

## IDENTIFICACIÓN DE MODELOS LPV PARA EL CONTROL DE SISTEMAS NO LINEALES \*

J. V. Salcedo \* y M. Martínez \*

\* Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera 14, Apdo. 22012 E-46071 Valencia, España. Tel: +34-963879571. Fax: +34-963879579. E-mail: [jsalcedo@isa.upv.es](mailto:jsalcedo@isa.upv.es)

**Resumen:** En este artículo se propone una metodología para la identificación de modelos lineales de parámetros variables con el tiempo (LPV) basada en la identificación lineal previa en diferentes puntos de funcionamiento que permite la adaptación a modelos no lineales en general. Los modelos LPV se caracterizarán por contener dentro de sus trayectorias dinámicas a las del sistema no lineal de origen y se definirán mediante dependencia lineal fraccional (LFR) de los parámetros variables con el tiempo. Una vez identificado el modelo LPV es posible diseñar, a su vez, un controlador lineal de parámetros variables con el tiempo para controlar al sistema no lineal. Esta metodología de identificación y control se aplicará sobre un motor no lineal turbodiesel. Copyright © 2006 CEA-IFAC.

**Palabras Clave:** Identificación, sistemas no lineales, sistemas lineales de parámetros variables con el tiempo, ecuaciones en derivadas parciales, motores térmicos.

### 1. INTRODUCCIÓN

La identificación de modelos lineales locales de sistemas no lineales se puede realizar empleando las mismas técnicas de identificación desarrolladas para sistemas lineales (Ljung, 1999). Así, para representar adecuadamente a un determinado sistema no lineal dentro de cierta región de operación parece necesario obtener por identificación un número suficiente de modelos lineales en diferentes puntos de funcionamiento, de tal forma que las posibles variaciones de ganancia, de tiempo de establecimiento, de sobreoscilación, etc., queden reflejadas en los modelos identificados. Una vez que se dispone de todos estos modelos, surge la problemática de cómo integrarlos para poder realizar un diseño adecuado de un único controlador o varios que garanticen de forma segura determinadas especificaciones en dicha región de operación. Por ejemplo, es posible diseñar controladores lineales para cada modelo lineal identificado, conmutándolos mediante

alguna ley de planificación de ganancia basada en alguna variable externa. Las aplicaciones concretas de esta metodología, en general, suelen ser realizaciones *ad hoc* dependientes del problema que se analiza y con una componente heurística en la determinación de cómo y cuándo realizar la conmutación. La razón de esta problemática se debe a que la aproximación del problema a un multimodelo lineal es difícil de tratar de forma global.

Una alternativa consiste en identificar un sólo modelo no lineal que represente el comportamiento global del sistema en toda la región de funcionamiento, requiriendo, *a priori*, la propuesta de una determinada estructura para el modelo a identificar. Evidentemente, este procedimiento es más complejo pues es necesario tener una cierta garantía de que esta estructura representa al proceso en todo su rango de funcionamiento y tener acceso a técnicas de optimización globales para su ajuste, dado que las funciones a optimizar podrían ser no convexas.

En este artículo, como alternativa a las dos opciones anteriores, se propone la obtención de un modelo li-

\* Financiado parcialmente por los proyectos FEDER-CYCIT: DPI2004-08383-C03-02 y DPI 2005-07835.

neal de parámetros variables con el tiempo (LPV) que incluya todas las trayectorias dinámicas del sistema no lineal y que permita, a su vez, el diseño de un controlador LPV. Se adoptará la dependencia lineal fraccional (LFR) respecto de los parámetros variables con el tiempo.

La identificación LPV en la literatura especializada presenta diversos enfoques. En una parte importante de los casos se trata de identificar directamente un modelo LPV a partir de los datos experimentales. En (Nemani *et al.*, 1995; Lee y Poolla, 1999; Mazzaro *et al.*, 1999; Bamieh y Giarré, 2002) se minimiza el valor cuadrático medio del error de predicción para ajustar el modelo LPV a los datos experimentales de entradas, salidas y parámetros variables con el tiempo, siguiendo las mismas ideas del método de identificación PEM<sup>1</sup> empleado para sistemas lineales invariantes (Ljung, 1999). En las referencias (Nemani *et al.*, 1995; Mazzaro *et al.*, 1999; Bamieh y Giarré, 2002) el problema de optimización se reduce a un problema de mínimos cuadrados clásico, mientras que en (Lee y Poolla, 1999) se emplea un método de programación no lineal debido a que la optimización no es tratable analíticamente. Los métodos propuestos en (Bamieh y Giarré, 2002; Lee y Poolla, 1999) pueden aplicarse a cualquier número de parámetros variables con el tiempo mientras que los propuestos en (Nemani *et al.*, 1995; Mazzaro *et al.*, 1999) sólo son aplicables cuando hay un parámetro variable con el tiempo único. En cuanto a las representaciones utilizadas en (Nemani *et al.*, 1995; Lee y Poolla, 1999; Mazzaro *et al.*, 1999) se emplea un modelo en espacio de estados para el sistema LPV mientras que en (Bamieh y Giarré, 2002) se emplea un modelo entrada/salida. Por otro lado, en (Verdult y Verhaegen, 2002) se emplea un método de identificación derivado del método de subespacios utilizado para identificar modelos en espacio de estados para sistemas lineales (Ljung, 1999), y con la restricción adicional de que la dependencia del modelo con respecto de los parámetros variables es afín, a diferencia de las referencias anteriores, que proponen dependencias racionales o más complejas. Finalmente, (Sznaier y Mazzaro, 2003) propone una identificación mediante interpolación de un modelo LPV, que está compuesto de dos partes: una paramétrica que viene dada por una combinación lineal de modelos LPV fijados *a priori* y una no paramétrica que está acotada, *a priori*, en norma infinito. Para la interpolación se emplean LMIs basadas en la aplicación de la teoría de interpolación de Carathéodory-Fejér. Cabe destacar, además, que (Mazzaro *et al.*, 1999; Schnaier y Mazzaro, 2003) presentan metodologías de identificación robusta, a diferencia del resto.

Una alternativa a la identificación directa de modelos LPV está basada en la identificación a partir de modelos locales (Bodenheimer y Bendotti, 1995; Bodenheimer *et al.*, 1996). La identificación de modelos

locales lineales y su posterior ajuste a un modelo LPV es una técnica más sencilla y sistemática comparada con la identificación directa de un modelo LPV la cual requiere, *a priori*, de un esfuerzo previo en la determinación de una estructura de parámetros variables con el tiempo adecuada, además de que el proceso de ajuste debe hacerse con todas las muestras disponibles, lo que resulta más dificultoso desde un punto de vista numérico.

Para este trabajo se asume que el modelo no presenta incertidumbres, dejando su consideración para futuros desarrollos.

El resto del artículo está estructurado de la siguiente forma:

- En la sección 2 se presenta la nomenclatura a utilizar.
- En la sección 3 se presentan conceptos básicos relativos a sistemas LPV.
- En la sección 4 se realiza una breve revisión del método de identificación de las referencias (Bodenheimer y Bendotti, 1995; Bodenheimer *et al.*, 1996), y a partir de ella se desarrolla la metodología de identificación de modelos LPV propuesta en este artículo.
- En la sección 5 se aplica dicha metodología para la identificación de un motor diesel sobrealimentado y se muestra su utilidad para el diseño de controladores LPV.
- Finalmente las conclusiones se presentan en la sección 6.

## 2. NOMENCLATURA

$\text{diag}(\cdot)$  representa una matriz diagonal por bloques cuyas entradas diagonales son las matrices indicadas entre paréntesis.

$y_j^{eq}$  representa el valor de la  $j$ -ésima componente del vector de salidas en el equilibrio.

$u_l^{eq}$  representa el valor de la  $l$ -ésima componente del vector de entradas en el equilibrio.

$\bar{y}^{eq}$  representa el valor del vector de salidas en el equilibrio.

$\bar{u}^{eq}$  representa el valor del vector de entradas en el equilibrio.

## 3. SISTEMAS LPV

Los sistemas lineales de parámetros variables con el tiempo son un tipo particular de sistemas lineales variables con el tiempo. Éstos últimos pueden representarse mediante un modelo de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Método del error de predicción (*Prediction error method*).

donde la dependencia de las matrices de la representación interna con respecto de  $k$  puede ser cualquiera.

Un sistema lineal de parámetros variables con el tiempo se caracteriza porque las matrices de la representación interna son función de uno o varios parámetros variables con el tiempo  $\lambda_i(k)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k) &= \mathbf{f}_A(\Lambda(k)), \quad \mathbf{B}(k) = \mathbf{f}_B(\Lambda(k)) \\ \mathbf{C}(k) &= \mathbf{f}_C(\Lambda(k)), \quad \mathbf{D}(k) = \mathbf{f}_D(\Lambda(k)) \\ \Lambda(k) &= \text{diag}(\lambda_1(k)\mathbf{I}_{s_1}, \lambda_2(k)\mathbf{I}_{s_2}, \dots, \lambda_r(k)\mathbf{I}_{s_r}) \end{aligned} \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{I}_{s_j}$  la matriz identidad de tamaño  $s_j$ . Los parámetros  $\lambda_i$  pueden representar, por ejemplo, constantes físicas o señales de salida del sistema.

En este trabajo se ha utilizado un tipo concreto de sistemas LPV, aquellos en los cuales la dependencia funcional  $\mathbf{f}_*$  es lineal fraccional (LFR) (El Gahoui y Scorletti, 1996):

$$\mathbf{f}_* = \mathbf{M}_* + \mathbf{L}_*\Lambda(k)(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_*\Lambda(k))^{-1}\mathbf{R}_* \quad (3)$$

esta dependencia permite que la función así definida con respecto de los parámetros  $\lambda_i(k)$  sea racional. En concreto, es usual utilizar una dependencia LFR conjunta para las cuatro matrices:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}(\Lambda(k)) & \mathbf{B}(\Lambda(k)) \\ \hline \mathbf{C}(\Lambda(k)) & \mathbf{D}(\Lambda(k)) \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) + \\ + \left( \begin{array}{c} \mathbf{B}_\Lambda \\ \hline \mathbf{D}_{y,\Lambda} \end{array} \right) \Lambda(k) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_\Lambda \Lambda(k))^{-1} (\mathbf{C}_\Lambda \quad \mathbf{D}_{\Lambda,u}) \end{aligned} \quad (4)$$

Por ejemplo, si la matriz  $\mathbf{A}(\Lambda(k))$  tiene orden 1 y la matriz  $\Lambda(k)$  es de orden 2 con parámetros  $\lambda_1(k)$  y  $\lambda_2(k)$  resulta:

$$\begin{aligned} a(\Lambda(k)) &= a + (b_{\Lambda,1} \quad b_{\Lambda,2}) \begin{pmatrix} \lambda_1(k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(k) \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \left( \mathbf{I}_2 - d_\Lambda \begin{pmatrix} \lambda_1(k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(k) \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} c_{\Lambda,1} \\ c_{\Lambda,2} \end{pmatrix} \\ a(\Lambda(k)) &= a + b_{\Lambda,1} \cdot c_{\Lambda,1} \frac{\lambda_1(k)}{1 - d_\Lambda \lambda_1(k)} + \\ &+ b_{\Lambda,2} \cdot c_{\Lambda,2} \frac{\lambda_2(k)}{1 - d_\Lambda \lambda_2(k)} \end{aligned} \quad (5)$$

En particular, la dependencia LFR se reduce a la dependencia afín si la matriz  $\mathbf{D}_\Lambda$  es nula. En el ejemplo anterior este hecho se observa fácilmente al anular  $d_\Lambda$ .

Esta dependencia LFR es bastante general ya que puede ser utilizada para representar adecuadamente una gran cantidad de sistemas no lineales (El Gahoui y Scorletti, 1996; Dussy y El Ghaoui, 1997; El Ghaoui y Niculescu, 2000), tomando como parámetros  $\lambda_i(k)$  a ciertas señales de salida del sistema involucradas en los términos no lineales de su modelo. Para justificar que el modelo LPV representa bien al sistema no lineal se utilizan técnicas de inclusión diferencial (Boyd *et al.*, 1994). Dichas técnicas se basan en incluir dentro de las trayectorias dinámicas del modelo LPV las correspondientes al sistema no lineal.

Este resultado permite afirmar que un modelo LPV con dependencia LFR podría representar adecuada-

mente a un sistema no lineal para el que no se dispone de un modelo, aunque sí es posible realizar sobre él diversos experimentos de identificación. El paso siguiente sería pues, plantear una metodología para poder ajustar mediante identificación dicho modelo LPV con dependencia LFR.

#### 4. METODOLOGÍA DE AJUSTE A UN MODELO LPV

##### 4.1 Revisión previa

Las referencias (Bodenheimer y Bendotti, 1995; Bodenheimer *et al.*, 1996) presentan una metodología que consiste en tratar de ajustar un modelo LPV con dependencia LFR que reproduzca a los diferentes modelos linealizados en cada uno de los puntos de funcionamiento.

Por ejemplo, en (Bodenheimer y Bendotti, 1995) se identifican modelos para un reactor nuclear en diferentes puntos de funcionamiento. Estos modelos son de primer orden para las diferentes salidas. Así, para cada salida  $\Delta y_j^2$  se obtienen los siguientes modelos lineales en función del vector de entradas  $\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)$  con la siguiente estructura:

$$\Delta x(k+1) = a(p_i)\Delta x(k) + \mathbf{b}(p_i)\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)$$

$$\Delta y_j(k+1) = c_j(p_i)\Delta x(k+1) + \mathbf{d}_j(p_i)\Delta \bar{\mathbf{u}}(k+1)^3 \quad (6)$$

El parámetro  $p_i$  representa el valor de la potencia del reactor ( $p$ ) en el punto de funcionamiento, que es una señal que se mide. En total hay  $n_{PF}$  puntos de funcionamiento identificados. Dados estos modelos se realiza un ajuste a un modelo lineal que presenta dependencia LFR con respecto al parámetro variable  $\lambda(p)$  función de la potencia del reactor:

$$\hat{a}(\lambda(p)) = a + b_\Lambda \lambda(p)(1 - d_\Lambda \lambda(p))^{-1} c_\Lambda$$

$$\hat{\mathbf{b}}(\lambda(p)) = \mathbf{b} + b_\Lambda \lambda(p)(1 - d_\Lambda \lambda(p))^{-1} \mathbf{d}_{\Lambda,u}$$

$$\hat{c}(\lambda(p)) = c + d_{y,\Lambda} \lambda(p)(1 - d_\Lambda \lambda(p))^{-1} c_\Lambda$$

$$\hat{\mathbf{d}}(\lambda(p)) = \mathbf{d} + d_{y,\Lambda} \lambda(p)(1 - d_\Lambda \lambda(p))^{-1} \mathbf{d}_{\Lambda,u} \quad (7)$$

Este modelo lineal con dependencia LFR se puede interpretar como un modelo lineal variable con el punto de funcionamiento. Éste se puede expresar de forma más compacta (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\lambda(p)) &= \left( \begin{array}{c|c} \hat{a}(\lambda(p)) & \hat{\mathbf{b}}(\lambda(p)) \\ \hline \hat{c}(\lambda(p)) & \hat{\mathbf{d}}(\lambda(p)) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{array} \right) + \\ &+ \left( \begin{array}{c} b_\Lambda \\ \hline d_{y,\Lambda} \end{array} \right) \lambda(p) (1 - d_\Lambda \lambda(p))^{-1} (c_\Lambda \quad \mathbf{d}_{\Lambda,u}) \end{aligned} \quad (8)$$

En la referencia indicada, la obtención de  $a$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $c$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $b_\Lambda$ ,  $d_{y,\Lambda}$ ,  $c_\Lambda$ ,  $\mathbf{d}_{\Lambda,u}$ ,  $\lambda(p_1)$ ,  $\dots$ ,  $\lambda(p_{n_{PF}})$  se realiza

<sup>2</sup> Las señales  $\Delta y_j$ ,  $\Delta x$  y  $\Delta \bar{\mathbf{u}}$  representan el incremento respecto de su punto de funcionamiento

<sup>3</sup> La ecuación de salida se plantea en el instante  $k+1$  ya que el objetivo del modelo local es estimar la salida en  $k+1$  conocido el punto de funcionamiento en  $k$ , el cual depende de ciertas salidas del sistema. Por tanto, este modelo local ( $a$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $c$  y  $\mathbf{d}$ ) depende del instante  $k$ .

calculando la solución minimocuadrática del índice siguiente:

$$J = \sum_{i=1}^{mpF} ((a(p_i) - \hat{a}(\lambda(p_i)))^2 + \|\mathbf{b}(p_i) - \hat{\mathbf{b}}(\lambda(p_i))\|_2^2 + (c(p_i) - \hat{c}(\lambda(p_i)))^2 + \|\mathbf{d}(p_i) - \hat{\mathbf{d}}(\lambda(p_i))\|_2^2) \quad (9)$$

con la restricción de que  $|\lambda(p_i)| < 1 \forall p_i$ . Es importante destacar que sólo se determina el valor de  $\lambda(p)$  en los puntos de funcionamiento analizados.

Este problema de ajuste mínimo cuadrático es conocido en la literatura matemática como Ajuste Mínimo-cuadrático de Curvas no Lineales<sup>4</sup>.

El modelo lineal variable con el punto de funcionamiento (7) es un caso particular de sistema lineal de parámetros variables con el tiempo. Esto es así ya que al ser la potencia del reactor una señal de salida del sistema ésta cambia con el tiempo,  $p(k)$ , cuando pasa de un punto de funcionamiento a otro, produciendo que el parámetro  $\lambda(p)$  sea también variable con el tiempo. Así pues, cuando se utiliza éste modelo (7) realmente se está utilizando el modelo LPV con dependencia LFR:

$$\begin{aligned} \lambda(p(k)) &= \lambda(k) \\ \hat{a}(\lambda(k)) &= a + b_\Lambda \lambda(k) (1 - d_\Lambda \lambda(k))^{-1} c_\Lambda \\ \hat{\mathbf{b}}(\lambda(k)) &= \mathbf{b} + b_\Lambda \lambda(k) (1 - d_\Lambda \lambda(k))^{-1} \mathbf{d}_{\Lambda,u} \\ \hat{c}(\lambda(k)) &= c + d_{y,\Lambda} \lambda(k) (1 - d_\Lambda \lambda(k))^{-1} c_\Lambda \\ \hat{\mathbf{d}}(\lambda(k)) &= \mathbf{d} + d_{y,\Lambda} \lambda(k) (1 - d_\Lambda \lambda(k))^{-1} \mathbf{d}_{\Lambda,u} \end{aligned} \quad (10)$$

Lo que no se indica en la referencia (Bodenheimer y Bendotti, 1995) es cómo se calculan o interpolan los valores de  $\lambda(k)$  a partir de  $\lambda(p_i)$  y  $\lambda(p_{i+1})$  cuando  $p(k)$  está comprendida entre los dos puntos de funcionamiento  $p_i$  y  $p_{i+1}$ .

El ajuste del modelo lineal con dependencia LFR a los modelos lineales locales podrá ser mejor, en principio, cuanto mayor número de parámetros a ajustar se presenten. El número de parámetros depende de la complejidad de la matriz  $\Lambda(k)$ , comparando el modelo LPV propuesto (10) con el caso general (4) se deduce que  $\Lambda(k) = \lambda(p(k))$ . Sería posible introducir un mayor número de parámetros en el ajuste tomando una matriz más compleja, como por ejemplo  $\Lambda(k) = \text{diag}(\lambda_1(p(k))\mathbf{I}_{s_1}, \dots, \lambda_r(p(k))\mathbf{I}_{s_r})$ , con el objetivo de lograr un mejor ajuste si inicialmente no se hubiese obtenido, aunque en (Bodenheimer y Bendotti, 1995) se justifica que el ajuste logrado es bastante bueno.

Por otro lado, en los trabajos (Bodenheimer y Bendotti, 1995; Bodenheimer *et al.*, 1996) no se realiza un ajuste del valor de las señales en los puntos de funcionamiento en los cuales se identifican modelos locales. Consecuentemente, no hay garantía de que el modelo LPV ajustado pueda alcanzar realmente los citados puntos de funcionamiento.

## 4.2 Metodología propuesta

Se propone en este trabajo ajustar minimocuadráticamente dichos valores en los puntos de funcionamiento mediante expresiones con dependencia LFR con respecto de  $\lambda(p)$ , tal y como se ha hecho con los parámetros del modelo lineal variable con el punto de funcionamiento (7):

$$\begin{aligned} \hat{y}_j^{eq}(p_i) &= y_{j,0} + y_{j,1} \lambda(p_i) (1 - y_{j,2} \lambda(p_i))^{-1} y_{j,3} \quad \forall j, i \\ \hat{u}_l^{eq}(p_i) &= u_{l,0} + u_{l,1} \lambda(p_i) (1 - u_{l,2} \lambda(p_i))^{-1} u_{l,3} \quad \forall l, i \end{aligned} \quad (11)$$

Con ello se podrá obtener un modelo LPV para el sistema no lineal que realmente reproduzca los valores de las señales en los puntos de funcionamiento forzando el ajuste antes propuesto.

Para el caso de obtención de un modelo LPV para un sistema no lineal cualquiera se tienen las siguientes expresiones para el modelo LPV y para los puntos de funcionamiento:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(k+1) &= \hat{\mathbf{A}}(\Lambda(k)) \Delta \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{B}}(\Lambda(k)) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \\ \Delta \bar{\mathbf{y}}(k+1)^5 &= \hat{\mathbf{C}}(\Lambda(k)) \Delta \mathbf{x}(k+1) + \hat{\mathbf{D}}(\Lambda(k)) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+1) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}^{eq}(\Lambda(k)) &= \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 \Lambda(k) (\mathbf{I} - \mathbf{y}_2 \Lambda(k))^{-1} \mathbf{y}_3 \\ \hat{u}^{eq}(\Lambda(k)) &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \Lambda(k) (\mathbf{I} - \mathbf{u}_2 \Lambda(k))^{-1} \mathbf{u}_3 \end{aligned} \quad (13)$$

El punto de funcionamiento,  $\mathbf{q}(k)$ , para el caso general vendrá definido por los parámetros variables con el tiempo (2):

$$\mathbf{q}(k) = (\lambda_1(k), \dots, \lambda_r(k))^T \quad (14)$$

Los diferentes puntos de funcionamiento en los cuales se realizará la identificación de un modelo local se representarán mediante  $\mathbf{q}_i$ , el cual contiene los valores concretos de los parámetros variables correspondientes a dichos puntos.

Una vez que han sido ajustados los parámetros del modelo LPV y los parámetros de los puntos de funcionamiento, el sistema no lineal puede ser representado utilizando las ideas de (Rugh y Shamma, 2000) por el modelo LPV global:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}^{eq}(\Lambda(k)) + \hat{\mathbf{A}}(\Lambda(k)) (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^{eq}(\Lambda(k))) + \\ &\quad + \hat{\mathbf{B}}(\Lambda(k)) (\bar{\mathbf{u}}(k) - \hat{\mathbf{u}}^{eq}(\Lambda(k))) \\ \bar{\mathbf{y}}(k+1) &= \hat{\mathbf{y}}^{eq}(\Lambda(k)) + \hat{\mathbf{C}}(\Lambda(k)) (\mathbf{x}(k+1) - \\ &\quad - \mathbf{x}^{eq}(\Lambda(k))) + \hat{\mathbf{D}}(\Lambda(k)) (\bar{\mathbf{u}}(k+1) - \hat{\mathbf{u}}^{eq}(\Lambda(k))) \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $\mathbf{x}^{eq}(\Lambda(k))$  es el valor del estado del modelo LPV en equilibrio, cuya dependencia respecto de  $\Lambda(k)$ , *a priori*, es desconocida (Rugh y Shamma, 2000).

De la ecuación (15) se aprecia que para que este modelo LPV global represente coherentemente al sistema no lineal identificado, debería de existir alguna

<sup>4</sup> *Nonlinear Least Squares Curve Fitting.*

<sup>5</sup>  $\Delta \bar{\mathbf{y}}$  representa el vector de incrementos de las salidas respecto de sus puntos de funcionamiento.

relación entre los parámetros del modelo LPV y los parámetros de los puntos de funcionamiento. En concreto, en (Rugh y Shamma, 2000) se indica que el modelo LPV global representa correctamente al sistema no lineal si su modelo linealizado en cada punto de funcionamiento coincide con el modelo lineal local identificado correspondiente. En dicha referencia se justifica que esta condición se verifica si  $\mathbf{x}^{eq}(\Lambda(k))$ <sup>6</sup> satisface un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Una vez obtenidas las ecuaciones en derivadas parciales, se analizará cuándo éstas poseen solución, y en caso afirmativo se obtendrá. Como se verá más adelante, las condiciones que garantizan que dichas ecuaciones en derivadas parciales posean solución establecen que debe existir una coordinación entre el ajuste de los parámetros del modelo LPV y el ajuste de los parámetros de los puntos de funcionamiento.

Se propone realizar la identificación de modelos locales en cada punto de funcionamiento ( $\mathbf{q}_i$ ) para cada una de las salidas,  $y_j$ , por separado con respecto a todas las entradas ( $\bar{\mathbf{u}}$ ) empleando un modelo en representación interna. Posteriormente, este modelo en representación interna se transforma a la estructura del modelo MISO en espacio de estados utilizado en (Salcedo *et al.*, 2002):

$$A_j(\mathbf{q}_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{0,j} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{1,j} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n_j-1,j} \end{bmatrix}_{n_j \times n_j}$$

$$B_j(\mathbf{q}_i) = \begin{bmatrix} b_{0,j,1} & b_{0,j,2} & \dots & b_{0,j,m} \\ b_{1,j,1} & b_{1,j,2} & \dots & b_{1,j,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_j-1,j,1} & b_{n_j-1,j,2} & \dots & b_{n_j-1,j,m} \end{bmatrix}_{n_j \times m}$$

$$C_j(\mathbf{q}_i) = (0 \dots 0 \ 1)_{1 \times n_j} \quad (16)$$

Hay dos razones que justifican el empleo de esta representación concreta. En primer lugar se garantiza que todos los modelos identificados poseerán la misma estructura y el mismo vector de estados, lo cual asegura que el posterior ajuste de modelos pueda ser coherente<sup>7</sup>. En segundo lugar esta representación posee un menor número de parámetros que el de la representación interna identificada por minimización minimocuadrática, que, en general, poseerá unas matrices  $A_j(\mathbf{q}_i)$  y  $C_j(\mathbf{q}_i)$  llenas de coeficientes. De esta forma, cuando se obtenga el modelo LPV sólo los coeficientes no nulos deberán ser ajustados. Es conocido que la transformación que permite obtener esta representación tiene problemas numéricos, sin embargo, para obtener esta forma canónica no es necesario determinar dicha transformación, en su lugar se puede

obtener directamente a partir de la representación entrada/salida correspondiente a las matrices originales identificadas.

El que se identifique un modelo para cada salida por separado se debe a dos razones. La primera razón se basa en el hecho de que la representación interna empleada se puede obtener, en general, para cualquier sistema MISO y no para todo sistema MIMO. La segunda razón se debe a que el modelo identificado para cada salida se ajusta mejor a los datos experimentales, en general, que cuando se identifica un modelo para todas las salidas a la vez, ya que éstas pueden poseer ganancias muy diferentes con respecto a las entradas y dinámicas, a su vez, muy diferentes entre sí.

Al agrupar los modelos correspondientes a todas las salidas se obtiene el modelo completo identificado en cada punto de funcionamiento:

$$A(\mathbf{q}_i) = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_n \end{bmatrix}_{r \times r}$$

$$B(\mathbf{q}_i) = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}_{r \times m}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & C_n \end{bmatrix}_{n \times r}$$

$$r = \sum_{j=1}^n n_j \quad (17)$$

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = A(\mathbf{q}_i) \Delta \mathbf{x}(k) + B(\mathbf{q}_i) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{y}}(k+1) = C \Delta \mathbf{x}(k+1) \quad (18)$$

Este modelo agrupado podría conducir a una representación no mínima en algún punto de funcionamiento. Este hecho no sería un problema, ya que si existen puntos de funcionamiento donde es mínima, el modelo LPV ajustado debería tener dicho número de estados ya que debe de ser capaz de representar a todos los puntos de funcionamiento. Si en una aplicación particular dicha representación resultase no mínima en todos los puntos de funcionamiento se procedería a eliminar el subespacio no controlable común a todos los puntos de funcionamiento, obteniéndose así una realización mínima en algunos de los puntos de funcionamiento resultando válido en esta situación el análisis previo.

Una vez obtenidos los modelos identificados en los diferentes puntos de funcionamiento de interés, se realiza el ajuste minimocuadrático para obtener el modelo LPV con dependencia LFR respecto de las salidas, es decir, se toman como  $\lambda_i(k)$  las diferentes salidas medibles:

$$\Lambda(k) = \text{diag}(y_1(k)I_{s_1}, y_2(k)I_{s_2}, \dots, y_n(k)I_{s_n}) \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = \hat{A}(\bar{\mathbf{y}}(k)) \Delta \mathbf{x}(k) + \hat{B}(\bar{\mathbf{y}}(k)) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{y}}(k+1) = \hat{C}(\bar{\mathbf{y}}(k)) \Delta \mathbf{x}(k+1) \quad (20)$$

<sup>6</sup> Desconocido hasta ahora.

<sup>7</sup> Con los vectores de estados obtenidos por el método de identificación no hay garantía de que se produzca esta coherencia.

Nótese que las matrices  $\mathbf{C}$  de todos los modelos linealizados son idénticas cuando se utiliza la representación interna (18), lo cual supondría que en la ecuación de salida del modelo LPV la matriz  $\hat{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{y}}(k))$  sea constante e igual a  $\mathbf{C}$ . Para realizar el ajuste habrá que minimizar el índice:

$$J = \sum_{i=1}^{n_{PF}} ( \|\mathbf{A}(\mathbf{q}_i) - \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{q}_i))\|_2^2 + \|\mathbf{B}(\mathbf{q}_i) - \hat{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{q}_i))\|_2^2 ) \quad (21)$$

Este modelo LPV correspondiente a los modelos linealizados (20) se convierte en el modelo LPV global del sistema no lineal al incorporar el ajuste con los valores de las señales de entrada y salida en los puntos de funcionamiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k)) &= \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}(k))(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))) + \\ &\quad + \hat{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{y}}(k))(\bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))) \\ \bar{\mathbf{y}}(k+1) - \bar{\mathbf{y}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k)) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))) \end{aligned} \quad (22)$$

los valores de las señales en los puntos de funcionamiento son función de las salidas, y su dependencia se obtiene al ajustar una ecuación matricial (13) con dependencia LFR con respecto de éstas.

El estado del modelo en equilibrio posee una expresión desconocida. No obstante, en (Rugh y Shamma, 2000), como ya se ha comentado, se propone su obtención imponiendo la condición de que el modelo linealizado de (22) alrededor de cada punto de funcionamiento  $(\bar{\mathbf{y}}^{eq}, \bar{\mathbf{u}}^{eq})$  coincida con el modelo linealizado ajustado (20). El modelo linealizado de (22) es:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(k+1) - \left. \frac{\partial \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))}{\partial \bar{\mathbf{y}}(k)} \right|_{\bar{\mathbf{y}}(k)=\bar{\mathbf{y}}^{eq}} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) &= \\ = \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})(\Delta \mathbf{x}(k) - \left. \frac{\partial \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))}{\partial \bar{\mathbf{y}}(k)} \right|_{\bar{\mathbf{y}}(k)=\bar{\mathbf{y}}^{eq}} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k)) + \\ + \hat{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})(\Delta \bar{\mathbf{u}}(k) - \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))}{\partial \bar{\mathbf{y}}(k)} \right|_{\bar{\mathbf{y}}(k)=\bar{\mathbf{y}}^{eq}} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k)) \\ \Delta \bar{\mathbf{y}}(k+1) - \underbrace{\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))}{\partial \bar{\mathbf{y}}(k)} \right|_{\bar{\mathbf{y}}(k)=\bar{\mathbf{y}}^{eq}}}_{=1} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) &= \\ = \mathbf{C}(\Delta \mathbf{x}(k+1) - \left. \frac{\partial \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))}{\partial \bar{\mathbf{y}}(k)} \right|_{\bar{\mathbf{y}}(k)=\bar{\mathbf{y}}^{eq}} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k)) \end{aligned} \quad (23)$$

Para que este modelo coincida con (20)  $\forall \bar{\mathbf{y}}^{eq}$  es necesario y suficiente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - (\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})) \frac{\partial \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial \bar{\mathbf{y}}} &= \hat{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial \bar{\mathbf{y}}} &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (24)$$

o equivalentemente:

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \\ \mathbf{C} \end{array} \right] \frac{\partial \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial \bar{\mathbf{y}}} = \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathbf{I} \end{array} \right] \quad (25)$$

Es importante darse cuenta de que esta ecuación diferencial vectorial es en derivadas parciales, ya que tanto el estado en equilibrio como las entradas en equilibrio

están derivadas con respecto a todas las salidas. Es posible pues tratar de obtener la expresión de los estados en equilibrio para que esta ecuación vectorial en derivadas parciales se satisfaga, ya que tras el ajuste de modelos y puntos de equilibrio se dispone de  $\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}(k))$ ,  $\hat{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{y}}(k))$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}(k))$ .

Esta ecuación vectorial está compuesta por  $r+n$  ecuaciones escalares,  $r$  filas de  $\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})$  y  $n$  filas de  $\mathbf{C}$ , y  $r$  incógnitas correspondientes a cada una de las componentes de  $\mathbf{x}^{eq}$ . Por tanto, hay más ecuaciones que incógnitas. Para que el sistema tenga solución, es necesario que, al menos,  $n$  ecuaciones sean linealmente dependientes de las otras  $r$  para todo  $\bar{\mathbf{y}}^{eq}$ . En el apéndice A se justifica para el caso de dos salidas ( $n=2$ ),  $n$  ecuaciones son dependientes del resto si y sólo si:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 - \sum_{i=0}^{n_1-1} \hat{a}_{i,1}(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \sum_{\text{filas}} \hat{\mathbf{B}}_1(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \end{array} \right] \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial y_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 - \sum_{i=0}^{n_2-1} \hat{a}_{i,2}(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \sum_{\text{filas}} \hat{\mathbf{B}}_2(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \end{array} \right] \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial y_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Estas condiciones no son más que dos ecuaciones en derivadas parciales donde se establece una relación entre los parámetros del modelo LPV y los parámetros de los puntos de funcionamiento ajustados. Si dichos conjuntos de parámetros son ajustados de forma independiente, entonces, casi con toda seguridad, estas ecuaciones no se verificarán. Para garantizar que se cumplan será necesario imponerlas como condición durante la fase de ajuste, lo cual implica que los ajustes de los parámetros del modelo LPV y de los parámetros de los puntos de funcionamiento deban realizarse simultáneamente y de forma coordinada imponiendo (26). Estas condiciones, como se puede apreciar, establecen una relación entre los parámetros del modelo LPV y las derivadas de los puntos de funcionamiento, es decir, proporcionan información adicional a la que estaba disponible durante el ajuste independiente, ya que ahora se aporta cuánto deben valer las derivadas de las entradas en los puntos de funcionamiento.

Volviendo a las ecuaciones en derivadas parciales que permiten obtener  $\mathbf{x}^{eq}$  (25), para garantizar la existencia de soluciones, además de haber exigido que el número de ecuaciones coincida con el de incógnitas, al tratarse de ecuaciones en derivadas parciales, es necesario que se cumplan las condiciones de Cauchy-Schwarz para que exista solución:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial y_j \partial y_k} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial y_k \partial y_j} \quad \forall k \neq j = 1, \dots, n \quad (27)$$

Las cuales adquieren la forma:

$$\frac{\partial \left\{ \left[ \begin{array}{c} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \\ \mathbf{C} \end{array} \right]^\dagger \left( \hat{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{y}}^{eq}) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}^{eq})}{\partial y_k} \right) \right\}}{\partial y_j} =$$

$$= \frac{\partial \left\{ \left[ \begin{array}{c} (I - \hat{A}(\bar{y}^{eq})) \\ C \end{array} \right]^\dagger \left( \begin{array}{c} \hat{B}(\bar{y}^{eq}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}(\bar{y}^{eq})}{\partial y_j} \\ V_j \end{array} \right) \right\}}{\partial y_k} \quad \forall k \neq j = 1, \dots, n \quad (28)$$

$$V_l = (V_l(1) \dots V_l(n))^T \quad ; \quad V_l(i) = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

donde  $\dagger$  indica matriz pseudoinversa.

Consecuentemente, para garantizar la existencia de  $\mathbf{x}^{eq}$  es necesario que durante la fase coordinada de ajuste de ambos conjuntos de parámetros se impongan las condiciones (26) y (28).

Si se deseara obtener la expresión de  $\mathbf{x}^{eq}$  bastaría con integrar las ecuaciones en derivadas parciales (25). Dicha integración se resuelve en el apéndice A.

Una vez garantizado que el modelo LPV global representa coherentemente a los modelos locales identificados, se verifica que todas las trayectorias dinámicas de estos modelos están presentes dentro de las trayectorias del modelo LPV global con lo cual se satisface la condición de inclusión diferencial (Boyd *et al.*, 1994).

#### 4.3 Elección de la estructura de la matriz $\Lambda(k)$

La matriz  $\Lambda(k)$  (19) depende, en general, de todas las señales de salida medibles. Sin embargo, no se ha indicado como elegir o fijar los tamaños  $s_j$  de las matrices identidad asociadas a cada una de ellas. Es evidente que a mayor tamaño de dichas matrices más compleja va a ser la dependencia LFR.

En concreto, se propone una metodología práctica de elección de los tamaños  $s_j$ . Inicialmente se toman todos ellos iguales a 1 y se resuelve el problema de optimización asociado al ajuste. Si el ajuste obtenido es satisfactorio entonces el procedimiento termina. Si no es así, se incrementan algunos de los tamaños y se repite el proceso de ajuste, y así hasta que se obtenga un resultado satisfactorio. En este trabajo se considera que el ajuste del modelo LPV es satisfactorio si el valor mínimo de  $J$  (21), mínimo error cuadrático, correspondiente al modelo LPV obtenido genera un error promedio por parámetro ajustado en el modelo LPV,  $e_p$ , inferior a una tolerancia prefijada de antemano  $\varepsilon > 0$ :

$$e_p \triangleq \frac{\sqrt{J}}{n_{par}} < \varepsilon \quad (29)$$

siendo  $n_{par}$  el número de parámetros a ajustar en el modelo LPV.

Durante la obtención del modelo LPV global se realizan dos ajustes: el de los parámetros del modelo LPV y el de los parámetros de los puntos de funcionamiento. Cuando se aplica el método antes propuesto en ambos ajustes no tiene por qué requerirse la misma

estructura para la matriz  $\Lambda(k)$  para obtener un resultado satisfactorio. Por ello, a partir de este momento se va a designar mediante  $\Lambda_M(k)$  a la matriz correspondiente al ajuste de los parámetros del modelo LPV y mediante  $\Lambda_{eq}(k)$  a la correspondiente al ajuste de los parámetros de los puntos de funcionamiento. Además, cabrá la posibilidad de determinar si el ajuste de los parámetros de los puntos de funcionamiento es satisfactorio o no. Al igual que se ha hecho para el ajuste del modelo LPV, se establece que el ajuste de dichos parámetros será satisfactorio si el error promedio por parámetro ajustado es inferior a una tolerancia fijada de antemano  $\varepsilon_{pf} > 0$ .

#### 4.4 Validación del modelo LPV

para el sistema no lineal de origen, pues se trata de uno de los objetivos de este trabajo. Por ello se pretende que dicha metodología sea considerada como de identificación orientada a control, lo cual requiere que el modelo LPV represente bien la variedad dinámica del sistema no lineal.

El modelo LPV que se obtenga con la metodología que se ha propuesto será empleado en el diseño de controladores para el sistema no lineal de origen, por lo tanto, para garantizar un correcto funcionamiento de dicho controlador, se requerirá que el modelo LPV represente de la mejor manera posible al sistema no lineal de origen.

modelos locales identificados, la metodología de validación del modelo LPV obtenido se va a basar en analizar la bondad del ajuste en: ajuste, por ello si el ajuste logrado ha sido satisfactorio<sup>8</sup> cabe esperar que los modelos locales que proporciona el modelo LPV sean muy similares a los identificados. Para analizar la similitud se recurre a comparar sus ganancias estáticas, sus polos y sus diagramas de Bode. se analizaría como el modelo LPV interpola estos nuevos modelos locales que no han sido empleados en su ajuste. Cabe esperar que en los puntos de funcionamiento cercanos a los empleados en el ajuste la interpolación sea aceptable, mientras que en puntos alejados podría ser inaceptable.

Teniendo en cuenta la metodología propuesta para la obtención del modelo LPV, el mecanismo de validación deberá asegurar, por una parte, una adecuada reproducción de las señales de entrada y salida en los puntos de funcionamiento elegidos para la sintonía del modelo LPV, y por otra, que exista una adecuada coincidencia de los modelos lineales locales alrededor de dichos puntos de funcionamiento<sup>9</sup>.

inaceptable sería necesario incorporar más puntos de funcionamiento, en particular dichos puntos al menos, y repetir el ajuste del modelo LPV.

<sup>8</sup> De acuerdo con las ideas del punto anterior.

<sup>9</sup> La comparación de los modelos podría llevarse a cabo bien a través de su formulación E/S o en espacio de estados.

funcionamiento sea aceptable en toda la zona de operación. Será necesario analizar, primero, la interpolación en los puntos de funcionamiento utilizados en el ajuste, la cual cabe esperar que sea buena, y en segundo lugar otros puntos de funcionamiento al igual que para el caso de interpolación de los modelos locales.

Para completar la validación del modelo LPV también debería establecerse una adecuada coincidencia para señales de entrada y salida y modelos locales en puntos interpolados y extrapolados de aquellos elegidos para la sintonía del modelo LPV. No obstante, parece razonable pensar que el resultado de la validación será tanto peor cuanto más alejados nos encontremos de las zonas que delimitan los puntos de funcionamiento utilizados para la sintonía debiéndose, en estos casos, incorporar estos puntos en el proceso de sintonía.

## 5. APLICACIÓN: MOTOR DIESEL SOBREALIMENTADO

### 5.1 Introducción

En la actualidad los motores diesel con grupo turbocompresor disfrutan de mejor rendimiento y de mayor potencia que los motores diesel atmosféricos. Sin embargo, como consecuencia de la sobrealimentación y de las temperaturas y presiones más elevadas dentro del motor, se produce el efecto desfavorable de producción de óxidos de nitrógeno  $NO_x$  en los gases de escape. La actual normativa sobre la producción de tales óxidos es bastante restrictiva, por lo cual los fabricantes han optado por incluir en el diseño la recirculación de gases inertes ( $H_2O$  y  $CO_2$ ) desde el colector de escape al colector de admisión, dando lugar al circuito denominado EGR. Al gasto másico recirculado de estos gases se le denomina  $\dot{m}_{EGR}$ , el cual puede modificarse mediante la válvula EGR situada en el circuito EGR. El principal problema de este mecanismo es que reduce de forma significativa las prestaciones del motor. Por otro lado, en un futuro próximo las normativas serán mucho más restrictivas y el sistema actual de gestión del aire con toda probabilidad no podrá alcanzar los niveles de óxidos de nitrógeno que se exigirán.

Para poder contrarrestar la pérdida de potencia o de par del motor debida a los gases recirculados, se puede modificar el grado de apertura de la turbina (turbinas de geometría variable denominadas TGV), haciendo que la presión de los gases en el colector de escape aumente o disminuya, y, en consecuencia, se consiga una mayor o menor potencia mecánica en la misma, que se empleará para que el compresor genere mayores o menores presiones de sobrealimentación. Conforme se aumenta la presión de sobrealimentación se consigue un mayor gasto másico de aire  $\dot{m}_a$  (que permitirá emplear un mayor gasto de combustible) y, por tanto, conseguir un mayor par motor.

El punto de funcionamiento definido por el fabricante para el motor turbodiesel viene dado por las dos variables siguientes:

- Cantidad de combustible inyectada ( $\dot{m}_f$ ), que viene impuesta por el pedal del acelerador.
- Régimen de giro del motor (N), que viene impuesto por el par motor y el par resistente de la carretera.

Para cada punto de funcionamiento el fabricante posee un mapa en el que se indican las cantidades de gasto de aire ( $\dot{m}_a$ ) y de presión en el colector de admisión ( $P_a$ ) que se requieren para evitar los humos y los óxidos de nitrógeno, así como para garantizar un determinado par motor. Ambos valores son las referencias que han de emplearse para poder fijar las posiciones de las válvulas de EGR y TGV mediante el algoritmo de control que se implemente, y conseguir así reducir la emisión de contaminantes y la potencia requerida por el usuario.

### 5.2 Modelo del motor

En colaboración con el Departamento de Máquinas y Motores Térmicos de la Universidad Politécnica de Valencia se ha desarrollado una primera aproximación a lo que sería un modelo simplificado del conjunto compresor+motor+circuito de EGR+turbina (véase figura 1) utilizando una metodología similar a la empleada en (Guzzella y Amstutz, 1998; Guzzella y Onder, 2004).

Este modelo consta tanto de ecuaciones diferenciales, como de ecuaciones estáticas así como de tablas obtenidas a partir de experimentos realizados sobre el motor real. Dada esta particular estructura, se planteó su implementación en el entorno Simulink de Matlab con el objetivo de obtener un modelo de fácil simulación (Salcedo *et al.*, 2001).

Para realizar las simulaciones existe la posibilidad de modificar ciertas variables según la situación:

1. Régimen de giro del motor (N).

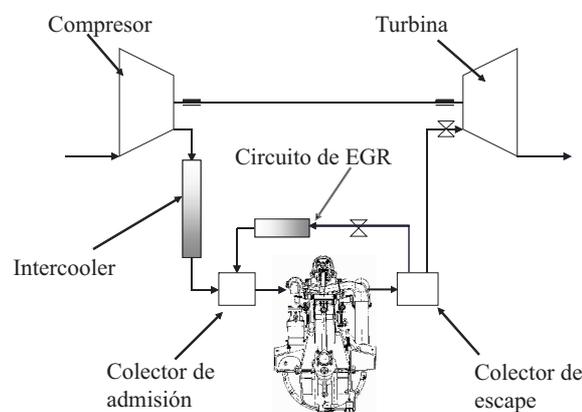


Figura 1. Esquema de un motor diesel con turbocompresor

2. Gasto másico de combustible ( $\dot{m}_f$ ).
3. % Apertura válvula EGR.
4. % Apertura válvula TGV.

De todas las variables de salida que proporciona este modelo en Simulink cabe destacar las siguientes:

1. Gasto másico de aire trasegado por el compresor ( $\dot{m}_a$ ).
2. Presión en el colector de admisión ( $P_a$ ).

que son las dos salidas controladas del sistema.

La validación del modelo obtenido corrió a cargo de los investigadores del Departamento de Motores, los cuales llegaron a la conclusión de que se comporta de forma muy similar a un motor real.

### 5.3 Identificación de un modelo LPV

A pesar de disponer de un modelo Simulink del motor, dicho modelo no es útil para diseñar controladores que traten de estabilizar al sistema en una determinada zona de operación. Por ello, se propone identificar un modelo LPV para el mismo, a partir de este modelo Simulink, utilizando la metodología propuesta en la sección anterior. La principal dificultad de esta metodología reside en el ajuste por mínimos cuadrados, ya que, en general, *a priori* no se conoce la estructura de la matriz  $\Lambda(k)$  que vaya a tener el modelo LPV y el problema de optimización será, casi seguro, no convexo.

Para la obtención del modelo LPV se van a fijar los valores del régimen de giro y del gasto de combustible siguientes:  $N = 1500$  rpm y  $\dot{m}_f = 0.003$  Kg/s, que corresponden a valores del motor real. Con ello se consigue tener un sistema 2x2: acciones de control %TGV y %EGR, salidas controladas  $\dot{m}_a$  y  $P_a$ . Empleando el modelo Simulink se comprueba que al fijar  $N$  y  $\dot{m}_f$ ,  $\dot{m}_a$  puede variar entre 90 y 120 Kg/h y  $P_a$  puede variar entre 1 y 1.2 bar. En concreto, los puntos de funcionamiento analizados se muestran en la figura 2. Es importante destacar que dentro de los rangos alcanzables para cada salida controlada no ha sido posible obtener todas las combinaciones posibles de ellas. No obstante, los puntos mostrados en dicha figura son representativos de las combinaciones alcanzables. Se podrían plantear más puntos alcanzables, pero tras los experimentos pareció razonable utilizar sólo los mostrados. Hay que tener en cuenta que a mayor número de puntos más modelos y, por tanto, más complejidad computacional para la obtención del modelo LPV por ajuste.

La identificación de los modelos linealizados en los diferentes puntos de funcionamiento se realizó siguiendo los siguientes pasos:

1. Generación de las señales de entrada excitantes para %EGR y %TGV. Se optó por emplear señales PRBS (*Pseudo Random Binary Signal*).

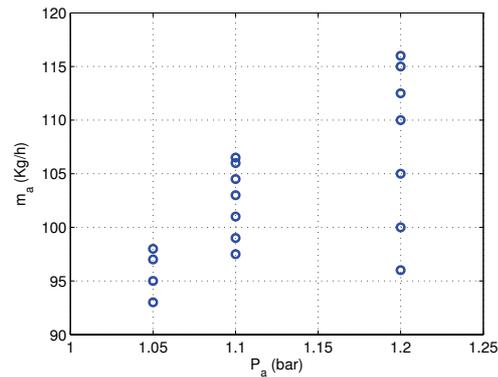


Figura 2. Zona de operación analizada para el motor diesel

2. Simulación del modelo Simulink sometido a estas señales PRBS.
3. Identificación de modelos de segundo orden en representación interna para ambas salidas. Con esta elección se observó un buen ajuste.

Estos modelos identificados se transforman a la representación interna indicada en (16). Como ya se comentó, al utilizar esta representación particular todas las matrices  $C$  son idénticas y, por tanto, no es necesario ajustar la matriz  $C(\bar{y}(k))$  ya que coincide con  $C$ . Dados los modelos en esta representación interna, el paso final consiste en ajustar las matrices  $A$  y  $B$  locales a un modelo LPV con dependencia LFR mediante optimización minimocuadrática. Esta tarea ha sido realizada con la ayuda de la *Optimization Toolbox* de Matlab que implementa el algoritmo de ajuste minimocuadrático no lineal propuesto por Levenberg y Marquardt. Para garantizar un buen ajuste ( $\varepsilon = 0.01$ ) es necesario seleccionar la estructura de la matriz  $\Lambda_M(k)$  siguiendo las ideas del punto 4.3, en concreto, tras una serie de intentos se obtuvo la siguiente:

$$\Lambda_M(k) = \begin{pmatrix} (P_a(k) - 1.1278)I_3 & 0 \\ 0 & (\dot{m}_a(k) - 103.0556)I_3 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Los valores 1.1278 y 103.0556 representan, respectivamente, los valores promedio de  $P_a$  y  $\dot{m}_a$  en los puntos de funcionamiento analizados. Su uso en el ajuste ha facilitado el problema de optimización.

El ajuste se ha realizado, por un lado, para obtener un modelo LPV para  $P_a$ , y, por otro, para obtener un modelo LPV para  $\dot{m}_a$ . El modelo LPV correspondiente a  $P_a$  se muestra en la ecuación (34), y el correspondiente a  $\dot{m}_a$  en la ecuación (35).

Tras esto se obtuvieron los valores de las variables manipuladas (%EGR y %TGV) en los puntos de funcionamiento mostrados en la figura 2. Para su determinación se emplearon dos PIDs para estabilizar el motor en los puntos de funcionamiento deseados. Los PIDs fueron diseñados a partir de un modelo linealizado del motor para el punto de funcionamiento  $P_a = 1.2$  bar y  $\dot{m}_a = 100$  Kg/h. El primer PID estabiliza  $P_a$

mediante %TGV, y el segundo  $\dot{m}_a$  mediante %EGR. Este procedimiento es una metodología habitualmente empleada para controlar procesos multivariables.

Los valores de las variables manipuladas, %TGV y %EGR, para los diferentes puntos de equilibrio han sido ajustados mediante dependencia LFR con respecto de  $P_a$  y  $\dot{m}_a$ . Para llevar a cabo este ajuste se requiere elegir la estructura de la matriz  $\Lambda_{eq}(k)$  siguiendo la metodología propuesta en el punto 4.3. Tras una serie de intentos de ajuste para %EGR y %TGV se observó la necesidad de utilizar la siguiente estructura para  $\Lambda_{eq}(k)$  de cara a garantizar un buen ajuste ( $\epsilon_{pf} = 0.01$ ):

$$\Lambda_{eq}(k) = \begin{pmatrix} (P_a(k) - 1.1278)\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\dot{m}_a(k) - 103.0556)\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

que resulta ser menos compleja que la deducida para  $\Lambda_M(k)$  (30).

En la sección anterior se mostró que los parámetros del modelo LPV y los parámetros de los puntos de funcionamiento deben satisfacer determinadas condiciones (26) (28). Por ello, a nivel práctico se procede a reajustar los parámetros de los puntos de funcionamiento, ya ajustados antes de forma aislada, para que se cumpla la primera condición (26). Este reajuste consiste en agregar al índice de ajuste términos adicionales que penalicen de forma cuadrática la no satisfacción de (26):

$$\begin{aligned} & \left\| \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{n_1-1} a_{i,1}} \sum_{\text{filas}} \mathbf{B}_1 \\ \sum_{\text{filas}} \mathbf{B}_2 \end{array} \right] \frac{\partial \bar{u}^{eq}}{\partial y_1} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 + \\ & + \left\| \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{n_2-1} a_{i,2}} \sum_{\text{filas}} \mathbf{B}_2 \\ \sum_{\text{filas}} \mathbf{B}_1 \end{array} \right] \frac{\partial \bar{u}^{eq}}{\partial y_2} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \quad (31) \end{aligned}$$

Tras este reajuste se logró que se verificase aproximadamente dicha condición obteniéndose los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \%EGR(\Lambda_{eq}(k)) &= \%EGR_0 + \%EGR_1 \Lambda_{eq}(k) (I - \%EGR_2 \Lambda_{eq}(k))^{-1} \%EGR_3 = \\ &= 67.6567 + (45.7295 \quad -13.1682 \quad -2.5689 \quad -1.8963) \cdot \Lambda_{eq}(k) \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} -9.3118 & -17.5138 & 0.0902 & 1.1073 \\ 9.1019 & 0.8676 & -0.0508 & -0.5492 \\ -1.2622 & -2.2126 & 0.0036 & 0.0746 \\ -0.1330 & 1.4614 & 0.0211 & 0.0493 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14.8849 \\ 7.2524 \\ 3.6351 \\ -0.6077 \end{pmatrix} \\ \%TGV(\Lambda_{eq}(k)) &= \%TGV_0 + \%TGV_1 \Lambda_{eq}(k) (I - \%TGV_2 \Lambda_{eq}(k))^{-1} \%TGV_3 = \\ &= 43.9517 + (9.7142 \quad -2.7235 \quad 1.6473 \quad -0.9210) \cdot \Lambda_{eq}(k) \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} -6.9053 & -6.3849 & -0.0164 & -0.3172 \\ -3.4293 & -9.5395 & 0.7457 & 0.5598 \\ 0.3089 & -0.3053 & 0.1118 & -0.0001 \\ -0.2381 & -1.5791 & 0.1316 & 0.0324 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -16.3780 \\ 10.4702 \\ 0.4342 \\ 0.4424 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además, la otra condición (28) se cumple, tras este reajuste, también de forma aproximada.

#### 5.4 Validación del modelo LPV

Se realiza en esta sección la validación del modelo LPV deducido en la subsección anterior. Se seguirán

las indicaciones realizadas en el punto 4.4, por lo que dicho proceso de validación se realizará en 4 fases, dos dedicadas a comprobar el ajuste de señales y otras 2 dedicadas a comprobar el ajuste de modelos.

LPV en todos los puntos de funcionamiento empleados en el ajuste: señales de entrada %EGR y %TGV, y modelos locales.

1.- Reproducción de las señales %EGR y %TGV en los puntos de funcionamiento empleados para la sintonía del modelo LPV.

En la tabla 1 se muestran los valores de la entrada %EGR obtenidos para el motor y sus valores ajustados para algunos de los puntos de funcionamiento empleados en la sintonía del modelo LPV, junto con el error relativo entre ambos. En la tabla 2 se representan, de forma similar, los resultados para la entrada %TGV. En todos los casos el error relativo es siempre inferior al 1%.

ajustados para algunos de los puntos de funcionamiento empleados en el ajuste, junto con el error relativo entre ambos. En la tabla 2 se representa la misma información para la entrada %TGV. Como se puede apreciar, en todos los casos el error relativo es siempre inferior al 1%, lo cual indica un buen ajuste.

2.- Reproducción de los modelos locales en los puntos de funcionamiento empleados para la sintonía del modelo LPV.

En la tabla 3 se muestra, para alguno de los puntos de funcionamiento, el error relativo (%) existente entre las ganancias estáticas de los modelos identificados del motor para  $P_a$  y  $\dot{m}_a$  respecto de los modelos locales procedentes del modelo LPV ajustado para dichos puntos de funcionamiento<sup>10</sup>. La mayor discrepancia entre ganancias se da para el punto de funcionamiento (1.05, 98) con un error relativo de aproximadamente 1% para los modelos correspondientes a  $P_a$  y de apro-

<sup>10</sup> Dicho error relativo se obtiene calculando la norma 2 de la diferencia entre la matriz de ganancias estáticas correspondiente al modelo identificado y la correspondiente al modelo local ajustado, dividida por la norma 2 de la matriz de ganancias estáticas del modelo identificado y multiplicado por 100.

Tabla 1 Valores de %EGR del motor y ajustados, y error relativo entre ambos.

$P_a$	$\dot{m}_a$	%EGR Motor	%EGR Ajus.	E. Rel. (%)
1.05	98	47.284	47.298	0.03024
1.05	93	98.491	98.489	0.00263
1.05	97	57.877	57.854	0.03975
1.1	97.5	95.887	95.9	0.01319
1.1	99	81.08	81.082	0.00307
1.1	104.5	26.468	26.477	0.03418
1.1	103	41.858	41.853	0.01102
1.1	106	9.872	9.8712	0.00820
1.2	112.5	22.244	22.258	0.06320
1.2	115	9.043	9.0286	0.15938
1.2	105	56.853	56.828	0.04305
1.2	110	34.223	34.231	0.02472
1.2	100	79.456	79.464	0.01055

Tabla 2 Valores de %TGV del motor y ajustados, y error relativo entre ambos.

$P_a$	$\dot{m}_a$	%TGV Motor	%TGV Ajus.	E. Rel. (%)
1.05	98	97.177	97.168	0.00964
1.05	93	89.573	89.596	0.02529
1.05	97	95.502	95.514	0.01236
1.1	97.5	52.226	52.255	0.05656
1.1	99	52.818	52.79	0.05334
1.1	104.5	55.21	55.233	0.04028
1.1	103	54.509	54.49	0.03415
1.1	106	55.98	55.996	0.02969
1.2	112.5	26.448	26.48	0.12210
1.2	115	27.455	27.453	0.00904
1.2	105	23.824	23.833	0.03700
1.2	110	25.523	25.555	0.12503
1.2	100	22.262	22.265	0.01004

ximadamente 5 % para los modelos correspondientes a  $\dot{m}_a$ .

Tabla 3 Errores relativos en norma 2 entre las ganancias de los modelos locales identificados para  $P_a$  y  $\dot{m}_a$  y de los modelos ajustados.

$P_a$	$\dot{m}_a$	E. Rel. Gan. $P_a$ (%)	E. Rel. Gan. $\dot{m}_a$ (%)
1.05	93	0.9633	1.8224
1.05	97	0.97039	2.4699
1.05	98	1.0677	4.8358
1.1	104.5	0.12312	0.39525
1.1	106	0.078078	0.13592
1.1	99	0.38338	1.3826
1.1	103	0.36929	1.5451
1.1	97.5	0.12924	0.4451
1.2	100	0.023138	0.5884
1.2	110	0.043421	2.2746
1.2	115	0.0055637	0.32359
1.2	105	0.025652	3.1658
1.2	112.5	0.043003	0.73383

Para validar los aspectos dinámicos se representa la respuesta en frecuencia del valor singular de la matriz de transferencia de respuesta en frecuencia correspondiente a los modelos para  $P_a$  y  $\dot{m}_a$  pertenecientes a un punto de funcionamiento<sup>11</sup>, concretamente el que peor comportamiento tenía en el ajuste estático, punto (1.05, 98). En las figuras 3 y 4 se representan la respuesta en frecuencia del valor singular tanto del modelo identificado como del modelo local ajustado, para  $P_a$  y  $\dot{m}_a$ , respectivamente. Como se aprecia ambos trazados son muy similares lo que garantiza la aproximación entre los modelos identificados y los ajustados. Gráficas similares se obtienen para el resto de puntos de funcionamiento empleados en el ajuste.

relativo medido en norma 2 de la discrepancia entre las ganancias estáticas de los modelos identificados para  $P_a$  y  $\dot{m}_a$  y de los modelos locales ajustados.

relativo de aproximadamente 1 % para los modelos correspondiente a  $P_a$  y de aproximadamente un 5 %

<sup>11</sup> Los modelos correspondientes a  $P_a$  y  $\dot{m}_a$  son  $1 \times 2$ , por tanto su matriz de transferencia de respuesta en frecuencia es una matriz  $1 \times 2$  la cual posee un único valor singular que es función de la frecuencia.

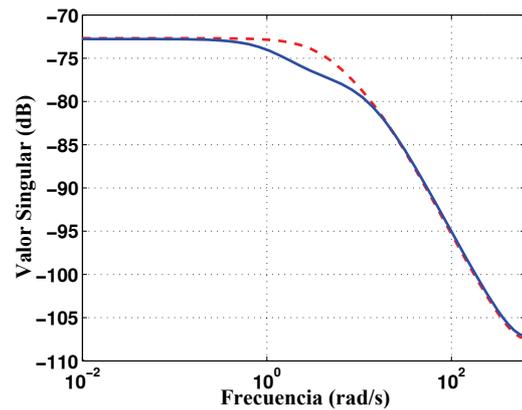


Figura 3. Respuesta en frecuencia del valor singular del modelo identificado (línea continua) y del modelo ajustado (línea a trazos) para  $P_a$  en el punto de funcionamiento (1.05, 98).

para los modelos correspondientes a  $\dot{m}_a$ . En concreto, para dicho punto de funcionamiento en las figuras 3 y 4 se muestran la respuesta en frecuencia del valor singular correspondientes a los modelos identificados y ajustados para la salida  $P_a$  y  $\dot{m}_a$ , respectivamente. Como se aprecia ambos trazados son muy similares lo que garantiza la aproximación entre los modelos identificados y los ajustados. Gráficas similares se obtienen para el resto de puntos de funcionamiento empleados en el ajuste.

funcionamiento diferentes a los empleados en el ajuste.

3.- Reproducción de las señales %EGR y %TGV en puntos de funcionamiento no empleados para la sintonía del modelo LPV.

En la tabla 4 se muestran para algunos puntos de funcionamiento distintos de los empleados en el ajuste o sintonía, los errores relativos entre los valores correspondientes a las señales %EGR y %TGV proporcionados por el motor no lineal y por el ajuste de

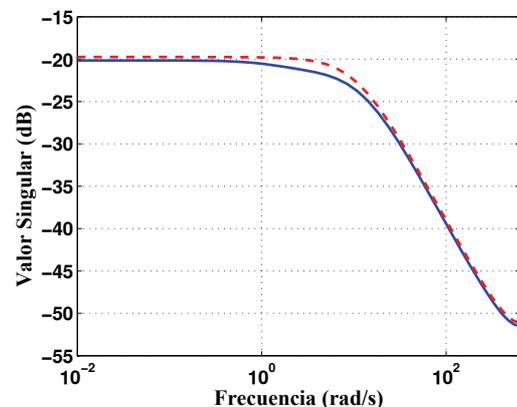


Figura 4. Respuesta en frecuencia del valor singular del modelo identificado (línea continua) y del modelo ajustado (línea a trazos) para  $\dot{m}_a$  en el punto de funcionamiento (1.05, 98).

los valores de las entradas en los puntos de funcionamiento. Como se aprecia los errores son relativamente pequeños, salvo en algunos puntos en los cuales se alcanzan valores de casi un 17%.

Tabla 4 Errores relativos entre los valores de %EGR y %TGV correspondientes al motor y al ajuste.

$P_a$	$\dot{m}_a$	E. Rel. %EGR (%)	E. Rel. %TGV (%)
1.1	102	0.0258	0.075
1.2	102.5	0.0215	0.0081
1.11	105	12.5662	0.4836
1.19	99	2.3620	1.4747
1.19	110	4.8360	0.2506
1.08	101	9.8164	0.0148
1.08	98	3.0808	0.4114
1.12	103	12.0351	0.1764
1.11	99	0.0091	1.4377
1.06	96	2.0111	1.1748
1.19	106	4.3801	0.2635
1.085	103	16.8184	0.0085
1.19	104	3.8008	0.5611
1.09	99	1.9035	0.5714

4.- Reproducción de los modelos locales en puntos de funcionamiento no empleados para la sintonía del modelo LPV.

El punto de funcionamiento que presenta una peor interpolación en el análisis anterior es (1.085, 103), ya que presenta un error relativo de aproximadamente 17% en la señal %EGR. Para dicho punto de funcionamiento en las figuras 5 y 6 se han representado las respuestas en frecuencia de los valores singulares correspondientes a las matrices de transferencia de los modelos identificados y ajustados por el modelo LPV para  $P_a$  y  $\dot{m}_a$ , respectivamente.

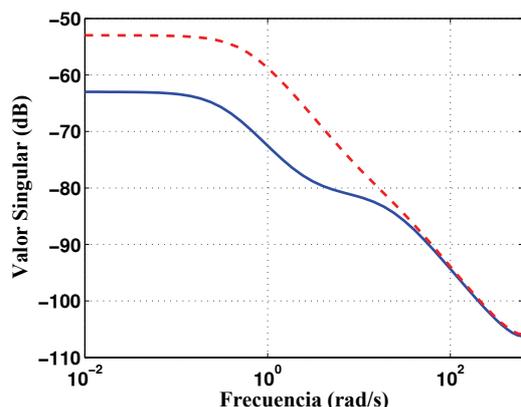


Figura 5. Respuesta en frecuencia del valor singular del modelo identificado (línea continua) y del modelo ajustado (línea a trazos) para  $P_a$  en el punto de funcionamiento (1.085, 103).

Como se aprecia la discrepancia es mayor para el modelo de  $P_a$ , esencialmente debido a una diferente matriz de ganancias estáticas, mientras que el comportamiento a medias y altas frecuencias es más parecido. Para otros puntos de funcionamiento se obtienen resultados similares.

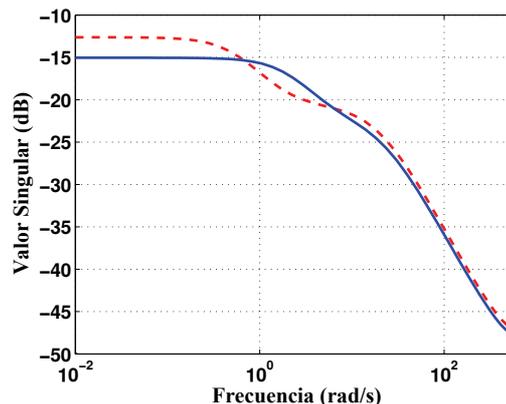


Figura 6. Respuesta en frecuencia del valor singular del modelo identificado (línea continua) y del modelo ajustado (línea a trazos) para  $\dot{m}_a$  en el punto de funcionamiento (1.085, 103).

Se podría concluir que el modelo LPV representa una adecuada aproximación del modelo no lineal de origen, tanto mejor cuanto más cercano a puntos de funcionamiento que sirvieron para su sintonía. El alejamiento de dichos puntos supone una peor reproducibilidad, tal y como era de esperar.

modelo LPV obtenido para el motor. Dicha forma alternativa se basa en el hecho de que el controlador diseñado para dicho modelo LPV estiliza al motor no lineal a pesar de las discrepancias que se ha justificado que existen a nivel de las señales %EGR y %TGV y de modelos locales.

### 5.5 Aplicación al diseño de controladores

Como muestra de la utilidad del modelo LPV global identificado se describe someramente el diseño de un controlador basado en él y dado que se verifica la condición de inclusión diferencial satisfará al sistema no lineal.

Una primera alternativa podría ser diseñar un controlador lineal robusto que trate de absorber la no linealidad del sistema. Sin embargo, los controladores lineales presentan, a diferencia de los controladores no lineales, una limitada capacidad de control sobre sistemas no lineales. Por ello, dado el modelo LPV global se podría plantear la posibilidad de diseñar un controlador no lineal utilizando técnicas típicas para sistemas no lineales.

Otra alternativa más acorde con la obtención de un modelo LPV es el diseño también de un controlador lineal de parámetros variables con el tiempo (El Gahoui y Scorletti, 1996; Apkarian y Adams, 1998; El Ghaoui y Niculescu, 2000; Scherer, 2001) con dependencia lineal fraccional respecto de las salidas medibles:

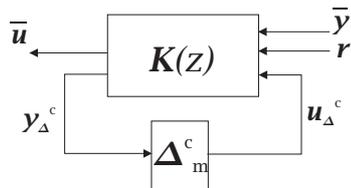


Figura 7. Estructura de un controlador LPV

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^c(k+1) \\ \mathbf{y}_{\Delta}^c(k) \\ \mathbf{u}^c(k) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}^c & \mathbf{B}_{\Delta}^c & \mathbf{B}_r^c & \mathbf{B}_y^c \\ \mathbf{C}_{\Delta}^c & \mathbf{D}_{\Delta}^c & \mathbf{D}_{\Delta,r}^c & \mathbf{D}_{\Delta,y}^c \\ \mathbf{C}^c & \mathbf{D}_{u,\Delta}^c & \mathbf{D}_r^c & \mathbf{D}_y^c \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}(z)} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^c(k) \\ \mathbf{u}_{\Delta}^c(k) \\ \mathbf{r}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{\Delta}^c(k) = \Delta_m^c(k) \mathbf{y}_{\Delta}^c(k), \quad (32)$$

$\Delta_m^c(k)$  es una matriz que depende de las señales de salida medibles y  $\mathbf{r}(k)$  es el vector de referencias. En la figura 7 se representa la estructura de este tipo de controladores.

En concreto, esta metodología ha sido utilizada por los autores para proponer el controlador predictivo generalizado (Clarke *et al.*, 1987a; Clarke *et al.*, 1987b) lineal de parámetros variables con el tiempo, GPC-LPV (Salcedo *et al.*, 2005). Este controlador predictivo presenta una dependencia lineal fraccional con respecto a las salidas medibles. Su diseño se realiza en dos fases:

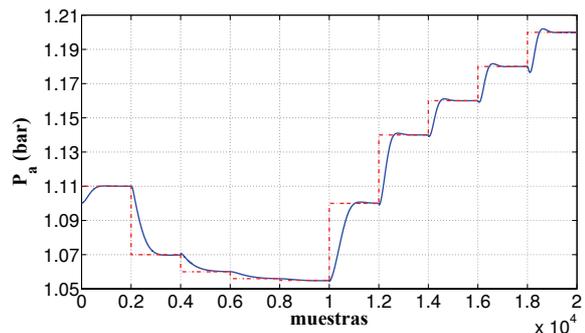
1. En la primera fase se diseña un GPC lineal (Clarke *et al.*, 1987a) transformado a su representación en espacio de estados, utilizando como modelo del proceso el modelo lineal correspondiente a sustituir en el modelo LPV la matriz  $\Lambda_M(k)$  por su valor correspondiente a un punto de funcionamiento cualquiera. Con ello se obtienen las matrices  $\mathbf{A}^c$ ,  $\mathbf{B}_r^c$ ,  $\mathbf{B}_y^c$ ,  $\mathbf{C}^c$ ,  $\mathbf{D}_r^c$  y  $\mathbf{D}_y^c$ .
2. En una segunda fase se diseñan el resto de matrices del controlador (32) empleando desigualdades bilineales matriciales (BMIs<sup>12</sup>) (VanAntwerp y Braatz, 2000). Una desigualdad bilineal matricial es una desigualdad de la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j \mathbf{F}_{i,j} > 0. \quad (33)$$

donde  $> 0$  indica que la matriz es definida positiva, siendo  $\mathbf{F}_i$  matrices simétricas conocidas y  $x_i$  incógnitas a obtener.

Las BMIs se obtienen al fijar las especificaciones del diseño: estabilización del modelo LPV, acotación de normas entre ciertas señales de entrada y salida, etc.

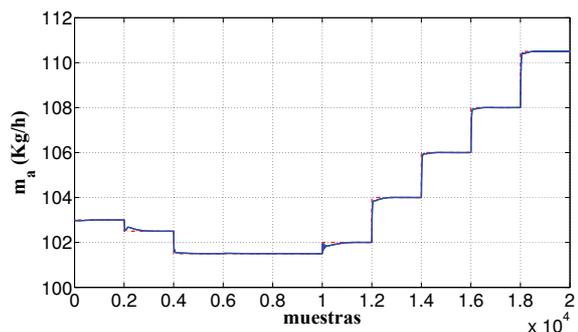
En la referencia (Salcedo, 2005) se diseña un GPC-LPV para el modelo LPV global obtenido para el motor con la condición de que el controlador estabilice robustamente al modelo en toda la región de operación definida. En las figuras 8 y 9 se muestran las respuestas de las salidas controladas junto a las referencias

Figura 8. Respuesta de  $P_a$  bajo el GPC-LPV

impuestas, y en las figuras 10 y 11 se representan las acciones de control aplicadas por dicho GPC-LPV. Como se aprecia, los resultados muestran un control aceptable y que las salidas controladas tratan de abarcar toda la región de operación.

## 6. CONCLUSIONES

- Para el caso de sistemas no lineales se ha propuesto una metodología de identificación de modelos LPV con dependencia lineal fraccional cuyas trayectorias dinámicas contienen a las del proceso no lineal.
- Esta metodología consiste en obtener diversos modelos lineales identificados en diferentes puntos de funcionamiento y, posteriormente, mediante ajuste minimocuadrático utilizando el algoritmo de Levenberg y Marquardt, se obtiene un modelo LPV que trata de reproducir a los modelos identificados en cada punto de funcionamiento.
- Se trata el aspecto de la integración entre los modelos lineales identificados y los valores de las señales correspondientes a cada punto de funcionamiento. Se ha propuesto una metodología basada en dos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que garantizan la concordancia entre ambos durante la fase de ajuste minimocuadrático.
- Como ejemplo, se ha aplicado la metodología propuesta al modelo de un motor diesel turboalimentado. Este ejemplo demuestra la utilidad práctica de dicha propuesta.

Figura 9. Respuesta de  $m_a$  bajo el GPC-LPV

<sup>12</sup> Bilinear matrix inequalities.

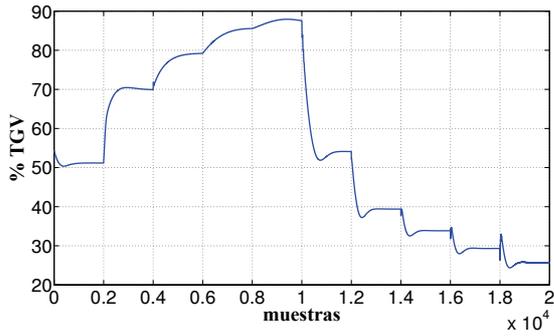


Figura 10. Acción de control %TGV aplicada por el GPC-LPV

- El modelo LPV identificado se puede utilizar para el diseño de controladores no lineales o lineales de parámetros variables con el tiempo.
- Se han mostrado resultados satisfactorios del control del motor turbodiesel con un controlador GPC-LPV.

#### Apéndice A. DEMOSTRACIONES

La ecuación diferencial vectorial (25) es un sistema de  $n + r$  ecuaciones con  $r$  incógnitas. Dicho sistema tendrá solución si hay, al menos,  $n$  ecuaciones dependientes del resto, o equivalentemente:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} (I - \hat{A}(\bar{y}^{eq})) & \hat{B}(\bar{y}^{eq}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}(\bar{y}^{eq})}{\partial \bar{y}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} (I - \hat{A}(\bar{y}^{eq})) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Para el caso de dos salidas, dada la particular estructura de las matrices  $\hat{A}(\bar{y})$  y  $\mathbf{C}$ , la cuestión reside en justificar que en la matriz siguiente hay  $n = 2$  filas dependientes del resto:

$$\begin{bmatrix} (I - \hat{A}(\bar{y}^{eq})) & \hat{B}(\bar{y}^{eq}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}(\bar{y}^{eq})}{\partial \bar{y}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} =$$

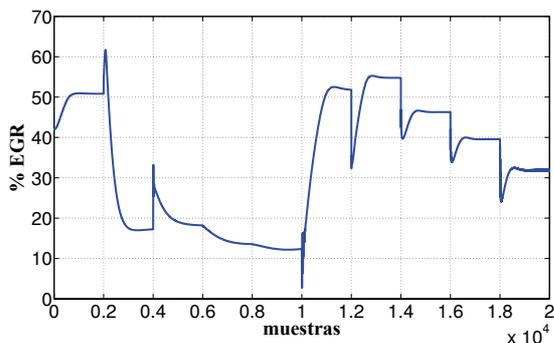


Figura 11. Acción de control %EGR aplicada por el GPC-LPV

$$= \begin{bmatrix} I_{n_1} - \hat{A}_1(\bar{y}^{eq}) & \mathbf{0} & \hat{B}_1(\bar{y}^{eq}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}}{\partial y_1} & \hat{B}_1(\bar{y}^{eq}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}}{\partial y_2} \\ \mathbf{0} & I_{n_2} - \hat{A}_2(\bar{y}^{eq}) & \hat{B}_2(\bar{y}^{eq}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}}{\partial y_1} & \hat{B}_2(\bar{y}^{eq}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}}{\partial y_2} \\ 0 \dots 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 \dots 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso en que los modelos identificados no tienen integradores, entonces es fácil justificar que hay exactamente dos filas dependientes del resto si y sólo si:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{n_1-1} \hat{a}_{i,1}(\bar{y}^{eq})} \sum_{\text{filas}} \hat{B}_1(\bar{y}^{eq}) \\ \sum_{\text{filas}} \hat{B}_2(\bar{y}^{eq}) \end{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^{eq}(\bar{y}^{eq})}{\partial y_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{n_2-1} \hat{a}_{i,2}(\bar{y}^{eq})} \sum_{\text{filas}} \hat{B}_2(\bar{y}^{eq}) \\ \sum_{\text{filas}} \hat{B}_1(\bar{y}^{eq}) \end{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^{eq}(\bar{y}^{eq})}{\partial y_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estas condiciones son fácilmente extensibles al caso de mayor número de salidas.

Para el caso particular de que alguno de los modelos correspondientes a una salida tuviese algún integrador, por ejemplo, la número 1, entonces su correspondiente condición sería:

$$\begin{bmatrix} \sum_{\text{filas}} \hat{B}_1(\bar{y}^{eq}) \\ \sum_{\text{filas}} \hat{B}_2(\bar{y}^{eq}) \end{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^{eq}(\bar{y}^{eq})}{\partial y_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema de ecuaciones en derivadas parciales tenga solución se deben de cumplir, además, las condiciones de Cauchy-Schwarz relativas a las derivadas segundas. Una vez que se ha justificado que la solución existe, hay que integrar dichas ecuaciones. Se va a esbozar cómo obtener una solución para el caso de tener sólo dos salidas,  $n = 2$ , aunque el método es perfectamente válido para un mayor número.

Sea el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial x^{eq}}{\partial y_1} = \begin{bmatrix} (I - \hat{A}(\bar{y})) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{B}(\bar{y}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}(\bar{y})}{\partial y_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_1(y_1, y_2)$$

$$\frac{\partial x^{eq}}{\partial y_2} = \begin{bmatrix} (I - \hat{A}(\bar{y})) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{B}(\bar{y}) \frac{\partial \tilde{u}^{eq}(\bar{y})}{\partial y_2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f_2(y_1, y_2)$$

Es importante observar que las funciones  $f_1$  y  $f_2$  presentan una dependencia LFR con respecto de  $y_1$  e  $y_2$ . Si se integra la primera ecuación con respecto de  $y_1$  se obtiene que el estado en equilibrio debe tener la forma:

$$x^{eq} = \int f_1(y_1, y_2) dy_1 + g(y_2)$$

donde  $g$  puede ser cualquier función arbitraria de  $y_2$ . Si esta fórmula se sustituye en la segunda ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \int f_1(y_1, y_2) dy_1 + \frac{dg}{dy_2} = f_2(y_1, y_2)$$

$$\begin{aligned}
& (A_{P_a}(\Lambda_M(k)) | B_{P_a}(\Lambda_M(k))) = (A_{P_a} | B_{P_a}) + B_{P_a, \Lambda} \Lambda_M(k) (I - D_{P_a, \Lambda} \Lambda_M(k))^{-1} (C_{P_a, \Lambda} | D_{P_a, \Lambda, u}) = \\
& = \begin{pmatrix} 0 & -0.8683 & -1.2063 \cdot 10^{-5} & 1.5134 \cdot 10^{-5} \\ 1 & 1.8681 & 1.2031 \cdot 10^{-5} & -1.6317 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.3675 & 3.6314 & -1.0461 & 0.0797 & -0.0270 & 0.3550 \\ -1.0506 & -8.0678 & -0.8572 & -0.0828 & 0.0279 & -0.3545 \end{pmatrix} \Lambda_M(k) \cdot \\
& \cdot \left( I_6 - \begin{pmatrix} 0.5960 & 0.9246 & -0.5833 & 0.4099 & 0.2969 & 0.0013 \\ -0.1709 & -0.5993 & 0.3231 & 0.2405 & 0.0402 & 0.1072 \\ 1.9570 & 2.2998 & -4.1452 & 0.0195 & 0.2319 & -0.2417 \\ -0.0663 & 0.7888 & -0.8255 & -0.0308 & 0.0666 & 0.0257 \\ 0.0484 & -1.5073 & -0.5309 & -0.1389 & 0.1580 & 0.0436 \\ -0.4513 & -0.2079 & -0.2525 & -0.0198 & -0.0106 & -0.0011 \end{pmatrix} \Lambda_M(k) \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.1182 & -2.6591 \cdot 10^{-5} & 1.7523 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.0614 & -0.7453 \cdot 10^{-5} & 3.5521 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.0058 & -1.4076 \cdot 10^{-5} & -3.9178 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.0012 & -0.6964 \cdot 10^{-5} & -0.3396 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.0054 & -1.0880 \cdot 10^{-5} & -0.0465 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -0.0089 & -0.0599 \cdot 10^{-5} & -0.7830 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \quad (34)
\end{aligned}$$

lo cual permite obtener la función  $\mathbf{g}$  integrando con respecto de  $y_2$  esta última ecuación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(y_2) &= \int \mathbf{f}_2(y_1, y_2) dy_2 - \\
&- \int \left( \frac{\partial}{\partial y_2} \int \mathbf{f}_1(y_1, y_2) dy_1 \right) dy_2
\end{aligned}$$

Con lo que una solución del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{eq} &= \int \mathbf{f}_1(y_1, y_2) dy_1 + \int \mathbf{f}_2(y_1, y_2) dy_2 - \\
&- \int \left( \frac{\partial}{\partial y_2} \int \mathbf{f}_1(y_1, y_2) dy_1 \right) dy_2
\end{aligned}$$

Es posible justificar que todas las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se diferencian en una constante arbitraria. La fórmula presentada proporciona una de ellas cualquier otra se puede obtener sumando una constante cualquiera.

De este resultado se deduce que para resolver dicho sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales basta con saber integrar y derivar funciones matriciales con dependencia LFR. La derivación es el procedimiento más sencillo, y se puede deducir la siguiente fórmula para la misma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(\Lambda(z)) &= \mathbf{M} + \mathbf{L}\Lambda(z)(\mathbf{I} - \mathbf{D}\Lambda(z))^{-1} \mathbf{R} \\
\frac{d\mathbf{G}}{dz} &= \mathbf{L} \frac{d\Lambda(z)}{dz} \mathbf{R} + \left[ \mathbf{L} + \mathbf{L} \frac{d\Lambda(z)}{dz} \mathbf{D} \right] \begin{pmatrix} \Lambda(z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda(z) \end{pmatrix} \cdot \\
&\cdot \left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{D} \frac{d\Lambda(z)}{dz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda(z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda(z) \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \frac{d\Lambda(z)}{dz} \mathbf{R} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

como  $\mathbf{G}$  depende fraccionalmente con respecto de  $z$  entonces se asume que  $\Lambda(z)$  sólo depende afínmente de  $z$ , con lo cual se garantiza que la derivada vuelve a tener una dependencia LFR con respecto de  $z$ .

La integración resulta un tanto más compleja, y tiene como principal característica, que, en general, no conduce a una representación con dependencia LFR:

$$\int \mathbf{G}(\Lambda(z)) dz = \int (\mathbf{M} + \mathbf{L}\Lambda(z)(\mathbf{I} - \mathbf{D}\Lambda(z))^{-1} \mathbf{R}) dz$$

Si la matriz  $\mathbf{D}$  es invertible, es decir, todos sus valores propios son distintos de cero, entonces se puede mostrar que la integral tiene la expresión:

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{G}(\Lambda(z)) dz &= \int (\mathbf{M} + \mathbf{L}(-\mathbf{D}^{-1} + \\
&+ \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{D}\Lambda(z))^{-1}) \mathbf{R}) dz = \\
&= (\mathbf{M} - \mathbf{L}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R})z + \int (\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{D}\Lambda(z))^{-1} \mathbf{R}) dz = \\
&= (\mathbf{M} - \mathbf{L}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R})z - \mathbf{D}^{-2} \log(\mathbf{I} - \mathbf{D}\Lambda(z)) \mathbf{R}
\end{aligned}$$

donde el último paso requiere conocer que la primitiva de  $-\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{D}\Lambda(z))^{-1}$  es la función logaritmo matricial  $\log(\mathbf{I} - \mathbf{D}\Lambda(z))$ . En todo el desarrollo se ha supuesto que  $\Lambda(z) = \mathbf{I}z$ , lo cual no resta generalidad al resultado.

En el caso de que  $\mathbf{D}$  no sea invertible, es decir, tenga algún valor propio en cero, entonces el procedimiento a seguir es más complejo. En primer lugar se debe calcular su descomposición de Schur real que se puede obtener con la función *schur* de Matlab, y ordenar los elementos de la matriz<sup>13</sup> de tal forma que ésta adopte la estructura siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbf{T}^T \begin{pmatrix} \mathbf{D}_I & \mathbf{D}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_0 \end{pmatrix} \mathbf{T} = \\
&= (\mathbf{T}_{1c}^T \quad \mathbf{T}_{1c}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{D}_I & \mathbf{D}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{1f} \\ \mathbf{T}_{1f} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

siendo  $\mathbf{D}_0$  una matriz que sólo tiene valores propios en cero, es decir, una matriz nilpotente, y  $\mathbf{D}_I$  una

<sup>13</sup> Por ejemplo, con la función *orschur* disponible en Matlab 7.0.1 y versiones posteriores.

$$\begin{aligned}
& (A_{\bar{m}_a}(\Lambda_M(k)) | B_{\bar{m}_a}(\Lambda_M(k))) = (A_{\bar{m}_a} | B_{\bar{m}_a}) + B_{\bar{m}_a, \Lambda} \Lambda_M(k) (I - D_{\bar{m}_a, \Lambda} \Lambda_M(k))^{-1} (C_{\bar{m}_a, \Lambda} | D_{\bar{m}_a, \Lambda, u}) = \\
& = \begin{pmatrix} 0 & -0.8721 & 1.1337 \cdot 10^{-2} & -0.7268 \cdot 10^{-2} \\ 1 & 1.8721 & -1.1352 \cdot 10^{-2} & 0.7000 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.0677 & -1.5163 & 3.2300 & -0.1295 & 0.1656 & 0.2362 \\ -1.0999 & 1.7531 & -3.2016 & 0.1316 & -0.1583 & -0.2358 \end{pmatrix} \Lambda_M(k) \cdot \\
& \cdot \left( I_6 - \begin{pmatrix} 2.1071 & -2.0461 & -0.0833 & 1.3615 & 0.0366 & -0.0883 \\ -3.8453 & 2.1076 & -1.3796 & 0.2788 & -0.2140 & -0.1767 \\ 3.1570 & -5.8776 & 2.8766 & 0.4769 & -0.5487 & 1.0598 \\ -0.9692 & -0.3370 & 0.2413 & 0.0343 & 0.1801 & -0.0283 \\ 0.1508 & -1.0368 & 0.2809 & 0.0513 & -0.0183 & 0.0065 \\ -0.1332 & -0.7943 & 0.5497 & 0.0145 & -0.1361 & -0.0794 \end{pmatrix} \Lambda_M(k) \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.2461 & 2.1049 \cdot 10^{-2} & -3.4088 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0.0954 & 0.6359 \cdot 10^{-2} & -0.2414 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0.1074 & 2.8879 \cdot 10^{-2} & -5.1313 \cdot 10^{-2} \\ 0 & -0.0217 & -0.1337 \cdot 10^{-2} & -0.4090 \cdot 10^{-2} \\ 0 & -0.0070 & -0.0268 \cdot 10^{-2} & -0.1890 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0.0457 & -0.0597 \cdot 10^{-2} & 1.4174 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \quad (35)
\end{aligned}$$

matriz invertible. Con esta descomposición, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Lambda(z)(I - D\Lambda(z))^{-1} &= \\ &= T^T z \begin{pmatrix} I - D_I z & -D_{1,2} z \\ \mathbf{0} & I - D_0 z \end{pmatrix}^{-1} T = \\ &= T_{1c}^T z (I - D_I z)^{-1} T_{1f} + \\ &+ T_{1c}^T z (I - D_I z)^{-1} D_{1,2} z (I - D_0 z)^{-1} T_{2f} + \\ &+ T_{2c}^T z (I - D_0 z)^{-1} T_{2f} \end{aligned}$$

Como la matriz  $D_0$  es nilpotente entonces existe  $k > 0$  tal que  $D_0^k \neq \mathbf{0}$  y  $D_0^{k+1} = \mathbf{0}$ . En tal caso se tiene que:

$$(I - D_0 z)^{-1} = I + D_0 z + D_0^2 z^2 + \dots + D_0^k z^k$$

Tras todos estos cálculos se obtiene que:

$$\begin{aligned} G(z) &= M + L T_{1c}^T T_{1c}^T z (I - D_I z)^{-1} T_{1f} R + \\ &+ L T_{1c}^T z (I - D_I z)^{-1} D_{1,2} (I z^2 + \\ &+ D_0 z^3 + \dots + D_0^k z^{k+2}) T_{2f} R + L T_{2c}^T (I z + \\ &+ D_0 z^2 + D_0^2 z^3 + \dots + D_0^k z^{k+1}) T_{2f} R \end{aligned}$$

como ahora  $D_I$  es invertible se puede aplicar el método expuesto para el caso en que  $D$  es invertible. La única salvedad es que hay que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} z^j (I - D_I z)^{-1} &= -D_I^{-1} z^{j-1} - D_I^{-2} z^{j-2} - \dots - \\ &- D_I^{-j} + D_I^{-j} (I - D_I z)^{-1} \end{aligned}$$

## REFERENCIAS

- Apkarian, P. y R. J. Adams (1998). Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **6**(1), 21–32.
- Bamieh, B. y L. Giarré (2002). Identification of linear parameter varying models. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **12**, 841–853.
- Bodenheimer, B., P. Bendotti y M. Kanter (1996). Linear Parameter-Varying Control of a Ducted Fan Engine. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **6**(9-10), 1023–1044.
- Bodenheimer, B. y P. Bendotti (1995). Optimal Linear Parameter-Varying Control Design for a Pressurized Water Reactor. En: *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*. pp. 182–187.
- Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. vol. 15 ed.. SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia.
- Clarke, D.W., C. Mohtadi y P.S. Tuffs (1987a). Generalized predictive control-part I. *Automatica* **23**(2), 137–148.
- Clarke, D.W., C. Mohtadi y P.S. Tuffs (1987b). Generalized predictive control-part II. Extensions and Interpretations. *Automatica* **23**(2), 149–160.
- Dussy, S. y L. El Ghaoui (1997). *Multiobjective bounded control of uncertain nonlinear systems: an inverted pendulum example*. pp. 55–73. Control of uncertain systems with bounded inputs. Springer, Berlin.
- El Ghaoui, L. y G. Scorletti (1996). Control of Rational Systems using Linear-fractional Representations and Linear Matrix Inequalities. *Automatica* **32**(9), 1273–1284.
- El Ghaoui, L. y Niculescu, S., Eds. (2000). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. SIAM. Advances in Design and Control.
- Guzzella, L. y A. Amstutz (1998). Control of Diesel Engines. *IEEE Control Systems Magazine* **8**(9), 55–71.
- Guzzella, L. y C. H. Onder (2004). *Introduction to Modeling and Control of Internal Combustion Engine Systems*. Springer.
- Lee, L. H. y K. Poolla (1999). Identification of Linear Parameter-Varying Systems Using Nonlinear Programming. *Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control* **121**, 71–78.
- Ljung, L. (1999). *System Identification. Theory for the user. Second Edition*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Mazzaro, M. C., B. A. Movsichoff y R. S. Sánchez Peña (1999). Robust Identification of Linear Parameter Varying Systems. En: *Proceedings of the American Control Conference*. pp. 2282–2284.
- Nemani, M., R. Ravikanth y B. A. Bamieh (1995). Identification of Linear Parametrically Varying Systems. En: *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*. pp. 2990–2995.
- Rugh, W. J. y J. S. Shamma (2000). Research on gain scheduling. *Automatica* **36**, 1401–1425.
- Salcedo, J. V. (2005). GPCs En Espacio de Estados Para el Control de Sistemas No Lineales. PhD thesis. Universidad Politécnica de Valencia.
- Salcedo, J. V., M. Martínez, C. Ramos y J. M. Herro (2005). GPC-LPV: a predictive LPV controller based on BMIs. En: *Joint European Control Conference and Conference on Decision and Control*.
- Salcedo, J. V., M. Martínez, J. Sanchis y X. Blasco (2002). Design of GPC's in state space. *Automatika* **42**(3-4), 159–167.
- Salcedo, J. V., X. Blasco, M. Martínez y J. V. García (2001). Modelado y control en simulink de un motor diesel sobrealimentado. En: *XXII Jornadas de Automática*.
- Scherer, C. W. (2001). LPV control and full block multipliers. *Automatica* **37**, 361–375.
- Sznaier, M. y M. C. Mazzaro (2003). An LMI Approach to Control-Oriented Identification and Model (In)Validation of LPV Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(9), 1619–1624.
- VanAntwerp, J. G. y R. D. Braatz (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control* **10**, 363–385.
- Verdult, V. y M. Verhaegen (2002). Subspace identification of multivariable linear parameter-varying systems. *Automatica* **38**, 805–814.