6.4}$$

Considerem, altrament, l'efecte d'incorporar el pendent de la iteració prèvia en el pas predictor

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - f(x_n)\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}) \\x_{n+1} &= y_n - f(y_n)\Phi(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{6.5}$$

anomenarem a aquest com *algorisme predictor-corrector en dos passos millorat* o *improved 2-step predictor-corrector algorithm*, i el referirem per *IA*. És pot portar més enllà aquesta tècnica per obtenir *algorisme predictor-corrector multipas millorat* (*improved multi-step predictor-corrector algorithm*) i el denotarem per *IMS* donat per l'expressió:

$$\begin{aligned}y_n^{(0)} &= x_n - f(x_n)\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}^{(0)}, y_{n-1}^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(k)}) \\y_n^{(i)} &= y_n^{(i-1)} - f(y_n^{(i-1)})\phi_i(x_n, y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(i-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, k \\x_{n+1} &= y_n^{(k)} - f(y_n^{(k)})\Phi(x_n, y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(k)}).\end{aligned}\tag{6.6}$$

Notem que en la segon i successives iteracions, el primer pas empra el pendent de l'últim pas donant lloc a un mètode amb memòria; els dos fan ús de la funció Φ , mentre que els passos intermedis utilitzen diferents funcions ϕ_i .

6.2 Anàlisi dels algorismes en dos passos

Comencem per establir resultats de convergència per als esquemes iteratius de Predictor-Corrector (PC) de dos passos definits prèviament per localitzar un zero $x = \alpha$ de $f(x)$. Definim l'error com $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ i $\varepsilon_n^* = y_n - \alpha$ per a tot n . Direm que la successió $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ convergeix a $x = \alpha$ amb *taxa de convergència* ρ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^\rho} = \lambda$ per a les constants positives ρ, λ . Per tant, la relació entre ε_{n+1} i ε_n pot escriure's com $\varepsilon_{n+1} = A_n \varepsilon_n^\rho + h.o.t.$ on $A_n \rightarrow \lambda$ a mesura que $n \rightarrow \infty$ i *h.o.t.* denota els *termes d'ordre superior - high order terms* que satisfan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h.o.t.}{|\varepsilon_n|^\rho} = 0$. Aquesta relació es denotarà per $\varepsilon_{n+1} \sim \varepsilon_n^\rho$. Els termes específics dels *h.o.t* no seran importants per a l'anàlisi posterior. Per als següents teoremes, els de les Seccions 6.2-6.3, assumirem que les relacions d'error són conegudes per al pas del corrector

i considerarem l'efecte que la modificació del predictor té sobre la taxa de convergència global.

6.2.1 Algorisme predictor-corrector estàndard

Considerem els sistemes amb la forma donada per (6.3):

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - f(x_n)\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ x_{n+1} &= x_n - f(x_n)\Phi(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Teorema 13 *Siga f suficientment diferenciable en un entorn de una arrel simple aïllada α . Suposem que la relació de l'error per al pas correct de l'esquema predictor-corrector en dos passos estàndard (6.3) ve donada per $\varepsilon_{n+1} \sim \varepsilon_n^p (\varepsilon_n^*)^q$, amb $p, q \geq 1$, i que y_n és una aproximació per al zero buscat α , almenys tant bona com x_n , així, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_n^*|}{|\varepsilon_n|} < \infty$. Aleshores l'ordre de convergència per a l'algorisme iteratiu (6.3) es pot expressar per*

$$\rho = \frac{p + q + \sqrt{(p + q)^2 + 4q}}{2}.$$

Demostració: Primerament observem que el sistema (6.3) pot escriure's de manera equivalent com

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - f(x_{n+1})\Phi(x_n, y_n) \\ x_{n+1} &= x_n - f(x_n)\Phi(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Després de restar α a ambdós costats,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^* &= \varepsilon_{n+1} - f(x_{n+1})\Phi(x_n, y_n) \\ \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n - f(x_n)\Phi(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Multiplicant la primera equació per $f(x_n)$, la segona equació per $f(x_{n+1})$, i restant els resultats

$$f(x_n)\varepsilon_{n+1}^* - f(x_{n+1})\varepsilon_{n+1} = f(x_n)\varepsilon_{n+1} - f(x_{n+1})\varepsilon_n,$$

o equivalentment,

$$\varepsilon_{n+1}^* = \varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}.$$

Emprant el desenvolupament de Taylor de f en l'entorn d' α , trobem que

$$f(t) = f'(\alpha)\varepsilon_t(1 + c_2\varepsilon_t + C_3(\xi_t)),$$

on $C_k(t) = \frac{f^{(k)}(t)}{k!f'(\alpha)}$, $c_k = C_k(\alpha)$, $k = 2, 3$, $t - \alpha = \varepsilon_t$, i $I(\alpha, t)$ és el menor interval que conté tant α com t , per $t = x_n$ o x_{n+1} . Restant aquestos desenvolupament obtenim

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^* &= \varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \frac{\varepsilon_{n+1}(1 + c_2\varepsilon_{n+1} + C_3(\xi_{n+1}))}{\varepsilon_n(1 + c_2\varepsilon_n + C_3(\xi_n))} \\ &= \varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} (1 - c_2\varepsilon_n + h.o.t.) \\ &= \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{\varepsilon_n} + c_2\varepsilon_{n+1}\varepsilon_n + h.o.t. \\ &\sim \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n^{p-1}(\varepsilon_n^*)^q + \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n. \end{aligned}$$

recordem que $p, q \geq 1$. Si $p \geq 2$, és evident que $\varepsilon_{n+1}^* \sim \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n$. En general, però, cal tindre en consideració que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^* &\sim \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n^{p-1}(\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}^{p-1}(\varepsilon_{n-1}^*)^q + \varepsilon_n\varepsilon_{n-1}) + \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n \\ &= \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n^p\varepsilon_{n-1}^{p-1}(\varepsilon_{n-1}^*)^q + \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n^p\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n \end{aligned}$$

així $\varepsilon_{n+1}^* \sim \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n$ per $p, q \geq 1$, i per tant $\varepsilon_{n+1} \sim \varepsilon_n^p(\varepsilon_n^*)^q = \varepsilon_n^{p+q}\varepsilon_{n-1}^q$. Definim $\eta_n = \ln(|\varepsilon_n|)$ per a tot n , la taxa de convergència ve donada per l'equació característica:

$$\eta_{n+1} - (p+q)\eta_n - q\eta_{n-1} = 0$$

la qual té arrels $\rho_{+,-} = \frac{p+q \pm \sqrt{(p+q)^2 + 4q}}{2}$, i de manera que $\eta_n \sim k_1\rho_+^n + k_2\rho_-^n$, o equivalentment, $\varepsilon_{n+1} \sim \exp(k_1\rho_+^{n+1} + k_2\rho_-^{n+1})$. Notem que si definim $h(x) = x^2 - (p+q)x - q$, aleshores $h(-1) = 1+p > 0$ i $h(0) = -q < 0$, i per Teorema del Valor Mitjà, $-1 < \rho_- < 0$. En

conseqüència,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &\sim \left(e^{k_1\rho_+^n}\right)^{\rho_+} \left(e^{k_2\rho_-^n}\right)^{\rho_-} \\ &= \left(e^{k_1\rho_+^n}e^{k_2\rho_-^n}\right)^{\rho_+} \left(e^{k_2\rho_-^n}\right)^{\rho_- - \rho_+} \\ &= \varepsilon_n^{\rho_+} \left(e^{k_2\rho_-^n}\right)^{\rho_- - \rho_+} \\ &\rightarrow \varepsilon_n^{\rho_+}\end{aligned}$$

com $n \rightarrow \infty$. Aleshores la taxa de convergència pren la forma

$$\rho = \frac{p + q + \sqrt{(p + q)^2 + 4q}}{2}.$$

□

El mètode del punt mitjà amb memòria, denotat per *MP* i derivat al principi en la Secció 6.1 és un exemple d'algorisme del tipus *SA*. Expressat com:

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\frac{1}{2}[x_{n-1} + y_{n-1}])} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\frac{1}{2}[x_n + y_n])}.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Aquest és l'algorisme predictor-corrector en dos passos estàndard. La relació de l'error partint del pas corrector es dedueix en [75] i estableix que $\varepsilon_{n+1} \sim \varepsilon_n \varepsilon_n^*$, ja que $p = q = 1$. Per tant, segons el Teorema 13, la taxa de convergència és $\rho = \frac{1 + 1 + \sqrt{(1 + 1)^2 + 4}}{2} = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414$. Destaquem que ja que l'algorisme utilitza només dues iteracions funcionals noves per iteració, el mètode òptim sense memòria sols podria assolir un ordre de convergència quadràtica segons la conjectura de Kung-Traub.

6.2.2 Algorisme predictor-corrector millorat

Considerem ara el sistema de la forma (6.5):

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - f(x_n)\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ x_{n+1} &= y_n - f(y_n)\Phi(x_n, y_n).\end{aligned}$$

Teorema 14 *Siga f suficientment diferenciable en un entorn de una arrel simple aïllada α . Suposem que la relació de l'error per al pas corrector de l'esquema predictor-corrector en dos passos millorat (6.5) ve donada per $\varepsilon_{n+1} \sim \varepsilon_n^p (\varepsilon_n^*)^q$, amb $p, q \geq 1$, i que y_n és una aproximació per al zero buscat α , almenys tant bona com x_n , així, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_n^*|}{|\varepsilon_n|} < \infty$. Aleshores l'ordre de convergència per a l'algorisme iteratiu (6.5) es pot expressar per*

$$\rho = \frac{(p+q+1) + \sqrt{(p+q+1)^2 - 4p}}{2}.$$

Demostració: La prova és la mateixa que per al Teorema 13, excepte que l'equació (6.7) serà:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^* - f(y_n)\Phi(x_n, y_n),$$

resultant que

$$\varepsilon_{n+1}^* = \varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^*) \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)},$$

i consegüentment, $\varepsilon_n^* \sim \varepsilon_n \varepsilon_{n-1}^*$. Per determinar la taxa de convergència, hem de considerar el sistema:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^* &\sim \varepsilon_n \varepsilon_{n-1}^* \\ \varepsilon_{n+1} &\sim \varepsilon_n^p (\varepsilon_n^*)^q. \end{aligned}$$

Establint que $\eta_n = \ln(|\varepsilon_n|)$ i $\mu_n = \ln(|\varepsilon_n^*|)$ per a tot n ,

$$\begin{aligned} \mu_n &\sim \eta_n + \mu_{n-1} \\ \eta_{n+1} &\sim p\eta_n + q\mu_n. \end{aligned}$$

Notant que $\mu_n \sim \frac{\eta_{n+1} - p\eta_n}{q}$, l'equació característica que trobem és:

$$\eta_{n+1} - (p+q+1)\eta_n + p\eta_{n-1} = 0,$$

la qual té com a solucions

$$\rho_{+,-} = \frac{(p+q+1) \pm \sqrt{(p+q+1)^2 - 4p}}{2}.$$

Definint $h(x) = x^2 - (p + q + 1)x + p$ i considerant que $h(0) = p > 0$ i $h(1) = -q < 0$, es veu que $0 < \rho_- < 1$. Procedint de la mateixa manera que en el Teorema 13, obtenim que la taxa de convergència és donada per

$$\rho = \frac{(p + q + 1) + \sqrt{(p + q + 1)^2 - 4p}}{2}.$$

□

6.2.3 Taxa de convergència i índex d'eficiència per als algorismes en dos passos

S'han obtingut les taxes de convergència dels algorismes tipus estàndards i millorats per a diverses combinacions de p i q i aquestes es poden veure a la Taula 6.1, juntament amb les taxes de convergència corresponents per als algorismes que utilitzen un predictor de tipus Newton com els dels sistemes expressats per (6.2) i (6.4). Per als mètodes pels quals utilitzem el mètode de Newton com a predictor, hem assumit com a condició de l'error per al pas corrector $\varepsilon_{n+1} \sim \varepsilon_n^p (\varepsilon_n^*)^q$, donats com a resultat $\varepsilon_{n+1} \sim \varepsilon_n^p (\varepsilon_n^2)^q$ i per tant l'ordre global és $2q + p$. A la Taula 6.1 es presenten els resultats que constaten que aquest mètode sempre assoleix la major taxa de convergència. Per tant, substituir el predictor de Newton amb el pendent de la iteració anterior implica una disminució de la taxa de convergència. No obstant això, és més interessant estudiar l'eficiència de l'algorisme; és a dir, quant treball es requereix l'algorismes amb aquesta la taxa de convergència. L'índex d'eficiència d'un algorisme iteratiu tal i com es defineix a [72] estableix un equilibri en la relació entre la taxa de convergència (ρ) i el nombre d'avaluacions funcionals (m) requerit en cada iteració, i s'expressa matemàticament com $EI = \rho^{1/m}$. Òbviament són preferibles aquells mètodes amb major índex d'eficiència. Ara bé, mentre aquest és una mesura reduïda d' EI , no prenem en consideració el cost computacional de la fórmula d'iteració, per aquest motiu és apropiat per aquesta part de l'anàlisi que comparem els nous algorismes amb els seus anàlegs del tipus Newton. D'aquesta manera, no hi ha diferència pel que fa al cost computacional degut a l'esquema de l'iteració, i tota diferència, en conseqüència, es deurà a les avaluacions funcionals extra. Suposem que reemplacem el

Mètode	$q \setminus p$	1	2	3	4	5
NP		3	4	5	6	7
SA	1	2.414	3.303	4.236	5.193	6.162
IA		2.618	3.414	4.303	5.236	6.193
NP		5	6	7	8	9
SA	2	3.562	4.449	5.372	6.317	7.275
IA		3.732	4.562	5.449	6.372	7.317
NP		7	8	9	10	11
SA	3	4.646	5.531	6.464	7.405	8.359
IA		4.791	5.646	6.541	7.464	8.405
NP		9	10	11	12	13
SA	4	5.702	6.606	7.531	8.472	9.424
IA		5.828	6.702	7.606	8.531	9.472
NP		11	12	13	14	15
SA	5	6.742	7.653	8.583	9.525	10.477
IA		6.854	7.742	8.653	9.583	10.525

Taula 6.1: Taxes de convergència per a valors de p i q .

pendent del pas predictor inicial amb el pendent del pas corrector previ, resultant que hem fet ús d'una avaluació funcional menys. Notem a la taula 6.1 que mentre l'ordre de convergència decreix, no arriba a reduir-se a la meitat. Aquesta és una observació important ja que estableix que els algorismes poden sobrepassar el llindar de convergència òptima per als algorismes sense memòria que marca la conjectura de Kung-Traub. El següent teorema estudia la reducció de l'eficiència d'un algorisme respecte a d'un altre que faça ús d'una iteració més.

Teorema 15 *Considerem un esquema iteratiu amb una taxa de convergència ρ_1 , el qual requereisca m avaluació funcional per iteració, i , a més, un segon esquema iteratiu amb una convergència ρ_2 amb $1 < \rho_2 < \rho_1$, el qual requereisca $m-1$ avaluacions funcionals per iteració. Aleshores l'índex d'eficiència (definida per $\rho^{1/m}$) del segon esquema serà major que la del primer sempre que*

$$m < \frac{\ln(\rho_1)}{\ln(\rho_1) - \ln(\rho_2)}.$$

Demostració: L'objectiu a assolir és esbrinar els valors de m per als quals $\rho_1^{1/m} < \rho_2^{1/(m-1)}$. Aplicant logaritmes naturals als dos costats,

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} \ln(\rho_1) &< \frac{1}{m-1} \ln(\rho_2) \\ \frac{\ln(\rho_1)}{\ln(\rho_2)} &< \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \\ m-1 &< \frac{1}{\frac{\ln(\rho_1)}{\ln(\rho_2)} - 1} = \frac{\ln(\rho_2)}{\ln(\rho_1) - \ln(\rho_2)}\end{aligned}$$

el qual, si sumem 1 als dos costats, és equivalent a

$$m < \frac{\ln(\rho_1)}{\ln(\rho_1) - \ln(\rho_2)}.$$

□

Segons aquest últim Teorema, l'algorisme Predictor-Corrector en 2 passos Estàndard és més eficient que l'anàleg del tipus Newton quan

$$m < \frac{\ln(p+2q)}{\ln\left(\frac{2(p+2q)}{p+q+\sqrt{(p+q)^2+4q}}\right)},$$

en canvi l'algorisme Predictor-Corrector en 2 passos Millorat és més eficient que el seu anàleg del tipus Newton quan:

$$m < \frac{\ln(p+2q)}{\ln\left(\frac{2(p+2q)}{p+q+1\sqrt{(p+q+1)^2-4p}}\right)}.$$

En la Figura 6.1(a), observem que el nombre d'avaluacions funcionals (m) per a les quals l'algorisme PC estàndard (SA) és més eficient al seu anàleg de tipus Newton, degut a que l'algorisme "més lent" utilitza una avaluació de la funció menys per cada iteració que l'algorisme "més ràpid". Els corresponents valors per al PC millorat (IA) es representen a la Figura 6.1(b). En cada cas, el valor real per al qual l'algorisme PC millorat és superior al de l'algorisme PC estàndard, encara que el seu valor més baix coincideix en molts casos.

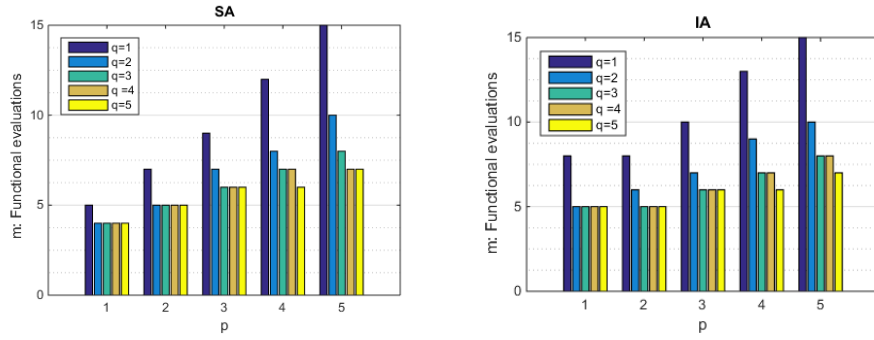


Figura 6.1: (a-esquerra) Valors de m per als quals $EI(SA) > EI(NP)$.
(b-dreta) Valors de m per als quals $EI(IA) > EI(NP)$.

6.3 Anàlisi de la convergència dels algorismes múltiples

Considerem ara els sistemes de la forma donada per (6.6):

$$\begin{aligned} y_n^{(0)} &= x_n - f(x_n)\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}^{(0)}, y_{n-1}^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(k)}) \\ y_n^{(i)} &= y_n^{(i-1)} - f(y_n^{(i-1)})\phi_i(x_n, y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(i-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, k \\ x_{n+1} &= y_n^{(k)} - f(y_n^{(k)})\Phi(x_n, y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(k)}), \end{aligned}$$

Ací ens referirem als algorismes com aquest com algorismes predictor-correctors múltiples (*IMS*).

6.3.1 Algorismes generals

Primerament examinarem la taxa de convergència d'un algorisme *IMS*. Altrament, partim de que coneguem les relacions de l'error per a tots els passos excepte per a l'inicial. El següent Teorema determina la taxa de convergència per a l'algorismes quan s'introdueix la memòria en el primer pas.

Teorema 16 *Siga f una funció suficientment diferenciable en un entorn d'una arrel simple aïllada α . Suposem que la relació per a l'error en els passos predictors (1), ..., (k) del algorisme predictor corrector en k-passos millorat (6.6) vénen donats per $\varepsilon_n^{(\ell)} \sim \varepsilon_n^{r_\ell} (\varepsilon_n^{(0)})^{s_\ell}$, amb $r_\ell, s_\ell \geq 1$, que la del pas corrector es expressada per $\varepsilon_{n+1} \sim \varepsilon_n^p (\varepsilon_n^{(0)})^q$, amb $p, q \geq 1$, i que*

$y_n^{(\ell)}$ és una aproximació a l'arrel buscada α almenys tant bona com $y_n^{(\ell-1)}$ per $0 \leq \ell \leq k$ (on hem denotat $x_n = y_n^{(-1)}$); aqò és, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_n^{(\ell)}|}{|\varepsilon_n^{(\ell-1)}|} < \infty$. Aleshores la taxa de convergència per a l'algorisme iteratiu (6.6) es donada per

$$\rho = \frac{(p+q+s_k) + \sqrt{(p+q+s_k)^2 - 4(ps_k - qr_k)}}{2}.$$

Demostració: Aquesta demostració comença seguint els mateixos passos que els Teoremes 13 i 14, a excepció de què l'equació (6.7) serà $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^{(k)} - f(y_n^{(k)})\Phi(x_n, y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(k)})$, resultant en

$$\varepsilon_{n+1}^{(0)} = \varepsilon_{n+1} + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{(k)}) \frac{f(x_{n+1})}{f(y_n^{(k)})}$$

i en conseqüència, $\varepsilon_{n+1}^{(0)} \sim \varepsilon_{n+1} \varepsilon_n^{(k)}$. Per determinar la taxa de convergència, hem de considerar el sistema

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(0)} &\sim \varepsilon_n \varepsilon_{n-1}^{(k)} \\ \varepsilon_n^{(1)} &\sim \varepsilon_n^{r_1} (\varepsilon_n^{(0)})^{s_1} \\ &\vdots \\ \varepsilon_n^{(k)} &\sim \varepsilon_n^{r_k} (\varepsilon_n^{(0)})^{s_k} \\ \varepsilon_{n+1} &\sim \varepsilon_n^p (\varepsilon_n^{(0)})^q \end{aligned}$$

el qual, després d'un canvi de variables, donarà lloc a

$$\begin{aligned} \mu_n &\sim \eta_n + \nu_{n-1}^{(k)} \\ \nu_n^{(1)} &\sim r_1 \eta_n + s_1 \mu_n \\ &\vdots \\ \nu_n^{(k)} &\sim r_k \eta_n + s_k \mu_n \\ \eta_{n+1} &\sim p \eta_n + q \mu_n. \end{aligned}$$

Considerant que $\mu_n \sim \frac{\eta_{n+1} - p \eta_n}{q}$, l'equació característica obtinguda per a η_n serà

$$\eta_{m+1} - (p+q+s_k)\eta_m + (ps_k - qr_k)\eta_{m-1} = 0$$

les solucions de les quals $\rho_{+,-} = \frac{(p+q+s_k) \pm \sqrt{(p+q+s_k)^2 - 4(ps_k - qr_k)}}{2}$.
 Suposem que definim $h(x) = x^2 - (p+q+s_k)x + (ps_k - qr_k)$, així que $h(-1) = (1+ps_k - qr_k) + (p+q+s_k)$ i $h(1) = (1+ps_k - qr_k) - (p+q+s_k)$. Notem que $h(-1) > h(1)$, degut a que $p, q, s_k > 0$. Si $(p+q+s_k) \geq (1+ps_k - qr_k)$, tenim que $-1 < \rho_- \leq 1$, i segons allò que marca el Teorema 13 la taxa de convergència de l'algorisme és $\rho = \frac{(p+q+s_k) + \sqrt{(p+q+s_k)^2 - 4(ps_k - qr_k)}}{2}$. Suposem que $(p+q+s_k) < (1+ps_k - qr_k)$. Primerament hem de notar que $ps_k - qr_k > 0$ ha de donar-se per a què es done aquesta situació, ja que $p, q, s_k, r_k \geq 1$. Com a conseqüència, $1 < \rho_- < \rho_+$. La solució de l'equació en diferències en η pot escriure's com

$$\eta_n = k_1 \rho_+^n + k_2 \rho_-^n = k_1 \rho_+^n \left[1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right)^n \right]$$

així, si definim $\kappa_n = \left(\frac{1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right)^{n+1}}{1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right)^n} \right)$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &\sim \exp\left(k_1 \rho_+^{n+1} \left[1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right)^{n+1} \right]\right) \\ &= \exp\left(k_1 \rho_+^n \left[1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right)^n \right] \cdot \rho_+^{\kappa_n}\right) \\ &= \left(\varepsilon_n^{\kappa_n} \right)^{\rho_+} \\ &\sim \varepsilon_n^{\rho_+} \end{aligned}$$

ja que $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = 1$, i així $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n^{\kappa_n}|^{\rho_+}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^{\rho_+}}$. Per tant, la taxa de convergència de l'algorisme és

$$\rho = \frac{(p+q+s_k) + \sqrt{(p+q+s_k)^2 - 4(ps_k - qr_k)}}{2}.$$

□

6.3.2 Mètodes iteratius proposats

En aquesta secció proposem un nou algorisme multipas que utilitza la idea que hem introduït en la secció prèvia, és a dir, emprar el pendent de l'últim

pas corrector de la iteració anterior per al pendent del primer pas (predictor) de la nova iteració. L'algorisme és una modificació del conegut mètode multipunt que fa ús de la interpolació polinòmica per a la construcció de mètodes iteratius òptims sense memòria, vore [80, 83]. Obtindrem les taxes de convergència a partir dels teoremes anteriors.

Considerem la família de mètodes ZLH (Zheng-Li-Huang) publicada a [83]. Aquesta família requereix $n + 1$ punts $(y_k^{(-1)}, y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(n-1)})$, i fa ús d' $n + 1$ avaluacions funcionals per iteració, i demostra tindre taxa de convergència òptima 2^n . Per a $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la iteració s'expressa per:

$$\begin{aligned} y_k^{(0)} &= x_k, & y_k^{(-1)} &= y_k^{(0)} + \gamma f(y_k^{(0)}) \\ y_k^{(1)} &= y_k^{(0)} - \frac{f(y_k^{(0)})}{f[y_k^{(0)}, y_k^{(-1)}]} \\ y_k^{(2)} &= y_k^{(1)} - \frac{f(y_k^{(1)})}{P'_{k,1}(y_k^{(1)})} \\ &\vdots \\ x_{k+1} &= y_k^{(n-1)} - \frac{f(y_k^{(n-1)})}{P'_{k,n-1}(y_k^{(n-1)})}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

on $f[\cdot]$ indica una diferència dividida definida recursivament per $f[x_i] = f(x_i)$ i $f[x_0, x_1, \dots, x_\ell] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_\ell] - f[x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}]}{x_\ell - x_0}$, i $P_{k,\ell}(t)$ denota el polinomi interpolatori de Newton de grau $\ell + 1$ basat en els punts, $y_k^{(-1)}, y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(\ell)}$, dades generades per la iteració k -èsima, definida per:

$$P_{k,\ell}(t) = f[y_k^{(\ell)}] + \sum_{i=1}^{\ell+1} f[y_k^{(\ell)}, y_k^{(\ell-1)}, \dots, y_k^{(\ell-i)}] \prod_{j=0}^{i-1} (t - y_k^{(\ell-j)}),$$

així que

$$P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)}) = f[y_k^{(\ell)}, y_k^{(\ell-1)}] + \sum_{i=2}^{\ell+1} f[y_k^{(\ell)}, y_k^{(\ell-1)}, \dots, y_k^{(\ell-i)}] \prod_{j=1}^{i-1} (y_k^{(\ell)} - y_k^{(\ell-j)}).$$

L'algorisme que proposem intercanvia els rols de $y_k^{(-1)}$ i $y_k^{(0)}$ i reutilitza el pendent del pas del corrector anterior per obtenir el primer pas en una nova iteració. Aquesta modificació introdueix la memòria a l'expressió

establint γ per al pendent de l'últim pas de la iteració anterior. D'aquest algorisme es prova en la següent demostració assolir una taxa de convergència de $2^n + 2^{n-2}$ mentre utilitza el mateix nombre d'avaluacions funcionals per iteració que la família de mètodes ZLH. La funció d'iteració per a l'algorisme proposat, (OP) , té $n - 1$ passos intermedis i es donada per:

$$\begin{aligned} y_k^{(0)} &= x_k - \frac{f(x_k)}{P'_{k-1,n-1}(y_{k-1}^{(n-1)})}, & y_k^{(-1)} &= x_k \\ y_k^{(\ell+1)} &= y_k^{(\ell)} - \frac{f(y_k^{(\ell)})}{P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)})}, & \ell &= 0, 1, \dots, n-2 \\ x_{k+1} &= y_k^{(n-1)} - \frac{f(y_k^{(n-1)})}{P'_{k,n-1}(y_k^{(n-1)})}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Òbviament necessitem per a la primera iteració començar per un valor x_0 i un valor constant per a $P'_{0,n-1}(y_0^{(n-1)})$. El següent Teorema empra el resultat del Teorema 16 per obtenir la taxa de convergència.

Teorema 17 *Suposem que α és una arrel simple de $f(x)$. Aleshores l'algorisme numèric expressat en (6.10), denotat per OP , té ordre de convergència $2^n + 2^{n-2}$, sempre que el mètode siga convergent.*

Demostració: Si denotem $y_k^{(n)} = x_{k+1}$, aleshores tots els passos de l'algorisme, excepte el primer $(y_k^{(0)})$, són de la forma

$$y_k^{(\ell+1)} = y_k^{(\ell)} - \frac{f(y_k^{(\ell)})}{P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)})}$$

així que si sostraiem α d'ambdós costats i apliquem el Teorema de Taylor, aquest és equivalent a:

$$(\varepsilon_k^{(\ell+1)} - \varepsilon_k^{(\ell)})P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)}) = -f'(p)\varepsilon_k^{(\ell)} - \frac{f''(p)}{2}(\varepsilon_k^{(\ell)})^2 + O((\varepsilon_k^{(\ell)})^3). \quad (6.11)$$

Considerant l'error d'interpolació tenim, $f(x) - P_{k,\ell}(x) = \frac{f^{(\ell+1)}(\xi_{k,\ell})}{(\ell+1)!} \prod_{i=-1}^{\ell} (x - y_k^{(i)})$ per algun $m_1 < \xi_{k,\ell} < m_2$ on $m_1 = \min_i(y_k^{(i)})$ i $m_2 = \max_i(y_k^{(i)})$, i apli-

cant la regla de la derivada d'un producte:

$$f'(y_k^{(\ell)}) - P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)}) = \frac{f^{(\ell+1)}(\xi_{k,\ell})}{(\ell+1)!} \prod_{i=-1}^{\ell-1} (y_k^{(\ell)} - y_k^{(i)}).$$

Després d'aplicar el Teorema de Taylor i sumar/restar α ,

$$P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)}) = f'(\alpha) + f''(\alpha)\varepsilon_k^{(\ell)} - \frac{f^{(\ell+1)}(\xi_{k,\ell})}{(\ell+1)!} \prod_{i=-1}^{\ell-1} (\varepsilon_k^{(\ell)} - \varepsilon_k^{(i)}) + O\left((\varepsilon_k^{(\ell)})^2\right).$$

D'aquesta forma l'equació (6.11) esdevé:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_k^{(\ell+1)} - \varepsilon_k^{(\ell)}) \left[f'(\alpha) + f''(\alpha)\varepsilon_k^{(\ell)} - \frac{f^{(\ell+1)}(\xi_{k,\ell})}{(\ell+1)!} \prod_{i=-1}^{\ell-1} (\varepsilon_k^{(\ell)} - \varepsilon_k^{(i)}) + O\left((\varepsilon_k^{(\ell)})^2\right) \right] \\ = -f'(\alpha)\varepsilon_k^{(\ell)} - \frac{f''(\alpha)}{2}(\varepsilon_k^{(\ell)})^2 + O\left((\varepsilon_k^{(\ell)})^3\right), \end{aligned}$$

o equivalentment,

$$\varepsilon_k^{(\ell+1)} = \frac{\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(\varepsilon_k^{(\ell)})^2 - \frac{f^{(\ell+1)}(\xi_{k,\ell})}{f'(\alpha)(\ell+1)!}\varepsilon_k^{(\ell)} \prod_{i=-1}^{\ell-1} (\varepsilon_k^{(\ell)} - \varepsilon_k^{(i)}) + O\left((\varepsilon_k^{(\ell)})^3\right)}{1 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\varepsilon_k^{(\ell)} - \frac{f^{(\ell+1)}(\xi_{k,\ell})}{f'(\alpha)(\ell+1)!} \prod_{i=-1}^{\ell-1} (\varepsilon_k^{(\ell)} - \varepsilon_k^{(i)}) + O\left((\varepsilon_k^{(\ell)})^2\right)}.$$

Escrivint en termes d'una sèrie infinita i operant convenientment com en [76] s'obté que:

$$\varepsilon_k^{(\ell+1)} = (-1)^{\ell+1} \frac{f^{(\ell+1)}(\xi_{k,\ell})}{f'(\alpha)(\ell+1)!} \prod_{i=-1}^{\ell} \varepsilon_k^{(i)} + h.o.t.$$

En conseqüència, els errors principals, pel que fa a la taxa de convergència, són:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{(1)} &\sim \varepsilon_k^{(0)} \varepsilon_k \\ \varepsilon_k^{(2)} &\sim \varepsilon_k^{(1)} \varepsilon_k^{(0)} \varepsilon_k = (\varepsilon_k^{(0)})^2 \varepsilon_k^2 \\ \varepsilon_k^{(3)} &\sim \varepsilon_k^{(2)} \varepsilon_k^{(1)} \varepsilon_k^{(0)} \varepsilon_k = (\varepsilon_k^{(0)})^4 \varepsilon_k^4 \\ &\vdots \\ \varepsilon_k^{(n-1)} &\sim (\varepsilon_k^{(0)})^{2^{n-2}} \varepsilon_k^{2^{n-2}} \\ \varepsilon_{k+1} &\sim (\varepsilon_k^{(0)})^{2^{n-1}} \varepsilon_k^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

I com s'empra el pas predictor inicial empra el pendent del pas corrector previ,

$$y_k^{(0)} = x_k - f(x_k)\Phi(x_{k-1}, y_{k-1}^{(0)}, \dots, y_{k-1}^{(n-1)}),$$

Apliquem el Teorema 16 amb $p = q = 2^{n-1}$ i $r_{n-1} = s_{n-1} = 2^{n-2}$ per calcular la taxa de convergència:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p + q + s_{n-1} + \sqrt{(p + q + s_{n-1})^2 - 4(ps_{n-1} - qr_{n-1})}}{2} \\ &= \frac{2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \sqrt{(2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-2})^2 - 4(2^{n-1}2^{n-2} - 2^{n-1}2^{n-2})}}{2} \\ &= 2^n + 2^{n-2}. \end{aligned}$$

□

6.3.3 Anàlisi exhaustiva de l'eficiència computacional

És preceptiu en una nova proposta, comparar els nous mètodes amb d'altres ja existents amb característiques semblants per a mostrar la seua eficiència. En aquest sentit, citarem un interessant article de Džunić i Petković, vore [81], i compararem el mètode que proposem amb el seu. En [81], els autors porten a terme un complet estudi de mètode iteratius amb memòria emprant polinomis d'interpolació de Newton, considerant mètodes biparamètrics multipunt de la següent forma:

$$\begin{aligned} y_k^{(-1)} &= x_k \\ y_k^{(0)} &= x_k + \gamma f(x_k) \\ y_k^{(1)} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, y_k^{(0)}] + pf(y_k^{(0)})} \\ y_k^{(\ell+1)} &= y_k^{(\ell)} - \frac{f(y_k^{(\ell)})}{P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)})}, \quad \ell = 1, \dots, n-2 \\ x_{k+1} &= y_k^{(n-1)} - \frac{f(y_k^{(n-1)})}{P'_{k,n-1}(y_k^{(n-1)})} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Partint d'aquest mètode multipunt s'obtenen dues famílies amb memòria. En la primera, es demostra que si $\gamma = \frac{-1}{f'(\alpha)}$, aleshores la taxa de convergència s'incrementa fins $2^n + 2^{n-1}$, així els autors introdueixen la memòria

en l'aproximació del paràmetre γ . Aquest mètode iteratiu amb memòria, que denotarem per *DP1*, i ve donada per:

$$\begin{aligned}
y_k^{(-1)} &= x_k, \quad \gamma_k = \frac{-1}{N'_m(y_k^{(-1)})} \\
y_k^{(0)} &= x_k + \gamma_k f(x_k) \\
y_k^{(1)} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, y_k^{(0)}] + pf(y_k^{(0)})} \\
y_k^{(\ell+1)} &= y_k^{(\ell)} - \frac{f(y_k^{(\ell)})}{P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)})}, \quad \ell = 1, \dots, n-2 \\
x_{k+1} &= y_k^{(n-1)} - \frac{f(y_k^{(n-1)})}{P'_{k,n-1}(y_k^{(n-1)})}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

on $N'_m(y_k^{(-1)})$ denota l'avaluació en $y_k^{(-1)}$ de la derivada del polinomi d'interpolació de Newton de grau m basat en els m passos de les iteracions precedents. Així, si considerem el cas $m = n + 1$ corresponent al major ordre de convergència obtingut, aquest es pot expressar com

$$N_m(x_k; y_k^{(-1)}, y_{k-1}^{(n-1)}, y_{k-2}^{(n-2)}, \dots, y_{k-1}^{(0)}, y_{k-1}^{(-1)}).$$

Els càlculs per aquesta nova quantitat no afegeix avaluacions funcionals, però el conjunt general d'operacions per iteració es veu incrementat, ja que el polinomi de Newton no ha sigut encara calculat. El segon paràmetre p també pot aproximar-se emprant les dades històriques per incrementar l'ordre de convergència per al mètode iteratiu fins $2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2}$. El

mètode iteratiu obtingut, denotat per *DP2*, s'expressa així:

$$\begin{aligned}
 y_k^{(-1)} &= x_k, \quad \gamma_k = \frac{-1}{N'_m(y_k^{(-1)})} \\
 y_k^{(0)} &= x_k + \gamma_k f(x_k), \quad p_k = \frac{-N''_{m+1}(y_k^{(0)})}{2N'_{m+1}(y_k^{(0)})} \\
 y_k^{(1)} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, y_k^{(0)}] + p_k f(y_k^{(0)})} \\
 y_k^{(\ell+1)} &= y_k^{(\ell)} - \frac{f(y_k^{(\ell)})}{P'_{k,\ell}(y_k^{(\ell)})}, \quad \ell = 1, \dots, n-2 \\
 x_{k+1} &= y_k^{(n-1)} - \frac{f(y_k^{(n-1)})}{P'_{k,n-1}(y_k^{(n-1)})}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

on $N'_{m+1}(y_k^{(0)})$ i $N''_{m+1}(y_k^{(0)})$ denoten l'avaluació en $y_k^{(0)}$ de les derivades dels polinomis d'interpolació de Newton de grau $m+1$ per a dos punts de la nova iteració i els $m = n+1$ punts de l'iteració anterior, és a dir

$$N_{m+1}(y_k^{(0)}; y_k^{(0)}, y_k^{(-1)}, y_{k-1}^{(n-1)}, y_{k-1}^{(n-2)}, \dots, y_{k-1}^{(0)}, y_{k-1}^{(-1)}).$$

Òbviament els mètodes iteratius amb memòria, *OP*, *DP1* i *DP2*, derivats del mètode iteratiu òptim sense memòria, *ZLH*, fan ús del mateix nombre d'avaluacions funcionals, $n+1$, per tant els corresponents índexs d'eficiència, *EI*, augmenten amb l'increment de l'ordre de convergència. Aquests es poden veure a la Taula 6.2. No obstant això, per als mètodes d'alt ordre, cal tenir en compte també l'eficiència computacional, *CE* ([73]), la qual es defineix per un mètode amb ordre de convergència ρ , a partir de la quantitat d'operacions dutes a terme per cada iteració (N), específicament productes i quocients. En aquest cas $N = N_f + N_o$, on N_f és el cost de les avaluacions de la funció i N_o és el cost de la fórmula d'iteració. Així, aquest cost s'obté com $CE = \rho^{1/N}$. Per obtenir els valors de N_o , hem de considerar la quantitat de productes i quocients que els mètodes iteratius *OP*, *DP1* i *DP2* realitzen per cada iteració. És ben conegut que per obtenir un polinomi interpolador de Newton de grau n partint del polinomi corresponent de grau $n-1$ són necessàries $n(n+1)/2$ operacions. Es necessita la mateixa quantitat d'operacions per avaluar la derivada d'aquest polinomi de Newton en l'últim punt. Per tant, els *OP* realitzen $n(n+1)$

$n = 2$	ordre	EI	$n = 3$	ordre	EI	$n = 4$	ordre	EI
OP	5	1.71	OP	10	1.7783	OP	20	1.8206
DP1	6	1.8171	DP1	12	1.8612	DP1	24	1.8882
DP2	7	1.9129	DP2	14	1.9343	DP2	28	1.9473

Taula 6.2: Índexs d'eficiència per a les variants-*ZLH* amb $n = 2, 3, 4$ passos.

operacions per iteració. Mentre que *DP1* utilitza un polinomi de Newton més de grau $n + 1$, i la seua derivada, i per tant requereix $(n + 1)(n + 2)$ operacions. *DP2* utilitza un polinomi d'un grau més encara i, en conseqüència, $(n + 2)(n + 3)$ operacions. Els índexs d'eficiència computacional dels mètodes estudiats per a diferents valors de n es poden visualitzar a la Figura 6.2. Les tres figures representen algorismes amb $n = 2, 3, 4$ passos, respectivament. En cada figura, es comparen els mètodes per a diversos valors de f_{ops} , el nombre d'operacions significatives que s'han de realitzar per avaluar la funció no lineal $f(x)$. El mètode proposat per nosaltres *OP* presenta una eficiència computacional millor que *DP1* i *DP2* en tots els casos. També es pot constatar que l'eficiència computacional disminueix a mesura que augmenta la complexitat $f(x)$.

Com els mètodes d'alt ordre normalment necessiten menys iteracions que els mètodes amb menor ordre de convergència, completarem l'estudi de l'eficiència analitzant el cost total de computar una arrel. Obtenim l'eficiència computacional total prenent en consideració el nombre d'iteracions realitzades (k) així com el cost de cada iteració (N). Denotant aquest per *TCE*, definim l'eficiència computacional total per $TCE = \rho^{\frac{1}{kN}}$. Hem vist que l'eficiència computacional per iteració de *OP* és millor que la de *DP1* i la de *DP2*. Ara se'ns planteja la següent pregunta: quantes iteracions menys haurien de requerir els mètodes iteratius *DP1* i *DP2* per ser computacionalment més eficients que *OP*? Aconseguim el resultat següent que estableix la relació entre l'eficiència computacional total dels mètodes de les seccions anteriors.

Teorema 18 *Suposem un esquema iteratiu amb taxa de convergència ρ_1 , que requereisca k iteracions per assolir la solució amb tolerància tol i N_1*

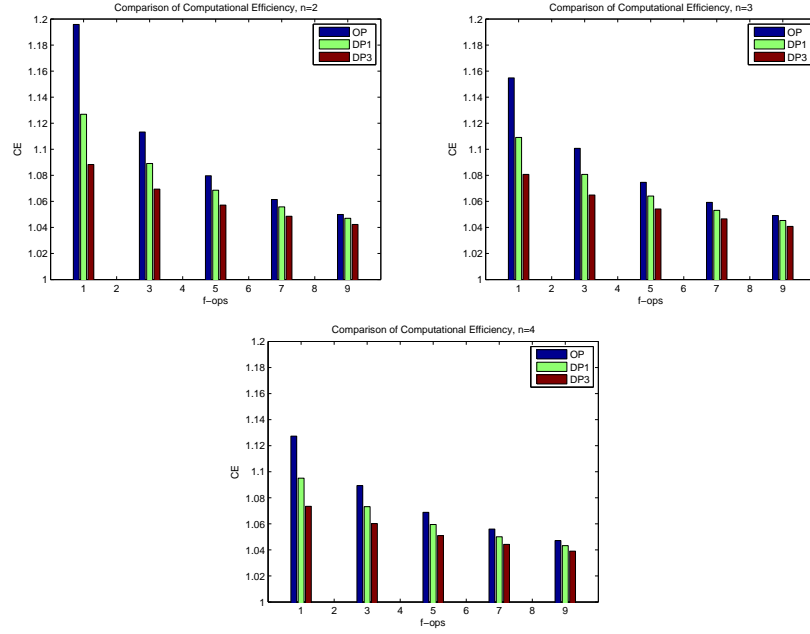


Figura 6.2: Comparativa entre les eficiències computacionals per als tres mètodes OP , $DP1$, $DP2$ quan estudiem les funcions de variació de la complexitat donades per N_f (eix horitzontal). Les tres figures examinades en aquests mètodes mutipias variant el nombre de passos n : (superior-esquerre) $n = 2$, (superior-dreta) $n = 3$, (inferior) $n = 4$.

operacions per iteració, mentre que un segon esquema iteratiu amb taxa de convergència ρ_2 amb $1 < \rho_1 < \rho_2$, que requerisca $k - i$ iteracions i N_2 operacions per iteració. Aleshores els índexs TCE del primer esquema són superiors als del segon per a:

$$i < k \left(1 - \frac{N_1 \ln(\rho_2)}{N_2 \ln(\rho_1)} \right). \quad (6.15)$$

Demostració: Hauríem de conèixer els valors de i per als quals $\rho_2^{\frac{1}{(k-i)N_2}} < \rho_1^{\frac{1}{kN_1}}$. Prenent logaritmes naturals als dos costats i realitzant els càlculs com al Teorema 15, obtenim l'expressió (6.15). \square

Per a cadascun dels mètodes iteratius a estudi, tenim que $TCE(OP) > TCE(DP1)$ si la diferència entre el nombre d'iteracions i es troba acotat

per:

$$i < k \left(1 - \frac{(n+j)}{(n+2+j)} \frac{(n-1+\log_2 3)}{(n-2+\log_2 5)} \right)$$

on j denota el nombre d'operacions requerides per avaluar la funció no lineal $f(x)$. D'igual manera, tenim que $TCE(OP) > TCE(DP2)$ si:

$$i < k \left(1 - \frac{(n+1)(n+j)}{[(n+2)(n+3)+j(n+1)]} \frac{(n-2+\log_2 7)}{(n-2+\log_2 5)} \right).$$

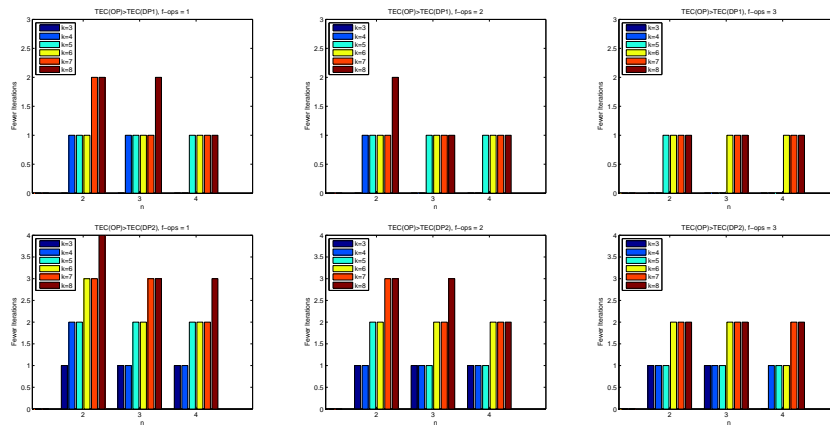


Figura 6.3: Nombre d'iteracions que OP pot tindre menor que $DP1$ (fila superior) i que $DP2$ (fila inferior), de manera que l'eficiència computacional total de OP és millor que $DP1/DP2$. A les columnes es consideren les j operacions significatives requerides per $f(x)$, on: $j = 1$ (esquerra), $j = 2$ (centre), $j = 3$ (dreta).

Tal com es pot observar a la Figura 6.3, el mètode proposat per nosaltres OP pot ser computacionalment més eficient que els mètodes d'ordre superior $DP1$ i $DP2$, tot i que requereixen menys iteracions. De fet, en eixa figura es representa per a diferents valors del nombre de passos de l'algorisme (n) i les iteracions realitzades (k), la diferència d'iteracions per a la qual OP presenta millor eficiència computacional que $DP1$ i $DP2$. Per exemple, suposem que $f(x)$ requereix una operació significativa, i considerem els mètodes amb tres passos ($n = 3$). Si OP necessita $k = 5$ iteracions, aleshores aquest mètode és més eficient que $DP1$, tot i que $DP1$ requereix d'una menys iteració, i més encara, l'eficiència d' OP continua sent millor

que la de *DP2* emprant aquesta dues iteracions menys. Aquesta millora es redueix, però, a mesura que la quantitat de càlculs necessaris per avaluar $f(x)$ augmenta.

6.3.4 Simulacions numèriques

Per a verificar l'ordre de convergència teòric obtingut dels mètodes amb memòria precedents, executarem els mètodes *ZLH*, *OP*, *DP1* i *DP2* amb diferents valors de n . Hem considerat les següents funcions per al test:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x \sin(x) + \log(x^2 + 1), & x_0 &= 0.3 \\ f_2(x) &= x^2 - (1 - x)^{25}, & x_0 &= 1 \\ f_3(x) &= x^3 + \cos(x) - 2, & x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Els càlculs s'han dut a terme amb MATLAB 2015a, emprant aritmètica de precisió variable amb 1500 dígits, prenent com a criteri de parada $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-50}$. L'ordre de convergència computacionalment aproximat (*ACOC*) definida en [99], és donada per:

$$ACOC = \frac{\ln(|x_{k+1} - x_k|/|x_k - x_{k-1}|)}{\ln(|x_k - x_{k-1}|/|x_{k-1} - x_{k-2}|)}.$$

L'error final (E), l'*ACOC*, el nombre d'iteracions (K), i la *TCE* dels mètodes precedents aplicats a les equacions de test es mostren a la Taula 6.3, on els resultats numèrics confirmen els nostres resultats teòrics sobre l'ordre de convergència i l'eficiència posant de relleu la competitivitat dels mètodes proposats. En particular, caldria notar que en la majoria dels casos l'*OP* té un índex *TCE* superior als corresponents a les proves realitzades amb *ZLH*, *DP1* i *DP2*, malgrat que típicament *DP1* i *DP2* convergeixen amb un menor nombre d'iteracions. Tot i això, aquesta afirmació no és necessàriament certa per a $f_1(x)$, el qual posseeix una complexitat major que $f_2(x)$ i $f_3(x)$, confirmant altrament els resultat teòrics aconseguits en aquesta secció.

6.4 Dinàmica d'un mètode amb memòria

El comportament dels mètodes iteratius normalment és estudiat des d'un punt de vista global fent ús de les idees sobre sistemes dinàmics. La

Mètode	$f_1(x)$ $x_0 = 0.3$				$f_2(x)$ $x_0 = 1$				$f_3(x)$ $x_0 = 1$				
	n	E	K	$ACOC$	TCE	E	K	$ACOC$	TCE	E	K	$ACOC$	TCE
ZLH	2	1e-275	6	4.0000	1.0234	4e-214	7	4.0000	1.0251	2e-319	6	4.0000	1.0293
	3	2e-155	4	7.9994	1.0330	2e-278	5	8.0000	1.0302	2e-185	4	7.9999	1.0378
	4	1e-1285	4	16.0000	1.0293	1e-148	4	16.1540	1.0320	-	-	-	-
OP	2	1e-219	6	5.0000	1.0272	3e-390	7	5.0000	1.0292	1e-165	5	5.0000	1.0411
	3	7e-756	5	10.0000	1.0292	3e-129	5	10.0243	1.0334	3e-289	4	9.9971	1.0420
	4	7e-620	4	19.9712	1.0317	4e-154	4	19.0685	1.0346	8e-118	3	21.4046	1.0464
DP1	2	5e-291	4	6.0000	1.0284	4e-260	5	6.0099	1.0259	6e-151	5	6.0000	1.0259
	3	4e-400	3	11.9982	1.0351	6e-670	4	12.1058	1.0286	9e-499	4	12.0000	1.0286
	4	1e-135	2	22.6145	1.0478	1e-397	3	23.9174	1.0337	2e-371	3	23.8957	1.0337
DP2	2	2e-101	3	6.9480	1.0274	4e-157	5	6.9589	1.0178	3e-349	4	7.0000	1.0224
	3	4e-727	3	14.0362	1.0262	2e-480	4	13.8841	1.0208	7e-368	3	13.9981	1.0279
	4	1e-199	2	27.9679	1.0369	6e-131	3	29.9102	1.0256	2e-101	2	28.9762	1.0386

Taula 6.3: Comparativa de les taxes de convergència i les eficiències computacionals per a *ZLH* i les tres variants *OP*, *DP1*, i *DP2*.

dinàmica complexa és la ferramenta fonamental per a l'estudi dels mètodes sense memòria, no sols per les bones propietats de les funcions analítiques en el domini complex, sinó també perquè proveeixen una bona representació pictòrica en dues dimensions. Malgrat això, les necessitats per a més d'una variable en el cas de mètodes iteratius amb memòria requereixen algunes adaptacions per estudiar i representar de forma adient el comportament d'aquests mètodes. Primerament recordarem alguns conceptes bàsics sobre dinàmica, per clarificar la notació: Considerem una funció $G : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. El conjunt de les successives imatges d'un punt p per G , denotades com $p, G(p), G(G(p)), \dots$, és l'òrbita de p . Un punt $q \in \widehat{\mathbb{C}}$ s'anomenarà com *punt fix* de G si fix $G(q) = q$. Un punt fix q és *atractor* si les òrbites de tots els punts en un entorn de q tendeixen a q . El conjunt de tots els punts l'òrbita que convergeixen a un punt fix q s'anomena *conca d'atracció* de q . Les conques d'atracció dels punts fixos formen un *conjunt de Fatou*. Complementàriament, el *conjunt de Julia*, estableix els límits de les conques d'atracció. Les conques d'atracció de diferents punts fixos de G es representen gràficament acolorint cadascuna de les conques amb un color diferent, formant el pla dinàmic. Si G és la funció d'iteració d'un mètode numèric per a resoldre equacions, les conques d'atracció de G donen una idea del comportament del mètode i la seua sensibilitat a les estimacions inicials. Analtzarem les propietats dinàmiques dels mètodes de la secció (6.3.2) aplicant-los a polinomis de baix grau per donar un aproximament qualitatiu de l'estabilitat del mètode iteratiu d'un mètode en termes de les estimacions inicials de les arrels.

6.4.1 Mètode del punt mitjà amb memòria

L'algorisme predictor-corrector en dos passos estàndard basat en la regla del punt mitjà (6.8) pot expressar-se com segueix:

$$y_n = x_n - f(x_n)\Phi_n \quad (6.16)$$

$$\Phi_{n+1} = 1/f' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\Phi_{n+1}. \quad (6.17)$$

Donat un valor inicial $\phi = \Phi_0$, obtenim una funció d'iteració $G_\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $G_\phi(x_n) = x_{n+1}$ és el resultat del pas n -èsim del mètode (6.16-6.17). Els punts fixos es defineixen per la condició $G_\phi(x_n) = x_n$. De (6.17) obtenim $f(x_n) = 0$ o $\Phi_{n+1} = 0$. En el primer cas, x_n ha de ser una arrel de $f(x) = 0$, mentre que la segona condició es verifica si $f'(\frac{x_n+y_n}{2}) = \infty$. A partir d'un punt arbitrari $x_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ i una estimació inicial de la inversa del pendent $\Phi_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, comprovem la convergència de la successives x_n . Si convergeix a una arrel del polinomi, llavors x_0 està a la conca d'atracció d'aquesta arrel. Les iteracions s'executen fins que la distància entre iterats consecutius és inferior a una tolerància determinada, en concret, 10^{-12} . Permetrem un màxim de 100 iteracions. El pla dinàmic s'obté acolorint x_0 segons el punt fix al qual convergeix la seqüència, les diferents tonalitat són indicatives de la quantitat d'iteracions necessàries per que la diferència entre iteracions es trobe per sota de la tolerància establida. Els punts de partida per als quals el mètode no convergeix es representen en blau.

Primerament prendrem un polinomi complex de segon grau $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. El mètode iteratiu que resulta ve expressat per:

$$\Phi_{n+1} = \frac{1}{2x_n - c\Phi_n - x_n^2\Phi_n}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{c + x_n^2}{2x_n - c\Phi_n - x_n^2\Phi_n}.$$

Per a un polinomi de tercer grau $f(x) = x^3 + c$, les iteracions són:

$$\Phi_{n+1} = \frac{4}{3(-2x_n + c\Phi_n + x_n^3\Phi_n)^2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4(c + x_n^3)}{3(-2x_n + c\Phi_n + x_n^3\Phi_n)^2}$$

i per a un polinomi de quart grau $f(x) = x^4 + c$,

$$\Phi_{n+1} = \frac{2}{(2x_n - c\Phi_n - x_n^4\Phi_n)^3}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(c + x_n^4)}{(2x_n - c\Phi_n - x_n^4\Phi_n)^3}.$$

La Figura 6.4 (*esquerra*) mostra les conques d'atracció de l'algorisme del punt mitjà amb memòria per $f(x) = x^2 - 1$ i $\phi = 100$. Les conques són bastant similars a les obtingudes per al mètode de Newton aplicat a la

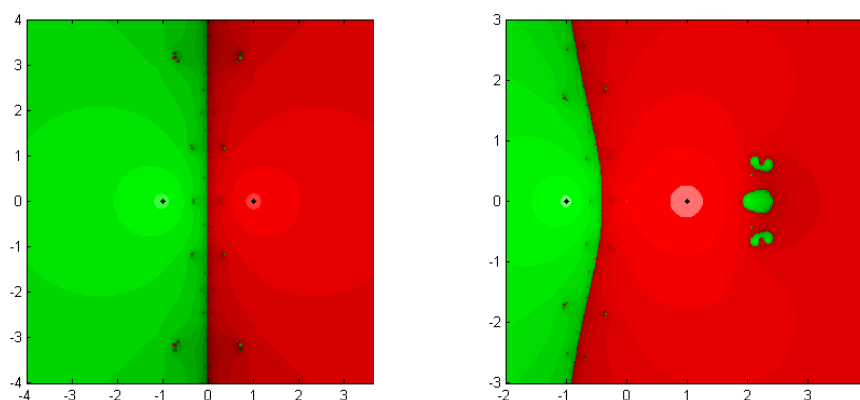


Figura 6.4: Conques d'atracció de l'algorisme del punt mitjà amb memòria per a $f(x) = x^2 - 1$ i $\phi = 100$ (esquerra) i $\phi = 1$ (dreta).

mateixa funció, però no es dona una simetria perfecta entre les arrels. A més a més, en cadascuna de les conques hi trobem illes menudes de l'altra, que s'aproximen a la línia límit d'una manera fractal. Tècnicament parlant, el conjunt de Julia del mètode de Newton aplicat a un polinomi quadràtic és una línia, la bisectriu de les arrels [85], mentre que ara el conjunt de Julia està més intrincat i no està connectat. Per a altres valors del paràmetre ϕ s'obtenen diferents formes de les conques. Per a $\phi > 0$, el límit de la conca es doblega cap a l'esquerra i per $\phi < 0$ cap a la dreta. Per a valors de paràmetre més menuts però encara positius, apareixen més enllà de l'arrel $x = 1$ més illes que convergeixen a l'arrel $x = -1$, la mida de les quals creix a mesura que ϕ disminueix, i el conjunt de Julia es doblega cap a l'esquerra com es mostra a la figura 6.4 (dreta). Per als valors negatius del paràmetre, les illes apareixen prop de l'altra arrel (vore la Figura 6.5). Les conques d'atracció per al polinomi de tercer grau $f(x) = x^3 - 1$ amb valors alts del paràmetre són lleugerament més complexes que les del mètode de Newton i recobreixen quasi tot el pla, tal com es mostra a la Figura 6.6 (esquerra) per $\phi = 100$. Com abans, els valors més baixos del paràmetre donen lloc a una dinàmica més rica (vore Figura 6.6 (dreta)).

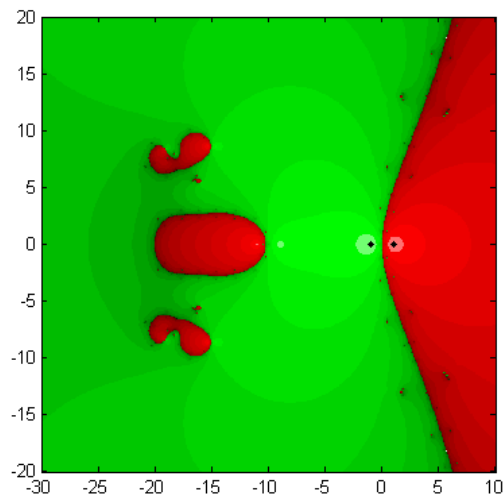


Figura 6.5: Conques d'atracció per a l'algorisme del punt mitjà amb memòria per $f(x) = x^2 - 1$ i $\phi = -0.1$.

6.4.2 L'algorisme proposat

Considerarem ara el comportament de l'algorisme (6.10) amb diferent nombre de passos per a les mateixes funcions abans provades. La dinàmica dels mètodes d'aquesta classe és més rica que la dels mètodes de la subsecció anterior, la qual cosa es reflecteix en la major complexitat numèrica. Aquesta complexitat s'incrementa amb el nombre de passos i amb el grau del polinomi. Els mètodes són exactes per a polinomis de baix grau, per aquest motiu els aplicarem a polinomis de grau superior a mesura que augmentem el nombre de passos intermedis. Primer considerem l'aplicació del mètode (6.10) a un polinomi de tercer grau amb un pas intermedi, $n = 2$. Per $\phi = 100$, el pla dinàmic presenta tres conques separades per un conjunt de Julia més dispers que en l'algorisme de punt mitjà amb memòria, però encara similar al cas del mètode de Newton, tal com es mostra a la Figura 6.8 (*esquerra*). Com abans, per a valors menuts del paràmetre, la dinàmica es fa més rica; és a dir, el mètode és menys estable a les condicions inicials. Observem que al llarg de l'eix real, les iteracions convergeixen a l'arrel real (vore Figura 6.8 (*dreta*)).

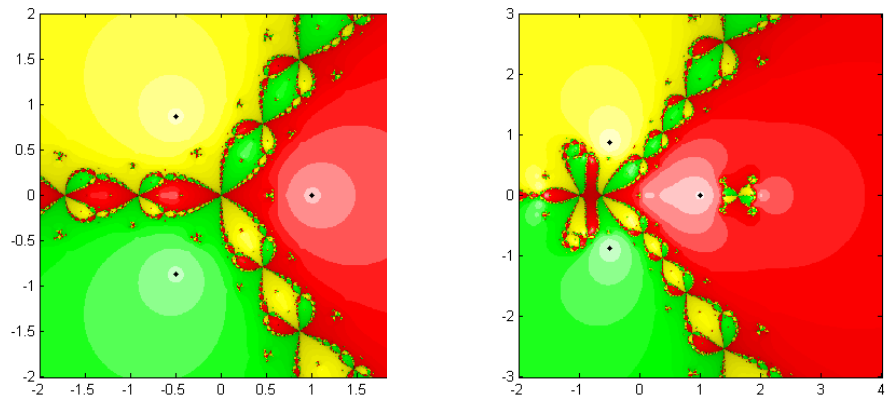


Figura 6.6: Conques d'atracció de l'algorisme de punt mitjà amb memòria per a $f(x) = x^3 - 1$ i $\phi = 100$ (esquerra) i $\phi = 1$ (dreta).

La dinàmica del mètode amb dos passos intermedis, $n = 3$, es torna més inestable, i la convergència és més lenta a les zones que apareixen en gris en el pla dinàmic tal com es mostra a la Figura 6.9 (*esquerra*). Aquest efecte s'agreuja en el cas d'haver tres passos intermedis, $n = 4$, on les zones de divergència són clarament visibles i estan marcades en blau en el pla dinàmic representat a la Figura 6.9 (*dreta*). Els mateixos problemes sorgeixen per a polinomis de major grau per al mètode *OP*, fins i tot amb un nombre reduït de passos intermedis, tal com s'il·lustra a l'exemple representat a la Figura 6.10:

6.5 Conclusions

Els algorismes numèrics per aproximar els zeros de funcions no lineals tenen una rica història. Històricament l'estudi d'aquests mètodes s'ha centrat principalment en algorismes sense memòria, la taxa de convergència dels quals pareix que presenta una cota superior, tal com ho afirma la conjectura de Kung-Traub. Des del moment en què es proposà aquesta conjectura s'han investigat tècniques per flexibilitar, o sortejar aquest límit. Ara bé, se sap que aquest límit no és aplicable als mètodes que incorporen memòria, per tant aquests han esdevingut un tema d'interés en la recerca actual en el camp de l'anàlisi numèrica.

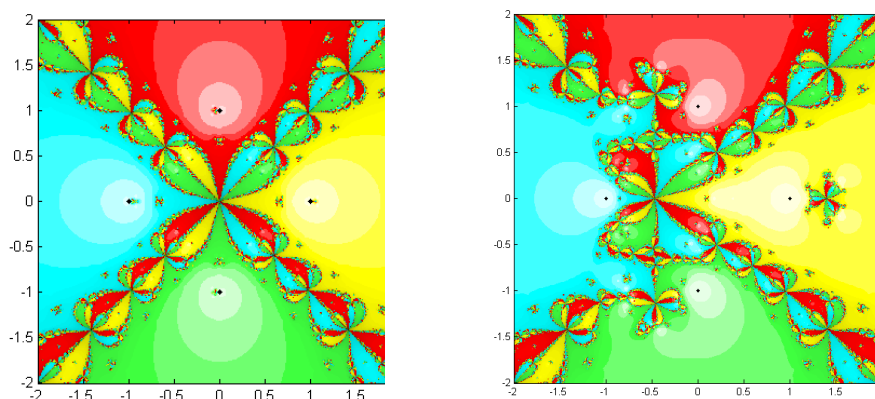


Figura 6.7: Conques d'atracció per a l'algorisme del punt mitjà amb memòria per a $f(x) = x^4 - 1$ i $\phi = 10$ (esquerra) i $\phi = 1$ (dreta).

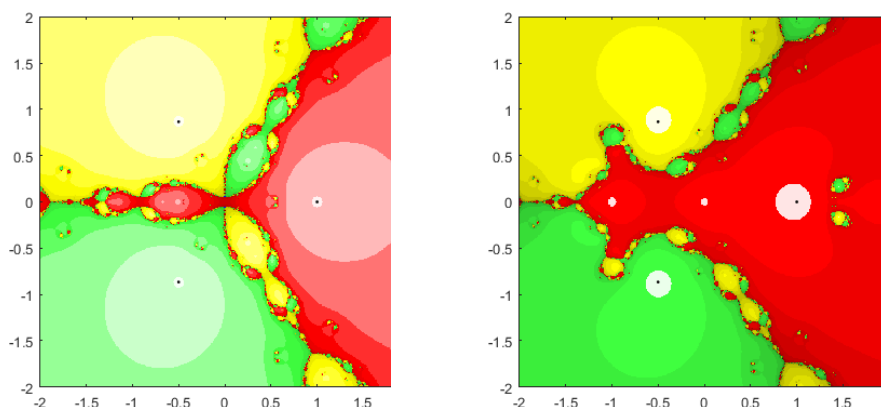


Figura 6.8: Conques d'atracció de l'algorisme proposat amb un pas intermedi per a $f(x) = x^3 - 1$ i $\phi = 100$ (esquerra) i $\phi = 1$ (dreta).

Aquests mètodes solen reutilitzar dades històriques per tal d'augmentar l'ordre de convergència. Tot i que d'aquesta manera no s'introdueixen avaluacions funcionals extres en els càlculs necessaris en cada iteració, el nombre de càlculs requerit per iteració sí que augmenta. En aquest capítol s'ha aprofundit en el desenvolupament dels algorismes amb memòria amb la pretensió de minimitzar els càlculs i així millorar i obtenir algorismes que

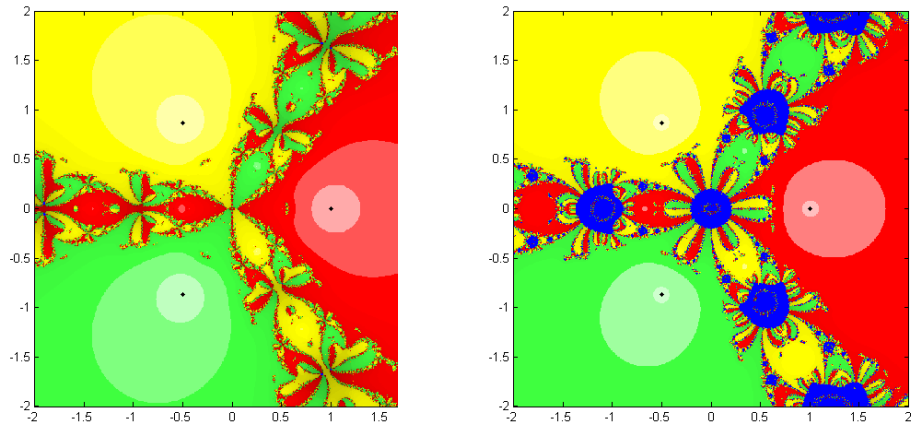


Figura 6.9: Conques d'atracció de l'algorisme proposat amb dos passos intermedis (esquerra) i tres passos intermedis (dreta) per a $f(x) = x^3 - 1$ i $\phi = 100$.

superen la convergència establida per la conjectura de Kung-Traub i milloren l'índex d'eficiència dels mètodes existents. En un esquema Predictor-Corrector, això s'aconsegueix utilitzant el pendent del pas del corrector en la iteració anterior per generar el pas de predictor de la següent. Amb les dades en memòria utilitzades d'aquesta manera, ara no cal fer cap càlcul addicional ja que aquest valor ja s'ha calculat. Cal assenyalar que aquesta tècnica també pot ser molt beneficiosa si s'aplica a sistemes no lineals, ja que permet reduir la quantitat de sistemes lineals que s'han de resoldre per iteració ([86]).

Les proves numèriques realitzades en la secció corresponent d'aquest capítol confirmen els resultats teòrics en referència a la superació de la taxa de convergència a la indicada per la conjectura de Kung-Traub i a la seua eficiència; en particular s'han comprovat sobre el mètode del Punt Mitjà amb memòria i sobre el mètode proposat per nosaltres OP. Més enllà, el mètode OP s'han comparat amb dues modificacions de l'algorisme ZLH, constatant que el nostre presenta interessants millores en l'eficiència computacional respecte d'altres algorismes amb memòria.

L'anàlisi del comportament dinàmic dels mètodes amb memòria, almenys en els casos estudiats de polinomis de segon, tercer i quart grau,

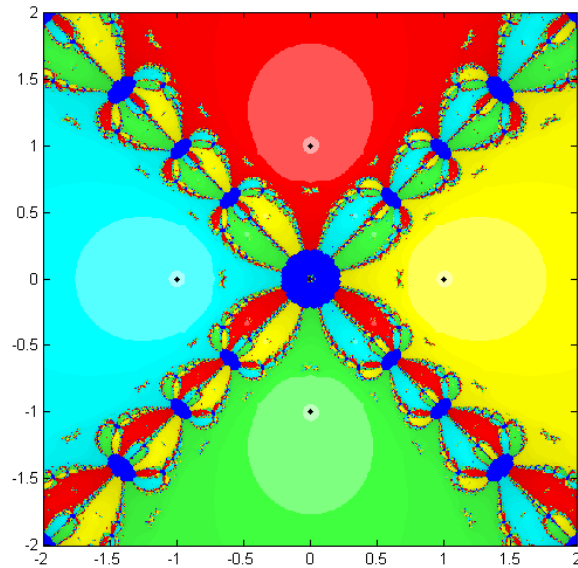


Figura 6.10: Conques d'atracció de l'algorisme OP amb 1 pas intermedi per $f(x) = x^4 - 1$ i $\phi = 100$.

resulta semblant al del mètode de Newton, amb conques de convergència que recobreixen pràcticament la totalitat del pla, donant lloc a interessants conjunts de Julia i en aquells casos on es presenten zones de divergència, aquestes són clares. Ara bé, amb l'ús de mètodes amb memòria s'ha de considerar l'increment produït en la complexitat numèrica, s'alteren així els plànols dinàmics i augmenta la inestabilitat en relació dels respectius mètodes sense memòria, tot i que es conserven les característiques generals. Cal assenyalar que sembla que, pels exemples analitzats, prendre com a estimació inicial de la inversa de la derivada un valor alt, proveeix resultats més estables i plans dinàmics més simples. Calen encara estudis més profunds sobre la influència de la incorporació de memòria en un algorisme pel tal de conèixer com repercuteix al comportament dinàmic i amb quines les condicions es maximitzarien la convergència i l'estabilitat del mètode.



Determinació d'arrels múltiples per a equacions no lineals i aplicacions.¹

Índex

7.1	Introducció	123
7.2	Desenvolupament de nous mètodes	126
7.3	Mètodes lliures de derivades	129
7.4	Proves numèriques	132
7.5	Conclusions	138

7.1 Introducció

Ja ens hem referit diverses vegades a la importància de la resolució d'equacions no lineals, tant en la matemàtica aplicada com en les diverses branques de l'enginyeria per a la concreció d'una magnitud desconeguda

¹La base d'aquest capítol és l'article [87] i la comunicació **New optimal derivative free iterative methods for multiple roots**, presentada al congrés *Congreso de la Real Sociedad Matemática Española (RSME 2017)*, celebrat del 30 de gener al 3 de febrer de 2017 a Saragossa.

d'una situació modelada matemàticament en casos particulars d'interès. La qual cosa, sol consistir en aplicar algun mètode per trobar els zeros simples d'una funció contínuament diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ açò és, una solució α de l'equació no lineal $f(x) = 0$.

En el cas de les arrels simples, s'ha proposat una gran quantitat de mètodes robustos, eficient i amb alts ordres de convergència ([88, 89, 90]). En aquest Capítol, però ens centrarem en el cas d'equacions en què pot haver alguna arrel α amb multiplicitat $m > 1$, és a dir, $f(\alpha) = 0$, $f^{(k)}(\alpha) = 0$ per $k = 1, \dots, m - 1$ i $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$. És un fet conegut que l'ordre de convergència dels mètodes iteratius disminueix en presència d'una arrel múltiple. En aquest sentit, certes modificacions en la funció d'iteració pot millorar el comportament del mètode. Així, per exemple el mètode de Newton recupera la convergència quadràtica per arrels múltiples, [91], amb la modificació donada per

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Recentment, alguns autors [92]-[94] han obtingut mètodes iteratius de major ordre per arrels múltiples quan la multiplicitat es coneix amb antelació.

El nostre objectiu en l'estudi que ara portarem a terme és, primerament, presentar nous mètodes iteratius eficients per a l'aproximació d'arrels múltiples. Amb aquesta finalitat, introduïrem paràmetres en mètodes iteratius òptims per arrels simples i utilitzarem certes relacions deduïdes de les consideracions de treballar amb una arrel múltiple per obtenir el valor dels paràmetres que restableixen l'ordre de convergència.

Seguidament, estem interessats a obtindre mètodes iteratius lliures de derivades per a múltiples arrels. A la literatura, s'han presentat alguns mètodes d'alt ordre que eviten l'ús de derivades per al còmput d'arrels simples, [95]-[99]. Pel nostre coneixement d'aquest camp, encara no s'ha publicat cap estudi en què s'empren operadors de diferències dividides per aproximar la derivada en algorismes que pretenen calcular arrels múltiples. Utilitzarem diferències dividides adients, de manera que preserven l'ordre de convergència del mètode. Per comprovar els resultats teòrics, codifi-

carem els nous algorismes i els aplicarem a diferents exemples numèrics concrets.

La determinació d'arrels múltiples és d'interés en algunes branques de les ciències aplicades. Per exemple, a [100] els autors demostren que els zeros de la derivada d'un senyal de banda limitada que travessa una singularitat desconeguda poden ser útils per identificar-los i corregir-los. En particular, demostren que l'ample de banda d'un senyal es pot comprimir amb una proporció de $1/n$ si i només si el senyal té arrels de multiplicitat de n .

El multipactor és un desglossament de RF no desitjat que pot passar en els dispositius de microones d'alta potència que funcionen sota la condició de buit [101]. Un escenari en particular on apareix el multipactor es troba dins d'una guia d'ona de plaques paral·leles. Entre aquestes dues plaques, existeix un camp elèctric amb una diferència de potencial elèctric que produeix el moviment d'electrons. En l'estudi de les trajectòries electròniques, un cas d'interés es produeix quan l'electró arriba a una placa amb velocitat nul·la. En aquest cas, la funció distància de l'electró a la placa presenta un zero de multiplicitat 2.

Els sistemes no lineals també apareixen en química, per exemple en l'estudi de l'estabilitat de les reaccions químiques. Ací abordarem la solució de l'equació de Van der Waals per a la determinació del volum d'un gas en un cas particular en el qual les solucions són múltiples.

La resta del capítol s'organitza de la manera següent. A la Secció 7.2 s'explica la construcció de la família i es demostra el resultat de la convergència. Els mètodes iteratius lliures derivats es detallen a la Secció 7.33. A la Secció 7.4, compararem els nous mètodes amb un mètode de quart ordre existent mitjançant l'ús d'equacions d'exemple amb múltiples arrels. La Secció 7.55 està dedicada a les conclusions.

7.2 Desenvolupament de nous mètodes iteratius

A [102], hem presentat noves famílies de mètodes iteratius per a sistemes no lineals. Ara fem ús del mateix esquema, però es realitzarà la determinació dels paràmetres assumint que l'arrel és de multiplicitat m . Amb la notació per al cas unidimensional, la família proposada es pot escriure com:

$$y_n = x_n - b \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$x_{n+1} = x_n - (s_1 + s_2 h(y_n, x_n) + s_3 h(x_n, y_n) + s_4 h(y_n, x_n)^2) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (7.1)$$

on $h(x_n, y_n) = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$, i $b, s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{R}$.

A continuació, determinarem el valor d'aquests paràmetres reals per obtenir la màxima eficiència. Segons la conjectura de Kung-Traub, [13], l'ordre de convergència òptim serà 4, ja que només s'utilitzen tres avaluacions funcionals per iteració.

Es considera el desenvolupament de Taylor de $f(x_n)$ al voltant de la solució α

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} e_n^m \left(\sum_{i=0}^4 c_i e_n^i + O(e_n^5) \right), \quad (7.2)$$

on $e_n = x_n - \alpha$ i $c_i = \frac{m!}{(m+i)!} \frac{f^{(m+i)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$, $i \geq 0$. Aleshores, la derivada és

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} e_n^{m-1} \left(\sum_{i=0}^4 (m+i) c_i e_n^i + O(e_n^5) \right). \quad (7.3)$$

Així, es pot escriure l'equació d'error per a un pas de tipus Newton com

$$\hat{e}_n = y_n - \alpha = e_n - b \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(1 - \frac{b}{m} \right) e_n + \frac{bc_1}{m^2} e_n^2 - \frac{b((1+m)c_1^2 - 2mc_2)}{m^3} e_n^3$$

$$+ \frac{b((1+m)^2 c_1^3 - m(4+3m)c_1 c_2 + 3m^2 c_3)}{m^4} e_n^4 + O(e_n^5),$$

i per tant, $f'(y_n)$ pren la forma

$$f'(y_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} \hat{e}_n^{m-1} \left(\sum_{i=0}^4 (m+i)c_i \hat{e}_n^i + O(\hat{e}_n^5) \right).$$

Mitjançant l'ús de Mathematica, calculem $h(x_n, y_n)$ i $h(y_n, x_n)$ expressats en termes e_n obtenint la següent equació d'error per (7.1):

$$e_{n+1} = A_1 e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + A_4 e_n^4 + O(e_n^5), \quad (7.4)$$

on

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - \frac{s_1 + s_4 \mu^{2-2m} + s_2 \mu^{1-m} + s_3 \mu^{-1+m}}{m}, \\ A_2 &= \left(m^2 s_1 + s_4 \mu^{2-2m} + s_2 \mu^{1-m} + s_3 \mu^{-1+m} \right. \\ &\quad \left. - b(b-2m+bm) \mu^{-2m} \left(\left(-2 + \frac{2b}{m}\right) s_4 - s_2 \mu^m + \frac{m^2 s_3 \mu^{3m}}{(b-m)^2} \right) \right) \frac{c_1}{m^4} \end{aligned}$$

$$\text{i } \mu = 1 - \frac{b}{m}.$$

Ara, per suprimir els termes de primer i segon ordre a (7.4), resollem el sistema $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ i trobem les següents expressions per als paràmetres s_1 i s_2 :

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{\mu^{-1-2m}}{b(b-2m+bm)} \left(\mu^{2+2m} (-m^2 s_4 \mu^{2-2m} - m^2 s_3 \mu^{-1+m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2b(b-m)(b-2m+bm) s_4 \mu^{-2m}}{m} + \frac{bm^2(b-2m+bm) s_3 \mu^m}{(b-m)^2} \right) \quad (7.5) \\ &\quad + (-2bm + b^2(1+m) + m^2 \mu) (s_4 \mu^3 + \mu^{2m} (-m\mu + s_3 \mu^m)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{\mu^{-m}}{bm(-b+m)^2(b-2m+bm)} \left(2b^5(1+m)s_4 + 6b^3m^2(3+m)s_4 \right. \\ &\quad \left. - 2b^4m(5+3m)s_4 - m^6\mu^{2m} + 2bm^4(2s_4 + \mu^{2m}(m - s_3\mu^m)) \right) \quad (7.6) \\ &\quad + b^2m^3(-2(7+m)s_4 + \mu^{2m}(-m + s_3\mu^m + ms_3\mu^m)). \end{aligned}$$

En substituir aquests valors en (7.4), tenim

$$e_{n+1} = (k(b-m)^4 m^5 (-2m + b(2+m)) \mu^{2m} c_2 + B) e_n^3 + O(e_n^4),$$

amb $k, B \in \mathbb{R}$. Per tant, com es desitja eliminar el coeficient de c_2 en el terme de tercer ordre, imposen la condició $b = \frac{2m}{2+m}$, i s'obté que $\mu = \frac{m}{2+m}$, de manera que el coeficient de e_n^3 esdevé en

$$A_3 = -\frac{2\mu^{-2m}}{m^6(2+m)^4} (-8m^4 \mu^{2m} - 12m^5 \mu^{2m} - 6m^6 \mu^{2m} - m^7 \mu^{2m} + 64s_3 \mu^{3m} + 96ms_3 \mu^{3m} + 48m^2 s_3 \mu^{3m} + 8m^3 (s_4 + s_3 \mu^{3m})) c_1^2.$$

Amb la finalitat d'anul·lar aquest terme, es calcula s_3 el qual pren l'expressió següent

$$s_3 = \frac{m^3 \mu^{-3m} (-8s_4 + 8m \mu^{2m} + 12m^2 \mu^{2m} + 6m^3 \mu^{2m} + m^4 \mu^{2m})}{8(2+m)^3}. \quad (7.7)$$

Finalment, substituint (7.5-7.7) a (7.4), l'equació d'error de la família de mètodes iteratius definida per (7.1) és

$$e_{n+1} = \frac{1}{3m^5(2+m)^5} ((128m + 288m^2 + 352m^3 + 368m^4 + 312m^5 + 178m^6 + 62m^7 + 12m^8 + m^9 - 192s_4) c_1^3 - 3m^4(2+m)^5 c_1 c_2 + 3m^6(2+m)^3 c_3) e_n^4 + O(e_n^5), \quad (7.8)$$

i així, té ordre de convergència quatre. Aleshores, provem el següent resultat:

Teorema 19 *Siga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció suficientment diferenciable en un interval obert I que continga α , la qual és una arrel de multiplicitat m de l'equació $f(x) = 0$. Llavors, per a una estimació inicial suficientment pròxima a α , la família de mètodes definits per (7.1) on $b = \frac{2m}{2+m}$ i prenent per a s_1, s_2 i s_3 els valors donats per (7.5), (7.6) i (7.7), respectivament, té ordre de convergència quatre per qualsevol $s_4 \in \mathbb{R}$. L'equació de l'error de la família ve donada per (7.8).*

7.3 Mètodes lliures de derivades

Per evitar l'ús de derivades, proposem l'aproximació per diferències dividides donades per:

$$f'(x_n) \approx f[z_n, x_n] = \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n}, \quad (7.9)$$

on $z_n = x_n + f(x_n)^q$ amb $q \geq 1$. A [103], els autors demostren que en aproximar la derivada per (7.9), l'ordre de convergència de molts mètodes iteratius per arrels simples roman invariant.

El nostre objectiu ací és ampliar aquesta tècnica al cas d'arrels múltiples. Així si es substitueixen a la família (7.1) les derivades presents per operadors de diferències dividides, s'obté la família lliure de derivades donada per:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n &= x_n - b \frac{f(x_n)}{f[x_n + f(x_n)^q, x_n]} \\ \tilde{x}_{n+1} &= x_n - \left(s_1 + s_2 \tilde{h}(\tilde{y}_n, x_n) + s_3 \tilde{h}(x_n, \tilde{y}_n) + s_4 \tilde{h}(\tilde{y}_n, x_n)^2 \right) \frac{f(x_n)}{f[x_n + f(x_n)^q, x_n]} \end{aligned} \quad (7.10)$$

on $\tilde{h}(x_n, \tilde{y}_n) = \frac{f[\tilde{y}_n + f(\tilde{y}_n)^q, \tilde{y}_n]}{f[x_n + f(x_n)^q, x_n]}$. Podem provar el resultat següent:

Teorema 20 *Siga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció suficientment diferenciable en un interval obert I que continga α , la qual és una arrel de multiplicitat m de l'equació $f(x) = 0$. Llavors, per a una estimació inicial suficientment pròxima a α , la família de mètodes definida per (7.10) amb $s_4 \in \mathbb{R}$, i amb els mateixos valors dels paràmetres b , s_1 , s_2 i s_3 que s'han definit en (7.1) tenen la següent equació de l'error:*

$$\tilde{e}_{n+1} = e_{n+1} + O(e_n^{qm}) \quad (7.11)$$

on e_{n+1} és l'equació de l'error obtinguda a (7.8) per al mètode que utilitza derivades expressat per (7.1).

Demostració: És un resultat conegut que l'aproximació progressiva de la derivada és d'ordre h , és a dir:

$$f[x, x+h] = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h),$$

i, per tant, per a l'operador invers tenim:

$$\frac{1}{f[x, x+h]} = \frac{1}{f'(x)} + O(h). \quad (7.12)$$

Però, pel corresponent desenvolupament de Taylor, podem expressar:

$$f[x, x+h] = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + O(h^2),$$

aleshores, per arrels múltiples, establint que $x = x_n$ i $h = f(x_n)^q$ i considerant (7.2), obtenim $h = O(e_n^{qm})$ i $f''(x_n) = O(e_n^{m-2})$ així, aconseguim una aproximació per a $f'(x_n)$ que verifica:

$$f[x_n + f(x_n)^q, x_n] = f'(x_n) + O(e_n^{(q+1)m-2}) \quad (7.13)$$

i per (7.12) s'obté

$$\frac{1}{f[x_n + f(x_n)^q, x_n]} = \frac{1}{f'(x_n)} + O(e_n^{qm}), \quad (7.14)$$

aleshores, emprant (7.2) tenim:

$$\frac{f(x_n)}{f[x_n + f(x_n)^q, x_n]} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + O(e_n^{(q+1)m}). \quad (7.15)$$

Aquest fet ens permet establir la relació entre el primer pas en (7.1) i (7.10) utilitzant (7.12) i (7.13) obtenim:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n &= x_n - b \frac{f(x_n)}{f[x_n + f(x_n)^q, x_n]} = x_n - b \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + O(e_n^{(q+1)m}) \right) \\ &= y_n + O(e_n^{(q+1)m}), \end{aligned}$$

i en conseqüència $f(\tilde{y}_n) = f(y_n) + O(e_n^{(q+1)m})$ i $f'(\tilde{y}_n) = f'(y_n) + O(e_n^{(q+1)m})$.

Ara, analitzem la funció $\tilde{h}(x_n, \tilde{y}_n)$ que apareix al segon pas de (7.10), resultant en:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x_n, \tilde{y}_n) &= \frac{f[\tilde{y}_n + f(\tilde{y}_n)^2, \tilde{y}_n]}{f[x_n + f(x_n)^2, x_n]} = (f'(\tilde{y}_n) + O(e_n^{(q+1)m-2})) \left(\frac{1}{f'(x_n)} + O(e_n^{qm}) \right) \\ &= (f'(y_n) + O(e_n^{(q+1)m-2})) \left(\frac{1}{f'(x_n)} + O(e_n^{qm}) \right) = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} + O(e_n^{qm-1}) \\ &= h(x_n, y_n) + O(e_n^{qm-1}), \end{aligned}$$

De manera anàloga, s'obté la següent expressió:

$$\tilde{h}(\tilde{y}_n, x_n) = h(y_n, x_n) + O(e_n^{qm-1}). \quad (7.16)$$

Ara, analitzant la relació entre el segon pas en (7.1) i en (7.10), fent ús de (7.15) i (7.16), aconseguim:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{n+1} &= \tilde{x}_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha \\ &- \left(s_1 + s_2 \tilde{h}(\tilde{y}_n, x_n) + s_3 \tilde{h}(x_n, \tilde{y}_n) + s_4 \tilde{h}(\tilde{y}_n, x_n)^2 \right) \left(\frac{f(x_n)}{f[x_n + f(x_n)^q, x_n]} \right) \\ &= x_n - \alpha - \left(s_1 + s_2 h(y_n, x_n) + s_3 h(x_n, y_n) + s_4 h(y_n, x_n)^2 + O(e_n^{qm-1}) \right) \\ &\quad (7.17) \\ &\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + O(e_n^{(q+1)m}) \right) = x_{n+1} - \alpha + O(e_n^{qm}) = e_{n+1} + O(e_n^{qm}) \\ &= O(e_n^4) + O(e_n^{qm}) \end{aligned}$$

on hem considerat que e_{n+1} és d'ordre 4, segons l'equació d'error obtinguda a (7.8). \square

Nota: Es conclou que si $q = 1$ els mètodes iteratius lliures de derivades, (7.10), conserven l'ordre de convergència si $m \geq 4$, però per $q \geq 2$ l'ordre de convergència es manté per a tot $m \geq 2$.

D'aquesta manera, per als problemes amb arrels múltiples amb multiplicitat $m \geq 4$ podem aproximar la derivada per

$$f[x, x + f(x)] = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)} \quad (7.18)$$

i els mètodes iteratius presentats assoleixen ordre de convergència quatre però si la multiplicitat és $m < 4$ per preservar l'ordre de convergència haurem d'emprar:

$$f[x, x + f(x)^2] = \frac{f(x + f(x)^2) - f(x)}{f(x)^2} \quad (7.19)$$

7.4 Proves numèriques

En aquesta secció, escollim valors específics del paràmetre s_4 amb la finalitat d'aplicar els mètodes a alguns exemples concrets. Recordem l'expressió general de la família de mètodes iteratius:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - b \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - (s_1 + s_2 h(y_n, x_n) + s_3 h(x_n, y_n) + s_4 h(y_n, x_n)^2) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

on $h(x_n, y_n) = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$, $b = \frac{2m}{2+m} = 2\mu$, i s_1 , s_2 i s_3 s'expressen com (7.5), (7.6) i (7.7), respectivament. La versió més senzilla de la família s'obté per $s_4 = 0$. Els valors dels paràmetres d'aquest mètode, que els denominarem per MR_0 , són:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{4}m(-4 + 2m + 3m^2 + m^3), \\ s_2 &= \frac{1}{8}m\mu^m(2 + m)^3, \\ s_3 &= \frac{1}{8}m^4\mu^{-m}. \end{aligned}$$

Per $s_4 = 1$ obtenim el mètode anomenat MR_1 , els valors del qual són:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{m(16 - 16m^2 - 18m^3 - 7m^4 - m^5 + m(8 + 12\mu^{-2m}))}{4(2 + m)^2}, \\ s_2 &= \frac{1}{8}\mu^{1-m}(-24 + (2 + m)^4\mu^{2m}), \\ s_3 &= \frac{m^3\mu^{-3m}(-8 + m(2 + m)^3\mu^{2m})}{8(2 + m)^3}. \end{aligned}$$

Els corresponents mètodes iteratius lliures de derivades obtinguts a partir de (7.10) per aquests valors dels paràmetres es denoten per DF_0^1 i DF_1^1 respectivament quan s'utilitza la diferència dividida donada per (7.18) i DF_0^2 i DF_1^2 quan la derivada s'aproxima per (7.19).

Aquests mètodes es compararan amb un mètode d'ordre de convergència quatre introduït a [104] que denotem per MR_{Sh} , i les seves versions lliures de derivades per DF_{Sh}^1 i DF_{Sh}^2 . L'expressió del mètode MR_{Sh} és

$$x_{n+1} = x_n - a_1 w_1(x_n) - a_2 w_2(x_n) - a_3 \frac{w_2(x_n)^2}{w_1(x_n)},$$

on $w_1(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $w_2(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(y_n)}$, $y_n = x_n - \beta w_1(x_n)$ i

$$\beta = \frac{2m}{2+m},$$

$$a_1 = \frac{1}{8}(m^3 - 4m + 8),$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}m(m-1)(m+2)^2 \left(\frac{m}{2+m}\right)^m,$$

$$a_3 = \frac{1}{8}m(m+2)^3 \left(\frac{m}{2+m}\right)^{2m}.$$

Portem a terme els càlculs amb Matlab 2011b utilitzant aritmètica de precisió variable amb 2000 dígits de mantissa. El criteri de parada serà que la distància entre iterats consecutius, $|x_{n+1} - x_n|$, siga inferior a la tolerància 10^{-50} o que el valor de la funció resulte zero amb la precisió de treball. Per mesurar la velocitat de convergència, fem servir l'ordre de convergència computacionalment aproximat (vore [99]),

$$ACOC = \frac{\log(|x_{k+1} - x_k|/|x_k - x_{k-1}|)}{\log(|x_k - x_{k-1}|/|x_{k-1} - x_{k-2}|)}.$$

En l'estudi de l'efecte multipactor, la trajectòria d'un electró en el buit d'aire entre dues plaques paral·leles ve donat per

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \left(v_0 + e \frac{E_0}{m\omega} \sin(\omega t_0 + \alpha) \right) (t - t_0) \\ & + e \frac{E_0}{m\omega^2} (\cos(\omega t + \alpha) - \cos(\omega t_0 + \alpha)) \end{aligned} \quad (7.21)$$

on e i m són la càrrega i la massa de l'electró en repòs, x_0 i v_0 són la posició i velocitat de l'electró en el moment t_0 i $E_0 \sin(\omega t + \alpha)$ és el camp elèctric

de RF entre les plaques.

L'equació de Van der Waals

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

explica el comportament d'un gas real introduint en l'equació dels gasos ideals dos paràmetres, a i b , específics per a cada gas. La determinació del volum V del gas en termes de la resta de paràmetres requereix la resolució d'una equació no lineal en V .

$$PV^3 - (nbP + nRT)V^2 + an^2V - an^2b = 0. \quad (7.22)$$

Donades les constants a i b d'un gas en particular, es poden trobar valors per n , P i T , de manera que aquesta equació tinga una arrel triple.

La primera equació que considerem és un cas particular de (7.21) on els paràmetres s'han normalitzat per tractar una expressió més senzilla. El segon és un exemple de (7.22) on l'arrel és triple. Les tres equacions següents apareixen a [104]. L'equació f_4 és el cas particular de $(x-1)^n(x-2)(x-3)$ per $n = 3$. Per a valors més grans de n , els mètodes arriben a l'ordre de convergència desitjat, però els seus comportaments són molt similars. L'última equació conté un paràmetre que permet obtenir arrels de multiplicitat arbitrària. Es consideren dos punts de partida per a cada equació.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + \cos(x) - \pi/2, & \alpha &= \pi/2, \text{ multiplicitat: } 3 \\ f_2(V) &= 0.98692V^3 - 5.18133V^2 + 9.06733V - 5.28927, & \alpha &= 1.75, \text{ multiplicitat: } 3 \\ f_3(x) &= x^2 \exp(x) - \sin(x) + x, & \alpha &= 0, \text{ multiplicitat: } 2 \\ f_4(x) &= x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6, & \alpha &= 1, \text{ multiplicitat: } 3 \\ f_5(x) &= (x^2 - e^x - 3x + 2)^5, & \alpha &\simeq 0.2575\dots, \text{ multiplicitat: } 5 \\ f_6^n(x) &= e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}, & \alpha &= 0, \text{ multiplicitat: } n. \end{aligned}$$

Les taules següents mostren els punts inicials de l'algorisme, el nombre d'iteracions, el valor de l'últim increment i l'ACOC per a cada exemple dels mètodes considerats. Denotem per n.c. els casos en què el mètode no convergeix en 50 iteracions.

Mètode	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$
MR _{Sh}	1	4	4.444e-121	5.0000	2	4	8.7412e-137	5.0000
MR ₀		4	4.5571e-121	5.0000		4	8.8695e-137	5.0000
MR ₁		4	4.5051e-121	5.0000		4	8.8106e-137	5.0000
DF _{Sh} ²	1	4	6.0505e-084	4.9951	2	4	6.5556e-103	4.9994
DF ₀ ²		4	6.0526e-084	4.9951		4	6.55e-103	4.9994
DF ₁ ²		4	6.0516e-084	4.9951		4	6.5525e-103	4.9994
DF _{Sh} ¹	1	6	1.6353e-092	3.0000	2	6	3.753e-120	3.0000
DF ₀ ¹		6	1.4209e-092	3.0000		6	3.5811e-120	3.0000
DF ₁ ¹		6	1.5152e-092	3.0000		6	3.6587e-120	3.0000

Taula 7.1: Convergència a l'arrel de multiplicitat 3, $\alpha = \pi/2$, de l'equació f_1

Mètode	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$
MR _{Sh}	0.51	2	0	-	3.1	2	0	-
MR ₀		2	0	-	3.1	2	0	-
MR ₁		2	0	-	3.1	2	0	-
DF _{Sh} ²	0.51	22	1.6369e-102	6.0000	3.1	11	0	6.0000
DF ₀ ²		11	8.2874e-307	6.0000	3.1	8	4.533e-163	6.0000
DF ₁ ²		13	2.1711e-274	6.0000	3.1	9	2.0209e-295	6.0000
DF _{Sh} ¹	0.51	12	3.0051e-167	3.0000	3.1	13	3.7545e-230	3.0000
DF ₀ ¹		10	2.1863e-173	3.0000	3.1	10	4.1962e-142	3.0000
DF ₁ ¹		11	5.3937e-247	3.0000	3.1	11	1.4334e-177	3.0000

Taula 7.2: Convergència a l'arrel de multiplicitat 3, $\alpha = 1.75$, de l'equació f_2

Els resultats de l'equació f_1 es mostren a la Taula 7.1. Els mètodes que utilitzen derivades tenen ordre de convergència 5, en comptes de 4, perquè els coeficients $c_i = \frac{m!}{(m+i)!} \frac{f^{(m+i)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$ són 0 per a $i = 1$ i $i = 3$, que anul·la el terme de quart ordre en l'equació de l'error (7.8). Els mètodes sense derivades DF_{Sh}², DF₀² i DF₁² tenen el mateix ordre i mètodes de convergència

Mètode	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$
MR _{Sh}	-0.5	5	5.7886e-056	3.9999	1	5	5.6183e-089	4.0000
MR ₀		5	7.6979e-055	3.9999		5	2.5526e-085	4.0000
MR ₁		5	5.7886e-056	3.9999		5	5.6183e-089	4.0000
DF _{Sh} ²	-0.5	6	1.1639e-175	4.0000	1	50	2.7752e-005	n.c.
DF ₀ ²		6	2.1411e-174	4.0000		50	5.9491e-005	n.c.
DF ₁ ²		6	1.1639e-175	4.0000		50	2.7752e-005	n.c.
DF _{Sh} ¹	-0.5	9	1.0866e-096	2.0000	1	23	7.5738e-090	2.0000
DF ₀ ¹		9	1.7357e-096	2.0000		20	1.4299e-069	2.0000
DF ₁ ¹		9	1.0866e-096	2.0000		23	7.5738e-090	2.0000

Taula 7.3: Convergència a l'arrel de multiplicitat 2, $\alpha = 0$, de l'equació f_3

Mètode	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$
MR _{Sh}	0	5	6.2209e-101	4.0000	1.4	5	3.1888e-069	4.0000
MR ₀		5	4.1156e-100	4.0000		5	6.006e-069	4.0000
MR ₁		5	1.7444e-100	4.0000		5	4.5062e-069	4.0000
DF _{Sh} ²	0	50	1.2385e-005	n.c.	1.4	5	3.3419e-079	4.0000
DF ₀ ²		50	7.4313e-005	n.c.		5	1.8929e-078	4.0000
DF ₁ ²		50	4.4737e-005	n.c.		5	8.7317e-079	4.0000
DF _{Sh} ¹	0	47	3.9625e-052	3.0000	1.4	6	2.4365e-094	3.0000
DF ₀ ¹		18	2.7733e-144	3.0000		6	2.0752e-092	3.0000
DF ₁ ¹		22	1.5767e-068	3.0000		6	2.8003e-093	3.0000

Taula 7.4: Convergència a l'arrel de multiplicitat 3, $\alpha = 1$, de l'equació f_4

DF_{Sh}¹, DF₀¹ i DF₁¹ tenen ordre de convergència 3, segons (7.17).

Els tres mètodes que utilitzen derivades aconseguen la solució exacta de l'equació cúbica f_2 en 2 passos, tal com es mostra a la Taula 7.2. Els mètodes basats en les diferències dividides (7.19) tenen un ordre de convergència superior al que s'esperava a causa de l'anul·lació d'alguns termes en l'expressió d'error (7.8). Els mètodes lliures de derivades introduïts

Mètode	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$
MR _{Sh}	0.15	4	8.1384e-099	4.0000	0.5	4	2.465e-075	4.0000
MR ₀		4	7.8378e-099	4.0000		4	2.4315e-075	4.0000
MR ₁		4	7.8777e-099	4.0000		4	2.436e-075	4.0000
DF _{Sh} ²	0.15	4	6.7771e-053	4.0001	0.5	7	1.0756e-193	4.0000
DF ₀ ²		4	6.7297e-053	4.0001		5	6.8349e-162	4.0000
DF ₁ ²		4	6.7361e-053	4.0001		5	9.5844e-154	4.0000
DF _{Sh} ¹	0.15	50	1.1355e-010	n.c.	0.5	-	-	n.c.
DF ₀ ¹		50	1.4909e-008	n.c.		-	-	n.c.
DF ₁ ¹		50	8.6736e-009	n.c.		-	-	n.c.

Taula 7.5: Convergència a l'arrel de multiplicitat 5, $\alpha \simeq 0.2575$, de l'equació f_5

Mètode	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$	x_0	n	$ x_n - x_{n-1} $	$ACOC$
MR _{Sh}	-1.5	4	2.5849e-095	4.0000	1	4	9.8471e-100	4.0000
MR ₀		4	1.5916e-095	4.0000		4	6.7101e-100	4.0000
MR ₁		4	1.6571e-095	4.0000		4	6.9269e-100	4.0000
DF _{Sh} ²	-1.5	4	2.1691e-063	4.0001	1	4	6.2776e-095	4.0000
DF ₀ ²		4	1.9775e-063	4.0001		4	6.5722e-095	4.0000
DF ₁ ²		4	1.9928e-063	4.0001		4	6.5483e-095	4.0000
DF _{Sh} ¹	-1.5	5	4.4796e-083	4.0000	1	5	3.3154e-175	4.0000
DF ₀ ¹		5	3.8242e-083	4.0000		5	3.1921e-175	4.0000
DF ₁ ¹		5	3.8745e-083	4.0000		5	3.2023e-175	4.0000

Taula 7.6: Convergència a l'arrel de multiplicitat 6, $\alpha = 0$, de l'equació f_6^6

en aquest estudi convergeixen en menys iteracions que els corresponents mètodes de tipus Sharma en aquest exemple.

Les Taules 7.3 i 7.4 mostren que els mètodes lliures de derivades que utilitzen les diferències dividides (7.18) només tenen ordre de convergència 2 ó 3 per a arrels de la mateixa multiplicitat, mentre que els altres mètodes,

quan convergeixen, arriben a una taxa de convergència de quart ordre. El mètode MR_{Sh} es comporta exactament com el mètode MR_1 per l'equació f_3 , tal com es pot observar a la Taula 7.3, i també les seves versions lliures de derivades, DF_{Sh}^1 i DF_{Sh}^2 respecte a DF_1^1 i DF_1^2 . Aquesta coincidència no s'observa en els altres exemples.

Per a l'equació f_5 , els tres últims mètodes de la Taula 7.5 no convergeixen si es parteix de les estimacions inicials considerades. No obstant això, els primers sis mètodes mostren ordre de convergència 4. En l'últim exemple, el de multiplicitat $n = 6$, totes les iteracions convergeixen amb l'ordre desitjat, tal com es mostra a la Taula 7.6.

Els mètodes introduïts en aquest capítol presenten un rendiment similar al mètode de Sharma, o fins i tot millor per a les arrels de major multiplicitat. En general, els mètodes lliures de derivades necessiten unes poques iteracions més per convergir, però arriben a la multiplicitat prevista.

7.5 Conclusions

Hem presentat una família de mètodes iteratius per resoldre equacions no lineals amb múltiples arrels i l'hem comparada amb un mètode ja publicat. Els mètodes resultants són òptims perquè arriben a assolir ordre de convergència quatre fent ús sols de tres avaluacions funcionals per pas. Afegint una avaluació funcional, obtenim, a més, una família de mètodes iteratius lliure de derivades. Si es comparen amb el mètode de quart ordre pres com a referència, els mètodes seleccionats de la nova família presenten un bon comportament, i així es corrobora als exemples numèrics.



Estudi dinàmic en la recerca de solucions d'equilibri en el problema dels N cossos.¹

Índex

8.1	Introducció	139
8.2	Conques d'atracció	143
8.3	Solucions en sèries de potències	150
8.4	Estimacions inicials	154
8.5	Conclusions	160

8.1 Introducció

La dinàmica de diversos mètodes iteratius proposats per a la resolució d'equacions no lineals ha estat àmpliament estudiada (vore, per exemple,

¹La base d'aquest capítol és l'article [105] la comunicació **Dynamical Study while Searching Equilibrium Solutions in N-body Problem** presentada al congrés *Mathematical Modelling in Engineering & Human Behaviour 2014. 16th Edition of the Mathematical Modelling Conference Series at the Institute for Multidisciplinary Mathematics*, celebrat del 3 al 5 de setembre de 2014 a València.

[106]-[108] i les referències en ells) analitzant les propietats de les funcions racionals en el pla complex quan s'apliquen cadascun d'eixos mètodes a polinomis de cert grau.

La dinàmica en el pla real s'ha analitzat principalment per a mapes biracionals [109] o mapes quadràtics [110]. L'estudi en el pla real resulta més complicat perquè no es poden aplicar en aquest cas les poderoses eines d'anàlisi complexa com el teorema de Montel [111] per a funcions holomorfes.

El nostre objectiu és estudiar la dinàmica del mètode de Newton aplicat a un sistema no lineal en \mathbb{R}^2 que resulta d'interés en la mecànica celeste. Els nostres resultats demostren que el comportament del sistema dinàmic discret considerat s'assembla més a la dinàmica de funcions racionals en el pla complex que a la dels mapes biracionals o quadràtics en el pla real.

En el problema clàssic dels N cossos, la recerca de solucions d'equilibri és un problema de gran complexitat, ja que la quantitat de solucions reals augmenta molt ràpidament, a mesura que la quantitat de cossos que interactuen N creix. Actualment no es coneix ni tan sols una forma general de trobar el nombre total de solucions d'equilibri (o configuracions centrals) per N arbitraris. Només s'han obtingut uns pocs resultats per a N menuts ($N = 2, 3, 4$) o per a algunes configuracions concretes, per exemple, amb certes condicions de simetria. Les equacions que determinen solucions d'equilibri relatiu en el problema dels N cossos són les equacions algebraïques no lineals i solen contenir paràmetres geomètrics o dinàmics.

En aquest capítol, considerarem les solucions d'equilibri del problema dels quatre cossos en moviment circular restringit al pla [112]-[114], prenent com a base les solucions triangulars de Lagrange. El sistema que determina les posicions d'equilibri del cos de massa infinitesimal,

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}x - y) \left(1 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) + \mu_1 (\sqrt{3}(x - 1) + y) \left(1 - \frac{1}{((x - 1)^2 + y^2)^{3/2}}\right) &= 0 \\ 2y \left(1 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) + \mu_2 (\sqrt{3}(x - 1) + y) \left(1 - \frac{1}{((x - 1/2)^2 + (y - \sqrt{3}/2)^2)^{3/2}}\right) &= 0, \end{aligned}$$

posseeix entre 8 i 10 solucions, dependent del valor de dos paràmetres de

massa μ_1 i μ_2 . Aquestos paràmetres, μ_1 i μ_2 , són relacions entre les masses del sistema i es trien de manera que es puguin variar de 0 a 1. Aquest sistema és de gran interès ja que el seu estudi facilita la construcció de la teoria del moviment dels asteroides a prop dels punts de libració triangular de Lagrange. En el sistema solar, aquest tipus de configuració és ben coneguda per ser la que es conforma per la disposició relativa entre el Sol, Júpiter i els asteroides troians.

Cada equació defineix una corba en el pla XY i les seues solucions es localitzen en els punts d'intersecció entre aquestes dues corbes. A la Figura 8.1, aquestes corbes es dibuixen en línies sòlides en negreta i discontinües, respectivament, per als valors dels paràmetres $\mu_1 = 0.9$ i $\mu_2 = 0.05$. Els punts més grans representen la posició canònica dels tres cossos massius, denotats per P_0 , P_1 i P_2 . Les solucions són les interseccions restants, que estan etiquetades per S_1 fins a S_8 . Els punts L_1 a L_5 són les solucions d'equilibri del corresponent problema de tres cossos restringit, coneguts com punts de Lagrange.

Per determinar els punts d'equilibri, s'aplica el mètode de Newton [115] a aquest sistema, a partir d'una determinada aproximació inicial. Generalment, les iteracions de l'algorisme de Newton convergeixen a una solució, però no és fàcil predir a quina, ja que depèn del punt de partida. La conca d'atracció d'una arrel està conformada per tots aquells punts de partida les iteracions dels quals convergeixen a aquesta arrel. Les conques d'atracció de les arrels d'aquest sistema són molt irregulars, caòtiques i plenes de sorolls, especialment si els paràmetres μ_1 i μ_2 tenen valors pròxims a zero (el qual constitueix el cas més interessant per a les aplicacions). Aquest fet implica que triar les estimacions inicials per al mètode iteratiu esdevé un problema que requereix d'acurades consideracions per la seua sensibilitat a les condicions inicials. Així el següent pas és l'anàlisi de l'estabilitat de totes les solucions per a qualssevol valors dels paràmetres. Hem contrastat les solucions numèriques amb les solucions obtingudes en forma de sèrie de potència exposades a [116] per determinar si les aproximacions de la sèrie són adequades com a punts de partida per al mètode de Newton.

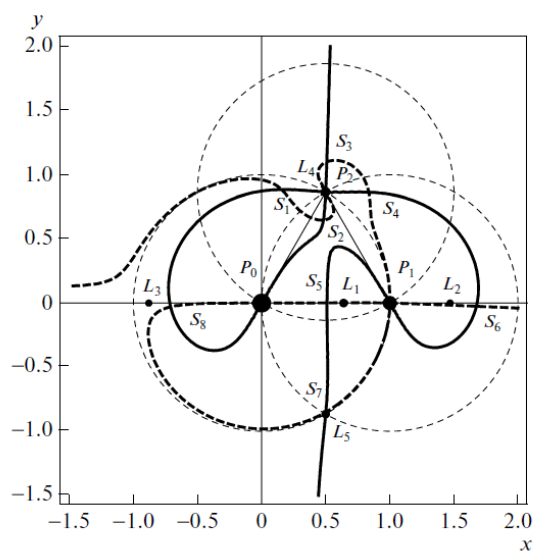


Figura 8.1: Solucions del problema dels quatre cossos per a $\mu_1 = 0.9$ i $\mu_2 = 0.05$.

8.2 Conques d'atracció del mètode de Newton

Recordem alguns conceptes sobre dinàmica. Si $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és Fréchet diferenciable, donat un $x \in \mathbb{R}^n$, aleshores l'òrbita de x és el conjunt

$$\{x, G(x), G^2(x), \dots, G^p(x), \dots\}.$$

Un punt $x_f \in \mathbb{R}^n$ és un punt fix de G si $G(x_f) = x_f$. Siga $DG(x)$ el Jacobià de G . Si $\|DG(x_f)\| < 1$ el punt fix és atractor i si $DG(x_f) = 0$ el punt fix es diu superatractor. Siga x_f un punt fix atractor de G . La conca d'atracció de x_f és el conjunt de punts les òrbites dels quals tendeixen cap aquest punt fix.

Considerem un sistema d'equacions no lineals $F(x) = 0$, on $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una funció diferenciable de Fréchet. L'aplicació del mètode de Newton a la solució del sistema es pot interpretar com un sistema dinàmic discret $x_{k+1} = G(x_k)$ on G és l'operador en \mathbb{R}^n expressat en

$$G(x) = x - DF(x)^{-1}F(x).$$

Sota les condicions del teorema de Kantorovich, els zeros de F són punts superatractors de G .

Ara considerarem la funció iterativa G obtinguda en aplicar el mètode de Newton al sistema (8.1) per a certs valors dels paràmetres μ_1 i μ_2 i estudiarem algunes de les propietats de les conques de l'atracció de les solucions

Per trobar les conques d'atracció, establim un parell de valors per als paràmetres, prendrem els punts d'una malla rectangular en el pla XY com a estimacions inicials i iterarem amb el mètode de Newton fins que se satisfaci la tolerància o se supere la quantitat màxima d'iteracions establida. Assignant un color a cadascuna de les solucions del sistema (8.1), pintarem d'aquest color tots els punts de partida les iteracions dels quals convergeixen a la solució corresponent. D'aquesta manera, visualitzarem les conques d'atracció de les arrels que prèviament s'han obtingut numèricament aplicant els algorismes proposats a [116].

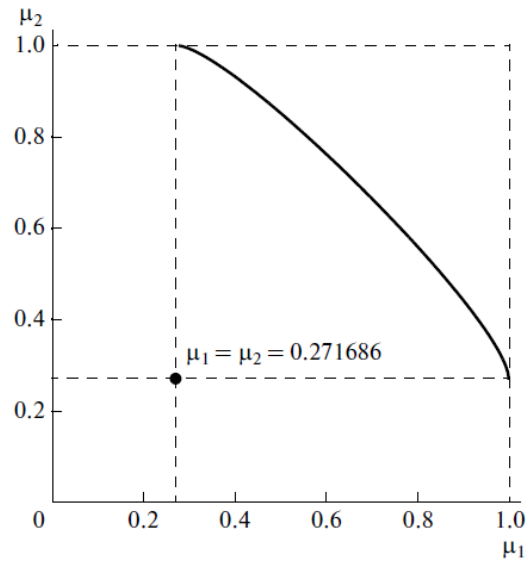


Figura 8.2: Corba de bifurcació al pla (μ_1, μ_2) .

A [112], els autors analitzen el nombre de solucions del sistema per a diferents valors dels paràmetres μ_1 i μ_2 trobant una corba de bifurcació que divideix el rectangle $(\mu_1, \mu_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ en dues zones, tal com es veu a la Figura 8.2. Per als valors de paràmetres que hi ha a sota de la corba, el sistema presenta 8 solucions; a la part superior per sobre de la corba el sistema té 10 solucions i 9 solucions al llarg d'eixa corba. És interessant veure com canvien les conques amb la quantitat de solucions i el que passa a prop de la corba de bifurcació.

Establint el valor $\mu_1 = 0.9$ i donant valors diferents a μ_2 , examinarem diferents casos per a les solucions: La corba de bifurcació apareix al voltant de $\mu_2 = 0.44$. Per a valors més baixos de μ_2 es donen 8 solucions i per a valors superiors, 10. A les Figures 8.3 i 8.4 es comparen les conques de l'atracció del mètode de Newton per $\mu_2 = 0.438$ i $\mu_2 = 0.442$, un per sota de la corba de bifurcació i l'altre per sobre. En el primer cas hi ha 8 conques. Al centre de la imatge, les conques són bastant complexes, cosa que indica la proximitat de la bifurcació. El segon cas, per $\mu_2 = 0.442$, presenta

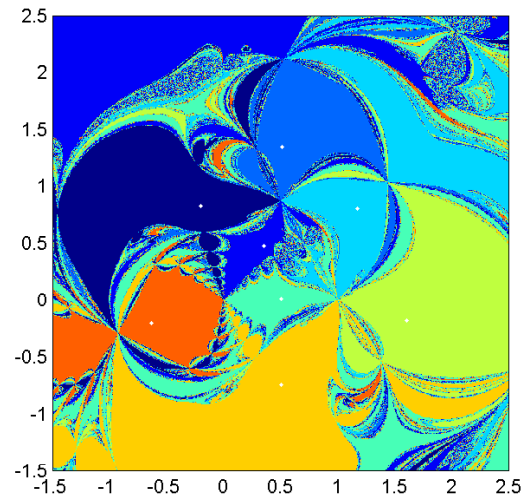


Figura 8.3: A sota de la corba de bifurcació, per $\mu_1 = 0.9$, $\mu_2 = 0.438$, hi ha 8 conques d'atracció.

10 conques d'atracció. Les zones borroses de la primera de les figures són ocupades principalment per les conques corresponents als dos nous punts d'equilibri.

Quan els valors dels paràmetres són molt diferents, les conques esdevenen asimètriques com es mostra a la Figura 8.5 corresponent als valors dels paràmetres $\mu_1 = 0.9$ i $\mu_2 = 0.0001$. Per a valors menuts dels paràmetres, les conques són molt complexes. Com més grans siguen els valors dels paràmetres, més senzilles són les conques, però sempre tenen un aspecte fractal. Si $\mu_1 = \mu_2$, aleshores les conques presenten una simetria amb eix $y = x/\sqrt{3}$. Les Figures 8.6 i 8.7 comparen les conques d'atracció per a valors grans i menuts dels paràmetres.

La geometria de les conques indica la dificultat d'escollir un punt de partida adient que garantisca la convergència del mètode iteratiu a la solució desitjada. Les Figures 8.8 i 8.9 mostren que per a algunes solucions hi ha punts molt pròxims a elles que pertanyen a la conca d'atracció d'una altra solució.

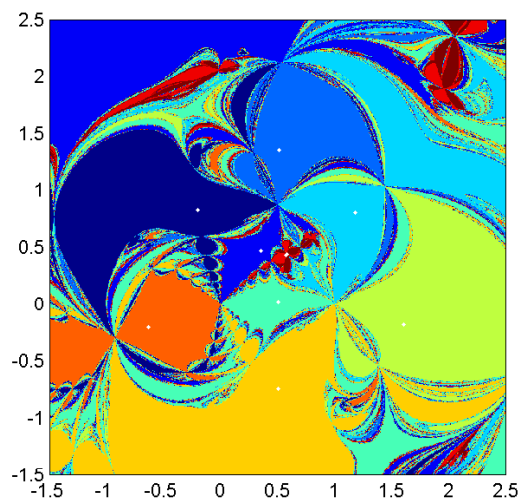


Figura 8.4: A sobre de la corba de bifurcació, per $\mu_1 = 0.9$, $\mu_2 = 0.442$, apareixen dues noves conques.

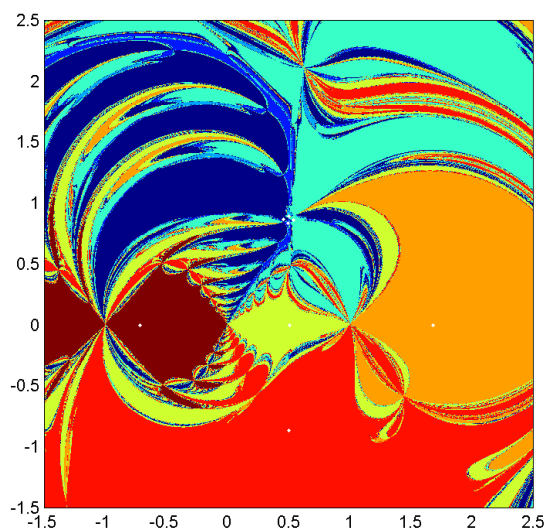


Figura 8.5: Asimetria de les conques per $\mu_1 = 0.9$, $\mu_2 = 0.0001$.

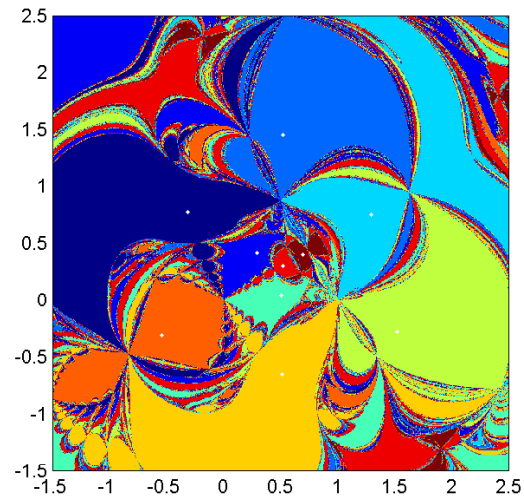


Figura 8.6: Conques d'atracció per $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$.

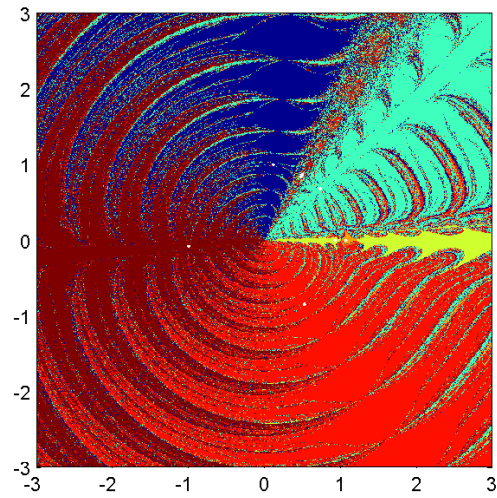


Figura 8.7: Conques d'atracció per $\mu_1 = 10^{-3}$ i $\mu_2 = 10^{-4}$.

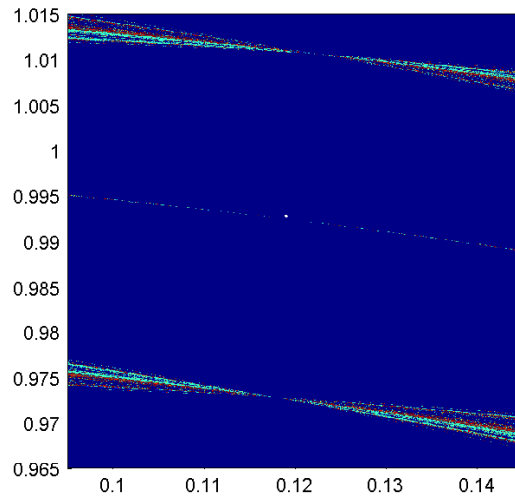


Figura 8.8: Detall de les conques d'atracció de la solució S_1 per $\mu_1 = 10^{-3}$ i $\mu_2 = 10^{-4}$ mostrant punts pròxims pertanyents a altres conques.

No obstant això, el mètode de Newton quasi sempre convergeix a una solució, independentment dels valors dels paràmetres i de l'estimació inicial, la qual cosa és bastant ressenyable si es pren en consideració la complexitat del sistema d'equacions

El següent resultat proporciona informació sobre les fronteres de les conques d'atracció.

Teorema 21 *La funció d'iteració G del mètode de Newton aplicat al sistema (8.1) té com a màxim una conca sense acotar.*

Demostració: Sigui (x_0, y_0) un punt suficientment llunyà de l'origen i (x_1, y_1) el resultat d'una iteració de tipus Newton del sistema (8.1) que pren (x_0, y_0) com a punt de partida. Considerem el sistema lineal

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}x - y) + \mu_1 (\sqrt{3}(x - 1) + y) &= 0 \\ 2y + \mu_2 (\sqrt{3}(x - 1) + y) &= 0.\end{aligned}\tag{8.1}$$

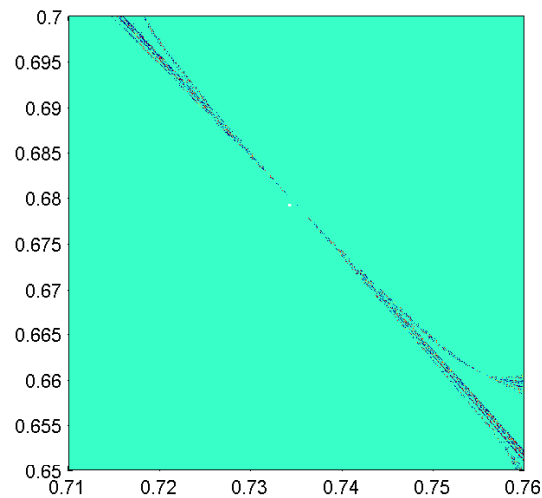


Figura 8.9: Detall de la conca d'atracció de la solució S_4 per $\mu_1 = 10^{-3}$ i $\mu_2 = 10^{-4}$.

Un pas del mètode de Newton aplicat a (8.1), independentment del punt de partida, proporciona la solució

$$\bar{x} = \frac{\mu_1 + \mu_2/2}{1 + \mu_1 + \mu_2}$$

$$\bar{y} = \frac{\sqrt{3}\mu_2/2}{1 + \mu_1 + \mu_2}.$$

L'iterat (x_1, y_1) es troba molt a prop de (\bar{x}, \bar{y}) ja que, per un (x_0, y_0) prou gran, tant $F(x_0, y_0)$ com $DF(x_0, y_0)$ estan molt pròxims als corresponents valors del sistema (8.1). D'aquesta manera, tots els punts suficientment llunyans de l'origen formaran part de la mateixa conca d'atracció de (\bar{x}, \bar{y}) , així que, les altres conques quedaran delimitades. \square

S'observa que (\bar{x}, \bar{y}) és el centre de massa del sistema físic dels tres cossos. Per a valors no massa menuts de μ_1 i μ_2 , el centre de massa es troba a la conca d'atracció de la solució més pròxima. Per exemple, per $\mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.01$, prenent punts de partida bastants llunyans de l'origen, les iteracions del mètode de Newton convergeixen a $S_5(0.7176, 0.0006)$ que és la solució més pròxima al centre de massa. No obstant això, per $\mu_1 = \mu_2 = 0.001$ la conca no acotada correspon a l'arrel $S_4(0.8665, 0.5003)$, la

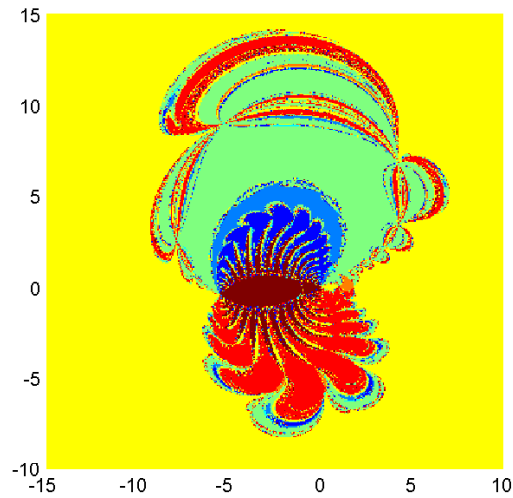


Figura 8.10: Conques d'atracció per $\mu_1 = 0.1$ i $\mu_2 = 0.01$.

distància de la qual al centre de massa és 1, però hi ha dues solucions diferents més a prop, $S_2(0.4662, 0.8074)$ i $S_5(0.9323, 0.0)$ a una distància de 0.93. Les Figures 8.10 i 8.11 donen una visió ampla de les conques d'atracció per als valors dels paràmetres considerats.

8.3 Solucions en sèries de potències

Aquesta secció està dedicada a la construcció d'una solució expressada en forma d'una sèrie de potències. Si estem interessats en el cas $\mu_1 > \mu_2$, és convenient desenvolupar la sèrie de potències en termes del paràmetre més menut, μ_2 . D'aquesta manera, les aproximacions dels desenvolupaments seran més precises. Però si és necessari considerar el cas $\mu_1 < \mu_2$ llavors la precisió seria millor si el desenvolupament de la sèrie de potències es realitza en termes del paràmetre μ_1 , altra vegada el menor dels dos.

Per tant, per a valors reduïts de μ_2 , les arrels $S(x, y)$ del sistema (8.1) es poden aproximar [117] per les sumes parcials $s_n = (u_n, v_n)$ d'una sèrie

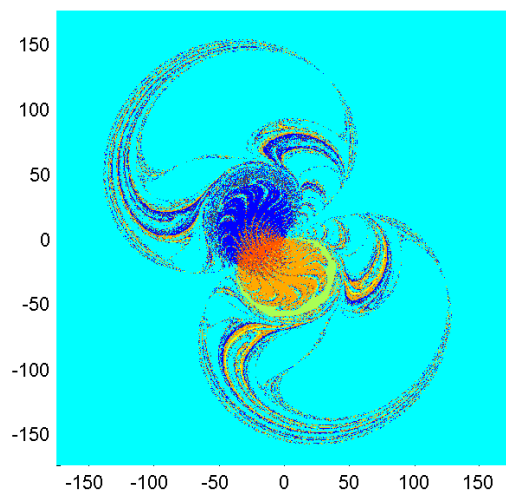


Figura 8.11: Conques d'atracció per $\mu_1 = \mu_2 = 0.001$

de potències

$$\begin{aligned}
 x &\simeq u_n = \sum_{j=0}^n x_j \mu_2^{jk} = x_0 + x_1 \mu_2^k + x_2 \mu_2^{2k} + x_3 \mu_2^{3k} + \dots + x_n \mu_2^{nk}, \\
 y &\simeq v_n = \sum_{j=0}^n y_j \mu_2^{jk} = y_0 + y_1 \mu_2^k + y_2 \mu_2^{2k} + y_3 \mu_2^{3k} + \dots + y_n \mu_2^{nk}
 \end{aligned}
 \tag{8.2}$$

on l'aproximació inicial de l'arrel (x_0, y_0) ve determinada per la condició $\mu_2 = 0$. Teòricament, aquestos desenvolupaments en sèries de potències haurien de donar millors estimacions a mesura que n creix, si s'assumeix que la corresponent sèrie convergeix. Així, per exemple en 1912 es demostrà a [118] que la sèrie per al problema dels tres cossos restringit és convergent, però la taxa de convergència és extremadament lenta.

Quan $\mu_2 = m_2/m_0 = 0$ la qual cosa significa que les masses de dos dels cossos són iguals a zero, i només hi ha dos cossos amb masses no nul·les. Llavors, el problema dels quatre cossos restringit es redueix al famós problema dels tres cossos restringit [119], que té cinc solucions d'equilibri conegudes com punts de llibració. Açò significa que hi ha exactament cinc aproximacions inicials (x_0, y_0) per als desenvolupaments (8.2). Les coordenades de

tres punts de colineals del tipus Euler, L_1 , L_2 i L_3 depenen de μ_1 . Els dos punts de libració triangular de Lagrange, $L_4(1/2, \sqrt{3}/2)$ i $L_5(1/2, -\sqrt{3}/2)$ no depenen de μ_1 . En aquest capítol, per conveniència, només considerarem els punts de libració triangular de Lagrange com aproximacions inicials per (8.2).

Seguint [116], per trobar els coeficients (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots$ del desenvolupament i determinar el valor de l'exponent k , és necessari substituir les expressions (8.2) en (8.1), després d'expressar cada equació com una sèrie de potències en μ_2 , igualar les expressions i associar els coeficients dels termes d'igual exponent dels costats dret i esquerre de cadascuna de les equacions. D'aquesta manera, finalment, obtenim un sistema d'equacions en els coeficients desitjats (x_j, y_j) . Cal tindre en compte que en l'entorn del punt $x_0 = 1/2, y_0 = \sqrt{3}/2$, si $k = 1/3$ només existeix una solució del sistema (8.1) de la forma (8.2), i aleshores és necessari substituir immediatament $(1/2, \sqrt{3}/2)$ per l'aproximació inicial (x_0, y_0) en la fórmula (8.2), ja que els coeficients de μ_2 in (8.1) prenen un valor infinit en aquest punt. Les dues primeres equacions d'aquest sistema obtingut contenen només x_1 i y_1 en la forma següent

$$\begin{aligned} x_1 \left(-3\mu_1 + \frac{4}{(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}} - 3 \right) + 3\sqrt{3}(\mu_1 - 1)y_1 &= 0, \\ 3\sqrt{3}(\mu_1 - 1)x_1 + y_1 \left(-9\mu_1 + \frac{4}{(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}} - 9 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Les equacions (8.3) tenen quatre solucions reals i és possible escriure-les de forma explícita. Les equacions tercera i quarta del sistema, que determinen els coeficients (x_j, y_j) , depenen només de x_1, x_2, y_1, y_2 i tenen la forma següent:

$$\begin{aligned} x_1^2 \left(21(\mu_1 - 1) - \frac{32x_2}{(x_1^2 + y_1^2)^{5/2}} \right) + 6x_1y_1 \left(\sqrt{3}(\mu_1 + 1) - \frac{8y_2}{(x_1^2 + y_1^2)^{5/2}} \right) \\ + 4x_2 \left(-3\mu_1 + \frac{4y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^{5/2}} - 3 \right) - 3(\mu_1 - 1)(11y_1^2 - 4\sqrt{3}y_2) &= 0, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned}
& 12\sqrt{3}(\mu_1 - 1)x_2 + x_1^2 \left(3\sqrt{3}(\mu_1 + 1) + \frac{16y_2}{(x_1^2 + y_1^2)^{5/2}} \right) \\
& + 6x_1y_1 \left(-11\mu_1 - \frac{8x_2}{(x_1^2 + y_1^2)^{5/2}} + 11 \right) - \frac{32y_1^2y_2}{(x_1^2 + y_1^2)^{5/2}} \\
& + 9\sqrt{3}\mu_1y_1^2 - 36\mu_1y_2 + 9\sqrt{3}y_1^2 - 36y_2 = 0.
\end{aligned}$$

El sistema (8.4) és lineal en x_2, y_2 , de manera que després de substituir la solució corresponent de (8.3) en (8.4), aquest sistema encara tindrà quatre solucions. Les equacions cinquena i sisena només contenen $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ i són bastant extenses i esdevenen quasi immanejables, de manera que no escriurem ací eixes equacions. Però també són lineals en x_3, y_3 i, per tant, el sistema general per determinar x_j, y_j segueix tenint encara quatre solucions.

Denotem per $s_j^i = (u_j^i, v_j^i)$ el punt les coordenades del qual són les j -èsimes sumes parcials (8.2) corresponents a l' i -èsim conjunt de coeficients, $i = 1, \dots, 4$. Per exemple, per a $\mu_1 = 0.3$ ($x_0 = 1/2, y_0 = \sqrt{3}/2, k = 1/3$) els coeficients corresponents de (8.2) poden escriure's com un conjunt de quatre subconjunts

$$\begin{aligned}
& \{x_1 = -1.09303, y_1 = 0.430598, x_2 = -0.601083, \\
& y_2 = -0.176974, x_3 = -0.520212, y_3 = -0.81574\}, \\
& \{x_1 = 0.246611, y_1 = 0.625996, x_2 = -0.0418395, \\
& y_2 = 0.140344, x_3 = 0.029317, y_3 = -0.0633965\}, \quad (8.5) \\
& \{x_1 = -0.246611, y_1 = -0.625996, x_2 = -0.0418395, \\
& y_2 = 0.140344, x_3 = -0.029317, y_3 = 0.0633965\}, \\
& \{x_1 = 1.09303, y_1 = -0.430598, x_2 = -0.601083, \\
& y_2 = -0.176974, x_3 = 0.520212, y_3 = 0.81574\}
\end{aligned}$$

Fent el desenvolupament al voltant de la segona aproximació inicial

$x_0 = 1/2$, $y_0 = -\sqrt{3}/2$ obtenim una única solució amb la forma:

$$\begin{aligned}
 x \simeq u_3 &= -\frac{(\mu_1 - 1) ((659\sqrt{3} - 783) \mu_1^2 + (3942 - 152\sqrt{3}) \mu_1 + 659\sqrt{3} - 783) \mu_2^3}{59049\mu_1^3} \\
 &\quad - \frac{(12\sqrt{3} - 95) (\mu_1^2 - 1) \mu_2^2}{729\mu_1^2} + \frac{(\sqrt{3} - 9) (\mu_1 - 1) \mu_2}{27\mu_1} + \frac{1}{2}, \\
 y \simeq v_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(3\sqrt{3} - 1) (\mu_1 + 1) \mu_2}{27\mu_1} \\
 &\quad + \frac{((17\sqrt{3} - 36) \mu_1^2 + (90 - 218\sqrt{3}) \mu_1 + 17\sqrt{3} - 36) \mu_2^2}{2187\mu_1^2} \\
 &\quad - \frac{(\mu_1 + 1) ((1917\sqrt{3} - 1627) \mu_1^2 + (3592 - 5238\sqrt{3}) \mu_1 + 1917\sqrt{3} - 1627) \mu_2^3}{59049\mu_1^3}.
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Cal tindre present que el valor de l'exponent k és igual a la unitat per a aquesta estimació inicial. Les aproximacions (u_j, v_j) generades per (8.6) es denoten per s_j^- .

8.4 Estimacions inicials

L'objectiu d'aquesta secció és avaluar la idoneïtat o adequació de l'ús de les sèries de potències per trobar una aproximació a les solucions per emprar-les com a estimacions inicials per al mètode de Newton de forma que els iterats convergisquen a la solució desitjada.

Considerem una malla rectangular discreta de parells de valors (μ_1, μ_2) en $[0, 1] \times [0, 1]$. Per a cada punt de la malla, aplicarem la funció iterativa de Newton partint d'una suma parcial de la sèrie considerada a la secció anterior i estudiarem si convergeixen i a quina solució ho fa. Les parelles (μ_1, μ_2) per a les quals s_j^i pertanyen a la conca de l'atracció de S_k constitueixen la *regió d'idoneïtat de S_k* de la suma parcial de j -èsima de la sèrie i .

Els resultats es poden visualitzar utilitzant superfícies en tres dimensions. Les dues primeres dimensions corresponen als valors dels paràmetres. L'altura i el color d'un punt són l'abscissa i l'ordenada de l'última iteració de Newton. Com els punts d'equilibri varien gradualment amb els paràmetres, els canvis bruscos en l'altura de la superfície o del color indiquen valors per als paràmetres pels quals les iteracions convergeixen a solucions diferents.

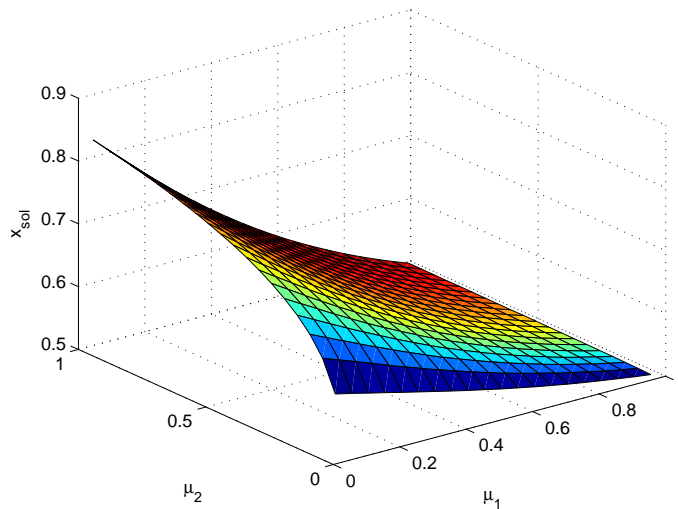


Figura 8.12: Les aproximacions de la sèrie s_j^3 de qualsevol ordre j són S_3 idonis per a totes les parelles (μ_1, μ_2) .

En canvi, una superfície llisa significa que les iteracions convergeixen a una solució (variable) donada per a tots els valors dels paràmetres. Per facilitar la interpretació, la superfície es projecta al pla (μ_1, μ_2) de forma que la informació es pugui relacionar amb els valors dels paràmetres.

Examinarem primerament les aproximacions mitjançant sèries als punts d'equilibri S_1 , S_2 , S_3 i S_4 generades per la fórmula (8.2). Les aproximacions de s_j^3 per $j = 0, 1, \dots$ i per a qualssevol valors dels paràmetres μ_1 i μ_2 són S_3 adequats en el sentit anteriorment definit, així pot observar-se a la Figura 8.12. Aquesta figura es mostra en tres dimensions, on l'altura representa l'abscissa de l'última iteració i el color és l'ordenada.

Els altres punts d'equilibri no presenten un comportament tan senzill. Per al punt d'equilibri S_1 , les sumes parcials s_j^1 proporcionen estimacions idònies per $\mu_1 > 0.25$. Per a $\mu_1 < 0.2$, la regió d'ideïtat depèn de l'ordre de la suma, tal com es mostra a les Figures 8.13 i 8.14. Experimentalment, trobem que les estimacions són idònies per a $\mu_2 \leq 20\mu_1^2$. Les Figures 8.15 i 8.16 mostren les regions d'ideïtat pròximes a l'origen.

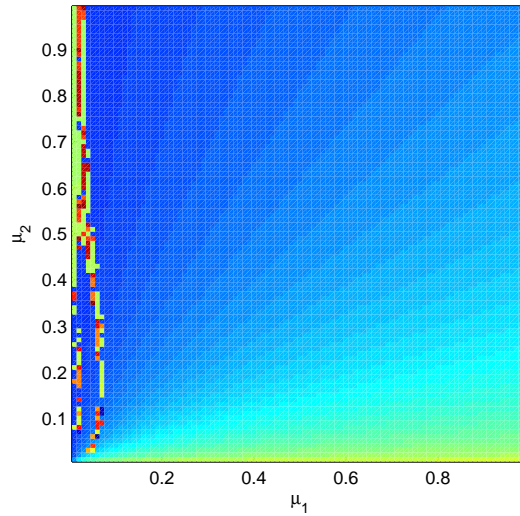


Figura 8.13: Regió d'adeïtat per S_1 de l'aproximació de primer grau s_1^1 .

En canvi, per S_2 , els valors menuts de μ_1 estan a la regió d'adeïtat de s_j^2 , mentre que per μ_1 pròxims a 1, les aproximacions mitjançant sèries de potències no són adequades. La regió d'adeïtat creix amb l'ordre de la suma parcial, tal com es mostra a les Figures 8.17 i 8.18.

El comportament per S_4 és semblant al de S_1 , però en aquest cas, la regió d'adeïtat es redueix a mesura que augmenta l'ordre (vore les Figures 8.19 i 8.20).

La sèrie (8.6) produeix en general estimacions S_7 -idònies, però no resulten millors que el terme inicial de la sèrie, $(1/2, -\sqrt{3}/2)$, que és adequada per assolir S_7 per a quasi totes les parelles (μ_1, μ_2) . Només existeix una regió menuda on la convergència a S_7 no es garanteix per al terme inicial, per $0 < \mu_1 < 0.01$, mentre que partint des de termes més alts de la sèrie s_j^- , la convergència requereix condicions com $\mu_2 < \mu_1$. Les Figures 8.21 i 8.22 mostren les regions d'adeïtat per al terme inicial i per al terme de cinqué ordre, respectivament. En la primera, la zona d'inadequació és difícil d'apreciar, mentre que la segona figura presenta dues zones de convergència a diferents solucions i una zona intermèdia, on el comportament de les itera-

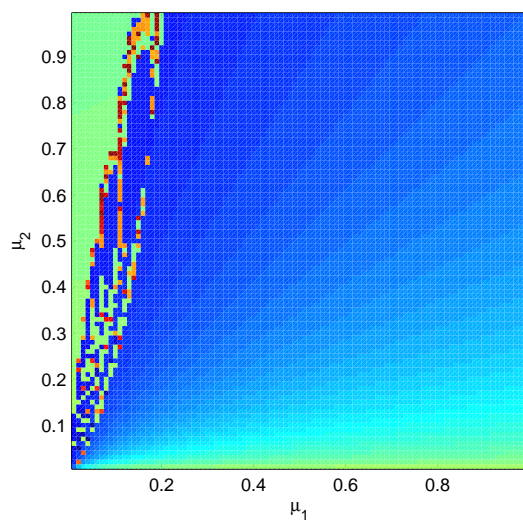


Figura 8.14: Regió d'adequació per S_1 de l'aproximació de tercer grau s_3^1 .

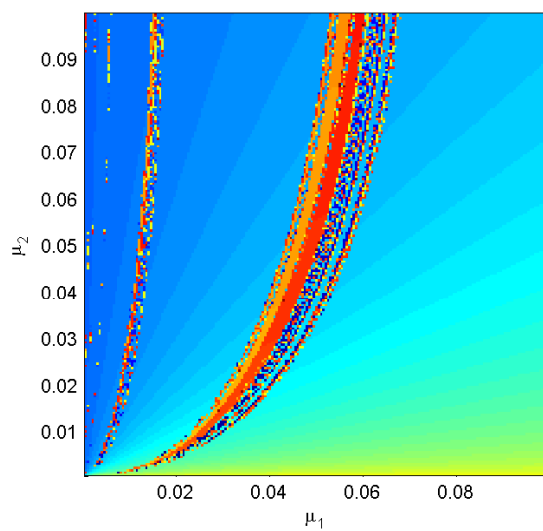


Figura 8.15: Detall de la regió d'adequació S_1 de s_1^1 a prop de l'origen.

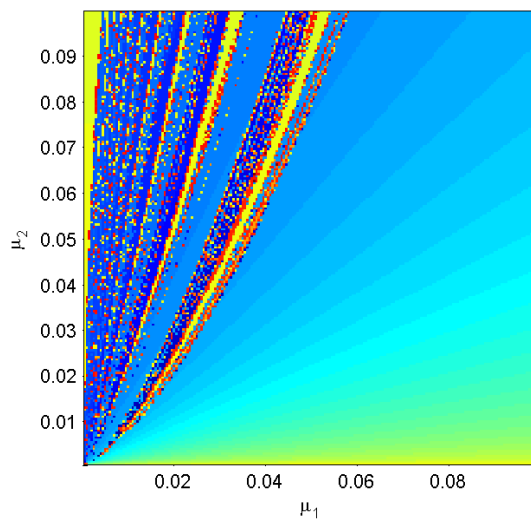


Figura 8.16: Detall de la regió d'adequació S_1 de s_3^1 a prop de l'origen.

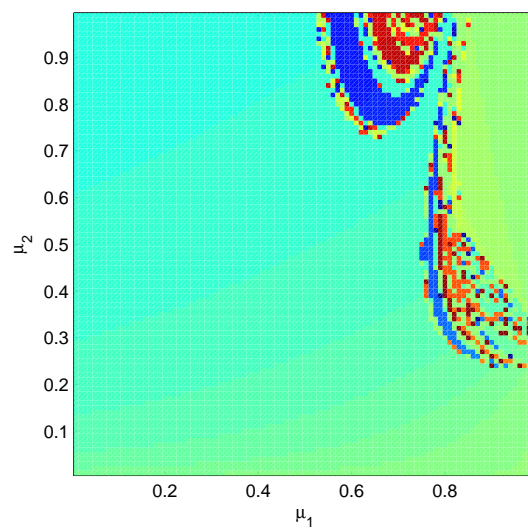


Figura 8.17: Regió d'adequació per S_2 de l'aproximació s_1^2 .

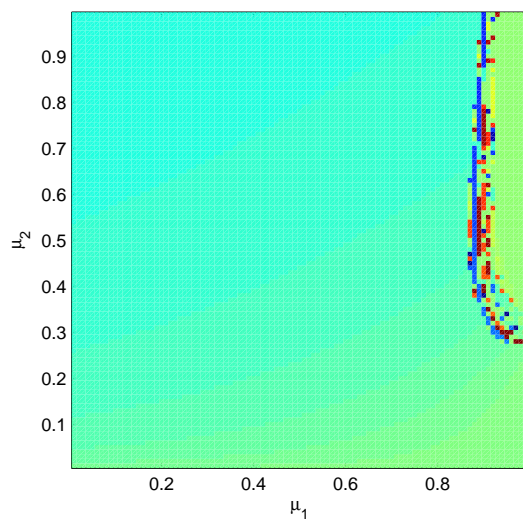


Figura 8.18: Regió d'adequació per S_2 de l'aproximació s_3^2 .

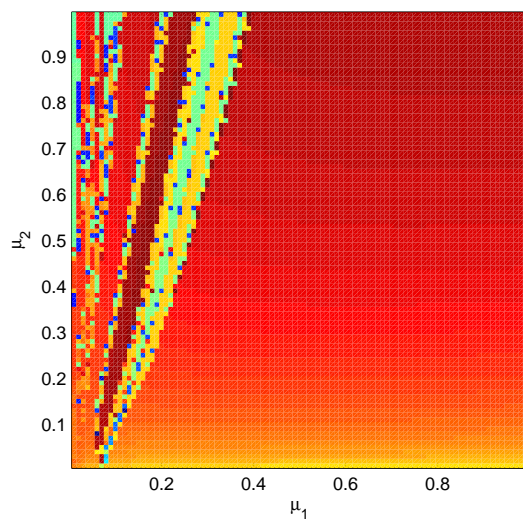


Figura 8.19: Regió d'adequació per S_4 de l'aproximació s_1^4 .

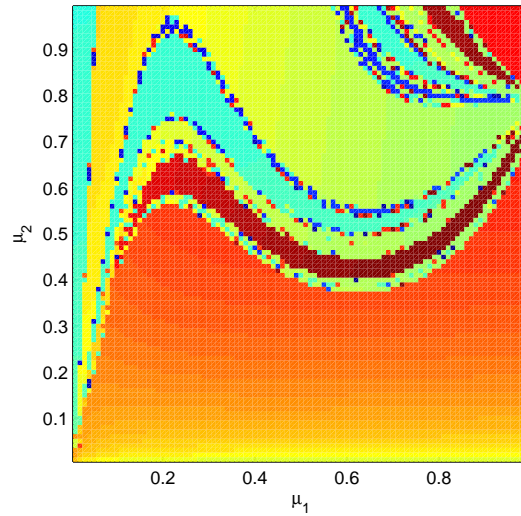


Figura 8.20: Regió d'ideïtat per S_4 de l'aproximació s_3^4 .

cions és més complex. A la Figura 8.23 es pot observar una ampliació de la regió de no idoneïtat per al terme inicial que s'origina per valors molt menuts de μ_1 , però permetent que μ_2 prenga valors relativament alts.

8.5 Conclusions

En resum, hem estudiat la situació gens trivial que es presenta en aplicar el mètode de Newton per trobar solucions numèriques del sistema no lineal que descriu una modelització d'una situació real de la mecànica celeste, el del problema dels quatre cossos restringit (8.1). Hem intentat identificar algunes característiques de les conques d'atracció de les solucions d'equilibri d'aquest problema. Degut a la complexitat de les conques l'atracció, és difícil garantir que aplicant l'algorisme des d'un cert punt de partida concret, es convergirà a la solució desitjada. Mitjançant l'ús de desenvolupaments en sèries de potències es poden calcular aproximacions per a les solucions que poden utilitzar-se com a estimacions inicials per a les iteracions de Newton. Hem presentat una anàlisi gràfica del comportament de diferents aproximacions per sèries obtenint les regions d'ideïtat per a diferents ordres i punts d'equilibri. En particular, hem vist que les sumes

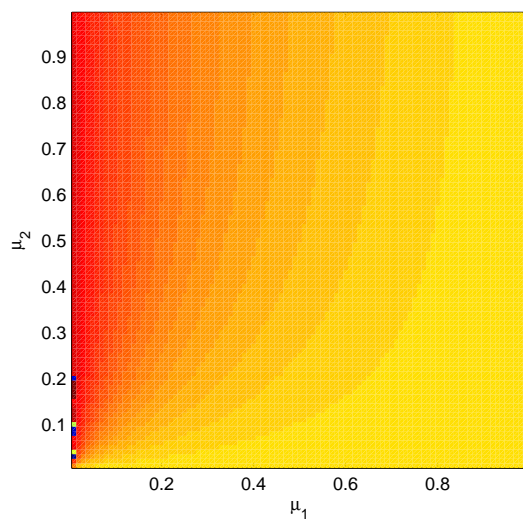


Figura 8.21: Regió d'adequació per S_7 de l'aproximació s_0^- .

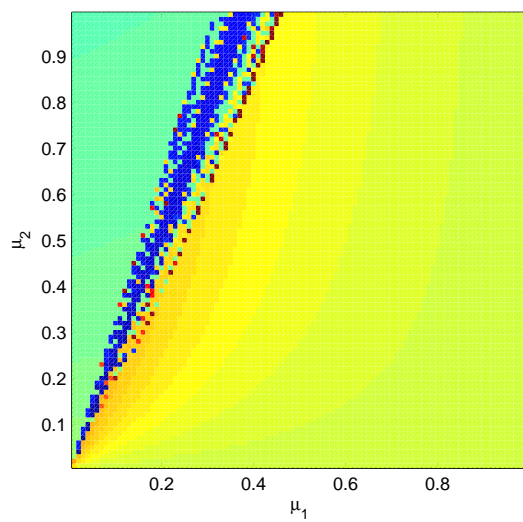


Figura 8.22: Regió d'adequació per S_7 de l'aproximació s_5^- .

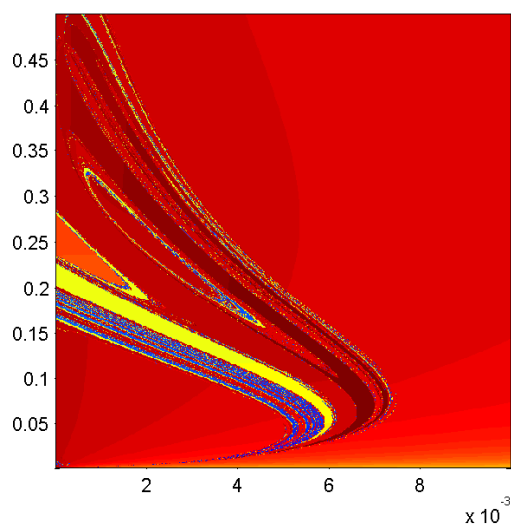


Figura 8.23: Zona d'inadequació per S_7 del terme zero s_0^- .

parcials de la sèrie (8.6) no proporcionen millors estimacions per al mètode de Newton que el seu terme inicial o terme zero. Les anàlisis dutes a terme constaten, que a priori, és difícil garantir la convergència a la solució requerida.



Convergència semilocal de processos iteratius en k passos i la seua aplicació per a resoldre un tipus especial de problemes conservatius.¹

Índex

9.1	Introducció	164
9.2	Convergència semilocal	167
9.2.1	Resultat principal	168
9.3	Sobre l'accessibilitat del procés iteratiu	177
9.4	Resolució Numèrica d'un tipus de problema . .	181
9.4.1	Existència i unicitat de la solució	182
9.4.2	Configuració d'un esquema de diferències finites .	185

¹La base d'aquest capítol és l'article [120]

9.1 Introducció

Gran quantitat de fenòmens físics, biològics, socials, etc. es poden modelar per problemes de valor inicial, equacions derivades parcials i equacions integrals. Alguns d'ells, entre molts altres, són el moviment planetari, la mecànica newtoniana, problemes de reaccions químiques, els circuits elèctrics, la conducció de calor, el moviment vibratori, la transmissió de senyals, problemes relacionats amb el creixement de poblacions, estudis sobre la violència de gènere, diferents tipus de delictes rurals, propagació d'incendis forestals, etc. Vore, per exemple, [122] i [130]. Aquestes equacions diferencials, en la majoria dels casos, no es poden resoldre analíticament i llavors, se sol utilitzar un mètode numèric adequat que transforme el problema en una altre equivalent basat en equacions no lineals.

Centrarem la nostra atenció, en aquest capítol, en sistemes conservatius com són els dels camps gravitacionals i elèctrics. Sistemes en què el treball realitzat per una força és independent de la ruta seguida i és igual a la diferència entre els valors final i inicial d'una funció d'energia.

Concretament, considerarem sistemes conservatius on la força de amortiment és nul·la i els quals es poden descriure de la manera següent:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \phi(x(t)) = 0,$$

on m és la massa sobre la qual actua la força no lineal $\phi(x(t))$ en un interval $[a, b]$ verificant que $x(a) = A$, $x(b) = B$.

El nostre objectiu és utilitzar tècniques d'anàlisi funcional per tal d'obtenir dominis que continguin la solució d'aquests problemes, aquests dominis s'obtenen en l'espai de dimensió infinita als quals pertany la funció $x(t)$. També ens proposem determinar les condicions d'unicitat per a aquests dominis. Açò es duu a terme mitjançant l'ús de mètodes iteratius per a equacions no lineals definides en espais Banach.

Aquest capítol se centra en la resolució d'aquestes equacions no lineals $F(x) = 0$. De nou, les solucions d'aquestes equacions poques vegades es

poden trobar de forma tancada, i només podem recórrer a intentar trobar aproximacions numèriques cada vegada més pròximes a la solució. Com a conseqüència, els mètodes per resoldre les equacions de la forma anterior solen ser procediments iteratius. És a dir, a partir d'una aproximació inicial a una solució x^* de l'equació $F(x) = 0$, es construeix una seqüència $\{x_n\}$ d'aproximacions de manera que la successió $\{\|x_n - x^*\|\}$ siga decreixents i, per tant, s'obtinga una millor aproximació a eixa solució x^* en cada pas. Òbviament, el nostre interès es centra en $\lim_n x_n = x^*$.

Per donar una generalitat suficient al problema d'aproximar la solució d'una equació no lineal, considerarem les equacions de la forma $F(x) = 0$, on F és un operador no lineal, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$, definida en un domini obert convex no buit Ω d'un espai de Banach X amb valors en un espai de Banach Y , vore [125] i [128].

Per a una equació com l'anterior, podem obtindre de diverses maneres, depenent del mètode iteratiu que s'aplique, una seqüència de valors aproximats $\{x_n\}$ a la solució. D'entre totes, la iteració més coneguda és la del mètode de Newton, l'esquema del qual és el següent:

$$x_0 \text{ donada en } \Omega, \quad x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.1)$$

L'elecció d'un mètode per resoldre $F(x) = 0$ normalment depén de la seva eficiència, que vincula la velocitat de convergència (ordre de convergència) del mètode amb el seu cost computacional. Dues mesures clàssiques de l'eficiència, en el sentit definit per Traub [131] i Ostrowski [129], són l'índex d'eficiència (EI) i l'eficiència computacional (CE), que es defineixen respectivament com

$$EI = \rho^{1/d} \quad \text{i} \quad CE = \rho^{1/C}, \quad (9.2)$$

on ρ és l'ordre de convergència del mètode, d representa el nombre d'avaluacions de la funció necessàries per aplicar el mètode i C és el nombre d'operacions (productes i divisions) que es requereixen per calcular cada iteració del mètode.

Si tenim en compte mètodes iteratius sense memòria, és a dir, $x_{n+1} = G(x_n)$ amb x_0 pertanyent a Ω , com el mètode de Newton (9.1), sabem que

el seu ordre de convergència ρ és un nombre natural i, a més, l'algorisme d'aquests mètodes depenen explícitament de les primeres $\rho - 1$ derivades de la funció implicada en l'equació. Per tant, si considerem processos iteratius amb un alt ordre de convergència, el cost computacional augmenta, ja que cal avaluar les derivades successives de la funció implicada en l'esquema del mètode. A continuació, estem interessats en els mètodes numèrics que eviten el cost computacional de les derivades de la funció F en cada pas, però que permeten aconseguir un alt ordre de convergència. Per tant, considerem un procés iteratiu de k passos amb la primera derivada congelada expressada pel següent algorisme:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in D, \\ x_n^{(1)} = x_n^{(0)} - \Gamma_n F(x_n^{(0)}), \\ x_n^{(2)} = x_n^{(1)} - \Gamma_n F(x_n^{(1)}), \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} = x_n^{(k-2)} - \Gamma_n F(x_n^{(k-2)}), \\ x_n^{(k)} = x_n^{(k-1)} - \Gamma_n F(x_n^{(k-1)}), \quad n \geq 0, \end{array} \right. \quad (9.3)$$

on $\Gamma_n = F'(x_n)^{-1}$, $x_n = x_n^{(0)}$ i $x_{n+1} = x_n^{(k)}$, amb $k \geq 1$. És un resultat conegut que si combinem el mètode de Newton amb si mateix k vegades però amb la derivada congelada, obtenim un mètode d'ordre $k + 1$, aquest és un resultat clàssic obtingut per Traub, [131]. A més, si es tracta d'un procés iteratiu d'alt ordre, no augmenta el cost computacional associat a les derivades perquè aquest procés iteratiu només utilitza una vegada la primera derivada en cada pas.

Recordem que es poden dur a terme tres tipus d'estudis quan ens interessa provar la convergència de la successió d'aproximacions (9.3): local, semilocal i global. En primer lloc, l'estudi local de la convergència es basa en l'anàlisi de les condicions de la solució x^* , a partir de determinades condicions de l'operador F , i proporciona l'anomenada bola de convergència de (9.3), que mostra l'accessibilitat a x^* des de l'estimació inicial x_0 que ha de pertànyer a la bola, consulteu [36], [37] i [38]. En segon lloc, l'estudi semilocal de la convergència es basa en la suposició de què es donen certes condicions sobre l'aproximació inicial x_0 i partint de determinades condicions de l'operador F , per obtenir el domini de paràmetres corresponents

a eixes condicions requerides a x_0 de manera que es pot garantir la convergència a la solució x^* de la seqüència que es genera mitjançant el mètode iteratiu, vore [39] i [40]. En tercer lloc, l'estudi global de la convergència garanteix, basant-se només en determinades condicions de l'operador F , la convergència de la successió d'aproximacions a la solució x^* en un domini, independentment de l'estimació inicial x_0 , consulteu [41] i [42]. Per tant, podem dir que l'anàlisi de la convergència a partir de la imposició de condicions sobre la solució, sobre l'aproximació inicial o sobre cap d'aquestes, determina el diferent tipus d'estudi realitzat. En qualsevol dels tres casos, hi ha certes condicions que sempre s'exigiran a l'operador F .

L'estudi de la convergència local presenta el desavantatge d'assumir que la solució, que en principi es desconeix, satisfà certes condicions. En general, l'estudi global de la convergència és molt específic pel que fa al tipus d'operadors a considerar, com a conseqüència de l'absència de condicions sobre les aproximacions inicials i sobre la solució.

Destaquem ara que, encara que alguns autors han publicat mètodes iteratius de k passos, com en [123] i [121], pel que sabem molt pocs estudis ([132], [133]) s'han realitzat sobre la convergència semilocal per a aquests mètodes generals. Aquest és l'objectiu de l'anàlisi que ara ens plantegem dur a terme.

En el treball d'aquest capítol, centrarem la nostra atenció en l'anàlisi de la convergència semilocal del mètode de Newton en k passos amb la primera derivada congelada (9.3). Per aquest propòsit, només s'imposaran les condicions de F' , malgrat això es pot assolir ordre de convergència de $k+1$. El nostre objectiu final és aplicar aquests resultats teòrics per resoldre de manera eficient un tipus especial de sistemes conservatius.

9.2 Convergència semilocal

El resultat més conegut en referència a la convergència semilocal per al mètode de Newton (9.1) és la variant del teorema de Newton-Kantorovich [125] donada per Ortega en [128], el qual es demostra sota les següents condicions:

(C₁) Existeix $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, per algun $x_0 \in \Omega$, amb $\|\Gamma_0\| \leq \beta$ i $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$, on $\mathcal{L}(Y, X)$ és el conjunt d'operadors lineals definits de Y en X .

(C₂) Existeix una constant de $K \geq 0$ tal que $\|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\|$ per $x, y \in \Omega$.

(C₃) $h = K\beta\eta \leq \frac{1}{2}$.

Amb $B(x_0, r\eta) \subset \Omega$, on $r = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}$ és el menor zero positiu del polinomi $p(t) = \frac{K}{2}t^2 - \frac{t}{\beta} + \frac{\eta}{\beta}$, es garanteix la convergència semilocal del mètode de Newton.

Ara, el nostre objectiu és estudiar la convergència semilocal per a aquest mètode de k passos (9.3), exigint condicions prèvies a l'aproximació inicial x_0 i a l'operador F , és a dir, assumint les condicions (C₁) i (C₂). Per tant, fixat el nombre de passos $k \in \mathbb{N}$, obtenim un resultat semilocal per al procés iteratiu (9.3) d'ordre $k + 1$, $k \geq 1$, sota les mateixes condicions inicials que per al mètode de Newton (9.1), el qual és d'ordre quadràtic. Per a això, modifiquem la condició (C₃) d'Ortega. Observeu que la condició (C₁), exigida a l'aproximació inicial x_0 , defineix els paràmetres β i η , i la condició (C₂), requerida a l'operador F , defineix el paràmetre fix K . Per tant, a partir d'aquests paràmetres, modifiquem la condició (C₃).

9.2.1 Resultat principal

Ara, per completar l'estudi de convergència semilocal hem de provar les afirmacions assumides que hem fet en la nostra tesi, (vore Lema 2), que són, $x_n^{(j)} \in B(x_0, R\eta_n)$, per a $1 \leq j \leq k$ i per tot $n \in \mathbb{N}$, definint el paràmetre R . Per això, observem que si $1 < R < \frac{2 - \sqrt{2h_0}}{2h_0}$, llavors $h_0 R < 1$.

Per tant, per $1 \leq j \leq k$ i per tot $n \in \mathbb{N}$, tenim:

$$\begin{aligned}
\|x_n^{(j)} - x_0\| &\leq \|x_n^{(j)} - x_n^{(0)}\| + \sum_{j=0}^{n-1} \|x_{n-j}^{(0)} - x_{n-j-1}^{(0)}\| \leq \sum_{j=0}^n S_j(R)\eta_j \leq S_0(R) \sum_{j \geq 0} \eta_j \\
&= S_0(R) \left[\eta + \frac{(h_0 R)^{k-1}}{2(1-h_0 R)} h_0 \eta + \frac{1}{2} h_1^k R^{k-1} \eta_1 + \frac{1}{2} h_2^k R^{k-1} \eta_2 + \dots \right] \\
&= S_0(R) \left[\eta + \frac{(h_0 R)^{k-1}}{2(1-h_0 R)} h_0 \eta + \frac{1}{2} h_1^k R^{k-1} \eta_1 + \frac{1}{2} h_2^k R^{k-1} \frac{1}{2} h_1^k R^{k-1} \eta_1 + \dots \right] \\
&= S_0(R) \left[\eta + \frac{(h_0 R)^{k-1}}{2(1-h_0 R)} h_0 \eta \left(1 + \frac{1}{2} h_0^k R^{k-1} + \left(\frac{1}{2} h_0^k R^{k-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} h_0^k R^{k-1}\right)^n + \dots \right) \right] \\
&\leq S_0(R) \left[1 + \frac{(h_0 R)^{k-1}}{2(1-h_0 R)} h_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{2} h_0^k R^{k-1}} \right] \eta \\
&\leq S_0(R) \left[1 + \frac{h_0^k R^{k-1}}{(1-h_0 R)(2-h_0^k R^{k-1})} \right] \eta
\end{aligned}$$

on hem utilitzat que $\{h_n\}$ és una successió escalar decreixent i s'ha afegit la suma d'una progressió geomètrica la raó $\frac{1}{2} h_0^k R^{k-1}$, que és menys d'1 per hipòtesi. Per tant, els càlculs anteriors permetem definir una equació per obtenir el paràmetre R , com podem veure en el següent resultat de la convergència semilocal per al procés iteratiu (9.3).

Teorema 22 *Siga F és un operador no lineal, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$, definit en un domini convex no nul Ω d'un espai de Banach X amb valors en un espai Banach Y . Suposem que s'acompleixen les condicions (C_1) - (C_2) . Per a una quantitat fixa de passos k , si l'equació*

$$t = S_0(t) \left[1 + \frac{h_0^k t^{k-1}}{(1-h_0 t)(2-h_0^k t^{k-1})} \right], \quad (9.4)$$

té com a mínim una arrel real positiva i la menor arrel positiva, denotada per R , satisfà

$$\frac{h_0}{2(1-h_0 R)^2} < 1 \quad (9.5)$$

i $B(x_0, R\eta) \subset \Omega$, llavors el procés iteratiu donat per (9.3), convergeix a una solució x^* de l'equació $F(x) = 0$, a partir de x_0 i $x_n^{(j)}$, $x^* \in \overline{B(x_0, R\eta)}$, per $1 \leq j \leq k$ i per a tots els $n \in \mathbb{N}$. A més, la solució x^* és única en $B(x_0, \frac{2}{K\beta} - R\eta) \cap \Omega$.

Per demostrar aquest resultat, prèviament hem de provar alguns lemes.

Relacions de recurrència

Primer, analitzarem la definició de l'algorisme iteratiu (9.3) per a diferent nombre de passos, $1 \leq j \leq k$, $k \geq 1$. Per a aquests, obtenim el següent resultat.

Lema 1 *Suposem que existeix $R > 1$ tal que $x_n^{(j)} \in B(x_0, R\eta)$, amb $B(x_0, R\eta) \subset \Omega$, per a $1 \leq j \leq k$, $k \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Aleshores, per a $R < \frac{1}{\beta K \eta}$, el procés iteratiu (9.3) es troba ben definit.*

Demostració: En primer lloc, òbviament, $F(x_n^{(j)})$ està ben definit per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $1 \leq j \leq k$, $k \geq 1$.

D'altra banda, és necessari que $\Gamma_n = [F'(x_n)]^{-1}$ existisca per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per al nostre propòsit obtenim que:

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_n)\| \leq \|\Gamma_0\| \|F'(x_n) - F'(x_0)\| \leq \beta K \|x_n - x_0\| < \beta K \eta R.$$

A continuació, si $\beta K \eta R < 1$, apliquem el lema de Banach i així es dedueix l'existència de Γ_n i que verifica:

$$\|\Gamma_n\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta K \eta R}$$

□

Ara, estem interessats a obtenir les relacions de recurrència necessàries per demostrar la convergència semilocal del procés iteratiu (9.3). A partir d'ara, assumim les hipòtesis del lema previ.

En aquestes condicions, per a $n = 0$ i $j = 1$, tenim que:

$$\|x_0^{(1)} - x_0^{(0)}\| \leq \|\Gamma_0 F(x_0^{(0)})\| \leq \eta. \quad (9.6)$$

Utilitzarem la notació següent:

$$\eta_0 = \eta,$$

$$\beta_0 = \beta,$$

$$h_0 = \beta_0 K \eta_0.$$

Ara, considerant el desenvolupament en sèrie de Taylor de $F(x_0^{(1)})$ al voltant de $x_0^{(0)}$ i utilitzant el primer pas de (9.3), tenim:

$$\begin{aligned} F(x_0^{(1)}) &= \int_{x_0^{(0)}}^{x_0^{(1)}} [F'(z) - F'(x_0^{(0)})] dz \\ &= \int_0^1 [F'(x_0 + \tau(x_0^{(1)} - x_0^{(0)})) - F'(x_0)] d\tau(x_0^{(1)} - x_0^{(0)}), \end{aligned}$$

llavors, prenent normes i emprant (C_2) obtenim:

$$\|F(x_0^{(1)})\| \leq \frac{1}{2} K \eta_0 \|x_0^{(1)} - x_0^{(0)}\|,$$

per tant, es dedueix que:

$$\|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}\| = \|\Gamma_0\| \|F(x_0^{(1)})\| \leq \frac{1}{2} h_0 \|x_0^{(1)} - x_0^{(0)}\|,$$

i

$$\|x_0^{(2)} - x_0^{(0)}\| \leq \|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}\| + \|x_0^{(1)} - x_0^{(0)}\| \leq (1 + \frac{1}{2} h_0) \eta_0.$$

De la mateixa manera, per $j = 2$, acotem $F(x_0^{(2)})$ mitjançant un procés similar. En primer lloc, obtenim:

$$\begin{aligned} F(x_0^{(2)}) &= \int_{x_0^{(1)}}^{x_0^{(2)}} [F'(z) - F'(x_0)] dz \\ &= \int_0^1 [F'(x_0^{(1)} + \tau(x_0^{(2)} - x_0^{(1)})) - F'(x_0^{(0)})] d\tau(x_0^{(2)} - x_0^{(1)}), \end{aligned}$$

i, prenent normes i fent ús de (C_2) , s'obté que:

$$\|F(x_0^{(2)})\| \leq K R \eta_0 \|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}\|,$$

on hem utilitzat que $x_0^{(1)} + \tau(x_0^{(2)} - x_0^{(1)}) \in B(x_0, R\eta)$, ja que $x_0^{(1)}, x_0^{(2)} \in B(x_0, R\eta)$ i per la seva propietat de convexitat. Emprant aquesta cota ens proporciona que:

$$\|x_0^{(3)} - x_0^{(2)}\| \leq \|\Gamma_0\| \|F(x_0^{(2)})\| \leq h_0 \|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}\| \leq \frac{1}{2} h_0^2 R \|x_0^{(1)} - x_0^{(0)}\|,$$

i

$$\|x_0^{(3)} - x_0\| \leq \|x_0^{(3)} - x_0^{(2)}\| + \|x_0^{(2)} - x_0^{(0)}\| \leq \left(1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0^2R\right)\eta_0,$$

A continuació, a partir dels raonaments anteriors, podem obtenir el següent resultat.

Lema 2 Per a $n = 0$, les relacions següents es verifiquen per $2 \leq j \leq k-1$:

$$\begin{aligned} i) \quad & \|F(x_0^{(j)})\| \leq KR\eta_0\|x_0^{(j)} - x_0^{(j-1)}\|, \\ ii) \quad & \|x_0^{(j)} - x_0^{(j-1)}\| \leq h_0R\|x_0^{(j-1)} - x_0^{(j-2)}\|, \\ iii) \quad & \|x_0^{(j)} - x_0^{(0)}\| \leq \left(1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0^2R + \dots + \frac{1}{2}h_0^{j-1}R^{j-2}\right)\eta_0. \end{aligned}$$

Així, aquestes relacions es verifiquen per $j = k$.

Demostració: Considerant el desenvolupament de Taylor de $F(x_0^{(j)})$ al voltant de $x_0^{(j-1)}$ i fent ús del j -èsim pas de (9.3), tenim que:

$$\begin{aligned} F(x_0^{(j)}) &= \int_{x_0^{(j-1)}}^{x_0^{(j)}} [F'(z) - F'(x_0)] dz \\ &= \int_0^1 [F'(x_0^{(j-1)} + \tau(x_0^{(j)} - x_0^{(j-1)})) - F'(x_0)] d\tau(x_0^{(j)} - x_0^{(j-1)}), \end{aligned}$$

aleshores, prenent normes i utilitzant $x_0^{(j-1)} + \tau(x_0^{(j)} - x_0^{(j-1)}) \in B(x_0, R\eta)$, ja que $x_0^{(j)}, x_0^{(j-1)} \in B(x_0, R\eta)$, s'obté:

$$\|F(x_0^{(j)})\| \leq KR\eta_0\|x_0^{(j)} - x_0^{(j-1)}\|, \quad (9.7)$$

De manera que

$$\begin{aligned} \|x_0^{(j+1)} - x_0^{(j)}\| &\leq \|\Gamma_0\| \|F(x_0^{(j)})\| \leq h_0\|x_0^{(j)} - x_0^{(j-1)}\| \leq h_0^2R^2\|x_0^{(j-1)} - x_0^{(j-2)}\| \\ &\leq \dots \leq h_0^{j-1}R^{j-1}\|x_0^{(2)} - x_0^{(1)}\| \leq \frac{1}{2}h_0^jR^{j-1}\|x_0^{(1)} - x_0^{(0)}\|, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \|x_0^{(j+1)} - x_0^{(0)}\| &\leq \|x_0^{(j+1)} - x_0^{(j)}\| + \|x_0^{(j)} - x_0^{(0)}\| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0^2R + \dots + \frac{1}{2}h_0^jR^{j-1}\right)\eta_0, \end{aligned}$$

Queda així demostrat el resultat.

□.

A més, per a $j = k$, podem deduir que:

$$\begin{aligned} \|F(x_0^{(k)})\| &\leq KR\eta\|x_0^{(k)} - x_0^{(k-1)}\|, \\ \|x_0^{(k)} - x_0^{(k-1)}\| &\leq h_0R\|x_0^{(k-1)} - x_0^{(k-2)}\|, \\ \|x_0^{(k)} - x_0^{(0)}\| &= \|x_1 - x_0\| \leq \left(1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0^2R + \dots + \frac{1}{2}h_0^{k-1}R^{k-2}\right)\eta_0, \end{aligned}$$

Per tant, si considerem

$$S_0(R) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 1 \\ 1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0^2R + \dots + \frac{1}{2}h_0^{k-1}R^{k-2} & \text{if } k > 1 \end{cases} \quad (9.8)$$

dels resultats anteriors, s'obté que $x_0^{(j)}$, $1 \leq j \leq k-1$ i $x_1 = x_0^{(k)}$ pertanyen a $B(x_0, S_0(R)\eta_0)$.

Ara analitzem el mètode (9.3) per a $n = 1$. En primer lloc, a partir del lema 1, permet garantir l'existència de $\Gamma_1 = [F'(x_1)]^{-1}$ i es denota com

$$\|\Gamma_1\| \leq \frac{\beta}{1 - h_0R} \equiv \beta_1.$$

Per tant, podem definir $x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \Gamma_1 F(x_1^{(0)})$, amb $x_1^{(0)} = x_0^{(k)} = x_1$, i tenim:

$$\begin{aligned} \|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\| &\leq \|\Gamma_1 F(x_1^{(0)})\| \leq \beta_1 KR\eta_0\|x_0^{(k)} - x_0^{(k-1)}\| \\ &\leq \beta_1 KR\eta_0 \frac{1}{2}(\beta KR\eta_0)^{k-1} R^{k-2} \|x_0^{(1)} - x_0\| \\ &\leq \frac{\beta_0 KR\eta_0}{2(1 - h_0R)} h_0^{k-1} R^{k-2} \eta_0 = \frac{1}{2(1 - h_0R)} h_0^k R^{k-1} \eta_0. \end{aligned}$$

Després, prenent $\eta_1 = \frac{1}{2(1-h_0R)} h_0^k R^{k-1} \eta_0$, es donen les mateixes condicions que en el pas anterior, és a dir:

$$\begin{cases} \|\Gamma_1\| \leq \beta_1, \\ \|\Gamma_1 F(x_1)\| \leq \eta_1, \end{cases} \quad (9.9)$$

A continuació, seguint la mateixa notació anterior, considerem $h_1 = \beta_1 K \eta_1$
i

$$S_1(R) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 1 \\ 1 + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_1^2 R + \dots + \frac{1}{2}h_1^{k-1} R^{k-2} & \text{if } k > 1, \end{cases} \quad (9.10)$$

i així, pel mateix raonament anterior, establim:

$$\begin{aligned} \|F(x_1^{(1)})\| &\leq \frac{1}{2} K \eta_1 \|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\|, \\ \|F(x_1^{(j)})\| &\leq K R \eta_1 \|x_1^{(j)} - x_1^{(j-1)}\|, \quad 2 \leq j \leq k, \end{aligned}$$

i, a més, per a $1 \leq j \leq k-1$, continua sent:

$$\begin{aligned} \|x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}\| &\leq h_1 R \|x_1^{(j)} - x_1^{(j-1)}\| \leq \frac{1}{2} h_1^j R^{j-1} \|x_1^{(j)} - x_1^{(j-1)}\|, \\ \|x_1^{(j+1)} - x_1^{(0)}\| &\leq (1 + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_1^2 R + \dots + \frac{1}{2}h_1^{j-1} R^{j-2}) \eta_1. \end{aligned}$$

Aleshores, es dedueix:

$$\|F(x_1^{(k)})\| \leq K R \eta_1 \|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\|,$$

i

$$\begin{aligned} \|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\| &= \|x_2 - x_1^{(k-1)}\| \leq h_1 R \|x_1^{(k-1)} - x_1^{(k-2)}\| \leq \frac{1}{2} h_1^{k-1} R^{k-2} \|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\|, \\ \|x_1^{(k)} - x_1^{(0)}\| &= \|x_2 - x_1\| \leq S_1(R) \eta_1. \end{aligned}$$

Llavors, $x_1^{(j)}, x_2 \in B(x_1, S_1(R) \eta_1)$, per $1 \leq j \leq k-1$, sent $x_2 = x_1^{(k)}$.

Ara podem seguir amb $n = 2$. Comencem, a partir de lema 1, obtenint l'existència de $\Gamma_2 = [F'(x_2)]^{-1}$ i denotant

$$\|\Gamma_2\| \leq \frac{\beta}{1 - h_0 R} \equiv \beta_2.$$

S'observa que $\beta_2 = \beta_1$.

Per a $j = 1$, prenent en consideració que $x_2 = x_2^{(0)}$, tenim:

$$\begin{aligned} \|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\| &\leq \|\Gamma_2 F(x_2^{(0)})\| \leq \beta_2 K R \eta_1 \|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\| \leq \\ &\beta_2 K R \eta_1 \frac{1}{2} (\beta_1 K \eta_1)^{k-1} R^{k-2} \|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\| \leq \frac{1}{2} h_1^k R^{k-1} \eta_1. \end{aligned}$$

Després, prenent $\eta_2 = \frac{1}{2} h_1^k R^{k-1} \eta_1$, tenim una situació similar que en el cas anterior de $n = 1$, vore (9.9):

$$\begin{cases} \|\Gamma_2\| \leq \beta_2, \\ \|\Gamma_2 F(x_2)\| \leq \eta_2, \end{cases} \quad (9.11)$$

llavors, per un desenvolupament semblant al que s'ha realitzat prèviament, assumint les hipòtesis del lema 1, i seguint amb la mateixa notació anterior, considerem $h_2 = \beta_2 K \eta_2$ i

$$S_2(R) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 1 \\ 1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_2^2 R + \dots + \frac{1}{2}h_2^{k-1} R^{k-2} & \text{if } k > 1 \end{cases} \quad (9.12)$$

establím que $x_2^{(j)}, x_3 \in B(x_2, S_2(R)\eta_2)$ per a $1 \leq j \leq k-1$.

Estem en condicions de declarar el següent sistema de relacions de recurrència:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \beta_1, \\ \eta_n &= \frac{1}{2}h_{n-1}^k R^{k-1} \eta_{n-1} \\ h_n &= \beta_n K \eta_n, \end{aligned}$$

$$S_n(R) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 1 \\ 1 + \frac{h_n}{2}(1 + h_n R + \dots + (h_n R)^{k-2}) & \text{if } k > 1 \end{cases} \quad (9.13)$$

L'estudi anterior ens porta a establir el següent resultat:

Lema 3 *Si assumim les hipòtesis del lema 1, llavors $x_n^{(j)}, x_{n+1} \in B(x_n, S_n(R)\eta_n)$, $1 \leq j \leq k-1$.*

Demostració: Mitjançant un procés similar que el ja dut a terme per als casos $n = 1, 2$, tenim que per a $n \in N$:

$$\begin{aligned} \|F(x_n^{(1)})\| &\leq \frac{1}{2}K\eta_n \|x_n^{(1)} - x_n^{(0)}\| \\ \|F(x_n^{(j)})\| &\leq KR\eta_n \|x_n^{(j)} - x_n^{(j-1)}\|, \quad 2 \leq j \leq k, \end{aligned}$$

i per a $1 \leq j \leq k-1$:

$$\begin{aligned} \|x_n^{(j+1)} - x_n^{(j)}\| &\leq h_n R \|x_n^{(j)} - x_n^{(j-1)}\| \leq \frac{1}{2}h_n^j R^{j-1} \|x_n^{(j)} - x_n^{j-1}\|, \\ \|x_n^{(j+1)} - x_n^{(0)}\| &\leq (1 + \frac{1}{2}h_n + \frac{1}{2}h_n^2 R + \dots + \frac{1}{2}h_n^j R^{j-1})\eta_n. \end{aligned}$$

Aleshores, d'ací resulta que:

$$\|F(x_n^{(k-1)})\| \leq KR\eta_n \|x_n^{(k-1)} - x_n^{(k-2)}\|,$$

i

$$\|x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}\| = \|x_{n+1} - x_n^{(k-1)}\| \leq h_n R \|x_n^{(k-1)} - x_n^{(k-2)}\| \leq \frac{1}{2} h_n^{k-1} R^{k-2} \|x_n^{(1)} - x_n^{(0)}\|,$$

$$\|x_n^{(k)} - x_n^{(0)}\| = \|x_{n+1} - x_n^{(0)}\| \leq \left(1 + \frac{1}{2} h_n \frac{1}{2} h_n^2 R + \dots + \frac{1}{2} h_n^{k-1} R^{k-2}\right) \eta_n.$$

Així, s'obté el resultat desitjat. \square

En el lema següent, s'obtenen algunes propietats bàsiques per a les successions escalars definides en les relacions de recurrència.

Lema 4 Si $1 < R < \frac{2-\sqrt{2h_0}}{2h_0}$, llavors $\{h_n\}$ i $\{S_n(R)\}$ són seqüències escalars decreixents, $n \in \mathbb{N}$.

Demostració: De la hipòtesi, es dedueix que $h_0 R < 1$. Aleshores

$$h_1 = \beta_1 K \eta_1 = \frac{\beta}{1-h_0 R} K \frac{1}{2(1-h_0 R)} h_0^k R^{k-1} \eta_0 = \frac{h_0}{2} \frac{h_0^k R^{k-1}}{(1-h_0 R)^2} < \frac{h_0}{2(1-h_0 R)^2} h_0 < h_0,$$

ja que $\frac{h_0}{2(1-h_0 R)^2} < 1$ quan $R < \frac{2-\sqrt{2h_0}}{2h_0}$.

D'altra banda, considerant que $\beta_2 = \beta_1$, es dedueix que:

$$h_2 = \beta_2 K \eta_2 = \beta_1 K \frac{1}{2} h_1^k R^{k-1} \eta_1 = h_1 \frac{h_1}{2} (h_1 R)^{k-1} < h_1,$$

on en l'última desigualtat hem utilitzat $h_1 < h_0$. De manera anàloga, per un procediment d'inducció, es dedueix que la seqüència $\{h_n\}$ és una successió decreixent de nombres reals.

Tingueu en compte que, de $1 < R < \frac{2-\sqrt{2h_0}}{2h_0}$ s'obté que $\frac{h_0}{2} < 1$, aquest fet estableix certa relació entre la nostra restricció per R i la condició (C_3) , (pag 168), assumida per Ortega.

Ara, emprant el resultat anterior, la seqüència $S_n(R)$ també és, òbviament, una successió escalar decreixent:

$$S_n(R) = 1 + \frac{h_n}{2} (1 + h_n R + \dots + (h_n R)^{k-2}) < 1 + \frac{h_{n-1}}{2} (1 + h_{n-1} R + \dots + (h_{n-1} R)^{k-2}) = S_{n-1}(R),$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$. \square

Ara, podem completar una prova per al teorema 22.

Demostració: En primer lloc, a partir del lema 1 i els resultats anteriors, és obvi que, per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $1 \leq j \leq k$, podem afirmar que $x_n^{(j)}$ i $x_n^{(k)} = x_n$ pertanyen a $B(x_0, R\eta)$.

Havent establert ja que la successió donada per (9.3) està ben definida, s'ha de comprovar que aquesta és una successió de Cauchy. De fet, com

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{j=1}^m \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\| \leq \sum_{j=1}^m S_{n+j-1}(R)\eta_{n+j-1} \leq S_0(R) \sum_{j=1}^m \eta_{n+j-1} \\ &= S_0(R) \sum_{p=0}^{m-1} \eta_{n+p} \leq S_0(R) \sum_{p=0}^{m-1} \left(\frac{h_0}{2}\right)^{n+p} (h_0 R)^{(n+p)(k-1)} \eta_0 \\ &\leq S_0(R) \sum_{p=0}^{m-1} \left(\frac{h_0}{2}\right)^{n+p} \eta_0 \leq S_0(R) \frac{\left(\frac{h_0}{2}\right)^n - \left(\frac{h_0}{2}\right)^{n+m}}{1 - \frac{h_0}{2}} \eta_0, \end{aligned}$$

En conseqüència, la successió $\{x_n\}$ és convergent. Ara, si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, es dedueix de la continuïtat de l'operador F , que $F(x^*) = 0$, ja que

$$\begin{aligned} \|F(x_n)\| = \|F(x_{n-1}^{(k)})\| &\leq KR\eta_{n-1} \|x_{n-1}^{(k)} - x_{n-1}^{(k-1)}\| \leq KR\eta_{n-1} \frac{1}{2} h_{n-1}^{k-1} R^{k-2} \|x_{n-1}^{(1)} - x_{n-1}^{(0)}\| \\ &\leq \frac{1}{2} K(h_{n-1}R)^{k-1} \eta_{n-1}^2 \leq \frac{1}{2} K\eta_{n-1}^2 \leq \frac{1}{2} K \left(\left(\frac{h_0}{2}\right)^{n-1} \eta_0 \right)^2 \end{aligned}$$

i $\left(\frac{h_0}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$ deixant $n \rightarrow \infty$.

Per demostrar la unicitat, assumim que existeix una altra solució z^* de $F(x) = 0$ en $B(x_0, \frac{2}{K\beta} - R\eta) \cap \Omega$. De l'aproximació

$$F(z^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*)) dt (z^* - x^*) = 0$$

Així, hem de demostrar que l'operador $\int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*)) dt$ és invertible i per tant $z^* = x^*$. De fet, de

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0\| \int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*)) dt - Id &\leq \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(z^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt \\ &\leq K\beta \int_0^1 \|x^* + t(z^* - x^*) - x_0\| dt \leq K\beta \int_0^1 ((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|z^* - x_0\|) dt < 1, \end{aligned}$$

d'açò se'n deriva que $\left[\int_0^1 F'(x^* + t(z^* - x^*)) dt\right]^{-1}$ existeix \square

Noteu que, com $h_0R < 1$, llavors $\frac{2}{K\beta} - R\eta > 0$.

9.3 Sobre l'accessibilitat del procés iteratiu

En aquesta secció considerarem les condicions imposades en el Teorema 22, proporcionades per (9.4)–(9.5) per al punt de partida x_0 , per tal d'analitzar

quan està garantida la convergència semilocal del procés iteratiu (9.3). És a dir, obtenim el domini dels punts inicials en aplicar-los al nostre procés iteratiu. Per a això, considerem la menor arrel positiva de l'equació (9.4), denotada per R i el paràmetre h_0 associat l'estimació de partida x_0 . Llavors, en primer lloc, estudiarem en quines situacions l'equació (9.4) té solució. En segon lloc, analitzarem la relació entre els paràmetres R i h_0 de la condició (9.5). No podem oblidar que l'existència de R depèn del valor h_0 , que obtenim de x_0 , i del nombre de passos prefixats, k .

L'objectiu de Figure 9.1 és veure quan l'equació (9.4) té solució segons els valors que prenguen k i h_0 . Per tant, en aquest cas, considerem els passos $k = 6, 8, 10, 15$ pels valors $h_0 = 0, 45$ (línia violeta), $h_0 = 0, 40$ (línia marró), $h_0 = 0, 35$ (línia groga), $h_0 = 0, 30$ (línia verda), $h_0 = 0, 25$ (línia blava) i $h_0 = 0, 20$ (línia rosa). Podem observar que, en el cas de $h_0 = 0, 45$, no hi ha solució per a l'equació (9.4) i, per tant, no podem aplicar Teorema 22. No obstant això, per sota del valor $h_0 = 0, 4$ podem veure que sempre existeix R .

Ara, analitzarem la relació entre els paràmetres h_0 i R associats a l'aproximació inicial x_0 i la menor arrel real positiva de l'equació (9.4), respectivament. Triant $x = h_0$ i $y = R$, podem dibuixar la regió del pla xy , els punts de la qual satisfan la condició (9.5) (a saber, $\frac{x}{2(1-xy)^2} < 1$). Aquesta condició indica el domini dels paràmetres del mètode (9.3). A més, observeu que la convergència del procés iteratiu està garantida per aquesta condició imposada en el Teorema 22 que es mostra a la Figura 9.2 (regió cian).

En relació al que s'ha comentat anteriorment, podem pensar que com major siga la mida del domini dels paràmetres, tindrem més possibilitats d'escollir punts de partida adequats per al procés iteratiu (9.3), per haver-se provat l'existència de R . Com ja hem vist a la Figura 9.1, per valors inferiors a $0, 4$ sempre existeix el valor R . No obstant això, tingueu en compte que quan $h_0 = 0, 4$, el valor de R és aproximadament $1, 5$, llavors, si observem la Figura 9.2, veiem que per a aquests valors de paràmetre no es pot verificar la condició (9.5). Aquest situació es pot observar-se amb més

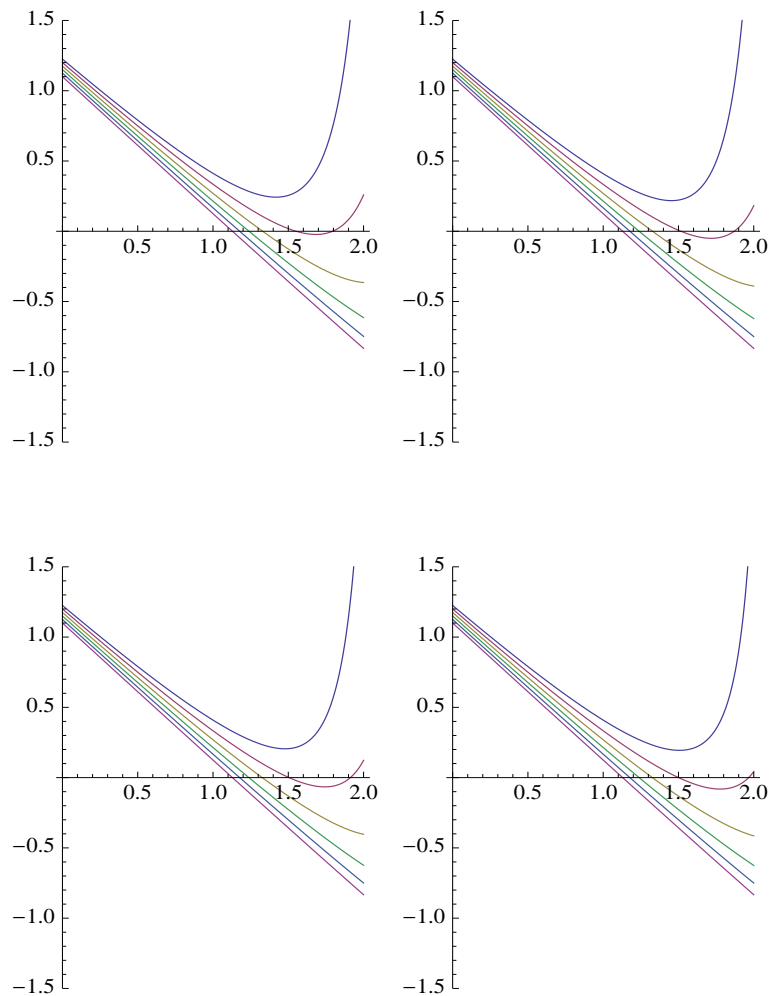


Figura 9.1: Equació (9.4) per a $k = 6, 8, 10, 15$ i
 $h_0 = 0.45, 0.4, 0.35, 0.3, 0.25, 0.2$.

claredat a la Figura 9.3, on hem dibuixat totes les gràfiques obtingudes de l'equació (9.4) i donats en la Figura 9.1, ja que per als valors més baixos de $h_0 = 0, 4$ sempre existirà R . Malgrat això, per a valors de h_0 pròxims a aquest valor, no es pot verificar la condició (9.5).

A més, observant el domini dels paràmetres proporcionats a la Figu-

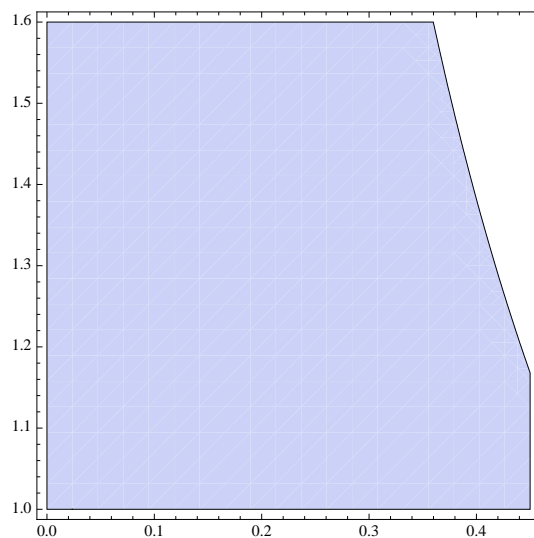


Figura 9.2: La relació entre els paràmetres h_0 i R donada per (9.5).

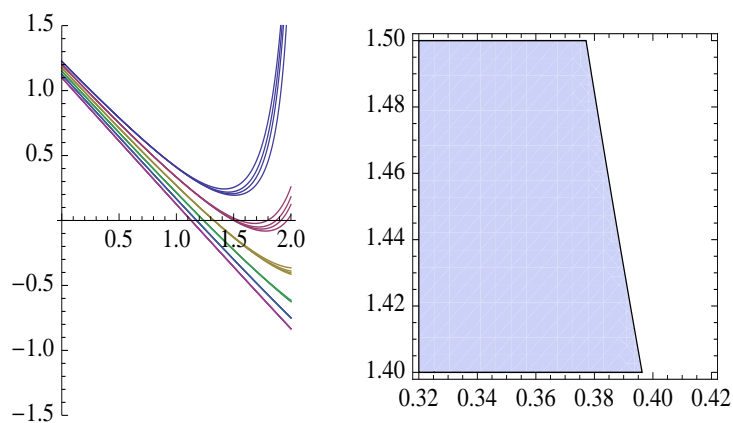


Figura 9.3: Gràfics per a la condició (9.4) per a $k = 6, 8, 10, 15$ i domini dels paràmetres de la condició (9.5) per valors pròxims a $h_0 = 0, 4$.

ra 9.4, per a valors inferiors a $h_0 = 0, 4$, existeix R i també es verifica la condició (9.5), com es pot comprovar clarament en aquesta figura.

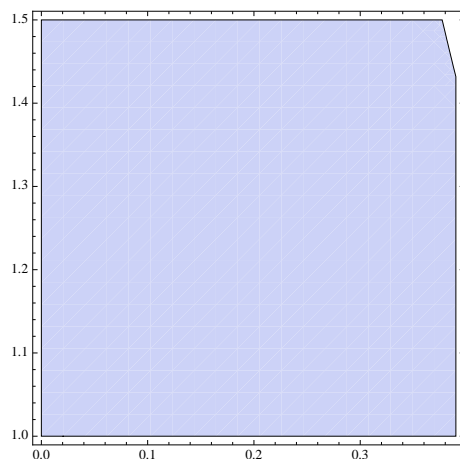


Figura 9.4: Domini dels paràmetres de la condició (9.5) per valors pròxims a $h_0 = 0.38$.

9.4 Sobre la resolució numèrica d'un tipus especial de problemes conservatius

Centrem la nostra atenció en un sistema conservatiu com són els camps gravitatoris i elèctrics. Sistema aquestos en què el treball realitzat per una força és independent de la ruta seguida entre dos punts i és igual a la diferència entre els valors final i inicial d'una funció d'energia.

Concretament, considerem un sistema conservatiu on la força d'amortiment és nul·la i el qual es pot descriure de la següent manera:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \phi(x(t)) = 0, \quad (9.14)$$

on $x(t) \in C^{(2)}[a, b]$, amb les condicions de contorn

$$x(a) = A, \quad x(b) = B. \quad (9.15)$$

Els problemes amb condicions de frontera tenen moltes aplicacions en ciència i enginyeria, com es pot consultar en referències clàssiques com [122] i [127].

Ara, portem a terme, primerament, un estudi teòric sobre el problema formulat. Així, suposant el cas continu, analitzem l'existència i la unicitat

de la solució per al problema (9.14)-(9.15) des del punt de vista l'anàlisi anterior. Buscant el valor més adient del paràmetre k , obtenim els dominis òptims per a l'existència i la unicitat de la solució. A continuació, es discretitza el problema (9.14)-(9.15) i s'aproxima numèricament una solució del problema. Amb aquest objectiu, emprant la ubicació de la solució prèviament trobada per al cas continu, escollim el nombre òptim de passos de l'algorisme iteratiu (9.3) que proporciona la major eficiència per aproximar numèricament la solució del problema (9.14)-(9.15) una vegada s'ha discretitzat.

9.4.1 Existència i unicitat de la solució

Se sap que la solució de (9.14)-(9.15) és una solució de la següent equació integral de Fredholm (vore [130]).

$$x(s) = \int_a^b G(s, t)\phi(x(t)) dt + \frac{B-A}{b-a}s + \frac{bA-aB}{b-a}, \quad (9.16)$$

on el nucli G és la funció de Green en $[a, b] \times [a, b]$:

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(b-s)(t-a)}{b-a}, & t \geq s \\ \frac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & t \leq s. \end{cases}$$

Una tècnica per resoldre aquest tipus d'equacions consisteix a expressar-la com un operador no lineal en un espai Banach, és a dir: $F(x) = 0$, on $F : \Omega \subseteq C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ i

$$[F(x)](s) = x(s) - \int_a^b G(s, t)\phi(x(t)) dt - \frac{B-A}{b-a}s - \frac{bA-aB}{b-a}, \quad (9.17)$$

considerant la norma màxima $\|\nu\| = \max_{s \in [a, b]} |\nu(s)|$ en $C[a, b]$.

Per demostrar l'existència d'una única solució de (9.17) pel teorema 22, haurem d'avaluar K , β i η a partir de l'estimació inicial x_0 , i definir el domini Ω .

En primer lloc, calculem la primera derivada de Frechet de l'operador proporcionada per (9.17):

$$[F'(x)]y(s) = y(s) - \int_a^b G(s, t)\phi'(x(t))y(t) dt,$$

tenim doncs:

$$\|I - F'(x_0)\| \leq \frac{M}{8},$$

on $\max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |G(s,t)| dt = \frac{1}{8}$ i $M = \max_{t \in [0,1]} |\phi'(x_0(t))|$.

Així, pel lema de Banach, si $M < 8$ llavors $\Gamma_0 = F'(x_0(t))^{-1}$ existeix i $\|\Gamma_0\| < \frac{8}{8-M}$. En aquesta situació, considerem $\Omega = \{x \in C[a,b] / \max_{t \in [0,1]} |\phi'(x(t))| < 8\}$. D'altra banda, obtenim:

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{8\|F(x_0)\|}{8-M}.$$

En segon lloc, si \tilde{K} és la constant de Lipschitz per ϕ' , se'n deriva

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \frac{\tilde{K}}{8} \|x - y\|.$$

Finalment, per un punt inicial de $x_0(t)$, obtenim:

$$a = \beta K \eta = \frac{8\tilde{K} \|F(x_0)\|}{(8-M)^2}.$$

En conseqüència, un resultat més explícit sobre l'existència i la unicitat de la solució de (9.17) es dona en el següent teorema, la prova del qual se segueix del Teorema 22.

Teorema 23 *Seguint emprant les notacions anteriors i considerant que $x_0 \in \Omega$ i que \tilde{K} és la constant de Lipschitz per ϕ' , suposem que per a un nombre fixat de passos k , l'equació polinòmica: $P(k,t) = 0$, on*

$$P(k,t) = \begin{cases} 2 - (2 + a - a^2)t + a(2 - a)t^2 & \text{if } k = 1 \\ 2 + a - 2(1 + a)t - 2at^2 - a^k t^{k-1} + (1 + a)a^k t^k - a^{k+1} t^{k+1} \\ + \frac{1}{2} a^{k+2} t^k \sum_{j=0}^{k-2} a^j t^j & \text{if } k > 1 \end{cases}$$

té com a mínim una arrel real positiva i l'arrel positiva més menuda, denotada per R , satisfà

$$\frac{a}{2(1 - aR)^2} < 1. \tag{9.18}$$

Si $B(x_0, R\eta) \subseteq \Omega$, llavors el mètode iteratiu expressat en (9.3), quan es comença a iterar a partir de x_0 convergeix a una solució x^ de l'equació $F(x) = 0$ i $x_n^{(j)}, x^* \in \overline{B(x_0, R\eta)}$, per $1 \leq j \leq k$ i per a tot $n \in \mathbb{N}$. A més, la solució x^* és única en $B(x_0, \frac{2}{K\beta} - R\eta) \cap \Omega$.*

Un cas particular

Les equacions diferencials no lineals de segon ordre es presenten freqüentment en relació amb problemes aplicats, circumstància aquesta que els ha conferit un gran interès els últims anys. Ara mostrarem l'aplicació a un exemple senzill que hem analitzat per Jerome i Varga [124] i Keller [126]. El problema és:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= e^{x(t)} \\ x(0) &= 0 = x(1).\end{aligned}\tag{9.19}$$

Per tant, després de l'estudi anterior, considerem l'operador

$$[F(x)](s) = x(s) - \int_0^1 G(s, t)e^{x(t)} dt,\tag{9.20}$$

a l'espai $C[0, 1]$ de totes les funcions contínues amb la norma màxima. Per obtenir un resultat sobre l'existència i la unicitat de les solucions de (9.20), primerament considerem

$$\Omega = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < \ln 8\} \subseteq C[0, 1]\tag{9.21}$$

i prenem $F : \Omega \subseteq C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$.

Segons l'equació diferencial estàndard (9.14), tenim $\phi(x(t)) = -e^{x(t)}$. A continuació, per a $x_0 \in \Omega$ i amb els resultats anteriors, tenim que Γ_0 existeix i

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{8}{8 - M},$$

on $M = \max_{t \in [0, 1]} e^{x_0(t)}$, i

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{8\|F(x_0)\|}{8 - M}.$$

D'altra banda, és fàcil de comprovar

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in \Omega,$$

per tant $K = \frac{\tilde{K}}{8} = 1$.

De (9.19), la solució és una funció convexa i satisfà les condicions de contorn. Aleshores, considerem el cas més senzill, un polinomi de segon

grau de la forma $mt(t - 1)$, $m \geq 0$, com a primera aproximació a la solució de (9.19). Com s'ha de verificar que $\|mt(t - 1)\| < \ln 8$, per simplicitat, triem $m = 1/2$, és a dir, $x_0(t) = \frac{1}{2}t(t - 1)$. Així que

$$M = 1 \quad \text{i} \quad \|F(x_0)\| \leq \left\| \frac{1}{2}t(1 - t) \right\| + \frac{1}{8} \int_0^1 dt = 1/4.$$

Per tant $a = 16/49$ i a la Taula 9.1 podem veure els corresponents radis d'existència i d'unicitat per a diferents valors de k . Com es pot observar, els millors resultats s'obtenen per $k = 2$, que corresponen al mètode de tercer ordre. En aquest cas, obtenim la bola més menuda en la qual romanen els iterats i convergeixen a la solució, també en aquest cas s'obté la bola més gran per a la unicitat. Cal remarcar que tots els resultats milloren els obtinguts per al mètode de Newton.

Nombre de passos	Radi de convergència	Radi d'unicitat
k	$R\eta$	$\frac{2}{K\beta} - R\eta$
1	0.38533426	1.36466574
2	0.21088387	1.53911613
3	0.21165205	1.53834795
4	0.21182150	1.5381785
5	0.21186161	1.53813839
6	0.21187127	1.53812873
7	0.21187360	1.5381264

Taula 9.1: Radi de convergència i unicitat per a diferents mètodes iteratius en k passos.

És a dir, hem obtingut que els iterats $x_n(t)$ i la solució $x^*(t)$ pertanyen a $B(\frac{1}{2}t(t - 1), 0.21088387) \subseteq \Omega$, i $x^*(t)$ és l'única solució en $B(\frac{1}{2}t(t - 1), 1.53911613) \cap \Omega$. Aleshores, ja tenim la solució localitzada i, per tant, també tenim una idea per poder imposar certes condicions d'inici.

9.4.2 Configuració d'un esquema de diferències finites

Després de l'estudi que acabem de realitzar per al cas continu, s'utilitza un procés de discretització per a transformar les equacions (9.14)–(9.15) en un

problema de dimensió finita i per buscar una solució aproximada d'aquestes quan es considera una funció particular $\phi(x(t))$. Per al nostre propòsit, aproximem la segona derivada per una fórmula numèrica estàndard.

En primer lloc, considerem els punts $t_j = a + j(b-a)h$, $j = 0, 1, \dots, N+1$, on $h = \frac{1}{N+1}$ i N és un enter adient. Es dissenyarà un esquema per a la determinació dels nombres x_j , dels quals s'espera que s'aproximen suficientment als valors $x(t_j)$ de la solució real en els punts t_j . Una tècnica estàndard per a calcular la segona derivada en aquests punts és

$$x_j'' \approx \frac{x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}}{h^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Una forma natural d'obtenir aquest esquema és exigir que els x_j satisfan a cadascun punt de malla interior t_j l'equació de diferència

$$x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1} + h^2\phi(x_j) = 0. \quad (9.22)$$

Atés que x_0 i x_{N+1} estan determinats per les condicions de contorn, les incògnites són x_1, x_2, \dots, x_N .

Una anàlisi més profunda se simplifica amb l'ús de la notació matricial i vectorial. Fent ús dels vectors

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^t, \quad v_{\mathbf{x}} = (\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_N))^t$$

i la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix},$$

el sistema d'equacions que es planteja d'exigir (9.22) es manté per a $j = 1, 2, \dots, N$, i pot escriure's de forma compacta així:

$$F(\mathbf{x}) \equiv A\mathbf{x} + h^2v_{\mathbf{x}} = 0, \quad (9.23)$$

on F és una funció de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}^N .

A partir d'ara, el focus de la nostra atenció és resoldre un sistema particular que pren la forma (9.23). Com, en general, considerem que la funció $\phi(x(t))$ és no lineal, no es pot esperar resoldre el sistema d'equacions expressada en (9.23) mitjançant mètodes algebraics. Per tant, s'ha de recórrer a algun tipus de procediment iteratiu. Ara analitzem la família de processos iteratius proporcionats per (9.3) amb aquest propòsit.. En primer lloc, hem de tindre present que l'aplicació pràctica d'aquests processos iteratius es realitza a partir del següent algorisme, depenent del nombre de passos considerat com més adequat.

$$\begin{cases} F'(x_n)(x_n^{(1)} - x_n^{(0)}) = -F(x_n^{(0)}), \\ F'(x_n)(x_n^{(2)} - x_n^{(1)}) = -F(x_n^{(1)}), \\ \vdots \\ F'(x_n)(x_n^{(k-1)} - x_n^{(k-2)}) = -F(x_n^{(k-2)}), \\ F'(x_n)(x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}) = -F(x_n^{(k-1)}), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (9.24)$$

Noteu que la primera derivada de F és ara la matriu

$$F'(\mathbf{x}) = A + h^2 \text{diag}(v'_x), \quad v'_x = (v'_1, v'_2, \dots, v'_8)^t, \quad v'_i = -e^{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Ara triarem el nombre de passos amb els quals aplicar el mètode iteratiu (9.3) de manera que l'eficiència aconseguida siga màxima.

Per fer-ho, estudiarem una combinació dels índexs esmentats prèviament en (9.2), l'índex d'eficiència i l'índex d'eficiència computacional. Si prenem en consideració un problema concret, podem calcular el cost operacional requerit per avaluar F i F' . Per tant, emprarem una mesura per a l'eficiència d'un procés iteratiu que té en compte tant el cost computacional de les avaluacions funcionals que es requereixen com el cost operacional de fer un pas de l'algorisme.

Per tant, definim la mesura de l'eficiència d'un procés iteratiu aplicat a un operador F determinat de la següent manera

$$E(\text{mètode (9.3)}, F) = (k + 1)^{1/(\mu + \sigma)},$$

on el cost operatiu de les avaluacions funcionals i el cost operatiu de fer un pas de l'algorisme es denoten per μ i σ , respectivament.

Una vegada que elegida la quantitat de passos que proporcionen l'eficiència òptima del procés iteratiu (9.3), hem de resoldre el sistema no lineal plantejat anteriorment.

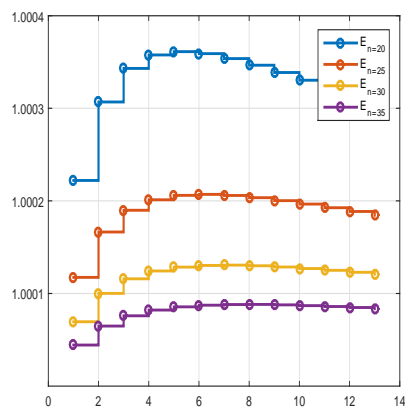
Un cas particular

Ara, el nostre objectiu és trobar un enfocament adient per trobar una solució del problema diferencial definit per (9.19). En aquest cas, el nombre d'operacions relacionades amb avaluar $F(x_n)$ és de $3N + 1$ i $F'(x_n)$ no necessita cap operació nova. Com cada iteració dels mètodes iteratius (9.3) requereix de $(N^3 + 3kN^2 - N)/3$ operacions, obtenim:

$$E(\text{mètode (9.3)}, F) = (k + 1) \frac{3}{3k(N^2 + 3N + 1) + N^3 - N}.$$

A continuació, prenent diferents valors per a N , observem a la Figura 9.5 les variacions de l'eficiència per a diferents valors de k . Noteu que quan N supera aquell valor per al qual s'obté la màxima eficiència, aquesta pot s'assolir-se altrament realitzant més passos k ; així s'observa que per a $N = 20$ el mètode més eficient correspon a $k = 5$ i per a $N = 25, 30, 35$ la màxima l'eficiència s'obté per a $k = 6, 7, 8$, respectivament. Fixeu-se que $k = 1$, el mètode de Newton, proporciona per a tots els valors de N la pitjor eficiència.

Per resoldre (9.23) tal com s'expressa en (9.24) amb la funció $\phi(x) = -e^{x(t)}$ treballem amb $N = 20$ i $k = 5$, llavors prenent com aproximació inicial la discretització de la funció $x_0(t) = \frac{1}{2}t(t - 1)$ en $[0, 1]$ obtenim després de 3 iteracions els resultats que es mostren a les Taules 9.2 i 9.3, on, per calcular aquestos valors, hem treballat amb aritmètica de precisió variable de 200 dígitos.

Figura 9.5: Eficiència per a $k = 1 : 13$ i $20 \leq N \leq 35$.

i	x_i^*	i	x_i^*	i	x_i^*
1	-0.0209484...	9	-0.111408...	17	-0.0706296, ...
2	-0.0396762...	10	-0.113432...	18	-0.0562247, ...
3	-0.0562247...	11	-0.113432...	19	-0.0396762...
4	-0.0706296...	12	-0.111408...	20	-0.0209484...
5	-0.0829215...	13	-0.107355...		
6	-0.0931263...	14	-0.101265...		
7	-0.101265...	15	-0.0931263...		
8	-0.107355...	16	-0.0829215...		

Taula 9.2: Solució numèrica de \mathbf{x}^* de (9.23) amb $\phi(x) = -e^{x(t)}$.

n	$\ \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n\ $	$\ F(\mathbf{x}_n)\ $
0	4.76×10^{-2}	3.86×10^{-2}
1	1.13×10^{-18}	3.71×10^{-20}
2	6.19×10^{-117}	1.57×10^{-118}
3	0	1.77×10^{-209}

Taula 9.3: Errors absoluts i $\{\|F(\mathbf{x}_n)\|\}$.



Conclusions

*La conclusió és que sabem molt poc,
tanmateix és sorprenent el molt que coneixem.
I més sorprenent encara que un coneixement
tan escàs puga donar tant poder.*

Bertrand Russell

Així arribem a les parts finals d'aquest treball...

Al llarg dels capítols precedents, hem revisat conceptes fonamentals en el camp de l'anàlisi numèrica, tant els relacionats amb la resolució d'equacions i sistemes d'equacions no lineals com aquells que són la base de l'estudi del comportament dinàmic dels mètodes.

També hem desenvolupat diferents mètodes, preferiblement òptims mitjançant la generalització de resultats publicats, la modificació de tècniques per obtenir mètodes, amb índex d'eficiència més competitiu, definint nous operadors que servisquen d'aproximació a les matrius jacobianes en un sistema d'equacions... L'estudi dels paràmetres relacionats com el cost computacional, l'optimitat, el nombre d'avaluacions funcionals i la seua dinàmica ens ha permès comparar algorismes.

Aquest treball reflecteix i adapta part dels resultats obtinguts durant el període entre abril de 2013 i gener l'any present (2018), en un grup de recerca format per membres del Institut de Matemàtica Multidisciplinar i de l'Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, en el qual m'han permès col·laborar. Tot allò que he après, els reptes que he hagut d'enfrontar, les dificultats que he hagut de superar... han sigut una experiència enriquidora que no haguera estat igual sense l'ajuda i l'assessorament constant i pacient del professor José Luis Hueso i la professora Eulàlia Martínez. No puc més que expressar-los tot el meu agraïment.

Els resultats ací presentat, juntament amb tots aquells que conformen aquest camp d'estudi, no són més que un xicotet ciri encés enmig d'una immensa obscuritat, serà motivació per a proposar línies d'investigació futures (millora d'algorismes en eficiència i cost, aprofundir en els resultats obtinguts per a mètodes amb memòria i per arrels múltiples, el desenvolupament continu de les ferramentes matemàtiques per a l'estudi dinàmic i la convergència dels algorismes... i tantes qüestions que ens poden sorgir relacionades en aquest camp). Tot i això, aquest ciri que es troba constituït no sols pels resultats sinó també per totes les eines a la nostra disposició que ens permeten aprofundir en aquesta àrea de coneixement, ens ajuden a seguir combatent l'obscuritat i ens possibilitat "fer tant amb el poc que sabem". Així, no admet cap tipus de discussió el gran èxit que durant el segle XX han tingut les noves aplicacions de la modelització matemàtica en els diversos camps que abarquen tots els aspectes de la vida diària a tots els nivells, acomplint les expectatives en elles volcades, ha contribuït en el seu posicionament central en el desenvolupament de l'actual societat de la informació i en la contribució del progrés futur.

Ara bé, es planteja una nova pregunta: una vegada obtinguda una solució raonable podem estar interessats en millorar-la. Serà possible aconseguir solucions de precisió creixen mitjançant algun tipus d'algorismes? Aquesta recerca incansable, aquest anhel imparable, aquesta ànsia insondable, aquesta curiositat eterna és un qüestió inherent a la nostra humanitat. Així ens definim tant pels problemes que ens plantejem, com per les

solucions, que no sempre responen, amb les quals intentem resoldre'ls. Tot açò ens constitueix i amb cada resultat nou ens comprenem un poc més... Nosaltres mateixos. Aquest, però, és un problema amb el qual haurem de continuar bregant.

Catàleg de mèrits

A.1 Publicacions

La Taula A.1 recopila la informació associada a articles publicats durant el període d'elaboració d'aquesta tesi actualitzada a juliol de 2018.

Referència	Any Publicació	En Google Scholar	En Scopus
[87]	2015	7	5
[63]	2015	2	1
[56]	2015	18	14
[120]	2017	1	-

Taula A.1: Referència i any dels articles i Citacions en Google Scholar i en Scopus

Altres publicacions realitzades amb menor repercussió són: [105], [69] i [50].

A.2 Congressos

Alguns dels resultats recollits en aquesta tesi s'han presentat en diversos congressos tant nacionals com internacionals. A continuació es detallen alguns dels més destacats:

- Congreso de la Real Sociedad matemática Española 2017. Saragossa 2017.
 - New optimal derivative free iterative methods for multiple roots.

- 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering 2017. Rota 2017.
 - High order iterative methods with memory for nonlinear equations.

- Mathematical Modelling in Engineering & Human Behaviour 2014. 16th Edition of the Mathematical Modelling Conference Series at the Institute for Multidisciplinary Mathematics. València 2014.
 - Dynamical Study while Searching Equilibrium Solutions in N -body Problem.

- 9th International Conference on Engineering Computational Technology. Nàpols 2014.
 - Efficient Iterative Methods for approximating multiple Roots.

- 14th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. Rota 2014.
 - Derivative free iterative methods for approximating multiple roots.

- VIII Jornadas de Trabajo sobre Análisis Numérico y Aplicaciones. Logroño 2013.
 - Approximating the derivative in iterative methods for nonlinear equations and systems.

- XXIII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA) / XIII Congreso de Matemática Aplicada (CMA). Castelló 2013.
 - Estudio dinámico de métodos iterativos libres de derivadas para sistemas no lineales.

- Mathematical Modelling in Engineering & Human Behaviour 2013. València 2013.

- Efficiently increasing the order of an iterative method for non-linear equations.

- 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering . Almeria 2013.

- New families of iterative methods with fourth and sixth order of convergence and their dynamics.

A.3 Altres mèrits

I Formació

F.1 Enginyer de Telecomunicació. Universitat Politècnica de València 2012.

Treball Final de Carrera: Càlcul del Volum Pulmonar i Quantificació d'emfisema en fumadors amb anomalies intersticials amb Software Lliure (Airway Inspector)". Presentat el 20 de desembre, 2012.

F.2 Màster Universitari en Investigació Matemàtica. Universitat de València & Universitat Politècnica de València 2014.

F.3 Màster Universitari en Formació del Professorat de Secundària, Batxillerat, Formació Professional i Esenyaments d'Idiomes. UCV 2014.

F.4 Beca formativa de col·laboració amb l'Institut de Matemàtica Multidisciplinar de la Universitat Politècnica de València. Període 01/04/2013-30/09/2013.

Docència

P.1 Professor de Matemàtiques i Ciències Aplicades en Secundària (ESO, Batxillerat i FPB) a l'IES Bernat Guinovart (Algemés) durant els cursos 2015-2016 i 2016-2017.

P.2 Professor de Matemàtiques i Ciències Aplicades en Secundària (ESO, Batxillerat i FPB) a l'IES Rei en Jaume (Alzira) durant els cursos 2017-2018.

Didàctica

- D.1 Treball Final de Màster: "Tres Metodologies Innovadores per a l'Avaluació per Competències a la Classe de Matemàtiques". Presentat el 27 de maig 2014.
- D.2 Jornades de Història de la Ciència de IHMC. Instruments científics per ensenyar ciències. València 2016.
- D.3 Disseny de qüestionaris cognitius per a l'avaluació de competències en educació primària i secundària. València 2017.
- D.4 Disseny i Col·laboració en la Ruta Matemàtica per Algemesí, MathemAlge 2016. Algemesí 2016.
- D.5 Elaboració de materials per a les proves de l'avaluació final de 6é de primària i 4t d'ESO. València 2017.
- D.6 Jornades d'Avaluació de competències en educació primària i secundària: disseny de proves escrites. València 2017.
- D.7 Disseny i Col·laboració en la Ruta Matemàtica per Algemesí, MathemAlge 2017. Algemesí 2017.
- D.8 Jornades de Trobada nacional sobre l'Estímul del Talent Matemàtic. València 2018.
- D.9 VI Jornades de Modelització Matemàtica com a eina d'ensenyament i aprenentatge. València 2018.

Idiomes

- I.1 Grau Superior de Coneixements de Valencià. Junta Qualificador de Coneixements de Valencià 2002.
- I.2 5é Cicle Superior d'Anglès (B2). Escola Oficial de Idiomes (Alzira) 2007.
- I.3 2n Nivell Bàsic d'Alemanys (A2). Escola Oficial de Idiomes (Alzira) 2012.

- I.4 Certificat de Capacitació per a l'Ensenyament en Valencià. Universitat de València 2014.
- I.5 Diploma de mestre de Valencià. Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport 2015.
- I.6 Certificat de Capacitació per a l'Ensenyament en llengües estrangeres: anglés. CEU 2015.
- I.7 Certificat de Nivell C2 en Valencià. Escola Oficial de Idiomes (Alzira) 2016.

Bibliografía

- [1] D. Fowler, E. Robson, *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*, *Historia Mathematica*, 25 (1998), 366-378.
- [2] P. J. Davis, R. Hersh, *Experiencia Matemática*, Labor, Barcelona, 1988.
- [3] P. Henrici, *The Influence of Computing on Mathematical Research and Education*, *Proceeding of Symposia in Applied Mathematics*, vol. 20, American Mathematical Society, Providence, 1974.
- [4] J. F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- [5] D. D. Bruns, J. E. Bailey, *Nonlinear feedback control for operating a nonisothermal CSTR near an unstable steady state*, *Chemical Engineering Science*, 32 (1977), 257-264.
- [6] J. A. Ezquerro, J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández, M. A. Salanova, *Chebyshev-like methods and quadratic equations*, *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation*, 28 (2000) 23-35.
- [7] A. Cordero, J. R. Torregrosa, *Variants of newton's method for functions of several variables*, *Applied Mathematics and Computation*, 183 (2006), 199-208.
- [8] A. Cordero, J. R. Torregrosa, *Variants of newton's method using fifth-order quadrature formulas*, *Applied Mathematics and Computation*, 190 (2007), 686-698.

- [9] S. Amat, M. A. Hernández, N. Romero, *A modified Chebyshev's iterative method with at least sixth order of convergence*, Applied Mathematics and Computation, 206 (2008), 164-174.
- [10] D. K. R. Babajee, M. Z. Dauhoo, M. T. Darvishi, A. Karami, A. Barati, *Analysis of two Chebyshev-like third order methods free from second derivatives for solving systems of nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 233 (2010), 2001-2012.
- [11] V. Alarcón, S. Amat, S. Busquier, D. J. López, *A Steffensen's type method in Banach spaces with applications on boundary-value problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 216 (2008), 243-250.
- [12] A. M. Ostrowski, *Solutions of Equations and System of Equations*, Academic Press, New York, 1960.
- [13] H. T. Kung, J. F. Traub, *Optimal order of one-point and multi-point iteration*, Journal of the Association for Computing Machinery, 21 (1974), 643-651.
- [14] F. A. Potra, V. Pták, *Nondiscrete introduction and iterative processes*, Research Notes in Mathematics, vol 103, Pitman, Boston, 1984.
- [15] S. Weerakoon, T. G. I. Fernando, *A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence*, Applied Mathematics Letters, 13 (2000), 87-93.
- [16] M. Grau-Sánchez, J. L. Díaz-Barrero, *A weighted variant family of Newton's method with accelerated third-order convergence*, Applied Mathematics and Computation, 186 (2007), 1005-1009.
- [17] P. Jarratt, *Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations*, Mathematics of Computation, 20 (1966), 434-437.
- [18] R. King, *A family of fourth-order methods for nonlinear equations*, SIAM Journal of Numerical Analysis, 10(5) (1973), 876-879.
- [19] C. Chun, Y. Ham, *Some fourth-order modifications of Newton's method*, Applied Mathematics and Computation, 197 (2008), 654-658.

- [20] C. Chun, *Some variants of King's fourth-order family of methods for nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation, 190 (2007), 57-62.
- [21] C. Chun, Y. Ham, *A one-parameter fourth-order family of iterative methods for nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation, 189 (2007), 610-614.
- [22] D. Basu, *From third to fourth order variant of Newton's method for simple roots*, Applied Mathematics and Computation, 202 (2008), 886-892.
- [23] A. K. Maheshwari, *A fourth order iterative method for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation, 211 (2009), 383-391.
- [24] R. Thukral, M. S. Petkovic, *A family of three-point methods of optimal order for solving nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 233(9) (2010), 2278-2284, doi:10.1016/j.cam.2009.10.012
- [25] L. W. Johnson, R. D. Riess, *Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, MA (1977).
- [26] P. Jain, *Steffensen type methods for solving non-linear equations*, Applied Mathematics & Computation, 194 (2007), 527-533.
- [27] S. Amat, S. Busquier, *Convergence and numerical analysis of a family of two-step steffensen's methods*, Computers & Mathematics with Application, 49 (2005), 13-22.
- [28] M. Frontini, E. Sormani, *Modified Newton's method with third-order convergence and multiple roots*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 156 (2003), 345-354.
- [29] M. Petkovic, B. Neta, L. Petkovic, J. Dzunic, *Multipoint methods for solving nonlinear equations*, Academic Press, (2013). ISBN: 978-0-12-397013-8.

- [30] N. Romero Álvarez, J. A. Ezquerro, M. A. Hernández, *Aproximación de soluciones de algunas ecuaciones integrales de Hammerstein mediante métodos iterativos tipo Newton*, XXI Congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones, Universidad de Castilla-La Mancha, 2009.
- [31] M. Frontini, E. Sormani, *Some variants of Newton's method with third-order convergence*, Applied Mathematics and Computation, 140 (2003), 419-426.
- [32] I. K. Argyros, D. Chen, Q. Qian, *Optimal-order parameter identification in solving nonlinear systems in a Banach space*, Journal of Computational Mathematics, 13 (1995), 267-280.
- [33] D. Han, *The convergence on a family of iterations with cubic order*, Journal of Computational Mathematics, 19 (5) (2001), 467-474.
- [34] G. H. Nedzhibov, *A family of multi-point iterative methods for solving systems of nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 222 (2008), 244-250.
- [35] J. L. Hueso, E. Martínez, J. R. Torregrosa, *Third and fourth order iterative methods free from second derivative for nonlinear systems*, Applied Mathematics and Computation, 211 (2009), 190-197.
- [36] I. K. Argyros and S. George, *A Unified Local Convergence for Jarratt-type Methods in Banach Space Under Weak Conditions*, Thai J. Math., 13 (2015), 165-176.
- [37] I. K. Argyros, and S. Hilout, *On the local convergence of fast two-step Newton-like methods for solving nonlinear equations*, J. Comput. Appl. Math., 245 (2013), 1-9.
- [38] I.K. Argyros, S. George, *Extending the applicability of Gauss-Newton method for convex composite optimization on Riemannian manifolds using restricted convergence domains*, Journal of Nonlinear Functional Analysis 2016 (2016), Article ID 27.
- [39] I.K. Argyros, J.A. Ezquerro, J.M. Gutiérrez, M.A. Hernández and S. Hilout *On the semilocal convergence of efficient Chebyshev-Secant-type methods*, J. Comput. Appl. Math., 235 (2011), 3195-2206.

- [40] J. A. Ezquerro, M. Grau-Sánchez, M. A. Hernández and M. Noguera, Semilocal convergence of secant-like methods for differentiable and nondifferentiable operators equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 398, 1, (2013), 100-112.
- [41] S. Plaza and N. Romero, Attracting cycles for the relaxed Newton's method, *J. Comput. Appl. Math.*, 235, 10 (2011), 3238-3244.
- [42] G. Honorato, S. Plaza and N. Romero, Dynamics of a higher-order family of iterative methods, *J. Complexity* 27, 2 (2011), 221-229.
- [43] S. Mayer, D. Schleicher, *Immediate and virtual basins of Newton's method for entire functions*, *Annales de l'Institut Fourier*, 56 (2) (2006), 325-336.
- [44] S. Amat, S. Busquier, S. Plaza, *A construction of attracting periodic orbits for some classical third-order iterative methods*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 189 (2006), 22-33.
- [45] F. Chicharro, A. Cordero, J. M. Gutiérrez, J. R. Torregrosa, *Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations*, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (2013), 7023-7035.
- [46] J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández, N. Romero, *Dynamics of a new family of iterative processes for quadratic polynomials*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233 (2010), 2688-2695.
- [47] J. Varona, *Graphic and numerical comparison between iterative methods*, *Mathematical Intelligencer*, 24(1) (2002), 37-46.
- [48] S. Amat, S. Busquier, S. Plaza, *Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view*, *SCIENTIA Series A: Mathematical Sciences*, 10 (2004), 3-35.
- [49] F. Chicharro, A. Cordero, J. M. Gutiérrez, J. R. Torregrosa, *Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations*, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (2013), 7023-7035.

- [50] J. L. Hueso, E. Martínez, C. Teruel, *Multipoint efficient iterative methods and the dynamics of Ostrowski's method*, International Journal of Computer Mathematics, (2015). <https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1080354>
- [51] A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martínez, J. R. Torregrosa, *Increasing the convergence order of an iterative method for nonlinear systems*, Applied Mathematics Letters, 25 (2012), 2369-2374.
- [52] A. Cordero, E. Martínez, J. R. Torregrosa, *Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 231 (2009), 541-551.
- [53] M. Grau, J. L. Diaz-Barrero, *An improvement to Ostrowski root-finding method*, Applied Mathematics and Computation, 173(1) (2006), 450-456.
- [54] Z. Hu, L. Guocai, L. Tian, *An Iterative Method with Ninth-Order Convergence for Solving Nonlinear Equations*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6(1) (2011), 17-23.
- [55] S. Amat, S. Busquier, S. Plaza, *Chaotic dynamics of a third-order Newton-type method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 366-1 (2010), 24-32.
- [56] J.L. Hueso, E. Martínez, C. Teruel, *Convergence, efficiency and dynamics of new fourth and sixth order families of iterative methods for nonlinear systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 275 (2015), 880-892 DOI: 10.1016/j.cam.2014.06.010
- [57] J.R. Sharma, R.K. Guha, R. Sharma, *An efficient fourth order weighted-Newton method for systems of nonlinear equations*, Numerical Algorithms, 62 (2013), 307-323.
- [58] X. Wang, J. Kou, Y. Li, *Modified Jarratt method with sixth-order convergence*, Applied Mathematics Letters, 22 (2009), 1798-1802.

- [59] S. Amat, S. Busquier, A. Grau, M. Grau-Sánchez, *Maximum efficiency for a family of Newton-like methods with frozen derivatives and some applications*, Applied Mathematics and Computations, 219 (2013), 7954-7963.
- [60] M. Grau-Sánchez, A. Grau, M. Noguera, *On the computational efficiency index and some iterative methods for solving systems of nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 236 (2011), 1259-1266.
- [61] B. Neta, M. S. Petkovic, *Construction of optimal order nonlinear solvers using inverse interpolation*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2010), 2448-2455.
- [62] J. Dzuni, L. Petkovic, M. Petkovic, *A family of optimal three-point methods for solving nonlinear equations using two parametric functions*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), 7612-7619.
- [63] J. L. Hueso, E. Martínez, C. Teruel, *Derivative free iterative methods for nonlinear systems*, Applied Mathematics and Computation, 259 (2015), 955-966. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.03.026>.
- [64] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [65] M. Grau-Sánchez, A. Grau, M. Noguera, *Frozen divided difference scheme for solving systems of nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2011), 1739-1743.
- [66] S. Amat, M. Grau-Sánchez, M. Noguera, *On the approximation of derivatives using divided difference operators preserving the local convergence order of iterative methods*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 237 (2013), 363-372.
- [67] H. H. H. Homeier, *On Newton-type methods with cubic convergence*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 176 (2005), 425-432.

- [68] E. Babolia, F. Fattahzadeh, E. Golpar Raboky, *A Chebyshev approximation for solving nonlinear integral equations of Hammerstein type*, Applied Mathematics and Computation, 189 (2007), 641-646.
- [69] C.L. Howk, J.L. Hueso, E. Martínez & C. Teruel, *A class of efficient high-order iterative methods with memory for nonlinear equations and their dynamics*, Math. Meth. Appl. Sci. (2018), 1-20. <https://doi.org/10.1002/mma.4821>
- [70] R.L. Burden, J.D. Faires, Numerical Analysis, ninth ed., Cengage Learning, 2011.
- [71] W. Gautschi, Numerical Analysis, first edition, Birkhauser, 1997.
- [72] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations. Prentice-Hall, New Jersey (1964).
- [73] Ostrowski, A. M. Solutions of Equations in Euclidean and Banach Spaces. Academic Press, New York (1973).
- [74] Beatriz Campos, Alicia Cordero, Juan R. Torregrosa, Pura Vindel. A multidimensional dynamical approach to iterative methods with memory, Applied Mathematics and Computation 271 (2015) 701-715.
- [75] T.J. McDougall, S.J. Wotherspoon, A simple modification of Newton's method to achieve convergence of order $1 + \sqrt{2}$, Appl. Math. Lett. 29 (2014) 20-25.
- [76] C.L. Howk, Convergence of a class of efficient quadrature-based predictor-corrector methods for root-finding, Applied Mathematics and Computation 252 (2015) 189-200.
- [77] Parisa Bakhtiari, Alicia Cordero, Taher Lotfi, Kathayoun Mahdiani, Juan R. Torregrosa. Widening basins of attraction of optimal iterative methods, Nonlinear Dynamics, DOI 10.1007/s11071-016-3089-2
- [78] Quan Zheng, Jingy Li, Fengxi Huang, An Optimal Biparametric Multipoint Family and Its Self-Acceleration with Memory for Solving Nonlinear Equations, Algorithms 2015, 8, 1111-1120.

- [79] M.S. Petković, B. Neta, L.D. Petković, J. Džunić, *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*, Elsevier, Boston, 2013.
- [80] M.S. Petković, B. Neta, L.D. Petković, J. Džunić, Multipoint methods for solving nonlinear equations: a survey, *Appl. Math. Comput.*, 226 (2014), 635-660.
- [81] Miodrag S. Petković, Jovana Džunić, , On generalized biparametric multipoint root finding methods with memory, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 255 (2014) 362-375.
- [82] M. Zaka Ullah, S. Kosari, F. Soleymani, F. Khaksar Haghani, A. S. Al-Fhaid. A super-fast tri-parametric iterative method with memory, *Applied Mathematics and Computation* 289 (2016) 4 86-4 91.
- [83] Quan Zheng, Jingya Li, Fengxi Huang, An optimal Steffensen-type family for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics Computation* 217 (2011), 9592-9597.
- [84] A. Cordero, J.R. Torregrosa, *Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas*. *Applied Mathematics and Computation* 190, (2007), 686-698.
- [85] Blanchard, Paul. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 11 (1984), no. 1, 85–141.
- [86] C.L. Howk, A class of efficient quadrature-based predictor-corrector methods for solving nonlinear systems. *Applied Mathematics and Computation* 276 (2016), 394-406.
- [87] J.L. Hueso, E. Martínez, & C. Teruel, *Determination of multiple roots of nonlinear equations and applications*, *J Math Chem* (2015) 53: 880. <https://doi.org/10.1007/s10910-014-0460-8>
- [88] W. Bi, H. Ren, Q. Wu, *Three-step iterative methods with eighth-order convergence for solving nonlinear equations*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **255** (2009) 105–112.

- [89] W. Bi, Q. Wu, H. Ren, *A new family of eighth-order iterative methods for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation **214** (2009) 236–245.
- [90] A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martínez, J. R. Torregrosa, *New modifications of Potra-Pták's method with optimal fourth and eighth order of convergence*, Journal of Computational and Applied Mathematics **234** (2010) 2969–2976.
- [91] E. Schröder, *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Math. Ann. **2** (1870) 317–365.
- [92] C. Chun, B. Neta, *A third-order modification of Newton's method for multiple roots*, Appl. Math. Comput. **211** (2009) 474–479.
- [93] Y. I. Kim, S. D. Lee, *A third-order variant of Newton-Secant method finding a multiple zero*, J. Chungcheong Math. Soc. **23** (4) (2010) 845–852.
- [94] B. Neta, *Extension of Murakami's high-order nonlinear solver to multiple roots*, Int. J. Comput. Math. **8** (2010) 1023–1031.
- [95] H. Ren, Q. Wu, W. Bi, *A class of two-step Steffensen type methods with fourth-order convergence*, Applied Mathematics and Computation **209** (2009) 206–210.
- [96] Q. Zheng, J. Wang, P. Zhao, L. Zhang, *A Steffensen-like method and its higher-order variants*, Applied Mathematics and Computation **214** (2009) 10–16.
- [97] S. Amat, S. Busquier, *On a Steffensen's type method and its behavior for semismooth equations*, Applied Mathematics and Computation **177** (2006) 819–823.
- [98] X. Feng, Y. He, *High order iterative methods without derivatives for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation **186** (2007) 1617–1623.
- [99] A. Cordero, J. R. Torregrosa, *A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence*, Applied Mathematics and Computation, doi:10.1016/j.amc.2011.02.067.

- [100] F. Marvasti, A. Jain, *Zero crossings, bandwidth compression, and restoration of nonlinearly distorted band-limited signals*, Journal of the Optical Society of America A **3**, (1986) 651–654.
- [101] S. Anza, C. Vicente, B. Gimeno, V.E. Boria, J. Armendáriz, *Long-term multipactor discharge in multicarrier systems*, Physics of Plasmas **14**(8),(2007) 082–112.
- [102] J.L. Hueso, E. Martínez, C. Teruel, *New families of iterative methods with fourth and sixth order of convergence and their dynamics* Proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2013, 24-27 June 2013.
- [103] A. Cordero, J.R. Torregrosa, *Low-complexity root-finding iteration functions with no derivatives of any order of convergence*. Journal of Computational and Applied Mathematics <http://dx.doi.org/10.10016/j.cam.2014.01.024> (2014).
- [104] J. R. Sharma, R. Sharma, *Modified Jarratt method for computing multiple roots*, Applied Mathematics and Computation **217** (2010) 878–881.
- [105] D. A. Budzko, J. L. Hueso, E. Martínez & C. Teruel, *Dynamical study while searching equilibrium solutions in N-body problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 297 (2016), 24-60. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.11.010>.
- [106] J.L. Varona, Graphic and numerical comparison between iterative methods, Math. Intelligencer, 24, pp. 37–46 (2002).
- [107] S. Amat, S. Busquier, S. Plaza, Chaotic dynamics of a third-order Newton-type method, Journal of Mathematical Analysis and Applications 366-1, pp. 24–32 (2010).
- [108] S. Amat, S. Busquier, Á.A. Magreñán, Reducing Chaos and Bifurcations in Newton-Type Methods, Abstract and Applied Analysis 2013, 10 pp., dx.doi.org/10.1155/2013/726701

- [109] E. Bedford, J. Diller, Real and complex dynamics of a family of birational maps of the plane: the golden mean subshift. *Amer. J. Math.* 127(2005), pp. 595–646.
- [110] R. Durán, J. Muñoz, A. Peinado, Classifying quadratic maps from plane to plane, *Linear Algebra Appl.*, 364 (2003), pp. 1–12.
- [111] P. Montel, *Leçons sur les familles normales*, Gauthier-Villars, (1927).
- [112] D.A. Budzko, A.N. Prokopenya, Symbolic-Numerical Methods for Searching Equilibrium States in a Restricted Four-Body Problem. *Programming and Computer Software*, Vol. 39:2, pp. 74–80 (2013).
- [113] C. Simó, Relative equilibrium solutions in the four body problem. *Celestial Mechanics*,18, pp. 165–184 (1978).
- [114] F. Diacu, The solution of the n-body problem. *Mathematical Intelligencer*. 18,(3), pp. 66-70 (1996).
- [115] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Chelsea Publishing Company, New York, (1982).
- [116] D.A. Budzko, A.N. Prokopenya, Symbolic-numerical analysis of equilibrium solutions in a restricted four-body problem. *Programming and Computer Software*, Vol. 36:2, pp. 68–74 (2010).
- [117] G. B. Thomas, R.L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 9th ed., Addison-Wesley, (1996).
- [118] K.F. Sundman, *Memoire sur le probleme des trois corps*. *Acta mathematica*, 36.1, pp. 105–179 (1913).
- [119] V. Szebehely, *Theory of orbits: the restricted problem of three bodies*. Academic Press, New York, (1967).
- [120] M.A. Hernández-Verón, E. Martínez & C. Teruel, Semilocal convergence of a k -step iterative process and its application for solving a special kind of conservative problems *Numer Algor* (2017) 76: 309. <https://doi.org/10.1007/s11075-016-0255-z>

- [121] S. Amat, S. Busquier, C. Bermúdez and S. Plaza, On two families of high order Newton type methods, *Appl. Math. Comput.*, 25 (2012), 2209-2217.
- [122] I.K. Argyros, S. Hilout and M.A. Tabatabai *Mathematical Modelling with Applications in Biosciences and Engineering*. Nova Publishers, New York (2011).
- [123] A. Cordero, J. L. Hueso, Eulalia Martínez and J. R. Torregrosa, Generating optimal derivative free iterative methods for nonlinear equations by using polynomial interpolation. *Math. Comput. Mod.*, 57 (2013), 1950-1956.
- [124] J. W. Jerome and R. S. Varga, *Generalizations of Spline Functions and Applications to Nonlinear Boundary Value and Eigenvalue Problems, Theory and Applications of Spline Functions*. Academic Press, New York (1969).
- [125] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional analysis* Pergamon Press, Oxford (1982).
- [126] H. B. Keller, *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Dover Publications, New York (1992).
- [127] T.Y. Na, *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*, Academic Press, New York (1979).
- [128] J. M. Ortega, The Newton-Kantorovich theorem, *Amer. Math. Monthly*, 75 (1968), 658–660.
- [129] A. M. Ostrowski, *Solutions of Equations in Euclidean and Banach Spaces*. Academic Press, New York (1973).
- [130] D. Porter and D. Stirling, *Integral Equations: A Practical Treatment, From Spectral Theory to Applications*. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [131] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1964).

- [132] J.Z. Xiao, J. Sun, X. Huang, Approximating common fixed points of asymptotically quasi-nonexpansive mappings by a $k+1$ -step iterative scheme with error terms, *J. Comput. Appl. Math.* 233 (2010), 2062-2070.
- [133] X. Qin, B.A.B. Dehaish, S.Y. Cho, Viscosity splitting methods for variational inclusion and fixed point problems in Hilbert spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.* 9 (2016), 2789-2797,