

Control lineal robusto de sistemas no lineales diferencialmente planos

Hebertt Sira-Ramirez* Alberto Luviano-Juárez*
John Cortés-Romero*,**

* *Cinvestav IPN, Av. IPN No. 2508, Departamento de Ingeniería Eléctrica,
Sección de Mecatrónica, México D.F. (e-mail:
{hsira,aluviano}@cinvestav.mx}*

** *Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería,
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica. Carrera 30 No. 45-03
Bogotá, Colombia (e-mail: jacortesr@unal.edu.co)*

Resumen

En este trabajo se proponen controladores basados en observadores lineales para el control robusto de una clase amplia de sistemas no lineales conocidos como sistemas *diferencialmente planos*, sean estos monovariantes o multivariantes. Se establece primeramente el modelo dinámico entrada - salida plana, simplificándolo a un modelo de carácter no fenomenológico que solamente considera como elementos claves en el diseño del controlador el orden de integración del sistema y el factor de ganancia de entrada, en el caso monovariante, y, los órdenes de los subsistemas de integración de Kronecker y la matriz de ganancias del vector de entradas en el caso multivariante. El resto de las no linealidades, dependientes del estado o de naturaleza exógena, son consideradas, en general, como perturbaciones desconocidas pero acotadas que toman valores en el tiempo. Se demuestra que estas perturbaciones son algebraicamente observables, permitiendo su determinación aproximada mediante observadores lineales de orden arbitrario. Estos observadores, llamados observadores GPI, incluyen modelos internos que representan polinomios en el tiempo, cuya actualización es de índole automática, permitiendo aproximaciones arbitrariamente cercanas a las perturbaciones desconocidas. El diseño del controlador se reduce entonces a lograr la cancelación de las perturbaciones aditivas a la vez de imponer una dinámica lineal en lazo cerrado mediante realimentación de estados estimados, los cuales se obtienen directamente del mismo observador lineal propuesto. Se presenta un ejemplo de simulación que considera un sistema físico no lineal de complejidad reconocida. También se incluyen resultados experimentales sobre dos prototipos de laboratorio.

Copyright ©2011 CEA.

Palabras Clave: Rechazo a perturbaciones, Realimentación lineal de salida, Sistemas linealizables, Observadores, Sistemas no lineales.

1. INTRODUCCION

Existen varios enfoques que tratan el problema de cancelación de perturbaciones no estructuradas por medio de técnicas de estimación asintótica. El excelente trabajo del profesor C.D. Johnson, bajo el nombre de *Control basado en Acomodación de Perturbaciones* (CAP), (ver Johnson (1971)), constituye una de las referencias obligadas dentro de esta área. Los aspectos teóricos y prácticos del CAP han estado evolucionando activamente, como se evidencia en el trabajo de revisión de Johnson (2008). Esta teoría goza de extensiones a sistemas en tiempo discreto como se muestra en el capítulo de libro de Johnson (1982) y a sistemas multivariantes. En un trabajo reciente, desarrollado por Johnson (1982), se trata el problema de desacoplar dos sistemas lineales, acoplados de manera no-lineal, utilizando la teoría de CAP. En el área de sistemas de potencia, el trabajo de Mohadjer y Johnson (1983), realiza una aplicación de la acomodación de perturbaciones, a la interconexión de sistemas de potencia desde la perspectiva del control de la frecuencia.

Una tendencia estrechamente relacionada con la técnica CAP, está representada por los esfuerzos del fallecido profesor Jingqing Han, que se resumen en el documento póstumo Han (2009), y que se conoce como: *Estimación y Rechazo Activo de Perturbaciones* (ERAP). Los numerosos trabajos originales del profesor Han, que incluyen implementaciones de laboratorio y aplicaciones industriales, no han sido traducidos y sus contribuciones seminales permanecen escritas en chino (ver las referencias en Han (2009)). Aunque la idea principal de la estimación de perturbaciones basada en observador, y su subsecuente cancelación por medio de una ley de control, es similar al esquema propuesto por el CAP; el énfasis del ERAP recae, principalmente, en la estimación de perturbaciones por medio de observadores *no lineales*, y desarrollos adicionales relacionados con: cálculo eficiente de derivadas con respecto al tiempo, cálculo del grado relativo y extensiones no lineales de controles PID. El trabajo y la inspiración del profesor Han, han influido en desarrollos interesantes y aplicaciones concretas hechas por el profesor Gao y sus colegas (ver Gao *et al.* (2001), Gao (2006)). De igual manera, se nota esta influencia en el

trabajo de Sun y Gao (2005) y en el artículo de Sun (2007)). En un artículo reciente de Fliess y Join (2008), se propone una idea cercanamente relacionada al control CAP y ERAP, distinguida como: *Controladores PID Inteligentes* (CPIDI). La idea principal de los CPIDI hace uso de los Métodos Algebraicos considerando modelos no fenomenológicos que substituyen la planta por una de primer orden, o de segundo orden como máximo. El aspecto interesante de este método reside en el uso de manipulaciones algebraicas apropiadas para cancelar localmente términos no-lineales desconocidos, propios de la dinámica del sistema, para luego identificar, eficientemente, ganancias variantes en el tiempo asociadas al control, como si éstas fuesen ganancias seccionalmente constantes (ver Fliess *et al.* (2008)). En el trabajo de Sira-Ramírez y Fliess (2004) se presenta un método netamente algebraico para el control del generador sincrónico.

En este artículo, se presenta un método de diseño de controladores lineales robustos para sistemas no lineales perturbados que hace uso de estimaciones suficientemente precisas de términos aditivos, tanto endógenos como exógenos, de la dinámica existente entre la entrada del sistema y la salida plana del mismo. Estas estimaciones se llevan a cabo mediante observadores lineales llamados: observadores Proporcional-Integrales Generalizados (que llamaremos de ahora en adelante: observadores GPI). El método se aplica, en forma natural, a sistemas no lineales diferencialmente planos, los cuales constituyen una clase prominente y frecuente de los sistemas no lineales (véase Sira-Ramírez y Agrawal (2004), Lévine (2009)). Los observadores GPI representan la contraparte dual de los controladores GPI desarrollados en Fliess *et al.* (2002).

Los observadores GPI incluyen, de manera natural y embebida, un modelo polinomial en el tiempo, de actualización automática, de las perturbaciones no lineales dependientes del estado y de aquellas perturbaciones exógenas sin estructura especial alguna. Las estimaciones provistas por el observador se usan en el controlador para facilitar su cancelación aproximada, en línea, mientras, de manera simultánea, se estiman las variables de fase relacionadas con las salidas planas medidas. Sin embargo, el esquema constituye un método aproximado, ya que está sujeto a la evolución lineal y perturbada del error de reconstrucción de las variables de fase y de la perturbación. Esta dinámica lineal perturbada se ajusta mediante ganancias suficientemente altas, lo cual hace el esquema sensible a los ruidos de planta y de medición. Sin embargo, los efectos nocivos de las ganancias altas pueden atenuarse significativamente mediante el uso de pre-filtraje de la salida y la utilización de funciones de saturación (“embragues”) apropiadas para limitar el fenómeno del *pico impulsivo* (ver Sussman y Kokotovic (1991)). La estimación en línea de estados y perturbaciones, de naturaleza aproximada, se combina con una ley de control lineal, que cancela de manera efectiva las perturbaciones y no linealidades desconocidas e impone una dinámica deseada en lazo cerrado sobre las cadenas de integración remanentes después de las cancelaciones de ganancia y de perturbación aditiva. Las principales diferencias de nuestro enfoque, con respecto al CAP y al ERAP, radican en: 1) No se discrimina entre perturbaciones exógenas (externas) y endógenas (dependientes del estado) asociadas al modelo de entrada-salida no lineal. Estas perturbaciones están agrupadas, en una señal variante en el tiempo que sólo requiere de estimación lineal para su evaluación suficientemente precisa. Nótese que las no linealidades de la planta generan funciones en el tiempo que son *exógenas*

para cualquier observador dinámico y, por lo tanto, evitan naturalmente los “lazos algebraicos”. 2) Se hace énfasis en las posibilidades intrínsecas que tienen los *sistemas diferencialmente planos* para la estimación lineal de perturbaciones aditivas y su cancelación por medio de controladores igualmente lineales (para el concepto de planitud se recomienda revisar el artículo de Fliess *et al.* (1995) y el libro de Sira-Ramírez y Agrawal (2004)).

Este artículo se organiza de la siguiente manera: La sección 2 presenta una introducción al control lineal de sistemas no lineales diferencialmente planos basados en observadores GPI de alta ganancia y controladores lineales. La sección 3 considera el problema de controlar el ángulo de desviación de un generador sincrónico trifásico por medio de la combinación del control con observación de tipo lineal. Se realiza una prueba de robustez bajo un ensayo de corto circuito. En la sección 4 se describe un ejemplo ilustrativo, que incluye resultados experimentales, concerniente a una tarea de seguimiento de trayectoria en el control de un robot móvil con restricciones no holónomas. Este sistema, no lineal y multivariable, exhibe una matriz de ganancia de entrada dependiente de las variables de fase asociadas a las salidas planas. En este caso, se aplicó a los observadores de alta ganancia inyecciones integrales de la salida plana. Esta acción representa un prefiltraje adecuado destinado a reducir los efectos nocivos del ruido de medición. La sección 5 presenta igualmente resultados experimentales, ilustrativos de la metodología del control lineal de sistemas no lineales, sobre el problema de seguimiento de salida en un circuito caótico de Chua sobre el cual se define artificialmente una variable de control apropiada. Demostramos que, en particular, la técnica de control propuesta permite convertir un circuito caótico en un oscilador armónico. La última sección contiene las conclusiones y posibles trabajos a ser considerados en el futuro. El artículo incluye un Apéndice donde se expone y se demuestra el resultado principal que, sobre sistemas lineales perturbados, proporciona la base matemática a la metodología de diseño de control robusto aquí expuesta.

2. CONTROL LINEAL BASADO EN OBSERVADOR GPI DE SISTEMAS NO LINEALES

Considere el siguiente sistema no lineal, perturbado y suave, de una entrada y una salida,

$$y^{(n)} = \psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) + \phi(t, y)u + \zeta(t) \quad (1)$$

El sistema no perturbado ($\zeta(t) \equiv 0$) es *diferencialmente plano*, o, simplemente, *plano*, dado que todas las variables del sistema, incluyendo u , se pueden expresar en términos de funciones diferenciales de la salida plana y , i.e., funciones de y y de un número finito de sus derivadas temporales.

Se supone que la perturbación exógena, $\zeta(t)$, es uniformemente, absolutamente, acotada, es decir, es una función escalar L_∞ . En forma similar, se supone que para todas las soluciones acotadas, $y(t)$, de (1), obtenidas por medio de entradas de control, u , suficientemente suaves y acotadas uniformemente, la perturbación aditiva endógena, $\psi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, vista como una señal variante en el tiempo, es uniformemente, absolutamente, acotada.

También se supone que la función no lineal de ganancia $\phi(t, y(t))$ es L_∞ y suficientemente alejada de cero, i.e., existe una constante estrictamente positiva, μ , tal que

$$\inf_t |\phi(t, y(t))| \geq \mu > 0 \quad (2)$$

para todas las soluciones acotadas y suaves, $y(t)$, de (1) obtenidas mediante una entrada suave y acotada de la señal de control u . Esta suposición, es natural para evadir las singularidades de la ganancia de entrada y la falta de controlabilidad temporal del sistema. La planitud del sistema, en particular, permite diseñar trayectorias de referencia de las salidas planas, $y^*(t)$, que garantizan, al menos nominalmente, esta suposición. Aunque se pueden extender los resultados para funciones cuyas ganancias, ϕ , sean dependientes de derivadas de $y(t)$ con respecto al tiempo, consideramos la ganancia, ϕ , perfectamente conocida y función explícita del tiempo y de la salida plana, y . Esta suposición hace que nuestros resultados sean, en general, semi-globales puesto que, en general, existen condiciones iniciales que pudiesen violar la hipótesis (2). Cuando $\phi(t, y(t))$ es constante, los resultados son ciertamente globales.

Hacemos la siguiente formulación del problema:

Dada una trayectoria de referencia, $y^*(t)$, para la salida plana, $y(t)$, tal que (2) es válida, proponer una ley de control lineal para el sistema (1) de tal forma que se tenga una convergencia, suficientemente cercana, de la salida plana, $y(t)$, hacia la señal de referencia $y^*(t)$, a pesar de los efectos de la entrada desconocida de perturbación endógena $\psi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ y de la entrada de perturbación exógena, $\zeta(t)$. La convergencia aproximada a que se alude implica que el error de seguimiento, $e(t) = y - y^*(t)$, y sus primeras, n , derivadas con respecto al tiempo, convergen asintóticamente, en forma predominantemente exponencial, a una vecindad, tan pequeña como se requiera, del origen en el espacio de fases del error de seguimiento.

La solución del problema se puede llevar a cabo en un contexto totalmente lineal, si se considera el modelo no lineal (1) como un sistema *lineal* perturbado, como el que se muestra a continuación:

$$y^{(n)} = v + \xi(t) \quad (3)$$

donde $v = \phi(t, y)u$ es perfectamente conocida, y $\xi(t) = \psi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) + \zeta(t)$ es una función del tiempo completamente desconocida pero uniformemente, absolutamente, acotada.

Considere el siguiente resultado preliminar:

Proposición 1. La función de perturbaciones desconocidas, $\xi(t)$, en la dinámica simplificada del sistema (3), es algebraicamente *observable*, en el sentido de Diop y Fliess (1991).

Demostración. La prueba de este hecho es inmediata después de escribir (3) como

$$\xi(t) = y^{(n)} - v = y^{(n)} - \phi(t, y)u \quad (4)$$

i.e., $\xi(t)$ puede expresarse en términos de la entrada de control u , de la salida, y , y de un número finito de sus derivadas. Por lo tanto, $\xi(t)$ es algebraicamente observable. ■

Nota 2. Esto significa, en particular, que si $\xi(t)$ se puede expresar mediante un modelo polinomial aproximado, formalmente válido tan solo localmente, pero sobre el cual se puede imponer una *actualización automática*, pudiéndose lograr entonces una estimación, uniformemente aproximada, de $\xi(t)$ por medio de un observador lineal. El modelo polinomial de la perturbación, $\xi(t)$, está descrito por una ecuación diferencial lineal

homogénea cuyo orden excede, al menos en una unidad, al grado del polinomio que por hipótesis aproxima dicha perturbación. Incorporamos posteriormente este modelo lineal a la descripción del sistema (3) como un *modelo interno de la perturbación* y se diseña entonces un observador que adopta este modelo polinomial como parte de la dinámica del observador. Finalmente, la forma de hacer que el modelo polinomial de la perturbación variante en el tiempo sea de actualización automática y, por ende, uniformemente válido aunque constituya un modelo aproximado, es inducir a la dinámica aumentada¹ del error de estimación de la salida inyectada a exhibir un comportamiento predominantemente lineal con un espectro ubicado suficientemente lejos del eje imaginario del plano complejo. Esto hace que el error de estimación de la perturbación variante en el tiempo se encuentre confinado a una vecindad suficientemente pequeña alrededor del origen del espacio de fase del error de estimación.

Suponemos que la entrada de perturbación, $\xi(t)$, puede modelarse localmente como un polinomio en el tiempo, o polinomio de Taylor, z_1 , de grado $p-1$ más un término residual, $r(t)$, i.e.,

$$\xi(t) = z_1 + r(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{p-1} t^{p-1} + r(t), \quad \forall t \quad (5)$$

El modelo polinomial en el tiempo, z_1 , es invariante con respecto a traslaciones finitas en el tiempo y satisface trivialmente la ecuación diferencial homogénea, $z_1^{(p)} = 0$. Decimos que z_1 define una familia de polinomios de Taylor de grado $p-1$ a coeficientes reales arbitrarios. Consideramos a z_1 como el *modelo interno* de la perturbación aditiva desconocida representado localmente por $z_1^{(p)} = 0$ (ver Johnson (1971)).

El modelo de la perturbación adquiere la característica de ser de actualización automática cuando se incorpora como parte de un observador lineal asintótico cuyo error de estimación es forzado a converger, uniformemente, a una pequeña vecindad de cero. En consecuencia, podemos suponer, de manera confiable, que la función residual, $r(t)$, y sus derivadas con respecto al tiempo $r^{(j)}(t)$, se tornan uniformemente absolutamente acotadas y son, también, de actualización automática. Para precisar esto, designamos mediante, y_j , a una estimación de $y^{(j-1)}$ para $j = 1, \dots, n$. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3. El control basado en un observador GPI:

$$u = \frac{1}{\phi(t, y)} \left[[y^*(t)]^{(n)} - \sum_{j=0}^{n-1} (\kappa_j [y_{j+1} - (y^*(t))^{(j)}]) - \hat{\xi}(t) \right]$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}(t) &= z_1 \\ \dot{y}_1 &= y_2 + \lambda_{p+n-1}(y - y_1) \\ \dot{y}_2 &= y_3 + \lambda_{p+n-2}(y - y_1) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= v + z_1 + \lambda_p(y - y_1) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_{p-1}(y - y_1) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6)$$

¹ Aumentada ciertamente, gracias al efecto de la inclusión en el observador del modelo interno, de tipo polinomial, de la perturbación agregada.

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \dot{z}_{p-1} &= z_p + \lambda_1(y - y_1) \\ \dot{z}_p &= \lambda_0(y - y_1) \end{aligned}$$

lleva el error de seguimiento de las variables de fase, $e_y^{(k)} = y^{(k)} - [y^*(t)]^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, asintóticamente y exponencialmente a una vecindad suficientemente pequeña del origen en el espacio de estado del error de seguimiento. La vecindad puede ser tan pequeña como se desee de acuerdo a una selección apropiada de los parámetros de ganancia del controlador $\{\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1}\}$. Más aún, los errores de estimación: $\tilde{e}^{(i)} = y^{(i)} - y_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$ y los errores de estimación de las variables de fase de la perturbación: $z_j - \xi^{(j-1)}(t)$, $j = 1, \dots, p$ convergen asintóticamente y exponencialmente, a una vecindad pequeña del origen del error de reconstrucción de estado, la cual puede ser suficientemente pequeña gracias a la selección adecuada de los parámetros, $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{p+n-1}\}$.

Demostración. La prueba está basada en el hecho que el error de estimación, \tilde{e} , cumple la siguiente ecuación diferencial lineal perturbada

$$\tilde{e}^{(p+n)} + \lambda_{p+n-1}\tilde{e}^{(p+n-1)} + \dots + \lambda_0\tilde{e} = r^{(p)}(t) \quad (7)$$

Ya que $r^{(p)}(t)$, por hipótesis, es uniformemente, absolutamente acotada, entonces existen coeficientes, λ_k , tales que \tilde{e} converge a una vecindad pequeña de cero siempre que las raíces del polinomio característico, asociado en la variable compleja s :

$$s^{p+n} + \lambda_{p+n-1}s^{p+n-1} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0 \quad (8)$$

estén confinados suficientemente lejos del eje imaginario en el semiplano izquierdo del plano complejo. En la medida que estas raíces se alejan del eje imaginario del plano complejo, más pequeña es la vecindad del origen en el espacio de estado del error de estimación, donde el error de estimación, \tilde{e} , se mantiene acotado (ver Apéndice y Kailath (1979)). Claramente, si \tilde{e} , y sus derivadas con respecto al tiempo, convergen a una vecindad del origen, entonces, $z_j - \xi^{(j-1)}$, $j = 1, 2, \dots$, también convergen a una vecindad pequeña de origen.

Sea $l(\tilde{e}, \dot{\tilde{e}}, \dots)$ una función lineal del error de estimación \tilde{e} y sus derivadas dada por:

$$l(\tilde{e}, \dot{\tilde{e}}, \dots, \tilde{e}^{(n-1)}) = \sum_{j=0}^{n-1} k_j \tilde{e}^{(j)} \quad (9)$$

El error de seguimiento, $e_y = y - y^*(t)$, evoluciona de acuerdo a la siguiente dinámica lineal perturbada:

$$e_y^{(n)} + \kappa_{n-1}e_y^{(n-1)} + \dots + \kappa_0e_y = \xi(t) - \hat{\xi}(t) - l(t, \tilde{e}, \dot{\tilde{e}}, \dots) \quad (10)$$

escogiendo los coeficientes del controlador, $\{\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1}\}$, tales que el polinomio característico asociado,

$$s^n + \kappa_{n-1}s^{n-1} + \dots + \kappa_0 \quad (11)$$

exhiba sus raíces suficientemente alejadas del eje imaginario en el lado izquierdo del plano complejo, se garantiza entonces que el error de seguimiento y sus derivadas en el tiempo, convergen asintóticamente, exponencialmente a una vecindad del origen del espacio de fases del error de seguimiento. Nótese que, de

acuerdo al funcionamiento rápido inducido sobre el observador, el miembro derecho de (10) está representado por una señal que es absolutamente y uniformemente acotada, que, además, termina evolucionando en una vecindad pequeña del origen. Por esta razón, las raíces de (11) pueden ser ubicadas un tanto menos alejadas del eje imaginario del plano complejo que las correspondientes de (8). Una prueba más detallada de este teorema se encuentra en el artículo Luviano-Juarez *et al.* (2010) (Ver también el Apéndice). ■

Nota 4. El observador GPI propuesto en (6) es un observador de alta ganancia, el cual está propenso a exhibir fenómenos de *picos* impulsivos, o sobre-picos, en el momento inicial (Sussman y Kokotovic (1991)). Se puede habilitar de manera gradual y conveniente la inyección al controlador de las estimaciones generadas por el observador, a fin de evitar los efectos de estos comportamientos impulsivos. Igualmente, y dado que el controlador propuesto tiene características de alta ganancia, se puede disminuir a cero la amplitud de la señal de referencia de salida en el instante inicial y gradualmente liberarla, o habilitarla, hasta su valor total. Esto se logra por medio de una función suave que sirve de factor de interpolación, o de saturación, entre el valor inicial: cero, y el valor final: la unidad, durante un período de tiempo pequeño, $[0, \epsilon]$. En lo sucesivo, designamos estas funciones suaves de habilitación mediante $s_f(t) \in [0, 1]$ y las definimos de la siguiente manera, (no única):

$$s_f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > \epsilon \\ \text{sen}^q\left(\frac{\pi t}{2\epsilon}\right) & \text{para } t \leq \epsilon \end{cases} \quad (12)$$

donde q es una constante, par, positiva, que se selecciona arbitrariamente.

2.1 Observador GPI con inyección integral

Sea $\xi(t)$ una señal medible, con integral iterada de orden m uniformemente absolutamente acotada. Supóngase que se requiere calcular, con algún propósito específico de control u observación, las primeras derivadas respecto al tiempo de la función, $\xi(t)$.

Se dice que una señal, $\rho_1(t)$, converge a una vecindad de $\xi(t)$, siempre que la señal de error $\xi(t) - \rho_1(t)$ está uniformemente, absolutamente, acotada dentro de una vecindad pequeña del origen.

La siguiente proposición motiva el diseño de un observador tipo GPI, para la estimación de derivadas respecto al tiempo de una señal, $\xi(t)$, donde $\xi(t)$ esté posiblemente afectada por procesos estocásticos de media cero, y de características estadísticas desconocidas. Para lograr suavizar los efectos del ruido en el cálculo en línea de las derivadas temporales, se realiza una doble integración de la señal medida, $\xi(t)$; así, suponiendo que la segunda integral de $\xi(t)$ es uniformemente absolutamente acotada (i.e., $m = 2$), se tiene:

Proposición 5. Considere el siguiente sistema perturbado constituido por una cadena de dos integradores, donde la entrada $\xi(t)$, está afectada por ruidos de medición (de media cero) que satisfacen las condiciones anteriormente descritas:

$$\dot{y}_0 = y_1, \quad \dot{y}_1 = \xi(t) \quad (13)$$

Considere el siguiente observador de (13), del tipo GPI, con inyección integral de salida que incluye, adicionalmente, un

modelo interno basado en polinomios del tiempo de grado, r , para la función $\xi(t)$ y que se expresa mediante la variable ρ_1 :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_0 &= \hat{y}_1 + \lambda_{r+1}(y_0 - \hat{y}_0) \\ \dot{\hat{y}}_1 &= \rho_1 + \lambda_r(y_0 - \hat{y}_0) \\ \dot{\rho}_1 &= \rho_2 + \lambda_{r-1}(y_0 - \hat{y}_0) \\ &\vdots \\ \dot{\rho}_r &= \lambda_0(y_0 - \hat{y}_0)\end{aligned}\quad (14)$$

Entonces, las variables del observador: $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$, respectivamente, convergen de forma asintótica hacia una vecindad reducida de la entrada de perturbación, $\xi(t)$, y sus correspondientes derivadas respecto al tiempo $\dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t), \dots$, siempre y cuando las ganancias del observador $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{r+1}\}$, sean tales que las raíces del polinomio en la variable compleja s ,

$$P(s) = s^{r+2} + \lambda_{r+1}s^{r+1} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0 \quad (15)$$

estén ubicadas en el semiplano izquierdo del plano complejo, alejadas convenientemente del eje imaginario.

Demostración. Defínase el error de inyección de la doble integral de la entrada como: $\varepsilon = y_0 - \hat{y}_0$. La dinámica del error de inyección integral está descrita por la siguiente ecuación diferencial lineal perturbada

$$\varepsilon^{(r+2)} + \lambda_{r+1}\varepsilon^{(r+1)} + \dots + \lambda_1\dot{\varepsilon} + \lambda_0\varepsilon = \xi^{(r)}(t) \quad (16)$$

Seleccionando los parámetros del observador $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}$, de tal forma que el polinomio (15) sea Hurwitz, entonces, de acuerdo a los resultados dados para las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales perturbadas de alta ganancia, el error de inyección ε y sus correspondientes derivadas con respecto al tiempo están uniformemente acotados por una pequeña vecindad del origen del espacio de fase del error de reconstrucción, cuyo radio de contención depende, fundamentalmente, de la parte real más pequeña de todos los valores propios asociados a la dinámica lineal dominante en lazo cerrado (ver Luviano-Juarez *et al.* (2010), Fliess y Rudolph (1997) y también el Apéndice). ■

3. CONTROL DE UN GENERADOR SINCRÓNICO

En esta sección, se considera el control lineal de seguimiento de trayectorias de la desviación angular para un generador sincrónico mediante el uso del estimador de perturbación dependiente del estado, empleando observadores GPI.

3.1 Modelo de un generador sincrónico simple

Considérese el modelo de un generador sincrónico, conectado a un "bus infinito", con un capacitor en serie conectado por medio de un puente de tiristores (ver Hingorani y Gyugyi (2000)),

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= P_m - b_1x_2 - b_2x_3\text{sen}(x_1) \\ \dot{x}_3 &= b_3(-x_3 + x_3^*(t) + u + \zeta(t))\end{aligned}\quad (17)$$

donde x_1 es el ángulo de carga, considerado como la salida medida. La variable x_2 es la desviación de la velocidad, síncrona,

nominal en el eje, mientras x_3 define la admitancia del sistema. La entrada de control u , se interpreta, usualmente, como una cantidad relacionada con el ángulo de disparo del conmutador. $\zeta(t)$ es una entrada de perturbación externa de naturaleza desconocida. El punto de equilibrio estático del sistema, el cual puede ser parametrizado en términos de la posición de equilibrio de la desviación angular \bar{x}_1 , está dado por,

$$x_1 = \bar{x}_1, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = \bar{x}_3^*(t) = \frac{P_m}{b_2\text{sen}(\bar{x}_1)} \quad (18)$$

Suponemos que los parámetros del sistema, b_2 y b_3 son conocidos. Las cantidades constantes P_m, b_1 y la cantidad variante en el tiempo $x_3^*(t)$, son considerados como totalmente desconocidos.

3.2 Formulación del problema

Se desea que la desviación angular de carga $y = x_1$, siga una trayectoria de referencia dada, acotada, y alejada de cero, $y^*(t) = x_1^*(t)$, independientemente de los parámetros desconocidos del sistema, y a pesar de posibles entradas de perturbación externas (tales como la ocurrencia de un corto circuito en el bus trifásico, que establecen, temporalmente, potencias mecánicas, P_m , de valor cero), además de otras entradas de perturbación desconocidas no modeladas contempladas en $\zeta(t)$.

3.3 Resultados principales

El sistema libre de perturbaciones (17) es *plano*, siendo la salida plana, $y = x_1$. En efecto, todas las variables del sistema se pueden parametrizar en términos de, y , y un número finito de sus derivadas. Se tiene:

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ x_3 &= \frac{P_m - b_1\dot{y} - \ddot{y}}{b_2\text{sen}(y)} \\ u &= -\frac{b_1\ddot{y} + y^{(3)}}{b_3b_2\text{sen}(y)} - \frac{P_m - b_1\dot{y} - \ddot{y}}{b_3b_2\text{sen}^2(y)}\dot{y}\cos(y) \\ &\quad + \frac{P_m - b_1\dot{y} - \ddot{y}}{b_2\text{sen}(y)} - x_3^*(t)\end{aligned}\quad (19)$$

La dinámica entrada-salida, sin dinámica de ceros alguna, se obtiene con ayuda de la parametrización de la entrada (19). Consideramos entonces la siguiente dinámica simplificada, incluyendo las no linealidades propias del sistema y la influencia de la entrada externa, $\zeta(t)$, como:

$$y^{(3)} = -[b_3b_2\text{sen}(y)]u + \xi(t) \quad (20)$$

donde $\xi(t)$ está dada por

$$\begin{aligned}\xi(t) &= -b_1\ddot{y} + b_3(P_m - b_1\dot{y} - \ddot{y})\left(1 - \frac{\dot{y}\cos(y)}{b_3\text{sen}(y)}\right) \\ &\quad - b_3b_2\text{sen}(y)(x_3^*(t) + \zeta(t))\end{aligned}\quad (21)$$

Consideramos $\xi(t)$ como una entrada de perturbación desconocida, pero uniformemente absolutamente acotada, la cual requiere ser estimada en línea por medio de un observador y,

subsecuentemente, cancelada a partir de la dinámica del sistema simplificado mediante retroalimentación lineal hecha con el propósito de regular la variable, y , hacia la trayectoria de referencia deseada, $y^*(t)$. Recordemos que los parámetros de ganancia b_2 y b_3 se suponen conocidos.

El problema se reduce, entonces, a un problema de seguimiento de trayectoria definido sobre un sistema predominantemente lineal de tercer orden y sujeto a perturbaciones uniformemente, absolutamente, acotadas, (20), con una ganancia de entrada conocida y dependiente del estado.

Se propone un controlador por realimentación lineal de estados estimados incluyendo un término de cancelación de la perturbación “gradualmente habilitado”, $z_{1s}(t) = s_f(t)z_1(t)$, y variables de fase estimadas, también “gradualmente habilitadas” mediante, $y_{js} = s_f(t)y_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ con $s_f(t)$ definida en la ecuación (12) con un valor apropiado del intervalo de interpolación representado por ϵ .

$$u = -\frac{1}{b_3 b_2 \text{sen}(y)} \left[(y^*(t))^{(3)} - k_2(y_{3s} - \dot{y}^*(t)) - k_1(y_{2s} - \dot{y}^*(t)) - k_0(y - y^*(t)) - z_{1s} \right]$$

Las variables correspondientes, y_3 , y_2 y z_1 , se generan mediante el siguiente observador lineal, del tipo GPI:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \lambda_5(y - y_1) \\ \dot{y}_2 &= y_3 + \lambda_4(y - y_1) \\ \dot{y}_3 &= -(b_3 b_2 \text{sen}(y))u + z_1 + \lambda_3(y - y_1) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_2(y - y_1) \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \lambda_1(y - y_1) \\ \dot{z}_3 &= \lambda_0(y - y_1) \end{aligned} \quad (22)$$

donde y_1 es el estimado redundante de la salida y , y_2 es el estimado de la velocidad del eje, y y_3 es el estimado de la aceleración del eje. La variable z_1 estima la entrada de perturbación, $\xi(t)$, por medio de un modelo local, de actualización automática, que representa una familia de polinomios de segundo grado, el cual se toma como modelo interno de la perturbación dependiente del estado. Este término afecta la dinámica entrada-salida (20).

Las variables del observador gradualmente habilitadas: z_{1s} , y_{2s} y y_{3s} están definidas por

$$\theta_s = s_f(t)\theta, \quad s_f(t) = \begin{cases} \text{sen}^p\left(\frac{\pi t}{2\epsilon}\right) & \text{para } t \leq \epsilon \\ 1 & \text{para } t > \epsilon \end{cases} \quad (23)$$

con θ_s , representando a cualquiera de las variables del observador, z_1 , y_2 o y_3 y siendo p un número entero par (en los ejemplos utilizamos, sistemáticamente, $p = 8$). Es claro que cualquier otra función de interpolación suave sirve los mismos propósitos: e.g., polinomios de Bézier, funciones de Gevrey, etc).

El error de reconstrucción del sistema se obtiene restando las expresiones del observador del modelo del sistema lineal perturbado simplificado. Se tiene, definiendo: $\tilde{e} = e_1 = y - y_1$, $e_2 = \dot{y} - y_2$, etc.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - \lambda_5 e_1, \quad \dot{e}_2 = e_3 - \lambda_4 e_1, \quad \dot{e}_3 = \xi(t) - z_1 - \lambda_3 e_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_2 e_1 \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \lambda_1 e_1 \\ \dot{z}_3 &= \lambda_0 e_1 \end{aligned} \quad (24)$$

El error de reconstrucción, \tilde{e} , satisface la siguiente dinámica lineal perturbada

$$\tilde{e}^{(6)} + \lambda_5 \tilde{e}^{(5)} + \lambda_4 \tilde{e}^{(4)} + \dots + \lambda_1 \dot{\tilde{e}} + \lambda_0 \tilde{e} = \xi^{(3)}(t) \quad (25)$$

Eligiendo las ganancias $\{\lambda_5, \dots, \lambda_0\}$ de tal forma que las raíces del polinomio característico

$$p_o(s) = s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0, \quad (26)$$

se ubiquen en el semiplano izquierdo del plano complejo, se sigue que las trayectorias del error de reconstrucción \tilde{e} y de sus derivadas en el tiempo $\tilde{e}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$, están uniformemente últimamente acotadas por un disco, de radio tan pequeño como se quiera, centrado en el origen del espacio de fase del error de reconstrucción siempre y cuando las raíces estén suficientemente alejadas del eje imaginario dentro del plano izquierdo del plano complejo.

La dinámica en lazo cerrado del error de seguimiento satisface,

$$e_y^{(3)} + \kappa_2 e_y^{(2)} + \kappa_1 \dot{e}_y + \kappa_0 e_y = \xi(t) - z_{1s} - l(\tilde{e}, \dot{\tilde{e}}, \ddot{\tilde{e}}) \quad (27)$$

La diferencia $\xi(t) - z_{1s}$, es arbitrariamente pequeña después de un cierto tiempo, y $l(\tilde{e}, \dot{\tilde{e}}, \dots)$ es una función lineal del error de estimación y sus derivadas, de la forma (9). Estas perturbaciones convergen a una vecindad suficientemente pequeña del espacio de fase del error de reconstrucción. La perturbación uniformemente, absolutamente, acotada en el miembro derecho de (27), produce un error de seguimiento de trayectoria de referencia, $e_y = y - y^*(t)$, que también converge asintóticamente hacia una pequeña vecindad del origen en el espacio de fases del error de seguimiento.

El polinomio característico de la componente predominantemente lineal de la dinámica de error de seguimiento en lazo cerrado puede seleccionarse de tal manera que sus polos estén ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo a una distancia moderada del eje imaginario. Usamos para esto el polinomio característico deseado, dado por:

$$p_c(s) = s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0 = (s^2 + 2\zeta_c \omega_c s + \omega_c^2)(s + p_c) \quad \text{con } \zeta_c, \omega_c, p_c > 0.$$

3.4 Simulaciones numéricas

Seguimiento de trayectoria desde el reposo al reposo. Se propone como tarea de control reducir, de forma suave, el ángulo de carga, $y_1 = x_1$, partiendo de un punto de equilibrio $y = 1$ [rad] hacia un valor menor, dado por, $y = 0.6$ [rad] en un tiempo razonable, $T = 5$ [s], comenzando la labor en $t = 5$ [s] de un equilibrio caracterizado por (ver Bazanella *et al.* (1999) y Pai (1989))

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.8912$$

Se tomaron los siguientes valores como parámetros del sistema

$$b_1 = 1, b_2 = 21.3360, b_3 = 20$$

A su vez, se tomó la entrada de perturbación externa, $\zeta(t)$, como la siguiente señal,

$$\zeta(t) = 0.005e^{(\sin^2(3t) \cos(3t))} \cos(0.3t)$$

Los parámetros del observador se determinaron en términos del siguiente polinomio característico deseado $p_o(s)$ para la dinámica lineal del error de reconstrucción dominante,

$$p_o(s) = (s^2 + 2\zeta_o\omega_{no}s + \omega_{no}^2)^3$$

con $\zeta_o = 1$, $\omega_{no} = 20$.

Las ganancias del controlador, $\kappa_2, \kappa_1, \kappa_0$, se establecieron de tal forma que el polinomio característico deseado en lazo cerrado, $p_c(s)$, se impusiese sobre la dinámica predominantemente lineal del error de seguimiento,

$$p_c(s) = (s^2 + 2\zeta_c\omega_{nc}s + \omega_{nc}^2)(s + p_c)$$

con $p_c = 3$, $\omega_{nc} = 3$, $\zeta_c = 1$.

La trayectoria deseada del ángulo de carga, $y^*(t)$, se especificó de la manera siguiente:

$$y^*(t) = \bar{x}_{1,\text{inicial}} + (\rho(t, t_1, t_2))(\bar{x}_{1,\text{final}} - \bar{x}_{1,\text{inicial}})$$

con, $\rho(t, t_1, t_2)$, dado por un polinomio de Bèzier, $y^*(t)$, el cual representa una trayectoria suave que parte del reposo y termina en el reposo, con un valor inicial de equilibrio $y^*(t_1) = \bar{x}_{1,\text{inicial}} = 1$ [rad] y un valor final de equilibrio deseado dado por $y^*(t_2) = \bar{x}_{1,\text{final}} = 0.6$ [rad]. Se definieron también los parámetros: t_1, t_2 y ϵ como: $t_1 = 5.0$ [s], $t_2 = 10.0$ [s]; $\epsilon = 3.0$.

El polinomio de interpolación $\rho(t, t_1, t_2)$, es de la forma:

$$\rho(t) = \tau^8 [r_1 - r_2\tau + r_3\tau^2 - r_4\tau^3 + r_5\tau^4 - r_6\tau^5 + r_7\tau^6 - r_8\tau^7 + r_9\tau^8]$$

con,

$$\tau = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

y

$$r_1 = 12870, r_2 = 91520, r_3 = 288288$$

$$r_4 = 524160, r_5 = 600600, r_6 = 443520$$

$$r_7 = 205920, r_8 = 54912, r_9 = 6435$$

El polinomio en el tiempo que acabamos de definir garantiza un número suficiente de derivadas iguales a cero, tanto al inicio como al final de la trayectoria deseada de interpolación suave entre reposos o equilibrios.

La figura 1 muestra el desempeño, en lazo cerrado, del controlador de retroalimentación lineal de salida basado en el observador GPI, para la evolución forzada de la trayectoria del ángulo de carga del generador sincrónico, siguiendo de manera muy cercana la trayectoria definida desde el equilibrio inicial hasta el equilibrio final.

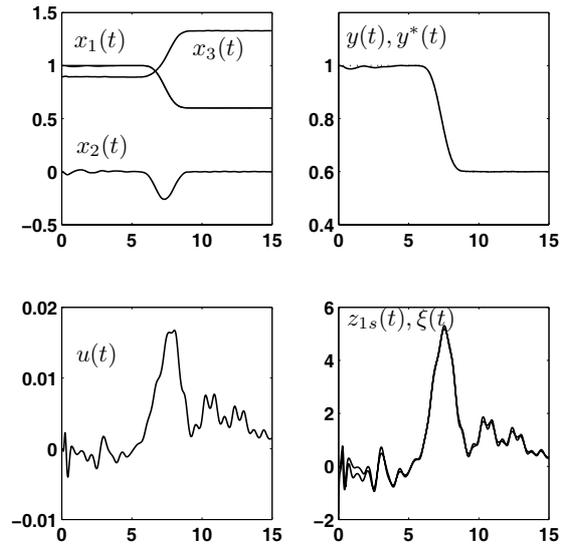


Figura 1. Desempeño del controlador lineal basado en observador GPI para la trayectoria deseada reposo-reposo en el generador sincrónico perturbado.

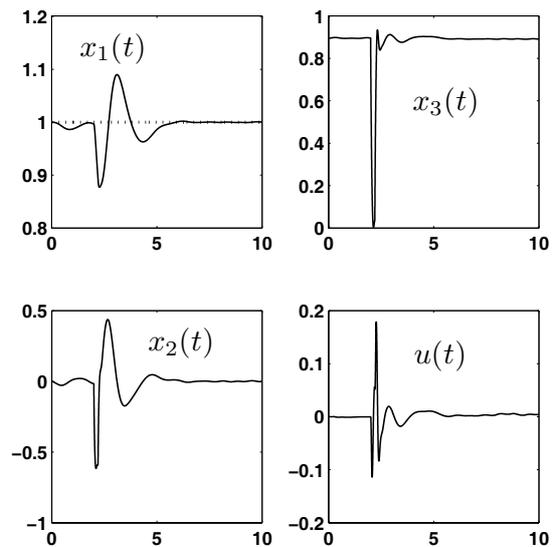


Figura 2. Desempeño del controlador lineal basado en observador GPI bajo una pérdida súbita de potencia en $t=2$ [s] durante 0.2 [s].

Robustez respecto a fallas súbitas. Se simuló el comportamiento del controlador en presencia de un corto circuito súbito ocurrido en $t = 2$ [s]. La falla presentada tiene una duración de $T = 0.2$ [s]. La figura 2 muestra el desempeño del controlador basado en el observador GPI, durante el transiente rápido que conlleva la recuperación de las condiciones de equilibrio imperantes.

4. CONTROL DE UN VEHÍCULO NO HOLONÓMICO

La gran mayoría de los sistemas robóticos móviles estudiados en la literatura son diferencialmente planos, mientras no existan

fenómenos de deslizamiento en las ruedas (ver Leroquais y d'Andrea Novel (1999)). La planitud diferencial del sistema permite reducir la tarea de control a la de un sistema linealizable extendido de entrada-salida. La linealización de la dinámica de la salida plana requiere la cancelación de la matriz de ganancias no lineal, la cual depende solamente de las velocidades cartesianas del centro de masas del vehículo. Para obtener estas variables de estado no medidas, contaminadas por el ruido, se proponen observadores tipo GPI, los cuales pueden proveer derivadas en el tiempo suficientemente filtradas de las señales de salida. Esto se logra mediante un observador GPI provisto de una inyección de orden apropiado de la integral del error de estimación (ver Cortés-Romero *et al.* (2009); Martínez-Vazquez *et al.* (2009)). Debido a que los observadores de alta ganancia son conocidos por su sensibilidad a los ruidos de medición, el error de inyección integral logra un buen efecto de filtraje del tipo paso bajo.

La figura 3 muestra el modelo idealizado de un vehículo de dos ruedas acopladas a un eje simple. El eje tiene longitud, L . Cada rueda es de radio, R , y está actuada por un motor de corriente directa imprimiendo velocidades angulares: ω_1, ω_2 , respectivamente, a cada rueda. Las variables de posición están dadas por (x_1, x_2) , y θ indica el ángulo de orientación del robot. Las velocidades lineales de los puntos de contacto de las ruedas con el suelo están dadas por, $v_1 = \omega_1 R$ y $v_2 = \omega_2 R$. En este caso, las únicas variables medibles son: x_1 y x_2 . Este sistema está sujeto a restricciones del tipo no holonómicas.

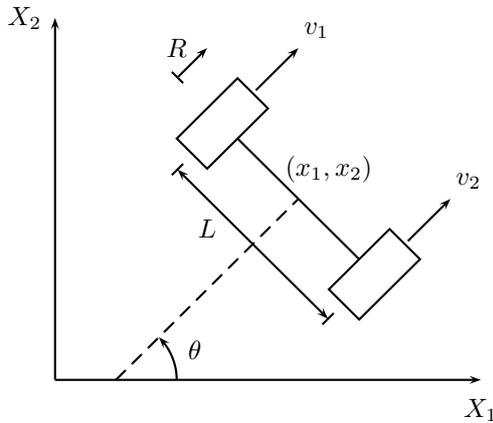


Figura 3. Vehículo de un solo eje

El modelo cinemático del sistema está dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos \theta, \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases} \quad (28)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R/2 & R/2 \\ -R/L & R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

El objetivo de control es el siguiente: dada una trayectoria deseada $(x_1^*(t), x_2^*(t))$, proponer una ley de control multivariable realimentada, que especifique las entradas, u_1 y u_2 , de tal forma que las salidas planas, (x_1, x_2) , logren el seguimiento

asintótico exponencial a una vecindad, tan pequeña como se quiera, de la trayectoria deseada, mientras se realiza un rechazo de las perturbaciones aditivas no modeladas existentes en el modelo de entradas-salidas planas.

4.1 Realización del controlador

El sistema (28) es diferencialmente plano, con salidas planas dadas por el par de coordenadas: (x_1, x_2) , las cuales describen la posición del punto medio del eje que une las dos ruedas el cual, para todo efecto práctico coincide con el centro de masas del vehículo. El resto de las variables del sistema, incluyendo las entradas de control se parametrizan diferencialmente como sigue:

$$\theta = \arctan \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \right), \quad u_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}, \quad u_2 = \frac{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$$

Nótese que la relación entre las entradas y las derivadas de mayor orden de las salidas planas no es invertible; debido a un mal condicionamiento del grado relativo. Para solucionar este obstáculo para la linealización, introducimos, como una entrada auxiliar de control extendida, la derivada respecto al tiempo de u_1 . Tenemos:

$$\dot{u}_1 = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \ddot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}$$

Esta extensión de la entrada de control nos lleva a una relación invertible entrada - derivada de mayor orden de salida plana, la cual escribimos en la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} & \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} \\ \frac{-\dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} & \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

4.2 Control basado en observador GPI

Considere el siguiente controlador multivariable basado en controladores lineales, tipo GPI, que incluyen la cancelación de la matriz no lineal de ganancias. Esta matriz se determina mediante la ayuda de estimadores lineales GPI con inyección apropiada de la integral del error de estimación:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}_1}{\sqrt{(\hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2)^2}} & \frac{\hat{x}_2}{\sqrt{(\hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2)^2}} \\ \frac{-\hat{x}_2}{(\hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2)^2} & \frac{\hat{x}_1}{(\hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde las variables auxiliares de control, ν_1, ν_2 , están dadas por ²:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \ddot{x}_1^*(t) - \left[\frac{k_{12}s^2 + k_{11}s + k_{10}}{s(s + k_{13})} \right] (x_1 - x_1^*(t)) \\ \nu_2 &= \ddot{x}_2^*(t) - \left[\frac{k_{22}s^2 + k_{21}s + k_{20}}{s(s + k_{23})} \right] (x_2 - x_2^*(t)) \end{aligned} \quad (31)$$

² En este caso, se ha combinado, con un abuso de notación, señales en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

y donde las variables de velocidad estimadas: \hat{x}_1, \hat{x}_2 , se identifican, respectivamente, con las variables, ρ_{11} y ρ_{12} y se obtienen mediante los observadores lineales, tipo GPI, con inyección integral simple (i.e., con $m = 1$),

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_{10} &= \hat{y}_1 + \lambda_{13}(y_{10} - \hat{y}_{10}) \\ \dot{\hat{y}}_1 &= \rho_{11} + \lambda_{12}(y_{10} - \hat{y}_{10}) \\ \dot{\rho}_{11} &= \rho_{21} + \lambda_{11}(y_{10} - \hat{y}_{10}) \\ \dot{\rho}_{21} &= \lambda_{10}(y_{10} - \hat{y}_{10}) \\ y_{10} &= \int_0^t x_1(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (32)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_{20} &= \hat{y}_2 + \lambda_{23}(y_{20} - \hat{y}_{20}) \\ \dot{\hat{y}}_2 &= \rho_{12} + \lambda_{22}(y_{20} - \hat{y}_{20}) \\ \dot{\rho}_{12} &= \rho_{22} + \lambda_{21}(y_{20} - \hat{y}_{20}) \\ \dot{\rho}_{22} &= \lambda_{20}(y_{20} - \hat{y}_{20}) \\ y_{20} &= \int_0^t x_2(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (33)$$

De esta manera, el siguiente teorema describe el efecto de los observadores de inyección integral propuestos, conjuntamente a los controladores tipo GPI, para el sistema en lazo cerrado:

Teorema 6. Dado un conjunto de trayectorias de referencia, $(x_1^*(t), x_2^*(t))$, para la posición deseada en el plano del vehículo, descrito por (28); dado un conjunto de condiciones iniciales, $(x_1(0), x_2(0))$, adecuadamente cercanas al valor inicial de las trayectorias nominales deseadas, $(x_1^*(0), x_2^*(0))$, los observadores tipo GPI de inyección integral y el controladores dinámico lineal multivariable, (30)-(33), forzan las trayectorias del sistema controlado en lazo cerrado a converger asintóticamente hacia una reducida vecindad de las trayectorias de referencia $(x_1^*(t), x_2^*(t))$, siempre que se seleccionen las ganancias del controlador y observador de tal manera que las raíces de sus respectivos polinomios característicos dominantes correspondientes a la dinámica de los errores integrales de estimación y el error de seguimiento en lazo cerrado, estén ubicados a la izquierda del eje imaginario del plano complejo. Los errores de seguimiento, y de estimación, están restringidos a vecindades tan reducidas como se quiera dependientes tan solo de las distancias de ubicación de las raíces de estos polinomios al eje imaginario del plano complejo.

Demostración. Como el sistema es diferencialmente plano, empleando los resultados de Maggiore y Passino (2005), es válido hacer uso del principio de separación, el cual nos permite proponer los observadores GPI descritos. Los polinomios característicos asociados a las dinámicas predominantemente lineales del error de inyección integral de los observadores GPI propuestos, están dados por,

$$\begin{aligned}P_{\varepsilon_1}(s) &= s^4 + \lambda_{13}s^3 + \lambda_{12}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{10} \\ P_{\varepsilon_2}(s) &= s^4 + \lambda_{23}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{21}s + \lambda_{20}, \quad s \in \mathbb{C}\end{aligned}\quad (34)$$

Así, los valores, $\lambda_{i,j}$, $i = 1, 2, j = 0, \dots, 3$, se seleccionan identificando, término a término, los polinomios característicos de las dinámicas de los errores de estimación anteriormente descritas con los siguientes polinomios característicos deseados,

de naturaleza estable, para los errores de inyección integrales,

$$\begin{aligned}P_{\varepsilon_1}(s) &= P_{\varepsilon_2}(s) = (s + 2\mu_1\sigma_1s + \sigma_1^2)(s + 2\mu_2\sigma_2s + \sigma_2^2) \\ s &\in \mathbb{C}, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Debido a que los estados estimados, $\hat{x}_1 = \rho_{11}, \hat{x}_2 = \rho_{12}$, convergen exponencialmente asintóticamente hacia una pequeña vecindad de los estados reales x_1, x_2 , substituyendo (30) en (29), el problema inicial se transforma en el problema de control de dos cadenas de integración desacopladas. Aplicando los controladores GPI, se obtienen las siguientes dinámicas dominantes de los errores de seguimiento en lazo cerrado:

$$e_1^{(4)} + k_{13}e_1^{(3)} + k_{12}\ddot{e}_1 + k_{11}\dot{e}_1 + k_{10}e_1 = 0 \quad (35)$$

$$e_2^{(4)} + k_{23}e_2^{(3)} + k_{22}\ddot{e}_2 + k_{21}\dot{e}_2 + k_{20}e_2 = 0 \quad (36)$$

La ubicación de los autovalores para estas dinámicas tiene que ser de tal naturaleza que ambas ecuaciones características deseadas garanticen una convergencia predominantemente exponencial. Seleccionando las raíces de estos polinomios característicos de tal forma que estén ubicadas en el semiplano izquierdo del plano complejo, se garantiza la convergencia asintótica de la dinámica perturbada en una vecindad deseada del origen del espacio de fase del error de seguimiento. Estos autovalores tienen magnitud necesariamente grande y están suficientemente alejados del eje imaginario del plano complejo. ■

4.3 Resultados experimentales

Se realizó una implantación experimental del controlador propuesto para ilustrar el desempeño de la estrategia de control lineal. El prototipo es un robot móvil fabricado por la compañía Parallax modelo “Boe-Bot”, el cual se muestra en la figura 4. Los parámetros del robot se dan a continuación: El radio de ambas ruedas es de $R = 0.035$ [m]; la longitud del eje $L = 0.125$ [m]. Cada rueda incluye una banda de caucho para reducir el deslizamiento. El movimiento de las ruedas es proporcionado por sendos servo-motores de corriente directa de 6 [V]. El sistema de adquisición de posición se realizó mediante una cámara “web” de resolución de 352×288 píxeles. El procesamiento de la imagen se realizó mediante la herramienta (toolbox) de adquisición de imágenes de MATLAB, y la señal de control fue enviada al microcontrolador interno del robot por medio de un esquema de comunicación inalámbrico basado en transmisión del tipo inalámbrica (“bluetooth”). La función del microcontrolador es recibir y modular las señales de control para alimentar los motores. El microcontrolador empleado es un BASIC, Stamp 2, con un módulo de comunicación inalámbrico (bluetooth). La figura 5 muestra el diagrama a bloques del marco experimental. La trayectoria de seguimiento consistió en una “rosa de 6 pétalos” definida como sigue:

$$\begin{aligned}x_1^*(t) &= 0.6 \sin(3\omega t + \eta) \sin(2\omega t + \eta) \\ x_2^*(t) &= 0.6 \sin(3\omega t + \eta) \cos(2\omega t + \eta)\end{aligned}$$

Los parámetros de diseño de los polinomios característicos asociados a los observadores GPI están dados por: $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 2.3$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 4$. Para los polinomios deseados de los controladores, se usó: $\zeta_1 = \zeta_3 = 1.2$, $\zeta_2 = \zeta_4 = 1.5$, $\omega_{n1} = \omega_{n3} = 1.8$, $\omega_{n2} = \omega_{n4} = 1.9$.

Los resultados experimentales de la tarea de seguimiento se muestran en las figuras 6 (Seguimiento desglosado por ejes), 7 (Seguimiento en el plano $x - y$), y 8 (entradas de control). Estas respuestas se consideran razonables considerando la baja resolución de la cámara y las dimensiones limitadas del área de trabajo.

Con la finalidad de evaluar el efecto de la inyección integral en los observadores GPI, tomando datos experimentales del seguimiento de una trayectoria circular, se realizó una estimación *fuera de línea* empleando un observador tipo GPI con inyección de salida tradicional (ver Luviano-Juarez *et al.* (2010)), cuya respuesta está dada por las coordenadas (x_1, x_2) . Comparamos la respuesta del observador tradicional con el de inyección integral. Los resultados de la comparación se pueden ver en la figura 9, mostrando una clara diferencia. El efecto de filtrado paso-bajas del observador integral ayuda a reducir las fluctuaciones ruidosas de la entrada de control debidas a los ruidos de medición. En promedio, el error absoluto de seguimiento de ambos esquemas es inferior a 1 [cm].



Figura 4. Prototipo experimental

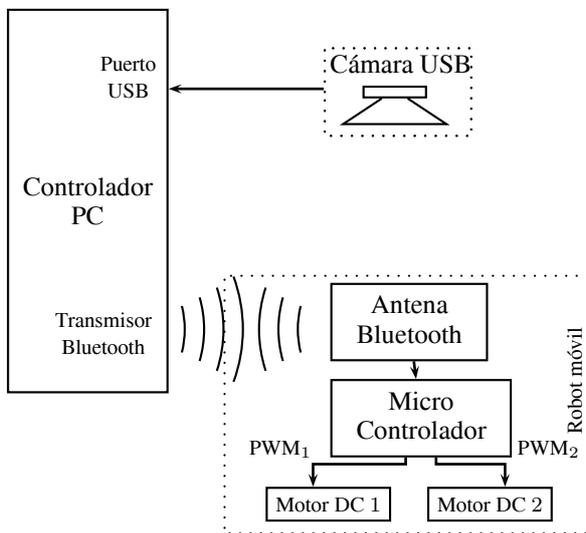


Figura 5. Esquema de control utilizado en el seguimiento de trayectorias del carro no-holonómico

5. CONTROL LINEAL DEL UN CIRCUITO CAÓTICO

Considere el circuito eléctrico que se muestra en la figura 10. Este circuito constituye una modificación del Circuito Caótico de Chua, así llamado en honor al Prof. Leon Chua, que incluye una fuente de corriente externa, identificada mediante la variable u , que permite controlar el sistema. Es claro que para $u = 0$ obtenemos el circuito clásico de Chua caracterizado

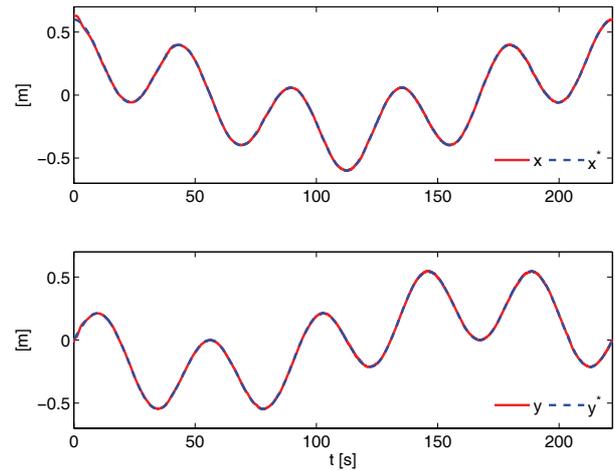


Figura 6. Desempeño del sistema de control propuesto, en el seguimiento de trayectorias de referencia de las salidas planas del carro no-holonómico

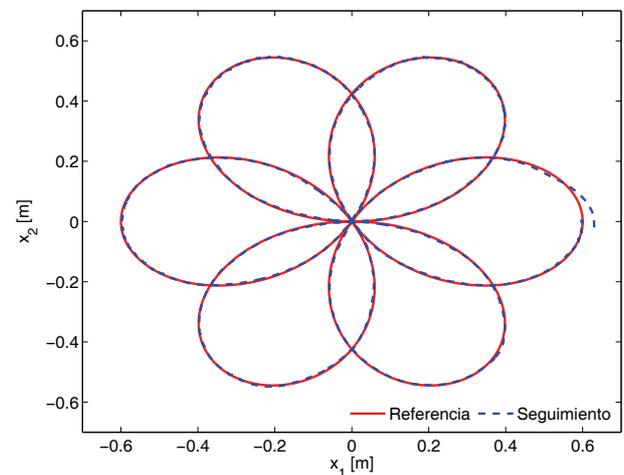


Figura 7. Desempeño experimental del controlador GPI basado en observador integral en tarea de seguimiento de trayectoria

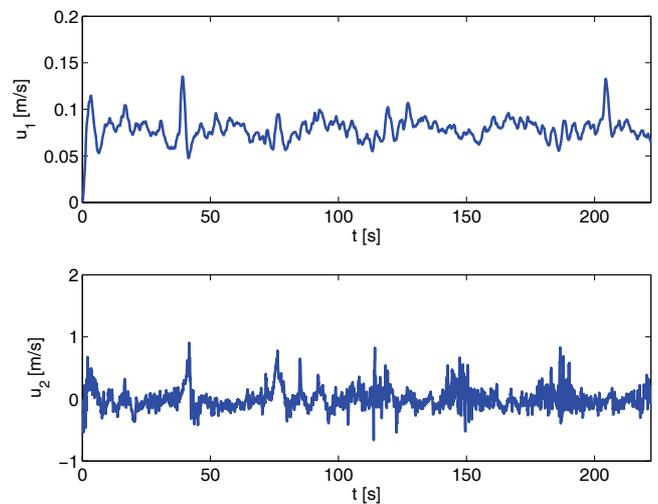


Figura 8. Entradas de control aplicadas

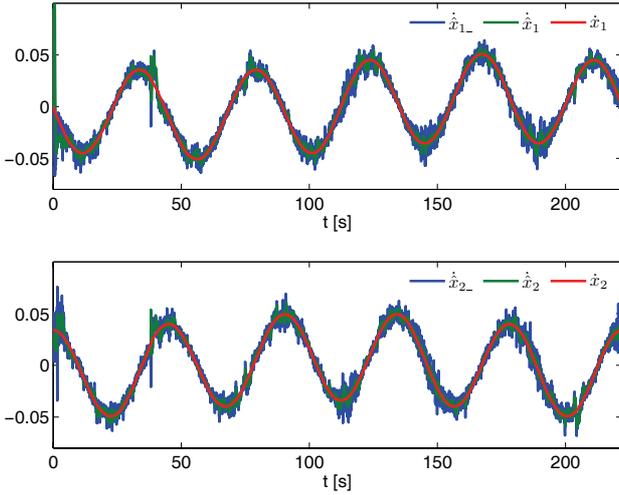


Figura 9. Efecto de reducción de ruido en los observadores GPI que usan inyección integral de salida

por la presencia de una resistencia negativa sintetizada a base de diodos (este arreglo, muy particular, de diodos, recibe el nombre de “Diodo de Chua”).

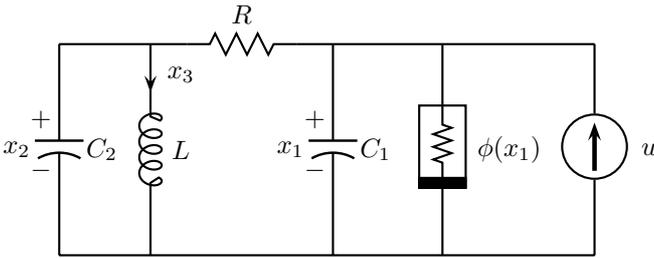


Figura 10. Circuito Caótico de Chua

El sistema está descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales controladas:

$$\begin{aligned}
 C_1 \dot{x}_1 &= \frac{1}{R} (x_2 - x_1) - \phi(x_1) + u \\
 C_2 \dot{x}_2 &= \frac{1}{R} (x_1 - x_2) - x_3 \\
 L \dot{x}_3 &= x_2 \\
 \phi(x_1) &= m_0 x_1 + \frac{(m_1 - m_0)}{2} (|x_1 + B_p| - |x_1 - B_p|) \\
 y &= x_3
 \end{aligned} \quad (37)$$

donde x_1 , x_2 representan los voltajes en los capacitores, C_1 , y, C_2 . La variable, x_3 , representa la corriente del inductor L , y las constantes m_0 , m_1 , B_p constituyen parámetros que contribuyen a definir la resistencia negativa que caracteriza el circuito.

Formulación del problema: Se desea especificar una ley de control lineal, sobre la base de variables asociadas a un observador de perturbaciones y variables de fase del sistema, que permita forzar la salida, $y = x_3$, a seguir suficientemente cerca una trayectoria preestablecida, $y^*(t)$, independientemente de los parámetros del sistema, de posibles perturbaciones externas y de dinámicas no modeladas.

El sistema (37) es diferencialmente plano, y la corriente x_3 es la salida plana del sistema. En efecto, no es difícil obtener la siguiente parametrización diferencial de las variables del sistema en términos de la salida y :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= C_2 L R \dot{y} + L \ddot{y} + R y \\
 x_2 &= L \ddot{y} \\
 u &= C_1 C_2 R L y^{(3)} + (C_1 - C_2) L \ddot{y} - \dot{y} + \phi(y, \dot{y}, \ddot{y})
 \end{aligned}$$

La dinámica entrada-salida resultante, libre de cualquier dinámica de ceros, puede simplificarse de la manera siguiente:

$$y^{(3)} = \frac{1}{C_1 C_2 R L} u + \xi(t)$$

donde, $\xi(t)$, representa, de manera agregada, las no linealidades aditivas presentes en el sistema así como términos lineales dependientes de la salida y sus derivadas. Consideramos, como en los ejemplos anteriores a la señal, $\xi(t)$, como una perturbación dependiente de las variables de fase asociadas a la salida, y , la cual está dada por

$$\xi(t) = -\frac{1}{C_1 C_2 R L} [(C_1 - C_2) L \ddot{y} - \dot{y} + \phi(y, \dot{y}, \ddot{y})]$$

Suponemos que la perturbación, $\xi(t)$, es una entrada completamente desconocida, pero uniformemente absolutamente acotada. Esta perturbación, que es claramente observable en el sentido de Diop y Fliess, puede ser estimada en forma suficientemente aproximada, y en línea, por medio de un observador lineal del tipo GPI. Esta estimación lineal permite una cancelación eficiente de la perturbación aditiva reduciendo la tarea de control del sistema no lineal original al problema de control de una cadena de tres integradores. El control lineal propuesto usa, adicionalmente, una retroalimentación de las variables de fase asociadas a la salida plana, y que se obtienen del mismo observador GPI.

5.1 Realización del Controlador

Se propone la siguiente ley lineal de control, basada en un observador GPI que incluye un modelo interno de la perturbación el cual se sintetiza mediante un representante arbitrario de una familia de polinomios del tiempo de cuarto grado,

$$\begin{aligned}
 u &= R C_1 C_2 L \left[[y^*(t)]^{(3)} - \kappa_2 (y_3 - \dot{y}^*(t)) - \right. \\
 &\quad \left. - \kappa_1 (y_2 - \dot{y}^*(t)) - \kappa_0 (y_1 - y^*(t)) \right] - \hat{\xi}(t) \quad (38) \\
 \hat{\xi}(t) &= z_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 + \lambda_7 (y - y_1) \\
 \dot{y}_2 &= y_3 + \lambda_6 (y - y_1) \\
 \dot{y}_3 &= \frac{1}{R C_1 C_2 L} u + z_1 + \lambda_5 (y - y_1) \\
 \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_4 (y - y_1) \\
 \dot{z}_2 &= z_3 + \lambda_3 (y - y_1) \\
 \dot{z}_3 &= z_4 + \lambda_2 (y - y_1) \\
 \dot{z}_4 &= z_5 + \lambda_1 (y - y_1) \\
 \dot{z}_5 &= \lambda_0 (y - y_1) \quad (39)
 \end{aligned}$$

El error de estimación, $\tilde{e} = y - y_1$, satisface la siguiente ecuación diferencial lineal perturbada

$$\tilde{e}^{(8)} + \lambda_5 \tilde{e}^{(7)} + \dots + \lambda_1 \dot{\tilde{e}} + \lambda_0 \tilde{e} = \varphi^{(5)}(t) \quad (40)$$

Esta ecuación perturbada tiene una evolución predominantemente lineal, de tal manera que el error, \tilde{e} , converge asintóticamente a una vecindad, tan pequeña como se desee, alrededor del origen del espacio de fase del error de observación, siempre y cuando los coeficientes del polinomio característico asociado, el cual está dado por:

$$s^8 + \lambda_7 s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0 \quad (41)$$

sean de tal forma que éste exhiba todas sus raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo, suficientemente alejadas del eje imaginario.

El sistema en lazo cerrado genera un error de seguimiento $e_y = y - y^*(t)$ que está gobernado, en forma similar, por la siguiente ecuación diferencial lineal perturbada,

$$e_y^{(3)} + \kappa_2 e_y^{(2)} + \kappa_1 \dot{e}_y + \kappa_0 e_y = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$$

El polinomio característico de la componente predominantemente lineal de la dinámica de error de seguimiento en lazo cerrado está dado por:

$$p_c(s) = s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0 \quad (42)$$

Al igual que en los casos anteriores, seleccionamos los coeficientes $\{\kappa_2, \kappa_1, \kappa_0\}$ de tal forma que las raíces de $p_c(s)$ estén suficientemente alejadas del eje imaginario en el semiplano izquierdo del plano complejo. El error de seguimiento en lazo cerrado converge entonces a una vecindad, tan pequeña como se desee, del origen del espacio de fases asociado a e_y .

Una forma de seleccionar las ganancias κ consiste en igualar el polinomio $p_c(s)$ al polinomio dado por: $(s^2 + 2\zeta_c \omega_c s + \omega_c^2)(s + p_c)$ con los parámetros ζ_c, ω_c, p_c , estrictamente positivos. En particular, si ω_c y p se escogen suficientemente grandes, se asegura que el error de seguimiento se encontrará asintóticamente confinado a una vecindad del origen con un radio tan pequeño como desee y tanto más pequeño cuanto más se alejen las raíces del polinomio característico hacia la izquierda del eje imaginario del plano complejo.

5.2 Resultados experimentales

En esta sección se describe la puesta en marcha en forma experimental de la ley de control lineal, basada en el observador lineal GPI, para el circuito de Chua controlado. Se construyó un circuito de Chua sobre la base del diseño propuesto en Tôrres y Aguirre (2000), el cual permite oscilaciones caóticas de frecuencia relativamente baja. La figura 11 muestra la realización del diodo de Chua basada en amplificadores operacionales (ver Kennedy (1992) para mayor información al respecto). La figura 12 muestra el diagrama del circuito equivalente del inductor, que permite altos valores de inductancia. Se empleó el siguiente conjunto de parámetros en el circuito: $C_1 = 23.5 [\mu F]$, $C_2 = 235 [\mu F]$, $R = 1550 [\Omega]$. La inductancia equivalente de la realización resultó ser $L = L_{eq} = 42.3 [H]$. Los parámetros de la función no lineal del diodo de Chua están dados por: $m_0 = -0.409 [ms]$, $m_1 = -0.758 [ms]$, $B_p = 1.8 [V]$, y los componentes para la realización en amplificadores operacionales están determinados por los siguientes valores: $R_1 = R_2 = 220 [\Omega]$, $R_3 = 2.2 [K\Omega]$, $R_4 = R_5 = 22 [K\Omega]$,

$R_6 = 3.3 [K\Omega]$, $R_7 = R_8 = R_9 = 1 [K\Omega]$, $R_{10} = 1.8 [K\Omega]$, y $C_3 = 23.5 [\mu F]$. Todos los amplificadores fueron implantados mediante circuitos integrados LF412.

El polinomio característico asociado al observador lineal GPI fue seleccionado a ser de la forma: $P(s) = (s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n1} + \omega_{n1}^2)(s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n2} + \omega_{n2}^2)$, con $\zeta_1 = 2$, $\omega_{n1} = 50$, $\zeta_2 = 2$, $\omega_{n2} = 70$. El polinomio característico deseado asociado al controlador lineal fue seleccionado de la forma dada por, $(s^2 + 2\zeta_c \omega_c s + \omega_c^2)(s + p_c)$, con $\zeta_c = 1$, $\omega_c = 150$, $p_c = 150$. La señal de referencia para la salida plana es del tipo senoidal, dada por: $y^*(t) = 3 + 2\text{sen}((\pi/4)t + \pi/2)$, es decir, se realizó una tarea de supresión abrupta de la oscilación caótica del circuito y la imposición, a partir de ese momento, de un comportamiento armónico controlado para la salida plana del circuito de Chua controlado.

El procesamiento digital, en línea, de las señales fue elaborado en un ambiente MatLab xPC Target con un período de muestreo de 0.1 [ms]. La adquisición de datos y salida analógica fueron proporcionados por una tarjeta de adquisición de datos National Instruments PCI-6259 DAQ.

La figura 13 muestra los resultados del seguimiento de la señal de referencia para la salida plana. Inicialmente, se dejó el circuito de Chua libre del control durante un periodo de 20 [s]. A partir de este instante, se activó el controlador con el objeto de implantar el seguimiento de la señal $y^*(t)$ dada por parte de la salida plana del circuito. La figura 14 muestra los valores correspondientes de los estados x_1 y x_2 del circuito y la figura 15 muestra los valores de control y el estimado de la perturbación respectivamente.

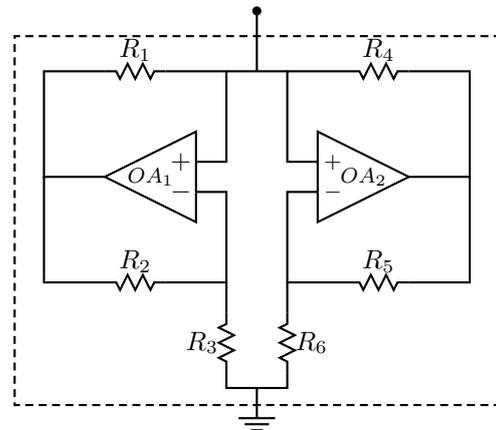


Figura 11. Realización del diodo de Chua mediante amplificadores operacionales.

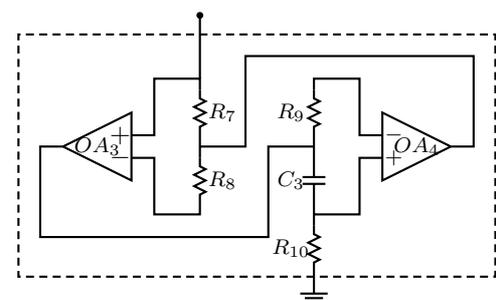


Figura 12. Circuito equivalente para el inductor a base de condensadores y amplificadores operacionales.

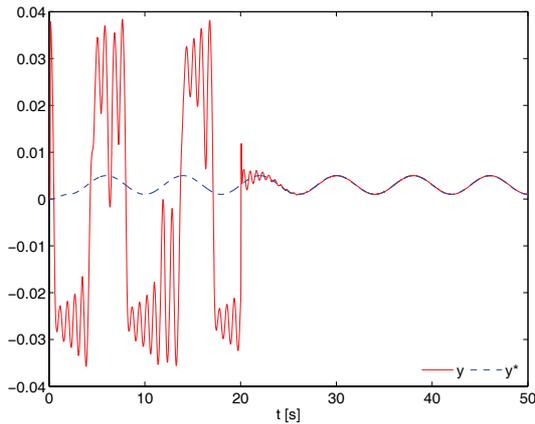


Figura 13. Desempeño experimental del controlador lineal, basado en el observador GPI, en el seguimiento de la señal de referencia para la salida plana, y , a partir de $t = 20$ [s]

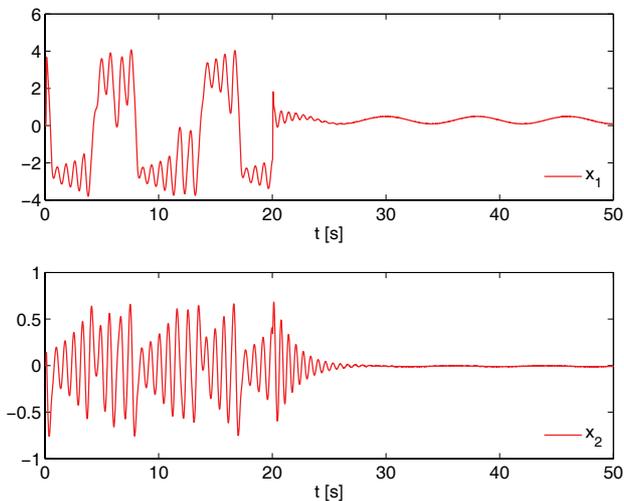


Figura 14. Evolución de los estados x_1 , x_2 del circuito caótico controlado

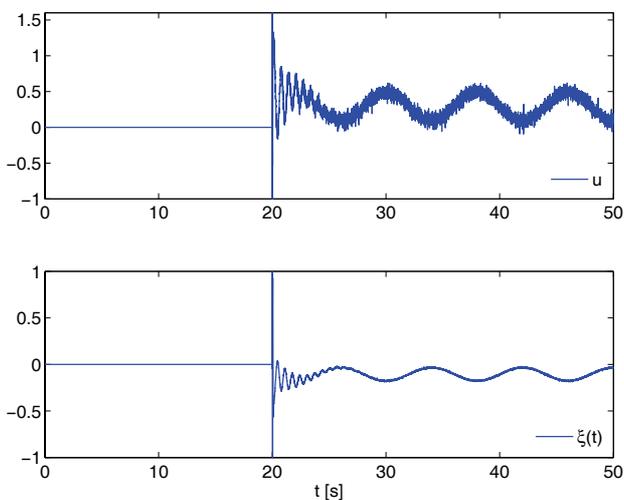


Figura 15. Entrada de control y perturbación estimada

6. CONCLUSIONES

En este artículo, se propusieron esquemas de control lineal, basados en observadores lineales, para tareas de seguimiento robusto de trayectorias de salida en sistemas no lineales diferencialmente planos. La representación no lineal entrada-salida plana se considera como un sistema lineal perturbado, en el cual solamente el orden de integración del sistema y la ganancia de la entrada de control son crucialmente relevantes para el diseño del controlador lineal y la construcción del observador. Los términos aditivos no lineales (dependientes de la salida y sus derivadas) y las perturbaciones externas de la dinámica entrada-salida plana se consideran como una perturbación aditiva agregada que es función del tiempo sin estructura adicional excepto por la suposición de ser uniformemente, absolutamente, acotadas. Esta perturbación no lineal, así como las variables de fase asociadas a la salida plana, pueden ser objeto de estimación en línea, de forma suficientemente precisa, por medio de observadores lineales de alta ganancia, del tipo Luenberger, llamados observadores GPI. El observador GPI incluye un modelo interno polinomial, de actualización automática, de la perturbación aditiva agregada, la cual se supone uniformemente absolutamente acotada. El controlador cancela aproximadamente las perturbaciones agregadas y regula el sistema lineal de integración pura, después de un procedimiento de cancelación exacta de la ganancia no lineal conocida, a seguir una trayectoria de referencia de salida pre-especificada. Se presentó un ejemplo de simulación convincente, el cual trata un sistema físico complejo. Se consideró, adicionalmente, el problema de seguimiento de trayectoria en un prototipo experimental de un robot móvil no holonómico multivariable. Igualmente, se presentó una aplicación al control lineal de seguimiento de salida en un circuito caótico de Chua, incluyendo resultados experimentales obtenidos sobre una planta circuital construida en el laboratorio.

La limitación fundamental de la metodología de diseño de controladores lineales para sistemas no lineales, expuesta en este artículo, reside en su circunscripción a sistemas diferencialmente planos cuyas salidas planas estén disponibles para la medición. Un sistema no lineal cuyas salidas naturales medibles no sean las salidas planas, puede corresponder al caso de los sistemas de fase no mínima. En estos casos, el control indirecto tradicional si bien representa una alternativa que merece ser explorada, también puede hacerse cuestionable. En esta área hace falta profundizar un tanto más la investigación. Igualmente, aquellos sistemas no diferencialmente planos cuyas linealizaciones tangentes sean controlables (y por lo tanto; planos) con salidas planas incrementales medibles, ofrecen posibilidades interesantes de aplicación experimental didáctica. Tales son los casos como el péndulo de longitud variable, el llamado péndulo de Furuta, la bola en el riel, etc.

Los resultados aquí presentados, se pudiesen extender al caso de sistemas no lineales, monovariantes y multivariantes, de tipo discreto. En este sentido, el caso de los sistemas lineales y no lineales, del tipo muestreado, merecen especial atención e interés debido a su potencial en aplicaciones experimentales concretas. Una recomendación, que puede ser muy útil, es la utilización de la llamada *transformación delta*, la cual está tomando importancia especial en modelos muestreados de sistemas lineales y no lineales estocásticos (Ver el artículo reciente de Goodwin *et al.* (2010)). La metodología expuesta se ha extendido a sistemas no lineales que exhiben retardos

conocidos y constantes en la entrada de control. Los resultados preliminares en esta área se encuentran en el trabajo de Sira-Ramírez *et al.* (2010). La extensión de la metodología de diseño de controladores lineales para sistemas no lineales al caso de sistemas no lineales con retardos desconocidos pero acotados a un intervalo de la recta real, luce suficientemente retardora.

7. APÉNDICE

Enunciamos, primeramente, el siguiente resultado suficientemente conocido.

Lema 7. Sea $\xi(t)$ una señal de perturbación uniformemente, absolutamente, acotada en el tiempo, que actúa sobre el sistema lineal invariante en el tiempo, caracterizado por el conjunto de coeficientes: $\{\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0\}$, dado por:

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1\dot{y} + \alpha_0y = \xi(t) \quad (43)$$

Entonces, las trayectorias de las variables de fase: $y(t)$, $\dot{y}(t)$, \dots , $y^{(n-1)}(t)$, convergen hacia una vecindad tan pequeña como se quiera, $\mathcal{N}(0)$, del origen del espacio de fases del sistema donde, además, estas permanecerán definitivamente acotadas, siempre y cuando el conjunto de coeficientes constantes: $\{\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0\}$, hayan sido escogidos de tal manera que las raíces del polinomio característico asociado,

$$p_n(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (44)$$

estén ubicadas en la parte izquierda del plano complejo y suficientemente alejadas de su eje imaginario. Más aún, mientras más grande sea, en valor absoluto, la parte real de la raíz compleja, de menor magnitud, del polinomio $p_n(s)$, más pequeño será el radio de la esfera de mayor tamaño que puede ser inscrita en $\mathcal{N}(0)$.

Demostración.

El lema es ciertamente válido para $n = 1$,

$$\dot{y} = -\alpha_0y + \xi(t), \quad \alpha_0 > 0, \quad \sup_{t \geq 0} |\xi(t)| = K$$

La función candidata de Lyapunov: $V(y) = \frac{1}{2}y^2$, cumple la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(y(t)) &= -\alpha_0y^2 + y\xi(t) \\ &\leq -\alpha_0y^2 + K|y| = -\alpha_0|y|\left(|y| - \frac{K}{\alpha_0}\right) \end{aligned}$$

Puesto que $-\alpha_0y^2 + K|y|$ es estrictamente negativa fuera del intervalo cerrado, $[-\frac{K}{\alpha_0}, \frac{K}{\alpha_0}]$, las trayectorias del sistema, $y(t)$, que se inicien en el exterior del intervalo convergen asintóticamente hacia las fronteras del mismo y las que se inicien desde el interior de este intervalo, no pueden escapar fuera de él. En consecuencia, para un valor de K dado, mientras mayor sea, en valor absoluto, el valor de α_0 , más pequeño, alrededor del origen, es el intervalo de convergencia y de existencia de las trayectorias.

Considere el sistema en lazo cerrado:

$$y^{(n)} = -\alpha_0y - \alpha_1\dot{y} - \dots - \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \xi(t)$$

Con $\sup_{t \geq 0} |\xi(t)| = K$ y siendo, $p(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$, un polinomio de Hurwitz. Definamos el vector: $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T$. El sistema perturbado anterior es de la forma: $\dot{x} = Ax + b\xi(t)$, con A siendo una matriz, estable, en forma canónica compañera y b un vector de ceros, excepto por la última componente la cual es la unidad. La matriz, $Q = A +$

A^T , es simétrica y negativa definida, con autovalores reales y negativos, que designamos por $\lambda(Q)$. Sea $\lambda_{max}(Q)$ el menos negativo de todos los autovalores (el menor en valor absoluto). La función candidata de Lyapunov, $V(x) = \frac{1}{2}x^T x = \frac{1}{2}\|x\|^2$, satisface:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2}x^T(A + A^T)x + x^T b\xi(t) \\ &\leq -\frac{1}{2}|\lambda_{max}(Q)|\|x\|^2 + K\|x\| \end{aligned}$$

La esfera: $\|x\|^2 \leq \frac{4K^2}{|\lambda_{max}(Q)|^2}$, define el conjunto de convergencia de todas las trayectorias que se inician fuera de ella en el espacio de fases de coordenadas, $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$, y representa el conjunto de contención de aquellas trayectorias que se inician en su interior. Mientras más alejados del eje imaginario se encuentren los autovalores de la matriz A (es decir, las raíces de $p(s)$), y por ende, más alejados del origen, sobre la recta real, los de Q , más pequeño es el radio de la esfera hacia donde convergen, o donde quedan atrapadas, las trayectorias del sistema en lazo cerrado en el espacio de fases.

REFERENCIAS

- Bazanella, A. S., P. Kokotovic y A. Silva (1999). A dynamic extension for l_{gv} controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Cortés-Romero, J., A. Luviano-Juárez y H. Sira-Ramírez (2009). Robust GPI controller for trajectory tracking for induction motors. In: *IEEE International Conference on Mechatronics*. Málaga, Spain. pp. 1–6.
- Diop, S. y M. Fliess (1991). Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. In: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, England. pp. 714 – 719.
- Fliess, M. y C. Join (2008). Intelligent PID controllers. In: *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*. pp. 326 –331.
- Fliess, M. y J. Rudolph (1997). Corps de hardy et observateurs asymptotiques locaux pour systèmes différentiellement plats. *C.R. Academie des Sciences de Paris* **324, Serie II b**, 513–519.
- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin y P. Rouchon (1995). Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and applications. *International Journal of Control* **61**, 1327–1361.
- Fliess, M., R. Marquez, E. Delaleau y H. Sira-Ramírez (2002). Correcteurs Proportionnels Intégraux Généralisés. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* **7(2)**, 23–41.
- Fliess, M., C. Join y H. Sira-Ramirez (2008). Non-linear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control* **4(1)**, 12–27.
- Gao, Z. (2006). Active disturbance rejection control: A paradigm shift in feedback control system design. In: *American Control Conference*. Minnesota, USA. pp. 2399–2405.
- Gao, Z., Y. Huang y J. Han (2001). An alternative paradigm for control system design. In: *40th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 5. pp. 4578–4585.
- Goodwin, G. C., J. I. Yuz, J. C. Agüero, M. Cea (2010). Sampling and sampled-data models. In: *American Control Conference*. Baltimore, MD, USA, Junio 30-Julio 02, 2010.
- Han, J. (2009). From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56(3)**, 900–906.

- Hingorani, N. G. y L. Gyugyi (2000). *Understanding FACTS*. IEEE Press. Piscataway, N.J.
- Johnson, C. D. (1971). Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Johnson, C. D. (1982). *Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and applications*. Chap. Discrete-Time Disturbance-Accommodating Control Theory, pp. 224–315. Vol. 18. Academic Press. NY.
- Johnson, C. D. (2008). Real-time disturbance-observers; origin and evolution of the idea. part 1: The early years. In: *40th Southeastern Symposium on System Theory*. New Orleans, LA, USA.
- Kailath, T. (1979). *Linear Systems*. Information and System Science Series. Prentice-Hall. Upper Saddle River, N.J.
- Kennedy, M. P. (1992). Robust op-amp realization of Chua's circuit. *Frequenz*, **46**(34), 66–80.
- Lévine J. (2009). *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-based Approach*. Springer.
- Leroquais, W. y B. d'Andrea Novel (1999). Modelling and control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: The unicycle case. *European Journal of Control* **5**(2-4), 312–315.
- Luviano-Juarez, A., J. Cortes-Romero y H. Sira-Ramirez (2010). Synchronization of chaotic oscillators by means of Generalized Proportional Integral observers. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **20**(5), 1509–1517.
- Maggiore, M. y K.M. Passino (2005). Output feedback tracking: A separation principle approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(1), 111–117.
- Martinez-Vazquez, D. L., A. Rodriguez-Angeles y H. Sira-Ramírez (2009). Robust GPI observer under noisy measurements. In: *6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*. México D.F. pp. 1–5.
- Mohadjer, M. y C. D. Johnson (1983). Power system control with disturbance-accommodation. In: *22nd IEEE Conference on Conference on Decision and Control*. San Antonio, Texas.
- Pai, M. A. (1989). *Energy Function Analysis for Power System Stability*. Kluwer Academic Publishers.
- Sira-Ramírez, H. y M. Fliess (2004). On the output feedback control of a synchronous generator. In: *Proceedings of the 43rd. IEEE Conference on Decision and Control*. Bahamas.
- Sira-Ramírez, H. y S.K. Agrawal (2004). *Differentially α t systems*. Marcel Dekker Inc.
- Sira-Ramírez, H., M. Velasco-Villa, A. Rodríguez-Angeles (2010). Trajectory tracking control of an input delayed monocycle. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, Baltimore, Maryland.
- Sun, B. y Z. Gao (2005). A dsp-based active disturbance rejection control design for a 1-kw h-bridge dc-dc power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **52**(5), 1271–1277.
- Sun, D. (2007). Comments on active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **54**(6), 3428–3429.
- Sussman, H. y P. K. Kokotovic (1991). The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(4), 424–439.
- Tôrres L.A.B. y L.A. Aguirre (2000). Inductorless Chua's circuit. *Electronics Letters* **36** (23), 1915–1926.