

## Control predictivo para seguimiento de sistemas no lineales. Aplicación a una planta piloto.

A. Ferramosca<sup>a,b,\*</sup>, J.K. Gruber<sup>c</sup>, D. Limon<sup>b</sup>, E.F. Camacho<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), CONICET-Universidad Nacional del Litoral (UNL). Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina.*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n., 41092 Sevilla, España.*

<sup>c</sup>*Unidad de Procesos Eléctricos, Instituto IMDEA Energía. Avda. Ramón de la Sagra, 3, 28935 Móstoles, Madrid, España*

### Resumen

Este artículo trata el problema del diseño de un controlador predictivo para seguimiento de referencias cambiantes, en el caso de sistemas no lineales. Los controladores predictivos proveen leyes de control adecuadas para regular sistemas lineales o no lineales a un punto de equilibrio dado garantizando la satisfacción de restricciones y la estabilidad asintótica. Pero si este punto de equilibrio cambia, el controlador podría perder la estabilidad o incluso la factibilidad y por lo tanto sería incapaz de seguir la referencia deseada. En (Ferramosca et al., 2009a) se ha propuesto un controlador predictivo para seguimiento de referencias capaz de garantizar factibilidad y convergencia al punto de equilibrio a pesar de los cambios que este pueda sufrir. En este artículo, este controlador se utiliza para controlar en tiempo real una planta piloto de procesos. Los resultados obtenidos demuestran que el controlador predictivo para seguimiento es capaz de controlar plantas con dinámicas no lineales y restricciones. El experimento demuestra cómo el controlador garantiza estabilidad, factibilidad y convergencia también en caso de referencias no alcanzables. Copyright © 2013 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

**Palabras Clave:** Control predictivo, seguimiento de referencia, estabilidad, sistemas no lineales

### 1. Introducción

El control predictivo basado en el modelo (MPC, del inglés *Model Predictive Control*) es una de las estrategias de control que más éxito ha obtenido en el ámbito industrial. Esto se debe al hecho de que permite el control de sistemas considerando explícitamente restricciones, atendiendo a un criterio óptimo, utilizando un modelo de la planta para las predicciones y garantizando la estabilidad y convergencia al punto de equilibrio (Camacho y Bordons, 2004).

El control predictivo basado en modelo ha concentrado el esfuerzo de numerosos investigadores en los últimos años, avanzando notablemente las bases teóricas, la comprensión del problema de control, el estudio de sus características y limitaciones y procedimientos de diseño estabilizante (Mayne et al., 2000; Rawlings y Mayne, 2009).

En la estructura típica de un sistema de control industrial, un optimizador de consignas es el responsable de proveer el punto de trabajo de la planta de forma que se optimice un cierto criterio económico. Si los criterios económicos cambian o bien cambian las condiciones de operación, el punto de funcionamiento óptimo cambia y el controlador a bajo nivel debe realizar dicho cambio. La solución clásica es trasladar el problema al nuevo punto de trabajo (Muske y Rawlings, 1993). En ausencia de restricciones, esta solución siempre es válida, pero cuando el problema presenta restricciones, pueden aparecer problemas de pérdida de factibilidad o estabilidad. Dicha pérdida de la factibilidad del problema de optimización se puede deber a una de las siguientes causas: (i) la restricción terminal calculada para garantizar la estabilidad en un cierto punto de equilibrio puede no ser un válida para el nuevo punto de equilibrio, lo que puede provocar la pérdida de factibilidad y (ii) la región terminal para el nuevo punto de operación podría no ser alcanzable en el horizonte de predicción considerado, lo que haría de nuevo, perder la factibilidad del problema. Esto requeriría el recálculo del horizonte y de las condiciones terminales para recuperar la factibilidad, por lo que un cambio de referencia conllevaría el

\* Autor para correspondencia.

Correos electrónicos: [ferramosca@santafe-conicet.gov.ar](mailto:ferramosca@santafe-conicet.gov.ar) (A. Ferramosca), [jorn.gruber@imdea.org](mailto:jorn.gruber@imdea.org) (J.K. Gruber), [limon@cartuja.us.es](mailto:limon@cartuja.us.es) (D. Limon), [eduardo@cartuja.us.es](mailto:eduardo@cartuja.us.es) (E.F. Camacho)

rediseño on-line del controlador, lo que no será siempre posible.

Con objeto de solventar estos problemas se han propuesto varias soluciones, en (Rossiter et al., 1996; Chisci y Zappa, 2003) se utiliza un controlador conmutado basado en un controlador auxiliar que es capaz de recuperar la factibilidad en tiempo finito cuando ésta se pierde por un cambio de referencia. Otra posible solución es la propuesta por (Pannocchia y Kerrigan, 2005; Pannocchia, 2004) considerando el cambio de referencia como una perturbación a rechazar. De esta forma este controlador es capaz de llevar el sistema al punto deseado pero solo cuando las variaciones en la referencia son pequeñas. Es por lo tanto, una solución conservadora.

Un enfoque diferente es el que se le da a este problema en el contexto de los controladores de referencia (Gilbert et al., 1995; Bemporad et al., 1997). Esta técnica de control asume que el sistema está estabilizado de forma robusta por un controlador local, y se diseña un filtro de referencia no lineal para la satisfacción robusta de las restricciones. Este tipo de controlador es capaz de seguir los cambios de referencia sin considerar el desempeño y la región de atracción de dicho controlador. En (Findeisen et al., 2000) se propone un controlador predictivo para familias de puntos de operación basado en pseudolinealización y en una parametrización de los puntos de equilibrio.

En el caso de sistemas no lineales, el problema de cambio de referencia ha sido tratado en (Magni et al., 2001, 2002; Magni y Scattolini, 2005). En particular, en (Magni et al., 2001) se presenta un algoritmo para sistemas no lineales basado en realimentación de la salida, capaz de resolver el problema del seguimiento de señales exógenas, rechazando perturbaciones asintóticamente. En (Magni y Scattolini, 2005) se presenta un algoritmo caracterizado por la presencia de un integrador antes del sistema, a fin de garantizar la solución del problema de seguimiento asintóticamente.

En (Limon et al., 2008) se propone una nueva formulación del control predictivo para seguimiento de referencia, que permite mantener la factibilidad para cualquier cambio de punto de operación. Las principales características de este controlador son: un punto de equilibrio artificial considerado como variable de decisión, un coste que penalice la distancia entre la trayectoria predicha y el punto de equilibrio artificial, un coste adicional que penalice la distancia entre el punto de equilibrio artificial y el punto de equilibrio deseado, llamado *coste de offset*, y una restricción terminal extendida, el conjunto invariante para tracking. Este controlador garantiza estabilidad y factibilidad recursiva para cualquier cambio de referencia, solucionando el problema de factibilidad y estabilidad del MPC ante cambios de punto de operación. Se demuestra además que con una adecuada penalización del coste de offset se garantiza que el controlador predictivo provea la propiedad de optimalidad local: es decir, en un entorno del punto de equilibrio el controlador se comporta como un controlador óptimo a horizonte infinito (Ferramosca et al., 2009b). En (Ferramosca et al., 2009a) este controlador se extiende al caso de sistemas no lineales.

En este artículo, se presenta el controlador propuesto en (Ferramosca et al., 2009a) y se aplica a una planta piloto de laboratorio que permite la simulación de procesos con varia-

bles habituales en aplicaciones industriales como temperaturas y caudales. El sistema dispone de diferentes sensores industriales para medir y varios actuadores para el control de procesos. Dicha planta emula una reacción química exotérmica basada en cambios de temperatura. La emulación se ha realizado con la ayuda de un modelo matemático detallado de la reacción química. El proceso a controlar es un sistema no lineal complejo, debido a que la reacción emulada y el sistema físico presentan importantes no linealidades.

El artículo se estructura de la siguiente manera. En la sección 2 se introduce el problema. En la sección 3 se presenta el controlador predictivo para seguimiento propuesto. En la sección 4 se describe la planta de laboratorio y en la sección 5 se proveen los resultados experimentales. Finalmente las conclusiones de este trabajo se dan en la sección 6.

## 2. Planteamiento del problema

Sea el sistema dinámico no lineal en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} x^+ &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $x \in \mathbb{R}^n$  el vector de estados del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  el vector de las entradas manipulables del sistema,  $y \in \mathbb{R}^p$  el vector de salidas y  $x^+$  el vector de estados en el siguiente instante de tiempo. La solución del sistema dada una secuencia de acciones de control  $\mathbf{u}$  y el estado inicial  $x$  se denota como  $x(j) = \phi(j; x, \mathbf{u})$  y es tal que  $x = \phi(0; x, \mathbf{u})$ . Los estados y las entradas del sistema en el instante de tiempo  $k$  se denotan como  $x(k)$  y  $u(k)$  respectivamente. Los estados y las entradas están sujetos a las restricciones:

$$x(k) \in X, \quad u(k) \in U \quad (2)$$

para todo  $k \geq 0$ , siendo  $X$  y  $U$  conjuntos compactos y convexos pertenecientes a  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente, que contienen el origen.

Los puntos de equilibrio de la planta,  $(x_s, u_s, y_s)$ , son todos aquellos puntos que verifican:

$$x_s = f(x_s, u_s) \quad (3)$$

$$y_s = h(x_s) \quad (4)$$

Los conjuntos de puntos de equilibrio se definen como:

$$\mathcal{Z}_s = \{(x, u) \in X \times U : x = f(x, u)\} \quad (5)$$

$$\mathcal{X}_s = \{x \in X : \exists u \in U \text{ s. a. } (x, u) \in \mathcal{Z}_s\} \quad (6)$$

$$\mathcal{Y}_s = \{y = h(x, u) : (x, u) \in \lambda \mathcal{Z}_s\} \quad (7)$$

siendo  $\lambda \in (0, 1)$  un parámetro que se escoge arbitrariamente cercano a 1.

**Hipótesis 1.** Se asume que el sistema es observable y que la salida del sistema define unívocamente los puntos de equilibrio  $(x_s, u_s, y_s)$ , i.e.

$$x_s = g_x(y_s), \quad u_s = g_u(y_s) \quad (8)$$

**Observación 1.** Si el sistema (1) no es observable, se toma un parámetro  $\theta \in \mathbb{R}^{n_0}$  tal que  $(x_s, u_s, y_s)$  estén definidos unívocamente por un valor de  $\theta$ .

**Observación 2.** El sistema en tiempo discreto (1) se puede obtener implícitamente del modelo en tiempo continuo  $\dot{x} = F(x, u)$  integrando las ecuaciones diferenciales. Nótese que los puntos de equilibrio dados por (8) son tal que  $F(g_x(y_s), g_u(y_s)) = 0$ .

El problema que se estudia en este artículo es el diseño de una ley de control predictivo  $k_N(x, y_t)$  para seguimiento de referencias de salida (posiblemente variantes en el tiempo)  $y_t$ , de manera que la salida del sistema se establezca en  $y_t$  (y si no es posible, lo más cerca posible de la referencia), cumpliendo con las restricciones.

### 3. Control predictivo para seguimiento de referencias

En esta sección se presenta el controlador predictivo para seguimiento de referencias. El objetivo principal de esta nueva formulación de controladores predictivos es garantizar la factibilidad del problema de optimización antes posibles cambios de las referencias deseadas, y la convergencia a dicha referencia, cuando eso sea posible.

El controlador predictivo para seguimiento presenta unas características principales que son: (i) considerar los puntos de equilibrio del sistema como variables de optimización que definen una referencia artificial; (ii) usar un funcional de coste que penalice la distancia entre los estados predichos y la referencia artificial; (iii) añadir una función de coste de offset que penalice la distancia entre la referencia artificial y la referencia real deseada; (iv) considerar una nueva restricción terminal para la estabilidad, que tenga en cuenta las referencias artificiales.

El funcional de coste que se propone es:

$$V_N(x, y_t; \mathbf{u}, y_s) = \sum_{j=0}^{N-1} |x(j) - x_s|_Q^2 + |u(j) - u_s|_R^2 + V_O(y_s - y_t)$$

donde  $x(j) = \phi(j; x, \mathbf{u})$ ,  $x_s = g_x(y_s)$ ,  $u_s = g_u(y_s)$  y  $y_s = g_y(y_s)$ ;  $y_t$  es la referencia deseada.  $V_O(y_s - y_t)$  es el coste de offset.

El controlador se deriva de la solución del siguiente problema de optimización, que se denomina  $P_N(x, y_t)$ :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}, y_s} V_N(x, y_t; \mathbf{u}, y_s) \\ & \text{s.a.} \\ & x(0) = x, \\ & x(j+1) = f(x(j), u(j)), \quad j=0, \dots, N-1 \\ & x(j) \in X, u(j) \in U, \quad j=0, \dots, N-1 \\ & y_s \in \mathcal{Y}_s \\ & x_s = g_x(y_s), u_s = g_u(y_s) \\ & x(N) = x_s \end{aligned}$$

En este artículo, el valor óptimo del coste y de las variables de decisión se denotarán como  $V_N^0(x, y_t)$  y  $(\mathbf{u}^0, y_s^0)$  respectivamente. Una vez obtenida la solución óptima, ésta se aplica basándose en el concepto del horizonte deslizante, por lo que se obtiene la siguiente ley de control:

$$\kappa_N(x, y_t) = \mathbf{u}^0(0; x, y_t)$$

Nótese que el conjunto de restricciones del problema  $P_N(x, y_t)$  no depende de la referencia  $y_t$ . Por lo tanto, tampoco la región de factibilidad de este problema depende de  $y_t$ . Entonces, existe una región  $\mathcal{X}_N \subseteq X$  tal que el problema  $P_N(x, y_t)$  es factible para todos  $x \in \mathcal{X}_N$  y para todo  $y_t \in \mathbb{R}^p$ .

Para demostrar la estabilidad del controlador propuesto, es preciso introducir las siguientes hipótesis:

**Hipótesis 2.** Se asume que:

1. La función que modela el sistema  $f(x, u)$  es continua según Lipschitz y que  $f(0, 0) = 0$ .
2. La función  $g_x(y_s)$  es continua según Lipschitz en  $\mathcal{Y}_s$ .
3. La función de coste de offset  $V_O : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y definida positiva. Además, el mínimo de esa función

$$y_s^* = \arg \min_{y_s \in \mathcal{Y}_s} V_O(y_s - y_t)$$

es único.

Además, existe una función  $\mathcal{K}, \alpha_O$ , tal que  $V_O(y_s - y_t) \geq \alpha_O(|y_s - y_s^*|)$ .

4. El sistema goza de la propiedad de la controlabilidad débil en cada punto de equilibrio  $(x_s, u_s) \in \mathcal{Z}_s$  (Rawlings y Mayne, 2009). Por lo tanto, para toda solución factible del problema  $P_N(x, y_t)$ ,  $(\mathbf{u}, y_s)$ , existe una función  $\mathcal{K}_\infty, \gamma$ , tal que

$$\sum_{i=0}^{N-1} |u(i) - u_s| \leq \gamma(|x - x_s|)$$

para todo  $x \in \mathcal{X}_N$ .

5. El conjunto de salidas admisibles,  $\mathcal{Y}_s$ , es un conjunto convexo.

El siguiente teorema demuestra estabilidad asintótica del sistema en bucle cerrado controlado por el controlador propuesto.

**Teorema 1 (Estabilidad).** Supóngase que se cumple la hipótesis 2 y considérese una referencia  $y_t$ . Para cada estado inicial  $x_0 \in \mathcal{X}_N$ , el sistema en bucle cerrado controlado por la ley de control  $\kappa_N(x, y_t)$ , es estable, converge a un punto de equilibrio, cumple con las restricciones y además:

$$(i) \text{ si } y_t \in \mathcal{Y}_s, \text{ entonces } \lim_{k \rightarrow \infty} |y(k) - y_t| = 0.$$

$$(ii) \text{ si } y_t \notin \mathcal{Y}_s, \text{ entonces } \lim_{k \rightarrow \infty} |y(k) - y_s^*| = 0, \text{ donde}$$

$$y_s^* = \arg \min_{y_s \in \mathcal{Y}_s} V_O(y_s - y_t)$$

#### 3.1. Propiedades del controlador propuesto

El controlador propuesto, provee las siguientes propiedades, de gran interés desde un punto de vista práctico:

- **Cambio de puntos de operación.** Teniendo en cuenta que el problema  $P_N(x, y_t)$  es factible para todo  $y_t$ , entonces el controlador propuesto es capaz de seguir cualquier punto de operación  $y_t$  manteniendo la factibilidad recursiva.

- **Estabilidad para todos puntos de equilibrio admisibles.** El controlador presentado es capaz de seguir todas las referencias  $y_t \in \mathcal{Y}_s$ , hasta con un horizonte  $N = 1$ , si la condición inicial es un punto factible. Es importante observar que todos los puntos de equilibrio  $y_s \in \mathcal{Y}_s$  son factibles, y por lo tanto, en el caso de tener una condición inicial que sea un punto de equilibrio, el controlador llevará el sistema a cualquier punto de equilibrio en  $\mathcal{Y}_s$  para cualquier elección del horizonte  $N$ .
- **Aumento del dominio de atracción.** El dominio de atracción de un controlador predictivo estándar es el conjunto de condiciones iniciales que se pueden llevar de forma admisible al punto de equilibrio  $x_s^*$ . En el caso del controlador propuesto en este artículo, el dominio de atracción es el conjunto de estados iniciales que pueden llevar a *cualquier* punto de equilibrio de forma admisible en  $N$  pasos. Como consecuencia, el dominio de atracción del controlador propuesto es mayor que el dominio de un controlador predictivo tradicional. Esta propiedad es particularmente interesante en el caso de horizontes de predicción pequeños.
- **Optimización de punto de equilibrio.** Cuando la referencia deseada no es un punto de equilibrio admisible, o sea  $y_t \notin \mathcal{Y}_s$ , la solución estándar que se utiliza es añadir una capa de optimización por encima del controlador predictivo, con el fin de calcular el punto de equilibrio estable para el sistema (Rao y Rawlings, 1999). El controlador presentado en este artículo, estabiliza el sistema en el punto de equilibrio que minimiza la función de coste de offset  $V_O(\cdot)$ . Por lo tanto se puede considerar que este controlador realiza la optimización de punto de equilibrio en el mismo problema de optimización del predictivo, y  $V_O(\cdot)$  define la función a minimizar.
- **Optimalidad local.** Los controladores predictivos se pueden considerar como controladores subóptimos con respecto al LQR sin restricciones. Eso se debe a que el LQR considera un coste a horizonte infinito, mientras que el coste del predictivo es a horizonte finito. Sin embargo, si el coste terminal del predictivo es el mismo del LQR sin restricciones, entonces el controlador predictivo provee la misma optimalidad - en bucle cerrado - del LQR, en un entorno de la región terminal (Hu y Linnemann, 2002). Esta propiedad se define de optimalidad local. El MPC para seguimiento de referencias no garantiza dicha propiedad debido a que el problema de optimización considera nuevas variables de decisión y un funcional de coste modificado. Sin embargo, en (Ferramosca et al., 2009b) se demuestra que, con una ponderación adecuada del coste de offset, se puede garantizar optimalidad local. En (Ferramosca et al., 2011) además, se presenta un método para calcular dicha ponderación y una caracterización de la región de optimalidad local.
- **Cancelación de offset.** Errores de modelo y perturbaciones pueden causar un offset entre la salida del sistema y

la referencia real. Para obviar a este problema, se puede utilizar un modelo del error, para estimarlo y poderlo cancelar (Rawlings y Mayne, 2009; Limon et al., 2010). El efecto del error se puede modelar como una perturbación constante en la variable controlada:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k)) + w(k) \\ w(k+1) &= w(k) \end{aligned}$$

Entonces, en el instante  $k$ , el error se puede estimar de la siguiente manera:

$$\hat{w}(k) = \hat{w}(k-1) + L(y(k) - h(f(x(k-1), u(k-1)) - \hat{w}(k-1)))$$

La ganancia  $L$  se tiene que elegir de manera que los autovalores de  $(I - L)$  sean menores que 1 pero al mismo tiempo suficientemente grandes para poder filtrar el efecto de las perturbaciones en la estimación.

Si el sistema controlado alcanza un equilibrio,  $(x_\infty, u_\infty)$  y  $y_\infty = h(x_\infty) + w_\infty$ , y si el diseño del estimador de perturbaciones es tal que  $\hat{w}_\infty = w_\infty$ . Entonces, el controlador propuesto  $\kappa_N(x, y_t)$  garantiza que, en ausencia de perturbaciones, dada una referencia alcanzable  $y_t$ ,  $h(x_\infty) = y_t$ . Sin embargo, la salida real es tal que  $y_\infty = h(x_\infty) + w_\infty = y_t + w_\infty$ , y por lo tanto existe un offset.

Este offset se puede cancelar fácilmente, dando al controlador una consigna modificada

$$\hat{y}_t(k) = y_t - \hat{w}(k) \quad (9)$$

Gracias a que el controlador propuesto garantiza factibilidad para cada referencia, la factibilidad del problema se mantiene para todas las consignas modificadas  $\hat{y}_t(k)$ . Además, dado que  $\hat{w}(k)$  converge a  $w_\infty$ , el sistema controlado  $x(k+1) = f(x(k), \kappa_N(x(k), \hat{y}_t(k)))$  converge a un punto de equilibrio, tal que  $y_\infty = h(x_\infty) + w_\infty = \hat{y}_{t_\infty} + w_\infty = y_t$ . Por lo tanto la salida converge a la referencia deseada.

#### 4. Descripción de la planta piloto

El MPC para seguimiento propuesto se ha aplicado a una planta piloto de laboratorio que permite la simulación de procesos con variables típicas en aplicaciones industriales tales como temperatura, nivel o caudal. El sistema dispone de diferentes sensores industriales para medir y varios actuadores industriales para el control de procesos. En este trabajo se ha usado la planta piloto para emular una reacción química exotérmica basada en cambios de temperatura. La emulación se ha realizado con la ayuda de un modelo matemático detallado de la reacción química.

La planta piloto usada está situada en el laboratorio del Departamento de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla. Dicha planta ha sido estudiada anteriormente por varios autores (Szeifert et al., 1995; Ramirez et al., 1999; Cueli y Bordons, 2008) y usada como banco de pruebas para diferentes técnicas de control (Ramirez et al., 2004; Ortega y Rubio, 2004;



Figura 1: La planta piloto usada para la aplicación del MPC para seguimiento propuesto.

Gruber y Bordons, 2007, 2008). En las siguientes secciones se da una descripción de la estructura de la planta piloto y del sistema de control y supervisión. Además se explica el método de emulación usado y se presenta el modelo matemático del proceso.

#### 4.1. Estructura de la planta piloto

La planta piloto (ver la figura 1) emula un reactor continuo de tanque agitado (CSTR, del inglés *Continuous Stirred Tank Reactor*) y permite calentar y enfriar el contenido del reactor. Los elementos principales del sistema son el reactor, la resistencia eléctrica, la camisa de refrigeración, la válvula de recirculación para manipular el flujo en la camisa de refrigeración y un depósito de agua. La figura 2 muestra un diagrama esquemático de la estructura general de la planta con los elementos principales mencionados.

Para la operación de la planta piloto se utiliza agua, tanto en el reactor como en la camisa de refrigeración. El reactor tiene una capacidad de 25 l y contiene una resistencia eléctrica en su interior. La resistencia eléctrica tiene una potencia máxima de 14,4 kW y puede ser usada para suministrar energía calórica al contenido del reactor. Por otro lado, la reducción de la temperatura en el reactor se realiza mediante la camisa de refrigeración. La disipación de calor se regula mediante la apertura de la válvula  $v_8$  que manipula el flujo  $F_c$  en la camisa (ver la figura 2). El líquido de refrigeración, agua, proviene de un depósito de 1 m<sup>3</sup>

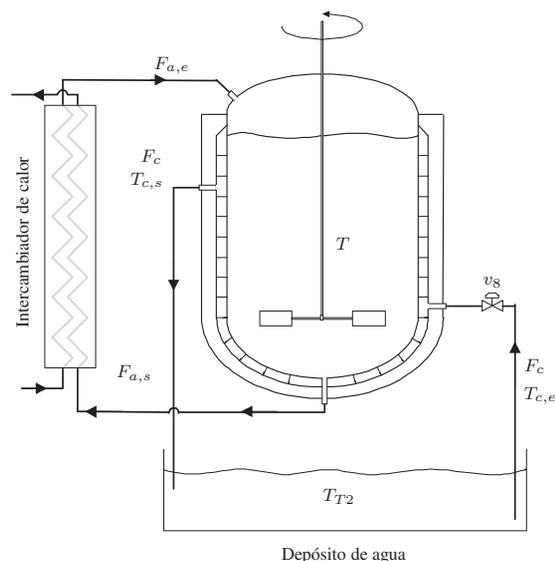


Figura 2: Diagrama de la planta piloto con los elementos principales para emular un reactor continuo de tanque agitado.

de capacidad, al que retorna después de haber pasado por la camisa de refrigeración. Para mantener la temperatura del agua fría constante se cuenta con una planta de refrigeración auxiliar controlada por termostato que mantiene la temperatura  $T_{T2}$  entre 18 °C y 19 °C.

#### 4.2. Sistema de control y supervisión

La planta piloto está dotada con diferentes sensores y actuadores con el objetivo de facilitar el control del proceso químico en el interior del reactor. Los sensores instalados miden temperaturas, caudales, niveles y presiones en diferentes puntos del sistema. Los actuadores permiten manipular diferentes válvulas y bombas para regular los caudales en la planta. Los sensores y actuadores mencionados están conectados a un autómata programable *Modicon M340* del fabricante *Schneider Electric*.

El autómata programable está situado en un bastidor que contiene los módulos de la alimentación, del procesador y de las entradas y salidas (analógicas y digitales). El módulo del procesador se conecta por Ethernet con un ordenador personal y comunica con el programa *Unity Pro* de *Schneider Electric*. La aplicación *Unity Pro* es un software de programación, depuración y mantenimiento para la explotación de autómatas de la gama *Modicon M340* y otras.

La estrategia de control propuesta, el MPC de seguimiento, se ha implementado directamente en el entorno de desarrollo *Matlab/Simulink*. Los programas *Matlab/Simulink* y *Unity Pro* se ejecutan en el mismo ordenador personal y la comunicación entre las dos aplicaciones se realiza utilizando el estándar industrial OPC (OLE for Process Control). El ordenador personal empleado para el control y la supervisión de la planta piloto está basado en un procesador Pentium 4 a 3 GHz usando Windows XP como sistema operativo.

La combinación de las diferentes aplicaciones y canales de comunicación permite el uso directo de *Matlab/Simulink* para

el control de la planta piloto. Este procedimiento tiene como grandes ventajas la facilidad y flexibilidad de programación así como el uso de funciones de optimización avanzada que ofrece el entorno de *Matlab/Simulink*.

#### 4.3. Emulación de la reacción química

La planta piloto (ver la figura 1) se utiliza para emular reacciones químicas exotérmicas (Santos et al., 2001). Durante la emulación, la energía generada por la reacción química es calculada con la ayuda de un modelo matemático de la reacción y suministrada al tanque por la resistencia eléctrica. El uso de la resistencia eléctrica para emular la reacción exotérmica tiene la ventaja de que ninguna reacción química tiene lugar en el reactor, lo que permite realizar experimentos más económicos y seguros mientras se usan componentes de equipamiento e instrumentación industriales.

En este trabajo se emula un proceso de descomposición en el cual el reactivo *A* es transformado en la sustancia *B*, generando energía calórica. La reacción viene generalmente definida por  $A \rightarrow B$  y ha sido usada previamente en (Lee et al., 2000) y (Gruber, 2010). El reactivo se suministra mediante el flujo de alimentación emulado  $F_{a,e}$  para mantener activa la reacción. Antes de entrar en el reactor, el flujo de alimentación pasa por el intercambiador de calor con el objetivo de reducir la diferencia de temperatura entre el flujo y el contenido del reactor. Análogamente se usa el flujo de salida emulado  $F_{a,s}$  para mantener constante el volumen del reactor. Como los flujos de alimentación y de salida tienen el mismo caudal y casi la misma temperatura, los dos flujos apenas causan cambios en la temperatura en el interior del reactor. La figura 2 muestra un diagrama de la planta piloto con los flujos emulados  $F_{a,e}$  y  $F_{a,s}$ .

En la emulación del proceso exotérmico se usa la resistencia eléctrica para suministrar al reactor la energía calórica que generaría la reacción exotérmica en el caso de producirse realmente ésta. El gradiente de la temperatura basado exclusivamente en este calor generado por la reacción química viene definido como (Lee et al., 2000; Gruber, 2010):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(-\Delta H) \cdot V}{MC_p} k_0 e^{-E/(RT)} C_A^2 \quad (10)$$

donde  $T$  y  $C_A$  representan la temperatura y la concentración del contenido del reactor de la planta. Considerando caudales idénticos del flujo de alimentación y del flujo de salida ( $F_a = F_{a,e} = F_{a,s}$ ), el volumen  $V$  y la masa  $M$  del reactor se mantienen constantes. Los parámetros usados en el modelo del gradiente (10) se recogen en el cuadro 1.

La concentración  $C_A$  del reactivo en el reactor de la planta se simula en el entorno *Matlab/Simulink*. Dicha simulación tiene lugar en el mismo ordenador personal donde se ejecuta el programa de control y supervisión y la concentración se calcula como (Lee et al., 2000; Gruber, 2010):

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_a}{V} (C_{A,e} - C_A) - k_0 e^{-E/(RT)} C_A^2 \quad (11)$$

donde el primer término considera la diferencia entre las concentraciones  $C_{A,e}$  y  $C_A$  del flujo de alimentación y del flujo de

Tabla 1: Parámetros del modelo matemático de la reacción química.

Nombre	Valor	Nombre	Valor
$k_0$	$1,265 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{mol} \cdot \text{s}}$	$\beta$	291,13 K
$C_p$	$4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{K} \cdot \text{kg}}$	$\gamma$	$19,15 \frac{\text{s}}{\text{l}}$
$\Delta H$	$-105,57 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$	$\eta$	$26,14 \frac{\text{s}}{\text{l}}$
$E/R$	13550 K	$\delta_0$	$4,84 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{min}}$
$V$	25 l	$\delta_1$	$3,43 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{min}}$
$M$	25 kg	$\delta_2$	$2,69 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{min}}$
$C_{A,e}$	$1,2 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$	$\delta_3$	$1,29 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{min}}$
$F_a$	$0,05 \frac{\text{l}}{\text{s}}$	$\delta_4$	$-1,46 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{min}}$
$T_{c,e}$	291,15 K	$\delta_5$	$-6,36 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{min}}$

salida, respectivamente. El segundo término representa la reducción de la concentración como resultado del consumo del reactivo por la reacción química. Los parámetros de (11) se muestran en el cuadro 1.

Con la concentración  $C_A$  calculada según (11) y la medida de la temperatura  $T$  se puede computar el gradiente de la temperatura basado en el calor generado por la reacción química mediante (10). Entonces, la potencia de la resistencia necesaria para simular tales cambios en la temperatura viene definida como:

$$P = C_p M \frac{dT}{dt} \quad (12)$$

donde  $C_p$  representa la capacidad calorífica específica del contenido del reactor (ver cuadro 1). Por lo tanto, en la emulación de la reacción química se emplean (10), (11) y (12). No obstante, (10) se usa exclusivamente para calcular la cantidad de energía calórica que se debe suministrar al reactor mediante la resistencia.

#### 4.4. Modelo matemático completo del proceso

Aunque no es necesario disponer de un modelo completo del proceso para la emulación de la reacción química, el controlador predictivo de seguimiento requiere el modelo matemático del proceso para calcular las predicciones y futuras acciones de control.

Los cambios de la temperatura en el reactor de la planta piloto, basados en la disipación de calor por la camisa de refrigeración y la energía generada por la reacción química exotérmica, vienen definidos como (Lee et al., 2000; Gruber, 2010):

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F_c}{V} (T_{c,s} - T_{c,e}) + \frac{(-\Delta H) \cdot V}{MC_p} k_0 e^{-E/(RT)} C_A^2 \quad (13)$$

Nótese que la generación de energía en el segundo término de (13) corresponde a la expresión dada en (10). Las variables  $F_c$ ,  $T_{c,e}$  y  $T_{c,s}$  representan el flujo que circula por la camisa de recirculación, así como la temperatura del agua al entrar y al salir de la camisa, respectivamente. Como el flujo de alimentación pasa por el intercambiador de calor y entra en el reactor casi con la

misma temperatura que tiene el contenido del reactor, se supone que el flujo de alimentación ni suministra ni extrae calor del reactor. Los parámetros usados en el modelo de la temperatura (13) se recogen en el cuadro 1.

El intercambio de calor entre la camisa de refrigeración y el reactor en (13) está basado principalmente en el flujo  $F_c$  y la diferencia de temperatura entre el agua que entra en la camisa y el agua que sale de la camisa. La temperatura  $T_{c,e}$  del agua de entrada es conocida y considerada un parámetro del modelo. No obstante, la temperatura  $T_{c,s}$  del agua en la salida de la camisa es desconocida e impide determinar el intercambio de calor y, como consecuencia, los cambios de temperatura (13) en el reactor de la planta piloto. Para resolver este problema se usa un modelo experimental del intercambio de calor entre el contenido del reactor y la camisa de refrigeración dado por la siguiente ecuación estática (Gruber, 2010; Gruber et al., 2009):

$$F_c \cdot (T_{c,s} - T_{c,e}) = \frac{T - \beta}{\gamma} (1 - e^{-\eta F_c}) \quad (14)$$

La relación entre el flujo en la camisa de refrigeración  $F_c$  y la apertura de la válvula  $v_8$  se ha identificado mediante datos experimentales. La función no lineal que aproxima dicha relación viene definida como:

$$F_c = \delta_0 + \delta_1 v_8 + \delta_2 v_8^2 + \delta_3 v_8^3 + \delta_4 v_8^4 + \delta_5 v_8^5 \quad (15)$$

Los parámetros empleados en (14) y (15) están recogidos en el cuadro 1.

Entonces, con la apertura de la válvula  $v_8$  se calcula directamente el flujo en la camisa  $F_c$  (15). Con el flujo  $F_c$  conocido y la temperatura  $T$  medida se obtiene el intercambio de calor (14). Empleando el intercambio de calor (14) en (13) se obtiene el gradiente de temperatura del proceso.

Finalmente, (11) y (13)-(15) definen el modelo matemático completo del proceso y permiten su simulación por ordenador. El proceso es no lineal en la dinámica de la concentración del reactivo y de la temperatura debido a los términos exponenciales y cuadráticos en la ecuaciones del modelo (11) y (13). La figura 3 presenta la temperatura  $T$  y la concentración del reactivo  $C_A$  en régimen estacionario como función del flujo de refrigeración  $F_c$  calculadas con el modelo matemático completo. La relación entre la apertura de la válvula  $v_8$  y el flujo en la camisa de refrigeración  $F_c$ , definida en (15), añade cierta no linealidad estática al modelo (ver la figura 4). Además, el intercambiador de calor (14) también muestra un comportamiento no lineal estático y convierte el proceso en un sistema con un alto grado de no linealidad.

El MPC para seguimiento propuesto utiliza el modelo matemático completo (11) y (13)-(15) para predecir la futura evolución del sistema, en concreto de la temperatura y de la concentración del reactivo. Hay que subrayar que no se usan las ecuaciones (13)-(15) en la emulación de la reacción química, pero sí se necesitan para el modelo de predicción de la estrategia de MPC propuesta. Para más detalles sobre la planta piloto y la reacción química se remite al lector a (Gruber, 2010).

Hay que mencionar que las restricciones físicas limitan la apertura de la válvula de recirculación de la siguiente forma:

$$0 \leq v_8(k) \leq 100 \quad (16)$$

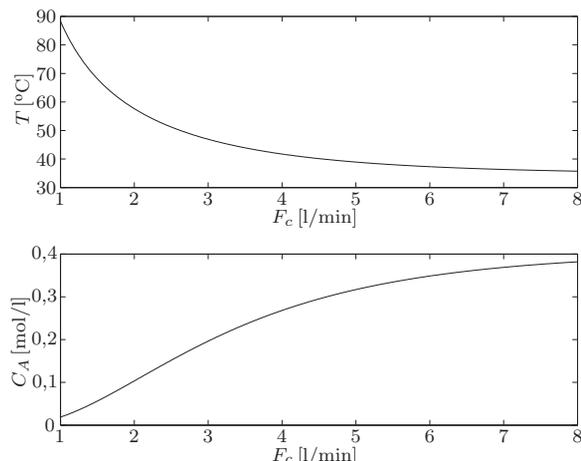


Figura 3: Temperatura  $T$  y concentración  $C_A$  del contenido del reactor en régimen estacionario como función del flujo  $F_c$  por la camisa de refrigeración calculadas con las ecuaciones de temperatura (13) y concentración (11).

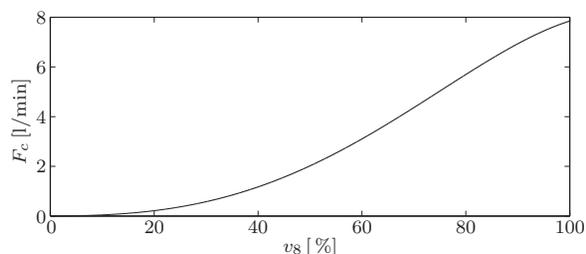


Figura 4: Relación estática no lineal entre la apertura de la válvula  $v_8$  y el flujo en la camisa de refrigeración  $F_c$ .

Como consecuencia directa de la restricción superior de la apertura de la válvula, la temperatura  $T$  del contenido del reactor tiene un límite inferior en 308,95 K. Además, la temperatura del reactor debe estar por debajo 348,15 K por razones de seguridad. Por lo tanto, la evolución de la temperatura  $T$  tiene que satisfacer las siguientes restricciones duras:

$$308,95 \leq T(k) \leq 348,15 \quad (17)$$

## 5. Resultados experimentales

El controlador predictivo para seguimiento presentado en la sección 3 se ha aplicado a la planta piloto de laboratorio descrita en la sección anterior. El modelo físico del proceso (13)-(15) se ha aproximado con un sistema no lineal en tiempo discreto, tomando un tiempo de muestreo  $t_s = 60$  s. En el modelo de predicción resultante, la entrada  $u$  corresponde a la apertura de la válvula  $v_8$ , el vector de estados  $x$  contiene la temperatura  $T$  y la concentración  $C_A$  y como salida del sistema y se toma el primer estado del modelo, i.e. la temperatura  $T$ . La evolución de los estados del sistema, se ha predicho utilizando un método de Runge-Kutta de orden 4, basándose en el modelo en tiempo continuo del proceso.

El controlador predictivo se ha implementado en el entorno Matlab/Simulink y el algoritmo de programación cuadrática se-

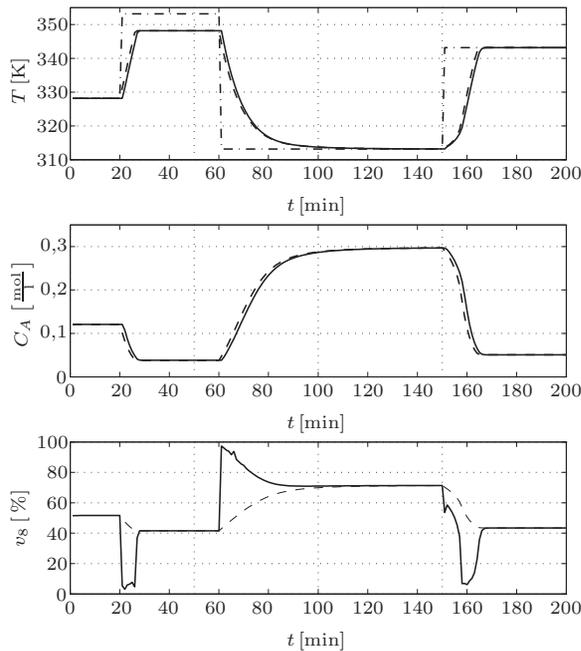


Figura 5: Ensayo de simulación de seguimiento de referencia con  $N = 2$ . Arriba: temperatura (línea continua), referencia (línea de puntos y trazos) y referencia artificial (línea de trazos); centro: concentración (línea continua) y concentración artificial (línea de trazos); abajo: entrada (línea continua) y entrada artificial (línea de trazos).

cuencial (SQP, del inglés Sequential Quadratic Programming) se ha utilizado para resolver el problema de optimización y calcular las acciones de control óptimas. Las matrices de ponderación del funcional de coste del controlador predictivo se han tomado  $Q = I_2$  y  $R = I_1$ . La función de coste de offset se ha tomado de la forma  $V_O = \alpha |y_s - y_i|_T^2$ , donde  $\alpha = 200$  se ha tomado de forma que se garantice la optimalidad local (Ferramosca et al., 2009b, 2011). Los límites físicos de  $v_8$  y  $T$ , (16) and (17) respectivamente, se han tomado como restricciones en la formulación del controlador. La restricción inferior a la temperatura, en apariencia redundante con la máxima apertura de la válvula, se ha incluido por la necesidad de tomar un conjunto de restricciones  $X$  compacto. La ganancia del estimador de perturbaciones se ha tomado  $L = 0,02$ .

### 5.1. Simulación del experimento

En esta sección se presentan las simulaciones realizadas con el fin de preparar el experimento. Arrancando con una temperatura inicial de 328,15 K, la referencia se ha cambiado a 353,15 K, luego a 313,15 K y finalmente a 343,15 K. El ensayo se ha realizado dos veces, utilizando dos horizontes distintos:  $N = 2$  y  $N = 6$ , respectivamente.

Los resultados de las simulaciones se presentan en las figuras 5 y 6. Es posible apreciar cómo el controlador lleva al sistema a seguir la referencia artificial, cumpliendo con las restricciones y sin perder la factibilidad. Nótese además que en el primer cambio de consigna, la referencia es un punto no alcanzable para el sistema. El controlador entonces estabiliza el

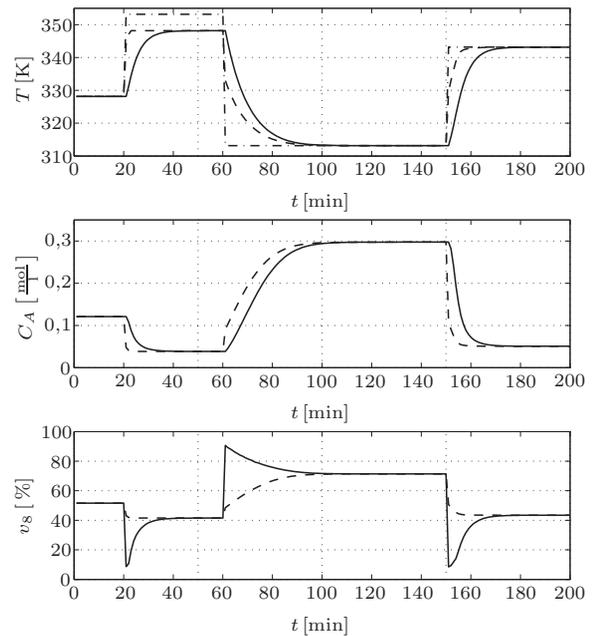


Figura 6: Ensayo de simulación de seguimiento de referencia con  $N = 6$ . Arriba: temperatura (línea continua), referencia (línea de puntos y trazos) y referencia artificial (línea de trazos); centro: concentración (línea continua) y concentración artificial (línea de trazos); abajo: entrada (línea continua) y entrada artificial (línea de trazos).

sistema en el punto de equilibrio que minimiza el coste de offset. Cabe subrayar el papel de la referencia artificial. Cuando el sistema es sujeto a un cambio de consigna muy amplio y el horizonte de predicción es muy pequeño, la factibilidad del controlador se podría perder. Sin embargo, el controlador propuesto garantiza siempre la factibilidad, gracias al uso de la referencia artificial: el sistema trata de seguir una referencia, la referencia artificial, que representa un punto de equilibrio admisible para el sistema.

El uso de una restricción terminal de igualdad que puede ser *cualquier* punto de equilibrio del sistema, provee otra importante propiedad al controlador: el aumento del dominio de atracción. Esta propiedad se muestra en la figura 7.

En la figura 7 los dominios de atracción del controlador propuesto, tomando como horizontes de predicción  $N = 2$  and  $N = 6$ , se muestran respectivamente en línea de trazos y en línea continua. Estas dos regiones se han estimado a partir de un conjunto de estados iniciales factibles, obtenido resolviendo el problema denominado *Phase I* (Boyd y Vandenberghe, 2006), en una malla de puntos. La línea de puntos y trazos representa el conjunto de puntos de equilibrio del sistema. Las tres referencias que se han considerado en los ensayos se han dibujado como círculos. Se puede observar cómo el controlador provee un dominio de atracción bastante grande, aún utilizando un horizonte de predicción pequeño. En particular, obsérvese que el dominio de atracción cubre completamente el conjunto de puntos de equilibrio del sistema. El conjunto de salidas alcanzables del sistema se encuentra en la franja  $308,95 \text{ K} \leq T \leq 348,15 \text{ K}$ .

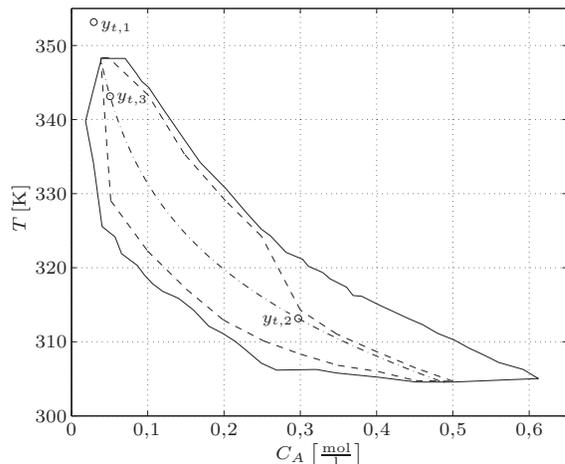


Figura 7: Estimación de los dominios de atracción del controlador predictivo para seguimiento, tomando como horizontes  $N = 2$  y  $N = 6$ .

### 5.2. Aplicación a la planta real

Una vez diseñado el controlador como se mostró en las simulaciones anteriores, se ha ejecutado éste sobre la planta real. Como en el caso de las simulaciones, se han considerados tres consignas de temperatura distintas: arrancando con una temperatura de 328,15 K, la referencia de temperatura se ha cambiado a 353,15 K, luego a 313,15 K y finalmente a 343,15 K. El horizonte de predicción se ha tomado de  $N = 6$  pasos.

Los resultados del experimento se presentan en la figura 8. La evolución del sistema se ha dibujado en línea continua, mientras que la referencia artificial y la referencia real se han dibujado respectivamente en línea de trazos y línea de puntos y trazos. Como se esperaba después de ver las simulaciones, el controlador estabiliza el sistema en bucle cerrado en el punto de equilibrio deseado, aún cuando el cambio de referencia sea considerable. Como ya se adelantó en la sección relativa a los ensayos de simulación, esto se debe a la referencia artificial: aquel punto de equilibrio factible hacia el cual el controlador lleva el sistema para garantizar la factibilidad del problema de control óptimo, para cada cambio de punto de operación.

En el caso del primer cambio de referencia  $T = 353,15$  K, que es una referencia no alcanzable por el sistema, el controlador estabiliza la planta en el punto de equilibrio admisible que minimiza la función de coste de offset.

Cabe además mencionar que los cálculos de las secuencias de control óptimas, realizados por medio de la función de optimización no lineal de Matlab, *fmincon*, se han ejecutado sin ningún tipo de problema y dentro del tiempo de muestreo de la planta, escogido de  $t_s = 60$  s. En particular, en el experimento presentado en la figura 8, el cálculo de la señal de control se ha realizado en un tiempo medio de  $t_c^{avg} = 0,397$  s, con un pico máximo de  $t_c^{max} = 3,117$  s y un mínimo de  $t_c^{min} = 0,075$  s.

### 5.3. Estudio comparativo

En esta sección se presenta un estudio comparativo del controlador propuesto, con el controlador presentado en (Magni y Scattolini, 2005).

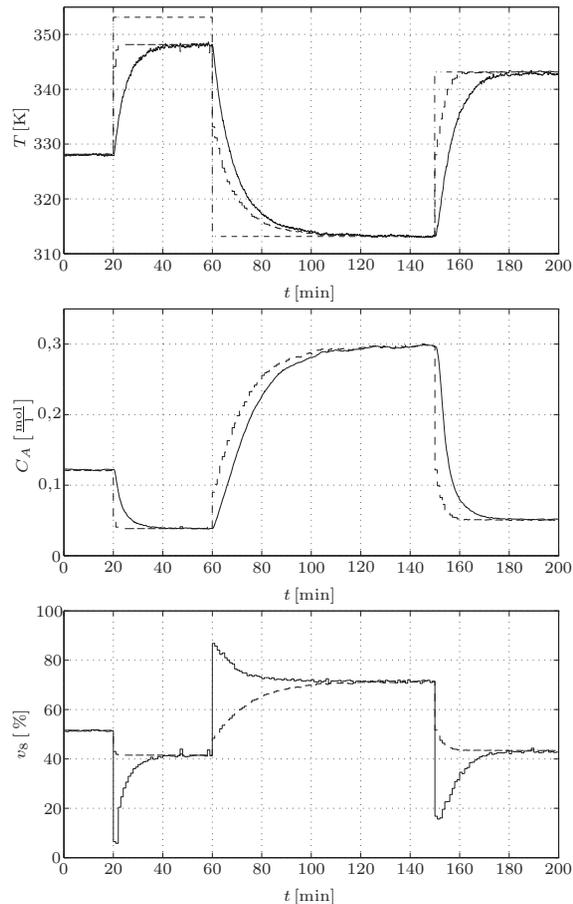


Figura 8: Experimento: aplicación del controlador para seguimiento a la planta piloto real. Arriba: temperatura (línea continua), referencia (línea de puntos y trazos) y referencia artificial (línea de trazos); centro: concentración (línea continua) y concentración artificial (línea de trazos); abajo: entrada (línea continua) y entrada artificial (línea de trazos).

La idea principal de dicho controlador es la de relacionar los ingredientes terminales con la señal de referencia, evitando de esta manera el cálculo del punto de equilibrio deseado. Dichos ingredientes terminales se calculan en función de la referencia y el seguimiento asintótico se garantiza gracias a la introducción de una acción integral ante el sistema.

El controlador presentado en (Magni y Scattolini, 2005) es para sistemas cuadrados, o sea con el mismo número de entradas y salidas. El controlador propuesto en el presente trabajo es perfectamente apto también para sistemas no cuadrados, escogiendo una determinada función de offset (Ferramosca et al., 2010).

Un segundo punto a tener en cuenta es que el controlador de (Magni y Scattolini, 2005) se formula para referencias asintóticamente constantes, pues los ingredientes se determinan en función de estas referencias. El controlador predictivo propuesto en el presente trabajo está pensado para referencias cambiantes en el tiempo. Por lo tanto las primeras dos propiedades enunciadas en la sección 3.1 no pueden ser garantizadas por (Magni y Scattolini, 2005).

Otra importante diferencia está en los dominios de atracción. La restricción terminal de (Magni y Scattolini, 2005) depende directamente de la referencia (véase (Magni y Scattolini, 2005, Remark 1)). La restricción terminal del controlador propuesto en el presente trabajo considera *cualquier* punto de equilibrio del sistema. Como consecuencia el controlador propuesto garantiza un mayor dominio de atracción que (Magni y Scattolini, 2005). Además se tenga en cuenta que, si se toma el controlador predictivo para seguimiento con restricción terminal de desigualdad (Ferramosca, 2011), como se hace en (Magni y Scattolini, 2005), el dominio resultaría ser aún mas grande.

Finalmente, nótese que ambos controladores no necesitan una capa previa de optimización de punto de equilibrio. La diferencia principal es que, en (Magni y Scattolini, 2005) se necesita conocer previamente la referencia para poder calcular los ingredientes terminales, mientras que en el controlador propuesto no, ya que la función de coste de offset cumple el papel de un optimizador de punto de equilibrio integrado en el controlador predictivo, y el punto de equilibrio óptimo relacionado a la referencia se calcula on-line en el mismo problema de optimización del controlador.

## 6. Conclusiones

En este artículo se ha presentado un controlador predictivo para seguimiento de referencia para sistemas no lineales sujeto a restricciones. Este controlador garantiza factibilidad ante cualquier cambio de referencia, gracias a su formulación que considera una referencia artificial como variable de decisión del problema de control óptimo. La convergencia a la referencia deseada se garantiza por medio de un funcional de coste modificado. La optimalidad se garantiza gracias a un coste de offset que minimiza la distancia entre la referencia artificial y la referencia real.

El controlador propuesto se ha aplicado al control de temperatura de una planta piloto de laboratorio que emula una reacción química exotérmica. La estabilidad se ha garantizado tomando una restricción terminal de igualdad que considera cualquier punto de equilibrio del sistema. Los resultados del experimento han confirmado los resultados teóricos: el controlador es capaz de seguir cualquier referencia, manteniendo la factibilidad del problema y garantizando la estabilidad.

## English Summary

### MPC for tracking of constrained nonlinear systems. Application to a pilot plant.

#### Abstract

This paper deals with the tracking problem for constrained nonlinear systems using a model predictive control (MPC) law. MPC provides a control law suitable for regulating constrained linear and nonlinear systems to a given target steady state. However, when the target operating point changes, the feasibility of the controller may be lost and the controller fails to track the

reference. Recently, a novel MPC for tracking constrained nonlinear systems has been presented (Ferramosca et al., 2009a). This is capable to steer the system to any reference, even in the case of changing references. In this paper, this controller is used for the real-time control of a chemical pilot plant. The obtained experimental results demonstrate that the MPC for tracking is suitable for the control of plants with nonlinear dynamics since it ensures stability and offset-free convergence in case of large changes in the reference even using short prediction horizons. Besides, in case of unreachable set points, the controller steers the system to the closest reachable equilibrium point.

#### Keywords:

Model predictive control, setpoint tracking, stability, nonlinear systems.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo del proyecto Europeo HD-MPC (FP7-ICT- 223854) y del Ministerio de Educación y Ciencia Español (contrato DPI2008-05818).

## Referencias

- Bemporad, A., Casavola, A., Mosca, E., 1997. Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (3), 340–349.
- Boyd, S., Vandenberghe, L., 2006. *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- Camacho, E. F., Bordons, C., 2004. *Model Predictive Control*, 2ª Edición. Springer-Verlag.
- Chisci, L., Zappa, G., 2003. Dual mode predictive tracking of piecewise constant references for constrained linear systems. *International Journal of Control* 76 (1), 61–72.
- Cueli, J. R., Bordons, C., 2008. Iterative nonlinear model predictive control. Stability, robustness and applications. *Control Engineering Practice* 16 (9), 1023–1034.
- Ferramosca, A., 2011. *Model predictive control for systems with changing setpoints*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, <http://fondosdigitales.us.es/tesis/autores/1537/>.
- Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., Camacho, E. F., 2009a. MPC for tracking constrained nonlinear systems. En: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai, China.
- Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., Camacho, E. F., 2009b. MPC for tracking with optimal closed-loop performance. *Automatica* 45 (8), 1975–1978.
- Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., Castaño, F., Camacho, E. F., 2011. Optimal MPC for tracking of constrained linear systems. *Int. J. of Systems Science* 42(8), 1265–1276.
- Ferramosca, A., Limon, D., González, A. H., Odloak, D., Camacho, E. F., 2010. MPC for tracking zone regions. *Journal of Process Control* 20, 506–516.
- Findeisen, R., Chen, H., Allgöwer, F., 2000. Nonlinear predictive control for setpoint families. En: *Proceedings of the 2000 American Control Conference*. Chicago, Illinois.
- Gilbert, E. G., Kolmanovsky, I., Tan, K. T., 1995. Discrete time reference governors and the nonlinear control of systems with state and control constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 5 (5), 487–504.
- Gruber, J. K., 2010. *Efficient and robust techniques for predictive control of nonlinear processes*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, <https://www.educacion.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do?fichero=17446>.
- Gruber, J. K., Bordons, C., 2007. Control predictivo no lineal basado en modelos de Volterra. Aplicación a una planta piloto. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 4 (3), 34–45.

- Gruber, J. K., Bordons, C., 2008. Control predictivo mín-máx de una planta piloto. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 5 (3), 37–47.
- Gruber, J. K., Ramirez, D. R., Alamo, T., Bordons, C., Camacho, E. F., 2009. Control of a pilot plant using QP based min-max predictive control. *Control Engineering Practice* 17 (11), 1358–1366.
- Hu, B., Linnemann, A., 2002. Towards infinite-horizon optimality in nonlinear model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (4), 679–682.
- Lee, J. H., Lee, K. S., Kim, W. C., 2000. Model-based iterative learning control with a quadratic criterion for time-varying linear systems. *Automatica* 36 (5), 641–657.
- Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., Camacho, E. F., 2008. MPC for tracking of piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica* 44 (7), 2382–2387.
- Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., Camacho, E. F., 2010. Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. *Journal of Process Control* 20 (3), 248–260.
- Magni, L., De Nicolao, G., Magnani, L., Scattolini, R., 2001. A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems. *Automatica* 37 (9), 1351–1362.
- Magni, L., De Nicolao, G., Scattolini, R., 2002. On robust tracking with nonlinear model predictive control. *International Journal of Control* 75 (6), 399–407.
- Magni, L., Scattolini, R., 2005. On the solution of the tracking problem for nonlinear systems with MPC. *International Journal of Systems Science* 36 (8), 477–484.
- Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V., Sokaert, P. O. M., 2000. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica* 36 (6), 789–814.
- Muske, K. R., Rawlings, J. B., 1993. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal* 39 (2), 262–287.
- Ortega, M. G., Rubio, F. R., 2004. Systematic design of weighting matrices for the  $H_\infty$  mixed sensitivity problem. *Journal of Process Control* 14 (1), 89–98.
- Pannocchia, G., 2004. Robust model predictive control with guaranteed setpoint tracking. *Journal of Process Control* 14 (8), 927–937.
- Pannocchia, G., Kerrigan, E. C., 2005. Offset-free receding horizon control of constrained linear systems. *AIChE Journal* 51 (12), 3134–3146.
- Ramirez, D. R., Camacho, E. F., Arahal, M. R., 2004. Implementation of min-max MPC using hinging hyperplanes. Application to a heat exchanger. *Control Engineering Practice* 12 (9), 1197–1205.
- Ramirez, D. R., Limon, D., Ortega, J. G., Camacho, E. F., 1999. Model based predictive control using genetic algorithms. Application to a pilot plant. En: *Proceedings of the 1999 European Control Conference*. Karlsruhe, Alemania.
- Rao, C. V., Rawlings, J. B., 1999. Steady states and constraints in model predictive control. *AIChE Journal* 45 (6), 1266–1278.
- Rawlings, J. B., Mayne, D. Q., 2009. *Model Predictive Control: Theory and Design*, 1ª Edición. Nob-Hill Publishing.
- Rossiter, J. A., Kouvaritakis, B., Gossner, J. R., 1996. Guaranteeing feasibility in constrained stable generalized predictive control. *IEE Proceedings Control Theory & Applications* 143 (5), 463–469.
- Santos, L. O., Afonso, P. A. F. N. A., Castro, J. A. A. M., Oliveira, N. M. C., Biegler, L. T., 2001. On-line implementation of nonlinear MPC: an experimental case study. *Control Engineering Practice* 9 (8), 847–857.
- Szeifert, F., Chovan, T., Nagy, L., 1995. Process dynamics and temperature control of fed-batch reactors. *Computers & Chemical Engineering* 19 (1), 447–452.

## Apéndice A. Demostración del Teorema 1

La demostración del teorema de estabilidad para el caso del controlador formulado con restricción terminal de desigualdad se encuentra en (Ferramosca et al., 2009a). La demostración para la formulación con restricción terminal de igualdad se encuentra en (Ferramosca, 2011) y se presenta a continuación.

**Demostración:** Sea  $x \in \mathcal{X}_N$  en el instante  $k$ . El valor óptimo del funcional de coste es  $V_N^0(x, y_t) = V_N(x, y_t; \mathbf{u}^0(x), y_s^0(x))$ , donde

$(\mathbf{u}^0(x), y_s^0(x))$  define la solución óptima de  $P_N(x, y_t)$  y

$$\mathbf{u}^0(x) = \{u^0(0; x), u^0(1; x), \dots, u^0(N-1; x)\}$$

Nótese que  $u^0(0; x) = \kappa_N(x, y_t)$ . La secuencia óptima de estados predichos, resultado de aplicar  $\mathbf{u}^0(x)$  es entonces

$$\mathbf{x}^0(x) = \{x^0(0; x), x^0(1; x), \dots, x^0(N-1; x), x^0(N; x)\}$$

donde  $x^0(0; x) = x$ ,  $x^0(1; x) = x^+$  y  $x^0(N; x) = x_s^0(x) = g_x(y_s^0(x))$ .

Siguiendo argumentos estándar en la literatura de MPC (Mayne et al., 2000; Rawlings y Mayne, 2009, Capítulo 2), se define el estado siguiente en el instante  $k+1$  como  $x^+ = f(x, \kappa_N(x, y_t))$  y se definen las siguientes secuencias:

$$\tilde{\mathbf{u}} \triangleq [u^0(1; x), \dots, u^0(N-1; x), u_s^0(x)]$$

$$\tilde{y}_s \triangleq y_s^0(x)$$

donde  $u_s^0(x) = g_u(y_s^0(x))$ . Es fácil deducir que  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{y}_s)$  es una solución factible del problema  $P_N(x^+)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{X}_N$  es un conjunto invariante admisible para el sistema en bucle cerrado, la ley de control es bien definida y las restricciones se cumplen.

La secuencia de estados debida a  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{y}_s)$  es

$$\tilde{\mathbf{x}} = \{x^0(1; x), x^0(2; x), \dots, x^0(N; x), x^0(N+1; x)\}$$

donde  $x^0(N; x) = x_s^0(x)$  y  $x^0(N+1; x) = f(x^0(N; x), u_s^0(x)) = x_s^0(x)$ . Por lo tanto,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \{x^0(1; x), x^0(2; x), \dots, x_s^0(x), x_s^0(x)\}$$

que es factible.

Se comparan ahora el coste óptimo  $V_N^0(x, y_t)$ , con el coste dado por  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{y}_s)$ ,  $\tilde{V}_N(x^+, y_t; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{y}_s)$ . Teniendo en cuenta la hipótesis 2 y usando el procedimiento estándar de la literatura de MPC (Mayne et al., 2000; Rawlings y Mayne, 2009, Capítulo 2), se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta V_N &= \tilde{V}_N(x^+, y_t; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{y}_s) - V_N^0(x, y_t) \\ &= -|x - x_s^0(x)|_Q^2 - |u^0(0; x) - u_s^0(x)|_R^2 \end{aligned}$$

Por optimalidad, se tiene que  $V_N^0(x^+, y_t) \leq \tilde{V}_N(x^+, y_t; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{y}_s)$  y entonces:

$$\begin{aligned} \Delta V_N^0 &= V_N^0(x^+, y_t) - V_N^0(x, y_t) \\ &\leq -|x - x_s^0(x)|_Q^2 - |u^0(0; x) - u_s^0(x)|_R^2 \\ &= -|x - x_s^0(x)|_Q^2 - |\kappa_N(x, y_t) - u_s^0(x)|_R^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el funcional de coste es definido positivo, se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(k) - x_s^0(x(k))| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |u(k) - u_s^0(x(k))| = 0$$

Gracias a la continuidad del modelo, se deduce que el sistema converge a un punto de equilibrio  $x_\infty$ , y este punto es tal que  $x_\infty = x_s^0(x_\infty) \in \mathcal{X}_s$ .

Utilizando el lema 1, se demuestra que  $(x_\infty, u_\infty)$  es el punto de equilibrio óptimo del sistema, i.e.  $(x_\infty, u_\infty) = (x_s^*, u_s^*)$ , donde  $x_s^* = g_x(y_s^*)$  y  $u_s^* = g_u(y_s^*)$ .

Finalmente, se demuestra que  $(x_s^*, u_s^*)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema en bucle cerrado: para todos  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, para todos  $|x(0) - x_s^*| \leq \delta$ , entonces  $|x(k) - x_s^*| \leq \epsilon$ .

Para demostrar este punto, se defina la función  $\Phi(x, y_t) = V_N^0(x, y_t) - V_O(y_s^* - y_t)$ . Está claro que  $\Phi(x_s^*, y_t) = 0$ . Además, dicha función es tal que  $\alpha_1(|x - x_s^*|) \leq \Phi(x, y_t) \leq \alpha_2(|x - x_s^*|)$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones  $\mathcal{K}_\infty$ . Eso se debe a que:

- $\Phi(x, y_t) \geq \alpha_l(|x - x_s^*|) + \alpha_o(|x_s^0 - x_s^*|)$ , donde  $\alpha_l$  es una función  $\mathcal{K}_\infty$  que acota el coste de etapa. Eso se debe a que el coste de etapa es una función definida positiva y a la definición del coste de offset  $V_O$  (hipótesis 2). Por lo tanto  $\Phi(x, y_t) \geq \alpha_1(|x - x_s^*| + |x_s^0 - x_s^*|) \geq \alpha_1(|x - x_s^*|)$ .
- Nótese que  $V_N^0(x, y_t) \leq V_N(x, y_s^*) + V_O(y_s^* - y_t)$ . Por la controlabilidad débil de  $x_s^*$  (hipótesis 2), existe una función  $\mathcal{K}_\infty$   $\alpha_2$  tal que  $V_N(x, y_s^*) \leq \alpha_2(|x - x_s^*|)$ . Por lo tanto  $\Phi(x, y_t) \leq \alpha_2(|x - x_s^*|)$ .

Entonces,  $\alpha_1(|x(k) - x_s^*|) \leq \Phi(x(k), y_t) \leq \Phi(x(0), y_t) \leq \alpha_2(|x - x_s^*|)$  y por lo tanto,  $|x(k) - x_s^*| \leq \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(|x(0) - x_s^*|)$ . Entonces, tomando  $\delta = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1(\epsilon)$ , se tiene que  $|x(k) - x_s^*| \leq \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\delta) \leq \epsilon$ , y eso demuestra la estabilidad asintótica de  $x_s^*$ .

Resumiendo, para todas condiciones iniciales  $x_0 \in \mathcal{X}_N$ , el sistema en bucle cerrado converge a un punto de equilibrio asintóticamente estable  $(x_s^*, u_s^*)$  y su dominio de atracción es  $\mathcal{X}_N$ . □

## Apéndice B. Lema técnico

**Lema 1.** Sea el sistema (1) sujeto a las restricciones (2). Se asuma que se cumpla la hipótesis 2. Sea dada una referencia  $y_t$  y se asuma que para un estado  $x$  la solución óptima del problema de optimización  $P_N(x, y_t)$  es  $x_s^0(x, y_t) = g_x(y_s^0(x, y_t))$  y  $u_s^0(x, y_t) = g_u(y_s^0(x, y_t))$ . Sea  $\tilde{y}_s \in \mathcal{Y}_s$  dado por

$$\tilde{y}_s \triangleq \arg \min_{y_s \in \mathcal{Y}_s} V_O(y_s - y_t)$$

Entonces  $x_s^0(x, y_t) = \tilde{x}_s$ ,  $u_s^0(x, y_t) = \tilde{u}_s$ ,  $y_s^0(x, y_t) = \tilde{y}_s$

**Demostración:** A continuación, la dependencia de la solución óptima de  $(x, y_t)$  se omite por claridad de exposición.

Sea  $(x_s^0, u_s^0, y_s^0)$  la solución óptima de  $P_N(x, y_t)$ . El coste óptimo será por lo tanto  $V_N^0(x, y_t) = V_O(y_s^0 - y_t)$ .

El lema se demuestra por contradicción. Sea  $y_s^0 \neq \tilde{y}_s$ . Entonces, existe un  $\beta > 0$  tal que para todos  $\beta \in [\beta, 1)$ , se puede definir  $\hat{y}_s$  como

$$\hat{y}_s = \beta y_s^0 + (1 - \beta)\tilde{y}_s$$

Asumiendo  $\mathcal{Y}_s$  convexo,  $\hat{y}_s$  es un punto de equilibrio admisible. Por lo tanto, definiendo la secuencia de acciones de control  $\mathbf{u} = \{\hat{u}_s, \dots, \hat{u}_s\}$  como aquella secuencia que lleva el sistema de  $y_s^0$  a  $\hat{y}_s$  de forma admisible, se infiere que  $(\mathbf{u}, \hat{y}_s)$  es una solución factible del problema  $P_N(x_s^0, y_t)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} V_N^0(x_s^0, y_t) &= V_O(y_s^0 - y_t) \\ &\leq V_N(x_s^0, y_t; \mathbf{u}, \hat{y}_s) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} |x(j) - \hat{x}_s|_Q^2 + |u(j) - \hat{u}_s|_R^2 + V_O(\hat{y}_s - y_t) \end{aligned}$$

Obsérvese que, por las hipótesis 2 y el hecho que el coste de etapa es definido positivo

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} |x(j) - \hat{x}_s|_Q^2 + |u(j) - \hat{u}_s|_R^2 &\leq \sum_{j=0}^{N-1} |x(j) - \hat{x}_s|_Q^2 + \gamma(|x_s^0 - \hat{x}_s|^2) \\ &= |x(0) - \hat{x}_s|_Q^2 + |x(1) - \hat{x}_s|_Q^2 + \dots \\ &\quad + |x(N-1) - \hat{x}_s|_Q^2 + \gamma(|x_s^0 - \hat{x}_s|^2) \\ &= |x(0) - \hat{x}_s|_Q^2 \\ &\quad + |f(x(0), \hat{u}_s) - f(\hat{x}_s, \hat{u}_s)|_Q^2 + \dots \\ &\quad + |f(x(N-2), \hat{u}_s) - f(\hat{x}_s, \hat{u}_s)|_Q^2 \\ &\quad + \gamma(|x_s^0 - \hat{x}_s|^2) \\ &\leq |x(0) - \hat{x}_s|_Q^2 + L_f^2 |x(0) - \hat{x}_s|_Q^2 + \dots \\ &\quad + L_f^{2(N-1)} |x(0) - \hat{x}_s|_Q^2 + \gamma(|x_s^0 - \hat{x}_s|^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando  $c = 1 + L_f^2 + \dots + L_f^{2(N-1)}$  se tiene que

$$\begin{aligned} V_N^0(x_s^0, y_t) &\leq c|x_s^0 - \hat{x}_s|^2 + V_O(\hat{y}_s - y_t) \\ &\leq L_g^2 c(1 - \beta)^2 |y_s^0 - \tilde{y}_s|^2 + V_O(\hat{y}_s - y_t) \end{aligned}$$

donde  $L_g$  es la constante de Lipshitz de  $g_x(\cdot)$ .

Se defina  $W(x_s^0, y_t, \beta) \triangleq L_g^2 c(1 - \beta)^2 |y_s^0 - \tilde{y}_s|^2 + V_O(\hat{y}_s - y_t)$ . Esta función es tal que  $W(x_s^0, y_t, \beta) = V_N^0(x_s^0, y_t)$  para  $\beta = 1$ . Tomando la derivada parcial de  $W$  en  $\beta$  se tiene que

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = -2L_g^2 c(1 - \beta) |y_s^0 - \tilde{y}_s|^2 + g'(y_s^0 - \tilde{y}_s)$$

donde  $g' \in \partial V_O(\hat{y}_s - y_t)$ , definiendo  $\partial V_O(\hat{y}_s - y_t)$  como el subdiferencial de  $V_O(\hat{y}_s - y_t)$ . Evaluando esta derivada parcial en  $\beta = 1$  se tiene que:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \beta} \right|_{\beta=1} = g^0(y_s^0 - \tilde{y}_s)$$

donde  $g^0 \in \partial V_O(y_s^0 - y_t)$ , definiendo  $\partial V_O(y_s^0 - y_t)$  como el subdiferencial de  $V_O(y_s^0 - y_t)$ . Teniendo en cuenta que  $V_O$  es convexa, y por lo tanto subdiferenciable (Boyd y Vandenberghe, 2006), se infiere que para todos  $y_s^0$  y  $\tilde{y}_s$

$$g^0(y_s^0 - \tilde{y}_s) \geq V_O(y_s^0 - y_t) - V_O(\tilde{y}_s - y_t)$$

Teniendo en cuenta que  $y_s^0 \neq \tilde{y}_s$ ,  $V_O(y_s^0 - y_t) - V_O(\tilde{y}_s - y_t) > 0$ , se deduce que

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \beta} \right|_{\beta=1} \geq V_O(y_s^0 - y_t) - V_O(\tilde{y}_s - y_t) > 0$$

Eso quiere decir que existe un  $\beta \in [\beta, 1)$  tal que el valor de  $W(x_s^0, y_t, \beta)$  es más pequeño que el valor de  $W(x_s^0, y_t, \beta)$  para  $\beta = 1$ , que es igual a  $V_N^0(x_s^0, y_t)$ .

Este hecho contradice la optimalidad de la solución, y por lo tanto el lema queda demostrado. □