



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Diseño, análisis y estabilidad de métodos iterativos con memoria para la resolución de ecuaciones y sistemas no lineales

Marzo de 2020

Autor: Neus Garrido Sàez

Directores: Dr. Francisco Israel Chicharro López

Dra. Alicia Cordero Barbero

Dr. Juan Ramón Torregrosa Sánchez

Francisco Israel Chicharro López, Profesor Contratado Doctor de la Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Internacional de La Rioja, Alicia Cordero Barbero, Catedrática de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València y Juan Ramón Torregrosa Sánchez, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València,

HACEN CONSTAR:

Que Doña Neus Garrido Sàez, Graduada en Matemáticas, ha realizado, bajo nuestra dirección, el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al título de Doctora en Matemáticas por la Universitat Politècnica de Valencia.

Asimismo, autorizamos la presentación de este trabajo ante la Universitat Politècnica de Valencia para que cumpla los trámites correspondientes.

Para que así conste a efectos legales, firmamos este documento en Valencia, a 3 de marzo de 2020.

Fdo. Francisco I. Chicharro

Fdo. Alicia Cordero

Fdo. Juan R. Torregrosa

Agradecimientos

La vida es un proceso dinámico sujeto a un continuo cambio y, cómo no, a un cierto caos e incertidumbre. Si somos capaces de seleccionar el método adecuado, podremos predecir y explicar cómo ha avanzado y sigue avanzando este proceso dinámico que nos define a cada uno.

Escribiendo estas líneas me doy cuenta de que mi proceso dinámico se puede explicar a la perfección. En primer lugar, Alicia, Juan Ramón y Francisco, gracias por hacer que a día de hoy me encuentre donde estoy. Gracias por confiar en mí y hacerme crecer intelectualmente y como persona. Y por supuesto, enredarme en vuestros nuevos planes y proyectos. Francisco, son muchos los años de trabajo juntos que nos quedan con nuevos caminos de investigación que iremos descubriendo poco a poco. También quiero darte las gracias a ti, Lali. Sin las comidas, las risas y los cafés juntos de cada día esto no hubiese sido posible. Hemos creado una pequeña familia que hace que el trabajo sea menos trabajo. He llegado hasta aquí, sin ninguna duda, gracias a vosotros.

No puedo más que agradecer a todos los que habéis formado parte de este caos: *pilletes*, son infinitos los momentos que hemos compartido y el apoyo que siempre me habéis dado. Sé que nos queda mucho por recorrer y muchas nuevas etapas que iremos descubriendo juntas.

Pepe y María: más que tíos, padres y abuelos al mismo tiempo. Alba y yo somos, en parte, fruto de vuestra labor. Como bien me recordáis cada día, lo mejor aún está por venir. Con vosotros a mi lado sé que eso está asegurado. Ester y Marc, podría decir a la perfección que somos cuatro hermanos. Que ni el tiempo ni la distancia nos separe.

Alba: mi otra mitad. Ya nacimos juntas y así seguimos 25 años después. Con tu optimismo y fuerza haces que cada día merezca la pena. "Com dues gotes d'aigua". Tan iguales y tan distintas a la vez. Tan únicas. Gracias por ser como eres. Gracias por estar ahí siempre.

Por último, Papá y mamá: sois mi método. Vuestro soporte diario ha sido imprescindible. No podría describir todo el apoyo y tranquilidad que me transmitís. Siempre dispuestos a dar sin recibir nada a cambio. Bondad y afecto en cada gesto. Gracias por el esfuerzo y cariño que nos habéis dedicado a Alba y a mi para darnos siempre lo mejor.

Nadie dijo que fuese fácil, pero puedo decir con total certeza que con todos vosotros he encontrado mi propio método.

Valencia, marzo 2020.

*"Nada en la vida debe ser temido, solamente comprendido. Ahora es el momento de comprender más, para temer menos."
Marie Curie*

Resumen

El diseño de métodos iterativos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales es una tarea importante y desafiante en el campo del Análisis Numérico. La no linealidad es una característica de muchos de los fenómenos físicos. Mecánica de fluidos y plasma, dinámica de gases, reacciones químicas, combustión, ecología, biomecánica, problemas de modelado económico, teoría del transporte y muchos otros fenómenos están todos gobernados inherentemente por ecuaciones no lineales. Por esta razón, una proporción cada vez mayor de la investigación matemática moderna se dedica al análisis de sistemas y procesos no lineales.

En una era caracterizada por la disponibilidad de grandes cantidades de datos, el procesado y análisis de esta información se traduce de forma directa en la resolución de problemas cuya dimensión es cada vez mayor. Aunque en las últimas décadas se ha producido un desarrollo exponencial en la computación, sigue siendo esencial el diseño de algoritmos iterativos que garanticen la convergencia a la solución de un problema de forma rápida y eficiente.

Siguiendo estas premisas, el objetivo fundamental que se persigue con el diseño de nuevos métodos iterativos, siendo también uno de los principales objetivos de la presente Tesis Doctoral, es la aproximación de soluciones de problemas no lineales garantizando un cierto equilibrio entre la velocidad con que se obtiene dicha aproximación, la fiabilidad de la misma y el coste computacional requerido en el conjunto de todo el proceso iterativo. Poder medir o cuantificar este equilibrio es, por tanto, una de las piezas esenciales de todo este proceso.

Por medio del orden de convergencia, somos capaces de comparar la velocidad con que los esquemas iterativos se aproximan a la solución buscada. El coste computacional requerido a cada iteración del proceso es directamente proporcional al número de iteraciones que se necesitan para aproximar esta solución. Por tanto, acelerar la convergencia de un método se convierte en una necesidad en el diseño de esquemas eficientes.

Por otro lado, todo algoritmo iterativo requiere de al menos un punto inicial para comenzar el proceso de cálculo de las iteraciones sucesivas. Por este motivo, el estudio de la influencia de las estimaciones iniciales en la convergencia de un método es también de una gran relevancia, ya que permite determinar la estabilidad de éste en función de los iterados iniciales. Este estudio se realiza utilizando herramientas de dinámica discreta, tanto real como compleja, para determinar, además de otras caracterizaciones, los puntos iniciales más adecuados y los métodos más estables de una familia de esquemas iterativos.

El análisis numérico y dinámico realizado en esta memoria hace posible la propuesta de métodos iterativos eficientes que aproximen soluciones de problemas multidimensionales no lineales y ecuaciones en derivadas parciales de forma eficaz. A partir del estudio completo desarrollado utilizando las herramientas anteriormente descritas, presentamos esta Tesis Doctoral para la obtención del título de Doctora en Matemáticas.

Resum

El diseny de mètodes iteratius per resoldre equacions i sistemes d'equacions no lineals es una tasca important i desafiant al domini de l'Anàlisi Numèric. La no linealitat és una característica de molts dels fenòmens físics. Mecànica de fluids i plasma, dinàmica de gasos, reaccions químiques, combustió, ecologia, biomecànica, problemes de models econòmics, teoria del transport i molts altres fenòmens estan tots governats inherentment per equacions no lineals. Per aquest motiu, una proporció cada vegada major de la investigació matemàtica moderna es dedica a l'anàlisi de sistemes i processos no lineals.

En una era caracteritzada per la disponibilitat de grans quantitats de dades, el processat i anàlisi d'aquesta informació es tradueix de forma directa en la resolució de problemes la dimensió dels quals es cada vegada major. Malgrat que a les últimes dècades s'ha produït un desenvolupament exponencial a la computació, segueix sent essencial el diseny d'algorismes iteratius que garanteixen la convergència a la solució d'un problema de forma ràpida i eficient.

Seguint aquestes premisses, l'objectiu fonamental que es persegueix amb el disseny de nous mètodes iteratius, sent també un dels principals objectius de la present Tesi Doctoral, és l'aproximació de solucions de problemes no lineals garantint un cert equilibri entre la velocitat amb què obtenen aquesta aproximació, la fiabilitat de la mateixa i el cost computacional requerit al conjunt de tot el procés iteratiu. Poder medir o quantificar aquest equilibri és, per tant, una de les peces essencials de tot aquest procés.

Mitjançant l'ordre de convergència, tenim la capacitat de comparar la velocitat amb la qual els esquemes iteratius s'aproximen a la solució buscada. El cost computacional requerit a cada iteració del procés és directament proporcional al nombre d'iteracions que es necessiten per a aproximar aquesta solució. Per tant, accelerar la convergència d'un mètode es converteix en una necessitat al disseny d'esquemes eficients.

D'una altra banda, tot algorisme iteratiu requereix d'almenys un punt inicial per començar el procés de càlcul de les iteracions successives. Per aquest motiu, l'estudi de la influència de les estimacions inicials a la convergència d'un mètode és també molt rellevant, ja que permet determinar l'estabilitat d'aquest en funció dels iterats inicials. Aquest estudi es realitza utilitzant eines de dinàmica discreta, tant real com complexa, per determinar, a més d'altres caracteritzacions, els punts inicials més adients i els mètodes més estables d'una família d'esquemes iteratius.

L'anàlisi numèric i dinàmic realitzat en aquesta memòria fa possible la proposta de mètodes iteratius eficients que aproximen solucions de problemes multidimensionals no lineals i equacions en derivades parcials de forma eficaç. A partir de l'estudi complet desenvolupat utilitzant les eines descrites anteriorment, presentem aquesta Tesi Doctoral per a l'obtenció del títol de Doctora en Matemàtiques.

Abstract

The design of iterative methods for solving nonlinear equations and nonlinear systems is an important and challenging task in the Numerical Analysis. Nonlinearity is a characteristic of many of the physical phenomena. Fluid and plasma mechanics, gas dynamics, chemical reactions, combustion, ecology, biomechanics, economic modeling problems, transport theory and many other phenomena are all inherently governed by nonlinear equations. For this reason, an increasing proportion of mathematical modern research is devoted to the analysis of systems and nonlinear processes.

In a period characterized by the availability of large amounts of data, the processing and analysis of this information translates directly into the resolution of problems whose dimension is increasing. Although there has been an exponential development in computing in the last decades, it is still essential to design iterative algorithms that guarantee the convergence to the solution of a problem in a fast and efficient way.

Following these assumptions, the main goal followed in the design of new iterative methods, being also one of the main objectives of this Doctoral Thesis, is the approximation of the solutions of nonlinear problems ensuring a certain balancing between the speed at which this approximation is obtained, the reliability of the approximation and the computational cost required in the whole iterative process. Being able to measure or quantify this balance is therefore one of the essential parts of this whole process.

By means of the order of convergence, we are able to compare the speed with which the iterative schemes approximate the requested solution. The required computational cost for each iteration of the process is directly proportional to the number of iterations needed to approximate this solution. Therefore, accelerating the convergence of a method becomes a need in the design of efficient schemes.

On the other hand, any iterative algorithm requires at least a starting point to begin the calculation of the successive iterations. For this reason, the study of the influence of initial estimates on the convergence of a method is also of high relevance, since it allows to determine the stability of the method depending on the initial iterations. This study is carried out using tools of discrete dynamics, both real and complex, to determine, in addition to other characterizations, the most suitable starting points and the most stable methods in a family of iterative schemes.

The numerical and dynamical analysis carried out in this work makes it possible to propose efficient iterative methods that approximate solutions to nonlinear multidimensional problems and partial differential equations in an effective way. Based on the complete study developed using the tools described above, we present this Doctoral Thesis for gaining the title of Doctor in Mathematics.

Índice general

Resumen	vi
Índice general	xiii
1 Introducción	1
2 Conceptos previos	5
2.1 Conceptos numéricos básicos	5
2.1.1 Clasificación y diseño de los métodos iterativos	6
2.1.2 Convergencia y eficiencia de los métodos iterativos	12
2.2 Conceptos dinámicos básicos	15
2.2.1 Fundamentos de dinámica unidimensional	15
2.2.2 Fundamentos de dinámica real multidimensional.	25
3 Variantes uniparamétricas con memoria del método de Traub	31
3.1 Introducción	32
3.2 Variantes uniparamétricas del método de Traub	33
3.3 Dinámica real	38
3.3.1 Familia de métodos T1: dinámica real biparamétrica	39
3.3.2 Métodos TM1 y TM1N: dinámica real multidimensional	43

3.4 Resultados numéricos	49
3.5 Conclusiones	51
4 Variantes biparamétricas con memoria del método de Traub	53
4.1 Introducción	54
4.2 Variantes biparamétricas del método de Traub	54
4.2.1 Familia de métodos con memoria TM_{γ}	58
4.3 Dinámica real	61
4.3.1 Familia T2: dinámica real biparamétrica	61
4.3.2 Métodos TM_2 y TM_{2N} : dinámica real multidimensional	74
4.3.3 Familia de métodos TM_{γ} : dinámica real multidimensional	79
4.4 Resultados numéricos	85
4.5 Conclusiones	88
5 Variantes con memoria del método de Traub libres de derivadas	91
5.1 Introducción	92
5.2 Métodos uniparamétricos tipo Traub sin derivadas	92
5.3 Métodos biparamétricos tipo Traub sin derivadas	98
5.4 Dinámica real biparamétrica de métodos sin memoria	102
5.4.1 Dinámica real de la familia de métodos T3	102
5.4.2 Dinámica real de T4	106
5.5 Dinámica real multidimensional de métodos con memoria	107
5.5.1 Dinámica real de los métodos TM_3 y TM_4	108
5.5.2 Dinámica real de los métodos TM_{3N} y TM_{4N}	110
5.6 Resultados numéricos	114
5.7 Conclusiones	117
6 Variantes de la familia de Kim con y sin memoria	121
6.1 Introducción	122
6.2 Selección de los mejores miembros de la familia biparamétrica	123
6.2.1 Estudio dinámico de la familia biparamétrica	124
6.2.2 Selección de valores para el parámetro	125
6.3 Métodos iterativos con memoria: esquema $DFM(\beta)$	129

6.4	Análisis dinámico real multidimensional de la familia $DFM(\beta)$	131
6.4.1	Análisis dinámico sobre $p_-(x) = x^2 - 1$	132
6.4.2	Análisis dinámico sobre $p_+(x) = x^2 + 1$	135
6.4.3	Análisis dinámico sobre $p_0(x) = x^2$	138
6.5	Resultados numéricos	140
6.6	Conclusiones	143
7	Métodos iterativos para ecuaciones no lineales con funciones peso	145
7.1	Introducción	146
7.2	Familia de esquemas iterativos con una función peso	147
7.3	Extensión a familias de esquemas iterativos multipunto	148
7.4	Análisis de estabilidad	152
7.4.1	Dinámica compleja de la familia $N2_\theta$	152
7.4.2	Dinámica compleja del esquema $G4$	161
7.5	Resultados numéricos	165
7.6	Conclusiones	169
8	Métodos iterativos para sistemas no lineales con funciones peso	171
8.1	Introducción	172
8.2	Familia de métodos iterativos Γ	172
8.3	Extensión de la familia Γ a familias de métodos de cuatro pasos	178
8.4	Estudio dinámico de miembros de la familia Γ	182
8.4.1	Análisis dinámico de $\mathcal{G}1$	183
8.4.2	Análisis dinámico de $\mathcal{G}2$	187
8.4.3	Análisis dinámico de \mathcal{G}_α	189
8.5	Resultados numéricos	199
8.5.1	Aplicación de la familia Γ a la ecuación de Fisher	200
8.5.2	Aplicación de la familia Γ^2 a sistemas no lineales académicos	203
8.6	Conclusiones	205
9	Métodos iterativos con memoria para sistemas no lineales	207
9.1	Introducción	208
9.2	Métodos con matrices Jacobianas para resolver sistemas	209
9.2.1	Diseño de clases iterativas de mayor orden con y sin memoria	212

9.3 Métodos sin matrices Jacobianas para resolver sistemas	216
9.3.1 Diseño de clases iterativas de mayor orden con memoria	217
9.3.2 Extensión a familias de métodos iterativos multipunto con memoria	218
9.4 Índices de eficiencia y eficiencia computacional	221
9.4.1 Análisis de la eficiencia de los esquemas iterativos sin memoria	222
9.4.2 Análisis de la eficiencia de los esquemas iterativos con memoria	225
9.5 Resultados numéricos	227
9.5.1 Clases iterativas con matrices Jacobianas	228
9.5.2 Clases iterativas sin matrices Jacobianas	232
9.6 Conclusiones	234
10 Conclusiones y líneas futuras	237
10.1 Conclusiones	237
10.2 Líneas futuras	239
A Méritos	243
A.1 Publicaciones	243
A.2 Congresos	244
A.3 Otros méritos	245
A.3.1 Relacionados con el área de Matemáticas	245
A.3.2 Méritos docentes	246
A.3.3 Relacionados con el área de idiomas	246
Bibliografía	249

Capítulo 1

Introducción

La búsqueda de la solución de un sistema de ecuaciones no lineales es un problema clásico y de difícil solución con muchas aplicaciones en ciencias e ingeniería. Este problema, que representamos con la notación $F(x) = 0$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, puede ser de una gran complejidad incluso en el caso en que $n = 1$, que denotaremos como $f(x) = 0$. Por este motivo, el uso de técnicas iterativas para aproximar raíces de funciones no lineales ha experimentado un gran desarrollo a lo largo de la historia, en particular en las últimas décadas.

En este contexto, el esquema más conocido para resolver ecuaciones no lineales se atribuye a Isaac Newton en el siglo XVII con el clásico método de Newton, cuya expresión iterativa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

parte de una aproximación inicial x_0 de la solución y genera una sucesión de iterados que, con las condiciones adecuadas, converge a la solución buscada.

No obstante, esta idea de aproximar resultados mediante algoritmos iterativos se remonta a la Edad Antigua. Ya en la Grecia clásica se aproximaban números irracionales por medio de números racionales, e incluso las civilizaciones mesopotámicas desarrollaron técnicas para aproximar raíces cuadradas. En esta línea, la fórmula de Herón para el cálculo de raíces cuadradas proporciona un método, publicado en el siglo I d.C., en el cual se hace referencia explícita de que una aproximación dada se puede tomar como punto de partida para obtener mejores aproximaciones, hecho que pone de manifiesto el uso de un proceso iterativo para resolver problemas.

Partiendo de la fórmula de Herón, se desarrollaron con el transcurso de los siglos diferentes técnicas para aproximar raíces n -ésimas hasta el siglo XVII. Este problema dio paso al problema más general de encontrar las raíces de ecuaciones polinómicas, en cuyo contexto situamos la formulación del método de Newton. La extensión del esquema de Newton al caso multidimensional cayó en el olvido hasta el siglo XX, siendo Ostrowski [66] quien propuso la generalización del algoritmo para sistemas de ecuaciones no lineales.

En la actualidad, la resolución de problemas no lineales se encuentra presente en cualquier disciplina científica, motivo por el cual el diseño de métodos iterativos para aproximar soluciones es una línea de investigación en continuo desarrollo. Existen muchos indicadores para cuantificar la bondad de un método en la aproximación de raíces, de entre los cuales destacamos la velocidad de convergencia y el coste computacional del mismo. Los métodos de un paso, como por ejemplo el de Newton, se caracterizan por su simplicidad y bajo coste computacional, pero tienen una convergencia lenta. Hasta donde es sabido, las primeras investigaciones de métodos multipaso fueron presentadas por Traub en [83]. Aunque, en general, estos esquemas no son óptimos, las técnicas empleadas han tenido una gran influencia en el desarrollo posterior de nuevos métodos.

Entre las técnicas más utilizadas en el diseño de nuevas clases de esquemas iterativos se encuentran, entre otras, los polinomios de Adomian, la composición de esquemas conocidos, así como otras técnicas de composición diferentes, como inversa, Newton o Hermite, dando lugar a métodos multipaso; la introducción de parámetros aceleradores y funciones peso, proporcionando familias de métodos; y el uso de información de más de una iteración previa, obteniendo clases iterativas con memoria. Esta Tesis Doctoral combina todas estas técnicas para desarrollar nuevos métodos que mejoren las propiedades de convergencia, estabilidad y coste computacional de los esquemas propuestos en la literatura, tanto para la resolución de ecuaciones como de sistemas de ecuaciones no lineales.

Con este objetivo, los distintos métodos iterativos propuestos en esta memoria se analizan y comparan fundamentalmente desde tres puntos de vista: la velocidad con la cual obtienen aproximaciones a una solución, en términos del orden de convergencia; la dependencia respecto a las estimaciones iniciales, por medio del estudio de sus propiedades dinámicas; y la eficiencia computacional, en términos del número de evaluaciones funcionales y operaciones realizadas en cada paso del proceso iterativo.

En el Capítulo 2, se introducen los conceptos previos necesarios para comprender la propuesta y análisis de los métodos y sentar las bases de la notación utilizada en capítulos posteriores. Dividiremos este capítulo en dos partes. Por un lado, los fundamentos de Cálculo Numérico para describir los métodos iterativos y las definiciones básicas en relación a los mismos. Por otro lado, describimos las herramientas analíticas y gráficas necesarias para el estudio de la dinámica compleja y real de las funciones racionales obtenidas al aplicar los procesos iterativos a funciones polinómicas. Se analizan las propiedades dinámicas del método de Traub [83] aplicado sobre diversos polinomios cuadráticos para ilustrar la riqueza de información que proporciona el estudio dinámico de un método.

Tras la descripción en el Capítulo 2 de las propiedades fundamentales de convergencia y estabilidad del método de Traub, se presenta uno de los grandes bloques de esta memoria, conformado por los Capítulos 3, 4 y 5. En este bloque de contenidos se proponen diversos métodos para ecuaciones no lineales, diseñados a partir del esquema de Traub introduciendo parámetros aceleradores en su estructura iterativa, y obteniendo clases de métodos con derivadas en los Capítulos 3 y 4, y familias libres de derivadas en el Capítulo 5. El objetivo de estos métodos es incrementar el orden de convergencia cúbico de Traub de forma eficiente. Se obtendrán métodos con memoria para los cuales el estudio de la velocidad de convergencia permitirá cuantificar la mejora en el orden con respecto al esquema de Traub. A su vez, el análisis de las propiedades de estabilidad utilizando herramientas de dinámica real unidimensional y multidimensional, permitirá determinar el comportamiento de éstos en función de las estimaciones iniciales tomadas, y los miembros más estables de las familias de métodos con parámetros.

En el Capítulo 6 obtenemos, en términos de estabilidad, los mejores miembros de una familia de métodos iterativos de Kim [56] utilizando herramientas de dinámica compleja. A partir de estos miembros, se diseñan métodos iterativos uniparamétricos con memoria. También se presenta el análisis dinámico de estos métodos con memoria para obtener información sobre su estabilidad.

Finalizando con la propuesta de métodos para la resolución de problemas escalares, en el Capítulo 7 presentamos una familia de métodos iterativos de un punto para aproximar la solución de ecuaciones no lineales utilizando funciones peso. La extensión de esta familia a métodos multipunto permite diseñar también familias de esquemas iterativos óptimos con más funciones peso y con orden de convergencia cuatro. Asimismo, realizamos un análisis de la convergencia de ambas familias, mostrando las condiciones suficientes que deben satisfacer las funciones peso. También, estudiaremos el comportamiento dinámico de determinadas clases iterativas para elecciones distintas de las funciones peso.

Los Capítulos 8 y 9 están dedicados al desarrollo de métodos iterativos para resolver problemas multidimensionales. El Capítulo 8, parte de una de las familias óptimas de orden cuatro presentada en el Capítulo 7 para ecuaciones. Tras la extensión de ésta a la resolución de sistemas de ecuaciones, se compara la eficiencia de diversos métodos de la familia para funciones peso concretas, así como la estabilidad de algunos miembros distintos realizando un estudio dinámico multidimensional sobre sistemas polinómicos de grado dos. También se desarrolla la extensión a clases de métodos iterativos de mayor orden utilizando la técnica de composición de esquemas iterativos.

La propuesta de métodos iterativos multidimensionales con memoria se realiza en el Capítulo 9. En primer lugar, partimos del método de Newton y extendemos su estructura iterativa a una familia biparamétrica de métodos multipaso. En segundo lugar, partiremos del método de Traub-Steffensen [83] para desarrollar clases de métodos libres de matrices Jacobianas. En ambos casos, se diseñan métodos iterativos con y sin memoria con mayor velocidad de convergencia que los métodos de Newton y Traub-Steffensen, respectivamente. La eficiencia de estas clases se compara con la de otros métodos presentes en la literatura, así como su comportamiento para la resolución de diversos problemas no lineales.

Todos los capítulos cuya estructura acabamos de describir incluyen una sección de experimentos numéricos para verificar la aplicabilidad de los esquemas iterativos a la resolución de problemas no lineales. Con este objetivo, realizamos la implementación numérica en Matlab de todas las nuevas clases de esquemas iterativos propuestas, así como de otros métodos de la literatura para comparar los resultados obtenidos. Utilizaremos los esquemas iterativos para aproximar soluciones de distintos sistemas de ecuaciones no lineales académicos y problemas aplicados correspondientes a ecuaciones en derivadas parciales que, tras su discretización, también dan lugar a sistemas multidimensionales no lineales.

Finalmente, en el Capítulo 10 proporcionaremos un resumen de las aportaciones realizadas y las conclusiones obtenidas a partir de éstas. Los contenidos que se desarrollarán en esta memoria dejan paso a un largo camino de líneas de investigación por descubrir, por lo que finalizaremos este trabajo con la reflexión de algunas de estas líneas futuras.

Capítulo 2

Conceptos previos

En este capítulo se introducen los métodos de punto fijo, algoritmos iterativos que permiten la aproximación de la solución de problemas no lineales. Se definen los conceptos necesarios para la comprensión de estos algoritmos, así como el análisis numérico y dinámico de los mismos. Estos conceptos se dividen fundamentalmente en dos bloques. Por un lado, los fundamentos numéricos servirán para introducir el problema bajo estudio y presentar en qué consisten los procesos iterativos empleados para aproximar soluciones de sistemas no lineales. La clasificación de los esquemas iterativos, orden de convergencia e índices de eficiencia se definen en esta parte, desarrollada en la Sección 2.1. Por otro lado, los conceptos dinámicos se abordan en la Sección 2.2, diferenciando el caso unidimensional y la dinámica real multidimensional de los métodos, cuya distinción se realizará en función de las características de los esquemas iterativos considerados. Herramientas gráficas como los planos de parámetros, planos dinámicos y diagramas de bifurcación serán de utilidad para completar el análisis dinámico desde una perspectiva más visual, complementando el estudio teórico de la estabilidad de los métodos.

2.1 Conceptos numéricos básicos

La expresión general de un sistema compuesto por n ecuaciones no lineales con n incógnitas es

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

y se puede denotar de la forma

$$F(x) = 0, \quad (2.1)$$

donde F es una función vectorial, $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida en un conjunto abierto y convexo D , que tiene como funciones coordenadas $f_i, i = 1, 2, \dots, n$. Es decir,

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T,$$

con $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$.

Nota 2.1. Una gran parte de los resultados desarrollados en esta memoria se centran en la resolución de problemas unidimensionales, en cuyo caso $n = 1$ y el problema (2.1) se denota como

$$f(x) = 0, \quad f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

siendo f una función definida en un intervalo abierto I y $\alpha \in I$ denota una raíz simple de la ecuación no lineal $f(x) = 0$.

La estimación de la solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$ es un problema de mayor complejidad que el del caso escalar $f(x) = 0$. En ambos casos, esta estimación se realiza utilizando métodos iterativos, los cuales se basan en transformar el sistema original en un sistema equivalente de la forma

$$x = \Phi(x), \quad (2.3)$$

para una determinada función vectorial $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que se denomina función de punto fijo. El proceso de aproximar la solución x^* del sistema consiste en partir de una estimación inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ suficientemente próxima a x^* y generar mediante la función de punto fijo una sucesión de iterados $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots\}$, que converge a la raíz x^* . Este procedimiento se puede describir de la forma

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

y decimos que el proceso iterativo es convergente si $\{x^{(k)}\} \rightarrow x^*$, cuando $k \rightarrow +\infty$. El algoritmo descrito por (2.4) se denomina método iterativo de punto fijo.

2.1.1 Clasificación y diseño de los métodos iterativos

En esta memoria nos centramos en los métodos iterativos de punto fijo que, bajo ciertas condiciones, aproximan una raíz simple x^* del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$. Este tipo de métodos se pueden agrupar de acuerdo a diferentes criterios. Entre las clasificaciones más habituales, se distingue entre esquemas de un paso o multipaso. A su vez tanto unos como otros se dividen, por un lado, en métodos con o sin memoria, y por otro lado, en esquemas con derivadas o libres de derivadas.

Los métodos iterativos de un paso son aquellos en los que la iteración $k+1$ se obtiene realizando evaluaciones funcionales únicamente en la iteración k -ésima. La expresión general de estos

métodos, ya mostrada en (2.4), da lugar a los esquemas iterativos más simples y viene dada por

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

donde $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ es la estimación inicial del proceso. El esquema de un paso más conocido es el clásico método de Newton [83], que bajo ciertas condiciones tiene convergencia cuadrática, dado por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $F'(x^{(k)})$ denota la matriz Jacobiana asociada a la función F en el punto $x^{(k)}$.

Es sabido que un método iterativo de un paso que realiza d evaluaciones funcionales en cada iteración, tiene como máximo orden de convergencia $p = d$. Por otro lado, Traub demostró en [83] que para diseñar un método de un paso con orden de convergencia p , su expresión iterativa debe contener derivadas al menos de hasta orden $p - 1$. Esto motiva el diseño de métodos que utilicen más de un paso, con el objetivo de mejorar la velocidad de convergencia y la eficiencia computacional. A continuación se sigue con la clasificación de los esquemas iterativos, proporcionando la definición formal de orden de convergencia de los métodos en la Sección 2.1.2.

Los métodos multipaso o multipunto, para calcular la iteración $k + 1$, utilizan evaluaciones funcionales de la iteración k -ésima y, a diferencia de los métodos de un paso, también de otros puntos intermedios. Por ejemplo, un esquema de este tipo compuesto por dos pasos tiene la expresión

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \Psi(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= \Phi(x^{(k)}, y^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Una de las técnicas más utilizadas para construir métodos multipaso es la composición de esquemas iterativos conocidos. Esta técnica fue introducida por Traub en [83] y establece que la composición de dos métodos con órdenes de convergencia p_1 y p_2 , respectivamente, da lugar a un esquema iterativo con orden $p_1 \cdot p_2$.

Consideremos en el caso escalar el esquema multipaso obtenido con la composición del método de Newton consigo mismo

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Este esquema es muy simple y tiene orden de convergencia cuatro. Sin embargo, requiere de cuatro evaluaciones distintas de la función no lineal y su derivada a cada iteración.

El uso del proceso de composición de métodos incrementa de forma notable el número de evaluaciones funcionales. Para evitar en la medida de lo posible evaluaciones funcionales adicionales,

se utilizan diferentes técnicas y aproximaciones de las funciones, como la propuesta del esquema iterativo de Traub [83] (también conocido como método de Potra-Pták), cuyo orden de convergencia es cúbico y tiene la expresión

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

El esquema de Traub se obtiene a partir de (2.7), es decir, con la composición del método de Newton y "congelando" la derivada del segundo paso. Nótese que, a pesar de que el orden de convergencia es una unidad inferior al que se obtendría con la composición del método de Newton, se evita el uso de derivadas de la función en puntos distintos.

Entre las herramientas que permiten reducir la cantidad de evaluaciones funcionales, podemos encontrar el uso de polinomios de interpolación, aproximantes de Padé, interpolación inversa o polinomios de Adomian, donde se utilizan evaluaciones funcionales de la función y de su Jacobiana en puntos ya conocidos. También, el uso de funciones peso escalares o matriciales permite incrementar el orden de convergencia sin aumentar el número de evaluaciones funcionales (véase, por ejemplo, [9]). Siguiendo esta línea, para reducir el número de evaluaciones funcionales pero sin disminuir el orden de convergencia del método, se puede usar la idea de Chun [33] basada en utilizar en (2.7) la aproximación de $f'(y)$ como

$$f'(y_k) \approx \frac{f'(x_k)}{G(t_k)}, \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)},$$

asumiendo que la función real G es suficientemente diferenciable en un entorno de 0. Con estas consideraciones, el método (2.7) resulta en

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - G(t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

y su orden de convergencia es cuatro. Se seguirá este proceso basado en la idea de Chun, además de otras técnicas, para desarrollar nuevos métodos en capítulos posteriores de esta memoria.

Otra forma de mejorar el orden de convergencia de un método sin incrementar el número de evaluaciones funcionales es el uso de información de más de una iteración anterior para obtener el siguiente valor. Esto da lugar a la segunda de las clasificaciones consideradas: métodos con o sin memoria.

Se denominan métodos sin memoria aquellos que únicamente utilizan la iteración k -ésima para construir la iteración $k + 1$. Las expresiones generales (2.5) y (2.6) son esquemas sin memoria. En cambio, si se utiliza en la expresión del esquema iterativo más de una iteración previa para calcular la siguiente estimación, decimos que es un método con memoria, y se puede expresar

como

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k-m)}, x^{(k-m+1)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k)}), \quad m \leq k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De esta forma, se utilizan evaluaciones ya realizadas por el método, por lo que se mantiene la eficiencia computacional de éste.

Estrechamente relacionado con el diseño de esquemas de forma eficiente, el interés en el desarrollo de métodos con memoria reside en la conjetura de Kung y Traub presentada en [59] para el caso escalar. Esta conjetura establece que el orden de convergencia de un método iterativo para resolver ecuaciones no lineales sin memoria que realiza d evaluaciones funcionales en cada iteración, no puede superar el valor 2^{d-1} . Cuando se alcanza esta cota, el método se denomina óptimo. No obstante, el orden de convergencia de los métodos con memoria no está limitado por este valor.

Un ejemplo clásico de esquema con memoria que utiliza dos iterados previos para construir el siguiente es el método de la Secante, cuya expresión para el caso escalar es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde se requieren dos estimaciones iniciales x_0 y x_1 . Notemos que el método de la Secante se obtiene a partir del método de Newton aproximando la derivada como

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Asimismo, la primera clase iterativa con memoria que incluye parámetros aceleradores en su expresión iterativa fue diseñada por Traub en [83] a partir de modificaciones sobre el método de Steffensen [82], obteniendo el esquema

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\beta_k f(x_k)^2}{f(x_k - \beta_k f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

donde $\beta_k = -1/\Gamma_{k-1}$ y

$$\Gamma_k = \frac{f(x_k + \beta_k f(x_k)) - f(x_k)}{\beta_k f(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Partiendo de dos valores iniciales β_0 y x_0 , el orden de convergencia de (2.8) es 2.41.

Por último, también es habitual clasificar los esquemas iterativos en función de si utilizan o no matrices Jacobianas (derivadas en el caso escalar), dando lugar a métodos con derivadas o libres de derivadas, respectivamente. Los métodos iterativos libres de derivadas adquieren especial relevancia cuando la función no lineal cuya raíz se pretende aproximar no es derivable o tiene una derivada difícil de calcular. En estos casos, la adaptación de un esquema con derivadas

a otro libre de derivadas se realiza frecuentemente sustituyendo las matrices Jacobianas (o las derivadas) por operadores de diferencias divididas.

El operador multidimensional de diferencias divididas de primer orden fue definido por Ortega y Rheinboldt en [65] como la aplicación

$$[\cdot, \cdot; F] : D \times D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

que satisface

$$[x, y; F](x - y) = F(x) - F(y), \quad \forall x, y \in D,$$

donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de funciones lineales de \mathbb{R}^n .

Como el análisis de la convergencia de los esquemas propuestos en esta memoria se realiza utilizando desarrollos en serie de Taylor en torno a la solución del problema, es necesario obtener el desarrollo correspondiente al operador de diferencias divididas. Con este objetivo, utilizando la fórmula de Genocchi-Hermite [52]

$$[x, x + h; F] = \int_0^1 F'(x + th) dt$$

y desarrollando $F'(x + th)$ en serie de Taylor en torno a x , se obtiene la expresión del operador

$$\int_0^1 F'(x + th) dt = F'(x) + \frac{1}{2} F''(x)h + \frac{1}{3!} F'''(x)h^2 + O(h^3). \quad (2.9)$$

Asimismo, para la implementación práctica de las clases iterativas realizada en capítulos posteriores de esta memoria, el operador multidimensional de diferencias divididas se desarrolla siguiendo la definición proporcionada en [51], de la forma

$$[x, y; F] = \frac{F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)}{y_j - x_j},$$

siendo $x = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_n)$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Nota 2.2. En el caso $n = 1$, la notación utilizada para definir la diferencia dividida de primer orden entre dos puntos x e y es

$$f[x, y] = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

En esta memoria se utilizarán diferencias divididas de hasta orden dos para el caso escalar, definidas para los puntos x, y y z por medio de la expresión

$$f[x, y, z] = \frac{f[x, y] - f[y, z]}{x - z}.$$

El diseño de nuevos métodos iterativos para sistemas de ecuaciones no lineales también se realiza frecuentemente con la adaptación de los esquemas para ecuaciones al caso multidimensional, donde en muchas ocasiones el uso de diferencias divididas es esencial. Este proceso no siempre es inmediato, y solo es directo cuando en los denominadores de la expresión no aparece ninguna evaluación de la función que describe la ecuación (ya que en la extensión multidimensional sería un vector). En [1, 41] los autores presentan un procedimiento general para transformar cualquier método iterativo escalar al caso multidimensional.

Mostramos a continuación un ejemplo de extensión de métodos escalares a esquemas para problemas multidimensionales en el cual el operador de diferencias divididas se utiliza tras el diseño de clases iterativas libres de derivadas.

Partiendo del método de Newton para ecuaciones, con el objetivo de diseñar métodos libres de derivadas, se puede aproximar $f'(x_k)$ utilizando diferencias progresivas como

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}.$$

Reemplazando la anterior aproximación en la estructura iterativa de Newton, se tiene el método de Steffensen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

que pertenece al conjunto de métodos escalares de un paso sin memoria y libres de derivadas. Además, la extensión a esquemas para sistemas es directa utilizando diferencias divididas de primer orden, siendo el método de Steffensen para resolver problemas multidimensionales

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1} F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

donde $w^{(k)} = x^{(k)} + F(x^{(k)})$.

El operador de diferencias divididas también es de gran utilidad para poder adaptar al caso multidimensional esquemas iterativos de mayor complejidad que el método de Steffensen. Si consideramos el método de Ostrowski [50], esquema de dos pasos y orden de convergencia 4,

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

se observa que su estructura iterativa no permite la extensión directa a sistemas debido a las funciones del denominador del segundo paso. Sin embargo, reescribiendo el último paso de la

forma

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = y_k - \frac{x_k - y_k}{2(f(x_k) - f(y_k)) - f(x_k)} f(y_k) \\ &= y_k - \frac{1}{2f[y_k, x_k] - f'(x_k)} f(y_k), \end{aligned}$$

la extensión del método de Ostrowski al caso multidimensional es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x_{k+1} &= \left(2[y^{(k)}, x^{(k)}; F] - F'(x^{(k)}) \right)^{-1} F(y^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

2.1.2 Convergencia y eficiencia de los métodos iterativos

Para poder analizar las propiedades de convergencia de los diferentes métodos nuevos que van a ser introducidos en esta memoria, es necesario hacer referencia a algunos conceptos y herramientas básicos, algunos de ellos ya introducidos en [40].

La velocidad con la que los métodos iterativos convergen a una solución x^* del problema $F(x) = 0$ se determina por medio del orden de convergencia. Si consideramos una sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ en \mathbb{R}^n generada por un método iterativo que converge a x^* , entonces, el método correspondiente tiene orden de convergencia p , $p \geq 1$, si existe una constante $D_p > 0$ ($D_p < 1$ si $p = 1$) tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|^p} = D_p, \quad (2.11)$$

donde D_p se denomina constante de error asintótico.

Algunos ejemplos prueban que la definición (2.11) del orden de convergencia es bastante restrictiva, hecho que motivó a Ortega y Rheinboldt a introducir en [65] los conceptos de Q- y R-orden de convergencia. No obstante, también probaron que estas definiciones coinciden con el orden de convergencia clásico cuando $0 < D_p < +\infty$ existe para algún $p \in [1, +\infty[$. Como la constante de error asintótico D_p satisface esta condición en todos los métodos analizados en esta memoria, consideramos que las definiciones son análogas y trabajaremos con la definición previa del orden de convergencia.

Denotamos $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ al error cometido en la k -ésima iteración, de forma que todo método satisface una ecuación del tipo

$$e^{(k+1)} = L e^{(k)p} + \mathcal{O}\left(e^{(k)p+1}\right), \quad (2.12)$$

denominada ecuación del error, donde L es una función p -lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, y p es el orden de convergencia del método. Obsérvese que $e^{(k)p}$ es $(e^{(k)}, e^{(k)}, \dots, e^{(k)})$.

Considerando $\{g_k\}$ y $\{h_k\}$ dos sucesiones no nulas, para llevar a cabo el análisis del orden de convergencia de los métodos, utilizamos la notación que se presenta en [67]. Asimismo, denotamos $g_k = \mathcal{O}(h_k)$, o equivalentemente $g_k \sim h_k$, para indicar

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g_k}{h_k} = C,$$

siendo C una constante no nula. Como consecuencia, la ecuación del error (2.12) siempre satisface una relación de la forma

$$e^{(k+1)} \sim L e^{(k)P}.$$

El análisis de los términos de menor orden de las ecuaciones del error obtenidas constituye uno de los fundamentos para poder diseñar métodos que incrementen la velocidad de convergencia. Recordemos que uno de los objetivos fundamentales de esta memoria es el desarrollo eficiente de métodos iterativos de orden alto. Por tanto, las demostraciones para probar el orden de convergencia de los métodos propuestos son una pieza esencial dentro de este proceso, y se realizan utilizando desarrollos de Taylor en varias variables. A continuación se introduce la notación necesaria para estas demostraciones, ya presentada en [40].

Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable Fréchet en D . La q -ésima derivada de F en $u \in \mathbb{R}^n$, $q \geq 1$, es la función q -lineal $F^{(q)}(u) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^n$. Es sencillo observar que

- (i) $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_{q-1}, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
- (ii) $F^{(q)}(u)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q)$, para toda permutación σ de $\{1, 2, \dots, q\}$.

De las propiedades anteriores se puede utilizar la siguiente notación:

- (a) $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) = F^{(q)}(u)v_1 \dots v_q$
- (b) $F^{(q)}(u)v^{q-1}F^{(p)}v^p = F^{(q)}(u)F^{(p)}(u)v^{q+p-1}$.

Por otro lado, para $x^* + h \in \mathbb{R}^n$ en un entorno de la solución x^* de $F(x) = 0$, podemos aplicar desarrollos de Taylor y, asumiendo que la matriz Jacobiana $F'(x^*)$ es no singular, se obtiene

$$F(x^* + h) = F'(x^*) \left[h + \sum_{q=2}^{p-1} C_q h^q \right] + \mathcal{O}(h^p), \quad (2.13)$$

donde $C_q = (1/q!)[F'(x^*)]^{-1}F^{(q)}(x^*)$, $q \geq 2$, y p es el orden de convergencia. Se observa que $C_q h^q \in \mathbb{R}^n$ ya que $F^{(q)}(x^*) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $[F'(x^*)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado, para el análisis del orden de convergencia de los métodos con memoria para ecuaciones, se utiliza el siguiente resultado:

Teorema 2.1 (Teorema de Ortega-Rheinboldt [65]). *Sea Φ un método iterativo con memoria que genera una sucesión $\{x_k\}$ de aproximaciones a la raíz x^* , de forma que esta sucesión converge a x^* . Si existe una constante no nula η y números positivos t_i , $i = 0, 1, \dots, m$, tal que la desigualdad*

$$|e_{k+1}| \leq \eta \prod_{i=0}^m |e_{k-i}|^{t_i}$$

se cumple, siendo $e_k = x_k - x^$, entonces el R -orden de convergencia del método iterativo Φ satisface la desigualdad $\mathcal{O}_R(\Phi, x^*) \geq p^*$, donde p^* es la única raíz positiva de la ecuación polinómica*

$$p^{m+1} - \sum_{i=0}^m t_i p^{m-i} = 0.$$

La formulación del Teorema 2.1 es válida en métodos iterativos para ecuaciones. Sin embargo, en este trabajo extendemos este resultado al caso multidimensional para demostrar el orden de convergencia de los métodos con memoria para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

El orden de convergencia de los métodos es una herramienta de gran utilidad para cuantificar la velocidad con que los métodos aproximan la solución del problema, determinando la eficiencia de los mismos. No obstante, existen en la literatura otras medidas para comparar los esquemas iterativos, ya que también es importante tener en cuenta aspectos como el número de evaluaciones funcionales o las operaciones que se realizan en cada paso del algoritmo y más aún siendo frecuente el trabajo con sistemas de grandes dimensiones.

Para comparar diferentes métodos bajo el punto de vista del coste computacional, Ostrowski en [66] definió el índice de eficiencia, I , como

$$I = p^{1/d}, \quad (2.14)$$

donde p es el orden de convergencia y d el número de evaluaciones funcionales por iteración.

Por otro lado, los autores introdujeron en [40] el índice de eficiencia computacional, IC , que combina el índice de eficiencia definido por Ostrowski y el número de operaciones requeridos por iteración. Se define este índice como

$$IC = p^{1/(d+op)},$$

donde op es el número de productos-cocientes por iteración.

Relacionado con la implementación práctica de los métodos iterativos, se tiene el orden de convergencia computacional (COC), introducido por Weerakoon y Fernando en [87] como

$$p \approx COC = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^*\|/\|x^{(k)} - x^*\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^*\|/\|x^{(k-1)} - x^*\|)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde $x^{(k+1)}$, $x^{(k)}$ y $x^{(k-1)}$ son tres aproximaciones sucesivas a x^* obtenidas en el proceso iterativo. Como en la práctica el valor de x^* no es conocido, resulta más conveniente utilizar el orden de convergencia computacional aproximado (ACOC) definido por Cordero y Torregrosa en [44] como

$$p \approx ACOC = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|/\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|/\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Nota 2.3. En los métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales ($n = 1$) todas las definiciones consideradas en este capítulo son equivalentes reemplazando las normas de los vectores por valores absolutos.

2.2 Conceptos dinámicos básicos

En los últimos años, el análisis de la estabilidad de los métodos iterativos para ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales, dependiendo de las estimaciones iniciales consideradas, ha adquirido una gran importancia, completando de esta forma el estudio del orden de convergencia y de la eficiencia de los esquemas. Dicho análisis consiste en el estudio dinámico del operador racional resultante de aplicar el esquema iterativo sobre funciones no lineales sencillas, fundamentalmente polinomios de grado bajo.

La estabilidad de un método se puede comprobar mediante el uso de técnicas de dinámica compleja o real. Además, considerando familias de esquemas iterativos, este tipo de análisis permite seleccionar los elementos de la clase con mejores propiedades de estabilidad y predecir los miembros de la familia que tienen un comportamiento caótico.

La clasificación de los métodos con o sin memoria, detallada en la sección anterior, proporciona dos variantes para estudiar la estabilidad de los esquemas. En primer lugar, para los métodos escalares sin memoria se utilizan herramientas de dinámica discreta unidimensional, cuyos fundamentos se describen tanto para variable compleja como real en la Sección 2.2.1. En segundo lugar, para los métodos escalares con memoria y los esquemas para sistemas, se utilizan técnicas de dinámica multidimensional particularizando a variables reales en la Sección 2.2.2.

2.2.1 Fundamentos de dinámica unidimensional

En este apartado se presentan los conceptos básicos necesarios para realizar un análisis dinámico complejo, así como las herramientas gráficas fundamentales que completan este estudio. En [11, 45] se puede encontrar más información sobre dinámica compleja. La transferencia de estos conceptos a variable real es inmediata, existiendo variaciones únicamente en las representaciones gráficas. Por ello, también dedicamos un apartado a la descripción de éstas, siendo necesarias para abordar un estudio de dinámica real.

Consideremos $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional, donde $\hat{\mathbb{C}}$ representa la esfera de Riemann. La órbita de un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ es el conjunto de sus imágenes por R , es decir,

$$\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}.$$

Un punto $z^F \in \hat{\mathbb{C}}$ se denomina punto fijo cuando $R(z^F) = z^F$. Asimismo, los puntos periódicos de periodo T o T -periódicos son puntos fijos obtenidos con la aplicación del operador racional T veces. Por tanto, si z_T es un punto T -periódico, satisface $R^T(z_T) = z_T$ con $R^t(z_T) \neq z_T$, para todo $t < T$.

El comportamiento asintótico de los puntos fijos se clasifica dependiendo del valor del multiplicador de punto fijo, $|R'(z^F)|$, de forma que z^F es

- atractor, si $|R'(z^F)| < 1$;
- superatractor, si $|R'(z^F)| = 0$;
- repulsor, si $|R'(z^F)| > 1$;
- parabólico (también denominado neutral o indiferente), si $|R'(z^F)| = 1$.

El carácter dinámico de los puntos T -periódicos se define a partir del valor de $|(R^T)'(z_T)|$ de forma equivalente al comportamiento de los puntos fijos.

Cualquier método iterativo aplicado sobre una función $p(z)$ proporciona una función u operador de punto fijo, en cuyo caso, se denomina punto fijo extraño a todo punto fijo que no coincide con las raíces de $p(z)$. En particular, si $p(z)$ es un polinomio, el operador de punto fijo es una función racional. Notemos que las raíces de $p(z)$ siempre son puntos fijos del operador racional R . Además, serán superatractoras si el orden de convergencia del método iterativo es, al menos, cuadrático.

Un punto $z^C \in \hat{\mathbb{C}}$ se denomina punto crítico cuando $R'(z^C) = 0$. De la misma forma, todos los puntos críticos que no son raíces de la función $p(z)$, se denominan puntos críticos libres.

Para un punto atractor z^* del operador R , se define su cuenca de atracción, denotada por $\mathcal{A}(z^*)$, como el conjunto de sus preimágenes por R de cualquier orden, tales que

$$\mathcal{A}(z^*) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z) \rightarrow z^*, n \rightarrow \infty\}.$$

Definimos el conjunto de Fatou de la función racional R , denotado como $\mathcal{F}(R)$, como el conjunto de todos los puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ cuyas órbitas tienden a un atractor (punto fijo, órbita periódica o infinito). Su complementario en $\hat{\mathbb{C}}$ es el conjunto de Julia, $\mathcal{J}(R)$. Por tanto, la cuenca de atracción de cualquier punto fijo pertenece a $\mathcal{F}(R)$, mientras que $\mathcal{J}(R)$ comprende todos los puntos que son repelidos, y establece las fronteras entre las cuencas de atracción.

Relacionado con las cuencas de atracción y los conjuntos de Fatou y Julia, se define la cuenca de atracción inmediata de un punto fijo atractor z^* como la componente conexa de la cuenca de

atracción asociada que contiene al punto. Es necesario estudiar la existencia de puntos críticos en base al siguiente resultado.

Teorema 2.2 (Fatou[47] - Julia[54]). *Sea R una función racional. Entonces, la cuenca de atracción inmediata de cada punto atractor contiene, al menos, un punto crítico.*

A partir del resultado de Julia y Fatou, los puntos críticos pueden pertenecer a las cuencas de atracción de órbitas periódicas atractoras en lugar de converger a las raíces de $p(z)$. Por tanto, la localización de los puntos críticos del sistema también es esencial.

Clases de conjugación

Los fundamentos dinámicos descritos hasta el momento en esta sección se definen sobre el operador racional obtenido tras aplicar un esquema iterativo sobre una determinada función polinómica $p(z)$. Las clases de conjugación permiten generalizar este estudio sobre funciones particulares a un análisis que incluya a un conjunto mayor de funciones. Consideremos el siguiente resultado que permite dicha generalización para aquellos métodos iterativos que lo satisfacen.

Teorema 2.3 (Teorema del Escalado). *Sea $f(z)$ una función analítica y $A(z) = \lambda z + \beta$, con $\lambda \neq 0$, una transformación afín. Sea $g(z) = \theta(f \circ A)(z)$, con $\theta \neq 0$ escalar. Entonces, el operador de punto fijo R_f es conjugado analíticamente a R_g por A , es decir,*

$$(A \circ R_g \circ A^{-1})(z) = R_f(z).$$

Además, es posible analizar la dinámica de una familia de polinomios con solo el análisis de unos pocos casos, tras un escalado adecuado, como se muestra en el siguiente resultado para polinomios cuadráticos.

Teorema 2.4. *Sea $q(z) = a_1z^2 + a_2z + a_3$, $a_1 \neq 0$, un polinomio cuadrático genérico. Entonces, $q(z)$ se puede reducir a $p(z) = z^2 + c$, donde $c = 4a_1a_3 - a_2^2$, por medio de una transformación afín. Esta transformación afín produce una conjugación entre R_q y R_p , es decir, los operadores de punto fijo correspondientes a los polinomios $q(z)$ y $p(z)$, respectivamente.*

Cuando los operadores asociados a los métodos iterativos satisfacen el Teorema del Escalado, podemos simplificar el estudio dinámico sobre una familia de polinomios de un determinado grado al análisis de un único elemento de ésta, siendo los resultados generalizables a cualquier miembro de la familia. De esta forma se pueden extraer conclusiones sobre la estabilidad de un método para un conjunto de funciones sin la necesidad de estudiar cada caso particular.

A continuación mostramos la utilidad de las clases de conjugación para el método de Traub aplicado sobre polinomios de grado dos. Considerando la familia de polinomios cuadráticos $p_c(z) = z^2 + c$, el operador racional asociado al método de Traub sobre $p_c(z)$ depende del parámetro c , siendo

$$R_{p_c}(z) = \frac{c^2 + 6cz^2 - 3z^4}{8z^3}.$$

No obstante, en [3] se prueba que el método de Traub satisface el Teorema del Escalado, por lo que podemos eliminar la dependencia del parámetro c utilizando la transformación de Möbius

$$h(z) = \frac{z - i\sqrt{c}}{z + i\sqrt{c}},$$

que satisface las propiedades $h(\infty) = 1$, $h(i\sqrt{c}) = 0$ y $h(-i\sqrt{c}) = \infty$. Es decir, esta transformación nos lleva una raíz al cero, la otra al infinito y la divergencia al 1.

El operador resultante tras la conjugación analítica es

$$R_h(z) = (h \circ R_{p_c} \circ h^{-1})(z) = \frac{z^3(z+2)}{2z+1},$$

por lo que se ha eliminado la dependencia del parámetro c . Como el operador racional R_h es analíticamente conjugado a R_{p_c} , el estudio dinámico de ambos operadores para el método de Traub es equivalente.

Aunque el desarrollo de las herramientas gráficas de dinámica compleja se abordan en el siguiente apartado, mostramos en la Figura 2.1 el plano dinámico del operador R_h , donde se observan en azul y naranja las cuencas de atracción de ∞ y 0, respectivamente.

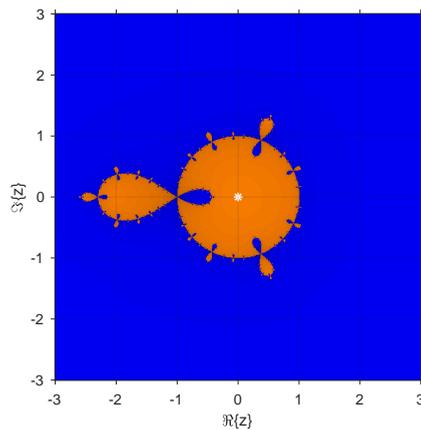


Figura 2.1: Plano dinámico del método de Traub sobre polinomios cuadráticos tras la transformación de Möbius

Representaciones gráficas de dinámica compleja

Existen diversas herramientas gráficas que facilitan la comprensión de la dinámica de un método iterativo, siendo las más utilizadas el plano dinámico y el plano de parámetros. Por medio del plano dinámico podemos visualizar las estimaciones iniciales de un método que convergen a los puntos fijos atractores. En cambio, el plano de parámetros permite determinar los miembros de una clase iterativa que son más estables.

Para un conjunto de estimaciones iniciales que cubren una determinada región del plano complejo, los planos dinámicos representan las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores u otros atractores extraños que hayamos encontrado. Esta representación se utiliza en trabajos como [18, 49, 60, 77]. Para su implementación, el plano complejo se divide en un mallado de valores donde el eje de abscisas corresponde a la parte real de un punto y el eje de ordenadas a la parte imaginaria. De esta forma, cada par de puntos del mallado está asociado a un número complejo que se toma como estimación inicial para iterar el método. La iteración inicial se representa con un color dependiendo del punto al cual haya convergido su órbita. Por tanto, las cuencas de atracción de los puntos fijos o periódicos quedan representadas en el plano, hecho que permite determinar si un método tiene grandes regiones de convergencia. Además, se añade mayor intensidad en el color representado para indicar que se requiere de un mayor número de iteraciones hasta lograr la convergencia.

Para poder ilustrar las representaciones fundamentales de dinámica compleja, introducimos un parámetro $\gamma \in \mathbb{C}$ en la estructura iterativa del método de Traub, obteniendo la familia uniparamétrica

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \gamma \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aplicando la familia (2.15) sobre el polinomio $p(z) = z^2 - 1$, se obtiene el operador racional

$$R_\gamma(z) = -\frac{\gamma + (\gamma - 4)z^4 - 2(\gamma + 2)z^2}{8z^3}.$$

En la Figura 2.2 se muestran los planos dinámicos de R_γ correspondientes a dos métodos de la familia iterativa (2.15), obtenidos con los valores $\gamma = 2$ y $\gamma = 4.5 + 0.2i$. Los planos se han generado tomando un mallado de 500×500 puntos en $[-5, 5] \times [-5, 5]$, y estableciendo como criterio de convergencia una diferencia entre los puntos del plano y alguna de las raíces de $p(z)$ menor que 10^{-3} con un máximo de 50 iteraciones. Se observa que en ambos métodos existen dos cuencas de atracción, correspondientes a los dos puntos fijos del operador racional, $z_1^F = -1$ y $z_2^F = 1$, que coinciden con las raíces del polinomio. Estas cuencas se han representado en naranja y azul para z_1^F y z_2^F , respectivamente, representados en el plano con estrellas blancas. También se han representado con cuadrados blancos los dos puntos fijos extraños de R_γ , denotados como $z_3^F(\gamma) = -\sqrt{\frac{\gamma}{4+\gamma}}$ y $z_4^F(\gamma) = \sqrt{\frac{\gamma}{4+\gamma}}$, los cuales pertenecen al conjunto de Julia. Además,

en la Figura 2.2(b) se observa en negro la cuenca de atracción del infinito, indicando todas las estimaciones iniciales que son divergentes para el método de la familia obtenido con $\gamma = 4.5 + 0.2i$.

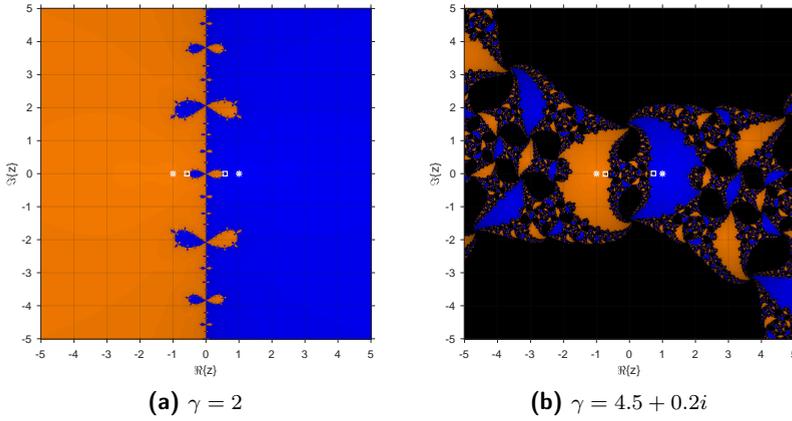


Figura 2.2: Planos dinámicos de R_γ

Observando el tamaño de las cuencas de atracción de los planos dinámicos de la Figura 2.2, se intuye que existen valores del parámetro cuyos métodos asociados tienen mejores propiedades de estabilidad. La selección de estos miembros la proporcionan los planos de parámetros.

Los planos de parámetros se utilizan para analizar la dinámica de una familia de métodos iterativos que tenga al menos un parámetro. Como la órbita de los puntos críticos puede caer en el conjunto de Fatou, el plano de parámetros asociado a cada punto crítico libre permite estudiar el comportamiento de la clase cuando la estimación inicial es un punto crítico.

Para representar los planos de parámetros, el plano complejo se divide en un mallado de valores complejos para el parámetro, siendo los ejes de abscisas y de ordenadas las partes real e imaginaria de éste, respectivamente. Cada punto del plano se corresponde con un valor del parámetro, y por tanto, con un método de la familia iterativa. Para cada valor del parámetro, se itera sucesivamente el método correspondiente tomando como estimación inicial un punto crítico libre del operador, de forma que existen tantos planos de parámetros como puntos críticos libres independientes (bajo conjugación analítica) tenga el operador asociado a la familia. Los puntos del plano se representan con un color distinto del negro cuando el método asociado converge a alguno de los puntos fijos atractores del operador, permaneciendo en negro en cualquier otro caso. Esta herramienta gráfica permite seleccionar los valores del parámetro que dan lugar a los métodos más estables de la familia.

El operador de punto fijo R_γ tiene como puntos críticos las raíces de $p(z)$, $z_1^C = -1$ y $z_2^C = 1$, y los puntos críticos libres $z_3^C(\gamma) = -\sqrt{\frac{3\gamma}{4-\gamma}}$ y $z_4^C(\gamma) = \sqrt{\frac{3\gamma}{4-\gamma}}$. Como $z_3^C(\gamma) = -z_4^C(\gamma)$, no se trata de puntos críticos libres independientes y únicamente con la representación del plano de

parámetros asociado a uno de ellos es suficiente para extraer toda la información proporcionada por esta herramienta gráfica.

En la Figura 2.3 se muestra el plano de parámetros de R_γ asociado a $z_3^C(\gamma)$, para un mallado de 500×500 puntos de valores del parámetro en $(\text{Re}(\gamma), \text{Im}(\gamma)) \in [-6, 13] \times [-10, 10]$. Utilizando los mismos criterios de convergencia que en los planos dinámicos de la Figura 2.1, se representan en rojo los métodos de la clase que convergen a alguna de las raíces del polinomio, determinando los métodos más estables de la familia. Notemos que el plano dinámico de la Figura 2.2(a) se corresponde con valores de γ tomados de la región representada en rojo en el plano de parámetros, y en cambio, el parámetro de la Figura 2.2(b) pertenece a una de las cuencas negras.

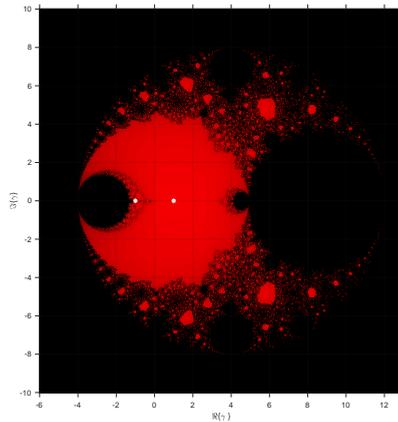


Figura 2.3: Plano de parámetros de R_γ

Representaciones gráficas de dinámica real

Cuando se trabaja con variables reales, el estudio dinámico de los métodos también se particulariza a este conjunto. Los fundamentos dinámicos descritos anteriormente para variable compleja son extrapolables al dominio real. No obstante, existen variaciones en cuanto a las herramientas gráficas utilizadas. A continuación se describen los diagramas de bifurcación, las rectas dinámicas y de parámetros y el plano de convergencia.

En [3], Amat et al. realizan un estudio dinámico sobre el método de Traub cuando se aplica a polinomios de grados dos y tres. Tomando este estudio sobre polinomios cuadráticos como referencia, se analizamos las características dinámicas de este método. Se utiliza a continuación este ejemplo para ilustrar las herramientas básicas de dinámica real y también para comparar la estabilidad del esquema de Traub con la de otros métodos con y sin memoria obtenidos a partir de éste y que se desarrollan en los Capítulos 3, 4 y 5 de esta memoria.

De acuerdo al Teorema 2.4, el estudio de la familia de polinomios $p_c(x) = x^2 + c$ se puede generalizar a cualquier polinomio cuadrático. Aplicando el método de Traub sobre $p_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, se obtiene el operador racional

$$R_c(x) = -\frac{c^2 + 6cx^2 - 3x^4}{8x^3}. \quad (2.16)$$

El operador R_c tiene como puntos fijos las raíces de $p_c(x)$, $x_1^F(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^F(c) = \sqrt{-c}$, cuando $c \leq 0$, con carácter superatractor. Además, $x_3^F(c) = -\sqrt{\frac{-c}{5}}$ y $x_4^F(c) = \sqrt{\frac{-c}{5}}$ son dos puntos fijos extraños repulsores de R_c cuando $c \leq 0$.

Cuando el operador depende de un parámetro, el estado avanzado de la órbita de los puntos fijos se puede representar utilizando los diagramas de bifurcación. Esta representación se realiza iterando el operador racional para un intervalo de valores del parámetro, representado en el eje de abscisas, tomando como estimación inicial los puntos fijos con una pequeña perturbación. Para cada valor del parámetro, se representan las iteraciones sucesivas x_k en el eje de ordenadas, mostrando de esta forma el estado avanzado de la órbita de cada estimación inicial. Los diagramas de bifurcación permiten determinar los valores del parámetro donde el método tiene una mayor estabilidad.

En la Figura 2.4 se han representado los diagramas de bifurcación de los puntos fijos de R_c . Para cada $c \in [-5, 1]$, los iterados x_k se han representado en el eje de ordenadas desde la iteración 500 a la 700. En ambos casos, cuando $c > 0$ no hay ningún punto debido a que son complejos. Por tanto, se verifica que c no puede tomar valores positivos para ninguno de los puntos fijos. Como $x_1^F(c)$ y $x_2^F(c)$ son superatractores, en la Figura 2.4(a) todos los puntos convergen a una de las dos raíces. En la Figura 2.4(b) se observa el mismo comportamiento, ya que $x_3^F(c)$ y $x_4^F(c)$ son puntos repulsores, por lo que se puede comprobar que el operador no tiene puntos fijos extraños que sean atractores.

Análogamente a los planos dinámicos y de parámetros descritos anteriormente, en el análisis dinámico real también se representa el estado final de la órbita de los puntos y, en las familias de métodos, los parámetros que dan lugar a los miembros más estables. Estas representaciones se realizan con las rectas dinámicas y las rectas de parámetros, respectivamente. En definitiva, estas herramientas gráficas provienen de la adaptación al dominio real de los planos dinámicos y de parámetros, propios del análisis complejo, para poder abordar un estudio similar en \mathbb{R} .

Tal y como se describe en [31], las rectas dinámicas asociadas a un método iterativo representan las cuencas de atracción de las raíces para un intervalo de estimaciones iniciales reales. Al igual que los planos dinámicos, se establecen unos criterios de convergencia a las raíces y un código de colores para representar cada cuenca de atracción.

En la Figura 2.5 se muestran las rectas dinámicas de R_c para valores distintos de c , donde se ha dividido el intervalo $[-30, 30]$ en 500 puntos utilizados como estimaciones iniciales para iterar el operador racional. Cuando un punto del intervalo converge a alguna de las raíces de $p_c(x)$, se ha representado en naranja o azul. El color naranja corresponde a la cuenca de atracción

de $x_1^F(c)$, y el azul a la cuenca de atracción de $x_2^F(c)$. Se han representado en negro aquellos puntos iniciales que no convergen a ninguna de las raíces. Los criterios de parada del proceso iterativo son un máximo de 50 iteraciones y una diferencia entre las iteraciones y alguna de las raíces menor que 10^{-3} .

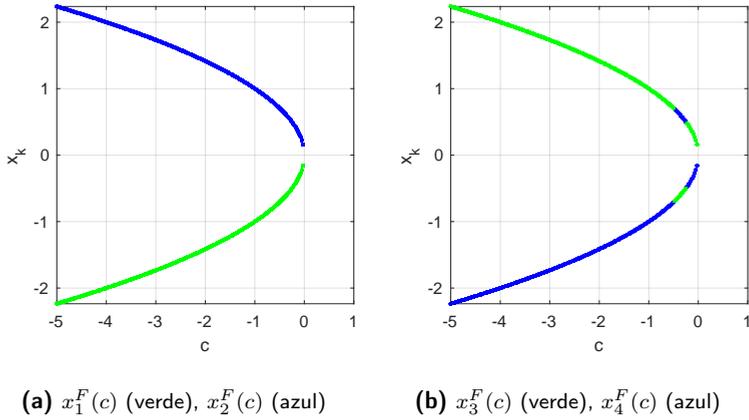


Figura 2.4: Diagramas de bifurcación de los puntos fijos del método de Traub sobre $p_c(x)$

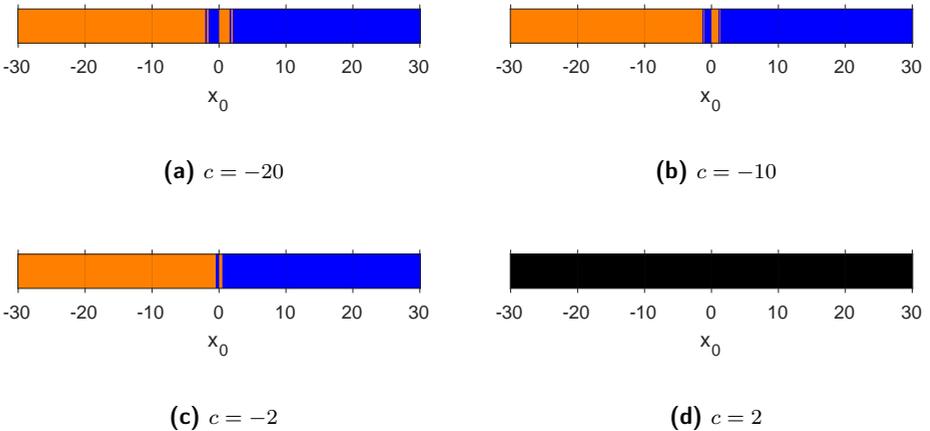


Figura 2.5: Rectas dinámicas de R_c para distintos valores de c

Se observa en las rectas dinámicas que se obtienen los miembros más estables tomando valores de c negativos, ya que para $c > 0$ las raíces de $p_c(x)$ no son puntos fijos de R_c , motivo por el cual la recta dinámica de la Figura 2.5(d) es completamente negra. En cambio, para los demás

valores de c fijados todos los puntos iniciales pertenecen a la cuenca de atracción de una de las dos raíces.

No obstante, el plano de convergencia definido en [61] recoge en una misma representación la información de todas las rectas dinámicas y, por tanto, el comportamiento de cada miembro de una familia de métodos iterativos uniparamétrica. La Figura 2.6 muestra el plano de convergencia del método de Traub para el polinomio considerado. La notación y criterios de convergencia utilizados son los mismos que en las rectas dinámicas pero, en lugar de fijar el valor de c , se representa un intervalo de valores del parámetro en el eje de ordenadas, en este caso para $c \in [-30, 0]$. También se han representado en el plano los puntos fijos superatractores y los puntos fijos extraños con rectas negras y blancas, respectivamente, ya que dependen del valor de c .

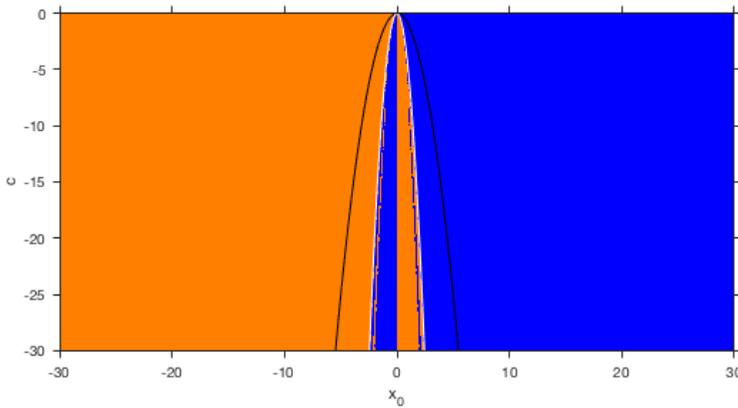


Figura 2.6: Plano de convergencia de R_c

En la Figura 2.6 se observa que cada una de las iteraciones iniciales del plano converge a uno de los puntos fijos superatractores. En particular, casi todo iterado inicial $x_0 > 0$ converge a $x_2^F(c)$, mientras la mayoría de los iterados $x_0 < 0$ convergen a $x_1^F(c)$. Existe una región pequeña delimitada por los puntos fijos extraños $x_3^F(c)$ y $x_4^F(c)$ donde las estimaciones iniciales convergen al punto fijo superatractor más cercano.

Resolviendo la ecuación $R'_c(x) = 0$, los únicos puntos críticos de R_c son las raíces de $p_c(x)$, por lo que el método de Traub aplicado a este polinomio no tiene puntos críticos libres.

2.2.2 Fundamentos de dinámica real multidimensional

En los últimos años, es común analizar la estabilidad tanto de métodos iterativos nuevos como conocidos en términos del conjunto de aproximaciones iniciales para las cuales los métodos convergen cuando éstos se aplican sobre polinomios de grado bajo. Este análisis generalmente se realiza mediante el uso de técnicas de sistemas dinámicos discretos complejos. Sin embargo, cuando se introduce memoria en los métodos iterativos o cuando los esquemas son para problemas multidimensionales, estas técnicas no se pueden aplicar. Campos et al. [12, 13] introdujeron un nuevo procedimiento que construye sistemas dinámicos reales multidimensionales a partir de estos esquemas con memoria, con el objetivo de analizar su dependencia sobre las estimaciones iniciales tomadas. Cuando los esquemas dependen de un parámetro real, también es posible seleccionar aquellos miembros de la familia uniparamétrica que tienen mejores propiedades de estabilidad.

A continuación se introducen las herramientas principales sobre el análisis dinámico de métodos iterativos con memoria. Se puede encontrar información más detallada en los trabajos de Campos et al. [12, 13] y Chicharro et al. [23, 30] donde, además del desarrollo completo de estas herramientas, también se aplican estos conceptos dinámicos sobre diversos esquemas con memoria. Tras esta descripción, también se muestra la extensión de estos conceptos al estudio dinámico de métodos multidimensionales.

En general, un proceso iterativo que utiliza m iteraciones previas en su expresión iterativa para calcular la siguiente estimación se puede expresar como

$$x_{k+1} = \Phi(x_{k-m}, \dots, x_{k-1}, x_k), \quad k \geq m,$$

siendo las estimaciones iniciales x_0, x_1, \dots, x_m , $m \geq 1$.

Notar que para el caso $m = 0$ el método iterativo no incluye memoria. Por simplicidad, a continuación se desarrolla el caso $m = 1$. Por tanto, la estructura estándar resultante es

$$x_{k+1} = \Phi(x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde x_0 y x_1 son las estimaciones iniciales. Sin embargo, la función $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ no puede tener puntos fijos, por lo que es necesario definir una función auxiliar $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de forma que

$$G(x_{k-1}, x_k) = (x_k, x_{k+1}) = (x_k, \Phi(x_{k-1}, x_k)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Algunos de los fundamentos de dinámica real multidimensional son análogos a los descritos en el apartado anterior para dinámica real unidimensional. No obstante, existen particularidades propias de la adaptación de las definiciones al dominio multidimensional, por lo que a continuación se describen los conceptos básicos necesarios.

Si (x_{k-1}, x_k) es un punto fijo de G , entonces satisface $G(x_{k-1}, x_k) = (x_{k-1}, x_k)$, es decir, se debe satisfacer simultáneamente $x_{k+1} = x_k$ y $x_k = x_{k-1}$. Entonces, se tiene un sistema dinámico discreto para el método iterativo con memoria, de modo que $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define

como

$$G(\mathbf{x}) = G(z, x) = (x, \Phi(z, x)), \quad \mathbf{x} = (z, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.17)$$

Análogamente al caso unidimensional, la órbita de un punto \mathbf{x} por la función G se define como el conjunto de sus sucesivas imágenes

$$\{\mathbf{x}, G(\mathbf{x}), G^2(\mathbf{x}), \dots, G^n(\mathbf{x}), \dots\}.$$

Asumiendo también que el esquema iterativo se aplica sobre un polinomio $p(x)$, la función vectorial $G(x_{k-1}, x_k)$ que define el método es racional.

Además, un punto $\mathbf{x}^F = (z, x)^F$ se define como un punto fijo de G si

$$\begin{cases} z = x, \\ x = \Phi(z, x), \end{cases} \quad (2.18)$$

y en particular, si el punto fijo \mathbf{x}^F del operador G es diferente de (x^r, x^r) , donde x^r es una raíz del polinomio $p(x)$, se denomina punto fijo extraño. Por último, un punto \mathbf{x}_T es T-periódico si $G^T(\mathbf{x}_T) = \mathbf{x}_T$ y $G^t(\mathbf{x}_T) \neq \mathbf{x}_T$, para $t < T$. El comportamiento asintótico de los puntos periódicos \mathbf{x}_T se caracteriza en el siguiente resultado [71].

Teorema 2.5. *Sea $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^2 . Supongamos que $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^n$ es un punto T-periódico. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de $G'(\mathbf{x}_T)$. Entonces,*

- (a) \mathbf{x}_T es un punto atractor cuando $|\lambda_j| < 1, \forall j$.
- (b) \mathbf{x}_T es inestable (repulsor o silla) si al menos un valor propio λ_{j_0} satisface $|\lambda_{j_0}| > 1$.
- (c) \mathbf{x}_T es un punto repulsor cuando $|\lambda_j| > 1, \forall j$.

Además, un punto T-periódico es hiperbólico cuando los valores propios de $G'(\mathbf{x}_T)$ satisfacen $|\lambda_j| \neq 1, \forall j$. En particular, si existe un valor propio λ_i tal que $|\lambda_i| < 1$ y otro valor propio λ_j con $|\lambda_j| > 1$, el punto hiperbólico se denomina punto de silla.

Cordero et al. proponen en [43] una herramienta práctica que, siendo consistente con el Teorema 2.5, permite clasificar la estabilidad de los puntos fijos de los operadores multidimensionales evitando el cálculo de los valores propios de $G'(\mathbf{x}^F)$.

Proposición 2.1. *Sea $\mathbf{x}^F \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo de $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces,*

- (a) \mathbf{x}^F es atractor si $\left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^F)}{\partial x_j} \right| < \frac{1}{n}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,
- (b) \mathbf{x}^F es superatractor si $\left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^F)}{\partial x_j} \right| = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

(c) \mathbf{x}^F es inestable si $\left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^F)}{\partial x_j} \right| > \frac{1}{n}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

donde $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$ denotan las funciones coordenadas del operador G .

Como consecuencia de los resultados anteriores, si todos los valores propios de la matriz Jacobiana $G'(\mathbf{x}_T)$ satisfacen $|\lambda_j| = 0$, entonces diremos que \mathbf{x}^F es un punto superatractor.

El conjunto de todas las preimágenes de cualquier orden de un punto T -periódico \mathbf{x}^* , se denomina cuenca de atracción, definida de la misma forma que en dinámica unidimensional como

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}^*) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \Phi^t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}^*, t \rightarrow \infty \right\}.$$

El concepto de punto crítico para operadores multidimensionales se puede definir utilizando las funciones coordenadas. Asimismo, \mathbf{x}^C es un punto crítico de G si sus funciones coordenadas $g_i(x)$ satisfacen $\frac{\partial g_i(\mathbf{x}^C)}{\partial x_j} = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nótese que, a partir esta definición, todos los puntos fijos superatractores también son puntos críticos del operador. Además, cuando un punto crítico es diferente de (x^r, x^r) , siendo x^r una raíz de $p(x)$, entonces se denomina punto crítico libre.

La representación dinámica fundamental de los métodos iterativos con memoria son los planos dinámicos. La implementación y significado son los mismos que en los planos dinámicos de variable compleja, con la única variación de que en lugar de representar la parte real e imaginaria de cada estimación inicial, se representan las iteraciones $x = x_k$ y $z = x_{k-1}$ en los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente.

En la Figura 2.7, se muestra el plano dinámico correspondiente al método de la secante cuando se aplica al polinomio $p(x) = x^2 - 1$. El operador vectorial resultante

$$G(z, x) = \left(x, \frac{1 + xz}{x + z} \right),$$

tiene como puntos fijos $\mathbf{x}_1^F = (-1, -1)$ y $\mathbf{x}_2^F = (1, 1)$, representados en el plano dinámico con estrellas blancas, y sus cuencas de atracción en naranja y azul, respectivamente. Por ser un operador bidimensional, el iterado x_k se representa en el eje de abscisas, mientras que la iteración x_{k-1} se representa en el eje de ordenadas.

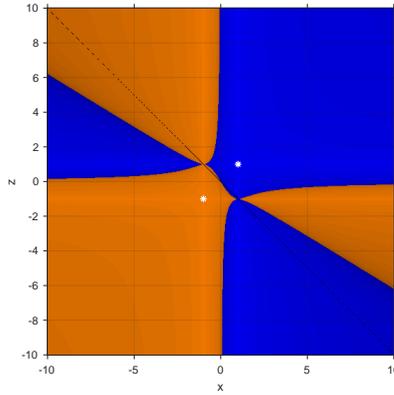


Figura 2.7: Plano dinámico del método de la Secante sobre $p(x) = x^2 - 1$

Dinámica real multidimensional de métodos para sistemas

Para estudiar la estabilidad de los puntos fijos de las funciones racionales vectoriales asociadas a esquemas para resolver sistemas de ecuaciones no lineales también se utilizan herramientas de dinámica real multidimensional. En [43], además de presentar el Teorema 2.1, Cordero et al. comprueban la consistencia del resultado aplicándolo a los esquemas de Newton y Traub sobre sistemas polinómicos de grados dos.

Una forma de poder implementar planos dinámicos en los métodos n -dimensionales, es particularizar al caso $n = 2$, de forma que se pueda representar una variable en cada eje del plano. No obstante, los resultados analíticos del estudio dinámico son generalizables a cualquier dimensión.

Por ejemplo, si se considera el sistema polinómico cuadrático con variables x_1 y x_2

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) = x_1^2 - 1 \\ p_2(x) = x_2^2 - 1 \end{cases}, \quad (2.19)$$

la función vectorial racional obtenida cuando el método de Traub se aplica a $p(x)$ es

$$G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{3x_1^4 + 6x_1^2 - 1}{8x_1^3} \\ \frac{3x_2^4 + 6x_2^2 - 1}{8x_2^3} \end{bmatrix}.$$

De forma análoga a los métodos con memoria, los puntos fijos se calculan resolviendo $G(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. En este caso coinciden con las raíces de $p(x)$, siendo $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$. La representación de los planos dinámicos se realiza siguiendo las mismas pautas que en los demás esquemas, pero representando en los ejes de abscisas y ordenadas las variables x_1 y x_2 ,

respectivamente. Cada punto del plano se representa del color correspondiente a la cuenca de atracción de la raíz a la cual ha convergido de acuerdo al criterio de colores establecido, y en negro en caso contrario. En la Figura 2.8 se puede observar el plano dinámico del método de Traub sobre el sistema polinómico (2.19), donde los colores naranja, azul, verde y rojo denotan, respectivamente, las cuencas de atracción de las raíces $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$, representadas con estrellas blancas. También se han incluido en el plano, con cuadrados blancos, los cuatro puntos fijos extraños de G , $(\pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{\sqrt{5}}{5})$.

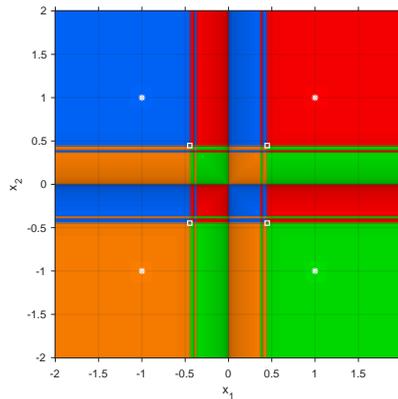


Figura 2.8: Plano dinámico de $G(x_1, x_2)$

Las herramientas de análisis dinámico descritas en esta sección serán utilizadas a lo largo de los capítulos que componen esta memoria para estudiar la estabilidad de los distintos esquemas propuestos, completando el análisis numérico de los mismos. En particular, de los Capítulos 3 a 7 se realizarán estudios dinámicos unidimensionales tanto reales como complejos. Los conceptos de dinámica real multidimensional de métodos para sistemas no lineales se utilizarán en el Capítulo 8, incluyendo una descripción detallada del proceso seguido para estudiar la estabilidad de los puntos fijos. También se desarrollará el análisis dinámico de una familia de esquemas iterativos uniparamétrica, determinando los valores del parámetro que dan lugar a los métodos con mejores propiedades de estabilidad para los sistemas polinómicos cuadráticos considerados.

Variantes uniparamétricas con memoria del método de Traub

Basado en:

- [16] *"Anomalies in the convergence of Traub-type methods with memory", Computational and Mathematical Methods.*
- [23] *"Stability and applicability of iterative methods with memory", Journal of Mathematical Chemistry.*
- [24] *"Impact on stability by the use of memory on Traub-type schemes", Mathematics.*

El método de Traub [83] es uno de los esquemas clásicos de la literatura con estructura iterativa de dos pasos. Obtenido a partir de la composición del método de Newton y congelando la derivada del denominador del segundo paso, presenta orden de convergencia cúbico. Su estabilidad dependiendo de las estimaciones iniciales se ha probado en el Capítulo 2 sobre polinomios cuadráticos. No obstante, algunas modificaciones en su estructura iterativa permiten la obtención de clases iterativas con órdenes de convergencia superiores y mejores propiedades dinámicas.

Los Capítulos 3, 4 y 5 de esta Tesis Doctoral están dedicados al desarrollo de un conjunto de nuevos métodos iterativos obtenidos tras la incorporación de parámetros de aceleración en la estructura iterativa del método de Traub. Los esquemas propuestos se dividen en dos grandes bloques: métodos con derivadas, presentados en este capítulo y el siguiente, y métodos libres de derivadas, cuyo desarrollo conforma el Capítulo 5.

El estudio de los métodos propuestos se realiza en los tres capítulos por medio de dos vertientes. En primer lugar, el estudio de la velocidad con que convergen a la solución en términos de órdenes de convergencia. Este análisis permite determinar cómo mejorar dicho orden, dando lugar a su vez a nuevos métodos con memoria con diferentes características. En segundo lugar, el estudio de la estabilidad en términos de dinámica real, determinando para las familias uniparamétricas aquellos valores del parámetro que dan lugar a los esquemas más estables, y también las estimaciones iniciales más adecuadas para garantizar la convergencia a la solución. Por último, se comprueba la aplicabilidad de los resultados obtenidos tanto de las propiedades de convergencia como de las propiedades dinámicas por medio de experimentos numéricos en los cuales todos los esquemas propuestos se utilizan para resolver diversas ecuaciones no lineales.

3.1 Introducción

El cálculo de la solución de una ecuación no lineal $f(x) = 0$ es un problema que ha estado presente durante siglos en diferentes campos científicos y tecnológicos. Debido a que muchas de estas ecuaciones no se pueden resolver analíticamente, este problema no lineal comúnmente se resuelve utilizando procesos iterativos. Existe una literatura extensa en relación con los métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales, siendo el diseño de nuevos métodos un punto de interés para muchos científicos. Recientemente, este diseño va acompañado de un análisis dinámico [3, 6, 27, 29, 73], permitiendo el conocimiento de la estabilidad de los métodos bajo estudio.

El esquema iterativo de partida ya ha sido presentado en capítulos previos de esta memoria y es el método de Traub [83], cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Es conocido que el orden de convergencia del método de Traub es cúbico, presentando la ecuación del error

$$e_{k+1} = 2c_2^2 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4),$$

siendo α una solución de la ecuación $f(x) = 0$, $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, el error cometido en cada iteración del método y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

A pesar de que en el esquema de Traub no es posible aumentar el orden de convergencia, algunas modificaciones en su expresión iterativa permiten incluir memoria, obteniendo métodos con mayor orden manteniendo el número de evaluaciones funcionales. En los siguientes apartados se realiza un estudio sobre cómo mejorar este orden. En primer lugar, introduciendo un parámetro acelerador. En segundo lugar, aproximando el valor de este parámetro utilizando iteraciones anteriores del método, y como consecuencia generando métodos con memoria. También se realiza un estudio dinámico de forma similar al realizado en [12, 30, 31, 85] para verificar la estabilidad de los métodos en función de las estimaciones iniciales. Por último, los experimentos numéricos sobre funciones no lineales permiten comprobar los resultados del estudio realizado.

Tras introducir el método de partida, este capítulo se organiza como sigue. La Sección 3.2 desarrolla métodos con memoria a través de la introducción y posterior aproximación de un parámetro acelerador, analizando la velocidad de convergencia teórica de los esquemas propuestos. El estudio de la estabilidad de todos los nuevos métodos diseñados se realiza en la Sección 3.3, utilizando herramientas de dinámica real. A continuación, en la Sección 3.4, se desarrolla el análisis numérico de los nuevos métodos, así como su comparación numérica con los métodos clásicos de Traub y Newton, utilizando los esquemas iterativos para resolver algunas ecuaciones no lineales. La Sección 3.5 resume las conclusiones fundamentales de este estudio.

3.2 Variantes uniparamétricas del método de Traub

En primer lugar, se introduce un parámetro $\delta \in \mathbb{R}$ en el primer paso de la expresión iterativa del método de Traub (3.1), obteniendo la familia de esquemas iterativos

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \delta f(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{3.2}$$

que denotamos por T1. El siguiente resultado establece el orden de convergencia de la familia de métodos (3.2).

Teorema 3.1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Si $\alpha \in I$ es una raíz simple de $f(x) = 0$ y x_0 está suficientemente cerca de α , entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por la familia de métodos T1 converge a α con orden de convergencia 3 para cualquier valor del parámetro δ , y con ecuación del error*

$$e_{k+1} = 2c_2(c_2 + \delta)e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4), \tag{3.3}$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Demostración. Utilizando desarrollos en serie de Taylor en torno a la solución α , $f(x_k)$ se puede expresar como

$$f(x_k) = f'(\alpha)[e_k + c_2e_k^2 + c_3e_k^3 + c_4e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5),$$

y su derivada

$$f'(x_k) = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_k + 3c_3e_k^2 + 4c_4e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4).$$

A partir de los anteriores desarrollos, se tiene

$$y_k - \alpha = e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \delta f(x_k)} = (c_2 + \delta)e_k^2 + (-2c_2\delta - 2c_2^2 + 2c_3 - \delta^2)e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\alpha)[y_k - \alpha + c_2(y_k - \alpha)^2 + c_3(y_k - \alpha)^3] + \mathcal{O}((y_k - \alpha)^4) \\ &= f'(\alpha)[(c_2 + \delta)e_k^2 + (-2c_2\delta - 2c_2^2 + 2c_3 - \delta^2)e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4). \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación del error resultante es

$$e_{k+1} = y_k - \alpha - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} = 2c_2(c_2 + \delta)e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4),$$

por lo que la familia de métodos iterativos (3.2) tiene orden de convergencia 3. □

A continuación se estudia cómo mejorar el orden de convergencia partiendo de la ecuación del error (3.3). Nótese que si $\delta = -c_2 = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$, el orden ya se incrementa en una unidad. Pero debido a que el valor de α no es conocido, se necesitan aproximar los valores de $f'(\alpha)$ y $f''(\alpha)$, obteniendo una expresión de δ que produzca este aumento del orden del esquema iterativo.

Si se aplican las siguientes aproximaciones lineales

$$f'(\alpha) \approx f'(x_k), \quad f''(\alpha) \approx \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \quad (3.4)$$

la aproximación considerada para el parámetro acelerador δ es

$$\delta_k = -\frac{1}{2} \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})f'(x_k)}. \quad (3.5)$$

Sustituyendo el valor del parámetro δ_k obtenido en el esquema (3.2), se obtiene un método iterativo tipo Traub con memoria, que denotamos por TM1. Su orden de convergencia se analiza a continuación.

Teorema 3.2. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I , y $\alpha \in I$ una raíz simple de $f(x) = 0$. Si x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α , entonces el método TM1 converge a α con orden de convergencia $p \approx 3.30$, siendo su ecuación

del error

$$e_{k+1} = -3c_2c_3e_{k-1}e_k^3 + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}), \quad (3.6)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$, y $\mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1})$ denota todos los términos en los que la suma de exponentes de e_k y e_{k-1} es al menos 4.

Demostración. A partir de la ecuación del error (3.3), se verifica la relación

$$e_{k+1} \sim 2c_2(c_2 + \delta_k)e_k^3.$$

Utilizando desarrollos en serie de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\alpha)[e_k + c_2e_k^2 + c_3e_k^3 + c_4e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5), \\ f(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1} + c_2e_{k-1}^2 + c_3e_{k-1}^3 + c_4e_{k-1}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1}^5), \end{aligned}$$

y las derivadas pueden asimismo desarrollarse en torno a α como

$$\begin{aligned} f'(x_k) &= f'(\alpha)[1 + 2c_2e_k + 3c_3e_k^2 + 4c_4e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4), \\ f'(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[1 + 2c_2e_{k-1} + 3c_3e_{k-1}^2 + 4c_4e_{k-1}^3] + \mathcal{O}(e_{k-1}^4). \end{aligned}$$

De esta forma, el parámetro acelerador se puede expresar como

$$\begin{aligned} \delta_k &= -\frac{1}{2} \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{(e_k - e_{k-1})f'(x_k)} \\ &= -c_2 - \frac{3}{2}c_3e_{k-1} + \left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_k + (3c_2c_3 - 2c_4)e_{k-1}e_k - 2c_4e_{k-1}^2 \\ &\quad + (-4c_2^3 + 6c_2c_3 - 2c_4)e_k^2 + \mathcal{O}_3(e_k, e_{k-1}) \end{aligned}$$

y tomando los términos de menor orden se deduce que

$$\delta_k + c_2 \sim -\frac{3}{2}c_3e_{k-1}.$$

Entonces, se obtiene la relación

$$e_{k+1} \sim 2c_2 \left(-\frac{3}{2}c_3e_{k-1}\right) e_k^3 \sim e_{k-1}e_k^3. \quad (3.7)$$

Por otro lado, supongamos que el R-orden del método es al menos p . Por tanto, se satisface

$$e_{k+1} \sim D_{k,p}e_k^p,$$

donde $D_{k,p}$ tiende a la constante de error asintótico, D_p , cuando $k \rightarrow +\infty$.

Análogamente,

$$e_k \sim D_{k-1,p}e_{k-1}^p.$$

Entonces,

$$e_{k+1} \sim D_{k,p}(D_{k-1,p}e_{k-1}^p)^p = D_{k,p}D_{k-1,p}^p e_{k-1}^{p^2}. \quad (3.8)$$

De la misma forma, partiendo de la relación (3.7), obtenemos

$$e_{k+1} \sim e_{k-1}(D_{k-1,p}e_{k-1}^p)^3 = D_{k-1,p}^3 e_{k-1}^{3p+1}. \quad (3.9)$$

Por último, utilizando el Teorema 2.1 e igualando los exponentes de e_{k-1} en (3.8) y (3.9), se obtiene la ecuación

$$p^2 = 3p + 1,$$

cuya única solución positiva es el orden de convergencia del método TM1, siendo $p \approx 3.30$. \square

Basándonos en el Teorema 3.2, podemos afirmar que la introducción de memoria permite incrementar el orden de convergencia de los métodos de Traub y T1 de 3 hasta 3.30. Posteriormente, el análisis dinámico realizado en la Sección 3.3 se utiliza para estudiar la estabilidad de los métodos con y sin memoria diseñados.

Por otra parte, aunque el uso de la aproximación lineal para el parámetro (3.5) ya produce un método con memoria con orden 3.30, el uso de polinomios de mayor grado puede proporcionar mejores aproximaciones, y por tanto, métodos con memoria con órdenes más próximos a 4. Siguiendo esta línea, se propone el uso del polinomio de interpolación de Newton de segundo grado, definido por medio de las tres aproximaciones a la solución disponibles, x_k , x_{k-1} e y_{k-1} , para interpolar f . Denotado por $N_2(t; x_k, x_{k-1}, y_{k-1}) = N_2(t)$, se define como

$$N_2(t) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](t - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, y_{k-1}](t - x_k)(t - x_{k-1}). \quad (3.10)$$

Entonces, con las aproximaciones

$$f'(\alpha) \approx N_2'(x_k), \quad f''(\alpha) \approx N_2''(x_k), \quad (3.11)$$

el valor de δ se puede aproximar como

$$\delta_k = -\frac{N_2''(x_k)}{2N_2'(x_k)}. \quad (3.12)$$

Reemplazando δ por δ_k en el esquema (3.2), la expresión resultante es un método con memoria libre de parámetros que se denota TM1N. El orden de convergencia del esquema iterativo TM1N se analiza a continuación.

Teorema 3.3. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Si $\alpha \in I$ es una raíz simple de $f(x) = 0$ y las estimaciones iniciales x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α , entonces el método iterativo TM1N converge a α con orden de convergencia $p \approx 3.30$.*

Demostración. De la ecuación del error (3.3) se verifica la relación

$$e_{k+1} \sim 2c_2(c_2 + \delta_k)e_k^3, \quad (3.13)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$. Denotemos $e_{k,y} = y_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sea $N_2(t)$ el polinomio de interpolación de Newton de segundo grado que interpola en los puntos x_k , x_{k-1} e y_{k-1} . Utilizando los siguientes desarrollos en serie de Taylor en torno a α

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\alpha)[e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5), \\ f(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1} + c_2 e_{k-1}^2 + c_3 e_{k-1}^3 + c_4 e_{k-1}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1}^5), \\ f(y_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1,y} + c_2 e_{k-1,y}^2 + c_3 e_{k-1,y}^3 + c_4 e_{k-1,y}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1,y}^5), \end{aligned}$$

se verifica

$$\begin{aligned} c_2 + \delta_k &= -c_3 e_{k-1,y} - c_3 e_{k-1} + (-c_2 c_3 - c_4) e_{k-1,y} e_{k-1} - c_4 e_{k-1}^2 + (2c_2^2 - c_3) e_k \\ &\quad + (3c_2 c_3 - c_4) (e_{k-1,y} + e_{k-1}) e_k + (-4c_2^2 + 4c_2 c_3 - c_4) e_k^2 + \mathcal{O}_3(e_k, e_{k-1}, e_{k-1,y}) \\ &\sim e_{k-1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Supongamos que el R -orden del método es al menos p . Entonces se cumple la relación

$$e_{k+1} \sim D_{k,p} e_k^p, \tag{3.15}$$

donde $D_{k,p}$ tiende a D_p , la constante de error asintótico, cuando k tiende a infinito. De la misma forma,

$$e_k \sim D_{k-1,p} e_{k-1}^p. \tag{3.16}$$

Utilizando la relación (3.16) en (3.15) obtenemos

$$e_{k+1} \sim D_{k,p} \left(D_{k-1,p} e_{k-1}^p \right)^p \sim D_{k,p} D_{k-1,p}^p e_{k-1}^{p^2}. \tag{3.17}$$

Consideremos la sucesión $\{y_k\}$ generada por el primer paso del método. Supongamos que converge con R -orden al menos p_1 . Entonces, utilizando (3.16) se verifica

$$e_{k,y} \sim D_{k,p_1} e_k^{p_1} \sim D_{k,p_1} \left(D_{k-1,p} e_{k-1}^p \right)^{p_1} \sim D_{k,p_1} D_{k-1,p}^{p_1} e_{k-1}^{pp_1}. \tag{3.18}$$

A partir del desarrollo en serie de Taylor de f' en torno a α

$$f'(x_k) = f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_k + 3c_3 e_k^2 + 4c_4 e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4),$$

se tiene para el primer paso del método

$$e_{k,y} = e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = (c_2 + \delta_k) e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3) \sim (c_2 + \delta_k) e_k^2. \tag{3.19}$$

Utilizando (3.14) y (3.16) en (3.19), obtenemos

$$e_{k,y} \sim e_{k-1} \left(D_{k-1,p} e_{k-1}^p \right)^2 \sim D_{k-1,p}^2 e_{k-1}^{2p+1}. \tag{3.20}$$

Por otro lado, utilizando (3.14) y (3.16) en la ecuación del error (3.13) se satisface

$$e_{k+1} \sim e_{k-1} \left(D_{k-1,p} e_{k-1}^p \right)^3 \sim D_{k-1,p}^3 e_{k-1}^{3p+1}. \quad (3.21)$$

Por último, si igualamos los exponentes de (3.18) y (3.17) con los de (3.20) y (3.21), respectivamente, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} pp_1 &= 2p + 1 \\ p^2 &= 3p + 1, \end{cases}$$

cuya única solución positiva es $p \approx 3.30$, $p_1 \approx 2.30$. Por tanto, el orden de convergencia del método TM1N es 3.30. \square

Aunque el orden de convergencia del método obtenido utilizando aproximaciones cuadráticas para el parámetro no se ha mejorado con respecto al método TM1, sí se mantiene este incremento en comparación al método de Traub y al esquema original T1. No obstante, el estudio dinámico realizado en la Sección 3.3 revela una mayor estabilidad del método TM1N frente al método TM1, a pesar de que la velocidad de convergencia no varía para las dos propuestas de métodos con memoria. Este estudio dinámico se realiza utilizando herramientas de dinámica real unidimensional o multidimensional, dependiendo del método bajo estudio.

3.3 Dinámica real

El estudio de las propiedades dinámicas del operador racional asociado a un método iterativo aplicado sobre polinomios de grado bajo proporciona información relevante sobre la estabilidad del método. Este análisis normalmente se realiza aplicando conceptos de dinámica compleja. Sin embargo, tal y como se afirma en [62], el conocimiento de la dinámica real no está incluido en el estudio de la dinámica compleja, ya que el comportamiento puede ser distinto. Por tanto, ante un método con memoria, se pueden aplicar los fundamentos de dinámica compleja pero particularizando al caso de variable real.

El objetivo de esta sección es comparar la estabilidad del esquema sin memoria T1 con la de los otros métodos con memoria obtenidos a partir de éste. Por tanto, el análisis dinámico desarrollado se centra en herramientas de dinámica real pero distinguiendo el método sin memoria, para el que se utilizan técnicas de dinámica discreta unidimensional, de los casos con memoria, en los que las herramientas son multidimensionales.

El estudio dinámico que se propone en este capítulo se basa en el análisis de la estabilidad de los métodos dependiendo de las estimaciones iniciales tomadas. Con este objetivo, se aplican los métodos a funciones no lineales sencillas y se analizan los puntos fijos del operador resultante. Este estudio permite determinar las estimaciones iniciales más adecuadas para que un método converja a una raíz de la función no lineal y, en las familias de esquemas iterativos, cuáles son los métodos con mejores propiedades en términos de estabilidad. En este caso, las funciones

no lineales estudiadas son polinomios de grado dos. En particular, todo el estudio dinámico se realiza sobre la familia de polinomios $p_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Nótese que $p_c(x)$ únicamente tiene raíces reales $-\sqrt{-c}$ y $\sqrt{-c}$ cuando $c \leq 0$.

3.3.1 Familia de métodos T1: dinámica real biparamétrica

El primer esquema iterativo cuya dinámica se va a analizar es la familia de métodos T1. Por tratarse de métodos sin memoria, tras aplicar la expresión iterativa sobre el polinomio $p_c(x) = x^2 + c$ el resultado es el operador racional unidimensional que depende de los parámetros δ y c

$$R_c(x) = -\frac{1}{2x} \left(c - x^2 + \frac{(c + x^2)^2}{(\delta(c + x^2) + 2x)^2} \right).$$

Nótese que cuando $\delta = 0$ la clase iterativa T1 se reduce al método de Traub y por tanto, el operador R_c también se reduce al operador (2.16) del método de Traub y cuya estabilidad se ha analizado en la Sección 2.2.1 de esta memoria.

Los puntos fijos del operador racional R_c son solución de $R_c(x) = x$. En el siguiente resultado se muestra la dependencia de los puntos fijos de los parámetros, así como la existencia de puntos fijos extraños, dependientes de los mismos. También se estudia el comportamiento asintótico de los puntos fijos dependiendo del valor de R'_c . Concretamente, la estabilidad de los puntos fijos extraños se analiza utilizando el plano de estabilidad, que muestra, para cada uno de los puntos fijos extraños, los pares de valores de los parámetros donde el punto es atractor o repulsor. La descripción de esta herramienta gráfica se realiza en la Sección 2.2 de esta memoria. En particular, la implementación de los planos de estabilidad de este capítulo se ha realizado en Matlab R2018b, tomando un mallado de 500×500 puntos de valores para los parámetros c y δ , representados en los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente.

Proposición 3.1. *Los puntos fijos del operador R_c , obtenido tras aplicar la clase iterativa T1 sobre el polinomio $p_c(x)$ son las raíces del polinomio, $x_1^F(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^F(c) = \sqrt{-c}$, cuando $c \leq 0$, con comportamiento asintótico superatractor, y dos puntos fijos extraños que también dependen del parámetro δ , denotados por $x_3^F(c, \delta)$ y $x_4^F(c, \delta)$, correspondientes a las raíces reales del polinomio de grado cuatro*

$$P_4(x) = \delta^2 x^4 + 4\delta x^3 + (5 + 2c\delta^2)x^2 + 4c\delta x + c^2\delta^2 + c,$$

cuando $c \leq 0$, y son puntos repulsores.

Demostración. *Desarrollando la igualdad $R_c(x) = x$ se obtiene*

$$-\frac{1}{2x} \left(c - x^2 + \frac{(c + x^2)^2}{(\delta(c + x^2) + 2x)^2} \right) = x \Leftrightarrow -(c + x^2) \left(1 + \frac{(c + x^2)^2}{(\delta(c + x^2) + 2x)^2} \right) = 0.$$

Por tanto, los puntos fijos del operador son las soluciones de la ecuación $c + x^2 = 0$ y también aquellos que satisfacen la expresión

$$1 + \frac{(c + x^2)^2}{(\delta(c + x^2) + 2x)^2} = 0. \quad (3.22)$$

De la primera ecuación, las raíces de $p_c(x)$ son puntos fijos de R_c cuando $c < 0$. Desarrollando (3.22), los puntos fijos extraños son las raíces reales de la ecuación

$$\delta^2 x^4 + 4\delta x^3 + (5 + 2c\delta^2)x^2 + 4c\delta x + c^2\delta^2 + c = 0. \quad (3.23)$$

La estabilidad de los puntos fijos queda determinada por el valor de la derivada del operador racional,

$$R'_c(x) = \frac{(c + x^2)^2 (\delta^3 (c + x^2)^2 + 6\delta^2 x (c + x^2) + \delta (c + 13x^2) + 6x)}{2x^2 (\delta (c + x^2) + 2x)^3}. \quad (3.24)$$

Del término $(c + x^2)^2$ que multiplica al anterior cociente, es inmediato que $R'_c(\pm\sqrt{-c}) = 0$. Por tanto, los puntos fijos $x_1^F(c)$ y $x_2^F(c)$ son superatractores.

La estabilidad de los puntos fijos extraños depende del valor que tomen simultáneamente los parámetros c y δ . La Figura 3.1 representa los planos de estabilidad correspondientes a cada punto fijo extraño del operador. Estudiando los pares de valores de c y δ donde $|R'_c(x_{3,4}^F)|$ es mayor o menor que 1, se ha representado en blanco los valores de los parámetros para los cuales el punto fijo extraño es repulsor, y en negro cuando es atractor. El color gris indica que los valores de c y δ considerados dan lugar a valores complejos, por lo que estos resultados no se analizan en este estudio dinámico real. Tal y como se observa en los planos de estabilidad de la Figura 3.1, los dos puntos fijos extraños $x_{3,4}^F(c, \delta)$ son repulsores en todo punto donde están definidos.

□

Como consecuencia del resultado de Julia y Fatou (Teorema 2.2), el estudio de los puntos críticos del operador es necesario para analizar las cuencas de atracción a las cuales pertenecen. Este estudio se muestra en el resultado a continuación.

Proposición 3.2. Los puntos críticos del operador R_c son las raíces de $p_c(x)$, $x_1^C(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^C(c) = \sqrt{-c}$, para $c \leq 0$, y cuatro puntos críticos libres, denotados $x_{3-6}^C(c, \delta)$, raíces del polinomio

$$Q_4(x) = \delta^3 x^4 + 6\delta^2 x^3 + (13\delta + 2c\delta^3)x^2 + (6 + 6c\delta^2)x + c\delta + c^2\delta^3,$$

que toman valores reales en distintas regiones determinadas por el valor que toman los parámetros.

La prueba de este resultado sigue un proceso análogo a la demostración de la Proposición 3.1. Los puntos críticos de este operador se calculan a partir de (3.24) resolviendo la ecuación $R'_c(x) = 0$.

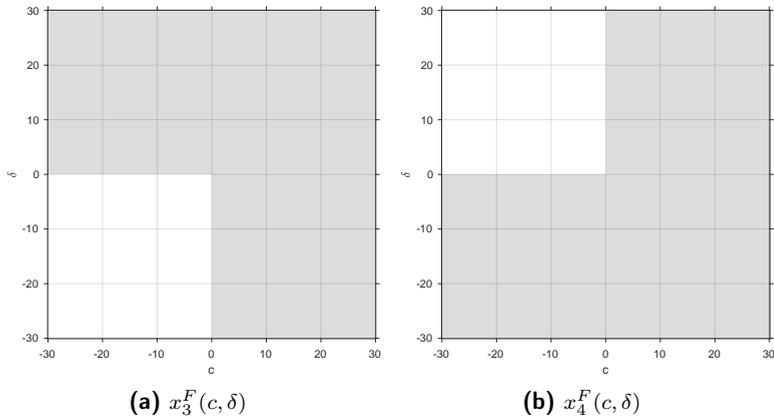


Figura 3.1: Planos de estabilidad de los puntos fijos extraños de R_c

Como T1 es un método que depende de dos parámetros, se representan los planos de parámetros asociados a cada punto crítico libre. Esta representación permite seleccionar los valores de c y δ que proporcionan los miembros más estables de la familia T1.

La implementación de los planos de parámetros se ha realizado en Matlab R2018b, tomando un malla de 500×500 puntos en el plano real, representando en el eje de abscisas $c \in [-30, 30]$ y en el eje de ordenadas $\delta \in [-30, 30]$, siendo el comportamiento de la función racional análogo si se amplía la región del plano considerada. De esta forma, cada punto del plano está asociado a un único par (c, δ) y por tanto a un método concreto de la familia. Tomando como estimación inicial para cada método uno de los puntos críticos libres del operador, se estudia la convergencia a los puntos fijos atractores $x_1^F(c)$ y $x_2^F(c)$, representando el punto del plano en rojo cuando el esquema ha convergido a alguno de estos puntos y en negro en caso contrario.

La Figura 3.2 muestra los planos de parámetros asociados a los puntos críticos libres $x_{3-6}^C(c, \delta)$. La convergencia a los puntos fijos (representada en rojo) se establece cuando la diferencia entre una iteración y alguna de las raíces del polinomio es menor que 10^{-3} para un máximo de 50 iteraciones. Como existen valores de los parámetros para los cuales $x_{3-6}^C(c, \delta)$ no son reales, se han representado en gris aquellos pares ordenados en los que el punto crítico bajo análisis toma valores complejos. Se observa que la mayor parte de los valores de los parámetros para los cuales el punto crítico pertenece a la cuenca de atracción de una de las raíces del polinomio se sitúan en el segundo cuadrante del plano, para valores cercanos al eje de ordenadas. Excepto para el punto crítico libre $x_4^C(c, \delta)$, cuyo plano de parámetros muestra que el punto siempre es complejo en este dominio (Figura 3.2(b)), se observa que las regiones más estables de valores de los parámetros, representadas en rojo, son similares en las Figuras 3.2(a), 3.2(c) y 3.2(d).

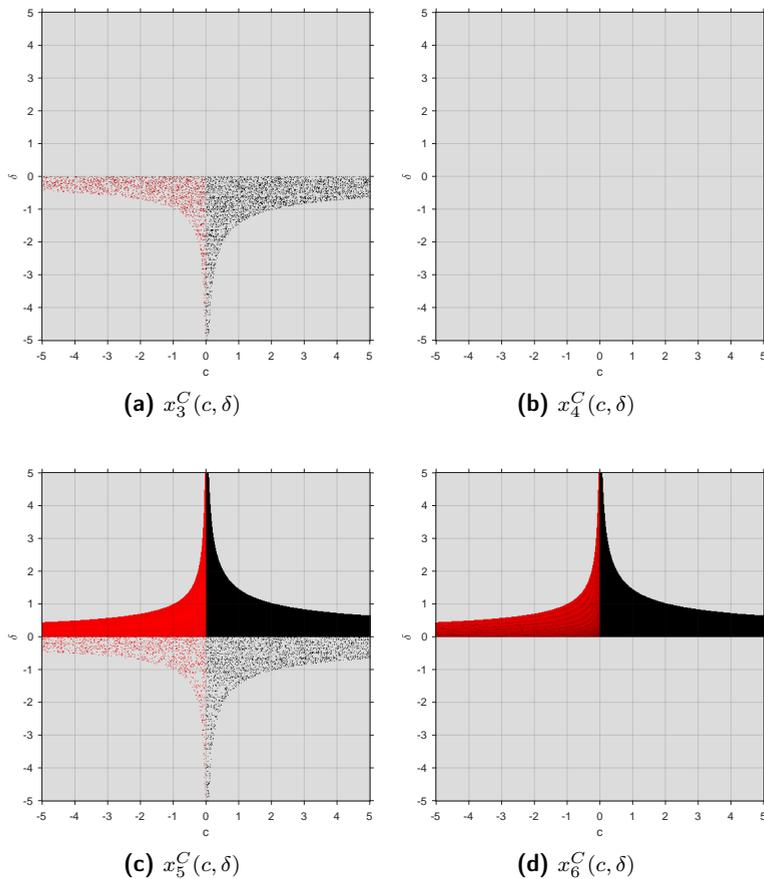


Figura 3.2: Planos de parámetros R_c para los puntos críticos libres $x_{3-6}^C(c, \delta)$

A partir de la información proporcionada por los planos de parámetros de la Figura 3.2, se han seleccionado valores distintos para c y δ de regiones del plano donde el comportamiento dinámico de la familia T1 es diferente. El estudio de cómo influyen las estimaciones iniciales en la convergencia de los métodos obtenidos para valores concretos de los parámetros se representa utilizando las rectas dinámicas representadas en la Figura 3.3. Cada recta dinámica, correspondiente a un par de valores c y δ , cubre un intervalo de estimaciones iniciales $x_0 \in [-30, 30]$ para iterar el operador asociado al método iterativo. Con un máximo de 50 iteraciones, el iterado inicial x_0 de la recta se representa en naranja o azul cuando ha convergido a $x_1^F(c)$ o $x_2^F(c)$, respectivamente, y en negro si no converge a ninguno de ellos en el máximo de iteraciones establecido.

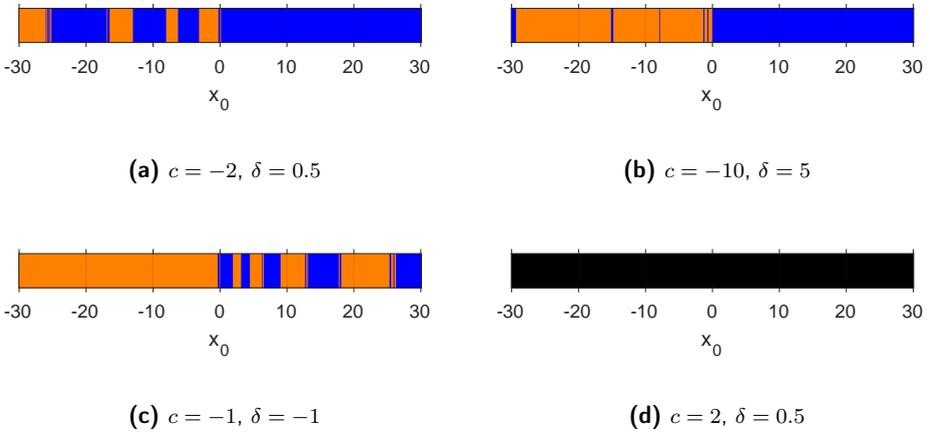


Figura 3.3: Rectas dinámicas de R_c para distintos valores de c y δ

Se observa que los resultados obtenidos en las rectas dinámicas de la Figura 3.3 concuerdan con los obtenidos en los planos de parámetros representados en la Figura 3.2. A partir de los resultados analíticos obtenidos previamente y de las conclusiones obtenidas en los planos de estabilidad de la Figura 3.1 y los planos de la Figura 3.2, para que los puntos fijos sean atractores, se deben tomar valores de $c < 0$. Por este motivo, en la recta dinámica de la Figura 3.3(d) ningún punto converge a los puntos fijos atractores, ya que si $c > 0$ las raíces son complejas. Tampoco se produce convergencia a ninguna órbita periódica atractora. En cambio, los valores de los parámetros tomados en las Figuras 3.3(a), 3.3(b) y 3.3(c) muestran rectas dinámicas con convergencia completa a alguno de los puntos fijos atractores. Esto es debido a que los valores de c y δ se han seleccionado de regiones de los planos de parámetros representadas en rojo.

3.3.2 Métodos TM1 y TM1N: dinámica real multidimensional

A continuación se desarrolla un estudio dinámico similar al realizado con el esquema T1 pero adaptado a dinámica real multidimensional por tratarse de métodos con memoria. Por ello, se inicia el estudio aplicando el esquema TM1 sobre la familia de polinomios $p_c(x) = x^2 + c$ y se continúa con el estudio del método TM1N.

Como TM1 es un método con memoria, su función de punto fijo depende de dos iterados previos, x_k y x_{k-1} , que, a lo largo de esta sección, denotamos por x y z , respectivamente. La función de punto fijo es el operador racional bidimensional

$$\mathbf{S}_c(z, x) = (x, \phi(z, x)) = \left(x, -\frac{4x^2z^4 + 8cx^2z^2 - 9x^6 + 15cx^4 - 3c^2x^2 + c^3}{2x(c - 3x^2)^2} \right).$$

Como en los métodos con memoria los puntos fijos deben de satisfacer simultáneamente $z = x$ y $x = \phi(z, x)$, los puntos fijos de $S_c(z, x)$ son aquellos puntos solución de la ecuación $S_c(x, x) = (x, x)$.

Proposición 3.3. *Los únicos puntos fijos del operador del método TM1 sobre el polinomio $p_c(x)$ son $x_1^F(c) = (-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c})$ y $x_2^F(c) = (\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$, cuando $c \leq 0$. El comportamiento asintótico de los puntos fijos es superatractor.*

Demostración. *Aplicando la condición $z = x$, el operador de punto fijo resultante es*

$$S_c(x, x) = \left(x, -\frac{c^3 - 3c^2x^2 + 23cx^4 - 5x^6}{2x(c - 3x^2)^2} \right),$$

de modo que lo que los puntos fijos de $S_c(z, x)$ se obtienen resolviendo

$$-\frac{c^3 - 3c^2x^2 + 23cx^4 - 5x^6}{2x(c - 3x^2)^2} = x. \quad (3.25)$$

Desarrollando la ecuación (3.25), la solución son las raíces de $-13x^6 - 11cx^4 + c^2x^2 - c^3 = 0$. Se obtiene como solución los puntos $\pm\sqrt{-c}$ y $\pm\frac{c(1 \pm i\sqrt{3})}{\sqrt{13}}$, siendo reales únicamente las raíces de $p_c(x)$ cuando $c \leq 0$. Por tanto, los puntos fijos del operador $S_c(z, x)$ son $(-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c})$ y $(\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ para $c \leq 0$.

Para analizar el comportamiento asintótico de los puntos fijos, se considera la matriz Jacobiana de $S_c(z, x)$ en el punto $x_1^F(c)$,

$$S'_c(-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios asociados a este punto fijo son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Se obtiene el mismo resultado para $x_2^F(c)$. Por el Teorema 2.5, los dos puntos fijos son superatractores. \square

En la Figura 3.4, se muestran los planos dinámicos asociados al método TM1 para distintos valores de c . La implementación de estos planos, realizada en Matlab R2018b, sigue una estructura análoga a la presentada en [28]. Se ha utilizado un mallado de 500×500 estimaciones en el plano real para iterar la función racional. Tras iteraciones sucesivas, cada punto se representa de un color dependiendo de su convergencia: naranja si ha convergido a $x_1^F(c)$, azul para $x_2^F(c)$, y negro en otro caso. También se han representado con estrellas blancas los puntos fijos del operador. El criterio de parada es la diferencia entre el iterado y uno de los dos puntos fijos menor que 10^{-3} con un máximo de 50 iteraciones. En los planos dinámicos de la Figura 3.4 se puede observar que las cuencas de atracción se expanden a medida que el valor de c disminuye. En estos planos, las zonas negras no convergen a ninguna raíz pero tampoco a ninguna órbita periódica, por lo que son zonas de divergencia.

A continuación, se realiza el estudio dinámico del método con memoria TM1N sobre el polinomio $p_c(x) = x^2 + c$.

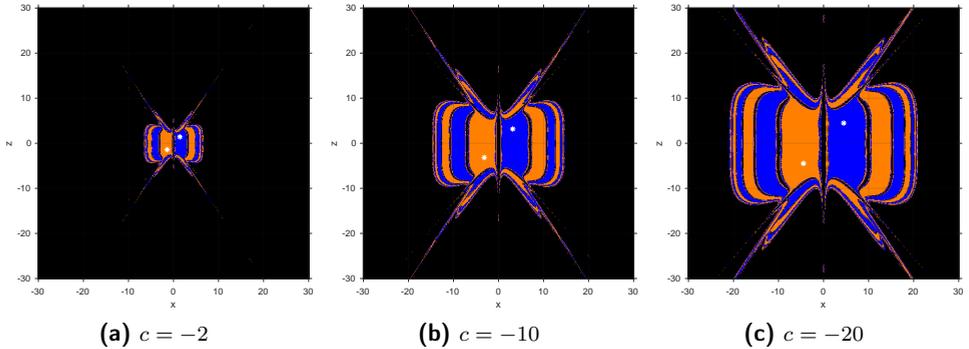


Figura 3.4: Planos dinámicos de S_c para diferentes valores de c

Los métodos con memoria, como por ejemplo TM1, que utilizan dos iterados previos tienen la expresión $x_{k+1} = \phi(x_{k-1}, x_k)$. Sin embargo, como el método TM1N utiliza el polinomio de interpolación $N_2(t; x_k, x_{k-1}, y_{k-1})$, el cálculo de la estimación x_{k+1} requiere del conocimiento de x_k, x_{k-1} e y_{k-1} . Por tanto, la expresión general de un método con memoria que utiliza tres puntos previos es

$$x_{k+1} = \phi(x_{k-1}, y_{k-1}, x_k), \quad k \geq 1,$$

siendo ϕ su función de punto fijo. Además, su operador de punto fijo $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se define por medio de la expresión

$$\Phi(x_{k-1}, y_{k-1}, x_k) = (x_k, y_k, x_{k+1}) = (x_k, y_k, \phi(x_{k-1}, y_{k-1}, x_k)), \quad k \geq 1, \quad (3.26)$$

donde x_0, y_0 y x_1 son las estimaciones iniciales.

Utilizando la notación $x = x_k, z = x_{k-1}, xy = y_k$ y $zy = y_{k-1}$, para todo k , (3.26) define un sistema dinámico discreto cuyos puntos fijos $(z, zy, x) \in \mathbb{R}^3$ deben satisfacer

$$z = zy = x, \quad x = \phi(z, zy, x). \quad (3.27)$$

Para poder comparar la dinámica del método TM1N con los métodos T1, TM1 y Traub, se aplica de nuevo la familia de polinomios $p_c(x) = x^2 + c$. De esta forma, el operador de punto fijo obtenido para el método TM1N tras ser aplicado sobre $p_c(x)$ es

$$\Phi_c(z, zy, x) = \left(x, xy, -\frac{c^3 - 3c^2x^2 + 23cx^4 - 5x^6}{2x(c - 3x^2)^2} \right). \quad (3.28)$$

Para realizar el estudio dinámico del operador es necesario estudiar la estabilidad de sus puntos fijos. Si se aplican las condiciones (3.27) a $\Phi_c(z, zy, x)$, el resultado es un operador unidimen-

sional, denotado por $\tilde{\Phi}_c(x)$, y cuya expresión es

$$[\Phi_c(z, zy, x)]_{z=zy=x} = \tilde{\Phi}_c(x) = -\frac{c^3 - 3c^2x^2 + 23cx^4 - 5x^6}{2x(c - 3x^2)^2}. \quad (3.29)$$

En el siguiente resultado se analizan los puntos fijos del operador vectorial $\Phi_c(z, zy, x)$ en términos del operador $\tilde{\Phi}_c(x)$.

Proposición 3.4. *Los únicos puntos fijos del operador unidimensional $\tilde{\Phi}_c(x)$ son $x_1^F(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^F(c) = \sqrt{-c}$ cuando $c \leq 0$, siendo puntos superatractores.*

Demostración. *Los puntos fijos, soluciones de $\tilde{\Phi}_c(x) = x$, se obtienen resolviendo la ecuación (3.25) de la demostración de la Proposición 3.3. Por tanto, los únicos puntos fijos reales del operador reducido asociado al método TM1N coinciden con las raíces de $p_c(x)$ cuando $c \leq 0$, no existiendo ningún punto fijo extraño. Cuando $c > 0$, todos los puntos fijos de $\tilde{\Phi}_c(x)$ son complejos, por lo que no se analizan en este estudio.*

Para determinar el comportamiento asintótico de los puntos fijos, es necesario calcular la matriz Jacobiana del operador multidimensional, es decir,

$$\Phi'_c(z, zy, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Phi}'_c(x) \end{pmatrix}.$$

La estructura de la matriz Jacobiana Φ'_c permite clasificar los puntos fijos únicamente evaluándolos en $|\tilde{\Phi}'_c(x)|$. Como

$$\tilde{\Phi}'_c(x) = -\frac{(c - 15x^2)(x^2 + c)^3}{2x^2(3x^2 - c)^3}, \quad (3.30)$$

se obtiene de forma inmediata que los dos puntos fijos son superatractores. □

A partir del operador reducido, también se puede extraer información sobre los puntos críticos del método TM1N sobre el polinomio $p_c(x)$.

Proposición 3.5. *Los puntos críticos del operador $\tilde{\Phi}'_c(x)$ son las raíces del polinomio $p_c(x)$, $x_1^C(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^C(c) = \sqrt{-c}$, cuando $c \leq 0$, y los puntos críticos libres $x_3^C(c) = -\sqrt{\frac{c}{15}}$ y $x_4^C(c) = \sqrt{\frac{c}{15}}$ cuando $c > 0$.*

Demostración. *A partir de (3.30), resolviendo la ecuación $\tilde{\Phi}'_c(x) = 0$, del factor $x^2 + c$ los puntos críticos del operador unidimensional son las dos raíces del polinomio $p_c(x)$ cuando $c \leq 0$, y del factor $c - 15x^2$, los puntos críticos libres $x_3^C(c) = -\sqrt{\frac{c}{15}}$ y $x_4^C(c) = \sqrt{\frac{c}{15}}$ cuando $c > 0$. □*

En la Figura 3.5 se ha representado el diagrama de bifurcación del método TM1N. En esta herramienta gráfica se representa el estado avanzado de las órbitas de los puntos, tomando como punto inicial para cada valor de c los puntos fijos con una pequeña perturbación. Como se puede observar en la Figura 3.5, los dos puntos fijos son atractores, ya que todas las órbitas convergen a $x_1^F(c)$ o $x_2^F(c)$ cuando $c \leq 0$.

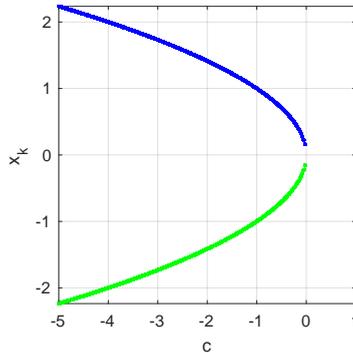


Figura 3.5: Diagrama de bifurcación de los puntos fijos $x_1^F(c)$ (verde) y $x_2^F(c)$ (azul) de $\tilde{\Phi}_c$

Cuando el operador racional depende del valor de un parámetro y tiene puntos críticos libres, se utilizan las rectas de parámetros para mostrar la órbita final de los puntos críticos libres dependiendo del valor del parámetro. Como cada punto de la recta representa un método particular, estas representaciones permiten seleccionar el valor del parámetro que garantiza la convergencia a alguna de las raíces, es decir, la selección de los métodos más estables de la familia. El método TM1N solo tiene puntos críticos libres cuando $c > 0$. Sin embargo, en este caso no tiene puntos fijos. Las rectas de parámetros asociadas muestran que cuando $c > 0$ los puntos críticos libres no convergen a ningún punto real.

Por último, notemos que la tercera componente del operador multidimensional (3.28) solo depende del iterado x . Por tanto, las cuencas de atracción de los puntos fijos se han representado utilizando únicamente esta componente, dando lugar a rectas dinámicas. En la Figura 3.6 se han representado las rectas dinámicas asociadas al método TM1N sobre el polinomio $p_c(x)$ para distintos valores de c . Esta representación sigue la misma implementación y notación que las rectas dinámicas de la Figura 2.5.

Las Figuras 3.6(a), 3.6(b) y 3.6(c) muestran que, para cada $c < 0$, la órbita de cada estimación inicial x_0 converge a una raíz de $p_c(x)$. Además, las estimaciones iniciales negativas siempre convergen a $x_1^F(c)$, mientras que las positivas lo hacen a $x_2^F(c)$. Cuando $c > 0$ (Figura 3.6(d)) el método TM1N no converge a ninguna raíz compleja y todos los puntos de la recta dinámica están representados en negro.

Una forma de visualizar las rectas dinámicas para distintos valores del parámetro en una misma representación es el plano de convergencia. La Figura 3.7 representa, siguiendo la misma notación de colores, el plano de convergencia del método TM1N sobre el polinomio $p_c(x)$ con $c \in [-30, 0]$. Además, se han representado los puntos fijos superatractores dependiendo del valor de c con líneas negras.

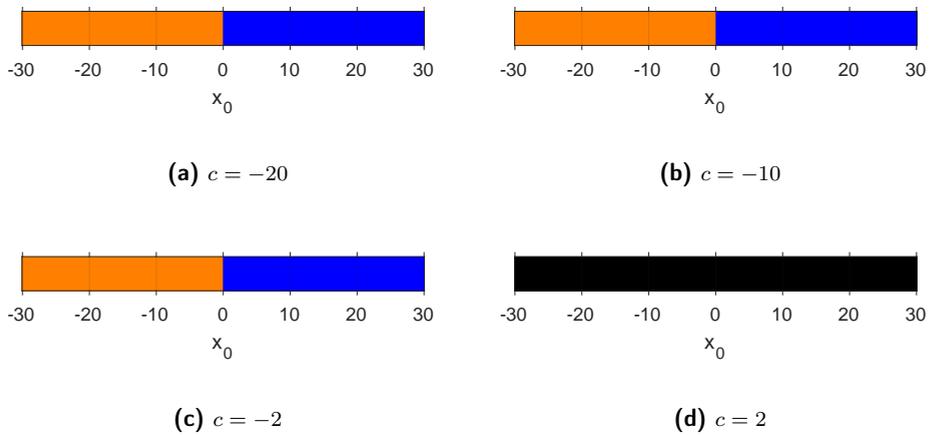


Figura 3.6: Rectas dinámicas de $\tilde{\Phi}_c$ para distintos valores de c

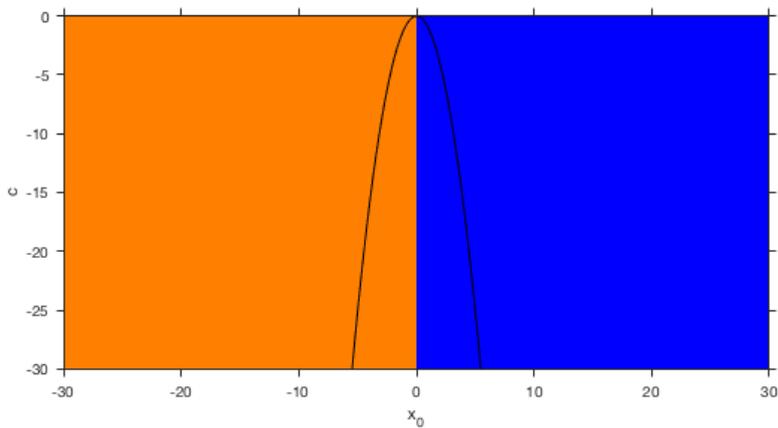


Figura 3.7: Plano de convergencia de $\tilde{\Phi}_c$

Como se observa en la Figura 3.7, las cuencas de atracción que se visualizan en los planos de convergencia tienen el mismo comportamiento que las de las rectas dinámicas de la Figura 3.6 para los valores de $c < 0$. Se observa un plano dividido simétricamente en las dos cuencas de atracción de los dos puntos fijos superatractores donde todo iterado inicial pertenece a una de las cuencas. Por tanto, el rango de estimaciones iniciales que convergen a los puntos fijos es mayor que en los planos de la Figura 3.4 correspondientes al método TM1.

3.4 Resultados numéricos

Este apartado está destinado a comprobar numéricamente las cualidades de los métodos T1, TM1 y TM1N introducidos previamente. Como la clase iterativa T1 es una familia uniparamétrica, para los experimentos numéricos se han seleccionado los valores del parámetro δ de las rectas dinámicas de la Figura 3.3, es decir, los valores $\delta \in \{0.5, 5, -1\}$. Esta selección de los parámetros permite a su vez comparar los resultados obtenidos para distintos métodos pertenecientes a la misma clase iterativa. Además, los métodos son comparados con el método de Traub, el esquema iterativo de partida de este capítulo. Para llevar a cabo este estudio, se resuelve un problema no lineal con aplicaciones químicas y, tras este análisis, se utilizan los métodos iterativos para aproximar la solución de diversas ecuaciones no lineales académicas.

Para cada caso, se muestra una tabla que recoge los resultados fundamentales para cada método iterativo. El criterio de parada del proceso iterativo es $|f(x_{k+1})| < 10^{-200}$ o bien $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-200}$, mostrándose ambas estimaciones del error en cada tabla. También se incluyen el número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia y el orden de convergencia computacional aproximado definido en el apartado 2.1.2 de esta memoria. Estos resultados se muestran para estimaciones iniciales x_0 distintas, tomando también una segunda estimación $x_1 = x_0 + 0.1$ para los métodos con memoria. El software de implementación de los métodos utilizado es Matlab R2018b, utilizando aritmética de precisión variable con 2000 dígitos de mantisa.

Se considera en primer lugar la ecuación de conversión fraccional, una ecuación no lineal que modeliza un proceso químico. La conversión fraccional describe la fracción de nitrógeno-hidrógeno que se convierte en amoníaco. Para 250 atm y 227K, la expresión se puede describir por [74, 7]

$$f(x) = x^4 - 7.79075x^3 + 14.7445x^2 + 2.511x - 1.674. \quad (3.31)$$

La Figura 3.8 representa la función conversión fraccional.

En la Tabla 3.1 se pueden observar los resultados obtenidos para el cálculo de la solución de (3.31) con los diferentes métodos iterativos considerados, donde los iterados iniciales tomados son $x_0 \in \{0.1, 0.5\}$. Los resultados obtenidos confirman el comportamiento esperado, ya que los métodos iterativos con memoria convergen con menos iteraciones que el método original de Traub, siendo también su ACOC próximo a los valores teóricos. También cabe destacar los distintos resultados obtenidos para la familia T1 variando el valor de δ , ya que, dependiendo del valor del parámetro, tanto el número de iteraciones como las estimaciones del error obtenidos difieren de forma notable a pesar de ser métodos pertenecientes a la misma clase iterativa. No obstante, son métodos tomados de regiones estables de valores del parámetro, por lo que los resultados obtenidos son en general competentes. Concretamente, el método asociado a $\delta = -1$ es el que mejores resultados proporciona para la función de conversión fraccional en términos de número de iteraciones, y por tanto, de coste computacional, en comparación con los demás métodos considerados de la familia T1, e incluso requiere del mismo número de iteraciones que los métodos con memoria TM1 y TM1N.

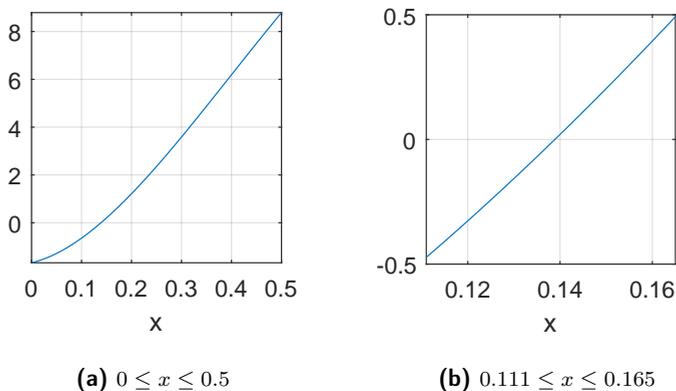


Figura 3.8: Función de conversión fraccional

x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
0.1	Traub	6	2.318e-86	2.105e-256	3.000
	T1, $\delta = 0.5$	7	1.651e-175	1.154e-523	3.000
	T1, $\delta = 5$	45	1.510e-117	5.139e-349	3.000
	T1, $\delta = -1$	5	9.950e-73	5.138e-217	3.000
	TM1	5	6.972e-67	5.168e-218	3.306
	TM1N	5	4.422e-65	3.404e-212	3.307
0.5	Traub	6	9.896e-173	1.639e-515	3.000
	T1, $\delta = 0.5$	6	1.701e-148	1.261e-442	3.000
	T1, $\delta = 5$	6	2.762e-98	2.192e-291	3.000
	T1, $\delta = -1$	5	7.914e-79	2.585e-235	3.000
	TM1	5	1.862e-87	5.699e-286	3.299
	TM1N	5	1.747e-94	2.568e-309	3.299

Tabla 3.1: Resultados numéricos de los métodos T1, TM1, TM1N y Traub para resolver la ecuación no lineal (3.31)

A continuación, se consideran los siguientes ejemplos de ecuaciones no lineales académicas junto con una estimación de una solución para cada problema:

- $f_1(x) = \sin(x) - x^2 + 1, \alpha \approx 1.404492,$
- $f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \alpha \approx 1.365230,$
- $f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, \alpha \approx 0.257530,$

donde α denota una solución del problema correspondiente. Siguiendo los mismos criterios de parada que en el problema anterior y la misma implementación numérica de los esquemas iterativos, se han tomado diferentes estimaciones iniciales para aproximar la solución de las funciones f_1 , f_2 y f_3 utilizando los métodos diseñados en el capítulo. En la Tabla 3.2 se resumen los resultados obtenidos para cada método.

Como se puede observar, en todos los ejemplos se obtiene un valor del ACOC muy próximo o igual al obtenido teóricamente en la Sección 3.2 para cada esquema iterativo. En cuanto a las iteraciones requeridas, los métodos con memoria (TM1 y TM1N) siempre necesitan menos iteraciones que los demás métodos (Traub y T1). Además, en todos los métodos los valores obtenidos de $|f(x_{k+1})|$ prueban que se obtienen buenas aproximaciones a la solución de cada problema. En particular, los resultados obtenidos para la función $f_2(x)$ para $x_0 = 0.5$ muestran una diferencia notable en el funcionamiento de los métodos diseñados frente al método de Traub, el cual requiere de 40 iteraciones frente a las 6 iteraciones de los métodos con memoria TM1 y TM1N.

3.5 Conclusiones

En este capítulo se ha realizado un estudio teórico del orden de convergencia de diferentes propuestas de esquemas iterativos basados en el método de Traub. La incorporación de parámetros de aceleración en la estructura iterativa y su aproximación utilizando polinomios lineales y cuadráticos ha permitido incrementar el orden de convergencia inicial de 3 hasta 3.30 mediante su transformación en métodos con memoria. La convergencia en función de las estimaciones iniciales de los métodos propuestos, a través del estudio dinámico real de los esquemas con y sin memoria realizado, ha determinado que los métodos propuestos son estables cuando se aplican sobre polinomios cuadráticos. Por último, la implementación numérica de los esquemas propuestos para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales confirma los resultados teóricos analizados previamente, como también el mejor funcionamiento práctico de los métodos con memoria con respecto a los esquemas sin memoria en términos de número de iteraciones y aproximaciones a las soluciones.

f	x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
$f_1(x)$	1	Traub	7	1.026e-198	1.811e-594	3.000
		T1, $\delta = 0.5$	7	4.497e-83	2.067e-248	3.000
		T1, $\delta = 5$	7	8.873e-196	1.160e-584	3.000
		T1, $\delta = -1$	6	9.537e-132	1.136e-393	3.000
		TM1	5	1.205e-73	1.673e-242	3.296
		TM1N	5	1.067e-75	2.034e-249	3.296
	1.7	Traub	6	1.410e-177	4.703e-531	3.000
		T1, $\delta = 0.5$	6	6.129e-148	7.300e-442	3.000
		T1, $\delta = 5$	6	8.219e-95	9.222e-282	3.000
		T1, $\delta = -1$	5	5.766e-164	2.509e-490	3.000
		TM1	5	7.277e-132	9.161e-435	3.311
		TM1N	5	3.569e-133	3.159e-439	3.310
$f_2(x)$	0.5	Traub	40	6.940e-119	2.654e-354	3.000
		T1, $\delta = 0.5$	33	1.243e-123	3.080e-368	3.000
		T1, $\delta = 5$	8	1.317e-108	2.031e-322	3.000
		T1, $\delta = -1$	7	3.574e-113	3.768e-337	3.000
		TM1	6	1.858e-77	9.695e-254	3.303
		TM1N	6	5.617e-82	8.405e-269	3.303
	1	Traub	6	2.884e-117	1.904e-349	3.000
		T1, $\delta = 0.5$	7	6.846e-189	5.145e-564	3.000
		T1, $\delta = 5$	6	1.701e-127	4.377e-379	3.000
		T1, $\delta = -1$	6	2.440e-143	1.199e-427	3.000
		TM1	5	1.212e-90	2.739e-297	3.303
		TM1N	5	9.995e-95	6.535e-311	3.303
$f_3(x)$	0	Traub	5	5.543e-115	1.124e-344	3.000
		T1, $\delta = 0.5$	5	1.446e-90	8.688e-271	3.000
		T1, $\delta = 5$	6	5.004e-80	4.343e-238	3.000
		T1, $\delta = -1$	5	2.717e-78	1.548e-233	3.000
		TM1	4	3.634e-62	2.126e-204	3.358
		TM1N	5	3.025e-184	8.559e-608	3.300
	0.4	Traub	5	4.524e-143	6.112e-429	3.000
		T1, $\delta = 0.5$	5	2.421e-95	1.096e-284	3.000
		T1, $\delta = 5$	5	1.855e-81	2.211e-242	3.000
		T1, $\delta = -1$	5	2.421e-95	1.096e-284	3.000
		TM1	5	1.430e-200	1.409e-661	3.300
		TM1N	4	5.896e-65	9.109e-214	3.335

Tabla 3.2: Resultados numéricos para las funciones test

Variantes biparamétricas con memoria del método de Traub

Basado en:

- [16] *"Anomalies in the convergence of Traub-type methods with memory", Computational and Mathematical Methods.*
- [23] *"Stability and applicability of iterative methods with memory", Journal of Mathematical Chemistry.*
- [24] *"Impact on stability by the use of memory on Traub-type schemes", Mathematics.*

4.1 Introducción

En el Capítulo 3 de esta memoria se introdujo un parámetro en la expresión iterativa del método de Traub, y se estudió el incremento en su orden de convergencia utilizando aproximaciones tanto lineales como cuadráticas del parámetro. Siguiendo esta misma línea, en este capítulo se analiza el efecto que se produce en la convergencia y en la estabilidad del método de Traub tras la inclusión de dos parámetros aceleradores y posterior aproximación de los mismos, generando métodos con memoria. Los resultados teóricos de convergencia, en términos de órdenes de convergencia, y las propiedades de estabilidad de las clases propuestas, con herramientas de dinámica real, se verifican por medio de la aplicación de éstos al cálculo de raíces de diferentes funciones no lineales.

La nueva familia biparamétrica diseñada a partir del método de Traub se presenta en la Sección 4.2. A partir de diferentes aproximaciones de los parámetros aceleradores, se estudia el orden de convergencia de los métodos con memoria obtenidos. El análisis de la estabilidad de todas las clases iterativas propuestas se desarrolla en la Sección 4.3 utilizando herramientas de dinámica real unidimensional o multidimensional. Todos los resultados obtenidos se comprueban con los resultados numéricos mostrados en la Sección 4.4, donde se realiza una comparativa numérica de los diferentes esquemas para aproximar la solución de problemas no lineales. Por último, la Sección 4.5 está dedicada a las conclusiones obtenidas del estudio previo.

4.2 Variantes biparamétricas del método de Traub

Siguiendo un proceso análogo al realizado en la familia de métodos T1 (3.2), se introducen dos parámetros reales δ_1 y δ_2 sobre el esquema de Traub (3.1) dando lugar a la familia biparamétrica de esquemas iterativos

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \delta_1 f(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k) + \delta_2 f(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

que se ha denotado como T2, y cuya ecuación del error se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 4.1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Si $\alpha \in I$ es una raíz simple de $f(x) = 0$ y x_0 está suficientemente cerca de α , entonces la familia iterativa T2 converge a α con orden de convergencia 3 para cualquier valor de los parámetros δ_1 y δ_2 , siendo su ecuación del error*

$$e_{k+1} = (\delta_1 + c_2)(\delta_2 + 2c_2)e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4), \quad (4.2)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Demostración. *Utilizando desarrollos en serie de Taylor en torno a la raíz α , $f(x_k)$ se puede expresar como*

$$f(x_k) = f'(\alpha)[e_k + c_2e_k^2 + c_3e_k^3 + c_4e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5)$$

y su derivada como

$$f'(x_k) = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_k + 3c_3e_k^2 + 4c_4e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4).$$

De estos desarrollos se tiene

$$\begin{aligned} y_k - \alpha &= e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \delta_1 f(x_k)} \\ &= (c_2 + \delta_1) e_k^2 + \left(-2c_2\delta_1 - 2c_2^2 + 2c_3 - \delta_1^2\right) e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4). \end{aligned}$$

Desarrollando $f(y_k)$ en torno a α ,

$$f(y_k) = f'(\alpha)[(c_2 + \delta_1)e_k^2 + \left(-2c_2\delta_1 - 2c_2^2 + 2c_3 - \delta_1^2\right) e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4).$$

Sustituyendo estos desarrollos en la expresión iterativa y tras algunas operaciones algebraicas, la familia de métodos (4.1) tiene orden de convergencia cúbico para cualquier valor de δ_1 y δ_2 , cuya ecuación del error es

$$e_{k+1} = y_k - \alpha - \frac{f(y_k)}{f'(x_k) + \delta_2 f(x_k)} = (\delta_1 + c_2)(\delta_2 + 2c_2)e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4).$$

□

El orden de convergencia cúbico se mantiene al introducir los parámetros aceleradores, motivo por el cual se estudia cómo mejorar el orden de la familia T2 a través del análisis de su ecuación del error. De forma inmediata se observa que si $\delta_1 = -c_2$ y $\delta_2 = -2c_2$, el orden de convergencia de la familia se puede incrementar al menos hasta 5. Teniendo en cuenta la expresión de c_2 , de nuevo es necesario aproximar $f'(\alpha)$ y $f''(\alpha)$, por lo que se va a desarrollar el mismo proceso que en el capítulo anterior. De esta forma, los métodos resultantes pueden ser comparados tanto con la familia de métodos original T2, como con los resultados obtenidos para la familia T1 y los esquemas con memoria diseñados a partir de ésta.

Análogamente al método TM1 presentado en el Capítulo 3, se utilizan en primer lugar las aproximaciones lineales (3.4), y por tanto, la expresión para los parámetros δ_1 y δ_2 es

$$\delta_{1,k} = -\frac{1}{2} \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})f'(x_k)}, \quad \delta_{2,k} = -\frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})f'(x_k)}. \quad (4.3)$$

Aproximando los parámetros δ_1 y δ_2 del esquema (4.1) con los valores $\delta_{1,k}$ y $\delta_{2,k}$ definidos en (4.3), el esquema resultante es un método con memoria que se ha denotado por TM2. Su orden de convergencia se analiza en el resultado presentado a continuación.

Teorema 4.2. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Consideremos $\alpha \in I$ una raíz simple de $f(x) = 0$. Si x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α , el esquema iterativo con memoria TM2 converge a α con orden de convergencia*

$p \approx 3.56$, siendo su ecuación del error:

$$e_{k+1} = \frac{9}{2}c_3^2e_{k-1}^2e_k^3 + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}),$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$, y $\mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1})$ denota todos los términos en los que la suma de exponentes de e_k y e_{k-1} es al menos 4.

Demostración. En primer lugar, se consideran los siguientes desarrollos en torno a α para la iteración k

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\alpha)[e_k + c_2e_k^2 + c_3e_k^3 + c_4e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5), \\ f'(x_k) &= f'(\alpha)[1 + 2c_2e_k + 3c_3e_k^2 + 4c_4e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4), \end{aligned}$$

y para la iteración $k - 1$

$$\begin{aligned} f(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1} + c_2e_{k-1}^2 + c_3e_{k-1}^3 + c_4e_{k-1}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1}^5), \\ f'(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[1 + 2c_2e_{k-1} + 3c_3e_{k-1}^2 + 4c_4e_{k-1}^3] + \mathcal{O}(e_{k-1}^4), \end{aligned}$$

Con los anteriores desarrollos, los parámetros aceleradores se pueden expresar de la forma

$$\begin{aligned} \delta_{1,k} &= -\frac{1}{2} \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})f'(x_k)} \\ &= -c_2 - \frac{3}{2}c_3e_{k-1} + \left(2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3\right)e_k + \mathcal{O}_2(e_k, e_{k-1}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\delta_{2,k} = 2\delta_{1,k} = -2c_2 - 3c_3e_{k-1} + (4c_2^2 - 3c_3)e_k + \mathcal{O}_2(e_k, e_{k-1}). \quad (4.5)$$

A partir de la ecuación del error (4.2) y sustituyendo los valores de los parámetros (4.4) y (4.5), la ecuación del error del método TM2 es

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= (\delta_{1,k} + c_2)(\delta_{2,k} + 2c_2) + \mathcal{O}(e_k^4) = \left(-\frac{3}{2}c_3e_{k-1}\right)(-3c_3e_{k-1})e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \\ &= \frac{9}{2}c_3^2e_{k-1}^2e_k^3 + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aplicando el Teorema 2.1 sobre la ecuación del error (4.6), el orden del método está determinado por la única raíz positiva de la ecuación

$$p^2 - 3p - 2 = 0.$$

Por tanto, el método TM2 tiene orden de convergencia $p \approx 3.56$. □

El método TM2 muestra que la aproximación lineal de dos parámetros aceleradores sobre el esquema de Traub frente a un único parámetro, como es el caso del método TM1, proporciona un mayor aumento en su orden de convergencia, que pasa de 3 a 3.56. Esta mejora de la convergencia

se realiza sin añadir nuevas evaluaciones funcionales adicionales, utilizando iteraciones previas ya realizadas por el método y por tanto, generando un método con memoria.

A continuación se estudia si también se mantiene una mejora en la convergencia si se aproximan los dos parámetros con polinomios de grado dos.

Utilizando el polinomio de interpolación de Newton de segundo grado (3.10) y las aproximaciones (3.11), los parámetros aceleradores δ_1 y δ_2 se aproximan por medio de

$$\delta_{1,k} = -\frac{1}{2} \frac{N_2''(x_k)}{N_2'(x_k)}, \quad \delta_{2,k} = -\frac{N_2''(x_k)}{N_2'(x_k)}. \quad (4.7)$$

La familia biparamétrica tipo Traub obtenida tras sustituir los parámetros (4.7) en el esquema (4.1) se denomina TM2N. En el siguiente resultado se estudia el aumento del orden de convergencia del método TM2N con respecto al método original sin memoria T2.

Teorema 4.3. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I , siendo $\alpha \in I$ una raíz simple de $f(x) = 0$. Si x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α , entonces el método iterativo con memoria TM2N converge a α con orden de convergencia $p \approx 3.56$.*

Demostración. *De la ecuación del error (4.2) se verifica la relación*

$$e_{k+1} \sim (\delta_{1,k} + c_2)(\delta_{2,k} + 2c_2)e_k^3, \quad (4.8)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$. Se denota el error en el primer paso del método TM2N $e_{k,y} = y_k - \alpha$, para todo k , y $N_2(t)$ el polinomio de interpolación de Newton de segundo grado definido en (3.10). Se consideran los siguientes desarrollos de Taylor en términos del error en cada paso iterativo del método:

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\alpha)[e_k + c_2e_k^2 + c_3e_k^3 + c_4e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5), \\ f(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1} + c_2e_{k-1}^2 + c_3e_{k-1}^3 + c_4e_{k-1}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1}^5), \\ f(y_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1,y} + c_2e_{k-1,y}^2 + c_3e_{k-1,y}^3 + c_4e_{k-1,y}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1,y}^5). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Utilizando estos desarrollos en $N_2(t)$, evaluando las derivadas de $N_2(t)$ en el punto x_k y tomando los términos de menor orden se obtiene

$$\delta_{1,k} = -c_2 - c_3e_{k-1,y} - c_3e_{k-1} - c_4e_{k-1,y}^2 - c_4e_{k-1}^2 + (-c_2c_3 - c_4)e_{k-1,y}e_{k-1} + \mathcal{O}_3(e_{k-1}, e_{k-1,y}),$$

donde $\mathcal{O}_3(e_{k-1}, e_{k-1,y})$ denota los términos cuya suma de los exponentes de e_{k-1} y $e_{k-1,y}$ es mayor o igual que 3.

A partir de estos cálculos, los parámetros $\delta_{1,k}$ y $\delta_{2,k}$ satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \delta_{1,k} + c_2 &\sim e_{k-1}, \\ \delta_{2,k} + 2c_2 &= 2(\delta_{1,k} + c_2) \sim 2e_{k-1} \sim e_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Considerando que el R -orden del método $TM2N$ es al menos p , se verifica una relación de la forma

$$e_{k+1} \sim D_{k,p} e_k^p,$$

donde $D_{k,p}$ tiende a D_p , la constante de error asintótico, cuando $k \rightarrow \infty$.

De la misma forma,

$$e_k \sim D_{k-1,p} e_{k-1}^p, \quad (4.11)$$

y por tanto,

$$e_{k+1} \sim D_{k,p} (D_{k-1,p} e_{k-1}^p)^p = D_{k,p} D_{k-1,p}^p e_{k-1}^{p^2}. \quad (4.12)$$

Utilizando las relaciones (4.10) y (4.11) en (4.8):

$$e_{k+1} \sim e_{k-1}^2 e_k^3 \sim e_{k-1}^2 (D_{k-1,p} e_{k-1}^p)^3 \sim e_{k-1}^{3p+2}. \quad (4.13)$$

Finalmente, de acuerdo al Teorema 2.1, igualando los exponentes de (4.12) y (4.13), se obtiene la siguiente ecuación

$$p^2 = 3p + 2.$$

Para este problema, la única posible solución a la ecuación anterior es $p \approx 3.56$. Como consecuencia, el orden del método $TM2N$ es $p \approx 3.56$. \square

Al igual que en las familias uniparamétricas presentadas en el Capítulo 3, en las familias biparamétricas de métodos también se produce el mismo incremento en el orden de convergencia cuando se utilizan aproximaciones cuadráticas para los parámetros y aproximaciones lineales. Además, comparando con la familia T2, el método $TM2N$ tiene un orden que asciende de 3 hasta 3.56, siendo los métodos con memoria $TM2$ y $TM2N$ los esquemas iterativos con mayor orden de convergencia de todos los propuestos en los Capítulos 3 y 4.

Previo al estudio dinámico de los esquemas iterativos con y sin memoria diseñados en este capítulo, se propone una variante de los métodos con memoria anteriores obtenida partiendo del método T2.

4.2.1 Familia de métodos con memoria TM_γ

A partir de la familia biparamétrica de esquemas iterativos T2 definida en (4.1), para la cual se ha probado su orden de convergencia cúbico y ecuación del error

$$e_{k+1} = (\delta_1 + c_2)(\delta_2 + 2c_2)e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4),$$

se estudia a continuación una nueva familia uniparamétrica con memoria. Ésta se diseña aproximando únicamente el parámetro δ_1 de forma adecuada a partir de la ecuación del error, pero manteniendo libre el parámetro δ_2 . Este esquema permite estudiar una familia de métodos con memoria con la presencia de un parámetro, situado en este caso en el segundo paso del esquema iterativo.

Con el objetivo de incrementar el orden de T2 aproximando el parámetro δ_1 sin aumentar el número de nuevas evaluaciones funcionales, se sigue el mismo proceso que en los métodos anteriores, seleccionando las aproximaciones que dan lugar a los métodos con mayor orden y estabilidad. Por este motivo, se utiliza de nuevo el polinomio de interpolación de Newton de segundo grado, $N_2(t)$, que interpola en los puntos x_k , x_{k-1} e y_{k-1} . A partir de éste, se aproxima el valor de δ_1 como

$$\delta_1 \approx -\frac{1}{2} \frac{N_2''(x_k)}{N_2'(x_{k-1})}. \quad (4.14)$$

Notemos las diferencias en los denominadores de los parámetros (4.7) y (4.14). Para evitar confusiones con los esquemas anteriores, se denota a los parámetros δ_1 y δ_2 por medio de β y γ , respectivamente. Con esta notación, se obtiene la siguiente familia uniparamétrica de métodos iterativos con memoria:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \beta_k f(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k) + \gamma f(y_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.15)$$

siendo $\beta_k = -\frac{1}{2} \frac{N_2''(x_k)}{N_2'(x_{k-1})}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. El siguiente resultado prueba que el orden de convergencia de la familia de métodos iterativos (4.15), denotada TM_γ , es 3.30.

Teorema 4.4. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un intervalo abierto I . Sea $\alpha \in I$ una raíz simple de $f(x) = 0$. Si x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α , entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por la familia de métodos TM_γ converge a α con orden de convergencia 3.30 para todo valor real del parámetro γ .*

Demostración. *Partiendo de la demostración del Teorema 4.1, la ecuación del error verifica la relación*

$$e_{k+1} \sim 2c_2(c_2 + \beta_k)e_k^3, \quad (4.16)$$

con $\beta_k = -\frac{1}{2} \frac{N_2''(x_k)}{N_2'(x_{k-1})}$, y siendo $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Denotemos el error en el primer paso de (4.15) por $e_{k,y} = y_k - \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Utilizando los desarrollos de Taylor de $f(x_k)$, $f(x_{k-1})$ y $f(y_{k-1})$ en torno a α dados por (4.9) y la definición de $N_2(t)$, los términos de menor orden de β_k son

$$\begin{aligned} \beta_k &= -c_2 + (2c_2^2 - c_3)e_{k-1} - c_3e_{k-1,y} + (3c_2c_3 - c_4)e_{k-1}e_{k-1,y} - c_4e_{k-1,y}^2 \\ &\quad + (-4c_2^3 + 4c_2c_3 - c_4)e_{k-1}^2 + \mathcal{O}_3(e_k, e_{k-1}, e_{k-1,y}), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}_3(e_k, e_{k-1}, e_{k-1,y})$ denota todos los elementos cuya suma de los exponentes de e_k , e_{k-1} y $e_{k-1,y}$ es al menos tres.

Entonces, se satisface

$$c_2 + \beta_k \sim e_{k-1}. \quad (4.17)$$

Supongamos que el R -orden del método es al menos p , es decir, que se verifica la relación

$$e_{k+1} \sim D_{k,p} e_k^p,$$

donde $D_{k,p}$ tiende a la constante de error asintótico, D_p , cuando $k \rightarrow \infty$. Equivalentemente,

$$e_k \sim D_{k-1,p} e_{k-1}^p, \quad (4.18)$$

y entonces

$$e_{k+1} \sim D_{k,p} (D_{k-1,p} e_{k-1}^p)^p \sim D_{k,p} D_{k-1,p}^p e_{k-1}^{p^2}. \quad (4.19)$$

Utilizando (4.17) y (4.18) en (4.16), se tiene

$$e_{k+1} \sim e_{k-1} (D_{k-1,p} e_{k-1}^p)^3 \sim D_{k-1,p}^3 e_{k-1} e_{k-1}^{3p} \sim e_{k-1}^{3p+1}. \quad (4.20)$$

Por último, igualando los exponentes de e_k en (4.19) y (4.20), se obtiene la siguiente ecuación

$$p^2 = 3p + 1,$$

cuya única raíz positiva proporciona el orden de convergencia de la familia TM_γ por el Teorema 2.1. Esta raíz es

$$p = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.30.$$

□

A pesar de que el orden de convergencia de la familia TM_γ es 3.30, siendo inferior al orden 3.56 obtenido para los métodos TM2 y TM2N, se ha diseñado una familia de esquemas iterativos con memoria. La principal ventaja de la clase de métodos TM_γ frente a los esquemas TM2 y TM2N es que esta familia permite, tras un estudio dinámico, seleccionar determinados valores de γ que dan lugar a esquemas iterativos con memoria que pertenecen a la familia y que tienen mayor estabilidad. Este estudio dinámico se realiza en la Sección 4.3.

En la Tabla 4.1 se han resumido algunas de las características de los esquemas iterativos propuestos en los Capítulos 3 y 4.

Como se observa en la Tabla 4.1, los esquemas iterativos con mayor orden de convergencia son los que utilizan más de una iteración previa, es decir, los métodos con memoria. Asimismo, la incorporación de dos parámetros aceleradores sobre el esquema de Traub y la posterior aproximación de ambos parámetros es la estrategia que mejores resultados proporciona, siendo los métodos TM2 y TM2N los que mayor orden teórico presentan. Notar que todos los esquemas iterativos propuestos se han diseñado sin añadir evaluaciones funcionales adicionales a las realizadas por el método de Traub.

En la siguiente sección se realiza un profundo análisis de la estabilidad de los métodos con y sin memoria propuestos. Para realizar este análisis, se utilizan herramientas de dinámica real.

Método	Capítulo 3			Capítulo 4			
	T1	TM1	TM1N	T2	TM2	TM2N	TM γ
Parámetros	δ	\nexists	\nexists	δ_1, δ_2	\nexists	\nexists	γ
Memoria	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
Orden	3	3.30	3.30	3	3.56	3.56	3.30

Tabla 4.1: Características de los esquemas iterativos de los Capítulos 3 y 4

4.3 Dinámica real

A continuación se analiza el comportamiento dinámico de los esquemas iterativos desarrollados en la sección anterior cuando se aplican sobre la familia de polinomios cuadráticos $p_c(x) = x^2 + c$. Con este fin, se estudian las funciones racionales resultantes, calculando los correspondientes puntos fijos, así como su comportamiento asintótico, y los puntos críticos. Se realiza un estudio dinámico real, teniendo en cuenta, por un lado, si el esquema bajo estudio es un método sin memoria o con memoria, y por otro lado, si tiene parámetros o no en su estructura iterativa. Este estudio permite mostrar el comportamiento de los esquemas iterativos en función de las estimaciones iniciales.

4.3.1 Familia T2: dinámica real biparamétrica

Para realizar el estudio dinámico real de la familia de métodos iterativos T2 sobre polinomios cuadráticos es necesario tener en cuenta algunas modificaciones previas. Éstas se deben fundamentalmente a que la familia tiene dos parámetros, δ_1 y δ_2 , en su expresión iterativa. Como consecuencia, cuando se aplica el esquema iterativo sobre la familia de polinomios $p_c(x) = x^2 + c$, el resultado es un operador racional con tres parámetros. Con la intención de realizar un estudio dinámico lo más semejante posible al realizado en el Capítulo 3 y al estudio de los métodos TM2, TM2N y TM γ , en lugar de analizar la estabilidad de la familia T2 asociada a $p_c(x)$, se realiza sobre la base de polinomios cuadráticos $\{p_+(x) = x^2 + 1, p_-(x) = x^2 - 1, p_0(x) = x^2\}$, es decir, para los valores de $c \in \{1, -1, 0\}$, respectivamente. De esta forma también queda completo el análisis dinámico para polinomios cuadráticos y se pueden seguir utilizando las mismas herramientas gráficas para todos los esquemas, comparando las representaciones gráficas obtenidas.

Dinámica real de la familia T2 sobre $p_+(x) = x^2 + 1$

Cuando se aplica la familia de métodos iterativos T2 sobre el polinomio $p_+(x) = x^2 + 1$, se obtiene el operador racional

$$R_+(x) = -\frac{\left(x - \frac{x^2+1}{\delta_1+\delta_1x^2+2x}\right)^2 + 1}{\delta_2 + \delta_2x^2 + 2x} - \frac{x^2 + 1}{\delta_1 + \delta_1x^2 + 2x} + x, \quad (4.21)$$

donde δ_1 y δ_2 son los parámetros reales que intervienen en la estructura iterativa de T2.

En primer lugar, notar que $p_+(x)$ no tiene raíces reales, por lo que todos los puntos fijos reales del operador R_+ serán puntos fijos extraños, tal y como muestra el siguiente resultado.

Proposición 4.1. *Los únicos puntos fijos de la clase de métodos T2 sobre el polinomio $p_+(x)$ son puntos fijos extraños, denotados por $x_{1-4}^F(\delta_1, \delta_2)$, correspondientes a las raíces del polinomio de grado cuatro*

$$P_4^+(x) = (\delta_1^2 + \delta_1\delta_2)x^4 + (4\delta_1 + 2\delta_2)x^3 + (5 + 2\delta_1^2 + 2\delta_1\delta_2)x^2 + (4\delta_1 + 2\delta_2)x + \delta_1\delta_2 + \delta_1^2 + 1,$$

cuya estabilidad e intervalos donde pertenecen al conjunto real varía en función de δ_1 y δ_2 .

Demostración. *Los puntos fijos se calculan resolviendo $R_+(x) = x$, es decir,*

$$-\frac{\left(x - \frac{x^2+1}{\delta_1+\delta_1x^2+2x}\right)^2 + 1}{\delta_2 + \delta_2x^2 + 2x} - \frac{x^2 + 1}{\delta_1 + \delta_1x^2 + 2x} = 0.$$

De forma equivalente, resolviendo la ecuación

$$(\delta_1^2 + \delta_1\delta_2)x^4 + (4\delta_1 + 2\delta_2)x^3 + (5 + 2\delta_1^2 + 2\delta_1\delta_2)x^2 + (4\delta_1 + 2\delta_2)x + \delta_1\delta_2 + \delta_1^2 + 1 = 0,$$

cuyas raíces son los puntos fijos extraños del operador R_+ .

Para estudiar el comportamiento asintótico de $x_{1-4}^F(\delta_1, \delta_2)$, se analiza el valor de $|R_+'(x)|$ evaluado en cada punto fijo extraño. Como este valor se determina en función de los valores de δ_1 y δ_2 , se han representado los planos de estabilidad para cada punto fijo, donde quedan cubiertos todos los casos posibles para un intervalo amplio de valores de δ_1 y δ_2 . Consideremos para este estudio la expresión de la derivada del operador asociado a $p_+(x)$

$$R_+'(x) = -\frac{2(x^2 + 1)(\delta_1^2(x^2 + 1) + 4\delta_1x + 2)(\delta_1(x^3 + x) + x^2 - 1)}{(\delta_1x^2 + \delta_1 + 2x)^3(\delta_2x^2 + \delta_2 + 2x)} - \frac{2x}{\delta_1x^2 + \delta_1 + 2x} + \frac{\left(x - \frac{x^2+1}{\delta_1x^2+\delta_1+2x}\right)^2 + 1}{(\delta_2x^2 + \delta_2 + 2x)^2} + \frac{2(x^2 + 1)(\delta_1x + 1)}{(\delta_1x^2 + \delta_1 + 2x)^2} + 1.$$

Los planos de estabilidad de la Figura 4.1 se han implementado de la misma forma que en la Figura 3.1, y representan en negro las regiones de valores de los parámetros δ_1 y δ_2 para las

cuales el correspondiente punto fijo extraño es atractor, y en blanco cuando es repulsor. Las regiones en gris denotan que el punto pertenece al dominio complejo, quedando fuera de este estudio dinámico real. Los ejes de abscisas y ordenadas representan los valores de los parámetros δ_1 y δ_2 , respectivamente, tomados de un malla de 500×500 valores en el intervalo $[-30, 30]$.

En la Figura 4.1 se observan de forma diferenciada dos rectas de valores de los parámetros para los cuales los puntos fijos extraños son atractores o repulsores dependiendo de cada caso. Una de las rectas se corresponde con valores de δ_1 muy próximos a cero, en cuyo caso todos los puntos fijos extraños serían repulsores. La otra recta se corresponde aproximadamente con valores de $\delta_1 = -\delta_2$, para la cual $x_1^F(\delta_1, \delta_2)$ y $x_4^F(\delta_1, \delta_2)$ son atractores y en cambio $x_2^F(\delta_1, \delta_2)$ y $x_3^F(\delta_1, \delta_2)$ son repulsores.

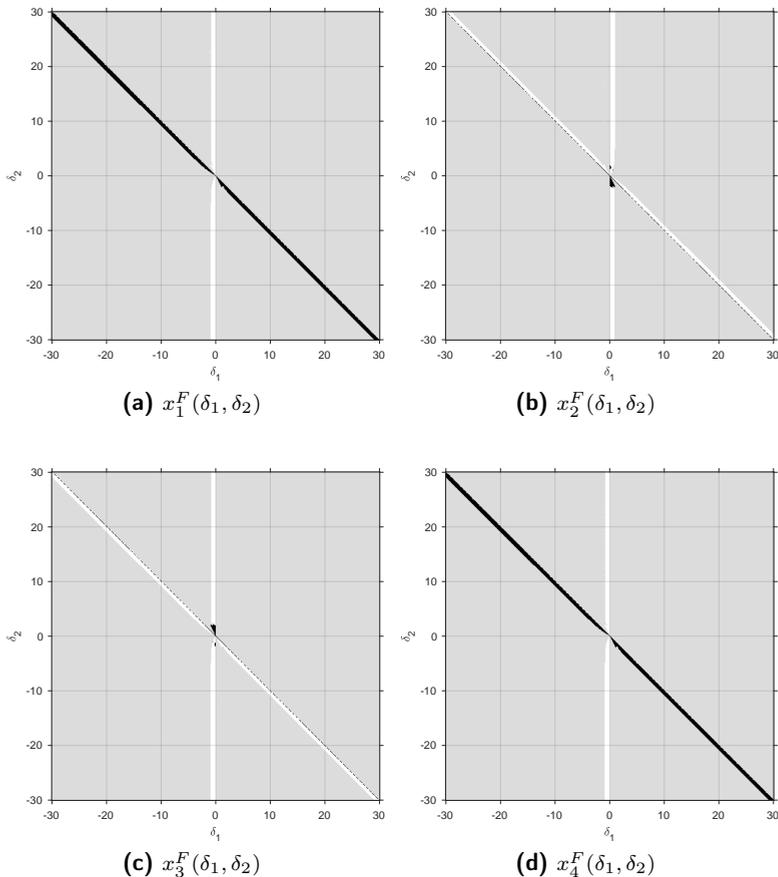


Figura 4.1: Planos de estabilidad de los puntos fijos extraños de R_+

□

El estudio de las cuencas de atracción a las cuales pertenecen los puntos críticos del operador es fundamental en virtud del Teorema 2.2. Los puntos críticos libres del operador R_+ , soluciones de la ecuación $R'_+(x) = 0$, son $x_{1-6}^C(\delta_1, \delta_2)$, correspondientes a las raíces del polinomio de grado seis

$$\begin{aligned} P_6^+(x) = & \delta_1^3 \delta_2^2 x^6 + (4\delta_1^3 \delta_2 + 6\delta_1^2 \delta_2^2) x^5 + (2\delta_1^3 + 22\delta_1^2 \delta_2 + 10\delta_1 \delta_2^2 + 3\delta_1^3 \delta_2^2) x^4 \\ & + (12\delta_1^2 + 38\delta_1 \delta_2 + 8\delta_1^3 \delta_2 + 4\delta_2^2 + 12\delta_1^2 \delta_2^2) x^3 \\ & + (26\delta_1 + 4\delta_1^3 + 16\delta_2 + 24\delta_1^2 \delta_2 + 12\delta_1 \delta_2^2 + 3\delta_1^3 \delta_2^2) x^2 \\ & + (12 + 12\delta_1^2 + 14\delta_1 \delta_2 + 4\delta_1^3 \delta_2 + 4\delta_2^2 + 6\delta_1^2 \delta_2^2) x + 2\delta_1 + 2\delta_1^3 + 4\delta_2 \\ & + 2\delta_1^2 \delta_2 + 2\delta_1 \delta_2^2 + \delta_1^3 \delta_2^2. \end{aligned}$$

Sin embargo, existen regiones de valores de δ_1 y δ_2 donde son complejos. En las Figuras 4.2-4.4 se han representado los planos de parámetros asociados a los puntos críticos $x_{1-6}^C(\delta_1, \delta_2)$. Como los puntos fijos del operador R_+ son puntos fijos extraños, en los planos de parámetros se ha representado en rojo la convergencia a alguno de estos puntos, establecida cuando la diferencia entre cada punto del plano (tomados de un mallado de 400×400 valores de δ_1 y δ_2) y alguno de los puntos fijos extraños es menor que 10^{-3} con un máximo de 50 iteraciones. También, teniendo en cuenta que tanto los puntos fijos extraños como los puntos críticos libres tienen valores complejos, se ha representado en gris los valores que no son reales, excluidos por tanto del análisis. En los planos de parámetros de las Figuras 4.2-4.4 se puede observar que para valores de δ_1 y δ_2 próximos al eje de ordenadas, existen regiones de convergencia a los puntos fijos extraños. Estas regiones corresponden a los valores de los parámetros de los planos de estabilidad de la Figura 4.1 donde los puntos fijos extraños son atractores (representado en negro).

Por último, se han seleccionado valores diversos de δ_1 y δ_2 de regiones donde la estabilidad es distinta para representar las rectas dinámicas asociadas en la Figura 4.5. Siendo todos los puntos fijos el operador R_+ puntos fijos extraños, en las rectas dinámicas se ha representado en amarillo la cuenca de convergencia de éstos. Es decir, el color amarillo indica que la órbita de la estimación inicial $x_0 \in [-30, 30]$ ha convergido a alguno de los puntos fijos extraños $x_{1-4}^F(\delta_1, \delta_2)$. En la Figura 4.5 se observan resultados distintos cuando se toman valores de los parámetros de regiones diferentes tanto de la Figura 4.1 como de los planos de parámetros de las Figuras 4.2-4.4, ya que se observan comportamientos tanto atractores (Figuras 4.5(a) y 4.5(d)) como repulsores (Figuras 4.5(b) y 4.5(c)) de los puntos fijos extraños.

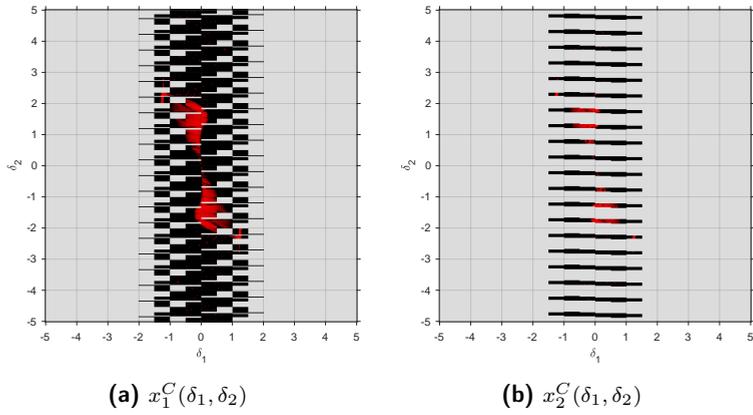


Figura 4.2: Planos de parámetros de R_+ para los puntos críticos libres $x_{1-2}^C(\delta_1, \delta_2)$

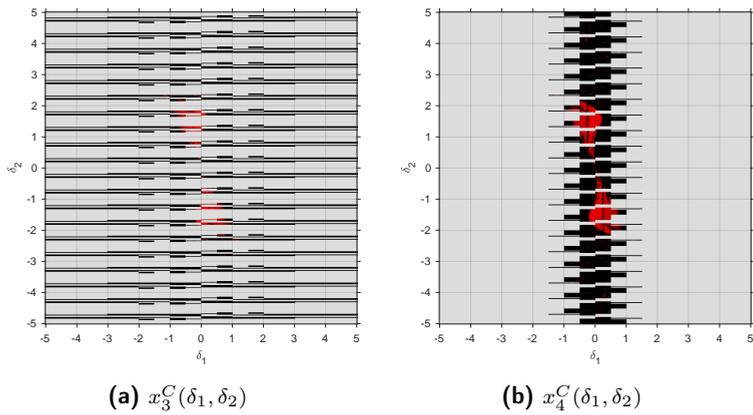


Figura 4.3: Planos de parámetros de R_+ para los puntos críticos libres $x_{3-4}^C(\delta_1, \delta_2)$

Dinámica real de la familia T2 sobre $p_-(x) = x^2 - 1$

El operador unidimensional asociado a la familia T2 sobre el polinomio cuadrático $p_-(x) = x^2 - 1$ es

$$R_-(x) = -\frac{\left(x - \frac{x^2-1}{\delta_1(x^2-1)+2x}\right)^2 - 1}{\delta_2(x^2-1) + 2x} - \frac{x^2-1}{\delta_1(x^2-1) + 2x} + x. \quad (4.22)$$

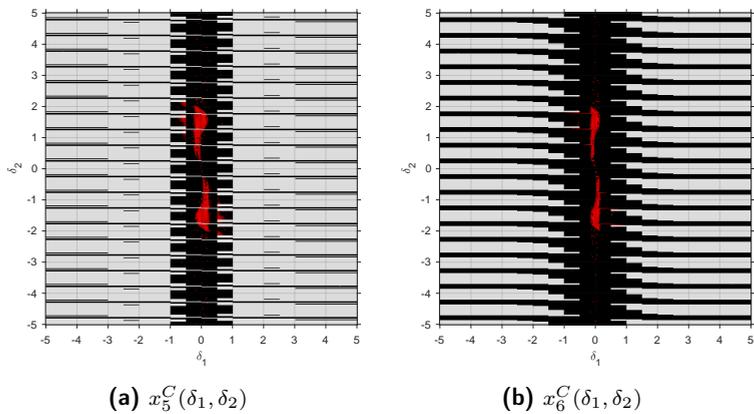


Figura 4.4: Planos de parámetros de R_+ para los puntos críticos libres $x_{5-6}^C(\delta_1, \delta_2)$

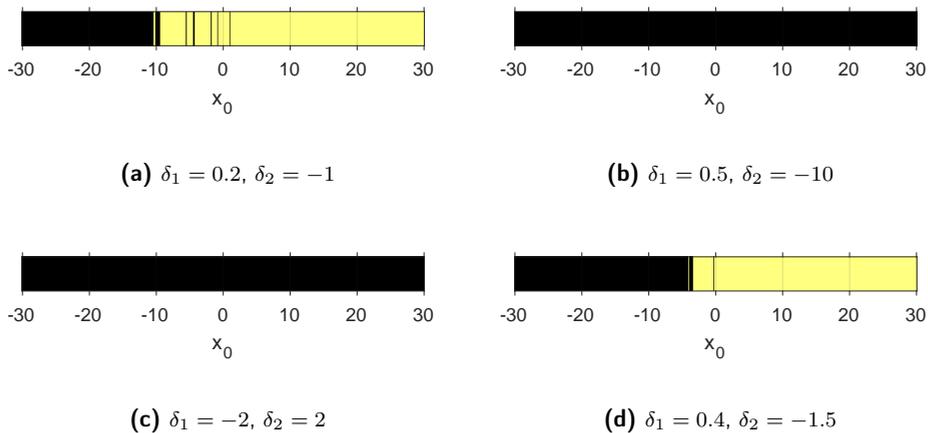


Figura 4.5: Rectas dinámicas R_+ para distintos valores de δ_1 y δ_2

Como en este caso el polinomio considerado sí tiene raíces reales, el estudio dinámico real tiene ligeras modificaciones con respecto al realizado para el polinomio $p_+(x)$.

Proposición 4.2. *Los puntos fijos del operador R_- , resultante de aplicar la clase iterativa T_2 sobre el polinomio $p_-(x)$, coinciden con las raíces del polinomio, denotados $x_1^F = -1$ y $x_2^F = 1$, y cuyo comportamiento asintótico es superatractor. Además, el operador también tiene cuatro*

puntos fijos extraños $x_{3-6}^F(\delta_1, \delta_2)$, raíces del polinomio

$$P_4^-(x) = (\delta_1^2 + \delta_1\delta_2)x^4 + (4\delta_1 + 2\delta_2)x^3 + (5 - 2\delta_1^2 - 2\delta_1\delta_2)x^2 + (-4\delta_1 - 2\delta_2)x + \delta_1\delta_2 + \delta_1^2 - 1,$$

que son reales para determinadas regiones de valores de δ_1 y δ_2 .

El cálculo de los puntos fijos de R_- se realiza de forma análoga a la Proposición 4.1, y por tanto no se muestra el desarrollo de la prueba de la Proposición 4.2.

Siguiendo la misma implementación que en las gráficas anteriores, en la Figura 4.6 se han representado los planos de estabilidad asociados a $x_{3-6}^F(\delta_1, \delta_2)$. En estos planos se observan, además de muchos puntos dispersos en el plano para los cuales los puntos fijos extraños son repulsores, dos cuencas diferenciadas de valores de δ_1 y δ_2 en blanco. Como consecuencia, los métodos pertenecientes a la familia T2 para valores de los parámetros situados en estas dos regiones pueden ser más estables, ya que los únicos puntos atractores serían las raíces de $p_-(x)$, siendo los puntos fijos extraños repulsores.

Los puntos críticos asociados a la familia T2 sobre $p_-(x)$ son las raíces del polinomio, $x_{1,2}^C = \pm 1$, y los puntos críticos libres $x_{3-8}^C(\delta_1, \delta_2)$, raíces del polinomio de grado seis

$$\begin{aligned} P_6^-(x) = & \delta_1^3\delta_2^2x^6 + (4\delta_1^3\delta_2 + 6\delta_1^2\delta_2^2)x^5 + (2\delta_1^3 + 22\delta_1^2\delta_2 + 10\delta_1\delta_2^2 - 3\delta_1^3\delta_2^2)x^4 \\ & + (12\delta_1^2 + 38\delta_1\delta_2 - 8\delta_1^3\delta_2 + 4\delta_2^2 - 12\delta_1^2\delta_2^2)x^3 \\ & + (26\delta_1 - 4\delta_1^3 + 16\delta_2 - 24\delta_1^2\delta_2 - 12\delta_1\delta_2^2 + 3\delta_1^3\delta_2^2)x^2 \\ & + (12 - 12\delta_1^2 - 14\delta_1\delta_2 + 4\delta_1^3\delta_2 - 4\delta_2^2 + 6\delta_1^2\delta_2^2)x + 2\delta_1 + 2\delta_1^3 - 4\delta_2 \\ & + 2\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_1\delta_2^2 - \delta_1^3\delta_2^2, \end{aligned}$$

para valores de δ_1 y δ_2 donde son reales.

En las Figuras 4.7-4.9 se han representado los planos de parámetros asociados a cada uno de los puntos críticos libres del operador R_- . De nuevo, representamos en rojo la convergencia a alguna de las raíces, en negro la convergencia a puntos distintos de éstas y en gris los valores que no son reales.

La gran cantidad valores de δ_1 y δ_2 para los cuales los correspondientes métodos de la familia T2 convergen a los puntos fijos $x_{1,2}^F$ es evidente a partir de estas gráficas, ya que los valores de los parámetros para los cuales no existe convergencia a las raíces (representados en negro) es muy reducido y en algunos planos casi inexistente.

Las rectas dinámicas representadas en la Figura 4.10 se han implementado siguiendo el mismo código de colores que en la Figura 3.3. En este caso, el color naranja indica que la órbita de la estimación inicial ha convergido a $x_1^F = -1$ y en azul que lo hace a $x_2^F = 1$. Los valores de los parámetros se han seleccionado de las diferentes regiones observadas en los planos de estabilidad de la Figura 4.6.

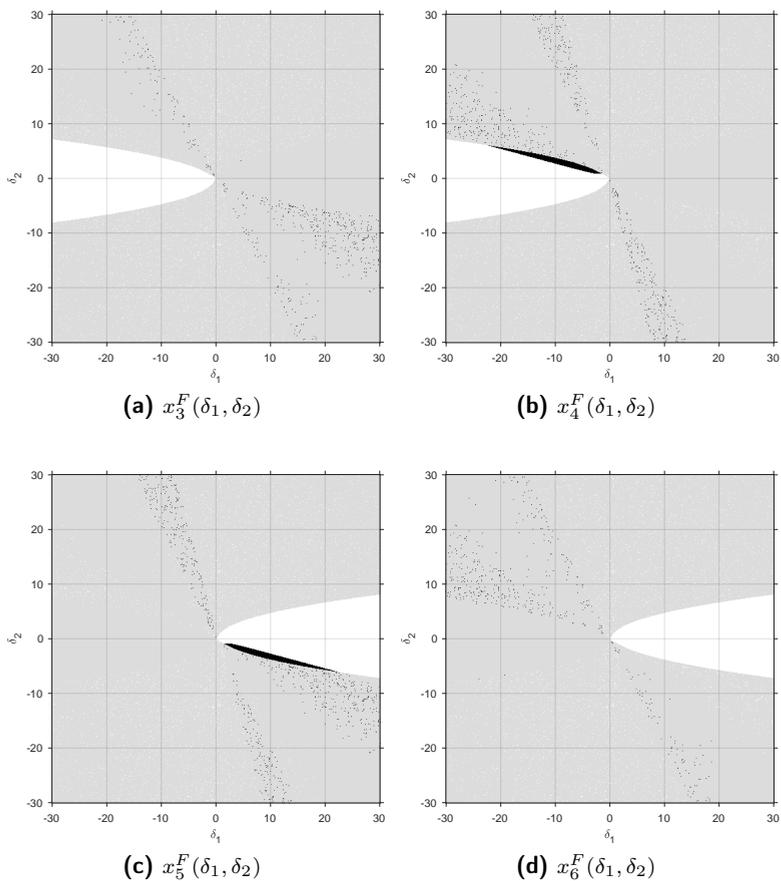


Figura 4.6: Planos de estabilidad de los puntos fijos extraños de R_-

La Figura 4.10(a) corresponde a valores de δ_1 y δ_2 de una de las regiones blancas más grandes de los planos de estabilidad. Por este motivo existe convergencia (aunque parcialmente) a las raíces de $p_-(x)$. Las Figuras 4.10(b), 4.10(c) y 4.10(d) corresponden a valores de δ_1 y δ_2 de diferentes regiones de los planos de estabilidad representadas en negro. En éstas se observa que las cuencas de atracción de las raíces son más reducidas, por lo que existen menos estimaciones iniciales que convergen a x_1^F o x_2^F , lo cual es de esperar ya que se trata de regiones donde también los puntos fijos extraños tienen un comportamiento atractor.

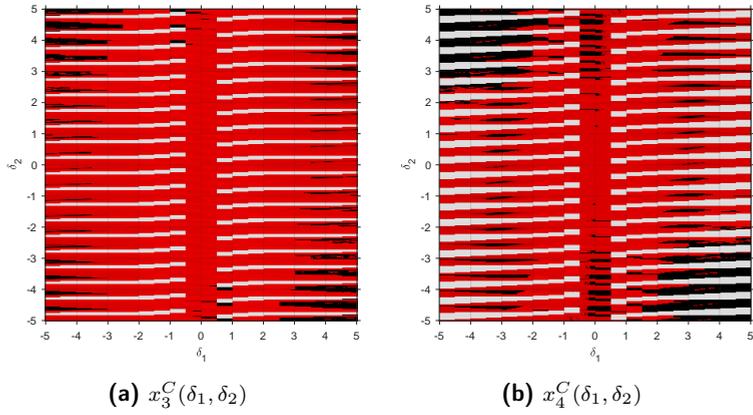


Figura 4.7: Planos de parámetros de R_- para los puntos críticos libres $x_{3-4}^C(\delta_1, \delta_2)$

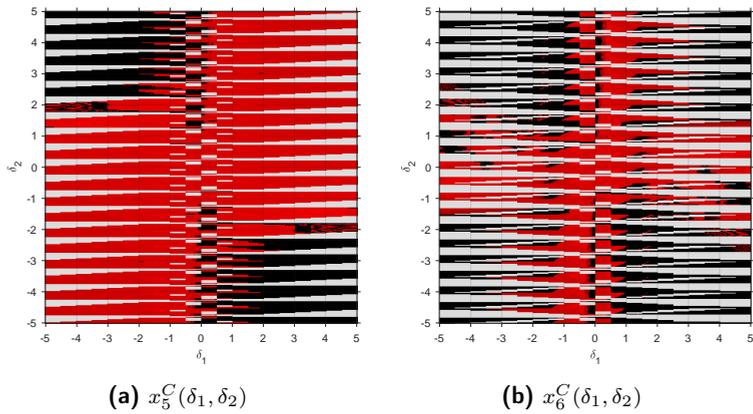


Figura 4.8: Planos de parámetros de R_- para los puntos críticos libres $x_{5-6}^C(\delta_1, \delta_2)$

Dinámica real de la familia T2 sobre $p_0(x) = x^2$

El último polinomio sobre el cual se va a aplicar la familia de métodos iterativos T2 es $p_0(x) = x^2$, un polinomio cuadrático que tiene como raíz única $x = 0$ con multiplicidad doble. El operador asociado a $p_0(x)$ depende de los parámetros δ_1 y δ_2 y está dado por la función racional

$$R_0(x) = \frac{x(\delta_1 x + 1)(\delta_1 \delta_2 x^2 + x(\delta_1 + 2\delta_2) + 3)}{(\delta_1 x + 2)^2(\delta_2 x + 2)}. \quad (4.23)$$

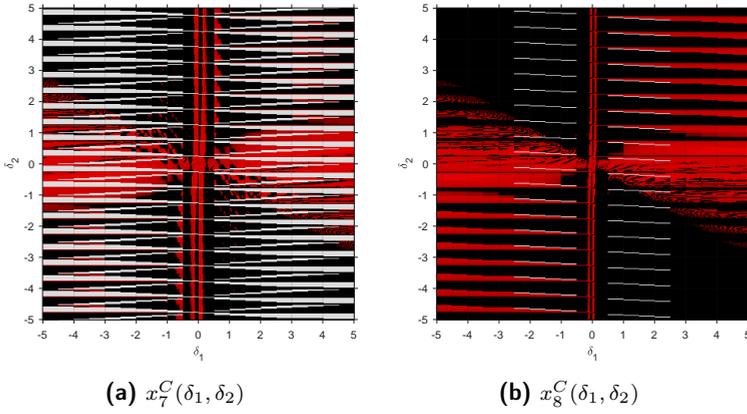


Figura 4.9: Planos de parámetros de R_- para los puntos críticos libres $x_{7-8}^C(\delta_1, \delta_2)$

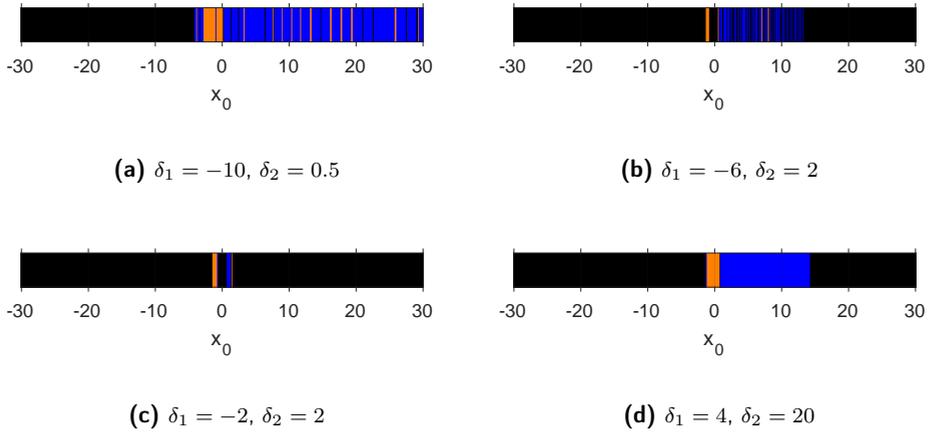


Figura 4.10: Rectas dinámicas de R_- para distintos valores de δ_1 y δ_2

Proposición 4.3. *Los puntos fijos del operador R_0 son $x_1^F = 0$, con comportamiento asintótico atractor, y los puntos fijos extraños*

$$x_2^F(\delta_1, \delta_2) = -\frac{\sqrt{-\delta_1^2 - \delta_1\delta_2 + \delta_2^2} + 2\delta_1 + \delta_2}{\delta_1(\delta_1 + \delta_2)},$$

$$x_3^F(\delta_1, \delta_2) = \frac{\sqrt{-\delta_1^2 - \delta_1\delta_2 + \delta_2^2} - 2\delta_1 - \delta_2}{\delta_1(\delta_1 + \delta_2)},$$

cuando $\delta_1 \neq 0$ y $\delta_1 \neq -\delta_2$. Además, $x_{2,3}^F(\delta_1, \delta_2)$ son reales cuando $-\delta_1^2 - \delta_1\delta_2 + \delta_2^2 > 0$, es decir, para valores de los parámetros que satisfacen $\delta_1 \in \left[\frac{1}{2}\delta_2(-1 - \sqrt{5}), \frac{1}{2}\delta_2(-1 + \sqrt{5}) \right]$, y cuyo comportamiento dinámico es atractor o repulsor dependiendo simultáneamente de δ_1 y δ_2 .

Demostración. Resolviendo $R_0(x) = x$, se obtiene que los puntos fijos son solución de la ecuación

$$-\frac{x(\delta_1^2 x^2 + \delta_1 x(\delta_2 x + 4) + 2\delta_2 x + 5)}{(\delta_1 x + 2)^2(\delta_2 x + 2)} = 0. \tag{4.24}$$

A partir de la ecuación anterior, $x_1^F = 0$ es un punto fijo del operador. Por otro lado, los puntos fijos extraños $x_2^F(\delta_1, \delta_2)$ y $x_3^F(\delta_1, \delta_2)$ son las raíces del polinomio cuadrático $\delta_1^2 x^2 + \delta_1 x(\delta_2 x + 4) + 2\delta_2 x + 5$ que aparece en el factor del numerador de (4.24).

A partir de la derivada del operador

$$R'_0(x) = (x(\delta_2^2(\delta_1 x + 2)(\delta_1 x(\delta_1 x + 4) + 2) + 2\delta_2(\delta_1 x(\delta_1 x(2\delta_1 x + 11) + 19) + 8) + 2\delta_1(\delta_1 x(\delta_1 x + 6) + 13)) + 12) \frac{1}{(\delta_1 x + 2)^3(\delta_2 x + 2)^2}, \tag{4.25}$$

se obtiene que $|R'_0(0)| = \frac{3}{8} < 1$, siendo x_1^F un punto fijo atractor. La estabilidad de $x_{2,3}^F(\delta_1, \delta_2)$ se analiza por medio de los planos de estabilidad asociados a cada punto fijo extraño y que se muestran en la Figura 4.11.

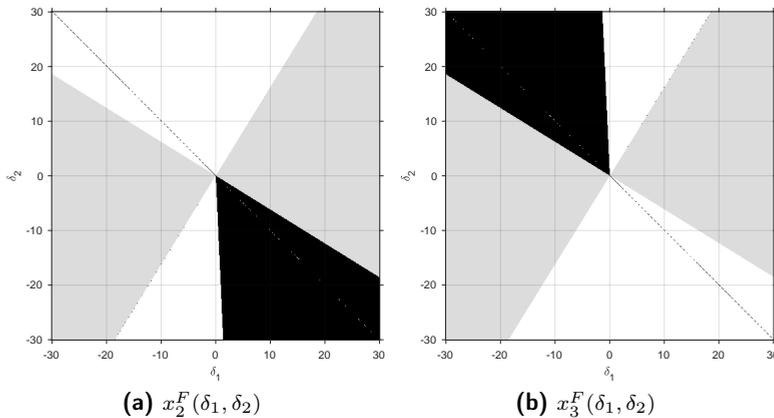


Figura 4.11: Planos de estabilidad de los puntos fijos extraños de R_0

Se observa que los dos planos de la Figura 4.11 guardan una cierta simetría con respecto al origen de coordenadas, presentando en ambos casos una amplia región de valores de los parámetros donde los puntos fijos extraños tienen un comportamiento repulsor (representado en blanco). Las regiones donde los puntos fijos extraños no son reales (representado en

gris) quedan determinadas por la región de valores de los parámetros comprendidos en $\delta_1 \in \left[\frac{1}{2}\delta_2(-1 - \sqrt{5}), \frac{1}{2}\delta_2(-1 + \sqrt{5}) \right]$. \square

En cuanto a los puntos críticos de R_0 , el operador únicamente tiene puntos críticos libres, ya que la raíz $x_1^F = 0$ no es punto crítico del operador. Los puntos críticos libres son las raíces del polinomio de grado cinco

$$P_5(x) = \delta_1^3 \delta_2^2 x^5 + (4\delta_1^3 \delta_2 + 6\delta_1^2 \delta_2^2)x^4 + (2\delta_1^3 + 22\delta_1^2 \delta_2 + 10\delta_1 \delta_2^2)x^3 + (12\delta_1^2 + 38\delta_1 \delta_2 + 4\delta_2^2)x^2 + (26\delta_1 + 16\delta_2)x + 12,$$

que se han denotado por $x_{1-5}^C(\delta_1, \delta_2)$, siendo reales para algunos valores de los parámetros. Asociado a cada punto crítico libre, se ha representado en las Figuras 4.12-4.14 los planos de parámetros de la familia T2 teniendo en cuenta (en gris) los valores donde $x_{1-5}^C(\delta_1, \delta_2)$ pertenecen al dominio complejo.

Los planos de parámetros de las Figuras 4.12-4.14 revelan un amplio intervalo de valores de los parámetros δ_1 y δ_2 para los cuales existe convergencia al punto fijo x_1^F , ya que prácticamente no aparecen regiones representadas en negro (sin convergencia) en ninguno de los planos.

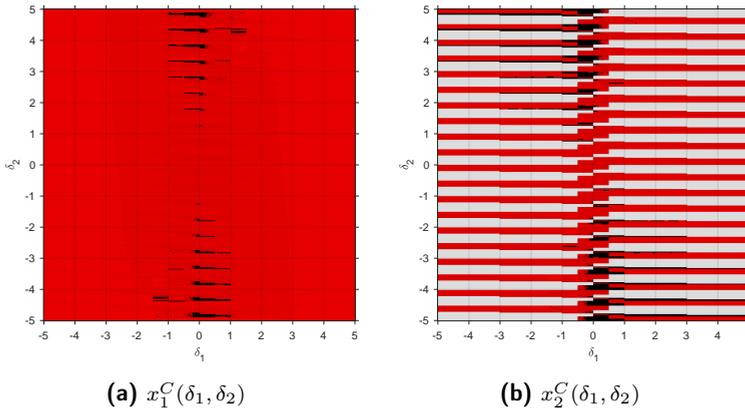


Figura 4.12: Planos de parámetros de R_0 para los puntos críticos libres $x_{1-2}^C(\delta_1, \delta_2)$

En la Figura 4.15 se han representado las rectas dinámicas asociadas a la familia T2 sobre $p_0(x)$ para determinados valores de los parámetros. La cuenca de atracción del único punto fijo atractor $x_1^F = 0$ se ha representado en naranja. Asimismo, los parámetros δ_1 y δ_2 se han seleccionado de las regiones determinadas por los planos de estabilidad de la Figura 4.11 donde el comportamiento es distinto.

Se observa que la convergencia a $x_1^F = 0$ es parcial en todas las rectas dinámicas de la Figura 4.15. Este comportamiento se debe a que los planos de estabilidad muestran regiones complementarias,

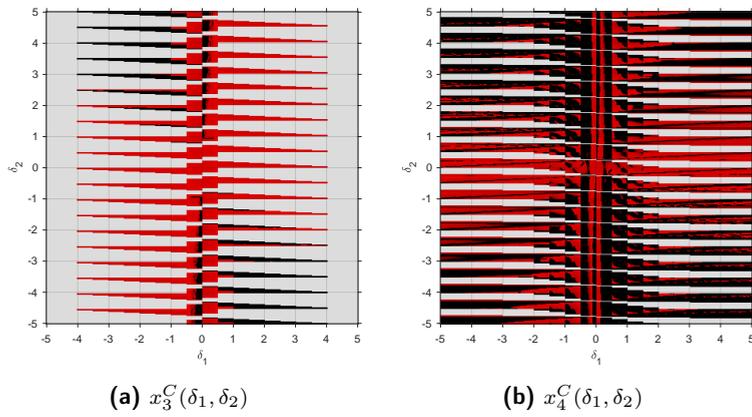


Figura 4.13: Planos de parámetros de R_0 para los puntos críticos libres $x_{3-4}^C(\delta_1, \delta_2)$

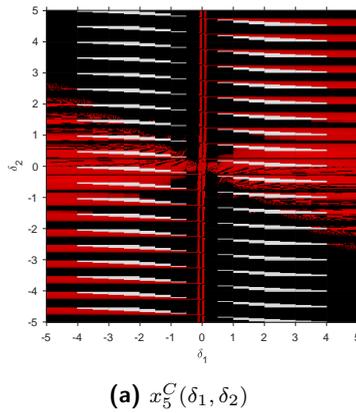


Figura 4.14: Planos de parámetros de R_0 para el punto crítico libre $x_5^C(\delta_1, \delta_2)$

es decir, regiones donde un punto fijo extraño es atractor, siendo el otro punto fijo extraño repulsor y viceversa. Por tanto, no siempre la órbita de todas las estimaciones iniciales de la recta cae en la cuenca de atracción de x_1^F .

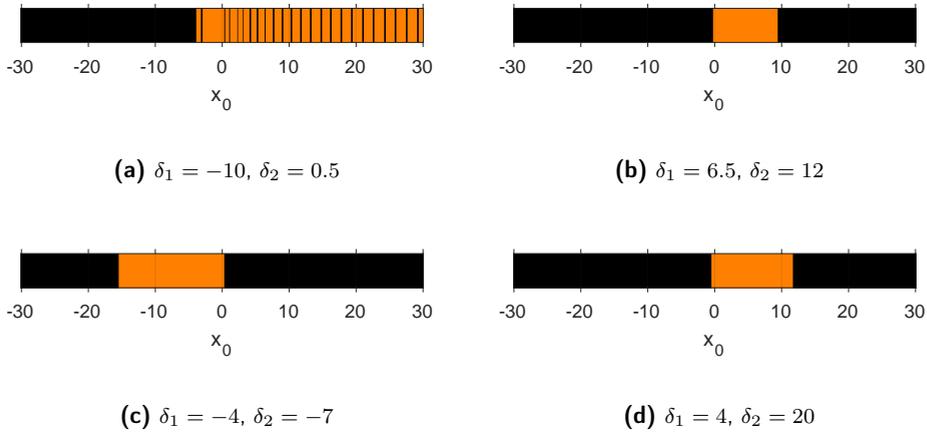


Figura 4.15: Rectas dinámicas de R_0 para distintos valores de δ_1 y δ_2

4.3.2 Métodos TM_2 y TM_{2N} : dinámica real multidimensional

La dinámica real multidimensional asociada al método TM_2 se desarrolla a continuación siguiendo un proceso completamente análogo al estudio realizado para el esquema TM_1 en el Capítulo 3.

Cuando el método TM_2 se aplica sobre el polinomio $p_c(x) = x^2 + c$, por tratarse de un método con memoria, el operador racional resultante es bidimensional y es de la forma

$$S_c(z, x) = \left(x, \frac{2x(2c^3 + c^2(z^2 - 6x^2) + 2cx^2(3x^2 + z^2) - 3x^4z^2 + 2x^2z^4)}{(c - 3x^2)^2(c - x^2)} \right), \quad (4.26)$$

donde x y z denotan las iteraciones x_k y x_{k-1} del método TM_2 , respectivamente.

Proposición 4.4. *Los puntos fijos del operador $S_c(z, x)$, resultante de aplicar el método TM_2 sobre la familia de polinomios $p_c(x)$, son los puntos atractores $\mathbf{x}_1^F(c) = (-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c})$ y $\mathbf{x}_2^F(c) = (\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$, cuando $c \leq 0$, y el punto fijo extraño $\mathbf{x}_3^F = (0, 0)$ para todo valor de c , que es un punto de silla.*

Demostración. *Resolviendo simultáneamente las ecuaciones $z = x$ y $S_c(z, x) = (z, x)$, se obtiene la ecuación*

$$- \frac{2x(-2c^3 + 5c^2x^2 - 8cx^4 + x^6)}{(c - 3x^2)^2(c - x^2)} = x \Leftrightarrow \frac{x(3c^3 - 3c^2x^2 + cx^4 + 7x^6)}{(c - 3x^2)^2(c - x^2)} = 0. \quad (4.27)$$

Los puntos fijos de $S_c(z, x)$ se obtienen a partir de la solución de (4.27). El punto $x = 0$ es solución de la ecuación, y las demás soluciones son las raíces del término del numerador

$3c^3 - 3c^2x^2 + cx^4 + 7x^6$, es decir, $\pm\sqrt{-c}$ y $\pm\sqrt{\frac{3c}{7}(1 \pm 2i\sqrt{3})}$. Tomando únicamente las soluciones que no están definidas en el dominio complejo, los puntos fijos del operador bidimensional $S_c(z, x)$ son $x_1^F(c) = (-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c})$ y $x_2^F(c) = (\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ para valores de $c \leq 0$ y el punto fijo extraño $x_3^F = (0, 0)$. Los demás puntos fijos obtenidos son complejos, por lo que no se incluyen en este estudio.

La estabilidad de los puntos fijos se analiza por medio del Teorema 2.5, calculando los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en cada punto fijo del operador racional. Para el operador $S_c(z, x)$ y cada punto fijo se obtienen las matrices diagonales

$$S'_c(-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c}) = S'_c(\sqrt{-c}, \sqrt{-c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S'_c(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

por lo que los puntos fijos $x_{1,2}^F(c)$ tienen valores propios asociados $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, y por tanto son puntos atractores, y x_3^F es un punto de silla, ya que los correspondientes valores propios satisfacen $\lambda_1 = 0 < 1$ y $\lambda_2 = 4 > 1$. \square

En la Figura 4.16 se han representado los planos dinámicos asociados al operador S_c tomando los mismos valores de c que en la Figura 3.4. Se mantiene el código de colores para representar las cuencas de atracción de los puntos fijos, y además se ha denotado en verde la cuenca de atracción del punto fijo extraño x_3^F . Los planos dinámicos obtenidos son similares a los del método TM1, de forma que para valores de c menores las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores son cada vez mayores. Sin embargo, en la Figura 4.16 no existe ningún punto que converja al punto de silla x_3^F , lo cual indica que se comporta como un punto fijo repulsor.

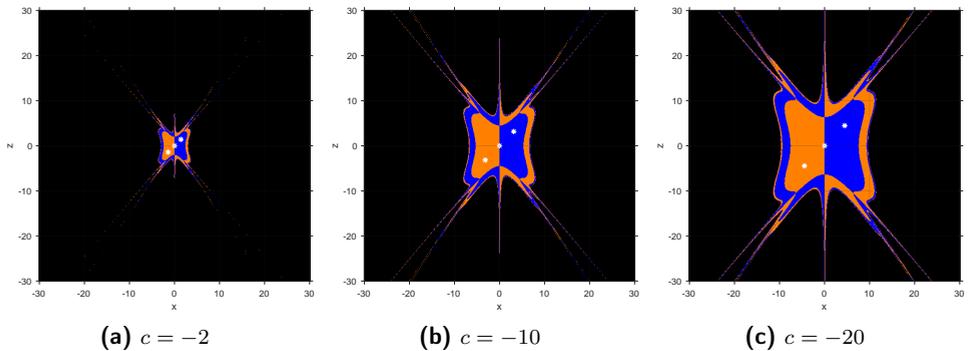


Figura 4.16: Planos dinámicos de $S_c(z, x)$ para diferentes valores de c

La diferencia fundamental entre los planos dinámicos de los métodos TM1 y TM2 (Figuras 3.4 y 4.16) se encuentra en que en la Figura 4.16 se observan cuencas de convergencia menos inmersas

una en la otra con respecto a las observadas en la Figura 3.4. No obstante, existen regiones con divergencia en ambos métodos.

Tras realizar el estudio dinámico asociado a TM2 sobre la familia de polinomios cuadráticos $p_c(x)$, a continuación se muestra un estudio análogo del método con memoria TM2N. De nuevo, se utilizan herramientas de dinámica real multidimensional, trabajando con los operadores reducidos y realizando un estudio análogo al llevado a cabo para el método TM1N en el capítulo anterior.

El operador de punto fijo del esquema TM2N cuando se aplica sobre $p_c(x)$ es

$$\Phi_c(z, zy, x) = \left(x, xy, -\frac{2x(-2c^3 + 5c^2x^2 - 8cx^4 + x^6)}{(c - 3x^2)^2(c - x^2)} \right), \quad (4.28)$$

donde se ha utilizado la notación $x = x_k$, $z = x_{k-1}$, $xy = y_k$ y $zy = y_{k-1}$. Por tanto, el operador unidimensional asociado es

$$[\Phi_c(z, zy, x)]|_{z=zy=x} = \tilde{\Phi}_c(x) = -\frac{2x(-2c^3 + 5c^2x^2 - 8cx^4 + x^6)}{(c - 3x^2)^2(c - x^2)}.$$

El operador reducido $\tilde{\Phi}_c$ permite el cálculo de los puntos fijos del método TM2N aplicado a la familia $p_c(x)$, cuyo resultado se muestra a continuación.

Proposición 4.5. *Los puntos fijos del operador unidimensional $\tilde{\Phi}_c$ son las raíces de $p_c(x)$, $x_1^F(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^F(c) = \sqrt{-c}$, cuando $c \leq 0$, con comportamiento superatractor. Además, $x_3^F = 0$ es un punto fijo extraño repulsor.*

Demostración. *Desarrollando $\tilde{\Phi}_c(x) = x$, se obtiene la ecuación (4.27). Por tanto, los puntos fijos reales del operador reducido son las raíces de $p_c(x)$, denotadas $x_{1,2}^F(c) = \mp\sqrt{-c}$ para $c \leq 0$, y el punto fijo extraño $x_3^F = 0$.*

Siendo la matriz Jacobiana de la forma

$$\Phi'_c(z, zy, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Phi}'_c(x) \end{pmatrix},$$

la estabilidad de los puntos fijos se comprueba sobre $\tilde{\Phi}'_c$, cuyo valor es

$$\tilde{\Phi}'_c(x) = \frac{2(2c - 3x^2)(c + x^2)^4}{(c - 3x^2)^3(c - x^2)^2}. \quad (4.29)$$

El valor de $|\tilde{\Phi}'_c(x)|$ en cada punto fijo clasifica los puntos fijos $x_1^F(c)$ y $x_2^F(c)$ como superatractores, y x_3^F como repulsor, ya que $|\tilde{\Phi}'_c(x)| = 4$. \square

El operador unidimensional del método TM2N también tiene puntos críticos y puntos críticos libres.

Proposición 4.6. *Los puntos críticos del operador $\tilde{\Phi}_c$ son las raíces de $p_c(x)$, $x_1^C(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^C(c) = \sqrt{-c}$, cuando $c \leq 0$. Si $c > 0$, las raíces del polinomio no son puntos críticos, por lo que únicamente existen los puntos críticos libres $x_3^C(c) = -\sqrt{\frac{2}{3}c}$ y $x_4^C(c) = \sqrt{\frac{2}{3}c}$.*

La prueba de este resultado es inmediata resolviendo la ecuación $\tilde{\Phi}'_c(x) = 0$ a partir de los términos del numerador de (4.29).

Se han representado en la Figura 4.17 los diagramas de bifurcación del método TM2N para los puntos fijos. Por un lado, la Figura 4.17(a) confirma que $x_{1,2}^F(c)$ son puntos fijos superatractores cuando $c \leq 0$. Por otro lado, la Figura 4.17(b) muestra que x_3^F es un punto repulsor, ya que si se toma como estimación inicial del método, con una pequeña perturbación, sus iteraciones sucesivas no convergen al punto fijo extraño y sí lo hacen a las raíces de $p_c(x)$.

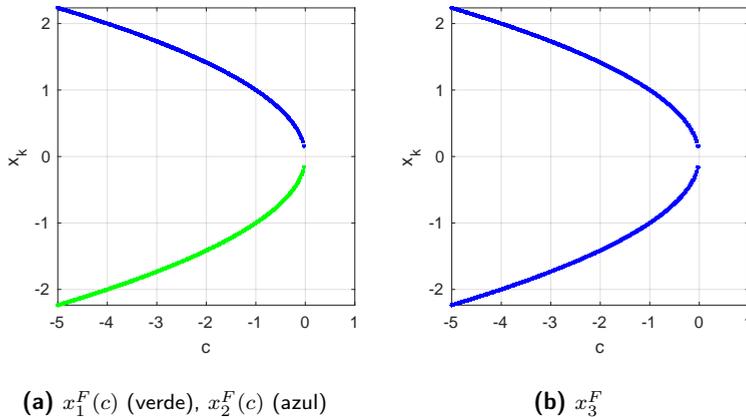


Figura 4.17: Diagramas de bifurcación de los puntos fijos de $\tilde{\Phi}_c$

Como el operador $\tilde{\Phi}_c$ depende del parámetro c y tiene dos puntos críticos libres, las rectas de parámetros asociadas a éstos son una herramienta gráfica de gran utilidad para determinar los valores del parámetro que dan lugar a los métodos de una familia más estables. Los puntos fijos del esquema iterativo TM2N son reales cuando $c \leq 0$, valores para los cuales los puntos críticos son complejos. Las rectas de parámetros correspondientes a $x_3^C(c)$ y $x_4^C(c)$ obtenidas muestran que los puntos críticos libres no convergen a ningún valor real cuando $c > 0$.

La Figura 4.18 representa las rectas dinámicas del esquema TM2N sobre $p_c(x)$ variando el valor de c . Se puede observar que los resultados obtenidos son completamente iguales que los de la Figura 3.6 correspondiente a las rectas dinámicas del método TM1N.

Para analizar el comportamiento dinámico de toda la familia completa, se ha representado el plano de convergencia del método TM2N en la Figura 4.19. De acuerdo a la notación seguida

en la Figura 2.6, se han representado con una línea negra los puntos fijos $x_{1,2}^F(c)$ y con una línea blanca x_3^F . Como se observa, el punto fijo extraño divide el plano en dos semiplanos, conteniendo cada uno de ellos la cuenca de atracción de uno de los puntos fijos atractores.

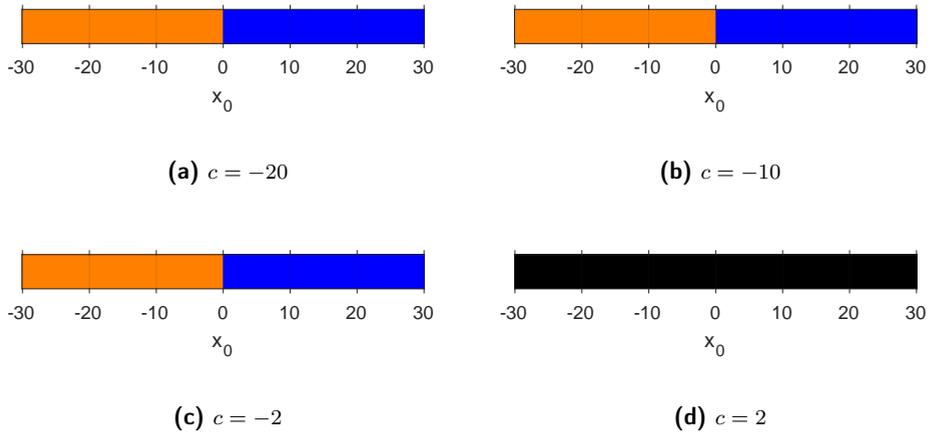


Figura 4.18: Rectas dinámicas de $\tilde{\Phi}_c$ para distintos valores de c

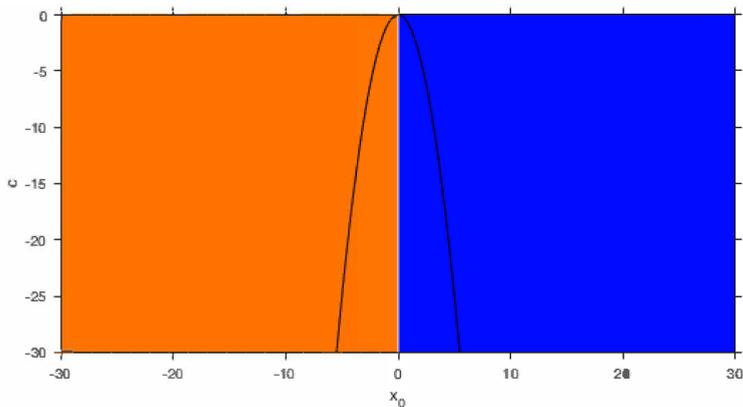


Figura 4.19: Plano de convergencia de $\tilde{\Phi}_c$

4.3.3 Familia de métodos TM_γ : dinámica real multidimensional

La dinámica de la familia con memoria TM_γ se analiza a continuación. Por tratarse de una clase iterativa con memoria y con un parámetro, este estudio se realiza considerando de nuevo la base de polinomios cuadráticos $\{p_+(x) = x^2 + 1, p_-(x) = x^2 - 1, p_0(x) = x^2\}$.

Dinámica real de la familia TM_γ sobre $p_+(x) = x^2 + 1$

Si se aplica la familia TM_γ sobre el polinomio $p_+(x) = x^2 + 1$, el operador racional bidimensional resultante es

$$\Upsilon_+(z, x) = \left(x, \frac{2(x^2 + 1)z}{x^2 - 4xz + 1} - \frac{\frac{(x^3 - 2x^2z + x + 2z)^2}{(x^2 - 4xz + 1)^2} + 1}{\frac{\gamma(x^2 + 1)^2((x - 2z)^2 + 1)}{(x^2 - 4xz + 1)^2} + 2x} + x \right). \quad (4.30)$$

Debido a que el polinomio $p_+(x)$ no tiene raíces reales, todos los puntos fijos de Υ_+ , si existen, serán puntos fijos extraños del operador. En el siguiente resultado se establece el número y la estabilidad de los puntos fijos extraños de (4.30).

Proposición 4.7. *La función racional Υ_+ tiene un número diferente de puntos fijos, $\mathbf{x}_i^F(\gamma) = (x_i(\gamma), x_i(\gamma))$ ($i \in \{1, 2, 3\}$), dependiendo del valor de γ . En concreto,*

- (i) *Si $\gamma = 0$, el operador racional se simplifica y no tiene puntos fijos extraños.*
- (ii) *Cuando $\gamma \neq 0$, existen tres raíces del polinomio*

$$Q_7^+(x) = -1 + 2\gamma x + 5x^2 + 6\gamma x^3 - 19x^4 + 6\gamma x^5 + 39x^6 + 2\gamma x^7$$

que son reales en diferentes subintervalos de valores de γ : $\mathbf{x}_1^F(\gamma)$ es real para cualquier valor de $\gamma \neq 0$ y es un punto fijo extraño repulsor; $\mathbf{x}_2^F(\gamma)$ y $\mathbf{x}_3^F(\gamma)$ son reales para $\gamma \in]-\gamma^\sharp, 0[\cup]0, \gamma^\sharp[$, donde $\gamma^\sharp \approx 4.62389$, y son ambos puntos fijos extraños repulsivos en estos subintervalos.

Tras estudiar la estabilidad de los puntos fijos extraños del operador Υ_+ , se representan en los planos dinámicos las cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos atractores. Para representar los planos dinámicos, se han seleccionado distintos valores de γ tomados de regiones donde el número de puntos fijos extraños es distinto. Siguiendo la misma implementación de los planos que en los métodos anteriores, se representan con cuadrados blancos los puntos fijos extraños, tomando un mallado de 500×500 estimaciones iniciales en $(x, z) \in [-20, 20] \times [-20, 20]$, y estableciendo la convergencia a alguno de los puntos fijos extraños con una tolerancia de 10^{-3} y un máximo de 50 iteraciones.

Los planos dinámicos de la familia TM_γ sobre $p_+(x)$ para los valores del parámetro considerados se muestran en la Figura 4.20. Para $\gamma = -4$, el método asociado tiene tres puntos fijos extraños,

dos de éstos repulsores y uno es un punto de silla. El esquema correspondiente a $\gamma = 6$ únicamente tiene un punto fijo extraño que es repulsor. Se puede observar que los planos dinámicos de las Figuras 4.20(a) y 4.20(b) son completamente negros, debido a que ninguna estimación inicial converge a una raíz real. Este resultado coincide con el análisis previo de la Proposición 4.7, ya que los únicos puntos fijos del operador racional Υ_+ son puntos fijos extraños y no son atractores en ningún caso.

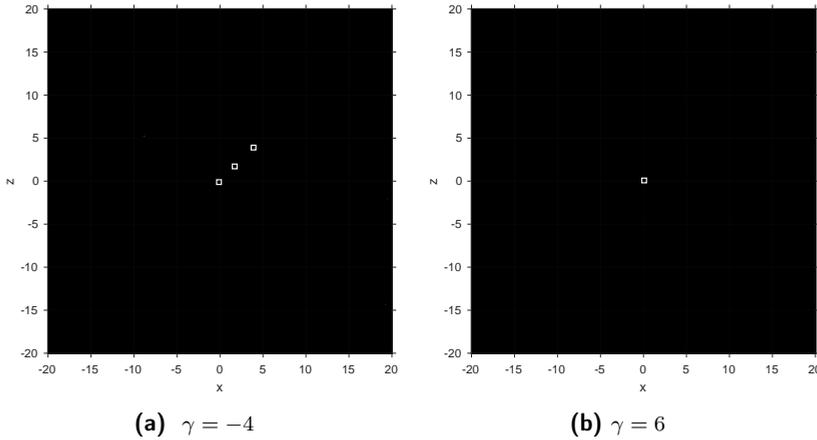


Figura 4.20: Planos dinámicos de Υ_+ para diferentes valores de γ

Dinámica real de la familia TM_γ sobre $p_-(x) = x^2 - 1$

Cuando la familia de métodos iterativos TM_γ se aplica sobre el polinomio $p_-(x) = x^2 - 1$, se obtiene el operador vectorial

$$\Upsilon_-(z, x) = \left(x, -\frac{(x^2 - 1)^2 (x - 2z - 1)(x - 2z + 1)}{\gamma (x^2 - 1)^2 (x - 2z - 1)(x - 2z + 1) + 2x (x^2 - 4xz - 1)^2} + \frac{2(x^2 - 1)z}{x^2 - 4xz - 1} + x \right). \quad (4.31)$$

Para calcular los puntos fijos de (4.31), se resuelven las ecuaciones $z = x$ y $\Upsilon_-(z, x) = (z, x)$. Tras este cálculo, la función racional $\Upsilon_-(z, x)$ tiene dos puntos fijos superatractores, $\mathbf{x}_1^F = (-1, -1)$ y $\mathbf{x}_2^F = (1, 1)$, que coinciden con las raíces del polinomio correspondiente. Además, las raíces del polinomio

$$Q_7^-(x) = 1 - 2\gamma x + 5x^2 + 6\gamma x^3 + 19x^4 - 6\gamma x^5 + 39x^6 + 2\gamma x^7,$$

también satisfacen $\Upsilon_-(x, x) = (x, x)$. Como se está realizando un estudio dinámico real, se deben seleccionar de entre las raíces de $Q_7^-(x)$, los puntos fijos extraños en aquellas regiones donde son reales. Entonces, el operador tiene un punto fijo extraño para todo valor de γ , denotado por $\mathbf{x}_3^F(\gamma)$, y dos puntos fijos extraños, $\mathbf{x}_{4,5}^F(\gamma)$, definidos solo cuando $\gamma \in (-\infty, -\gamma^*) \cup (\gamma^*, +\infty)$, siendo $\gamma^* \approx 3.38143$ una de las raíces del polinomio $Q_8^-(x) = -533871 + 5142096x^2 - 45829152x^4 + 1835264x^6 + 186624x^8$.

La estabilidad de los puntos fijos extraños depende del valor del parámetro, para lo cual mostramos en la Figura 4.21 el valor absoluto de los valores propios de los puntos fijos extraños. De acuerdo con el Teorema 2.5, analizando los valores propios de la matriz Jacobiana $\Upsilon'_-(z, x)$ evaluada en cada uno de los puntos fijos extraños, se obtiene que $\mathbf{x}_3^F(\gamma)$ es siempre repulsor para todo valor real de $\gamma \neq 0$ (en la Figura 4.21(a) se puede observar que los dos valores propios coinciden y son mayores que uno, en valor absoluto), $\mathbf{x}_4^F(\gamma)$ es un punto de silla cuando $\gamma \in (-\infty, -\gamma^*) \cup (\gamma^*, +\infty)$ (en la Figura 4.21(b) se observa que un valor propio se encuentra muy próximo a uno siendo inferior que éste y que el otro valor propio es mayor que uno, en valor absoluto), y por último, $\mathbf{x}_5^F(\gamma)$ es un punto de silla o un punto repulsor dependiendo del valor de γ (en la Figura 4.21(c) se observan diferentes regiones donde los dos valores propios son mayores o menores que uno en valor absoluto).

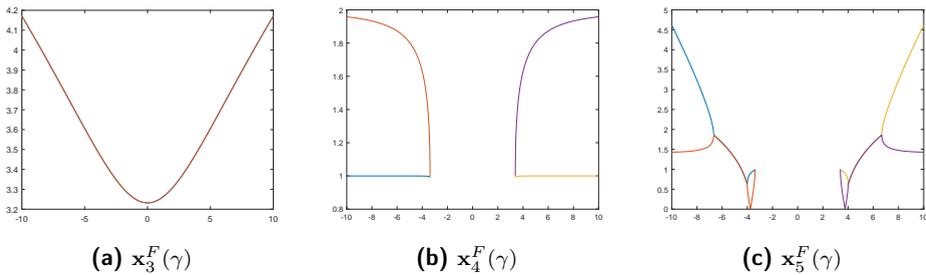


Figura 4.21: Valor absoluto de los valores propios de Υ'_-

Debido a la diversidad en el comportamiento de los puntos fijos extraños, estos detalles se resumen en la Tabla 4.2 y en la Proposición 4.8.

Proposición 4.8. *Los puntos fijos del operador vectorial de la familia iterativa TM_γ aplicada al polinomio $p_-(x)$ son los puntos superatractores $\mathbf{x}_1^F = (-1, -1)$ y $\mathbf{x}_2^F = (1, 1)$. El número de puntos fijos extraños, $\mathbf{x}_i^F(\gamma) = (x_i(\gamma), x_i(\gamma))$ ($i \in \{3, 4, 5\}$), de la función racional Υ_- varía en función del valor del parámetro γ . En particular,*

- (a) \mathbf{x}_1^F y \mathbf{x}_2^F , cuyas componentes son las raíces del polinomio $p_-(x)$, son puntos fijos superatractores independientemente del valor de γ . Para $\gamma = 0$ el operador racional se simplifica, siendo \mathbf{x}_1^F y \mathbf{x}_2^F los únicos puntos fijos de Υ_- .

γ	$\mathbf{x}_3^F(\gamma)$	$\mathbf{x}_4^F(\gamma)$	$\mathbf{x}_5^F(\gamma)$
$] -\infty, -\gamma^{**}]$	repulsor	punto de silla	repulsor
$] -\gamma^{**}, -\gamma^*]$	repulsor	punto de silla	atractor
$] -\gamma^*, 0[$	repulsor	-	-
$] 0, \gamma^*[$	repulsor	-	-
$[\gamma^*, \gamma^{**}[$	repulsor	punto de silla	atractor ($\gamma^* \neq \gamma^{**}$)
$] \gamma^{**}, +\infty[$	repulsor	punto de silla	repulsor

Tabla 4.2: Estabilidad de los puntos fijos extraños de Υ_- dependiendo de γ

(b) Cuando $\gamma \neq 0$, existen tres raíces del polinomio $Q_{\gamma}^-(x)$ que pueden ser reales: $\mathbf{x}_3^F(\gamma)$ es real para cualquier $\gamma \neq 0$, siendo un punto fijo extraño repulsor; $\mathbf{x}_4^F(\gamma)$ es real cuando $\gamma \in]-\infty, -\gamma^*[\cup]\gamma^*, +\infty[$, donde $\gamma^* \approx 3.38143$, y es un punto de silla en todo su dominio; y $\mathbf{x}_5^F(\gamma)$ es real para $\gamma \in]-\infty, -\gamma^*] \cup]\gamma^*, +\infty[$, siendo un punto fijo extraño atractor en $] -\gamma^{**}, -\gamma^*] \cup]\gamma^*, \gamma^{**}[$, con $\gamma^{**} \approx 4.4668$, repulsor en $] -\infty, -\gamma^{**}] \cup]\gamma^{**}, +\infty[$, y neutro o parabólico en los límites de los intervalos anteriores.

Las Figuras 4.22, 4.23 y 4.24 muestran los planos dinámicos de Υ_- para valores del parámetro $\gamma \in \{-5, 3, 3.5\}$, variando en cada figura el rango de valores de x y z representados para ampliar determinadas zonas de cada plano donde se producen comportamientos distintos. Se ha representado en naranja la cuenca de atracción de \mathbf{x}_1^F y en azul la de \mathbf{x}_2^F . En negro, se indica que el método correspondiente no converge a los puntos fijos atractores para la estimación inicial considerada.

Para $\gamma = -5$ y $\gamma = 3.5$, los correspondientes métodos de la familia TM_{γ} tienen tres puntos fijos extraños, $\mathbf{x}_{3-5}^F(\gamma)$, mientras que para $\gamma = 3$ el método asociado tiene un único punto fijo extraño, $\mathbf{x}_3^F(\gamma)$. Como se puede observar, en las Figuras 4.22 y 4.23 existe convergencia en todo el plano a \mathbf{x}_1^F o \mathbf{x}_2^F . Este es el comportamiento esperado para estos valores del parámetro, ya que los puntos fijos extraños son repulsores o silla, no existiendo órbitas periódicas atractoras. Los puntos fijos extraños se han representado con cuadrados blancos y permanecen en el conjunto de Julia. Sin embargo, para $\gamma = 3.5$ se puede observar en la Figura 4.24(b) una pequeña región negra que indica que no todas las estimaciones iniciales convergen a alguna raíz del polinomio. Esto es debido a que para $\gamma = 3.5$ existen tres puntos fijos extraños siendo uno de ellos atractor, por lo que tiene su propia cuenca de convergencia.

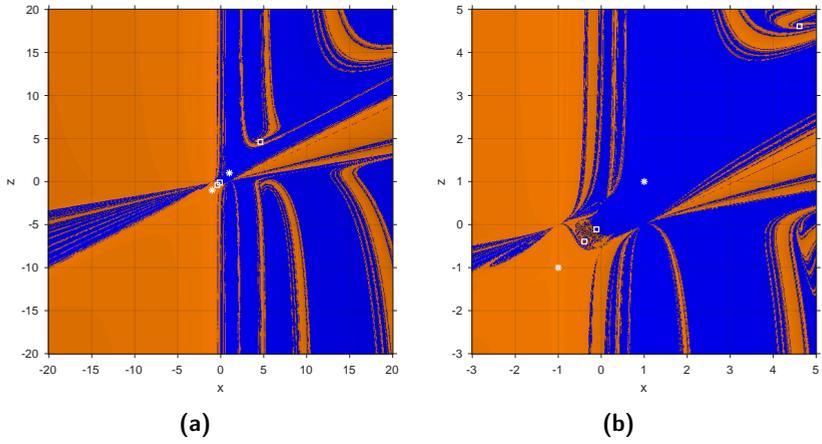


Figura 4.22: Planos dinámicos de Υ_- para $\gamma = -5$

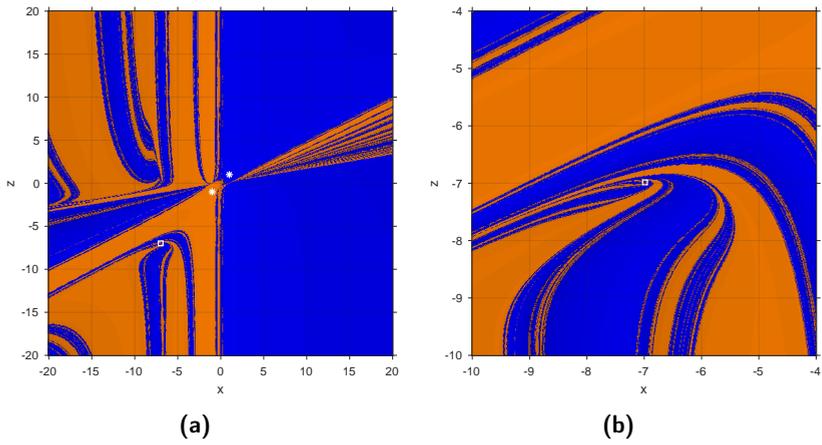


Figura 4.23: Planos dinámicos de Υ_- para $\gamma = 3$

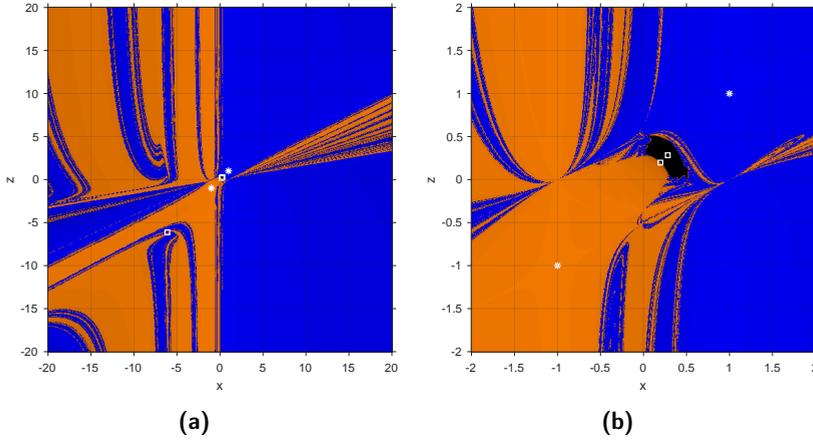


Figura 4.24: Planos dinámicos de Υ_- para $\gamma = 3.5$

Dinámica real de la familia TM_γ sobre $p_0(x) = x^2$

Por último, la función racional asociada a la familia TM_γ aplicada sobre el polinomio $p_0(x) = x^2$ es

$$\Upsilon_0(z, x) = \left(x, \frac{x(x^3 - 12x^2z + 44xz^2 + \gamma x(x - 2z)^3 - 48z^3)}{\gamma x(x - 2z)^2(x - 4z) + 2(x - 4z)^3} \right). \quad (4.32)$$

El siguiente resultado resume los puntos fijos del operador Υ_0 y su estabilidad.

Proposición 4.9. *La función racional Υ_0 tiene un único punto fijo atractor \mathbf{x}_1^F , cuyas componentes son las raíces del polinomio $p_0(x)$, es decir, $\mathbf{x}_1^F = (0, 0)$, para todo valor de γ . Además, cuando $\gamma \neq 0$ el operador tiene un punto fijo extraño $\mathbf{x}_2^F(\gamma) = \left(-\frac{39}{2\gamma}, -\frac{39}{2\gamma}\right)$ que es repulsor.*

En las Figuras 4.25 y 4.26 se han representado algunos planos dinámicos de la familia TM_γ cuando se aplica sobre el polinomio $p_0(x)$ para distintos valores de γ . Los planos dinámicos resultantes tienen el comportamiento esperado, ya que el único punto fijo extraño $\mathbf{x}_2^F(\gamma)$ siempre es repulsor y permanece en el conjunto de Julia. Se puede observar que todas las aproximaciones iniciales en el conjunto de Fatou convergen a la única raíz del polinomio, cuya cuenca de atracción se ha representado en naranja.

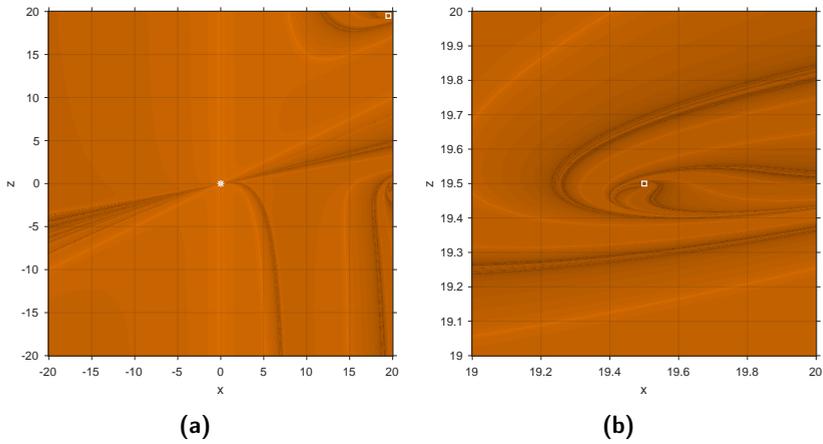


Figura 4.25: Planos dinámicos de Υ_0 para $\gamma = -1$

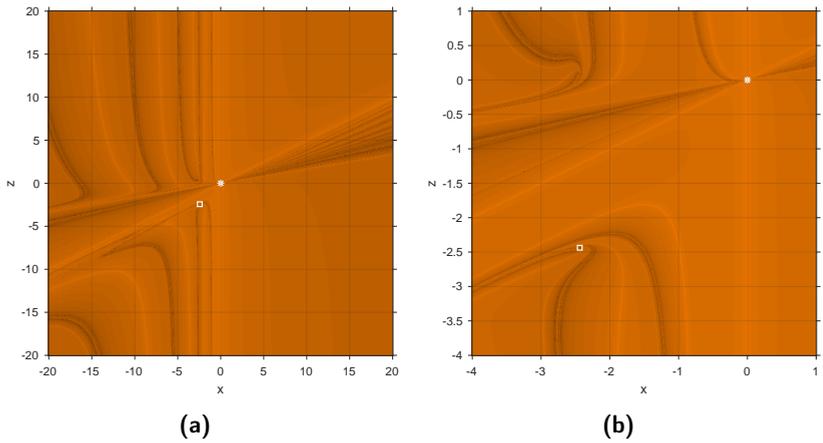


Figura 4.26: Planos dinámicos de Υ_0 para $\gamma = 8$

4.4 Resultados numéricos

Tras analizar de forma teórica la velocidad de convergencia de los métodos en la Sección 4.2 y su estabilidad dependiendo de las estimaciones iniciales en la Sección 4.3, esta sección está dedicada a verificar de forma empírica todos los resultados obtenidos. Se consideran para ello diferentes

ecuaciones académicas no lineales y un problema no lineal con aplicaciones químicas, utilizando los métodos propuestos en el capítulo para aproximar sus soluciones.

Partiendo de estimaciones iniciales x_0 suficientemente cerca de la solución a aproximar, se muestra una tabla de resultados de cada función no lineal considerada donde se resume para cada esquema iterativo el número de iteraciones necesarias para aproximar la solución del problema, el orden de convergencia de los métodos obtenido con la implementación práctica del método en términos del orden de convergencia computacional aproximado (ACOC) [44] y los valores de $|x_{k+1} - x_k|$ y $|f(x_{k+1})|$ en la última iteración. Durante el proceso iterativo, se establece la convergencia cuando la diferencia entre dos iterados consecutivos o el valor de la función en el iterado es menor que 10^{-200} , es decir, cuando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-200}$ o $|f(x_{k+1})| < 10^{-200}$, respectivamente, con un máximo de 50 iteraciones. Los experimentos numéricos se han realizado en Matlab R2018b utilizando variable de precisión aritmética con 2000 dígitos de mantisa.

Tomando como referencia el estudio dinámico de las familias de métodos T2 y TM_γ de la Sección 4.3, se han seleccionado métodos iterativos de cada clase obtenidos para valores concretos de los parámetros con mejores propiedades de estabilidad para polinomios cuadráticos. Concretamente, para la clase T2 se han tomado los métodos obtenidos con el par $\delta_1 = -10$ y $\delta_2 = 0.5$, y con el par $\delta_1 = -2$, $\delta_2 = 2$, seleccionados de las rectas dinámicas de las Figuras 4.5, 4.10 y 4.15. En la clase TM_γ , observando los resultados obtenidos en los planos dinámicos de las Figuras 4.23 y 4.26, se han seleccionado los esquemas asociados a los parámetros $\gamma = 3$ y $\gamma = 8$. Para los métodos con memoria, los cuales requieren de las estimaciones x_0 y x_1 para iniciar el proceso iterativo, se ha considerado la misma estimación inicial x_0 que con los métodos sin memoria y una segunda estimación próxima a ésta dada por $x_1 = x_0 + 0.1$.

En primer lugar se considera una aplicación química, cuyo proceso se describe por medio de una función no lineal. Tras la descripción y los resultados de este problema se muestran los resultados obtenidos para diferentes ejemplos académicos de ecuaciones no lineales.

Los coeficientes de fricción utilizados al calcular la resistencia o la pérdida de presión en conductos, tubos o tuberías se pueden calcular con la ecuación de Colebrook-White [35]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \log_{10} \left(\frac{\theta}{3.7065} + \frac{2.5226}{Re\sqrt{x}} \right), \quad (4.33)$$

donde θ es la relación entre la rugosidad de la superficie y el diámetro hidráulico, y Re es el número de Reynolds. Para los casos de prueba, se ha tomado $\theta = 10^{-4}$ y $Re = 4 \times 10^{-3}$. La Figura 4.27 representa la función (4.33), mientras que la Tabla 4.3 resume la información obtenida tras aplicar los diversos métodos iterativos al problema definido por (4.33).

En la Tabla 4.3 se observa que, en general, todos los esquemas proporcionan buenos resultados, convergiendo a la solución aproximada del problema con una tolerancia menor que 10^{-200} . Además, se puede observar que los métodos con memoria requieren de un menor número de iteraciones para aproximar la solución del problema. No obstante, no se muestra el valor obtenido para el ACOC debido a su inestabilidad en la resolución de la ecuación de Colebrook-White para todos los métodos considerados.

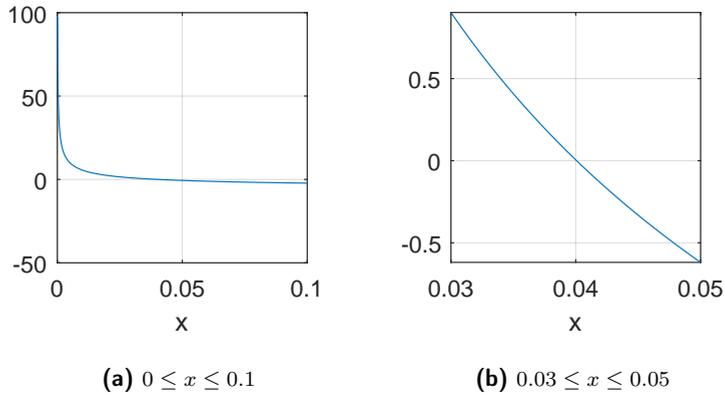


Figura 4.27: Ecuación de Colebrook-White

x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
0.03	Traub	17	1.478e-200	1.065e-212
	T2, $\delta_1 = -10, \delta_2 = 0.5$	17	6.799e-199	4.902e-211
	T2, $\delta_1 = -2, \delta_2 = 2$	17	2.199e-200	1.585e-212
	TM2	16	7.027e-191	5.066e-203
	TM2N	16	1.436e-191	1.035e-203
	TM $_{\gamma}$, $\gamma = 3$	16	1.026e-189	7.394e-202
	TM $_{\gamma}$, $\gamma = 8$	16	3.592e-190	2.590e-202
0.05	Traub	17	4.805e-200	3.464e-212
	T2, $\delta_1 = -10, \delta_2 = 0.5$	17	2.132e-196	1.537e-208
	T2, $\delta_1 = -2, \delta_2 = 2$	17	1.342e-199	9.676e-212
	TM2	16	9.976e-192	7.192e-204
	TM2N	16	2.271e-193	1.637e-205
	TM $_{\gamma}$, $\gamma = 3$	17	4.703e-202	3.390e-214
	TM $_{\gamma}$, $\gamma = 8$	16	1.165e-188	8.395e-201

Tabla 4.3: Resultados numéricos los métodos T2, TM2, TM2N, TM $_{\gamma}$ y Traub para resolver la ecuación no lineal (4.33)

Las funciones no lineales de prueba consideradas para verificar el funcionamiento de los esquemas iterativos son las siguientes:

- $f_1(x) = \cos(x) - x, \alpha \approx 0.739085,$

- $f_2(x) = \cos(x) - xe^x + x^2$, $\alpha \approx 0.639154$,
- $f_3(x) = e^x - 4x^2$, $\alpha \approx 0.714806$,

donde α denota la solución exacta. En la Tabla 4.4 se resumen los resultados obtenidos para cada método.

La Tabla 4.4 permite verificar que el análisis del orden de convergencia de los métodos realizado en la Sección 4.3 es correcto, ya que los valores obtenidos para el ACOC se aproximan de forma notable a los obtenidos de forma teórica en todos los casos. Aunque los métodos de la familia T2 (para los parámetros considerados) convergen con más iteraciones que el método de Traub, a pesar de que ambos tienen orden cúbico, las aproximaciones a las soluciones proporcionadas por la clase T2 se consiguen con una tolerancia bastante menor. Este hecho se puede observar comparando los resultados obtenidos en la columna de valores de $|f(x_{k+1})|$ para cada método. Por otro lado, la eficiencia de los métodos con memoria queda probada, ya que son los métodos con mayor orden de convergencia y que requieren en todos los ejemplos de un menor número de iteraciones en comparación con los esquemas de Traub y T2. Concretamente, los mejores resultados para las funciones f_1 , f_2 y f_3 y las estimaciones iniciales consideradas se obtienen con los métodos con memoria TM2 y TM2N.

4.5 Conclusiones

La propuesta de nuevos métodos a partir de la incorporación y aproximación de dos parámetros en el esquema iterativo de Traub permite diseñar métodos y familias con memoria que mejoren el orden de convergencia cúbico. El estudio realizado en este capítulo, siguiendo las premisas presentadas en el Capítulo 3, muestra el efecto de incluir dos parámetros en el método de Traub y el aumento de la eficiencia de los esquemas iterativos obtenidos frente al uso de un único parámetro, ya que tampoco se ha incrementado el número de evaluaciones funcionales adicionales, pero sí el orden de convergencia. Las clases iterativas propuestas se han analizado de forma dinámica, mostrando su estabilidad en función de las estimaciones iniciales sobre polinomios cuadráticos, y de forma numérica a partir de la implementación y uso de los métodos para resolver diversos problemas no lineales. En todos los casos se muestra que los esquemas con memoria tienen una buena estabilidad y funcionamiento.

f	x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
$f_1(x)$	1	Traub	5	7.601e-95	7.166e-284	3.000
		T2, $\delta_1 = -10, \delta_2 = 0.5$	7	4.515e-159	1.418e-474	3.000
		T2, $\delta_1 = -2, \delta_2 = 2$	7	5.818e-162	1.431e-483	3.000
		TM2	4	6.503e-57	1.709e-201	3.653
		TM2N	4	2.180e-61	1.190e-217	3.648
		TM γ , $\gamma = 3$	5	1.181e-109	1.836e-360	3.299
		TM γ , $\gamma = 8$	5	6.586e-99	1.136e-324	3.298
	0.5	Traub	5	1.069e-85	1.994e-256	3.000
		T2, $\delta_1 = -10, \delta_2 = 0.5$	7	9.273e-199	1.229e-593	3.000
		T2, $\delta_1 = -2, \delta_2 = 2$	7	4.681e-178	7.459e-532	3.000
		TM2	4	1.798e-63	7.854e-225	3.652
		TM2N	4	3.510e-62	1.560e-220	3.623
		TM γ , $\gamma = 3$	5	1.964e-91	2.795e-300	3.300
		TM γ , $\gamma = 8$	5	1.299e-94	1.733e-310	3.297
$f_2(x)$	0.4	Traub	6	1.292e-126	6.428e-378	3.000
		T2, $\delta_1 = -10, \delta_2 = 0.5$	8	2.768e-151	9.802e-451	3.000
		T2, $\delta_1 = -2, \delta_2 = 2$	7	2.045e-145	8.987e-434	3.000
		TM2	5	5.585e-168	3.240e-596	3.540
		TM2N	4	1.615e-59	1.316e-209	3.734
		TM γ , $\gamma = 3$	6	9.843e-143	6.297e-469	3.303
		TM γ , $\gamma = 8$	5	5.548e-62	5.487e-202	3.293
	0.8	Traub	6	1.509e-191	1.026e-572	3.000
		T2, $\delta_1 = -10, \delta_2 = 0.5$	7	2.231e-177	5.132e-529	3.000
		T2, $\delta_1 = -2, \delta_2 = 2$	6	1.871e-121	6.883e-362	3.000
		TM2	4	2.646e-57	1.501e-201	3.716
		TM2N	4	9.614e-78	2.611e-274	3.764
		TM γ , $\gamma = 3$	5	1.804e-93	3.166e-306	3.300
		TM γ , $\gamma = 8$	5	3.199e-84	1.963e-275	3.300
$f_3(x)$	-1	Traub	6	1.871e-86	4.484e-257	3.000
		T2, $\delta_1 = -10, \delta_2 = 0.5$	7	5.395e-193	9.219e-576	3.000
		T2, $\delta_1 = -2, \delta_2 = 2$	7	1.014e-75	1.648e-224	3.000
		TM2	5	5.031e-128	6.235e-455	3.590
		TM2N	5	5.751e-134	2.732e-476	3.594
		TM γ , $\gamma = 3$	6	1.141e-113	6.192e-373	3.303
		TM γ , $\gamma = 8$	6	6.095e-114	2.869e-373	3.306
	0.5	Traub	6	4.094e-108	3.311e-322	3.000
		T2, $\delta_1 = -10, \delta_2 = 0.5$	8	6.835e-91	2.287e-269	3.000
		T2, $\delta_1 = -2, \delta_2 = 2$	7	4.344e-182	1.297e-543	3.000
		TM2	5	5.526e-148	1.753e-525	3.570
		TM2N	5	1.492e-150	7.663e-535	3.572
		TM γ , $\gamma = 3$	6	1.078e-186	9.612e-614	3.304
		TM γ , $\gamma = 8$	5	1.618e-70	8.206e-230	3.288

Tabla 4.4: Resultados numéricos para las funciones test

Capítulo 5

Variantes con memoria del método de Traub libres de derivadas

Basado en:

[23] "Stability and applicability of iterative methods with memory", *Journal of Mathematical Chemistry*.

5.1 Introducción

Debido a que no toda función tiene una expresión conocida para su derivada o no es derivable, es conveniente disponer de métodos iterativos libres de derivadas. Por este motivo, en este capítulo se realiza un estudio paralelo al realizado en los Capítulos 3 y 4, pero partiendo de métodos libres de derivadas. Estos métodos también se diseñan a partir del método de Traub, reemplazando las derivadas de la función por operadores de diferencias divididas de primer orden. Asimismo, se utilizan las mismas estrategias para diseñar métodos con memoria, es decir, la inclusión de parámetros aceleradores en los esquemas iterativos para a continuación aproximarlos utilizando polinomios de interpolación lineales y cuadráticos que permiten generar métodos con memoria con órdenes de convergencia superiores.

Siguiendo la estructura del análisis realizado en los Capítulos 3 y 4, el diseño de las nuevas familias iterativas con uno o dos parámetros aceleradores se desarrolla respectivamente en la Secciones 5.2 y 5.3. En cada apartado se consideran aproximaciones de los parámetros dando lugar a diferentes métodos con memoria, cuya mejora en la velocidad de convergencia con respecto a las familias iniciales se analiza por medio del orden de convergencia. A continuación, el estudio de la estabilidad dependiendo de las estimaciones iniciales de todas las clases iterativas consideradas se desarrolla en las Secciones 5.4 y 5.5, donde se utilizan herramientas de dinámica real. La Sección 5.6 está dedicada a comprobar numéricamente la eficiencia de todos los esquemas iterativos presentados en el capítulo para resolver diversos ejemplos de ecuaciones no lineales académicos. A su vez, se comprueban los resultados del análisis de convergencia y estabilidad anteriormente realizados para cada método. Las conclusiones más relevantes del capítulo se resumen en la Sección 5.7.

5.2 Métodos uniparamétricos tipo Traub sin derivadas

La primera modificación que se introduce en el método de Traub (3.1) para generar métodos libres de derivadas es la sustitución de la derivada presente en el denominador por una diferencia dividida de primer orden. Como la presencia de un parámetro hace posible la posterior introducción de memoria, también se incorpora un parámetro en la diferencia dividida, obteniéndose el esquema iterativo

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, v_k]}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f[x_k, v_k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{5.1}$$

siendo $v_k = x_k + \rho f(x_k)$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$. Notemos que los denominadores de los dos pasos del esquema utilizan la misma diferencia dividida. La familia uniparamétrica de métodos iterativos (5.1) se ha denotado por T3. A continuación se realiza un estudio de la convergencia de esta familia.

Teorema 5.1. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Si $\alpha \in I$ es una raíz simple de $f(x) = 0$ y x_0 está suficientemente cerca de α , entonces la sucesión $\{x_k\}$, generada por la familia de métodos T3, converge a α con orden de convergencia 3 para cualquier valor del parámetro ρ , siendo su ecuación del error:

$$e_{k+1} = (1 + \rho f'(\alpha))(2 + \rho f'(\alpha))e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4), \quad (5.2)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{R}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Demostración. Si se utilizan desarrollos de Taylor de la función f en torno a α , se obtiene

$$f(x_k) = f'(\alpha)[e_k + c_2e_k^2 + c_3e_k^3 + c_4e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5). \quad (5.3)$$

Siendo $v_k = x_k + \rho f(x_k)$, el desarrollo de Taylor de f en el punto v_k en torno a α es

$$\begin{aligned} f(v_k) &= f'(\alpha)[(v_k - \alpha) + c_2(v_k - \alpha)^2 + c_3(v_k - \alpha)^3] + \mathcal{O}(e_k^4) \\ &= f'(\alpha)[(1 + \rho f'(\alpha))e_k + (\rho f'(\alpha) + (1 + \rho f'(\alpha))^2)c_2e_k^2 \\ &\quad + (2\rho f'(\alpha)(1 + \rho f'(\alpha))c_2^2 + \rho f'(\alpha)c_3 + (1 + \rho f'(\alpha))^3c_3)e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4). \end{aligned} \quad (5.4)$$

De (5.3) y (5.4), la diferencia dividida de primer orden se expresa como

$$\begin{aligned} f[x_k, v_k] &= \frac{f(x_k) - f(v_k)}{x_k - v_k} \\ &= f'(\alpha)[1 + (2 + \rho f'(\alpha))c_2e_k + (\rho f'(\alpha)c_2^2 + (3 + 3\rho f'(\alpha) + \rho^2 f'(\alpha)^2)c_3)e_k^2 \\ &\quad + (2 + \rho f'(\alpha))(2\rho f'(\alpha)c_2c_3 + (2 + 2\rho f'(\alpha) + \rho^2 f'(\alpha)^2)c_4)e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4), \end{aligned}$$

y por tanto se obtiene para el primer paso del método T3

$$\begin{aligned} y_k - \alpha &= e_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, v_k]} \\ &= (1 + \rho f'(\alpha))c_2e_k^2 + ((2 + 3\rho f'(\alpha) + \rho^2 f'(\alpha)^2)c_3 - (2 + 2\rho f'(\alpha) + \rho^2 f'(\alpha)^2)c_2^2)e_k^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(e_k^4). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Por último, a partir del desarrollo de $f(y_k)$ en torno a α

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\alpha)[(y_k - \alpha) + c_2(y_k - \alpha)^2] + \mathcal{O}(e_k^4) \\ &= f'(\alpha)[(1 + \rho f'(\alpha))c_2e_k^2 + ((2 + 3\rho f'(\alpha) + \rho^2 f'(\alpha)^2)c_3 - (2 + 2\rho f'(\alpha) \\ &\quad + \rho^2 f'(\alpha)^2)c_2^2)e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4), \end{aligned}$$

la ecuación del error es

$$e_{k+1} = y_k - \alpha - \frac{f(y_k)}{f[x_k, v_k]} = (1 + \rho f'(\alpha))(2 + \rho f'(\alpha))e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4).$$

Del término de menor orden de la anterior ecuación, concluimos que la familia de métodos T3 tiene orden de convergencia cúbico para todo valor de ρ . \square

A partir de la ecuación del error (5.2), nótese que si $\rho = -\frac{1}{f'(\alpha)}$ ó $\rho = -\frac{2}{f'(\alpha)}$ entonces el método podría tener orden de convergencia al menos de 4. Como el valor de α no es conocido, es necesario utilizar una aproximación para $f'(\alpha)$. Siguiendo las premisas de los Capítulos 3 y 4, se van a utilizar aproximaciones tanto con polinomios lineales como con polinomios cuadráticos, generando métodos con memoria que permitan incrementar el orden de convergencia sin añadir nuevas evaluaciones funcionales.

En primer lugar, considerando la siguiente aproximación lineal para la derivada de la función en la solución

$$f'(\alpha) \approx f[x_k, x_{k-1}], \quad (5.6)$$

el parámetro ρ se puede aproximar por

$$\rho_k = -\frac{1}{f[x_k, x_{k-1}]}. \quad (5.7)$$

Incluyendo el parámetro ρ_k definido por (5.7) en la estructura iterativa (5.1) se obtiene un esquema iterativo denominado TM3, el cual se trata de un método con memoria obtenido a partir de la clase T3 y con orden de convergencia mayor, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 5.2. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Consideremos $\alpha \in I$ una raíz simple de $f(x) = 0$. Supongamos que las estimaciones iniciales x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α . Entonces, el esquema iterativo con memoria TM3 converge a α con orden de convergencia $p \approx 3.30$ y con ecuación del error*

$$e_{k+1} = c_2^3 e_{k-1} e_k^3 + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}),$$

donde $\mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1})$ denota todos los términos en los que la suma de los exponentes de e_k y e_{k-1} es al menos 4.

Demostración. *Se consideran los siguientes desarrollos de Taylor de f en torno a la solución α en los iterados x_k y x_{k-1} :*

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\alpha)[e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5), \\ f(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1} + c_2 e_{k-1}^2 + c_3 e_{k-1}^3 + c_4 e_{k-1}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1}^5). \end{aligned} \quad (5.8)$$

De (5.8), el parámetro ρ_k se expresa en términos de los errores en las iteraciones k y $k-1$ como

$$\rho_k = -\frac{1}{f[x_k, x_{k-1}]} = -\frac{e_k - e_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

y por tanto

$$v_k - \alpha = e_k + \rho_k f(x_k) = c_2 e_{k-1} e_k + (c_3 - c_2^2)(e_{k-1}^2 e_k + e_{k-1} e_k^2) + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}).$$

Del desarrollo de Taylor de f en v_k

$$f(v_k) = f'(\alpha)[(v_k - \alpha)] + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1})$$

y de (5.8), se tiene la diferencia dividida de primer orden

$$f[x_k, v_k] = f'(\alpha)[1 + c_2 e_k + c_2^2 e_{k-1} e_k + c_2(c_3 - c_2^2) e_{k-1}^2 e_k + c_2(2c_3 - c_2^2) e_{k-1} e_k^2 + c_3 e_k^2 + c_4 e_k^3] + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}), \quad (5.9)$$

obteniéndose para el primer paso del método TM3 la expresión

$$\begin{aligned} y_k - \alpha &= e_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, v_k]} \\ &= c_2^2 e_{k-1} e_k^2 + c_2(c_3 - c_2^2) e_{k-1}^2 e_k^2 + 2c_2(c_3 - c_2^2) e_{k-1} e_k^3 + \mathcal{O}_5(e_k, e_{k-1}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

De las igualdades anteriores y el desarrollo $f(y_k) = f'(\alpha)(y_k - \alpha) + \mathcal{O}_5(e_k, e_{k-1})$, la ecuación del error del método TM3 es

$$e_{k+1} = y_k - \alpha - \frac{f(y_k)}{f[x_k, v_k]} = c_2^3 e_{k-1} e_k^3 + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}).$$

Aplicando el Teorema 2.1, el orden del método TM3 es la única raíz positiva de la siguiente ecuación obtenida del término de menor orden de la ecuación del error:

$$p^2 - 3p - 1 = 0.$$

Entonces, el orden de convergencia del método TM3 es $p = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.30$. □

La aproximación del parámetro (5.7) permite diseñar un método con memoria libre de derivadas de mayor orden que la familia de métodos de partida, sin añadir evaluaciones funcionales adicionales. Además, el orden de TM3 es el mismo que el del método TM1 presentado en el Capítulo 3, el cual es un método con derivadas. Siendo TM3 un esquema libre de derivadas, su aplicabilidad a la resolución de ecuaciones no lineales puede ser mayor frente a otros métodos del mismo orden en los cuales el cálculo de la derivada de la función no lineal es necesario.

El siguiente paso que se realiza es la aproximación del parámetro en términos del polinomio de interpolación de Newton de segundo grado, $N_2(t; x_k, x_{k-1}, y_{k-1}) = N_2(t)$, con el objetivo de lograr un mayor incremento en el orden de convergencia. Este polinomio interpola la función f en los puntos x_k, x_{k-1} e y_{k-1} y se define por medio de la expresión

$$N_2(t) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](t - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, y_{k-1}](t - x_k)(t - x_{k-1}). \quad (5.11)$$

Se utiliza la aproximación

$$f'(\alpha) \approx N_2'(x_k) \quad (5.12)$$

y por tanto el parámetro de aceleración

$$\rho_k = -\frac{1}{N_2'(x_k)}. \quad (5.13)$$

Reemplazando el valor del parámetro ρ por (5.13) en la familia T3 definida en (5.1), el esquema iterativo resultante es un método con memoria denotado TM3N. El orden de convergencia de TM3N es 3.73, como se puede comprobar en el siguiente resultado.

Teorema 5.3. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Si $\alpha \in I$ es una raíz simple de $f(x) = 0$ y las estimaciones iniciales x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α , entonces el método iterativo TM3N converge a α con orden de convergencia $p \approx 3.73$.*

Demostración. *En primer lugar, de la ecuación del error (5.2) se tiene*

$$e_{k+1} \sim (1 + \rho_k f'(\alpha))(2 + \rho_k f'(\alpha))c_2^2 e_k^3, \quad (5.14)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, para todo $k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Denotemos el error en el primer paso del método TM3N con $e_{k,y} = y_k - \alpha$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se consideran los siguientes desarrollos en serie de Taylor de la función f en torno a la solución α :

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\alpha)[e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5), \\ f(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1} + c_2 e_{k-1}^2 + c_3 e_{k-1}^3 + c_4 e_{k-1}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1}^5), \\ f(y_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1,y} + c_2 e_{k-1,y}^2 + c_3 e_{k-1,y}^3 + c_4 e_{k-1,y}^4] + \mathcal{O}(e_{k-1,y}^5). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Entonces, con los anteriores desarrollos el valor de ρ_k dado por (5.13) satisface

$$\begin{aligned} 1 + \rho_k f'(\alpha) &= -c_3 e_{k-1,y} e_{k-1} + 2c_2 e_k + c_3 e_{k-1,y} e_k + c_3 e_{k-1} e_k + (-4c_2^2 + 2c_3) e_k^2 \\ &\quad + \mathcal{O}_3(e_{k-1}, e_{k-1,y}), \end{aligned}$$

y de aquí se cumple la relación

$$1 + \rho_k f'(\alpha) \sim e_{k-1,y}. \quad (5.16)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} (1 + \rho_k f'(\alpha))(2 + \rho_k f'(\alpha)) &= -c_3 e_{k-1,y} e_{k-1} + 2c_2 e_k + c_3 e_{k-1,y} e_k + c_3 e_{k-1} e_k \\ &\quad + 2c_3 e_k^2 + \mathcal{O}_3(e_{k-1}, e_{k-1,y}) \\ &\sim e_{k-1,y}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Siendo $v_k = x_k + \rho_k f(x_k)$, utilizando el desarrollo de Taylor en (5.15) de $f(x_k)$ y el desarrollo

$$f(v_k) = f'(\alpha)[v_k - \alpha + c_2(v_k - \alpha)^2 + \mathcal{O}((v_k - \alpha)^3)],$$

obtenemos para el primer paso del método TM3N

$$e_{k,y} = e_k - \frac{f(x_k)}{f[v_k, x_k]} = (1 + \rho_k f'(\alpha))c_2 e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3) \sim (1 + \rho_k f'(\alpha))c_2 e_k^2.$$

Supongamos que el R-orden del método es al menos p , entonces se satisface

$$e_k \sim D_{k-1,p} e_{k-1}^p, \quad (5.18)$$

$$e_{k+1} \sim D_{k,p} e_k^p \sim D_{k,p} D_{k-1,p}^p e_{k-1}^{p^2} \sim e_{k-1}^{p^2}, \quad (5.19)$$

donde $D_{k,p} \rightarrow D_p$, la constante de error asintótico, cuando $k \rightarrow \infty$.

Asimismo, supongamos que la sucesión $\{y_k\}$ tiene R-orden al menos p_1 , verificando

$$e_{k,y} \sim D_{k,p_1} e_k^{p_1} \quad (5.20)$$

$$\sim D_{k,p_1} (D_{k-1,p} e_{k-1}^p)^{p_1} \sim D_{k,p_1} D_{k-1,p}^{p_1} e_{k-1}^{pp_1}. \quad (5.21)$$

Por un lado, utilizando las relaciones (5.16), (5.18) y (5.20), tenemos

$$e_{k,y} \sim e_{k-1,y} e_k^2 \sim (D_{k-1,p_1} e_{k-1}^{p_1}) (D_{k-1,p} e_{k-1}^p)^2 \sim e_{k-1}^{2p+p_1}. \quad (5.22)$$

Por otro lado, a partir de (5.17) y (5.18), en (5.14) se satisface

$$e_{k+1} \sim e_{k-1,y} e_k^3 \sim e_{k-1}^{3p+p_1}. \quad (5.23)$$

Finalmente, igualando los exponentes de (5.21) y (5.22), y los exponentes de (5.19) y (5.23) se obtiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} pp_1 &= 2p + p_1, \\ p^2 &= 3p + p_1. \end{cases}$$

La única solución positiva del anterior sistema es $p \approx 3.73$, $p_1 \approx 2.73$, siendo entonces el orden de convergencia del método TM3N de 3.73. \square

A la vista de los resultados proporcionados por los Teoremas 5.2 y 5.3, se produce un incremento del orden de convergencia mayor en la familia de métodos T3 considerando el método TM3N, obtenido con aproximaciones cuadráticas del parámetro, frente al método TM3, obtenido con aproximaciones lineales. Este incremento no se produce en los Capítulos 3 y 4 con las familias de métodos T1 y T2, donde las aproximaciones lineales y cuadráticas de los parámetros aceleradores proporcionan métodos que, a pesar de tener mayor estabilidad en el segundo caso, mantienen el mismo orden de convergencia 3.30 y 3.56, respectivamente.

En la siguiente sección se realiza el mismo proceso, pero incluyendo dos parámetros aceleradores sobre un esquema tipo Traub libre de derivadas y analizando la convergencia de los esquemas iterativos resultantes.

5.3 Métodos biparamétricos tipo Traub sin derivadas

A continuación, se realiza el estudio de la convergencia de una familia biparamétrica de métodos iterativos obtenida a partir del esquema (5.1) y por consiguiente, siguiendo también la estructura libre de derivadas del esquema de Traub. De forma análoga al Capítulo 4, seleccionando de manera adecuada los dos parámetros de la familia, se estudian dos métodos con memoria obtenidos a partir de la familia biparamétrica inicial.

La familia de métodos iterativos libre de derivadas sobre la cual se inicia este estudio se obtiene incluyendo parámetros distintos, ρ_1 y ρ_2 , en la diferencia dividida de primer orden que aparece en el denominador de (5.1). Es decir,

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, v_k]}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.24)$$

siendo $v_k = x_k + \rho_1 f(x_k)$ y $w_k = x_k + \rho_2 f(x_k)$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, y no nulos. Se denota a esta familia biparamétrica de esquemas iterativos sin derivadas por T4. El siguiente resultado muestra el orden y la ecuación del error de la familia, siendo su conocimiento la clave para poder diseñar métodos con memoria con orden superior.

Teorema 5.4. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Supongamos que $\alpha \in I$ es una raíz simple de $f(x) = 0$ y x_0 está suficientemente cerca de α . Entonces la familia de métodos iterativos T4 converge a α con orden de convergencia 3 con independencia del valor de los parámetros ρ_1 y ρ_2 , y con ecuación del error*

$$e_{k+1} = (1 + \rho_1 f'(\alpha))(2 + \rho_2 f'(\alpha))c_2^2 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4), \quad (5.25)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Demostración. *A partir de la demostración 5.1, de (5.5) el primer paso del método T4 se puede expresar como*

$$\begin{aligned} y_k - \alpha &= e_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, v_k]} \\ &= (1 + \rho_1 f'(\alpha))c_2 e_k^2 + ((2 + 3\rho_1 f'(\alpha) + \rho_1^2 f'(\alpha)^2)c_3 \\ &\quad - (2 + 2\rho_1 f'(\alpha) + \rho_1^2 f'(\alpha)^2)c_2^2)e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4), \end{aligned} \quad (5.26)$$

y el desarrollo de Taylor de $f(y_k)$ en torno a α como

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\alpha)[(y_k - \alpha) + c_2(y_k - \alpha)^2] + \mathcal{O}(e_k^4) \\ &= f'(\alpha)[(1 + \rho_1 f'(\alpha))c_2 e_k^2 + ((2 + 3\rho_1 f'(\alpha) + \rho_1^2 f'(\alpha)^2)c_3 - (2 + 2\rho_1 f'(\alpha) \\ &\quad + \rho_1^2 f'(\alpha)^2)c_2^2)e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4). \end{aligned}$$

Considerando $w_k = x_k + \rho_2 f(x_k)$, se obtiene el siguiente desarrollo de la diferencia dividida de primer orden presente en el segundo paso del método:

$$\begin{aligned} f[x_k, w_k] &= \frac{f(x_k) - f(w_k)}{x_k - w_k} \\ &= f'(\alpha)[1 + (2 + \rho_2 f'(\alpha))c_2 e_k + (\rho_2 f'(\alpha)c_2^2 + (3 + 3\rho_2 f'(\alpha) + \rho_2^2 f'(\alpha)^2)c_3)e_k^2 \\ &\quad + (2 + \rho_2 f'(\alpha))(2\rho_2 f'(\alpha)c_2 c_3 + (2 + 2\rho_2 f'(\alpha) + \rho_2^2 f'(\alpha)^2)c_4)e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4). \end{aligned}$$

Finalmente, a partir de los desarrollos anteriores, la ecuación del error del método T4 es

$$e_{k+1} = y_k - \alpha - \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]} = (1 + \rho_1 f'(\alpha))(2 + \rho_2 f'(\alpha))c_2^2 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4),$$

siendo el orden de convergencia de la familia de métodos iterativos T4 cúbico para todo valor de ρ_1 y ρ_2 . \square

De nuevo, se mantiene el mismo orden de convergencia cúbico que los métodos de Traub y T3, pero en este caso la presencia de ρ_1 y ρ_2 en la ecuación del error (5.25) ofrece la posibilidad de incrementar este orden. Concretamente, el uso de los parámetros $\rho_1 = -\frac{1}{f'(\alpha)}$ y $\rho_2 = -\frac{2}{f'(\alpha)}$, permite la obtención de un método con orden de convergencia 5. El desconocimiento del valor de α hace necesario el uso de aproximaciones para poder diseñar métodos que se aproximen a este orden.

Siguiendo el mismo proceso que con la familia T3, se propone el uso de aproximaciones para los dos parámetros con polinomios lineales y cuadráticos. En primer lugar, utilizando la aproximación lineal (5.7), se obtienen los parámetros aceleradores

$$\rho_{1,k} = -\frac{1}{f[x_k, x_{k-1}]}, \quad \rho_{2,k} = -\frac{2}{f[x_k, x_{k-1}]}. \quad (5.27)$$

Tras reemplazar los parámetros ρ_1 y ρ_2 del esquema T4 por los parámetros aceleradores $\rho_{1,k}$ y $\rho_{2,k}$, respectivamente, se obtiene un método iterativo con memoria denotado por TM4 que, como se demuestra en el siguiente resultado, permite aumentar el orden de convergencia cúbico de la familia de métodos original.

Teorema 5.5. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Si $\alpha \in I$ es una raíz simple de $f(x) = 0$, y las estimaciones iniciales x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α , la sucesión $\{x_k\}$ de iterados generada por el método iterativo TM4 converge a α con orden de convergencia $p \approx 3.56$, siendo su ecuación del error

$$e_{k+1} = 2c_2^4 e_{k-1}^2 e_k^3 + \mathcal{O}_5(e_k, e_{k-1}),$$

donde el término $\mathcal{O}_5(e_k, e_{k-1})$ denota que la suma de los exponentes de e_k y e_{k-1} es mayor o igual que 5, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Demostración. Siguiendo los desarrollos de la demostración del Teorema 5.2, siendo $\rho_{1,k} = -\frac{1}{f[x_k, x_{k-1}]}$ y $v_k = x_k + \rho_{1,k}f(x_k)$, se obtiene para el primer paso del método TM4 la expresión (5.10).

Análogamente, con $\rho_{2,k} = -\frac{2}{f[x_k, x_{k-1}]}$, se tiene

$$w_k - \alpha = e_k + \rho_{2,k}f(x_k) = -e_k + 2c_2e_{k-1}e_k + 2(c_3 - c_2^2)(e_{k-1}^2e_k + e_{k-1}e_k^2) + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}).$$

Con los desarrollos en serie de Taylor de la función f en torno a α en los puntos x_k y w_k se obtiene la diferencia dividida de primer orden

$$f[x_k, w_k] = f'(\alpha)[1 + 2c_2^2e_{k-1}e_k + 2c_2(c_3 - c_2^2)e_{k-1}^2e_k + c_3e_k^2 - 2c_2^3e_{k-1}e_k^2] + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}).$$

Utilizando los desarrollos mostrados previamente, la ecuación del error resultante es

$$e_{k+1} = y_k - \alpha - \frac{f(y_k)}{f[x_k, w_k]} = 2c_2^4e_{k-1}^2e_k^3 + c_2^2c_3e_{k-1}e_k^4 + \mathcal{O}_6(e_k, e_{k-1}), \quad (5.28)$$

Aplicando el Teorema 2.1, el término de menor orden de (5.28) proporciona el orden de convergencia, dado por la única raíz positiva de la ecuación

$$p^2 - 3p - 2 = 0.$$

Por tanto, el método TM4 tiene orden de convergencia $p \approx 3.56$. □

El orden de convergencia obtenido para el método TM4 es superior al del método TM3, lo cual, junto con los resultados del Capítulo 4, pone de manifiesto que el uso de dos parámetros frente a un parámetro proporciona mejores resultados en la velocidad de convergencia para estas familias basadas en el método de Traub, tanto si tienen o no derivadas en su expresión iterativa.

Al igual que en la sección anterior, en segundo lugar se aproxima el valor de los parámetros utilizando el polinomio de interpolación cuadrático $N_2(t)$ dado por (5.11). En este caso, utilizando los parámetros

$$\rho_{1,k} = -\frac{1}{N_2'(x_k)}, \quad \rho_{2,k} = -\frac{2}{N_2'(x_k)}, \quad (5.29)$$

en el esquema (5.24), se obtiene un método de la familia T4 denotado como TM4N. De nuevo, el esquema diseñado es un método con memoria libre de derivadas y que no utiliza evaluaciones funcionales adicionales. Su orden de convergencia, analizado en el siguiente resultado, también se incrementa con respecto a todos los métodos propuestos tanto en los Capítulos 3 y 4 para métodos con derivadas como en este capítulo.

Teorema 5.6. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I , siendo $\alpha \in I$ una raíz simple de $f(x) = 0$. Supongamos que las estimaciones iniciales x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α . Entonces, el método iterativo con memoria TM4N converge a α con orden de convergencia $p \approx 4.23$.

Demostración. De la ecuación del error (5.25), se satisface la relación

$$e_{k+1} \sim (1 + \rho_{1,k} f'(\alpha))(2 + \rho_{2,k} f'(\alpha)) c_2^2 e_k^3, \quad (5.30)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}$, $j \geq 2$. Siendo $e_{k,y} = y_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, el error en el primer paso del método TM4N, considerando los desarrollos (5.15), con $\rho_{1,k}$ y $\rho_{2,k}$ dados por (5.29), se verifica

$$1 + \rho_{1,k} f'(\alpha) \sim e_{k-1,y} \quad (5.31)$$

y

$$(1 + \rho_{1,k} f'(\alpha))(2 + \rho_{2,k} f'(\alpha)) \sim e_{k-1,y}^2. \quad (5.32)$$

Supongamos que el R-orden del método TMN4 es al menos p , y que la sucesión $\{y_k\}$ converge con R-orden de al menos p_1 . De la demostración del Teorema 5.3 se satisfacen las relaciones:

$$e_k \sim e_{k-1}^p, \quad (5.33)$$

$$e_{k+1} \sim e_{k-1}^{p^2}, \quad (5.34)$$

$$e_{k-1,y} \sim e_{k-1}^{p_1}, \quad (5.35)$$

$$e_{k,y} \sim e_{k-1}^{pp_1}. \quad (5.36)$$

De (5.26), aplicando los resultados (5.31), (5.33) y (5.35), el error en el primer paso del método cumple

$$e_{k,y} = (1 + \rho_{1,k} f'(\alpha)) e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3) \sim e_{k-1,y} e_k^2 \sim e_{k-1}^{p_1+2p}. \quad (5.37)$$

A partir de (5.30) y utilizando las relaciones anteriores, se obtiene

$$e_{k+1} \sim e_{k-1,y}^2 e_k^3 \sim e_{k-1}^{2p_1+3p}. \quad (5.38)$$

Por último, igualando los exponentes de e_{k-1} por una lado en (5.34) y (5.38), y por otro lado en (5.36) y (5.37) el resultado es el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p^2 &= 2p_1 + 3p \\ pp_1 &= p_1 + 2p \end{cases} \quad (5.39)$$

cuya única solución positiva es $p \approx 4.23$, $p_1 \approx 2.62$. Como consecuencia, el orden de convergencia del método TM4N es 4.23. \square

A partir del resultado anterior se puede observar que el incremento del orden de convergencia es notable en comparación al inicial orden cúbico, y sin nuevas evaluaciones funcionales. Por tanto, el uso de memoria sobre los parámetros que componen una familia de esquemas iterativos, y en particular el uso del polinomio de interpolación $N_2(t)$, es una estrategia conveniente que consigue resultados satisfactorios para la aceleración de la convergencia de los métodos obtenidos. Estas conclusiones se observan de forma esquemática en la Tabla 5.1 en la cual se resumen las características fundamentales de cada clase iterativa estudiada en las Secciones 5.2 y 5.3.

Método	T3	TM3	TM3N	T4	TM4	TM4N
Parámetros	ρ	$\#$	$\#$	ρ_1, ρ_2	$\#$	$\#$
Memoria	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Orden	3	3.30	3.73	3	3.56	4.23

Tabla 5.1: Características de los esquemas iterativos del Capítulo 5

En la siguiente sección se realiza el estudio de la estabilidad de los esquemas propuestos en este capítulo, es decir, se estudia la convergencia en función de las estimaciones iniciales tomadas. Para llevar a cabo este análisis, se utilizan las mismas herramientas que en las secciones correspondientes de los Capítulos 3 y 4. Por tanto, se hace uso de herramientas de dinámica real unidimensional y de dinámica real multidimensional.

5.4 Dinámica real biparamétrica de métodos sin memoria

En esta sección, se estudian los operadores racionales obtenidos a partir de los esquemas sin memoria de este capítulo, las familias T3 y T4, cuando son aplicadas sobre polinomios cuadráticos. Este estudio, realizado en términos de dinámica real, permite analizar la convergencia de los métodos en función de las estimaciones iniciales consideradas. También, nos da información cualitativa sobre qué parámetros dan lugar a los miembros más estables de cada clase iterativa.

5.4.1 Dinámica real de la familia de métodos T3

El operador racional de punto fijo obtenido tras aplicar la familia de métodos T3 sobre el polinomio $p_c(x) = x^2 + c$ es

$$M_c(x) = -\frac{(c+x^2)^2(c\rho^2+(\rho x+1)^2)}{(c\rho+x(\rho x+2))^3} - \frac{c+x^2}{c\rho+x(\rho x+2)} + x.$$

El número de puntos fijos que tiene el operador se resume en el siguiente resultado.

Proposición 5.1. *Los puntos fijos del operador M_c son las raíces del polinomio $p_c(x)$, denotadas $x_1^F(x) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^F(c) = \sqrt{-c}$, cuando $c \leq 0$, siendo puntos superatractores. Además, el operador tiene cuatro puntos fijos extraños, $x_{3-6}^F(c, \rho)$, correspondientes a las raíces reales del polinomio*

$$P_4(x) = 2\rho^2x^4 + 6\rho x^3 + (5 + 4c\rho^2)x^2 + 6c\rho x + 2c^2\rho^2 + c,$$

y son puntos repulsores.

Demostración. Los puntos fijos reales del operador son las soluciones reales de la ecuación $M_c(x) = x$, es decir, los puntos que satisfacen

$$-\frac{(c+x^2)^2(c\rho^2+(\rho x+1)^2)}{(c\rho+x(\rho x+2))^3} - \frac{c+x^2}{c\rho+x(\rho x+2)} = 0,$$

y por tanto,

$$-\frac{(c+x^2)}{c\rho+x(\rho x+2)} \left(\frac{(c+x^2)(c\rho^2+(\rho x+1)^2)}{(c\rho+x(\rho x+2))^2} + 1 \right) = 0.$$

Del producto anterior, es inmediato que los puntos fijos son solución de las ecuaciones $c+x^2=0$ ó

$$\frac{(c+x^2)(c\rho^2+(\rho x+1)^2)}{(c\rho+x(\rho x+2))^2} + 1 = 0. \quad (5.40)$$

De la igualdad $x^2+c=0$ se obtiene que las raíces del polinomio $p_c(x)$, es decir $\pm\sqrt{-c}$, son puntos fijos de M_c . Y desarrollando (5.40), se obtiene la ecuación

$$2\rho^2x^4 + 6\rho x^3 + (5+4c\rho^2)x^2 + 6c\rho x + 2c^2\rho^2 + c = 0,$$

cuyas soluciones son los cuatro puntos fijos extraños del operador.

Por otro lado, en la derivada del operador

$$M'_c(x) = \frac{(c+x^2)^2(\rho^4x^4 + 8\rho^3x^3 + (18\rho^2+2c\rho^4)x^2 + (18\rho+8c\rho^3)x + c^2\rho^4 + 6c\rho^2 + 6)}{(c\rho+\rho x^2+2x)^4}, \quad (5.41)$$

aparece de nuevo el producto del término x^2+c . Es inmediato que $M_c(\pm\sqrt{-c})=0$, y por tanto, las raíces de $p_c(x)$ son puntos fijos del operador con comportamiento asintótico superatractor.

Para analizar el comportamiento asintótico de los puntos fijos extraños en función del valor de $|M'_c(x)|$ para cada punto y cada par de parámetros c y ρ , se utilizan los planos de estabilidad. En la Figura 5.1 se muestran los planos de estabilidad asociados a $x_{3-6}^F(c, \rho)$. Su implementación, utilizando Matlab R2018b, se ha realizado utilizando un malla de 500×500 puntos para valores de los parámetros en $(c, \rho) \in [-30, 30] \times [-30, 30]$. En el plano de estabilidad asociado a cada punto fijos extraño, se representan en negro las regiones en las cuales el punto tiene un comportamiento atractor, y en blanco cuando el comportamiento es repulsor. Respectivamente, cuando $|M'_c(x)| > 1$ ó $|M'_c(x)| < 1$. Las regiones marcadas en gris denotan puntos en el dominio complejo, siendo puntos que no se incluyen en el estudio dinámico real.

En la Figura 5.1 se observa que los puntos fijos extraños siempre son repulsores en las regiones en las cuales toman valores reales.

□

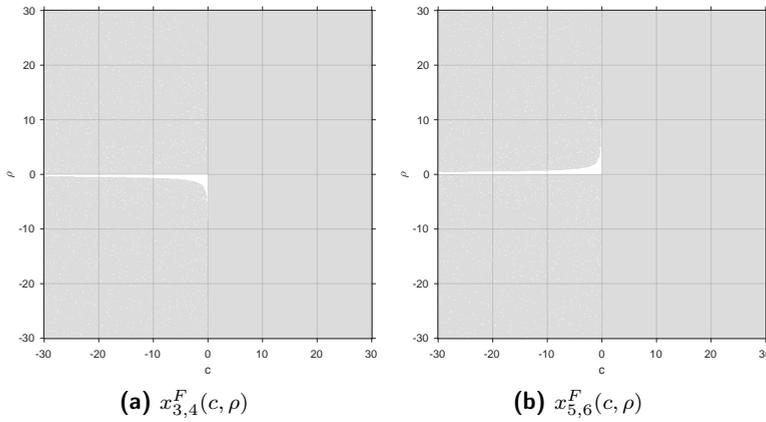


Figura 5.1: Planos de estabilidad de los puntos fijos extraños de M_c

La Figura 5.1 muestra la estabilidad de la familia de métodos T3, ya que los únicos puntos que tienen un comportamiento atractor son las raíces de $p_c(x)$. No obstante, el estudio de las cuencas de atracción a las cuales pertenecen los puntos críticos del operador racional también es necesario. Los puntos críticos de M_c se calculan a partir de su derivada, resolviendo la ecuación $M'_c(x) = 0$.

Proposición 5.2. *Los puntos críticos de operador M_c son las raíces de $x_1^C(x) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^C(c) = \sqrt{-c}$, para $c \leq 0$, y los puntos críticos libres $x_{3-6}^C(c, \rho)$, raíces del polinomio*

$$Q_4(x) = \rho^4 x^4 + 8\rho^3 x^3 + (18\rho^2 + 2c\rho^4)x^2 + (18\rho + 8c\rho^3)x + c^2\rho^4 + 6c\rho^2 + 6.$$

De la expresión de la derivada (5.41) es inmediato que los puntos críticos son las raíces de $p_c(x)$. Los puntos críticos libres son las raíces del término de grado cuatro presente en el numerador de M'_c .

Para cada punto crítico libre, se ha representado en la Figura 5.2 el plano de parámetros asociado. Estos planos representan la convergencia de la clase T3 para un mallado de 500×500 puntos en $(c, \rho) \in [-5, 5] \times [-5, 5]$, de forma que cada punto del plano corresponde a un método de la familia de esquemas iterativos T3. Tomando en cada plano como estimación inicial del método asociado a cada par (c, ρ) uno de los puntos críticos libres del operador, se representa en rojo la convergencia a cualquiera de los puntos fijos $x_{1,2}^F(c)$. El punto del plano se representa en negro cuando el método no converge a ningún punto fijo, determinando de esta forma los miembros de la familia T3 con menor estabilidad. Los puntos en gris indican valores de los parámetros para los cuales los puntos críticos son complejos y no se incluyen en este estudio.

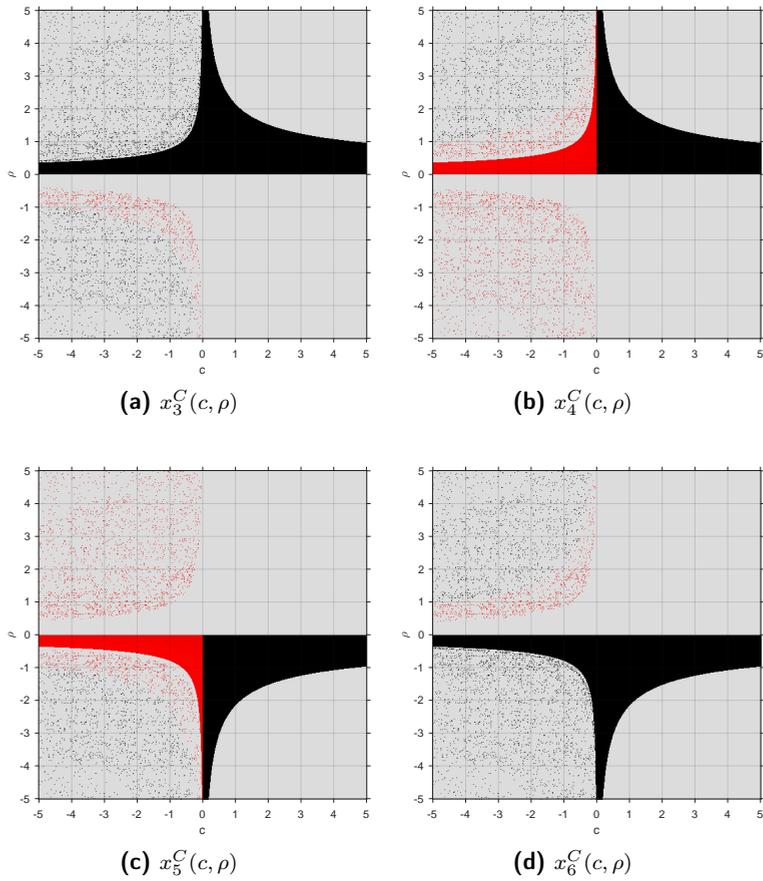


Figura 5.2: Planos de parámetros de M_c para los puntos críticos $x_{3-6}^C(c, \rho)$

Se observa en la Figura 5.2 que los valores de c y ρ que proporcionan los métodos de T3 con mejor estabilidad (representados en rojo) son los próximos al eje de ordenadas para valores de c negativos. Este resultado coincide con los planos de estabilidad (Figura 5.1) y los resultados de la Proposición 5.1, ya que únicamente existen puntos fijos atractores cuando $c \leq 0$.

A partir de la información proporcionada en las Figuras 5.1 y 5.2, se han seleccionado pares de valores de c y ρ para representar las cuencas de atracción de los puntos fijos de diferentes métodos de la clase T3. Las rectas dinámicas de la Figura 5.3 muestran, para un rango de 500 estimaciones iniciales en $[-30, 30]$, las cuencas de atracción de $x_1^F(c)$ (en naranja) y $x_2^F(c)$ (en azul) de los métodos seleccionados. En negro se representa la cuenca de atracción del infinito, y por tanto, las estimaciones iniciales divergentes.

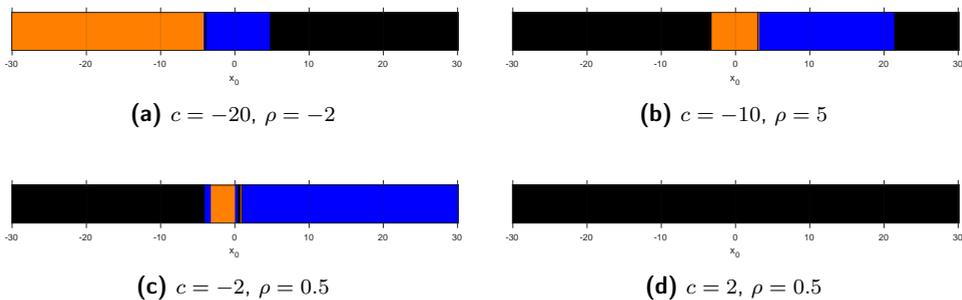


Figura 5.3: Rectas dinámicas del método T3 sobre $p_c(x) = x^2 + c$ para distintos valores de c y ρ

Las rectas dinámicas de la Figura 5.3 muestran el comportamiento esperado, ya que para valores de $c > 0$ (Figura 5.3(d)) no existen puntos fijos reales y por tanto, tampoco existen cuencas de atracción. En las demás rectas dinámicas se observa que, para valores de ρ más próximos al eje de ordenadas, las cuencas de atracción de los puntos fijos son mayores (Figuras 5.3(a) y 5.3(c)). Este resultado se corresponde con las regiones en rojo representadas en la Figura 5.2.

5.4.2 Dinámica real de T4

A continuación se realiza el estudio de la estabilidad de la clase de métodos iterativos T4 sobre polinomios cuadráticos. Análogamente al estudio dinámico del método T2 realizado en el Capítulo 4, debido a la presencia de dos parámetros en la estructura iterativa de T4, es conveniente adaptar el estudio sobre la familia de polinomios $p_c(x)$ al estudio de la base de polinomios $\{p_+(x) = x^2 + 1, p_-(x) = x^2 - 1, p_0(x) = x^2\}$, obteniendo un estudio análogo también biparamétrico. De esta forma se pueden utilizar las mismas herramientas que en la familia T3 para realizar el análisis dinámico, siendo la comparativa entre ambos esquemas más directa.

Dinámica real de la familia T4 sobre $p_+(x) = x^2 + 1$

Tras aplicar el esquema iterativo que define la familia T4 sobre el polinomio $p_+(x) = x^2 + 1$, se obtiene el operador racional

$$M_+(x) = -\frac{\left(x - \frac{x^2+1}{\rho_1+\rho_1x^2+2x}\right)^2 + 1}{\rho_2 + \rho_2x^2 + 2x} - \frac{x^2 + 1}{\rho_1x^2 + \rho_1 + 2x} + x,$$

siendo ρ_1 y ρ_2 dos parámetros reales. Notar que se obtiene la misma expresión para el operador M_+ y el operador (4.21) correspondiente a la familia de métodos T2 sobre el polinomio $p_+(x)$. Por tanto, con el correspondiente cambio de parámetros δ_1 y δ_2 por ρ_1 y ρ_2 , el estudio dinámico es completamente análogo. Recordemos que los únicos puntos fijos obtenidos son puntos fijos

extraños, raíces reales del polinomio

$$P_4^+(x) = (\rho_1^2 + \rho_1\rho_2)x^4 + (4\rho_1 + 2\rho_2)x^3 + (5 + 2\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2)x^2 + (4\rho_1 + 2\rho_2)x + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2 + 1.$$

Dinámica real de la familia T4 sobre $p_-(x) = x^2 - 1$

El operador resultante de aplicar la clase iterativa T4 sobre el polinomio $p_-(x) = x^2 - 1$ está dado por

$$M_-(x) = -\frac{\left(x - \frac{x^2-1}{\rho_1(x^2-1)+2x}\right)^2 - 1}{\rho_2(x^2-1) + 2x} - \frac{x^2-1}{\rho_1(x^2-1) + 2x} + x.$$

La función de punto fijo obtenida para la clase iterativa T4 sobre el polinomio $p_-(x)$ es la misma que la obtenida en (4.22) para la familia T2. Se obtienen los mismos resultados dinámicos, siendo los puntos fijos del operador las raíces del polinomio $p_-(x)$ y los puntos fijos extraños las raíces reales del polinomio

$$P_4^-(x) = (\rho_1^2 + \rho_1\rho_2)x^4 + (4\rho_1 + 2\rho_2)x^3 + (5 - 2\rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2)x^2 + (-4\rho_1 - 2\rho_2)x + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2 - 1.$$

Dinámica real de la familia T4 sobre $p_0(x) = x^2$

El operador de punto fijo asociado a la familia de métodos iterativos T4 aplicada sobre el polinomio $p_0(x) = x^2$ es la función racional

$$M_0(x) = \frac{x(\rho_1x + 1)(\rho_1\rho_2x^2 + x(\rho_1 + 2\rho_2) + 3)}{(\rho_1x + 2)^2(\rho_2x + 2)},$$

que depende de los parámetros ρ_1 y ρ_2 del esquema iterativo. Al igual que con los polinomios $p_+(x)$ y $p_-(x)$, el operador asociado al polinomio $p_0(x)$ es el mismo que el obtenido en (4.23) para la familia iterativa T2. De nuevo, el estudio dinámico de la estabilidad de M_0 coincide con el de R_0 por lo que no se muestra su desarrollo.

5.5 Dinámica real multidimensional de métodos con memoria

En este apartado, se realiza un estudio de la dinámica real asociada a los métodos con memoria presentados a lo largo del capítulo, estudiando los operadores obtenidos tras aplicar los métodos sobre la familia de polinomios $p_c(x)$. Por tratarse de métodos con memoria, se obtienen funciones de punto fijo multidimensionales debido a la dependencia tanto de la iteración k -ésima, denotada $x = x_k$, como de la iteración $(k-1)$ -ésima, con la notación $z = x_{k-1}$.

5.5.1 Dinámica real de los métodos TM3 y TM4

Cuando el método TM3 se aplica sobre la familia de polinomios $p_c(x) = x^2 + c$, se obtiene el operador racional definido de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2

$$\mathbf{T}_{1,c}(z, x) = \left(x, \frac{1}{(c - x(x + 2z))^3} \left(c^3(3x + 2z) + c^2(-2x^3 - 9x^2z - 3xz^2 + z^3) + 3cx^2(x^3 + 4x^2z + 6xz^2 + 2z^3) + x^4(-z)(x^2 + 3xz + 3z^2) \right) \right).$$

El cálculo de los puntos fijos de $\mathbf{T}_{1,c}$ se realiza resolviendo las ecuaciones $z = x$ y $\mathbf{T}_{1,c}(z, x) = (z, x)$. El resultado obtenido se desarrolla a continuación.

Proposición 5.3. *Los puntos fijos del operador $\mathbf{T}_{1,c}$ son $\mathbf{x}_1^F(c) = (-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c})$ y $\mathbf{x}_2^F(c) = (\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$, cuando $c \leq 0$ y el punto fijo extraño $\mathbf{x}_3^F = (0, 0)$. El comportamiento asintótico de $\mathbf{x}_{1,2}^F(c)$ es atractor, mientras que \mathbf{x}_3^F es un punto de silla.*

Demostración. *En primer lugar, con la condición $z = x$, el operador se reduce a*

$$\mathbf{T}_{1,c}(x, x) = \left(x, \frac{5c^3x - 13c^2x^3 + 39cx^5 - 7x^7}{(c - 3x^2)^3} \right),$$

por lo que los puntos fijos del operador se obtienen resolviendo la ecuación

$$\frac{5c^3x - 13c^2x^3 + 39cx^5 - 7x^7}{(c - 3x^2)^3} = x. \quad (5.42)$$

Las soluciones de (5.42) son los puntos $\pm\sqrt{-c}$, $\pm\sqrt{\frac{c}{3}(1 \pm 2i)}$ y 0. Considerando de este conjunto de soluciones solo las que son reales, los puntos fijos de $\mathbf{T}_{1,c}(z, x)$ son $\mathbf{x}_1^F(c) = (-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c})$ y $\mathbf{x}_2^F(c) = (\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$, cuando $c \leq 0$, y el punto fijo extraño $\mathbf{x}_3^F = (0, 0)$.

Consideremos la matriz Jacobiana $\mathbf{T}'_{1,c}$ del operador

$$\mathbf{T}'_{1,c}(z, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(c+x^2)^3(2c+x^2+2xz+3z^2)}{(c-x(x+2z))^4} & \frac{3(c+x^2)^2(c^2+c(x^2+2xz+3z^2)+z^2(x^2+2xz+2z^2))}{(c-x(x+2z))^4} \end{pmatrix}.$$

Como la matriz Jacobiana evaluada en los puntos fijos,

$$\mathbf{T}'_{1,c}(-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c}) = \mathbf{T}'_{1,c}(\sqrt{-c}, \sqrt{-c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tiene valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, por el Teorema 2.5, $\mathbf{x}_{1,2}^F(c)$ son atractores. Por otro lado, la matriz Jacobiana asociada al punto fijo extraño \mathbf{x}_3^F ,

$$\mathbf{T}'_{1,c}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

tiene valores propios $\lambda_1 = 3.56155$ y $\lambda_2 = -0.561553$. Por tanto, x_3^F es un punto de silla. \square

Las cuencas de atracción de los puntos fijos de un operador se representan gráficamente por medio de los planos dinámicos. Como el operador $T_{1,c}$ depende del parámetro c , se obtiene un plano dinámico distinto para cada valor de c . Tras seleccionar este valor y tomando un malla de 500×500 iterados iniciales en $(x, z) \in [-30, 30] \times [-30, 30]$, representados en los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente, se estudia la convergencia de la órbita de cada estimación inicial. Se establece la convergencia a los puntos fijos con una tolerancia de 10^{-3} y un máximo de 50 iteraciones. Los planos dinámicos de la Figura 5.4 se han representado siguiendo los criterios descritos, y representan la cuenca de atracción de $x_1^F(c)$, $x_2^F(c)$ y x_3^F respectivamente en naranja, azul y verde. Los puntos fijos se han representado con estrellas blancas, y el punto fijo extraño con un cuadrado blanco. Cuando una estimación inicial no converge a ninguno de los puntos fijos, se representa en negro.

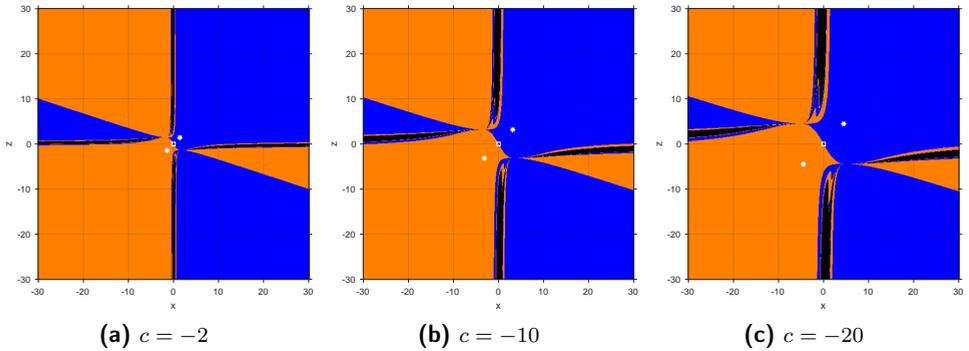


Figura 5.4: Planos dinámicos de $T_{1,c}(z, x)$ para diferentes valores de c

En la Figura 5.4 se observan los planos dinámicos de TM3 asociados a valores de c negativos (cuando $c > 0$ el operador solo tiene un punto fijo extraño y el plano dinámico es completamente negro). Éstos muestran que el método TM3 tiene un comportamiento dinámico estable. Este argumento se justifica por la inexistencia de una cuenca de atracción del punto de silla x_3^F , lo cual indica que se comporta como un punto repulsor, y las estimaciones iniciales convergentes pertenecen a una de las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores del operador. Sin embargo, existen algunas regiones próximas a los ejes del plano representadas en negro, indicando que existen estimaciones iniciales cuya órbita es divergente. Estas regiones de divergencia se expanden a medida que el valor de c disminuye.

Considerando el método TM4, el esquema con memoria obtenido con la aproximación lineal de los parámetros de la familia T4, la función de punto fijo bidimensional obtenida cuando se aplica

sobre el polinomio $p_c(x)$ es la siguiente:

$$\mathbf{T}_{2,c}(z, x) = \left(x, \frac{2x(2c^3 + c^2(z^2 - 6x^2) + 2cx^2(3x^2 + z^2) - 3x^4z^2 + 2x^2z^4)}{(c - 3x^2)^2(c - x^2)} \right).$$

Notemos que el operador $\mathbf{T}_{2,c}$ es el mismo que el operador (4.26) asociado al método TM2, motivo por el cual el estudio dinámico realizado en el Capítulo 4 para el método TM2 es análogo para el método TM4.

Se obtienen los mismos puntos fijos que los descritos en la Proposición 5.3 para el esquema TM3, es decir, $\mathbf{x}_1^F(c) = (-\sqrt{-c}, -\sqrt{-c})$ y $\mathbf{x}_2^F(c) = (\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ para $c \leq 0$, y el punto fijo extraño $\mathbf{x}_3^F = (0, 0)$. No obstante, en los planos dinámicos existen diferencias en comparación con los resultados obtenidos para el método TM3. Aunque el punto fijo extraño tiene un comportamiento repulsor en ambos casos, en la Figura 4.16 se observan planos dinámicos con amplias regiones de divergencia, mientras que en la Figura 5.4 estas regiones se han reducido notablemente. Por tanto, considerando las familias tipo Traub analizadas en estos capítulos, el diseño de esquemas con memoria libres de derivadas proporciona métodos con mayor estabilidad que aquellos en los cuales intervienen las derivadas de la función no lineal.

5.5.2 Dinámica real de los métodos TM3N y TM4N

Al igual que en los Capítulos 3 y 4 con los métodos TM1N y TM2N, respectivamente, para poder realizar el estudio dinámico de los métodos con memoria TM3N y TM4N, es necesario definir el operador de tres dimensiones $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forma

$$\Phi(x_{k-1}, y_{k-1}, x_k) = (x_k, y_k, x_{k+1}) = (x_k, y_k, \phi(x_{k-1}, y_{k-1}, x_k)),$$

donde ϕ es la función de punto fijo de los métodos TM3N y TM4N, y x_0, y_0 y x_1 son las estimaciones iniciales.

Denotando $x = x_k, z = x_{k-1}, xy = y_k$ y $zy = y_{k-1}$, para todo k , el operador de punto fijo multidimensional resultante tras aplicar el método TM3N sobre la familia de polinomios $p_c(x) = x^2 + c$ es

$$\Psi_{1,c}(z, zy, x) = \left(x, xy, \frac{5c^3x - 13c^2x^3 + 39cx^5 - 7x^7}{(c - 3x^2)^3} \right).$$

Para calcular de los puntos fijos, se resuelven las ecuaciones

$$z = zy = x, \quad x = \phi(z, zy, z), \tag{5.43}$$

por lo que el cálculo de los puntos fijos de $\Psi_{1,c}$ queda reducido al cálculo de los puntos fijos del operador unidimensional $\tilde{\Psi}_{1,c}$:

$$[\Psi_{1,c}(z, zy, x)]_{|z=zy=x} = \tilde{\Psi}_{1,c}(x) = \frac{5c^3x - 13c^2x^3 + 39cx^5 - 7x^7}{(c - 3x^2)^3}.$$

Proposición 5.4. *Los puntos fijos del operador unidimensional $\tilde{\Psi}_{1,c}(x)$ son las raíces de $p_c(x)$, $x_1^F(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^F(c) = \sqrt{-c}$, cuando $c \leq 0$, con comportamiento superatractor, y el punto fijo extraño repulsor $x_3^F = 0$.*

Demostración. *Los puntos fijos se calculan resolviendo la ecuación $\tilde{\Psi}_{1,c}(x) = x$. Se obtiene la misma ecuación que en (5.42) por lo que los puntos fijos del operador son $x_1^F(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^F(c) = \sqrt{-c}$, para $c \leq 0$, y $x_3^F = 0$, siendo un punto fijo repulsor.*

Siendo la matriz Jacobiana del operador multidimensional de la forma

$$\Psi'_{1,c}(z, zy, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Psi}'_{1,c}(x) \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

donde

$$\tilde{\Psi}'_{1,c}(x) = \frac{(c + x^2)^3 (5c + 21x^2)}{(c - 3x^2)^4}, \quad (5.45)$$

la estabilidad de los puntos fijos depende del valor que tome $|\tilde{\Psi}'_{1,c}(x)|$. Por tanto, se obtiene que $|\tilde{\Psi}'_{1,c}(x_{1,2}^F(c))| = 0$, siendo los puntos fijos superatractores, mientras que $|\tilde{\Psi}'_{1,c}(x_3^F)| = 5$, y entonces el punto fijo extraño es repulsor. \square

Los puntos críticos del operador multidimensional se calculan a partir de (5.44), siendo por tanto las raíces de $\tilde{\Psi}'_{1,c}(x)$.

Proposición 5.5. *Los puntos críticos del operador $\tilde{\Psi}'_{1,c}$ son las raíces de $p_c(x)$, $x_1^C(c) = -\sqrt{-c}$ y $x_2^C(c) = \sqrt{-c}$, cuando $c \leq 0$, y los puntos críticos libres $x_3^C(c) = -\sqrt{\frac{-5c}{21}}$ y $x_4^C(c) = \sqrt{\frac{-5c}{21}}$, cuando $c < 0$.*

La prueba de este resultado es directa de (5.45) con el cálculo de las raíces de los polinomios $x^2 + c$ y $5c + 21x^2$ por lo que se omite su desarrollo.

El estado avanzado de las órbitas de los puntos fijos se ha representado en los diagramas de bifurcación de la Figura 5.5. Se observa el comportamiento atractor de los puntos fijos $x_{1,2}^F(c)$ ya que si se toman como estimación inicial con una pequeña perturbación, las órbitas para todo valor de $c < 0$ convergen a dichos puntos fijos. Sucede el mismo comportamiento en la Figura 5.5(b), en cuyo caso el punto fijo extraño es repulsor y, tomándose como iterado inicial con una pequeña perturbación, todas las órbitas convergen a los puntos fijos del método.

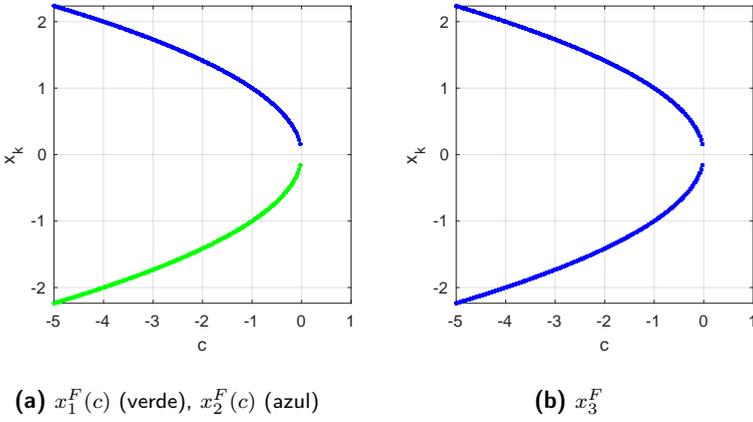


Figura 5.5: Diagramas de bifurcación de los puntos fijos de $\tilde{\Psi}_{1,c}$

Como el operador $\tilde{\Psi}_{1,c}$ depende del parámetro c , su estabilidad queda determinada en función del valor de este parámetro. Las rectas de parámetros, generadas tomando como estimación inicial un punto crítico libre, permiten determinar los valores de los parámetros que dan lugar a los métodos más estables. Tomando 500 puntos de valores de c en el intervalo $[-5, 5]$, en la Figura 5.6 se ha representado la recta de parámetros asociada a los dos puntos críticos libres del operador. Se indica en rojo la convergencia a alguno de los puntos fijos $x_{1,2}^F(c)$ tomando como estimación inicial el punto crítico libre para cada punto c de la recta. En gris se han denotado los valores complejos, quedando fuera de este estudio. Como se observa, para todo valor de $c < 0$ y tomando como estimación inicial cualquiera de los dos puntos críticos libres, existe convergencia a uno de los dos puntos fijos.

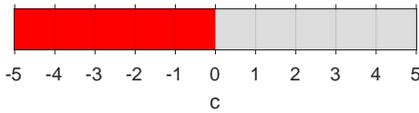


Figura 5.6: Recta de parámetros de $\tilde{\Psi}_{1,c}$ asociada a los puntos críticos libres $x_{1,2}^C(c)$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la recta de parámetros (Figura 5.6), se han seleccionado valores de c para generar las rectas dinámicas asociadas. En la Figura 5.7 se muestran las rectas dinámicas obtenidas para el método TM3N cuando se aplica sobre el polinomio $p_c(x)$ para valores de c positivos y negativos. Los criterios de convergencia utilizados y la notación de colores para las cuencas de atracción son los mismos que en los planos dinámicos de la Figura

5.4, y el conjunto de estimaciones iniciales se ha tomado de un malla de 500 puntos en el intervalo $[-30, 30]$.

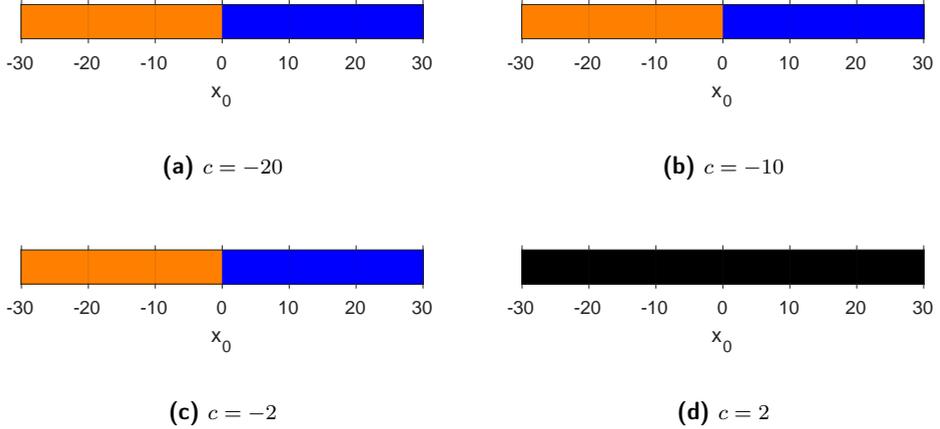


Figura 5.7: Rectas dinámicas de $\tilde{\Psi}_{1,c}$ para distintos valores de c

En la Figura 5.7 se observa la estabilidad que tienen el método TM3N para valores de c negativos, ya que toda estimación inicial representada en las rectas converge a uno de los dos puntos fijos atractores. Los resultados obtenidos en la Figura 5.7(d) también coinciden con el estudio realizado, ya que para valores de $c > 0$ el operador no tiene puntos fijos atractores, siendo el único punto fijo x_3^F , el cual es un punto fijo extraño repulsor.

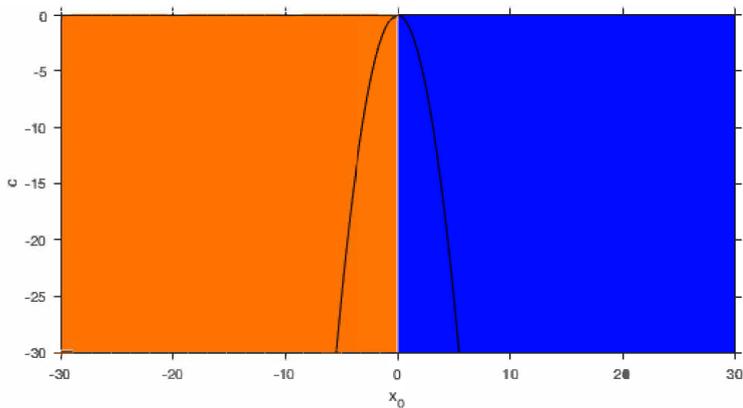


Figura 5.8: Plano de convergencia de $\tilde{\Psi}_{1,c}$

La información proporcionada por las rectas dinámicas se puede resumir en una única representación gráfica por medio del plano de convergencia. La Figura 5.8 corresponde al plano de convergencia del método TM3N aplicado a la familia de polinomios $p_c(x)$ para los valores $c \in [-30, 0]$ y estimaciones iniciales $x_0 \in [-30, 30]$. También se ha representado con líneas negras el valor de los puntos fijos para cada c , y en blanco el punto fijo extraño. Se observa que todo valor de $c < 0$ da lugar a las mismas cuencas de convergencia de los dos puntos fijos atractores que las mostradas en las rectas dinámicas de la Figura 5.7 para valores de c concretos, dividiendo de forma simétrica el plano de convergencia para todo valor del parámetro.

Finalmente, se estudia la dinámica real asociada al método TM4N sobre la familia de polinomios $p_c(x)$. Cuando el esquema iterativo que define el método se aplica sobre $p_c(x)$, el operador de punto fijo multidimensional obtenido es

$$\Psi_{2,c}(z, zy, x) = \left(x, xy, -\frac{2x(-2c^3 + 5c^2x^2 - 8cx^4 + x^6)}{(c - 3x^2)^2(c - x^2)} \right).$$

Notemos que se obtiene el mismo operador que para el método TM2N analizado en el Capítulo 4, definido por (4.28). Como consecuencia, ambos métodos tienen las mismas características dinámicas y propiedades de estabilidad. No obstante, se ha demostrado de forma teórica en la Sección 5.3 que el método TM4N tiene orden de convergencia 4.23, mientras que el método TM2N tiene orden 3.56 (Teorema 4.2). Por tanto, aunque el comportamiento dinámico es el mismo, existe una diferencia notable en la velocidad de convergencia de los métodos a favor del método TM4N.

Por otro lado, los puntos fijos y fijos extraños de los métodos TM3N y TM4N son los mismos. Además, se han obtenido los mismos resultados en los diagramas de bifurcación (Figuras 4.17 y 5.5), en las rectas dinámicas representadas (Figuras 4.18 y 5.7) y también en los planos de convergencia asociados a los dos métodos (Figuras 4.19 y 5.8). Únicamente existen diferencias entre ambos métodos en la expresión de los puntos críticos libres, ya que el método TM3N tiene puntos críticos libres para valores de $c < 0$ (Proposición 5.5), mientras que el método TM4N solo cuando $c > 0$ (Proposición 4.6), motivo por el cual no se han representado las rectas de parámetros correspondientes. Se puede afirmar que los métodos TM3N y TM4N, además de ser los métodos con mayor orden de convergencia de entre todos los diseñados en los Capítulos 3, 4 y 5, tienen una gran estabilidad en función de las estimaciones iniciales. En la siguiente sección se verifican de forma numérica todos los resultados teóricos obtenidos en este capítulo para comprobar que los métodos y familias de métodos presentados tienen un buen funcionamiento.

5.6 Resultados numéricos

Con el objetivo de comprobar el funcionamiento de las clases iterativas diseñadas en este capítulo, se consideran las funciones test no lineales

- $f_1(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$, $\alpha \approx 1.895494$,

- $f_2(x) = (x - 1)^3 - 1$, $\alpha = 2$,
- $f_3(x) = e^{-x} + \cos(x)$, $\alpha \approx 1.746140$,
- $f_4(x) = xe^{x^2} - \sin(x^2) + 3 \cos(x) + 5$, $\alpha \approx -1.207648$,

donde α denota una raíz simple de cada función. En esta sección, se utilizan los métodos propuestos con y sin memoria para calcular una aproximación a la solución de $f_{1-4}(x)$, analizando los resultados obtenidos para cada ejemplo tomando estimaciones iniciales diferentes lo suficientemente cerca de la solución. Las Tablas 5.2-5.5 muestran los resultados obtenidos para cada método.

Entre los esquemas iterativos estudiados a lo largo del capítulo existen métodos sin memoria y métodos con memoria. En estos últimos se necesitan dos estimaciones, x_0 y x_1 , para iniciar el proceso iterativo, mientras que para los primeros únicamente x_0 . El criterio seguido en todos los métodos de los ejemplos desarrollados es la selección de la estimación inicial x_0 , y para los métodos con memoria también se utiliza un segundo iterado obtenido a partir del primero con una pequeña perturbación, es decir, se utiliza una estimación $x_1 = x_0 + 0.1$.

Como las familias de métodos T3 y T4 dependen de uno y dos parámetros, respectivamente, es necesario fijar valores de estos parámetros para trabajar con métodos concretos de las familias. Por un lado, siguiendo el análisis dinámico realizado en el capítulo, para la clase T3 se han seleccionado los valores $\rho = 0.5$ y $\rho = -2$, por ser los valores que en las rectas dinámicas de la Figura 5.3 dan lugar a las cuencas de atracción de los puntos fijos más grandes. Por otro lado, como el comportamiento dinámico de la clase T4 es el mismo que el de la clase T2 estudiado en el Capítulo 4 de esta memoria, se han seleccionado como valores estables de los parámetros los mismos que los considerados para la implementación numérica de T2. Por tanto, tomamos los valores $\rho_1 = -10$ y $\rho_2 = 0.5$, y los valores $\rho_1 = -2$ y $\rho_2 = 2$.

Los resultados numéricos que se muestran en las Tablas 5.2-5.5 se han realizado en Matlab R2018b utilizando variable de precisión aritmética con 2000 dígitos de mantisa. Tomando una estimación inicial x_0 , se itera cada método hasta que $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-200}$ o $|f(x_{k+1})| < 10^{-200}$, para un máximo de 50 iteraciones, en cuyo caso se considera que el método no converge a la solución del problema, y se indica con "-".

Para cada método iterativo y cada función de prueba, en las Tablas 5.2-5.5 se muestran todos estos valores junto con el orden de convergencia computacional aproximado (ACOC [44]).

Los resultados obtenidos en la Tablas 5.2 y 5.4 son similares. Todos los métodos necesitan pocas iteraciones para aproximar la solución de la función, y además con una gran precisión (ver valores de la columna $|f(x_{k+1})|$). Además, los esquemas con memoria (métodos TM3, TM3N, TM4 y TM4N) requieren de menos iteraciones que los que únicamente utilizan la iteración actual.

Considerando la función test $f_2(x)$ (Tabla 5.3) los resultados obtenidos son ligeramente distintos a los obtenidos para $f_1(x)$ y $f_3(x)$. Cabe destacar que en este ejemplo para las estimaciones iniciales $x_0 = \{0, 1.5\}$ el método de Traub y el método T3 con $\rho = 0.5$ no son convergentes.

Los demás métodos si que obtienen una aproximación a la solución, pero la diferencia de número de iteraciones entre métodos con y sin memoria es mayor. Los métodos con memoria requieren aproximadamente de la mitad de iteraciones para aproximar la raíz, e incluso en algunos casos lo hacen con una mayor precisión que los métodos sin memoria.

f	x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
$f_1(x)$	2	Traub	5	1.221e-90	9.992e-271	3.000
		T3, $\rho = 0.5$	5	1.057e-103	3.038e-310	3.000
		T3, $\rho = -2$	6	3.367e-194	1.004e-580	3.000
		TM3	5	8.483e-168	3.640e-553	3.301
		TM3N	4	7.875e-80	7.284e-318	4.000
		T4, $\rho_1 = -10, \rho_2 = 0.5$	6	4.349e-189	3.297e-565	3.000
		T4, $\rho_1 = -2, \rho_2 = 2$	5	4.463e-115	2.327e-344	3.000
		TM4	4	8.086e-67	2.085e-236	3.642
	TM4N	4	4.869e-135	1.645e-626	4.650	
	-1	Traub	9	1.956e-111	4.104e-333	3.000
		T3, $\rho = 0.5$	7	2.790e-76	5.590e-228	3.000
		T3, $\rho = -2$	4	8.260e-48	4.859e-332	7.003
		TM3	6	2.703e-62	1.059e-204	3.308
		TM3N	6	1.532e-81	1.044e-324	4.000
		T4, $\rho_1 = -10, \rho_2 = 0.5$	15	1.476e-141	1.288e-422	3.000
		T4, $\rho_1 = -2, \rho_2 = 2$	6	4.262e-54	3.309e-375	7.002
TM4		6	2.141e-61	2.687e-217	3.565	
TM4N	5	2.317e-78	1.990e-363	4.591		

Tabla 5.2: Resultados numéricos para la función test $f_1(x)$

Por último, un ejemplo que muestra de forma clara la estabilidad que tienen los métodos con memoria es la función test $f_4(x)$. En los resultados resumidos en la Tabla 5.5 se observa que para $x_0 = -1$ únicamente convergen los métodos con memoria, y para $x_0 = -0.8$ también métodos particulares de las clases T3 y T4. Además, los resultados obtenidos para los métodos que han convergido muestran su buen funcionamiento, ya que requieren de pocas iteraciones y los valores de ACOC obtenidos son muy próximos a los valores teóricos esperados.

Todos los experimentos numéricos realizados en esta sección muestran el funcionamiento esperado. Los métodos con memoria tienen un orden de convergencia mayor, motivo por el cual requieren de menos iteraciones para aproximar las soluciones. Además, los valores computacionales del orden de convergencia proporcionados por el ACOC confirman la veracidad de los órdenes obtenidos de forma teórica previamente. También se observa que, en general, el método T3 con $\rho = -2$ es más estable que el esquema asociado al valor $\rho_2 = 0.5$.

f	x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
$f_2(x)$	0	Traub	–			
		T3, $\rho = 0.5$	–			
		T3, $\rho = -2$	10	1.301e-80	1.320e-238	3.000
		TM3	6	1.185e-85	9.712e-281	3.305
		TM3N	5	2.543e-85	8.361e-339	3.953
		T4, $\rho_1 = -10, \rho_2 = 0.5$	13	1.049e-192	3.519e-574	3.000
		T4, $\rho_1 = -2, \rho_2 = 2$	10	1.013e-178	1.248e-532	3.000
		TM4	8	7.379e-177	2.383e-627	3.563
		TM4N	5	1.356e-63	2.865e-292	4.885
	1.5	Traub	–			
		T3, $\rho = 0.5$	–			
		T3, $\rho = -2$	10	1.301e-80	1.32e-238	3.000
		TM3	6	1.185e-85	9.712e-281	3.305
		TM3N	5	2.543e-85	8.361e-339	3.953
		T4, $\rho_1 = -10, \rho_2 = 0.5$	13	1.049e-192	3.519e-574	3.000
		T4, $\rho_1 = -2, \rho_2 = 2$	10	1.013e-178	1.248e-532	3.000
TM4	8	7.379e-177	2.383e-627	3.563		
TM4N	5	1.356e-63	2.865e-292	4.885		

Tabla 5.3: Resultados numéricos para la función test $f_2(x)$

5.7 Conclusiones

Partiendo de una variante del método Traub sin derivadas, en este capítulo se presentan dos familias de métodos iterativos con uno o dos parámetros aceleradores. Para ambas clases iterativas se han estudiado los métodos con memoria resultantes de aproximar sus parámetros con funciones lineales y cuadráticas. Asimismo, se ha alcanzado un orden de convergencia de 4.23 para el método con memoria obtenido aproximando los parámetros de la familia biparamétrica utilizando polinomios de grado dos. Tras aplicar los esquemas sobre familias de polinomios cuadráticos, se ha analizado la estabilidad de los operadores racionales obtenidos utilizando herramientas de dinámica real, mostrando las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores y los parámetros que proporcionan los miembros de las familias iterativas con mejor estabilidad. Todos estos resultados se han comprobado por medio de experimentos numéricos realizados sobre funciones test no lineales, mostrando el buen funcionamiento de los métodos y, en particular, la estabilidad y eficiencia de los métodos con memoria para aproximar raíces simples de funciones no lineales.

f	x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
$f_3(x)$	1	Traub	5	7.690e-118	2.388e-353	3.000
		T3, $\rho = 0.5$	5	1.292e-116	3.380e-350	3.000
		T3, $\rho = -2$	5	3.861e-84	2.165e-251	3.000
		TM3	4	5.282e-86	4.242e-284	3.390
		TM3N	4	1.354e-86	8.169e-346	4.018
		T4, $\rho_1 = -10, \rho_2 = 0.5$	6	3.183e-191	1.514e-572	3.000
		T4, $\rho_1 = -2, \rho_2 = 2$	5	1.334e-75	6.579e-227	3.000
		TM4	4	1.844e-95	2.396e-339	3.730
		TM4N	4	4.496e-118	3.747e-548	4.599
	-1	Traub	6	1.313e-107	1.189e-322	3.000
		T3, $\rho = 0.5$	5	5.222e-116	2.233e-348	3.000
		T3, $\rho = -2$	23	2.125e-114	3.607e-342	3.000
		TM3	5	9.748e-152	2.660e-501	3.307
		TM3N	4	3.920e-58	5.731e-232	4.090
		T4, $\rho_1 = -10, \rho_2 = 0.5$	6	6.020e-145	1.024e-433	3.000
		T4, $\rho_1 = -2, \rho_2 = 2$	6	1.671e-156	1.636e-477	3.000
		TM4	5	5.646e-178	1.148e-633	3.588
		TM4N	4	4.568e-81	2.777e-375	4.872

Tabla 5.4: Resultados numéricos para la función test $f_3(x)$

f	x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
$f_4(x)$	-1	Traub	–			
		T3, $\rho = 0.5$	–			
		T3, $\rho = -2$	–			
		TM3	5	2.907e-90	8.335e-295	3.301
		TM3N	5	1.648e-167	2.180e-667	4.000
		T4, $\rho_1 = -10, \rho_2 = 0.5$	–			
		T4, $\rho_1 = -2, \rho_2 = 2$	–			
		TM4	5	1.768e-80	6.532e-283	3.557
		TM4N	4	2.018e-48	2.057e-220	4.667
	-0.8	Traub	–			
		T3, $\rho = 0.5$	7	3.203e-95	1.646e-280	3.000
		T3, $\rho = -2$	–			
		TM3	6	2.556e-155	1.136e-509	3.302
		TM3N	5	3.110e-108	2.762e-430	3.985
		T4, $\rho_1 = -10, \rho_2 = 0.5$	8	1.018e-121	9.549e-359	3.000
		T4, $\rho_1 = -2, \rho_2 = 2$	–			
		TM4	6	2.747e-88	1.073e-310	3.565
		TM4N	5	2.084e-74	3.470e-341	4.645

Tabla 5.5: Resultados numéricos para la función test $f_4(x)$

Capítulo 6

Variantes de la familia de Kim con y sin memoria

Basado en:

[22] *"On the choice of the best members of Kim's family and the improvement of its convergence", Mathematical Methods in the Applied Sciences.*

6.1 Introducción

En [56], se introduce una familia de métodos iterativos de Kim de tres pasos con orden de convergencia ocho dependiente de tres parámetros. Centrando la atención en los dos primeros pasos, el esquema iterativo es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + \beta u_k + \lambda u_k^2}{1 + (\beta - 2)u_k + \mu u_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.1)$$

Esta familia tiene orden de convergencia cuatro para todo valor de los parámetros λ , β y μ , siendo por tanto una clase de métodos iterativos óptima.

En [28] los autores realizan un análisis de un caso particular de (6.1), donde $\beta = \mu = 0$, resultando en

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + \lambda u_k^2}{1 - 2u_k} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde $u_k = f(y_k)/f(x_k)$. Esta familia también tiene orden de convergencia 4 pero únicamente depende del parámetro λ . También se realiza en [28] un profundo análisis sobre la dinámica compleja asociada a esta familia de esquemas iterativos, siendo el caso $\lambda = 1$ el valor del parámetro que da lugar al método de la familia más estable. Sin embargo, para otros valores del parámetro los métodos asociados presentan un comportamiento caótico.

A continuación se analiza el comportamiento dinámico de la familia (6.1), con $\lambda = 1$, seleccionando los valores de los parámetros β y μ para los cuales el método correspondiente tiene buenas propiedades de estabilidad. Este análisis se realiza en la Sección 6.2 utilizando herramientas de dinámica compleja. A partir de los valores obtenidos para β y μ , en la Sección 6.3 se incluyen parámetros aceleradores para poder diseñar métodos con memoria que aumenten el orden de convergencia de la familia sin añadir nuevas evaluaciones funcionales. La Sección 6.4 cubre la dinámica real multidimensional de la familia con memoria resultante. En este sentido, los planos dinámicos serán los que muestren la buena estabilidad de los métodos con memoria. Los mejores miembros de la familia son probados y comparados numéricamente en la Sección 6.5 para encontrar los ceros de funciones académicas no lineales. Por último, la Sección 6.6 resume las conclusiones de este estudio.

6.2 Selección de los mejores miembros de la familia biparamétrica

En esta sección se seleccionan los mejores miembros de la familia biparamétrica (6.1) con $\lambda = 1$, en términos de estabilidad, utilizando herramientas de dinámica compleja. Aunque en la Sección 2.2.1 de esta memoria se describen de forma detallada los conceptos básicos necesarios para el estudio dinámico complejo presentado en esta sección, a continuación se hace hincapié en los planos de estabilidad, una de las representaciones gráficas sobre la cual se definen los planos de estabilidad unificados.

El plano de estabilidad es una herramienta gráfica que se utiliza cuando se trabaja con una familia de métodos biparamétrica cuyos parámetros son reales, o con una familia uniparamétrica cuyo parámetro es complejo. Dado un punto fijo extraño que depende de los parámetros, el plano de estabilidad asociado representa los valores de los parámetros donde el punto fijo extraño es atractor o repulsor. Se pueden encontrar algunos ejemplos del uso de planos de estabilidad en [36, 37].

Cuando una familia de métodos tiene más de un punto fijo extraño, una forma de reunir en una misma gráfica la información de cada plano de estabilidad es por medio del plano de estabilidad unificado. Este tipo de representación ya se utiliza en [17, 31] para mostrar los planos de parámetros unificados, pero se puede extender para juntar rectas o planos individuales cuya información unificada es más fuerte que la individual.

Definición 6.1 (Imagen unificada (recta o plano)). Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 < x < P_x, 1 < y < P_y\}$, donde P_x y P_y son el número de píxeles de la imagen I y $C = \{z \in \mathbb{Z} : 0 \leq z \leq 255\}$. Sean $I_R, I_G, I_B : P \rightarrow C$ la intensidad de rojo, verde y azul de los píxeles de la imagen I , respectivamente.

La imagen binaria $\hat{I} : P \rightarrow \{0, 1\}$ se define como

$$\hat{I} = \begin{cases} 0, & \text{si } I_R = I_G = I_B = 0, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $X^F = \{x_i^F, i = 1, 2, \dots, k\}$ el conjunto de los k puntos fijos extraños, y \hat{F}_i sus imágenes binarias asociadas, $i = 1, 2, \dots, k$. La imagen de estabilidad unificada $S : P \rightarrow \{0, 1\}$ se define como

$$S = \prod_{i=1}^k \hat{F}_i.$$

Sea $X^C = \{x_j^C, j = 1, 2, \dots, m\}$ el conjunto de los m puntos críticos libres, y \hat{C}_j su imagen binaria asociada. Entonces, la imagen de parámetros unificada $\mathcal{P} : P \rightarrow \{0, 1\}$ se define como

$$\mathcal{P} = \prod_{j=1}^m \hat{C}_j.$$

Las herramientas gráficas definidas serán de gran utilidad para fijar valores de los parámetros de la familia de Kim biparamétrica considerada, determinando los miembros con mejores propiedades de estabilidad. Para realizar la selección de estos miembros, a continuación se estudia el comportamiento asintótico de los puntos fijos del operador racional obtenido tras aplicar la familia iterativa sobre polinomios cuadráticos. El estudio del plano de estabilidad unificado obtenido a partir de los puntos fijos extraños del operador, será el que permita determinar los parámetros que dan lugar a las clases iterativas más estables en términos de dinámica compleja.

6.2.1 Estudio dinámico de la familia biparamétrica

El esquema biparamétrico bajo estudio es la familia original (6.1) con $\lambda = 1$. Su expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + \beta u_k + u_k^2}{1 + (\beta - 2)u_k + \mu u_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde $u_k = f(y_k)/f(x_k)$. A lo largo de esta sección, se analizan los miembros de la familia (6.3) para seleccionar aquellos métodos con mayor estabilidad. Con este objetivo, se analiza el comportamiento de la familia utilizando dinámica compleja, para obtener los valores de los parámetros β y μ que proporcionan las cuencas de atracción más amplias.

A continuación se estudia el comportamiento de la familia (6.3) cuando se aplica sobre un polinomio cuadrático genérico $p(z) = (z - a)(z - b)$, con $a, b \in \hat{\mathbb{C}}$. La función racional resultante de aplicar la familia (6.3) sobre $p(z)$ se ha denotado por $O_{\beta, \mu, a, b}(z)$. Utilizando la transformación de Möbius

$$M(s) = \frac{s - a}{s - b},$$

que satisface $M(\infty) = 1$, $M(a) = 0$ y $M(b) = \infty$, el operador $O_{\beta, \mu, a, b}(z)$ es conjugado al operador $O_{\beta, \mu}(z)$,

$$\begin{aligned} O_{\beta, \mu}(z) &= M \circ O_{\beta, \mu, a, b} \circ M^{-1}(z) \\ &= \frac{z^4 (2\beta + \mu + z^4 + (\beta + 4)z^3 + z^2(4\beta + \mu + 6) + z(5\beta + 2\mu + 4))}{z^4(2\beta + \mu) + z^3(5\beta + 2\mu + 4) + z^2(4\beta + \mu + 6) + (\beta + 4)z + 1}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dicha transformación permite, con un escalado adecuado, analizar el operador de punto fijo $O_{\beta, \mu}$ sobre todos los polinomios cuadráticos con independencia de las raíces a y b .

Los puntos fijos del operador $O_{\beta, \mu}$ son los valores de z tales que $O_{\beta, \mu}(z) = z$, es decir, $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$, correspondientes a las raíces de $p(z)$, $z_3 = 1$ y las raíces de un polinomio de grado seis. El siguiente resultado clasifica los puntos fijos según su comportamiento asintótico dependiendo del valor de los parámetros.

Proposición 6.1. Los puntos fijos de $O_{\beta,\mu}$ con $\mu, \beta \in \mathbb{R}$ y su estabilidad son:

(a) $z_1 = 0$ y $z_2 = \infty$, siendo *superatractores*,

(b) $z_3 = 1$, cuyo comportamiento es

- *superatractor* cuando $\mu = -8 - 4\beta$,
- *atractor* si $\mu \in \left(\frac{-49-5\beta}{4}, \frac{-79-44\beta}{12} \right)$,
- *neutro* si $\mu = -\frac{49}{4} - 5\beta$,
- *repulsor* cuando $\mu \in \left(-\infty, \frac{-49-5\beta}{4} \right) \cup \left(\frac{-79-44\beta}{12}, +\infty \right)$,

(c) $z_{4-9}(\beta, \mu)$, correspondientes a las raíces del polinomio $s^6 + s^5(\beta + 5) + s^4(5\beta + \mu + 11) + s^3(8\beta + 2\mu + 15) + s^2(5\beta + \mu + 11) + s(\beta + 5) + 1$. Dependiendo de los valores de μ y β , los puntos fijos extraños $z_{4-9}(\beta, \mu)$ se comportan como *atractores*, *repulsores* o *puntos de silla*.

En la Figura 6.1 se han representado los planos de estabilidad de z_3 y $z_{4-9}(\beta, \mu)$ para $\beta, \mu \in \mathbb{R}$. Las regiones no deseadas en términos de estabilidad se han representado en negro, ya que es donde los puntos fijos extraños son *atractores*. Las regiones donde son *repulsores* se han representado en blanco. Cada plano se ha generado utilizando un mallado de 200×200 puntos correspondientes a valores de cada uno de los parámetros en el intervalo $[-10, 10]$.

A partir de los planos de estabilidad anteriores, la Figura 6.2 representa el plano de estabilidad unificado de los puntos fijos extraños del operador $O_{\beta,\mu}$. Nótese que las regiones representadas en negro corresponden a valores reales de los parámetros β y μ para los cuales al menos un punto fijo extraño tiene un comportamiento *atractor*.

6.2.2 Selección de valores para el parámetro

En la Figura 6.2 se puede observar que existe una banda diagonal donde el plano de estabilidad unificado es mayoritariamente blanco, lo cual significa que en esa región ningún punto fijo extraño es *atractor*. Esta banda engloba (entre otros) los pares de valores (β, μ) tales que $\beta \leq \mu \leq \beta + 2$, aproximadamente.

Para verificar la información del plano de estabilidad unificado y visualizar la amplitud de las cuencas de atracción de las raíces, una herramienta de gran utilidad es el plano de convergencia [61]. Esta representación recoge en una misma figura el comportamiento dinámico de una familia de métodos para un conjunto de valores iniciales y para un conjunto de valores del parámetro, representando las cuencas de atracción de forma similar a las rectas dinámicas.

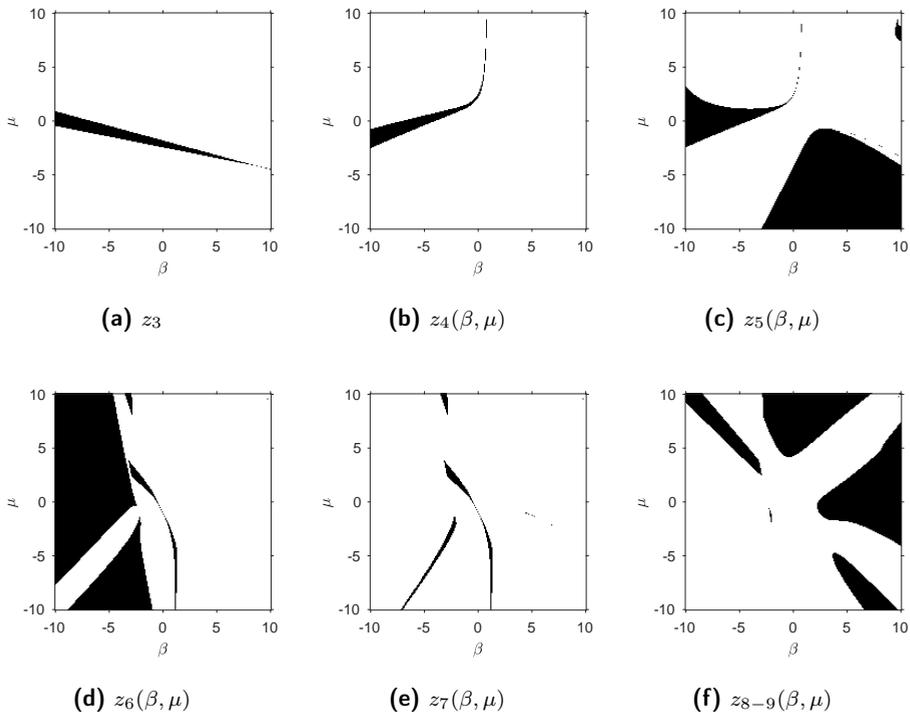


Figura 6.1: Planos de estabilidad de los puntos fijos extraños z_3 y $z_{4-9}(\beta, \mu)$ del operador $O_{\beta, \mu}$

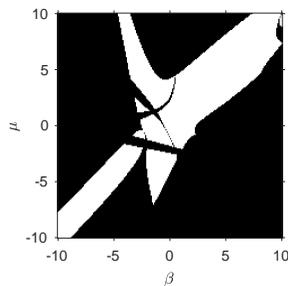


Figura 6.2: Plano de estabilidad unificado de z_3 y $z_{4-9}(\beta, \mu)$.

En la Figura 6.3 se han representado algunos planos de convergencia, correspondientes a valores fijos de β y μ . Las Figuras 6.3(a), 6.3(b) y 6.3(c) representan los planos de convergencia para $\mu = \beta$, $\mu = \beta + 2$ y $\mu = \beta - 5$, respectivamente. Los colores naranja y azul representan las

cuenca de convergencia de los puntos fijos $z_1 = 0$ y $z_2 = \infty$, respectivamente. Para generar los planos de convergencia, cada punto z_0 de un mallado de 500 puntos en el intervalo $[-10, 10]$ se toma como estimación inicial para iterar de forma sucesiva la función racional $O_{\beta, \mu}$. Además, el eje de ordenadas corresponde a valores de $\beta \in [-10, 10]$, de forma que cada punto del plano está asociado a un par (z_0, β) . Tras iteraciones sucesivas del operador, el punto se representa del color asociado a la cuenca de atracción a la cual ha convergido, siendo representado en negro si no converge a 0 o a ∞ en un máximo de 50 iteraciones. Se establece la convergencia cuando la diferencia entre los iterados y z_1 o z_2 es menor que 10^{-3} .

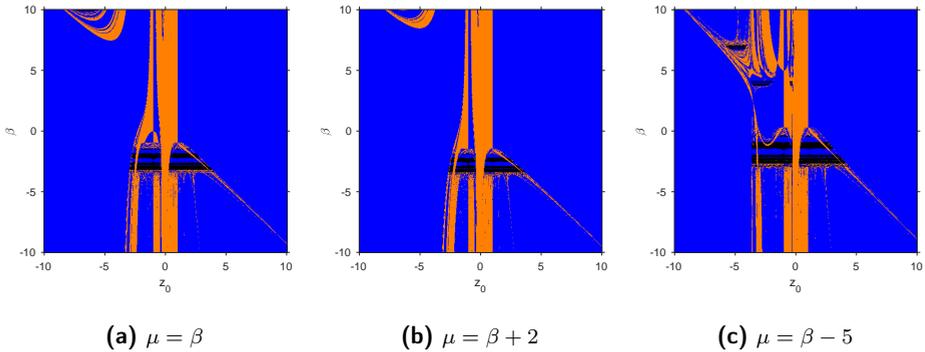


Figura 6.3: Planos de convergencia para diferentes relaciones entre β y μ

En cada uno de los planos de convergencia mostrados en la Figura 6.3, existen regiones donde no hay convergencia a las raíces, como por ejemplo para $\beta \approx -2.4$ ó $\beta \approx -3.2$. También aparecen otras regiones en los planos de la Figura 6.3(a) y de la Figura 6.3(c) donde existe convergencia a otros puntos diferentes de las raíces. Por ejemplo, para $\beta \approx 10$ en la Figura 6.3(a), y para $\beta \approx 7$ en la Figura 6.3(c). Sin embargo, para el caso $\mu = \beta + 2$ (Figura 6.3(b)) no existe ninguna región adicional con convergencia a puntos distintos de las raíces. Las regiones representadas en negro en los planos dinámicos de la Figura 6.3 pueden ser debidas a la presencia de puntos fijos extraños atractores, tal y como se puede deducir a partir del plano de estabilidad unificado de la Figura 6.2 para estos valores de los parámetros β y μ . Por tanto, en estas regiones existen puntos no convergentes y puntos que convergen a órbitas periódicas o a alguno de los puntos fijos extraños.

No obstante, se puede intentar definir curvas para las cuales los planos de convergencia asociados tengan mejor estabilidad que los considerados en la Figura 6.3. En este sentido, se deben definir curvas que eviten en la medida de lo posible las regiones negras presentes en el plano de estabilidad unificado para ambos parámetros. La Figura 6.4 representa la parábola $\mu = 0.17\beta^2 - 0.8075\beta + 2.9166$ sobre el plano de estabilidad unificado. Como se puede observar, prácticamente se logra evitar con esta curva todas las regiones negras. El plano de convergencia resultante para $\mu = 0.17\beta^2 - 0.8075\beta + 2.9166$ se muestra en la Figura 6.5, demostrando que ahora la familia obtenida tiene mejor estabilidad que las anteriores, ya que casi todos los puntos convergen a una de las raíces.

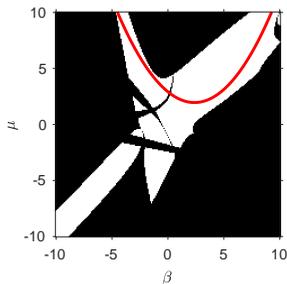


Figura 6.4: Plano de estabilidad unificado de los puntos fijos extraños de $O_{\beta, \mu}$. En rojo, la curva $\mu = 0.17\beta^2 - 0.8075\beta + 2.9166$

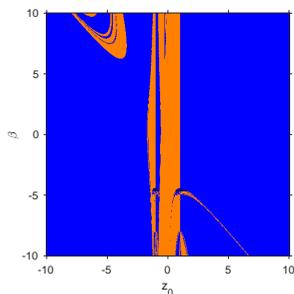


Figura 6.5: Plano de convergencia para $\mu = 0.17\beta^2 - 0.8075\beta + 2.9166$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las Figuras 6.3 y 6.5, la siguiente sección está dedicada al desarrollo de métodos con memoria tomando como punto de partida la familia uniparamétrica correspondiente a $\mu = 0.17\beta^2 - 0.8075\beta + 2.9166$.

Entonces, la familia de métodos iterativos uniparamétrica de partida es la obtenida considerando $\mu = P_2(\beta) = 0.17\beta^2 - 0.8075\beta + 2.9166$ en (6.3), obteniendo la expresión iterativa

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + \beta u_k + u_k^2}{1 + (\beta - 2)u_k + P_2(\beta)u_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

siendo $u_k = f(y_k)/f(x_k)$. Su ecuación del error es

$$e_{k+1} = ((2\beta + P_2(\beta))c_2^3 - c_2c_3)e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5),$$

donde $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$, $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y α es la solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Como se puede observar en la ecuación del error, la familia (6.5) tiene al menos orden de convergencia cuatro para todo valor del parámetro β .

6.3 Métodos iterativos con memoria: esquema DFM(β)

En esta sección se introduce una nueva clase iterativa basada en los esquemas (6.5). Esta nueva familia utiliza más de una iteración previa para calcular la siguiente, siendo una familia de métodos con memoria. Se ha diseñado mediante el uso de parámetros aceleradores, manteniendo una estructura similar a la del esquema original. Se basa en las técnicas presentadas en [23, 32], entre otros.

A partir de la familia (6.5) y utilizando el parámetro acelerador σ en cada paso del esquema, se obtiene una familia paramétrica cuya ecuación del error permite introducir memoria, incrementando su orden de convergencia sin la necesidad de añadir evaluaciones funcionales adicionales. Tras introducir el parámetro, la familia obtenida presenta la estructura iterativa

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \sigma f(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + \beta u_k + u_k^2}{1 + (\beta - 2)u_k + P_2(\beta)u_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k) + 2\sigma f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde $u_k = f(y_k)/f(x_k)$. Su orden de convergencia y ecuación del error se muestran en el siguiente resultado, cuya prueba está basada en el uso de desarrollos de Taylor de las funciones f y f' en los iterados x_k e y_k en torno a la solución α .

Teorema 6.1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I . Supongamos que α es una raíz simple de $f(x) = 0$, de forma que la estimación inicial x_0 está suficientemente cerca de α . Entonces, el orden de convergencia de la familia de métodos iterativos (6.6) es 4 para todo valor real de los parámetros β y σ , siendo su ecuación del error*

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= (\sigma + c_2) \left(\sigma^2(2\beta + P_2(\beta) - 3) + \sigma c_2(4\beta + 2P_2(\beta) - 3) + (2\beta + P_2(\beta))c_2^2 - c_3 \right) e_k^4 \\ &\quad + \mathcal{O}(e_k^5), \end{aligned}$$

donde $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$, y $e_k = x_k - \alpha$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

A partir de la ecuación del error anterior, el esquema resultante tomando $\sigma = -c_2 = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ tiene, al menos, orden 5. Como el valor de α no es conocido, se necesita una aproximación para el parámetro σ y, en concreto, para $f'(\alpha)$ y $f''(\alpha)$. Con este objetivo, se utilizan a continuación aproximantes de Padé. Éstos ya han sido usados en trabajos como [29, 39] para diseñar nuevos métodos iterativos, pero hasta el momento, no han sido utilizados para estimar el valor de parámetros aceleradores.

La aproximación de Padé que se propone es

$$m(t) = \frac{a_1 + a_2(t - x_k)}{1 + a_3(t - x_k)}. \quad (6.7)$$

Los coeficientes a_1 , a_2 y a_3 se obtienen a partir de las condiciones

$$\begin{cases} m(x_k) = f(x_k), \\ m(x_{k-1}) = f(x_{k-1}), \\ m'(x_k) = f'(x_k). \end{cases} \quad (6.8)$$

Resolviendo el sistema (6.8), los valores de a_1 , a_2 y a_3 son

$$\begin{aligned} a_1 &= f(x_k), \\ a_2 &= \frac{f(x_k)^2 - f(x_k)f(x_{k-1}) + f'(x_k)f(x_{k-1})(x_{k-1} - x_k)}{(f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})}, \\ a_3 &= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1}) + f'(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{(f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})}. \end{aligned}$$

Para obtener una expresión del parámetro σ , las aproximaciones utilizadas son $f'(\alpha) \approx m'(x_k)$ y $f''(\alpha) \approx m''(x_k)$. De esta forma, el parámetro σ resultante, que ahora varía en cada iteración k del método, es

$$\sigma_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1}) + f'(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{(f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})}. \quad (6.9)$$

Reemplazando σ_k en (6.6), se obtiene una familia paramétrica de esquemas iterativos con memoria denotada como DFM(β).

Teorema 6.2. *Sea α una raíz simple de una función suficientemente diferenciable $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un intervalo abierto I . Si las estimaciones iniciales x_0 y x_1 están suficientemente cerca de α , entonces el R -orden de convergencia de la familia DFM(β) es de al menos $2 + \sqrt{5} \approx 4.24$, correspondiente a la raíz positiva del polinomio $p^2 - 4p - 1$. La ecuación del error de la familia DFM(β) es*

$$e_{k+1} = c_3 \left(c_3 - c_2^2 \right) e_{k-1} e_k^4 + \mathcal{O}_5(e_k, e_{k-1}),$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$, y $\mathcal{O}_5(e_k, e_{k-1})$ indica que la suma de los exponentes de e_k y e_{k-1} de los términos desestimados en el desarrollo es de al menos cinco.

Demostración. *A partir del error e_k en cada iteración de la familia DFM(β), se consideran los siguientes desarrollos de Taylor en torno a α :*

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\alpha)[e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4 + c_5 e_k^5] + \mathcal{O}(e_k^6), \\ f'(x_k) &= f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_k + 3c_3 e_k^2 + 4c_4 e_k^3 + 5c_5 e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5), \\ f(x_{k-1}) &= f'(\alpha)[e_{k-1} + c_2 e_{k-1}^2 + c_3 e_{k-1}^3 + c_4 e_{k-1}^4 + c_5 e_{k-1}^5] + \mathcal{O}(e_{k-1}^6). \end{aligned}$$

Utilizando los desarrollos previos se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_k &= -c_2 + (c_2^2 - c_3)e_{k-1} + (c_2^2 - 2c_3)e_k - 2(c_2^3 - 2c_2c_3 + c_4)e_{k-1}e_k \\ &\quad + (-c_2^3 + 2c_2c_3 - c_4)e_{k-1}^2 + (-c_2^3 + 3c_2c_3 - 3c_4)e_k^2 + \mathcal{O}_3(e_k, e_{k-1}).\end{aligned}$$

Por tanto, la expresión del error en el primer paso de la familia $DFM(\beta)$ es

$$\begin{aligned}y_k - \alpha &= e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \sigma_k f(x_k)} \\ &= (c_2^2 - c_3)e_{k-1}e_k^2 + (-c_2^3 + 2c_2c_3 - c_4)e_{k-1}^2e_k^2 - 2(c_2^3 - 2c_2c_3 + c_4)e_{k-1}e_k^3 \\ &\quad + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}).\end{aligned}$$

Con el desarrollo de $f(y_k)$ en torno a α se tiene

$$\begin{aligned}f(y_k) &= f'(\alpha)[y_k - \alpha + c_2(y_k - \alpha)^2] + \mathcal{O}((y_k - \alpha)^3) \\ &= f'(\alpha)[(c_2^2 - c_3)e_{k-1}e_k^2 + (-c_2^3 + 2c_2c_3 - c_4)e_{k-1}^2e_k^2 \\ &\quad - 2(c_2^3 - 2c_2c_3 + c_4)e_{k-1}e_k^3] + \mathcal{O}_4(e_k, e_{k-1}).\end{aligned}$$

Siendo $u_k = f(y_k)/f(x_k)$, la ecuación del error de la familia $DFM(\beta)$ es

$$\begin{aligned}e_{k+1} &= c_3 \left(c_3 - c_2^2 \right) e_{k-1}e_k^4 + (3c_2^5 - 5c_2^3c_3 + c_2c_3^2 + c_3c_4)e_{k-1}^2e_k^4 \\ &\quad + 2(c_2^2 - 2c_3)(c_2c_3 - c_4)e_{k-1}e_k^5 + \mathcal{O}_6(e_k, e_{k-1}).\end{aligned}\tag{6.10}$$

Por último, a partir de (6.10) y utilizando el Teorema 2.1, el orden de la familia de métodos iterativos $DFM(\beta)$ está dado por la raíz positiva de la ecuación $p^2 - 4p - 1 = 0$. Como consecuencia, el orden de la familia es $p = 2 + \sqrt{5} \approx 4.24$. \square

6.4 Análisis dinámico real multidimensional de la familia $DFM(\beta)$

Esta sección está dedicada al estudio de la estabilidad de la familia de métodos $DFM(\beta)$ sobre polinomios de grado bajo. Con este objetivo, se analiza el operador racional obtenido para tres polinomios cuadráticos distintos, calculando los correspondientes puntos fijos y su estabilidad. También se visualizan de forma gráfica las cuencas de atracción de los puntos fijos representando los planos dinámicos.

Como se ha estudiado en la Sección 6.3, $DFM(\beta)$ es una familia de esquemas iterativos con memoria, diseñada a partir de una aproximación de Padé. En particular, requiere de dos iteraciones previas, x_k y x_{k-1} , para calcular la siguiente iteración x_{k+1} . Por tanto, este proceso iterativo se puede expresar de forma general como

$$x_{k+1} = \Phi(x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{6.11}$$

siendo x_0 y x_1 las estimaciones iniciales y Φ el operador que define la familia con memoria.

Para calcular los puntos fijos de (6.11) es necesario definir una función auxiliar de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 . Con este objetivo se define el siguiente sistema dinámico discreto, siguiendo las técnicas utilizadas en [12, 13, 16]:

$$G(z, x) = (x, \Phi(z, x)), \quad (6.12)$$

donde $z = x_{k-1}$ y $x = x_k$. Como consecuencia, los operadores obtenidos en el estudio dinámico realizado en esta sección son bidimensionales, y sobre éstos se pueden aplicar los conceptos de dinámica real multidimensional descritos en la Sección 2.2.2 de esta memoria.

A continuación se estudia el comportamiento de la familia $DFM(\beta)$ sobre los polinomios cuadráticos $p_-(x) = x^2 - 1$, $p_+(x) = x^2 + 1$ y $p_0(x) = x^2$. Este estudio permite generalizar el análisis dinámico a cualquier polinomio cuadrático, ya que todo polinomio de grado dos se puede reducir a alguno de estos tres casos.

6.4.1 Análisis dinámico sobre $p_-(x) = x^2 - 1$

El operador racional vectorial obtenido cuando la familia $DFM(\beta)$ se aplica sobre $p_-(x) = x^2 - 1$ es

$$G_{-, \beta}(z, x) = \left(x, \frac{N_-(z, x, \beta)}{D_-(z, x, \beta)} \right), \quad (6.13)$$

donde

$$\begin{aligned} D_-(z, x, \beta) = & 2(xz + 1) \left(x^2 + 2xz + 1 \right)^2 \left(\beta + x^8 + 8x^7z + 8x^3z(4z^2 + 3) - 1 \right. \\ & + x(4\beta z - 4(\beta - 2)z^3) + x^6(-\beta + (\beta + 22)z^2 + 6) + P_2(\beta) + P_2(\beta)z^4 \\ & + 4x^5z(-\beta + (\beta + 6)z^2 + 8) - z^2(\beta + 2P_2(\beta) - 2) \\ & + x^4(-\beta + P_2(\beta) + z^4(4\beta + P_2(\beta) + 8) + z^2(-3\beta - 2P_2(\beta) + 54) + 8) \\ & \left. + x^2(\beta - 2P_2(\beta) - 2z^4(2\beta + P_2(\beta) - 4) + z^2(3\beta + 4P_2(\beta) + 18) + 2) \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 N_-(z, x, \beta) = & x^{13} (z^2 + 1) + x^{12} z (11z^2 + 15) + x^{11} (-\beta + (\beta + 44)z^4 + 106z^2 + 6) \\
 & + x^{10} z (-11\beta + (7\beta + 80)z^4 + (4\beta + 398)z^2 + 94) \\
 & + z (3\beta + 2P_2(\beta) - z^6 + z^4(\beta + 2P_2(\beta) + 3) - 4z^2(\beta + P_2(\beta))) \\
 & + x^9 (-3\beta + z^6(16\beta + 2P_2(\beta) + 63) + z^4(35\beta - 4P_2(\beta) + 807) \\
 & + z^2(-48\beta + 2P_2(\beta) + 532) + 28) + x^2 z (37\beta + 12P_2(\beta) \\
 & + 4z^6(\beta + P_2(\beta) + 1) + z^4(-41\beta + 4P_2(\beta) + 36) + (122 - 20P_2(\beta))z^2 \\
 & - 6) + x^8 z (-29\beta + 6P_2(\beta) + z^6(12\beta + 4P_2(\beta) + 15) \\
 & + z^4(97\beta - 2P_2(\beta) + 851) - 2z^2(40\beta + 4P_2(\beta) - 709) + 290) \\
 & + x (5\beta + 4P_2(\beta) + z^6(4\beta + 6P_2(\beta) - 1) + z^4(-21\beta - 8P_2(\beta) + 23) \\
 & + 2z^2(6\beta - P_2(\beta) + 3) - 2) + 2x^6 z (-13\beta + 2P_2(\beta) + z^6(6\beta - 2P_2(\beta) \\
 & + 50) + z^4(17\beta + 6P_2(\beta) + 586) - 2z^2(5\beta + 3P_2(\beta) - 452) + 176) \\
 & + x^3 (7\beta - 4P_2(\beta) + z^6(-44\beta + 4P_2(\beta) + 52) + z^4(-12P_2(\beta) \\
 & - 55\beta + 352) + 2z^2(46\beta + 6P_2(\beta) + 83) + 2) + 2x^7 (-3\beta + 2P_2(\beta) \\
 & + z^6(46\beta + 6P_2(\beta) + 218) + z^4(-5\beta - 10P_2(\beta) + 926) \\
 & + z^2(-38\beta + 2P_2(\beta) + 548) + 24) + x^5 (-2\beta - 4P_2(\beta) \\
 & + z^6(-68\beta - 24P_2(\beta) + 346) + 2z^4(25\beta + 22P_2(\beta) + 701) \\
 & + z^2(20\beta - 16P_2(\beta) + 781) + 45) + x^4 z (26\beta - 24P_2(\beta) \\
 & - 2z^6(14\beta + 2P_2(\beta) - 5) - 2z^4(49\beta + 8P_2(\beta) - 273) \\
 & + z^2(100\beta + 44P_2(\beta) + 723) + 151)
 \end{aligned}$$

Proposición 6.2. Los puntos fijos de $G_{-, \beta}$ para $z, x, \beta \in \mathbb{R}$ y su carácter son:

- (a) $\mathbf{x}_1^F = (-1, -1)$ y $\mathbf{x}_2^F = (1, 1)$, que son *superatractores*,
- (b) $\mathbf{x}_3^F = (0, 0)$ cuyo carácter es
- *atractor*, cuando $\beta \in [-2.6, -2.58] \cup [6.25, 6.65]$,
 - *repulsor*, si $\beta \in (-2.83, -2.78] \cup (3.97, 4.35]$,

- punto de silla en otro caso.

(c) $x_{4-9}^F = (t_i, t_i)$ donde $t_i = \pm\sqrt{r_i}$, siendo $r_i, i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, las raíces reales positivas del polinomio de grado seis

$$P_6(x, \beta) = -29166 - 6925\beta + 1700\beta^2 + (-20000 - 90000\beta)x \\ + (-735838 - 181525\beta - 11900\beta^2)x^2 + (-3953328 + 164600\beta + 13600\beta^2)x^3 \\ + (-7407498 + 319225\beta + 5100\beta^2)x^4 + (-5946672 + 85400\beta - 13600\beta^2)x^5 \\ + (-2387498 - 290775\beta + 5100\beta^2)x^6.$$

Estos puntos fijos extraños son reales dependiendo del valor de β , de forma que

- $x_4^F, x_5^F \in \mathbb{R}$ si $\beta \in (6.65, 8.74) \cup (8.74, 14.61) \cup (14.61, 28.4)$, siendo atractores, repulsores y silla, en cada subintervalo correspondiente,
- $x_6^F, x_7^F \in \mathbb{R}$ si $\beta \in (-\infty, -7.3) \cup (-2.58, -2.04) \cup (64.29, +\infty)$. Solo son atractores si $\beta \in (-2.57, -2.47)$ y repulsores cuando $\beta \in (-2.47, -2.33)$. Si $\beta \in (-\infty, -7.3) \cup (-2.58, -2.57) \cup (-2.33, -2.04)$ son puntos de silla,
- $x_8^F, x_9^F \in \mathbb{R}$ si $\beta \in (-\infty, -2.04) \cup (28.42, +\infty)$, siendo puntos de silla.

Tal y como se ha mostrado en los análisis dinámicos realizados en capítulos anteriores de esta memoria, una herramienta de gran utilidad para representar las cuencas de atracción en los métodos iterativos con memoria es el plano dinámico.

La Figura 6.6 representa algunos de los planos dinámicos de $G_{-, \beta}$ para distintos valores de β . Cada plano dinámico se ha generado tomando un mallado de 500 estimaciones iniciales de x y z en el intervalo $[-10, 10]$, con un máximo de 50 iteraciones y una tolerancia de 10^{-3} utilizados como criterios de parada del proceso iterativo. Estos planos se han generado utilizando las rutinas descritas en [28]. Las cuencas de atracción de los puntos x_1^F, x_2^F y x_3^F se han representado con los colores naranja, azul y verde, respectivamente, para cada plano dinámico. Dependiendo del valor de β considerado para generar el plano, los puntos fijos extraños x_{4-9}^F también se han representado en el plano y sus cuencas de atracción de color blanco. En otro caso, el punto se representa en negro. Las estrellas blancas corresponden a las raíces de $p_-(x)$, mientras que los cuadrados blancos corresponden a los puntos fijos extraños.

Los valores de β en la Figura 6.6 han sido escogidos de forma que se muestren comportamientos dinámicos distintos de los puntos fijos y los puntos fijos extraños, teniendo en cuenta los resultados descritos en la Proposición 6.2. En las Figuras 6.6(a) y 6.6(b), el operador solo tiene el punto fijo extraño x_3^F , que es atractor para $\beta = 6.4$ y repulsor para $\beta = 4$. Como consecuencia, además de las cuencas de atracción de las raíces de $p_-(x)$, se observa una pequeña cuenca de atracción de x_3^F en la Figura 6.6(a) y también dos regiones sin convergencia ni a x_1^F ni a x_2^F . Esto no sucede en el plano dinámico de la Figura 6.6(b), donde no existe ningún punto fijo extraño atractor. En este caso, todos los puntos del plano convergen a x_1^F o a x_2^F . En la Figura 6.6(c)

se han representado con cuadrados blancos los puntos fijos extraños x_3^F y x_{6-9}^F . Sin embargo, para $\beta = 67$ son puntos de silla y permanecen en el conjunto de Julia (ver ampliación del plano dinámico en la Figura 6.7). Se puede observar en la Figura 6.6(c) que todos los puntos convergen a los puntos fijos superatractores.

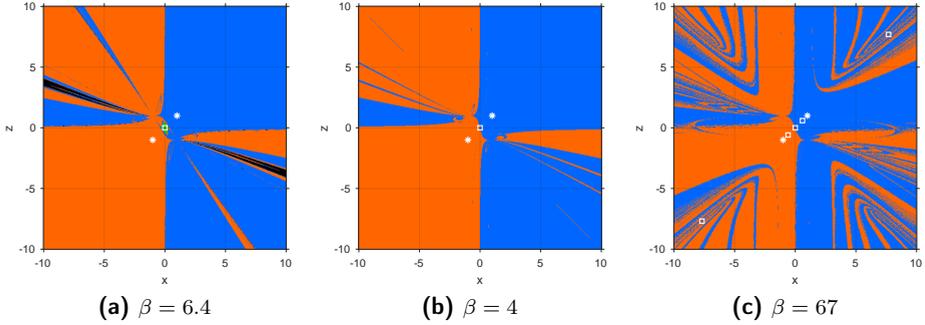


Figura 6.6: Planos dinámicos de $G_{-, \beta}$ para distintos valores de β

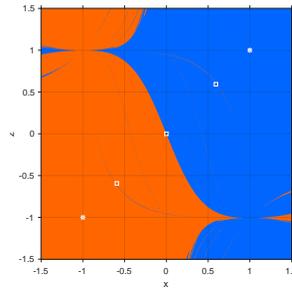


Figura 6.7: Plano dinámico de $G_{-, \beta}$ para $\beta = 67$ y $(x, z) \in [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$

6.4.2 Análisis dinámico sobre $p_+(x) = x^2 + 1$

Cuando la familia de métodos $DFM(\beta)$ se aplica sobre el polinomio $p_+(x) = x^2 + 1$, la función racional resultante es

$$G_{+, \beta}(z, x) = \left(x, \frac{N_+(z, x, \beta)}{D_+(z, x, \beta)} \right), \quad (6.14)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 N_+(z, x, \beta) = & x^{13}(z^2 - 1) + x^{12}z(11z^2 - 15) + x^{11}(-\beta + (\beta + 44)z^4 - 106z^2 + 6) \\
 & + x^{10}z(-11\beta + (7\beta + 80)z^4 - 2(2\beta + 199)z^2 + 94) \\
 & - z(3\beta + 2P_2(\beta) + z^6 + z^4(\beta + 2P_2(\beta) + 3) + 4z^2(\beta + P_2(\beta))) + x^9(3\beta \\
 & + z^6(16\beta + 2P_2(\beta) + 63) + z^4(-35\beta + 4P_2(\beta) - 807) + z^2(-48\beta + 2P_2(\beta) \\
 & + 532) - 28) + x^8z(29\beta - 6P_2(\beta) + z^6(12\beta + 4P_2(\beta) + 15) + z^4(-97\beta \\
 & + 2P_2(\beta) - 851) - 2z^2(40\beta + 4P_2(\beta) - 709) - 290) - 2x^6z(13\beta - 2(P_2(\beta) + 88) \\
 & + z^6(6\beta - 2P_2(\beta) + 50) - z^4(17\beta + 6P_2(\beta) + 586) - 2z^2(5\beta + 3P_2(\beta) - 452)) \\
 & + x(-5\beta - 4P_2(\beta) + z^6(4\beta + 6P_2(\beta) - 1) + z^4(21\beta + 8P_2(\beta) - 23) \\
 & + 2z^2(6\beta - P_2(\beta) + 3) + 2) - 2x^7(3\beta - 2(P_2(\beta) + 12) + z^6(46\beta + 6P_2(\beta) + 218) \\
 & + z^4(5\beta + 10P_2(\beta) - 926) + z^2(-38\beta + 2P_2(\beta) + 548)) - x^5(-2\beta - 4P_2(\beta) \\
 & + z^6(68\beta + 24P_2(\beta) - 346) + 2z^4(25\beta + 22P_2(\beta) + 701) + z^2(-20\beta + 16P_2(\beta) \\
 & - 781) + 45) + x^4z(-26\beta + 24P_2(\beta) - 2z^6(14\beta + 2P_2(\beta) - 5) + 2z^4(49\beta \\
 & + 8P_2(\beta) - 273) + z^2(100\beta + 44P_2(\beta) + 723) - 151) + x^2z(37\beta + 12P_2(\beta) \\
 & - 4z^6(\beta + P_2(\beta) + 1) + z^4(4(P_2(\beta) + 9) - 41\beta) + 2(10P_2(\beta) - 61)z^2 - 6) \\
 & + x^3(7\beta - 4P_2(\beta) + z^6(44\beta - 4(P_2(\beta) + 13)) + z^4(-55\beta - 12P_2(\beta) + 352) \\
 & - 2z^2(46\beta + 6P_2(\beta) + 83) + 2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_+(z, x, \beta) = & 2(xz - 1)(x^2 + 2xz - 1)^2 \left(x^8 + 8x^7z - 8x^3z(4z^2 - 3) - 1 + \beta \right. \\
 & - 4xz(\beta + (\beta - 2)z^2) + x^6(\beta + (\beta + 22)z^2 - 6) + 4x^5z(\beta + (\beta + 6)z^2 - 8) \\
 & + P_2(\beta) + P_2(\beta)z^4 + z^2(\beta + 2P_2(\beta) - 2) \\
 & + x^4(-\beta + P_2(\beta) + z^4(4\beta + P_2(\beta) + 8) + z^2(3\beta + 2P_2(\beta) - 54) + 8) \\
 & \left. + x^2(-\beta + 2P_2(\beta) + 2z^4(2\beta + P_2(\beta) - 4) + z^2(3\beta + 4P_2(\beta) + 18) - 2) \right).
 \end{aligned}$$

Notemos que ahora el polinomio cuadrático bajo estudio no tiene raíces reales, por lo que todos los puntos fijos del operador asociado son puntos fijos extraños. En el siguiente resultado se clasifica la estabilidad de estos puntos dependiendo del valor de β .

Proposición 6.3. *Los puntos fijos extraños de $G_{+,\beta}$ y su estabilidad son:*

(a) $y_1^F = (0, 0)$, cuyo carácter es

- *atractor*, si $\beta \in [-2.6, -2.58) \cup [6.25, 6.65)$,
- *repulsor*, si $\beta \in (-2.83, -2.78) \cup (3.97, 4.35]$,

- punto de silla en otro caso.

(b) $y_{2-9}^F = (l_i, l_i)$, donde $l_i = \pm\sqrt{s_i}$, siendo $s_i, i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, las raíces reales positivas del polinomio de grado seis

$$Q_6(x, \beta) = -29166 - 6925\beta + 1700\beta^2 + (20000 + 90000\beta)x \\ - (735838 + 181525\beta + 11900\beta^2)x^2 + (3953328 - 164600\beta - 13600\beta^2)x^3 \\ + (-7407498 + 319225\beta + 5100\beta^2)x^4 + (5946672 - 85400\beta + 13600\beta^2)x^5 \\ + (-2387498 - 290775\beta + 5100\beta^2)x^6.$$

La estabilidad de estos puntos fijos extraños también depende de los valores de β para los cuales son reales, obteniéndose:

- $y_2^F, y_3^F \in \mathbb{R}$ cuando $\beta \in (-2.04, -1.32) \cup (4.14, 6.65)$, siendo puntos de silla,
- $y_4^F, y_5^F \in \mathbb{R}$ si $\beta \in (-7.28, -2.58) \cup (-2.04, -2) \cup (-2, -1.32) \cup (4.14, 64.29)$, siendo puntos de silla en todos los subintervalos excepto para $\beta \in (-2, -1.32)$, donde son repulsores,
- $y_6^F, y_7^F \in \mathbb{R}$ cuando $\beta \in (-\infty, -6.24) \cup (-6.24, -2.04) \cup (28.4, 64.29) \cup (64.29, +\infty)$, siendo repulsores para $\beta \in (28.4, 64.29)$ y puntos de silla en los demás casos,
- $y_8^F, y_9^F \in \mathbb{R}$ si $\beta \in (-\infty, -2.04) \cup (28.4, 64.29) \cup (64.29, +\infty)$ que son puntos de silla cuando $\beta \in (-\infty, -2.04) \cup (28.4, 64.29)$ y repulsores para $\beta \in (64.29, +\infty)$.

Los planos dinámicos del operador racional $G_{+, \beta}$ asociados a distintos valores de β se muestran en la Figura 6.8. Siguiendo la misma notación de colores que en la Figura 6.6, la cuenca de atracción de y_1^F se ha representado en verde, mientras que las cuencas de atracción de y_{2-9}^F se han representado en blanco. Como todos los puntos fijos son puntos fijos extraños, en los planos se han representado con cuadrados blancos para aquellos valores de β donde están definidos de acuerdo a la Proposición 6.3.

Los valores de β seleccionados para generar los planos dinámicos de la Figura 6.8 corresponden a regiones donde el comportamiento asintótico de y_1^F es diferente, es decir, atractor, repulsor o punto de silla para las Figuras 6.8(a), 6.8(b) y 6.8(c), respectivamente. Además de y_1^F , cuando $\beta = 6.4$ el operador tiene, como puntos fijos, los puntos de silla y_{2-5}^F , mientras que cuando $\beta = 67$ el operador tiene los puntos de silla $y_{6,7}^F$ y los puntos repulsores $y_{8,9}^F$, todos ellos representados con cuadrados blancos. Se observa en la Figura 6.8(c) que la presencia de puntos de silla genera algunos puntos distribuidos en el plano dinámico que convergen a éstos, ya que se encuentran representados en blanco y verde. En cambio, el plano dinámico de la Figura 6.8(b) es completamente negro, lo cual indica que no existe convergencia a ningún punto fijo extraño.

La Figura 6.9 muestra una ampliación del plano dinámico de la Figura 6.8(a). En este plano dinámico se puede observar la cuenca de atracción de y_1^F , que es más grande que en los otros

casos porque este punto fijo extraño es atractor para $\beta = 6.4$. También se observan algunos puntos blancos en la Figura 6.9, correspondientes a las cuencas de atracción asociadas a los puntos de silla y_{2-5}^F . Por tanto, los resultados observados en las Figuras 6.8 y 6.9 coinciden con el comportamiento esperado a partir de la Proposición 6.3.

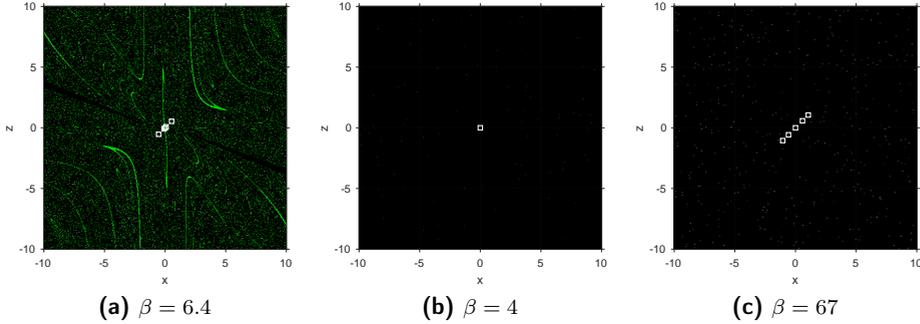


Figura 6.8: Planos dinámicos de $G_{+,\beta}$ para distintos valores de β

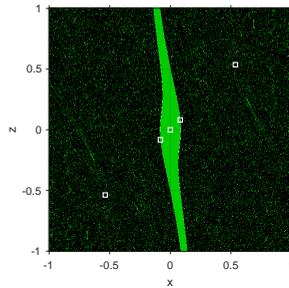


Figura 6.9: Plano dinámico de $G_{+,\beta}$ para $\beta = 6.4$ y $(x, z) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$

6.4.3 Análisis dinámico sobre $p_0(x) = x^2$

Por último, el operador vectorial racional de la familia DFM(β) asociado al polinomio $p_0 = x^2$ es

$$G_{0,\beta}(z, x) = \left(x, \frac{N_0(z, x, \beta)}{D_0(z, x, \beta)} \right) \quad (6.15)$$

donde

$$N_0(z, x, \beta) = xz \left(x^5 + 11x^4z + \beta x^3z^2 + 44x^3z^2 + 7\beta x^2z^3 + 80x^2z^3 + 16\beta xz^4 \right. \\ \left. + 2P_2(\beta)xz^4 + 63xz^4 + 12\beta z^5 + 4P_2(\beta)z^5 + 15z^5 \right),$$

y

$$D_0(z, x, \beta) = 2(x + 2z)^2 \left(x^4 + 8x^3z + \beta x^2z^2 + 22x^2z^2 + 4\beta xz^3 + 24xz^3 + 4\beta z^4 + P_2(\beta)z^4 + 8z^4 \right).$$

El operador $G_{0,\beta}$ no tiene puntos fijos extraños, ya que el único punto fijo real es la raíz del polinomio $p_0(x)$. Su estabilidad se analiza en el siguiente resultado.

Proposición 6.4. *El único punto fijo de $G_{0,\beta}$ es $w_1^F = (0, 0)$ para todo valor de β y su carácter dinámico es atractor.*

La Figura 6.10 muestra algunos planos dinámicos de $G_{0,\beta}$. El único punto fijo del operador, w_1^F , se ha representado con una estrella blanca y su cuenca de atracción en verde. Por tratarse de un punto fijo atractor, todos los puntos de los planos dinámicos de las Figuras 6.10(b) y 6.10(c) pertenecen a la cuenca de atracción del punto fijo, excepto algunos puntos dispersos en la Figura 6.10(b) que están representados en negro. En cambio, en la Figura 6.10(a) existen más puntos que no convergen a w_1^F . Nótese la similitud de estas regiones negras con las de la Figura 6.6(a). Por tanto, el comportamiento dinámico con peor estabilidad del método correspondiente a $\beta = 6.4$ también se repite para el operador de punto fijo $G_{0,\beta}$.

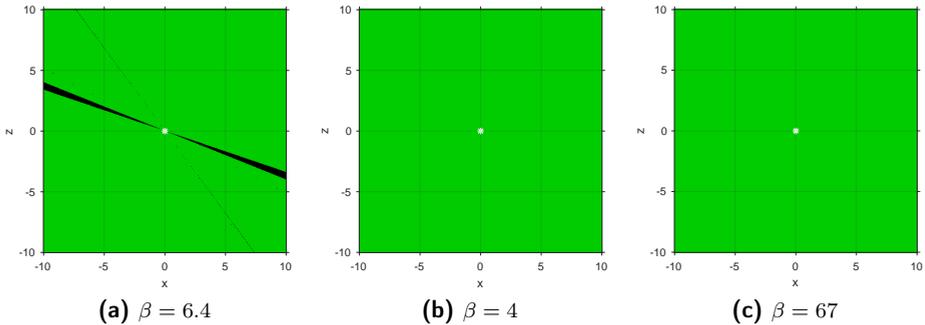


Figura 6.10: Planos dinámicos de $G_{0,\beta}$ para distintos valores de β

Todos los resultados dinámicos analizados tanto en las Proposiciones 6.2, 6.3 y 6.4 como en los planos dinámicos de las Figuras 6.6-6.10 serán de gran utilidad para seleccionar métodos de la familia $DFM(\beta)$ que utilizaremos para resolver determinadas ecuaciones no lineales y comprobar el funcionamiento de la familia en la Sección 6.5.

6.5 Resultados numéricos

Esta sección está dedicada a mostrar las características de distintos miembros de la familia $DFM(\beta)$. Se han escogido cuatro valores del parámetro β , y por tanto, cuatro métodos iterativos pertenecientes a la familia. Estos valores de β han sido seleccionados teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la sección anterior. A partir de la Proposición 6.2, se han escogido $\beta = 6.4$ y $\beta = 8$ como valores del parámetro cuyo esquema iterativo correspondiente tiene un mal comportamiento dinámico. Por otro lado, se han seleccionado $\beta = 4$ y $\beta = 67$, correspondientes a miembros estables de la familia.

Las funciones test no lineales utilizadas y sus raíces son las siguientes:

- $f_1(x) = \arctan x$, $\alpha = 0$,
- $f_2(x) = \cos x - xe^x + x^2$, $\alpha \approx 0.639154$,
- $f_3(x) = \frac{x}{1-x} - 5 \ln(0.4(1-x)/(0.4-0.5x)) + 4.45977$, $\alpha_1 \approx 0.757397$, $\alpha_2 \approx 1.098984$,
- $f_4(x) = (x-1)^3 - 1$, $\alpha = 2$,
- $f_5(x) = e^x \sin(5x) - 2$, $\alpha \approx 1.363973$.

En las Tablas 6.1-6.5 se muestran los resultados numéricos obtenidos para las funciones test $f_{1-5}(x)$, respectivamente. Los cálculos computacionales se han realizado en Matlab R2014b con un procesador Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2420 v2 at 2.20GHz, y con aritmética de precisión variable con 2000 dígitos de mantisa. El criterio de parada utilizado es $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-200}$ o $|f(x_{k+1})| < 10^{-200}$. Ambos valores se muestran en cada tabla, y también el número de iteraciones requerido y el orden de convergencia computacional aproximado ACOC [44], obtenido por medio del cociente

$$ACOC = \frac{\ln(|x_{k+1} - x_k|/|x_k - x_{k-1}|)}{\ln(|x_k - x_{k-1}|/|x_{k-1} - x_{k-2}|)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Como los esquemas de la familia $DFM(\beta)$ son métodos con memoria, se necesitan dos aproximaciones iniciales para comenzar el proceso iterativo. En su lugar, para la implementación numérica se ha utilizado una estimación inicial x_0 y un parámetro inicial $\sigma_0 = 0.01$ para construir el siguiente iterado x_1 . Cuando el método no es convergente para un valor particular de x_0 después de 200 iteraciones, mostramos en la tabla "n.c."

En la Tabla 6.1 aparecen los resultados numéricos para la función no lineal $f_1(x)$ y dos estimaciones iniciales distintas. Para $x_0 = 1$, los métodos correspondientes a $\beta = 6.4$ y $\beta = 8$ no son convergentes, mientras que se obtienen resultados satisfactorios para $\beta = 4$ y $\beta = 67$, lo cual confirma los resultados dinámicos proporcionados en la Sección 6.4. Para la otra aproximación inicial $x_0 = 0.5$, aunque todos los métodos son convergentes, las estimaciones del error $|x_{k+1} - x_k|$ y $|f(x_{k+1})|$ son mejores para algunos valores del parámetro que para otros. Concretamente, son

mejores para los valores de β asociados a los métodos más estables. En la Tabla 6.2 se muestra un comportamiento similar para la función $f_2(x)$ e iterados iniciales $x_0 = 0$ y $x_0 = 10$.

x_0	β	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
1	6.4	n.c.	-	-	-
1	4	7	2.54e-64	6.770e-271	4.227
1	67	6	1.33e-94	3.750e-399	4.255
1	8	n.c.	-	-	-
0.5	6.4	4	1.65e-99	6.010e-420	4.235
0.5	4	4	1.28e-134	1.137e-568	4.235
0.5	67	5	2.77e-156	1.860e-660	4.232
0.5	8	4	2.13e-68	3.690e-288	4.243

Tabla 6.1: Resultados numéricos para f_1 y algunos métodos de la familia DFM(β)

x_0	β	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
0	6.4	8	1.52e-172	4.56e-729	4.238
0	4	6	4.24e-185	8.18e-781	4.237
0	67	5	3.72e-90	4.24e-380	4.190
0	8	10	9.15e-61	1.37e-255	4.180
10	6.4	9	3.06e-97	4.43e-410	4.233
10	4	9	3.63e-132	5.14e-558	4.242
10	67	11	2.14e-184	2.81e-779	4.232
10	8	9	1.20e-82	2.94e-348	4.226

Tabla 6.2: Resultados numéricos para f_2 y algunos métodos de la familia DFM(β)

La Tabla 6.3 muestra los valores obtenidos por la función $f_3(x)$. Utilizando como aproximación inicial $x_0 = 0$, los métodos convergen a α_1 , mientras que con $x_0 = 2$, la convergencia es a α_2 . No obstante, en ambos casos se observan mejores estimaciones del error para $\beta = 4$ y $\beta = 67$ que para $\beta = 6.4$ y $\beta = 8$.

En la Tabla 6.4, se destacan el elevado número de iteraciones requerido por el método asociado a $\beta = 6.4$ y también la divergencia del método asociado a $\beta = 8$, comparado con los buenos resultados de los otros valores del parámetro.

Por último, la Tabla 6.5 describe los resultados numéricos obtenidos para la función no lineal $f_5(x)$. Para $x_0 = 0.5$, los métodos correspondientes a $\beta = 6.4$ y $\beta = 8$ no son convergentes.

Sin embargo para $x_0 = 1.5$, aunque todos los métodos son convergentes a la raíz, los mejores resultados de las estimaciones del error se obtienen para $\beta = 6.4$. Este hecho se encuentra justificado por el uso de más iteraciones hasta lograr la convergencia.

x_0	β	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
0	6.4	9	3.72e-107	8.92e-447	4.248
0	4	9	9.17e-178	6.95e-746	4.239
0	67	8	8.98e-67	9.90e-276	4.223
0	8	8	2.12e-49	2.99e-202	3.950
2	6.4	9	2.22e-131	7.84e-550	4.232
2	4	8	3.36e-61	1.55e-252	4.233
2	67	9	2.27e-187	5.48e-787	4.245
2	8	9	1.85e-165	3.44e-694	4.232

Tabla 6.3: Resultados numéricos para f_3 y algunos métodos de la familia DFM(β)

x_0	β	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
1.5	6.4	46	7.17e-97	4.37e-409	4.189
1.5	4	5	3.10e-174	8.97e-736	4.234
1.5	67	8	5.36e-153	7.88e-646	4.219
1.5	8	n.c.	-	-	-
0	6.4	77	4.35e-96	8.77e-405	4.178
0	4	7	1.81e-198	2.00e-838	4.238
0	67	8	2.37e-116	1.01e-490	4.194
0	8	n.c.	-	-	-

Tabla 6.4: Resultados numéricos para f_4 y algunos métodos de la familia DFM(β)

x_0	β	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
1.5	6.4	8	8.77e-157	1.94e-659	4.237
1.5	4	4	2.13e-50	8.88e-209	4.260
1.5	67	5	1.25e-109	1.08e-459	4.238
1.5	8	6	9.89e-91	5.76e-379	4.198
0.5	6.4	n.c.	-	-	-
0.5	4	9	4.77e-74	5.90e-309	4.255
0.5	67	30	5.25e-194	4.00e-817	4.232
0.5	8	n.c.	-	-	-

Tabla 6.5: Resultados numéricos para f_5 y algunos métodos de la familia $DFM(\beta)$

6.6 Conclusiones

En este capítulo se han utilizado en primer lugar herramientas de dinámica compleja, seleccionando una subfamilia paramétrica de la familia de métodos iterativos de Kim con buenas propiedades de estabilidad. En segundo lugar, con la introducción de parámetros aceleradores y su sustitución con aproximaciones de Padé, se ha diseñado una familia de esquemas iterativos con memoria. A continuación, el estudio dinámico real multidimensional realizado sobre la familia de métodos con memoria sobre polinomios cuadráticos permite mostrar la existencia de regiones de valores del parámetro β para las cuales los correspondientes miembros de la familia tienen buenas propiedades de estabilidad, existiendo pocos valores del parámetro para los cuales el esquema iterativo con memoria asociado tiene un comportamiento caótico. En particular, los valores del β situados en el intervalo $(-1.32, 4.14)$ son los que proporcionan los mejores miembros tanto de la subfamilia con memoria como de la familia original, ya que se evitan los puntos fijos extraños con carácter atractor. Por último, los resultados obtenidos se han verificado con experimentos numéricos realizados sobre funciones no lineales y diferentes miembros de la familia con memoria diseñada, asociados a valores del parámetro escogidos a partir de las conclusiones del estudio dinámico. Este análisis incluye al esquema con memoria correspondiente a $\beta = 4$, mostrando la estabilidad del mismo en la implementación numérica y verificando el análisis dinámico previo.

Capítulo 7

Métodos iterativos para ecuaciones no lineales con funciones peso

Basado en:

[15] *"Wide stability in a new family of optimal fourth-order iterative methods", Computational and Mathematical Methods.*

[20] *"Generating root-finder iterative methods of second order: convergence and stability", Axioms.*

7.1 Introducción

Existen muchos métodos iterativos con órdenes de convergencia distintos diseñados para estimar las raíces de $f(x) = 0$ (véase por ejemplo [2, 68] y las referencias que incluye). Partiendo de dos métodos iterativos con órdenes de convergencia p_1 y p_2 , hemos visto en el Capítulo 2 que el método resultante de aplicar la técnica de composición de métodos tiene orden de convergencia $p_1 \cdot p_2$. Sin embargo, este proceso añade más evaluaciones funcionales por iteración, por lo que la eficiencia del esquema se reduce. No obstante, utilizando de forma simultánea la técnica de composición y el uso funciones peso, es posible diseñar métodos iterativos que incrementen el orden de convergencia de los esquemas de partida y además sin la necesidad de añadir un número alto de nuevas evaluaciones funcionales. De esta forma es posible diseñar nuevos métodos óptimos con menor dificultad. Ésta será una de las técnicas seguidas en el diseño de los esquemas de este capítulo.

El método de Newton es un esquema iterativo para resolver ecuaciones no lineales con convergencia cuadrática ampliamente conocido. El uso tan extenso de este método es debido a que es aplicable a varios tipos de ecuaciones, como ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales e incluso ecuaciones de operadores aleatorios. Sin embargo, la mayor dificultad en la aplicación del método de Newton es la selección de las estimaciones iniciales, ya que deben estar suficientemente cerca de la solución del problema para poder garantizar la convergencia a ésta. Encontrar un criterio para poder escoger estas estimaciones iniciales es un proceso costoso, por lo que se necesitan algoritmos que converjan globalmente de forma todavía más efectiva.

A continuación se utiliza como herramienta para el diseño de métodos iterativos el uso de funciones peso (véase, por ejemplo [34, 60, 75]), dando lugar a una familia de esquemas iterativos con orden de convergencia cuadrático. Esta familia incluye el método de Newton, así como otros esquemas iterativos conocidos y nuevos, que surgen tras seleccionar determinadas funciones peso. Este hecho permite seleccionar los miembros de la familia cuadrática con regiones mayores de estimaciones iniciales para las cuales el método asociado converge a la solución cuando el método de Newton falla. Para seleccionar de forma adecuada estos métodos, se trabaja con el sistema dinámico complejo asociado, calculando sus puntos fijos y críticos, analizando su comportamiento asintótico, y aquellos valores que simplifican la función racional correspondiente. Este proceso es ampliamente utilizado en esta área de investigación, como se puede encontrar en [3, 28, 36]. Utilizando técnicas de composición, a continuación se extiende esta clase iterativa a una familia de esquemas iterativos con orden cuatro. También se analiza la estabilidad de uno de los miembros óptimos de la familia diseñada con orden cuatro utilizando herramientas de dinámica compleja.

La organización de este capítulo se presenta a continuación. En la Sección 7.2 se introduce una familia de métodos iterativos con una función peso y orden de convergencia cuadrático. A partir de esta familia, la Sección 7.3 desarrolla un esquema de dos puntos óptimo con orden cuatro y dos funciones peso. El análisis de la estabilidad de miembros pertenecientes a ambas familias de métodos se realiza en la Sección 7.4, mostrando la estabilidad de las clases seleccionadas sobre polinomios cuadráticos. La Sección 7.5 desarrolla toda la implementación numérica de

los métodos iterativos propuestos en este capítulo junto a una comparativa con otros métodos existentes, todos ellos aplicados sobre ecuaciones no lineales. Finalmente, las conclusiones de este estudio se presentan en la Sección 7.6.

7.2 Familia de esquemas iterativos con una función peso

En esta sección, se presenta una familia muy simple de métodos iterativos de segundo orden para resolver ecuaciones no lineales $f(x) = 0$. Se utiliza para su diseño el procedimiento de incluir funciones peso, dando lugar a una familia de métodos con expresión iterativa

$$x_{k+1} = x_k - H(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.1)$$

donde $t = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Esta familia contiene, para elecciones concretas de la función peso H , muchos esquemas iterativos conocidos. En particular, se obtiene el método de Newton cuando $H(t) = t$.

El siguiente resultado muestra las condiciones que debe satisfacer la función peso para que la familia tenga orden de convergencia al menos cuadrático.

Teorema 7.1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I y α una solución simple de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Supongamos que la estimación inicial $x_0 \in I$ está suficientemente cerca de α y $H(t)$ satisface $H(0) = 0$, $H'(0) = 1$ y $|H''(0)| < \infty$. Entonces, los miembros de la familia (7.1) tienen orden de convergencia al menos dos con ecuación del error*

$$e_{k+1} = \left(c_2 - \frac{1}{2} H''(0) \right) e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3), \quad (7.2)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Demostración. *Utilizando desarrollos en serie de Taylor en torno a una raíz simple α de $f(x) = 0$, se obtiene*

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\alpha)[e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4] + \mathcal{O}(e_k^5), \\ f'(x_k) &= f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_k + 3c_3 e_k^2 + 4c_4 e_k^3] + \mathcal{O}(e_k^4), \end{aligned} \quad (7.3)$$

y por tanto, la variable t_k de la función peso se puede expresar como

$$t_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - c_2 e_k^2 + (2c_2^2 - 2c_3) e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4). \quad (7.4)$$

Utilizando desarrollos de Taylor de la función H y (7.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} H(t_k) &= H(0) + H'(0)t_k + \frac{1}{2}H''(0)t_k^2 + \mathcal{O}(t_k^3) \\ &= H(0) + H'(0)e_k + \left(\frac{1}{2}H''(0) - H'(0)c_2\right)e_k^2 + \left(H'(0)(2c_2^2 - 2c_3) - H''(0)c_2\right)e_k^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(e_k^4). \end{aligned}$$

Con los desarrollos anteriores, la ecuación del error es

$$e_{k+1} = e_k - H(t_k) = -H(0) + (1 - H'(0))e_k + \left(-\frac{1}{2}H''(0) + H'(0)c_2\right)e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3). \quad (7.5)$$

Aplicando las condiciones $H(0) = 0$, $H'(0) = 1$ y $|H''(0)| < \infty$ a la ecuación (7.5), se obtiene la ecuación del error (7.2). Por tanto, los miembros de la familia de métodos iterativos (7.1) convergen, al menos, cuadráticamente. \square

En la siguiente sección se propone la extensión de la familia (7.1) a esquemas multipunto utilizando técnicas de composición de métodos y diferentes funciones peso.

Muchos investigadores han dedicado un gran esfuerzo al estudio de la estabilidad del método de Newton dependiendo de sus estimaciones iniciales. En [3, 70] se pueden encontrar buenas referencias de estos análisis. Partiendo de los estudios ya realizados, es un trabajo interesante el análisis de la dinámica de diversos esquemas pertenecientes a la familia (7.1). Por ello, centrándonos en una familia uniparamétrica concreta perteneciente a (7.1), en la Sección 7.4 se realiza el análisis de su estabilidad dependiendo del valor del parámetro, así como de uno de los esquemas obtenidos a partir de la familia diseñada en la Sección 7.3.

7.3 Extensión a familias de esquemas iterativos multipunto

Tomando como punto de partida la familia de esquemas iterativos con una función peso (7.1), en esta sección se diseña una familia de métodos con estructura iterativa formada por dos pasos. Cada uno de estos pasos está compuesto por la estructura del esquema (7.1) de forma que se obtiene una familia de esquemas iterativos multipunto con dos funciones peso, H_1 y H_2 , de la forma

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - H_1(t_k), \\ x_{k+1} &= x_k - H_2(t_k, \eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde $t = \frac{f(x)}{f'(x)}$ y $\eta = \frac{f(y)}{f(x)}$. Para cada par concreto de funciones $H_1(t)$ y $H_2(t, \eta)$ se obtiene un método distinto perteneciente a la familia (7.6), por lo que la cantidad de métodos incluidos en este esquema es aún más amplio que el esquema inicial (7.1). No obstante, por sus propiedades de estabilidad y de convergencia que a continuación se desarrollan, esta sección se centra en dos funciones peso concretas sobre las cuales se realiza el estudio propuesto para este capítulo.

Seleccionando en (7.6) las funciones peso $H_1(t) = t$ y $H_2(t, \eta) = G(\eta)t$, donde G es una nueva función peso, se obtiene la familia de métodos de dos pasos con una función peso

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - G(\eta_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde $\eta = \frac{f(y)}{f(x)}$.

Notar que el esquema (7.7) se obtiene con la composición del método de Newton dos veces y incluyendo en el segundo paso del esquema una función peso G dependiendo de la variable η . Además, el número de evaluaciones funcionales por iteración de cada miembro de la familia (7.7) es tres, siendo óptima por ser su orden de convergencia cuatro para determinadas condiciones de la función peso, tal y como muestra el siguiente resultado.

Teorema 7.2. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I y $\alpha \in I$ una raíz simple de $f(x) = 0$. Si $x_0 \in I$ está suficientemente cerca de α y $G(\eta)$ satisface $G(0) = G'(0) = 1$, $G''(0) = 4$ y $|G'''(0)| < \infty$, entonces la familia iterativa (7.7) converge a α con orden de convergencia cuatro, siendo su ecuación del error*

$$e_{k+1} = \left(\left(5 - \frac{G'''(0)}{6} \right) c_2^3 - c_2 c_3 \right) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5), \quad (7.8)$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

Demostración. *Utilizando desarrollos de Taylor (7.3) en torno a α , el primer paso del esquema (7.7) es*

$$y_k - \alpha = e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = c_2 e_k^2 + (2c_3 - 2c_2^2) e_k^3 + (4c_2^3 - 7c_3 c_2 + 3c_4) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5).$$

Desarrollando en serie de Taylor $f(y_k)$, se tiene

$$\begin{aligned} f(y_k) &= f'(\alpha) \left[y_k - \alpha + c_2 (y_k - \alpha)^2 \right] + \mathcal{O} \left((y_k - \alpha)^3 \right) \\ &= f'(\alpha) \left[c_2 e_k^2 + (2c_3 - 2c_2^2) e_k^3 + (5c_2^3 - 7c_3 c_2 + 3c_4) e_k^4 \right] + \mathcal{O}(e_k^5). \end{aligned}$$

De los desarrollos anteriores, la expresión de la variable η_k de la función peso es

$$\begin{aligned} \eta_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)} &= c_2 e_k + (2c_3 - 3c_2^2) e_k^2 + (8c_2^3 - 10c_3 c_2 + 3c_4) e_k^3 \\ &\quad + (-20c_2^4 + 37c_3 c_2^2 - 14c_4 c_2 - 8c_3^2 + 4c_5) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5), \end{aligned}$$

y por tanto, el desarrollo de la función peso $G(\eta_k)$ en torno a cero es de la forma

$$\begin{aligned} G(\eta_k) &= G(0) + G'(0)\eta_k + G''(0)\frac{\eta_k^2}{2} + G'''(0)\frac{\eta_k^3}{6} + \mathcal{O}(\eta_k^4) \\ &= G(0) + c_2G'(0)e_k + \left(\frac{1}{2}c_2^2(G''(0) - 6G'(0)) + 2c_3G'(0)\right)e_k^2 \\ &\quad + \left(c_2^3\left(8G'(0) - 3G''(0) + \frac{G'''(0)}{6}\right) + 2c_3c_2(G''(0) - 5G'(0)) + 3c_4G'(0)\right)e_k^3 \\ &\quad + \left(\frac{-1}{2}c_2^4(40G'(0) - 25G''(0) + 3G'''(0)) + c_3c_2^2(37G'(0) - 16G''(0) + G'''(0))\right. \\ &\quad \left.+ c_4c_2(3G''(0) - 14G'(0)) + c_3^2(2G''(0) - 8G'(0)) + 4c_5G'(0)\right)e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5). \end{aligned}$$

Por último, la ecuación del error es

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y_k - \alpha - G(\eta_k)\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= (1 - G(0))e_k + c_2(G(0) - G'(0))e_k^2 + (2c_3(G(0) - G'(0)) \\ &\quad - \frac{1}{2}c_2^2(4G(0) - 8G'(0) + G''(0)))e_k^3 + \left(c_2^3\left(4G(0) - 13G'(0) + \frac{7G''(0)}{2} - \frac{G'''(0)}{6}\right)\right. \\ &\quad \left.+ c_3c_2(-7G(0) + 14G'(0) - 2G''(0)) + 3c_4(G(0) - G'(0))\right)e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5). \end{aligned} \tag{7.9}$$

La solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 - G(0) = 0 \\ G(0) - G'(0) = 0 \\ 4G(0) - 8G'(0) + G''(0) = 0 \end{cases}$$

es $G(0) = 1, G'(0) = 1, G''(0) = 4$. Reemplazando estos valores en (7.9), la ecuación del error de la familia (7.7) es

$$e_{k+1} = \left(\left(5 - \frac{G'''(0)}{6}\right)c_2^3 - c_2c_3\right)e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5).$$

□

El proceso de composición descrito para construir la familia de métodos (7.6), y a partir de ésta la familia (7.7), se puede extender de forma sucesiva para diseñar métodos con órdenes de convergencia cada vez mayores. Un ejemplo de familias de métodos obtenidas a partir de la composición de (7.7) es la familia de esquemas iterativos uniparamétrica de cuatro pasos con

dos funciones peso

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 z_k &= x_k - G_1(\eta_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 w_k &= z_k - \delta \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \\
 x_{k+1} &= z_k - G_2(\tau_k) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

donde $G_1(\eta)$ y $G_2(\tau)$ denotan las funciones peso, siendo sus variables $\eta = \frac{f(y)}{f(x)}$ y $\tau = \frac{f(z)}{f(w)}$, respectivamente, y δ un parámetro libre real.

La familia de métodos (7.10) tiene orden siete cuando las funciones peso satisfacen determinadas condiciones, como muestra el siguiente resultado cuya demostración sigue un proceso análogo al Teorema 7.2.

Teorema 7.3. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I y $\alpha \in I$ una raíz simple de $f(x) = 0$, de forma que x_0 está suficientemente cerca de α . Supongamos que $G_1(\eta)$ y $G_2(\tau)$ satisfacen las condiciones*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & G_1(0) = 1, G_1'(0) = 1, G_1''(0) = 4, |G_1'''(0)| < \infty, \\
 (ii) \quad & G_2(0) = \frac{1}{\delta^2}, G_2'(0) = -\frac{(\delta-1)^2(\delta+2)}{\delta^2}, G_2''(0) = -2\frac{(\delta-1)^3}{\delta^2}, G_2'''(0) = 0,
 \end{aligned}$$

y además $\delta \notin \{0, 1\}$. Entonces, la familia de métodos iterativos (7.10) converge a α con orden de convergencia 7, siendo su ecuación del error

$$e_{k+1} = \frac{-4c_2^6(G_1'''(0) - 30) - 24c_2^4c_3}{3(\delta-1)^2} e_k^7 + \mathcal{O}(e_k^8),$$

donde $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j \geq 2$.

A pesar que con la familia iterativa (7.10) se obtiene un orden de convergencia mayor, por tratarse (7.7) de una clase iterativa óptima que contiene un gran conjunto de métodos iterativos clásicos, a continuación se estudia la estabilidad de ésta utilizando las técnicas de dinámica discreta compleja.

7.4 Análisis de estabilidad

En esta sección se realiza el estudio de la estabilidad, en el contexto de dinámica compleja, de métodos obtenidos a partir de las familias (7.1) y (7.7) descritas anteriormente. Los conceptos fundamentales para este análisis, ya presentados en la Sección 2.2.1, se pueden ampliar con la información descrita en [45].

A continuación, seleccionando determinadas funciones peso, se aplican las clases iterativas obtenidas sobre polinomios cuadráticos, analizando sus puntos fijos y puntos críticos, y las cuencas de atracción asociadas a los puntos fijos de los operadores racionales obtenidos.

7.4.1 Dinámica compleja de la familia $N2_\theta$

En esta sección se realiza un estudio de la estabilidad de una familia uniparamétrica de métodos iterativos obtenida a partir de (7.1). La función peso $H(t_k) = \frac{t_k}{1+\theta t_k}$ da lugar a la familia de métodos iterativos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \theta f(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.11)$$

que se ha denotado $N2_\theta$.

Nota 7.1. La función $H(t) = \frac{t}{1+\theta t}$ satisface las condiciones descritas en el Teorema 7.1. Además, para este caso la ecuación del error es $e_{k+1} = (\theta + c_2)e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3)$. Por tanto, con el valor del parámetro $\theta = -c_2$, método incrementa su orden de convergencia. Sin embargo, no se puede utilizar $c_2 = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ porque el valor de α no es conocido. Este tipo de ecuación del error nos conduce a pensar en métodos con memoria, los cuales dejamos para futuras líneas de investigación.

El estudio dinámico de la familia $N2_\theta$ realizado en esta sección se centra en el análisis de los valores de θ que proporcionan los métodos de la familia con mayor estabilidad, manteniendo el mismo orden de convergencia que el método de Newton. A su vez, se obtendrán los valores de θ cuyos métodos asociados tienen malas propiedades de estabilidad, y que por tanto no es recomendable utilizar.

Para estudiar el comportamiento dinámico en el plano complejo de los puntos fijos de la familia $N2_\theta$ se van a utilizar dos herramientas gráficas: el plano de parámetros y el plano dinámico. Se pueden encontrar estudios de referencia sobre estas herramientas dinámicas en trabajos como [28, 84].

A continuación se aplica la familia de métodos iterativos $N2_\theta$ sobre polinomios cuadráticos para verificar su estabilidad dependiendo de las estimaciones iniciales. Teniendo en cuenta que el método bajo estudio no satisface el Teorema del Escalado (Teorema 2.3), los polinomios cuadráticos bajo estudio son la base compuesta por los tres polinomios de grados dos $p_-(z) = z^2 - 1$, $p_+(z) = z^2 + 1$ y $p_0(z) = z^2$.

Tras aplicar la familia $N2_\theta$ a cada uno de estos polinomios, se obtienen tres funciones racionales. A continuación se analiza el comportamiento asintótico de sus puntos fijos y críticos, representando los correspondientes planos dinámicos y de parámetros. Por tanto, las conclusiones obtenidas se podrán extender a cualquier polinomio cuadrático y, hasta cierto punto, a cualquier función no lineal.

Aplicando la familia $N2_\theta$ a los polinomios cuadráticos seleccionados, las funciones racionales resultantes son

$$\begin{aligned} R_-(z) &= z - \frac{z^2 - 1}{2z + (z^2 - 1)\theta}, \\ R_+(z) &= z - \frac{z^2 + 1}{2z + (z^2 + 1)\theta}, \\ R_0(z) &= \frac{z(1 + \theta z)}{2 + \theta z}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

para $p_-(z)$, $p_+(z)$ y $p_0(z)$, respectivamente. El siguiente resultado analiza cuáles son los puntos fijos de los operadores (7.12) y también su comportamiento asintótico.

Proposición 7.1. *Los puntos fijos de los operadores R_- , R_+ y R_0 definidos en (7.12) coinciden con las raíces de los polinomios cuadráticos asociados a cada caso, siendo superatractores para R_- y R_+ . Para R_0 , el punto fijo es atractor. Además, $z = \infty$ es un punto fijo extraño de los tres operadores, siendo en todos los casos neutro.*

Demostración. *Para calcular los puntos fijos del operador racional R_- se resuelve la ecuación $R_-(z) = z$, es decir,*

$$z - \frac{z^2 - 1}{2z + (z^2 - 1)\theta} = z,$$

o de forma equivalente,

$$\frac{z^2 - 1}{2z + (z^2 - 1)\theta} = 0. \quad (7.13)$$

La solución de (7.13) se obtiene de su numerador resolviendo $z^2 - 1 = 0$. Sus únicas soluciones son $z_{1,-}^F = -1$ y $z_{2,-}^F = 1$, las raíces de $p_-(z)$. La prueba para el operador racional R_+ es completamente análoga, y se obtiene que los puntos fijos de R_+ son las raíces de $p_+(z)$, denotadas $z_{1,+}^F = -i$ y $z_{2,+}^F = i$.

Para comprobar que $z = \infty$ es un punto fijo de cualquier operador racional R_β , $\beta = \{-, +, 0\}$, se define el operador $I_\beta(z) = 1/R_\beta(1/z)$. De esta forma, $z = \infty$ es un punto fijo del operador R_β cuando $z = 0$ es un punto fijo del operador I_β . Para los operadores R_- y R_+ se tiene, respectivamente,

$$I_{\mp}(z) = \frac{z(2z + \theta \mp \theta z^2)}{z + \theta \mp \theta z^2 \pm z^3}.$$

Se observa de forma directa que $I_{\mp}(0) = 0$, y que por tanto $z = \infty$ es un punto fijo extraño para ambos operadores.

En el caso del polinomio $p_0(z)$, sus puntos fijos son la solución de:

$$\frac{z(1 + \theta z)}{2 + \theta z} = z \Leftrightarrow z(1 + \theta z) - z(2 + \theta z) = 0,$$

de modo que el único punto fijo de R_0 es $z = 0$, denotado por z_0^F .

En cuanto al operador de R_0 asociado al infinito, se tiene

$$I_0(z) = \frac{z(2z + \theta)}{z + \theta},$$

y en este caso $z = \infty$ también es un punto fijo extraño de R_0 ya que $I_0(0) = 0$.

Para analizar la estabilidad de los puntos fijos, es necesario calcular las derivadas de (7.12):

$$R'_{\mp}(z) = \frac{(z^2 \mp 1)(2 + 4\theta z \mp \theta^2 + \theta^2 z^2)}{(2z \mp \theta + \theta z^2)^2}, \quad (7.14)$$

$$R'_0(z) = \frac{2 + 4\theta z + \theta^2 z^2}{(2 + \theta z)^2}. \quad (7.15)$$

A partir del término $(z^2 \mp 1)$ en (7.14) se comprueba de forma directa que $z_{j,-}^F$ y $z_{j,+}^F$, para $j = 1, 2$, son puntos fijos superatractores de los operadores correspondientes. También es inmediato de (7.15) que z_0^F es un punto fijo atractor, ya que $R'_0(z_0^F) = \frac{1}{2} < 1$.

Análogamente, la estabilidad del infinito se estudia por medio del valor de la derivada en $z = 0$ del correspondiente operador I_β :

$$I'_{\mp}(z) = \frac{(z^2 \mp 1)(\mp 4\theta z \mp \theta^2 + z^2(\theta^2 \mp 2))}{(z \pm z^3 + \theta \mp \theta z^2)^2},$$

$$I'_0(z) = \frac{2z^2 + 4\theta z + \theta^2}{(z + \theta)^2}.$$

En los tres casos se tiene $I'_{\mp}(0) = 1$ y $I'_0(0) = 1$, y por tanto, $z = \infty$ es un punto fijo extraño neutro de los tres operadores racionales. \square

Los puntos críticos de los operadores (7.12), calculados resolviendo $R'(z) = 0$, se presentan en el siguiente resultado.

Proposición 7.2. En el cálculo de los puntos críticos de los operadores R_- , R_+ y R_0 definidos en (7.12) se obtiene:

- (a) Para R_- , los puntos fijos $z_{1,-}^F$ y $z_{2,-}^F$ son también puntos críticos. Además, si $\theta \neq \pm i$, $\theta \neq 0$, el operador R_- tiene dos puntos críticos libres, $z_{1,-}^C(\theta) = \frac{-2 - \sqrt{2 + \theta^2}}{\theta}$ y $z_{2,-}^C(\theta) = \frac{-2 + \sqrt{2 + \theta^2}}{\theta}$. Cuando $\theta = \pm i$, R_- no tiene puntos críticos libres.

(b) Si $\theta \neq \pm 1$, $\theta \neq 0$, los puntos críticos del operador R_+ son las raíces del polinomio asociado, $z_{1,+}^F$ y $z_{2,+}^F$, y los puntos críticos libres $z_{1,+}^C(\theta) = \frac{-2-\sqrt{2-\theta^2}}{\theta}$ y $z_{2,+}^C(\theta) = \frac{-2+\sqrt{2-\theta^2}}{\theta}$. Si $\theta = \pm 1$, los únicos puntos críticos son las raíces de $p_+(z)$.

(c) Si $\theta \neq 0$, el operador R_0 tiene dos puntos críticos libres, $z_{1,0}^C(\theta) = \frac{-2-\sqrt{2}}{\theta}$ y $z_{2,0}^C(\theta) = \frac{-2+\sqrt{2}}{\theta}$. En este caso, la raíz del polinomio $p_0(z)$ no es un punto crítico de R_0 .

Nótese que el caso $\theta = 0$ corresponde al método de Newton, cuya dinámica compleja asociada es bien conocida. La demostración de la Proposición 7.2 utiliza el mismo procedimiento que la de la Proposición 7.1, por lo que se omite en esta memoria.

Como la familia $N2_\theta$ depende del parámetro θ , es útil representar los planos de parámetros asociados a cada punto crítico dado en el resultado anterior. Esta herramienta permite escoger determinados valores de θ y comparar los planos dinámicos resultantes.

Para las implementaciones gráficas de este estudio, todos los planos se han realizado utilizando el software Matlab R2018b. Para los planos de parámetros, θ se ha tomado de un mado de 500×500 valores en el plano complejo en $Re(\theta) \times Im(\theta) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$. Tomando un punto crítico libre como estimación inicial, se itera el método correspondiente hasta que existe convergencia a cualquiera de los puntos fijos con un máximo de 50 iteraciones. Se establece la convergencia cuando la diferencia entre el iterado y alguno de los puntos fijos atractores es menor que 10^{-3} , en cuyo caso el punto correspondiente al valor de θ se representa en rojo. En caso contrario, se representa en negro. Además, la intensidad del color indica que se necesita un número mayor de iteraciones para lograr la convergencia (cuanto más claro es el color, menor número de iteraciones se necesitan).

Las Figuras 7.1-7.3 corresponden a los planos de parámetros de los operadores racionales asociados a los puntos críticos libres. Cada plano de parámetros representa los valores de θ en el plano complejo que dan lugar a los métodos para los cuales existe convergencia a alguno de los puntos fijos atractores.

Se puede observar en la Figura 7.1(a) que solo son rojos los valores de θ con parte real negativa. La Figura 7.1(b) es simétrica a ésta con respecto al eje imaginario. El resto del plano complejo es negro, motivo por el cual estos valores del parámetro deben ser evitados para seleccionar los métodos más estables de la familia $N2_\theta$.

En cuanto al operador racional R_+ , la Figura 7.2 muestra un comportamiento semejante al de la Figura 7.1, pero en este caso los valores de θ que proporcionan los métodos más estables están localizados alrededor del eje complejo en el plano, mostrando una banda vertical a la parte izquierda del semiplano en la Figura 7.2(a) y otra en la parte derecha del semiplano en la Figura 7.2(b).

Los planos de parámetros de la Figura 7.3 muestran un comportamiento completamente distinto a los anteriores. Para el operador R_0 , el punto crítico $z_{1,0}^C(\theta)$ (Figura 7.3(a)) proporciona un plano de parámetros completamente negro, mientras que todos los puntos del plano de parámetros

asociado al punto crítico $z_{2,0}^C(\theta)$ (Figura 7.3(b)) son rojos. Por tanto, un punto crítico libre pertenece a la cuenca de atracción de z_0 para cualquier valor de θ , mientras que el otro pertenece a otra cuenca de atracción independientemente del valor que tome θ .

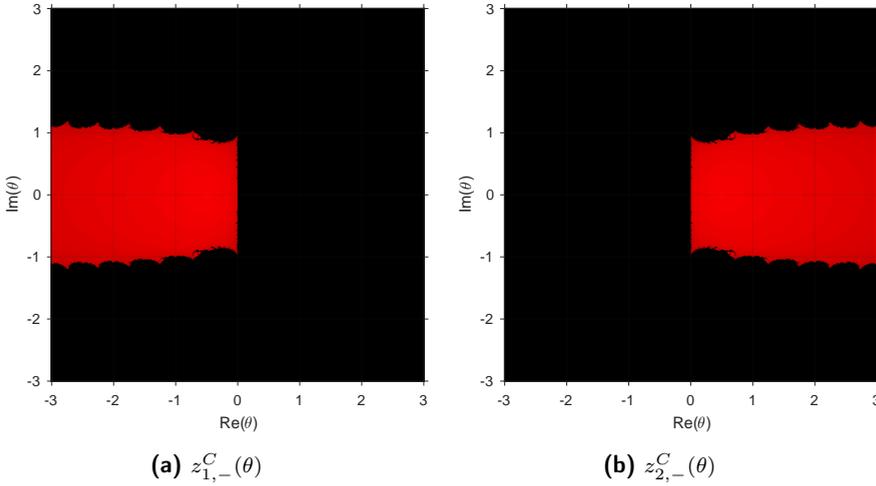


Figura 7.1: Planos de parámetros de R_- asociados a sus puntos críticos libres

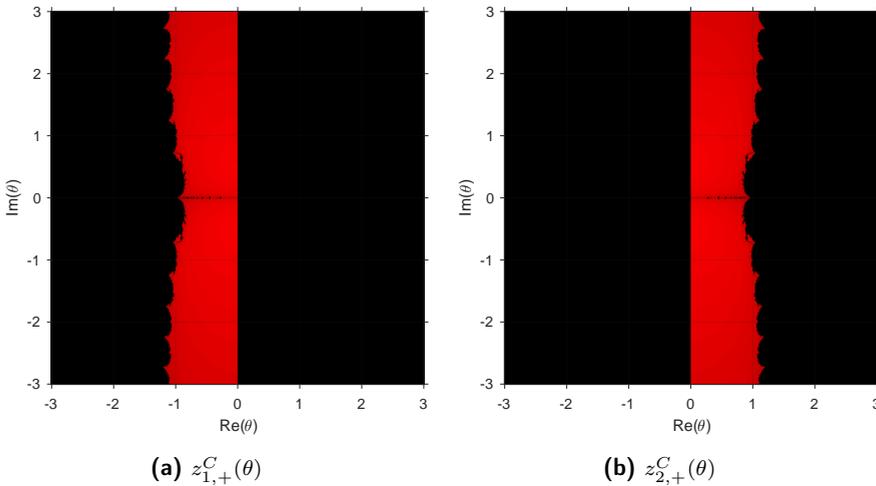


Figura 7.2: Planos de parámetros de R_+ asociados a sus puntos críticos libres

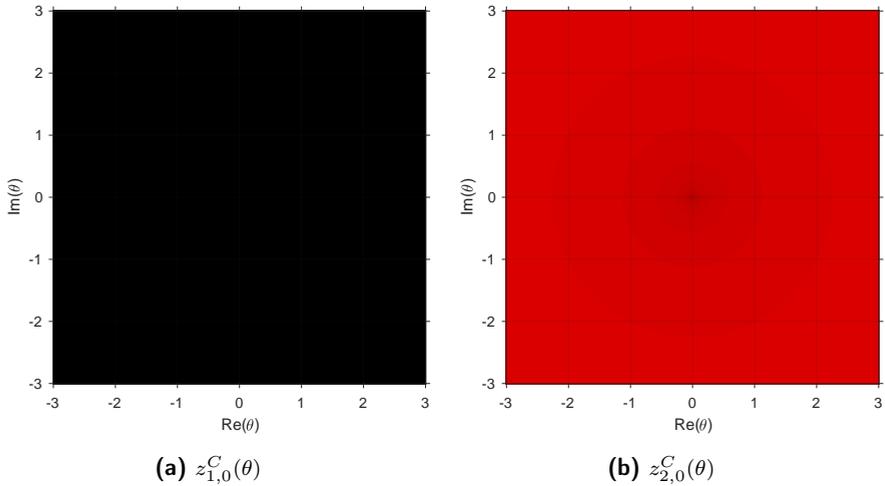


Figura 7.3: Planos de parámetros de R_0 asociados a sus puntos críticos libres

A continuación se muestran diversos planos dinámicos que confirman los resultados obtenidos para los tres operadores, ya que los valores distintos de θ considerados para generarlos se han seleccionado a partir de los resultados obtenidos en los planos de parámetros correspondientes. La ventaja de los planos dinámicos es que, para valores concretos del parámetro, permiten profundizar en el conocimiento de las distintas cuencas de convergencia y su amplitud.

La implementación en Matlab de los planos dinámicos es semejante a la de los planos de parámetros (ver [28]). Para realizar las gráficas, se representan las partes real e imaginaria de cada punto en los ejes de abscisas y ordenadas sobre un mallado de 500×500 puntos en $[-15, 15] \times [-15, 15]$ en el plano complejo. Los criterios de convergencia son los mismos que en los planos de parámetros, pero en este caso se utilizan colores distintos para diferenciar a qué punto fijo del método se ha convergido. El color naranja representa la convergencia a $z_{1,-}$, $z_{1,+}$ y z_0 para cada operador asociado, y el color azul representa la convergencia a $z_{2,-}$ y $z_{2,+}$. Se han representado en los planos dinámicos los puntos fijos atractores con estrellas blancas, mientras que los puntos críticos libres se representan mediante círculos blancos.

En las Figuras 7.4-7.6 se han representado los planos dinámicos asociados a los operadores R_- , R_+ y R_0 , respectivamente, variando el valor de θ . En todos los casos, el parámetro se ha seleccionado a partir de las Figuras 7.1-7.3 con la intención de mostrar diferentes comportamientos dinámicos. Por un lado, en las Figuras 7.4(a)-7.4(b) y en las Figuras 7.5(a)-7.5(b) el parámetro se ha tomado de las correspondientes regiones rojas mostradas en las Figuras 7.1 y 7.2. Por otro lado, las Figuras 7.4(d) y 7.5(d) corresponden a valores del parámetro localizados en las regiones negras de los planos de parámetros.

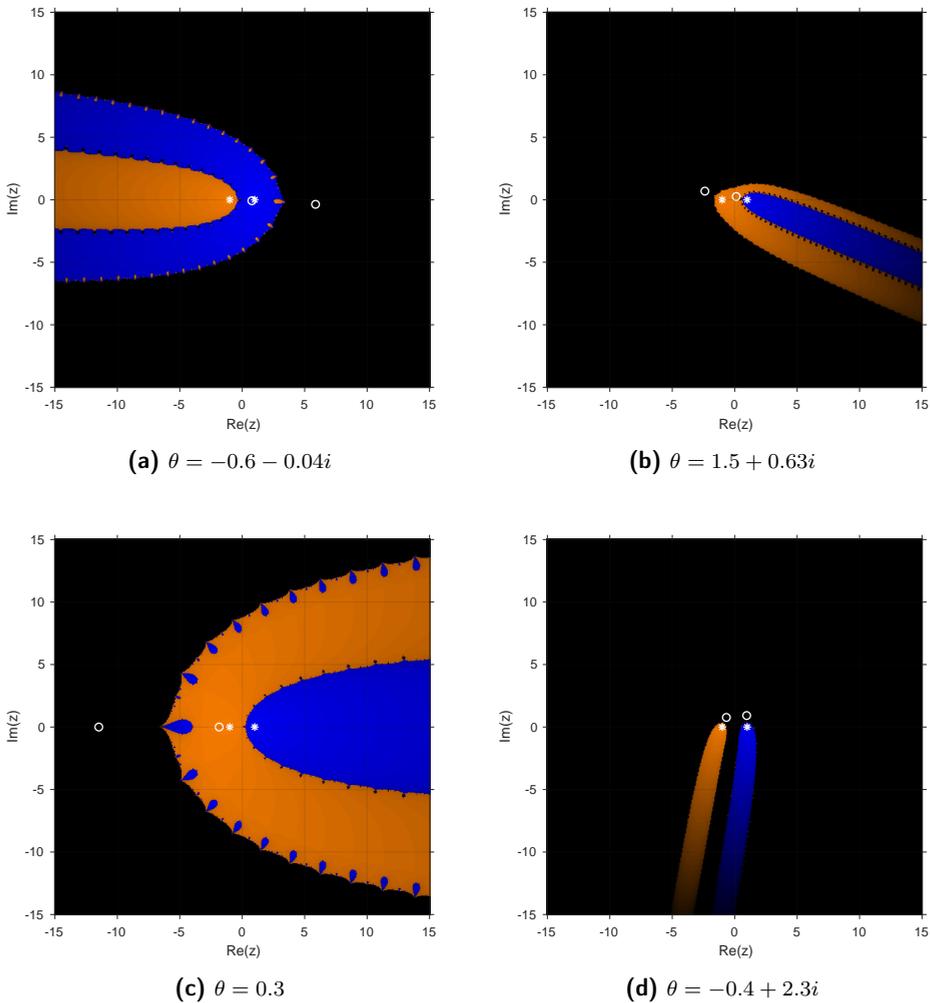


Figura 7.4: Planos dinámicos de R_- para valores distintos de θ

Como es de esperar, cuando θ se toma de una de las regiones rojas del plano de parámetros, las cuencas de atracción en los planos dinámicos correspondientes son más grandes que en los otros casos (Figuras 7.4(d) y 7.5(d)). Sin embargo, en todos los planos dinámicos existe una región negra correspondiente a la cuenca de atracción del infinito. También, en muchos planos dinámicos uno de los dos puntos críticos libres pertenece a la cuenca de atracción del infinito, permaneciendo el otro en la cuenca de atracción de una raíz del polinomio correspondiente.

Además, en las Figuras 7.4(d) y 7.5(d), que son aquellas que tienen regiones negras más amplias, los dos puntos críticos libres pertenecen a la cuenca de atracción del infinito. En la Figura 7.6 se puede observar que la cuenca de atracción del punto fijo z_0 es mayor para valores de θ cerca de 0, permaneciendo un punto crítico libre en la cuenca de atracción de la raíz. Al igual que en los otros operadores, el infinito se comporta como un punto atractor con un punto crítico libre en su cuenca de atracción.

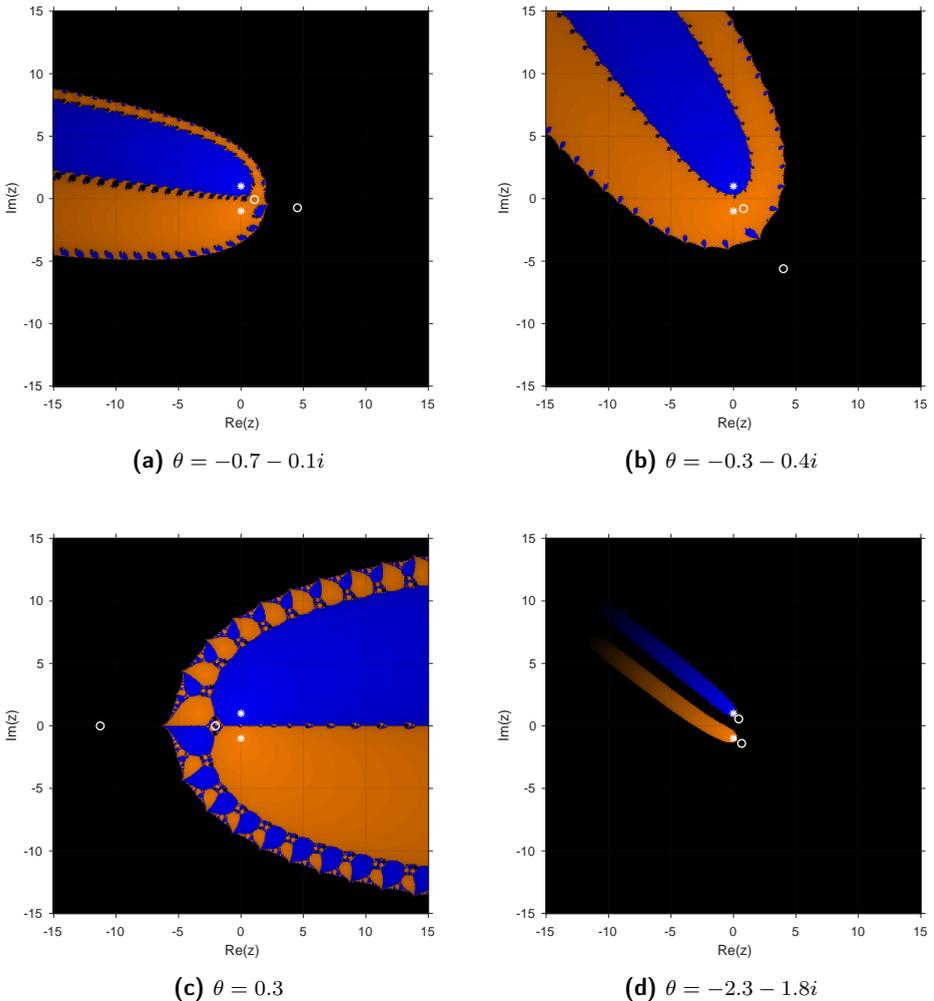


Figura 7.5: Planos dinámicos de R_+ para valores distintos de θ

Las conclusiones observadas en los planos de parámetros se pueden comprobar en las Figuras 7.4(c), 7.5(c) y 7.6(c), donde el valor de $\theta = 0.3$ da lugar a las cuencas de atracción más extensas. Por este motivo, los resultados numéricos que se muestran en la Sección 7.5 se han realizado seleccionando este valor de θ , demostrando la estabilidad del método propuesto.

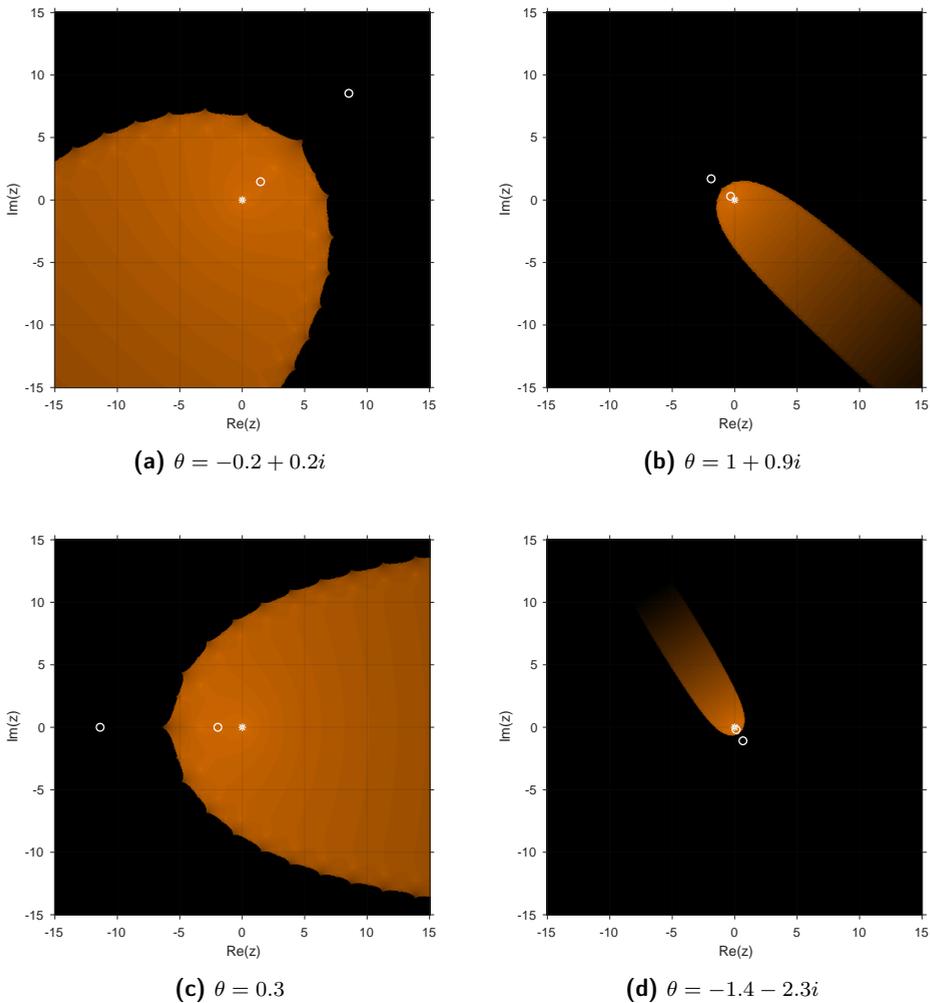


Figura 7.6: Planos dinámicos de R_0 para valores distintos de θ

7.4.2 Dinámica compleja del esquema G4

Existen muchas funciones que satisfacen las condiciones para la función peso establecidas en el Teorema 7.2, como por ejemplo

1. $G(\eta) = 1 + \eta + 2\eta^2$,
2. $G(\eta) = \frac{\eta-1}{2\eta-1}$,
3. $G(\eta) = \frac{\eta^2+1}{1-\eta}$.

Seleccionamos la primera de las funciones peso en esta sección, trabajando con el esquema resultante y dejando para futuros estudios el análisis de las clases obtenidas considerando otras funciones. Asimismo, reemplazando en (7.7) la función peso $G(\eta) = 1 + \eta + 2\eta^2$, el método iterativo resultante, que se ha denotado por G4, es el esquema de dos pasos

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f^2(x_k) + f(x_k)f(y_k) + 2f^2(y_k)}{f(x_k)f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.16)$$

A continuación se realiza un estudio dinámico del método G4 análogo al realizado para la familia de métodos $N2\theta$. Previo a este análisis se prueba el siguiente resultado que permite generalizar el estudio dinámico del método G4 para todo polinomio cuadrático.

Teorema 7.4 (Teorema del Escalado del método G4). *Sea $f(z)$ una función analítica y $A(z) = \mu z + \sigma$, con $\mu \neq 0$, una aplicación afín. Consideremos $h(z) = \lambda(f \circ A)(z)$ con $\lambda \neq 0$. Sean R_f y R_h los operadores de punto fijo del método G4 asociados a las funciones f y h , respectivamente, es decir,*

$$R_f(z) = z - (1 + \eta + 2\eta^2) \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad R_h(z) = z - (1 + \eta + 2\eta^2) \frac{h(z)}{h'(z)}, \quad (7.17)$$

donde $\eta = \frac{f(y)}{f'(z)}$, $y = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ y $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Entonces, el operador de punto fijo R_f es conjugado analíticamente a R_h a través de A , es decir,

$$(A \circ R_h \circ A^{-1})(z) = R_f(z).$$

Demostración. En primer lugar, de (7.17) se obtiene

$$R_f(z) = z - (1 + \eta + 2\eta^2) \frac{f(z)}{f'(z)} = z - \left(1 + \frac{f(y)}{f'(z)} + 2 \frac{f^2(y)}{f'^2(z)} \right) \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Entonces,

$$(R_f \circ A)(z) = A(z) - \left(1 + \frac{f(A(y))}{f'(A(z))} + 2 \frac{f^2(A(y))}{f'^2(A(z))} \right) \frac{f(A(z))}{f'(A(z))}. \quad (7.18)$$

Por otro lado, el operador de punto fijo asociado a la función h , para $\mu \neq 0$, es

$$\begin{aligned} R_h(z) &= z - \left(1 + \frac{h(y)}{h(z)} + 2\frac{h^2(y)}{h^2(z)}\right) \frac{h(z)}{h'(z)} = z - \left(1 + \frac{\lambda f(A(y))}{\lambda f(A(z))} + 2\frac{\lambda^2 f^2(A(y))}{\lambda^2 f^2(A(z))}\right) \frac{\lambda f(A(z))}{\lambda \mu f'(A(z))} \\ &= z - \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{f(A(y))}{f(A(z))} + 2\frac{f^2(A(y))}{f^2(A(z))}\right) \frac{f(A(z))}{f'(A(z))}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $A(x - y) = A(x) - A(y) + \sigma$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} (A \circ R_h)(z) &= A(z) - A\left(\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{f(A(y))}{f(A(z))} + 2\frac{f^2(A(y))}{f^2(A(z))}\right) \frac{f(A(z))}{f'(A(z))}\right) + \sigma \\ &= A(z) - \left(\mu \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{f(A(y))}{f(A(z))} + 2\frac{f^2(A(y))}{f^2(A(z))}\right) \frac{f(A(z))}{f'(A(z))} + \sigma\right) + \sigma \\ &= A(z) - \left(1 + \frac{f(A(y))}{f(A(z))} + 2\frac{f^2(A(y))}{f^2(A(z))}\right) \frac{f(A(z))}{f'(A(z))}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

De las ecuaciones (7.18) y (7.19)

$$(R_f \circ A)(z) = (A \circ R_h)(z).$$

Por tanto, el método G4 satisface el Teorema del Escalado. \square

El Teorema del Escalado permite reducir el estudio dinámico de un método iterativo aplicado sobre familias de funciones al estudio de casos particulares, y por tanto más simples, por medio de una transformación afín de coordenadas. Concretamente, el estudio de la dinámica del operador de punto fijo de G4, R_f , cuando f es un polinomio cuadrático genérico, se puede particularizar a cualquier polinomio cuadrático por medio de un cambio de variables.

A continuación se estudia el comportamiento dinámico de la función racional del método G4 aplicado sobre el polinomio cuadrático genérico $p(z) = (z - a)(z - b)$, donde $a, b \in \hat{\mathbb{C}}$. Sea $R_{a,b}$ el operador de punto fijo obtenido tras aplicar el método G4 sobre $p(z)$

$$R_{a,b}(z) = z - (1 + \eta + 2\eta^2) \frac{p(z)}{p'(z)},$$

con $\eta = \frac{p(y)}{p(z)}$ y $y = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$. Notar que $R_{a,b}$ depende de las dos raíces a y b del polinomio $p(z)$.

Con el objetivo de trabajar con un operador libre de parámetros, se aplica la transformación de Möbius

$$h(u) = \frac{u - a}{u - b}$$

y su función inversa

$$h^{-1}(u) = \frac{ub - a}{u - 1}$$

para obtener el operador de punto fijo

$$M(z) = (h \circ R_{a,b} \circ h^{-1})(z) = \frac{z^4(z^2 + 4z + 5)}{5z^2 + 4z + 1}. \quad (7.20)$$

Entonces, $M(z)$ es conjugado analíticamente a $R_{a,b}(z)$ a través de la transformación de Möbius, por lo que el análisis dinámico se simplifica. La transformación de Möbius satisface $h(\infty) = 1$, $h(a) = 0$ y $h(b) = \infty$. Por tanto, las raíces del polinomio $p(z)$ tras aplicar esta transformación son $z = 0$ y $z = \infty$. En el siguiente resultado se analizan los puntos fijos de (7.20).

Proposición 7.3. *Los puntos fijos del operador M definido en (7.20) son $z_1^F = 0$, siendo superatractor, $z_2^F = 1$ y $z_{3-6}^F = \frac{1}{4} \left(-5 \mp i\sqrt{7} \mp \sqrt{2 - 10i\sqrt{7}} \right)$, que son puntos fijos repulsivos. Además, $z_7^F = \infty$ también es un punto fijo del operador que se comporta como superatractor.*

Demostración. *Los puntos fijos de M se obtienen con las raíces de la ecuación $M(z) = z$, es decir,*

$$\begin{aligned} \frac{z^4(z^2 + 4z + 5)}{5z^2 + 4z + 1} = z &\Leftrightarrow z^4(z^2 + 4z + 5) - 5z^3 - 4z^2 - z = 0 \\ &\Leftrightarrow z(z^5 + 4z^4 + 5z^3 - 5z^2 - 4z - 1) = 0. \end{aligned}$$

Los puntos que satisfacen la ecuación anterior son $z_1^F = 0$ y las raíces del polinomio de grado cinco $z^5 + 4z^4 + 5z^3 - 5z^2 - 4z - 1$, es decir, $z_2^F = 1$ y $z_{3-6}^F = \frac{1}{4} \left(-5 \mp i\sqrt{7} \mp \sqrt{2 - 10i\sqrt{7}} \right)$. Para comprobar que $z = \infty$ es un punto fijo de M , definimos

$$I(z) = \frac{1}{M(1/z)} = \frac{z^4(z^2 + 4z + 5)}{5z^2 + 4z + 1}.$$

Como $I(0) = 0$, $z = 0$ es un punto fijo de $I(z)$ y por tanto $z_7^F = \infty$ es un punto fijo del operador M .

Por otro lado, la derivada del operador de punto fijo tiene la expresión

$$M'(z) = \frac{20z^3(z+1)^4}{(5z^2 + 4z + 1)^2}.$$

Evaluando la derivada en los puntos fijos se obtiene $|M'(0)| = 0$, por lo que z_1^F es superatractor, $|M'(1)| \approx 3.2$, siendo z_2^F repulsor, y $|M'(z_{3-6}^F)| \approx 7.07$, y entonces z_{3-6}^F también son puntos fijos repulsivos.

La estabilidad de $z_7^F = \infty$ se verifica por medio de

$$I'(z) = \frac{20z^3(z+1)^4}{(5z^2 + 4z + 1)^2},$$

que en este caso tiene la misma expresión que $M'(z)$. Entonces, $|I'(0)| = |M'(0)| = 0$, y por tanto z_7^F es un punto fijo superatractor de M . \square

Por otra parte, notemos que las soluciones de $M'(z) = 0$ proporcionan los puntos críticos del operador. Se obtienen los puntos críticos $z_1^C = 0$ y $z_2^C = \infty$, y el punto crítico libre $z_3^F = -1$, el cual es una preimagen de $z = 1$, lo que implica que no es necesario representar el plano de parámetros asociado, ya que se estaría representando la estabilidad de un punto fijo.

Como el operador M no depende de ningún parámetro, para completar el estudio dinámico del método G4 sobre polinomios cuadráticos, únicamente queda representar las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores del operador por medio del plano dinámico correspondiente. En la Figura 7.7 se ha representado el plano dinámico asociado al método G4 para un conjunto de 500×500 estimaciones iniciales en $(Re(z), Im(z)) \in [-5, 5] \times [-5, 5]$ en el plano complejo y siguiendo los mismos criterios de convergencia que en los planos asociados a la familia de métodos $N2\theta$. Las cuencas de atracción de $z_1^F = 0$ y $z_7^F = \infty$ se han representado en naranja y azul, respectivamente, y el punto z_1^F con una estrella blanca. La Figura 7.7 muestra que el método G4 tiene una buena estabilidad, ya que todos los puntos del plano complejo convergen a uno de los dos puntos fijos superatractores.

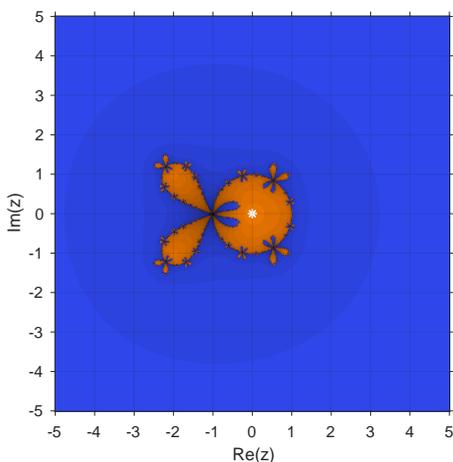


Figura 7.7: Plano dinámico de $M(z)$

También es interesante estudiar el comportamiento dinámico del método cuando se aplica a polinomios cúbicos. En [15] se desarrolla un análisis del método G4 sobre diversos polinomios cúbicos, donde las amplias cuencas de atracción de las raíces de los polinomios considerados revelan una buena estabilidad del método G4 también para polinomios de grado tres.

7.5 Resultados numéricos

En esta sección se realizan diversas pruebas numéricas con el objetivo de comprobar la eficiencia de la familia $N2_\theta$ y del método G4 para calcular la solución de funciones no lineales diferentes. Esta sección también permite contrastar los resultados con otras funciones no lineales más complicadas, y en particular, que es posible obtener valores de θ que proporcionan los métodos más estables de la familia $N2_\theta$ en el proceso de cálculo de raíces. Para lograr estos objetivos, se consideran las funciones test no lineales

- $f_1(x) = \arctan(x)$; $\alpha = 0$,
- $f_2(x) = x^3 - 2x + 2$; $\alpha \approx -1.769292$,
- $f_3(x) = x^3 - 3x + 17$; $\alpha \approx -2.957664$,
- $f_4(x) = e^{-x} + 2 \sin(x) - x + 3.5$; $\alpha \approx 3.273938$,
- $f_5(x) = (x + 2)e^{1-x} + 2x + 5$; $\alpha \approx -2.043518$,
- $f_6(x) = (x - 1)^3 - 1$; $\alpha = 2$,

donde α es la solución exacta.

La familia iterativa (7.1) incluye muchos esquemas iterativos debido a la generalidad y simplicidad de su estructura. A lo largo del trabajo se ha observado que el método de Newton y la familia $N2_\theta$ se pueden obtener fijando las funciones peso $H(t) = t$ y $H(t) = \frac{t}{1+\theta t}$, respectivamente, sobre la familia (7.1). Además, teniendo en cuenta los resultados dinámicos de la Sección 7.4, los valores del parámetro θ que proporcionan los métodos más estables de la familia $N2_\theta$ son aquellos próximos al origen complejo. Por este motivo, los resultados numéricos se realizan con $\theta = 0.3$, denotando al método resultante por $N2_{0.3}$.

También existen otros métodos iterativos conocidos, que pueden redescubrirse mediante diferentes elecciones de la función peso H en (7.1). Por ejemplo, la función

$$H(t) = \left(1 + \frac{\lambda t}{1 + (\beta + \lambda)t}\right) \frac{t}{1 + \lambda t},$$

da lugar a la familia iterativa presentada por Kou y Li en [58], con orden de convergencia cuadrático para cualesquiera valores de los parámetros λ y β . Conforme a los resultados presentados por los autores en [58], se han utilizado para la implementación numérica realizada a continuación los valores de $\lambda = 1$ y $\beta = 0$, denotando al método obtenido fijando estos parámetros por KL. Por otra parte, tomando la función peso

$$H(t) = \frac{2t}{1 + \sqrt{1 + 4\gamma f(x)t^2}}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

se obtiene una familia iterativa diseñada por Noor et al. en [64] que converge cuadráticamente para todo γ . Denotamos por N1 el método correspondiente al parámetro $\gamma = 1$.

Por otro lado, también existen muchos métodos iterativos clásicos que son casos particulares de la familia (7.7). Entre ellos, el método de Traub-Ostrowski [83]

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(y_k) - f(x_k)}{2f(y_k) - f(x_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7.21)$$

obtenido a partir de la función peso $G(\eta) = \frac{\eta-1}{2\eta-1}$, y que en esta sección se denota por TO. También, la familia de métodos iterativos de King [57]

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k) + (\beta + 2)f(y_k)}{f(x_k) + \beta f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7.22)$$

definida por medio de la función peso $G(\eta) = \frac{1 + ((\beta + 2)(\eta + 1) - 1)\eta}{1 + \beta\eta}$. Los resultados numéricos se han realizado sobre el método de la familia (7.22) resultante de considerar $\beta = 1$, denotado por K1.

A partir de los esquemas que se acaban de describir, se realiza a continuación una comparación numérica entre los métodos de Newton, KL, N1 y $N2_{0,3}$, con orden de convergencia cuadrático, y los métodos TO, K1 y G4, cuyo orden de convergencia es cuatro, con el objetivo de mostrar el funcionamiento de métodos distintos que guardan una estructura iterativa semejante y en algunos casos el mismo orden de convergencia.

Las Tablas 7.1 y 7.2 resumen los resultados numéricos obtenidos para las funciones test no lineales $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, y diferentes estimaciones iniciales. Los resultados numéricos se han obtenido utilizando el software Matlab R2018b con aritmética de precisión variable con 1000 dígitos. Las tablas muestran el número de iteraciones que cada método necesita hasta lograr la convergencia, establecida cuando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-200}$ o $|f(x_{k+1})| < 10^{-200}$. Si tras 200 iteraciones el método no ha convergido a la solución de la ecuación, se representa con "-". También se muestra una aproximación computacional del orden de convergencia de los métodos calculada mediante el ACOC [44].

Como se puede observar en los resultados de las Tablas 7.1 y 7.2, el método de Newton no siempre converge para las funciones test no lineales consideradas, especialmente cuando la estimación inicial no está próxima a la solución. Se puede observar un comportamiento parecido en los métodos KL, N1 y K1 en algunos de los ejemplos propuestos. Queda probada la eficiencia del método de la familia $N2_\theta$ para $\theta = 0.3$, ya que converge en todos los casos y en general requiere de un número igual o menor de iteraciones que los demás métodos con orden cuadrático propuestos. Como es de esperar, los resultados obtenidos para los métodos de orden cuatro

f	x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
$f_1(x)$	1	Newton	7	2.543e-83	1.097e-248	3.0
		KL	6	3.550e-167	1.491e-500	3.0
		N1	6	4.897e-68	7.828e-203	3.0
		$N2_{0,3}$	8	2.774e-106	2.309e-212	2.0
		TO	5	1.527e-134	1.847e-670	5.0
		K1	–			
		G4	6	2.349e-49	1.590e-244	5.0
	1.5	Newton	–			
		KL	6	5.337e-97	5.067e-290	3.0
		N1	7	1.270e-155	1.365e-465	3.0
		$N2_{0,3}$	9	7.317e-172	1.606e-343	2.0
		TO	5	6.489e-51	2.557e-252	5.0
		K1	–			
		G4	–			
$f_2(x)$	-1.5	Newton	9	9.605e-167	4.897e-332	2.0
		KL	9	2.454e-184	3.196e-367	2.0
		N1	8	4.761e-113	1.203e-224	2.0
		$N2_{0,3}$	8	5.920e-114	1.083e-226	2.0
		TO	5	8.310e-179	9.627e-713	4.0
		K1	5	8.913e-65	1.164e-255	4.0
		G4	5	1.711e-88	1.111e-350	4.0
	1	Newton	–			
		KL	–			
		N1	–			
		$N2_{0,3}$	36	1.304e-114	5.259e-228	2.0
		TO	14	2.881e-142	1.390e-566	4.0
		K1	7	1.093e-58	2.634e-231	4.0
		G4	8	3.457e-54	1.852e-213	4.0
$f_3(x)$	-2	Newton	10	9.193e-166	7.499e-330	2.0
		KL	8	1.610e-104	2.301e-207	2.0
		N1	11	1.020e-131	9.229e-262	2.0
		$N2_{0,3}$	8	3.976e-123	3.004e-245	2.0
		TO	5	5.36e-97	7.523e-386	4.0
		K1	11	1.868e-51	1.055e-202	4.0
		G4	7	4.985e-72	3.757e-285	4.0
	-3.5	Newton	9	5.155e-191	2.358e-380	2.0
		KL	10	1.404e-146	1.750e-291	2.0
		N1	12	2.149e-201	4.100e-401	2.0
		$N2_{0,3}$	8	9.138e-187	1.587e-372	2.0
		TO	4	8.105e-51	3.932e-201	4.0
		K1	5	3.612e-137	1.475e-545	4.0
		G4	5	2.319e-146	1.761e-582	4.0

Tabla 7.1: Resultados numéricos para las funciones test f_1 , f_2 y f_3

f	x_0	Método	iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	ACOC
$f_4(x)$	5	Newton	–			
		KL	8	5.798e-183	5.072e-366	2.0
		N1	26	1.042e-191	1.639e-383	2.0
		$N_{2_{0.3}}$	10	3.515e-178	9.330e-356	2.0
		TO	50	6.353e-87	2.699e-347	4.0
		K1	–			
		G4	–			
	2	Newton	9	2.171e-175	7.109e-351	2.0
		KL	–			
		N1	10	5.682e-176	4.871e-352	2.0
		$N_{2_{0.3}}$	17	1.802e-126	2.451e-252	2.0
		TO	5	2.301e-112	4.642e-449	4.0
		K1	6	1.887e-136	2.388e-545	4.0
		G4	5	2.028e-67	3.055e-269	4.0
$f_5(x)$	2	Newton	20	3.781e-178	3.064e-354	2.0
		KL	10	1.189e-159	3.029e-317	2.0
		N1	–			
		$N_{2_{0.3}}$	13	2.411e-162	8.294e-323	2.0
		TO	7	1.114e-143	1.185e-571	4.0
		K1	–			
		G4	–			
	-1.8	Newton	9	2.128e-159	9.703e-317	2.0
		KL	9	2.065e-174	9.143e-347	2.0
		N1	8	1.067e-126	2.441e-251	2.0
		$N_{2_{0.3}}$	8	7.721e-105	8.506e-208	2.0
		TO	5	2.019e-191	1.280e-762	4.0
		K1	5	3.296e-60	1.313e-236	4.0
		G4	5	7.527e-85	2.463e-335	4.0
$f_6(x)$	3.5	Newton	11	2.21e-169	1.465e-337	2.0
		KL	11	4.950e-120	7.349e-239	2.0
		N1	14	4.69e-194	6.599e-387	2.0
		$N_{2_{0.3}}$	11	1.346e-103	7.063e-206	2.0
		TO	6	1.58e-195	1.245e-779	4.0
		K1	6	4.278e-85	6.700e-337	4.0
		G4	6	2.633e-97	6.727e-386	4.0
	-1.2	Newton	23	4.004e-133	4.811e-265	2.0
		KL	–			
		N1	20	1.444e-112	6.259e-224	2.0
		$N_{2_{0.3}}$	23	4.364e-151	7.427e-301	2.0
		TO	8	1.370e-77	7.050e-308	4.0
		K1	39	2.275e-180	5.360e-718	4.0
		G4	15	2.245e-59	3.555e-234	4.0

Tabla 7.2: Resultados numéricos para las funciones test f_4 , f_5 y f_6

mejoran los de los métodos con orden cuadrático. Aunque hay determinados ejemplos para los cuales el método G4 no converge, se ha observado que es un método estable en estimaciones iniciales para las cuales los demás métodos necesitan en general un número elevado de iteraciones o incluso no son convergentes.

7.6 Conclusiones

Comenzando con una expresión iterativa simple con una función peso, se ha obtenido una familia paramétrica de métodos iterativos con orden de convergencia cuadrático. Mediante la composición del esquema iterativo que define esta familia, se ha diseñado una nueva clase iterativa de dos pasos óptima con orden de convergencia cuatro. También se ha analizado el comportamiento asintótico de una familia de esquemas iterativos obtenida a partir de la familia inicial y uno de los métodos de la familia de dos pasos por medio de la dinámica compleja, obteniendo los puntos fijos y críticos de las funciones racionales asociadas a polinomios cuadráticos. Los planos de parámetros han sido muy útiles para determinar los valores del parámetro de la familia que dan lugar a los métodos más estables. A su vez, los planos dinámicos muestran un incremento en el tamaño de las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores para valores del parámetro cercanos a cero, y convergencia en todo el plano complejo para el método de dos pasos seleccionado.

Por otra parte, los experimentos numéricos muestran que las familias propuestas permiten calcular aproximaciones a las raíces de funciones de prueba no lineales más eficientemente que algunos métodos con orden de convergencia dos o cuatro como el método de Newton, entre otros.

Capítulo 8

Métodos iterativos para sistemas no lineales con funciones peso

Basado en:

[19] *"Generalized high-order classes for solving nonlinear systems and their applications", Mathematics.*

[25] *"On the effect of the multidimensional weight functions on the stability of iterative processes", Journal of Computational and Applied Mathematics.*

8.1 Introducción

El interés en el diseño de procesos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de la forma $F(x) = 0$ ha tenido un gran crecimiento en las últimas décadas. Existe una extensa literatura sobre métodos iterativos para problemas escalares, en cuyo caso se puede encontrar una buena visión general en [2, 68]. No obstante, la cantidad de trabajos sobre esquemas iterativos para problemas multidimensionales es más reducida, aunque también se pueden encontrar métodos con órdenes de convergencia altos en [5, 38, 78, 86, 88]. Además, a pesar de que el análisis dinámico de los esquemas proporciona información relevante sobre su estabilidad en función de las estimaciones iniciales, el estudio dinámico para esquemas multidimensionales no es tan usual. Este análisis se realiza en [10, 42, 43, 80], entre otros.

En este capítulo se propone una nueva familia de métodos iterativos para resolver problemas no lineales con una función peso matricial en su estructura iterativa. Tras estudiar el orden de convergencia de esta clase, se seleccionan miembros de esta familia y se compara la eficiencia de los mismos, análisis que comprende la Sección 8.2 del capítulo. A continuación, en la Sección 8.3 se propone la composición de la familia inicial consigo misma, obteniendo esquemas de mayor orden. Por último, el análisis de la estabilidad de clases iterativas presentadas a lo largo del capítulo y la aplicación de algunas de ellas a la resolución de problemas no lineales se desarrolla en las Secciones 8.4 y 8.5, respectivamente, determinando los métodos iterativos con mayor estabilidad y comportamiento para aproximar soluciones de sistemas no lineales concretos.

8.2 Familia de métodos iterativos Γ

El punto de partida de este capítulo es la familia iterativa presentada en [15], cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - G(\eta_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde $G(\eta)$ es una función peso con variable $\eta = \frac{f(y)}{f(x)}$. En el Capítulo 7 de esta memoria se ha probado (Teorema 7.2) que esta familia tiene orden de convergencia 4 cuando la función peso satisface las condiciones $G(0) = G'(0) = 1$, $G''(0) = 4$ y $|G'''(0)| < \infty$. En este capítulo se extiende el esquema iterativo (8.1) para la resolución de problemas multidimensionales. Con este objetivo, se requiere de una definición alternativa de la variable η . Para ello, se desarrolla la variable de la función peso de la forma

$$\eta_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)} = \frac{f(y_k)}{(x_k - y_k)f'(x_k)} = -\frac{f[y_k, x_k]}{f'(x_k)} + \frac{f(x_k)}{(x_k - y_k)f'(x_k)} = \frac{f'(x_k) - f[y_k, x_k]}{f'(x_k)}.$$

Así, la extensión de la familia (8.1) para resolver sistemas de ecuaciones no lineales es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \Gamma(\eta^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.2)$$

donde

$$\eta^{(k)} = [F'(x^{(k)})]^{-1} (F'(x^{(k)}) - [y^{(k)}, x^{(k)}; F]), \quad (8.3)$$

y $\Gamma : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función peso matricial de variable matricial. Concretamente, si $X = \mathbb{R}^{n \times n}$ denota el espacio de todas las matrices reales de dimensión $n \times n$, podemos definir [8] $\Gamma : X \rightarrow X$ tal que sus derivadas Fréchet satisfacen

- (a) $\Gamma'(u)(v) = G_1 uv$, siendo $\Gamma' : X \rightarrow \mathcal{L}(X)$ y $G_1 \in \mathbb{R}$,
- (b) $\Gamma''(u, v)(w) = G_2 uvw$, donde $\Gamma'' : X \times X \rightarrow \mathcal{L}(X)$ y $G_2 \in \mathbb{R}$,
- (c) $\Gamma'''(u, v, w)(t) = G_3 uvwt$, con $\Gamma''' : X \times X \times X \rightarrow \mathcal{L}(X)$ y $G_3 \in \mathbb{R}$,

donde $\mathcal{L}(X)$ denota el espacio de las aplicaciones lineales de X en sí mismo.

Además, la definición de $\eta^{(k)}$ en (8.3) utiliza el operador de diferencias divididas de F en \mathbb{R}^n , $[\cdot, \cdot; F] : D \times D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, ya introducido en el Capítulo 2, definido en [65] como

$$[x, y; F](x - y) = F(x) - F(y), \quad \text{para todo } x, y \in D.$$

El interés en el estudio de la familia (8.2), también denotada como familia Γ en este capítulo, reside en su eficiencia, ya que los sistemas lineales a resolver en cada paso de su estructura iterativa tienen la misma matriz de coeficientes. Además, también engloba métodos o familias de esquemas iterativos conocidos determinados por la selección de distintas funciones peso.

El siguiente resultado prueba que la familia Γ mantiene el mismo orden de convergencia que el correspondiente esquema para resolver ecuaciones no lineales para determinadas condiciones de la función peso matricial.

Teorema 8.1. *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable Fréchet en un conjunto abierto y convexo D y $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Supongamos que la estimación inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ está suficientemente cerca de la solución y que $\Gamma(\eta^{(k)})$ satisface $\Gamma(0) = I$, $G_1 = 1$, $G_2 = 4$ y $|G_3| < +\infty$, donde I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$. Entonces, la familia de métodos iterativos (8.2) converge a x^* con orden de convergencia 4, siendo su ecuación del error*

$$e^{(k+1)} = \left(-C_3 C_2 + \left(5 - \frac{1}{6} G_3 \right) C_2^3 \right) e^{(k)4} + \mathcal{O} \left(e^{(k)5} \right),$$

donde $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ denota el error en la k -ésima iteración y $C_j = \frac{1}{j!} [F'(x^*)]^{-1} F^{(j)}(x^*)$, $j \geq 2$.

Demostración. Utilizando desarrollos en serie de Taylor de la función F en torno a la solución x^* , $F(x^{(k)})$ y $F'(x^{(k)})$ se pueden expresar como

$$F(x^{(k)}) = F'(x^*) \left[e^{(k)} + C_2 e^{(k)2} + C_3 e^{(k)3} + C_4 e^{(k)4} \right] + \mathcal{O} \left(e^{(k)5} \right), \quad (8.4)$$

$$F'(x^{(k)}) = F'(x^*) \left[I + 2C_2 e^{(k)} + 3C_3 e^{(k)2} + 4C_4 e^{(k)3} \right] + \mathcal{O} \left(e^{(k)4} \right).$$

De la misma forma, se verifica

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = \left[X_1 + X_2 e^{(k)} + X_3 e^{(k)2} + X_4 e^{(k)3} \right] [F'(x^*)]^{-1} + \mathcal{O} \left(e^{(k)4} \right). \quad (8.5)$$

Como $[F'(x^{(k)})]^{-1} F'(x^{(k)}) = I$, se tiene que $X_1 = I$ y

$$X_j = - \sum_{i=2}^j i X_{j-i+1} C_i, \quad j > 1. \quad (8.6)$$

De (8.4) y (8.5), se obtiene

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) = e^{(k)} - C_2 e^{(k)2} + J_3 e^{(k)3} + J_4 e^{(k)4} + \mathcal{O} \left(e^{(k)5} \right), \quad (8.7)$$

para los valores

$$J_j = C_j + \sum_{i=3}^j X_{j-i+2} C_{i-1} + X_j, \quad j > 2. \quad (8.8)$$

Utilizando los desarrollos anteriores, el primer paso del esquema iterativo (8.2) es de la forma

$$y^{(k)} - x^* = e^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) = C_2 e^{(k)2} - J_3 e^{(k)3} - J_4 e^{(k)4} + \mathcal{O} \left(e^{(k)5} \right). \quad (8.9)$$

La definición del operador de diferencias divididas se ha mostrado en el Capítulo 2 de esta memoria, por medio de la fórmula de Genocchi-Hermite [65] y desarrollos en serie de Taylor. En particular, para $y^{(k)}$ dado por (8.9)

$$\begin{aligned} [y^{(k)}, x^{(k)}; F] &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!} F^{(i)}(x^{(k)}) (y^{(k)} - x^{(k)})^{i-1} + \mathcal{O} \left(e^{(k)4} \right) \\ &= F'(x^*) \left[I + C_2 e^{(k)} + S_2 e^{(k)2} + S_3 e^{(k)3} \right] + \mathcal{O} \left(e^{(k)4} \right), \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde S_i , $i \geq 2$, es

$$\begin{aligned} S_2 &= C_2^2 + C_3, \\ S_3 &= C_4 + C_3 C_2 - C_2 J_3. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Por tanto, el valor de $\eta^{(k)}$ está dado por

$$\eta^{(k)} = [F'(x^{(k)})]^{-1}(F'(x^{(k)}) - [y^{(k)}, x^{(k)}; F]) = C_2 e^{(k)} + A_2 e^{(k)2} + A_3 e^{(k)3} + \mathcal{O}(e^{(k)4}),$$

siendo

$$\begin{aligned} A_2 &= 2C_3 - 3C_2^2, \\ A_3 &= 8C_2^3 + 3C_4 - 6C_2C_3 - 4C_3C_2. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Utilizando (8.12), se calculan las potencias sucesivas de $\eta^{(k)}$:

$$\eta^{(k)2} = C_2^2 e^{(k)2} + B_3 e^{(k)3} + \mathcal{O}(e^{(k)4}),$$

con $B_3 = C_2A_2 + A_2C_2$, y

$$\eta^{(k)3} = C_2^3 e^{(k)3} + \mathcal{O}(e^{(k)4}).$$

Con el desarrollo de Taylor de $\Gamma(\eta^{(k)})$ en torno a 0 se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(\eta^{(k)}) &= \Gamma(0) + G_1\eta^{(k)} + \frac{1}{2!}G_2\eta^{(k)2} + \frac{1}{3!}G_3\eta^{(k)3} + \mathcal{O}(\eta^{(k)4}) \\ &= \Gamma(0) + G_1C_2e^{(k)} + \left(G_1A_2 + \frac{1}{2}G_2C_2^2\right)e^{(k)2} \\ &\quad + \left(G_1A_3 + \frac{1}{2}G_2B_3 + \frac{1}{6}G_3C_2^3\right)e^{(k)3} + \mathcal{O}(e^{(k)4}). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Gamma(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) &= \Gamma(0)e^{(k)} + (G_1 - \Gamma(0))C_2e^{(k)2} \\ &\quad + (\Gamma(0)J_3 + G_1(-C_2^2 + A_2) + \frac{1}{2}G_2C_2^2)e^{(k)3} \\ &\quad + (\Gamma(0)J_4 + G_1(C_2J_3 - A_2C_2 + A_3) \\ &\quad + \frac{1}{2}G_2(-C_2^3 + B_3) + \frac{1}{6}G_3C_2^3)e^{(k)4} + \mathcal{O}(e^{(k)5}). \end{aligned}$$

Por último, la ecuación del error de la familia iterativa (8.2) es

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= e^{(k)} - \Gamma(\eta^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \\ &= (I - \Gamma(0))e^{(k)} + (\Gamma(0) - G_1)C_2e^{(k)2} + \left(-\Gamma(0)J_3 + G_1(C_2^2 - A_2) - \frac{1}{2}G_2C_2^2\right)e^{(k)3} \\ &\quad + \left(-\Gamma(0)J_4 + G_1(-C_2J_3 + A_2C_2 - A_3) + \frac{1}{2}G_2(C_2^3 - B_3) - \frac{1}{6}G_3C_2^3\right)e^{(k)4} \\ &\quad + \mathcal{O}(e^{(k)5}). \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones $\Gamma(0) = I$, $G_1 = 1$ y $G_2 = 4$, la ecuación del error resultante es

$$e^{(k+1)} = \left(-C_3 C_2 + \left(5 - \frac{1}{6} G_3\right) C_2^3\right) e^{(k)4} + \mathcal{O}\left(e^{(k)5}\right).$$

Como consecuencia, la familia (8.2) tiene orden de convergencia 4. □

Nótese que para cada función peso $\Gamma(\eta)$ se obtiene un esquema iterativo distinto que pertenece a la familia Γ . Algunos ejemplos de funciones peso matriciales que satisfacen las condiciones del Teorema 8.1 son

$$\begin{aligned} (a) \quad \Gamma(\eta^{(k)}) &= I + \eta^{(k)} + 2\eta^{(k)2}, \\ (b) \quad \Gamma(\eta^{(k)}) &= [I - 2\eta^{(k)}]^{-1}(I - \eta^{(k)}), \\ (c) \quad \Gamma(\eta^{(k)}) &= [I + \eta^{(k)}]^{-1}(I - 2\eta^{(k)2}). \end{aligned} \tag{8.13}$$

Debido a la generalidad del esquema (8.2), una forma de seleccionar los métodos más eficientes de la familia es realizando una comparación de los ejemplos propuestos en términos del coste computacional y número de evaluaciones funcionales. Para esta comparativa, se utiliza el índice de eficiencia definido por Ostrowski [66] como $I = p^{1/d}$, donde p es el orden del método y d es el número de nuevas evaluaciones funcionales requiridas por iteración. Como los métodos propuestos pueden ser utilizados para resolver sistemas de ecuaciones de grandes dimensiones, el coste computacional para resolverlos dependiendo de su tamaño es un parámetro a tener en cuenta. Así, también se compara la eficiencia de los métodos utilizando el índice de eficiencia computacional introducido en [40] como $IC = p^{1/(d+op)}$, donde op es el número de operaciones (productos y cocientes) por iteración.

Las Tablas 8.1 y 8.2 resumen los resultados de los índices de eficiencia y eficiencia computacional para cada método, donde $\mathcal{G}1$, $\mathcal{G}2$ y $\mathcal{G}3$ denotan los esquemas iterativos pertenecientes a la familia Γ resultantes de utilizar las funciones peso (8.13), respectivamente. También se han comparado los resultados obtenidos con otro esquema iterativo de características similares a la familia Γ . En este caso, el método propuesto por Sharma et al. [79], denotado en este capítulo SGS, con orden de convergencia cuatro y expresión iterativa

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3}[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{1}{2}L_k[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{8.14}$$

donde $L_k = -I + \frac{9}{4}[F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}) + \frac{3}{4}[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)})$.

Para cada método, la Tabla 8.1 muestra el número de evaluaciones distintas de la función F , de la matriz Jacobiana F' y el número de operadores de diferencias divididas distintos realizados en cada iteración, denotados como nF , nF' y nDD , respectivamente. Todos los esquemas requieren n y n^2 evaluaciones funcionales para calcular F y F' , respectivamente, y $\frac{n(n-1)}{2}$ para

cada operador de diferencias divididas. La suma de todas las evaluaciones funcionales requeridas se muestra en la tabla así como el índice de eficiencia de cada método.

Método	nF	nF'	nDD	d	p	I
$\mathcal{G}1$	1	1	1	$\frac{n(3n+1)}{2}$	4	$\frac{2}{4 \cdot 3n^2+n}$
$\mathcal{G}2$	1	1	1	$\frac{n(3n+1)}{2}$	4	$\frac{2}{4 \cdot 3n^2+n}$
$\mathcal{G}3$	1	1	1	$\frac{n(3n+1)}{2}$	4	$\frac{2}{4 \cdot 3n^2+n}$
SGS	1	2	0	$2n^2+n$	4	$\frac{1}{4 \cdot 2n^2+n}$

Tabla 8.1: Índice de eficiencia de los métodos $\mathcal{G}1$, $\mathcal{G}2$, $\mathcal{G}3$ y SGS

En la Tabla 8.1 se puede observar que, como los métodos $\mathcal{G}1$, $\mathcal{G}2$ y $\mathcal{G}3$ pertenecen a la misma clase iterativa, requieren de las mismas evaluaciones funcionales, y por tanto tienen el mismo índice de eficiencia. En cambio, las evaluaciones funcionales del método SGS son mayores debido a las dos matrices Jacobianas distintas evaluadas en cada iteración. Los cuatro métodos tienen el mismo orden de convergencia, por lo que el índice de eficiencia de SGS es menor que en los métodos de la familia Γ seleccionados.

Considerando el coste computacional de la Tabla 8.2, el valor de $M \times V$ es el número de productos matriz-vector realizados, con n^2 operaciones por cada producto. Por otro lado, para calcular un operador lineal inverso se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales de dimensión $n \times n$, en el cual se calcula una descomposición LU de matrices y se resuelven dos sistemas triangulares, con un coste total de $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$ operaciones. Sin embargo, para resolver r sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes, la descomposición LU solo se realiza una vez, de forma que el coste computacional total es únicamente $\frac{1}{3}n^3 + rn^2 - \frac{1}{3}n$. Los valores de S1 y S2 en la tabla son el número de sistemas lineales que cada esquema resuelve por iteración con matriz de coeficientes $F'(x^{(k)})$ u otra matriz, respectivamente.

Método	d	S1	S2	$M \times V$	op	p	IC
$\mathcal{G}1$	$\frac{n(3n+1)}{2}$	3	0	2	$\frac{1}{3}n^3 + 5n^2 - \frac{1}{3}n$	4	$4 \cdot \frac{\frac{1}{3}n^3 + \frac{13}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}{4 \cdot 3n^2+n}$
$\mathcal{G}2$	$\frac{n(3n+1)}{2}$	3	2	1	$\frac{2}{3}n^3 + 6n^2 - \frac{2}{3}n$	4	$4 \cdot \frac{\frac{2}{3}n^3 + \frac{15}{2}n^2 - \frac{1}{6}n}{4 \cdot 3n^2+n}$
$\mathcal{G}3$	$\frac{n(3n+1)}{2}$	1	1	1	$\frac{2}{3}n^3 + 8n^2 - \frac{2}{3}n$	4	$4 \cdot \frac{\frac{2}{3}n^3 + \frac{19}{2}n^2 - \frac{1}{6}n}{4 \cdot 3n^2+n}$
SGS	$2n^2+n$	1	2	0	$\frac{2}{3}n^3 + 4n^2 - \frac{2}{3}n$	4	$4 \cdot \frac{\frac{2}{3}n^3 + 6n^2 + \frac{1}{3}n}{4 \cdot 2n^2+n}$

Tabla 8.2: Índice de eficiencia computacional de los métodos $\mathcal{G}1$, $\mathcal{G}2$, $\mathcal{G}3$ y SGS

Tal y como muestran los resultados de la Tabla 8.2, de entre los métodos pertenecientes a la familia Γ , el más eficiente es el método $\mathcal{G}1$. Los resultados obtenidos en esta tabla se representan en la Figura 8.1, donde se ha representado el valor de $\log_4(IC)$ de los cuatro métodos variando el tamaño n del sistema. Como se puede observar, cuando el valor de n aumenta, el índice de eficiencia computacional de todos los métodos disminuye, siendo siempre mayor para los métodos $\mathcal{G}1$ y SGS que para los métodos $\mathcal{G}2$ y $\mathcal{G}3$.

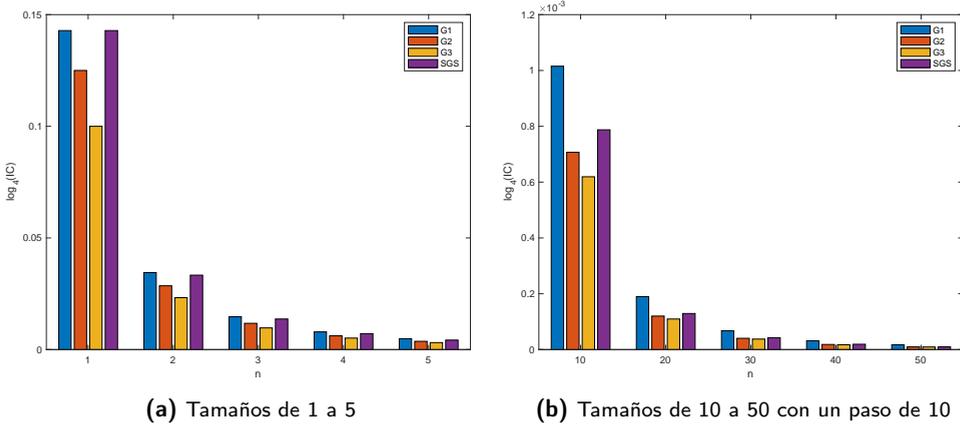


Figura 8.1: $\log_4(IC)$ de los métodos $\mathcal{G}1$, $\mathcal{G}2$, $\mathcal{G}3$ y SGS

Tras demostrar el orden de convergencia de la familia Γ y comparar los índices de eficiencia y eficiencia computacional de miembros de esta clase, se analiza la estabilidad de algunos de estos miembros utilizando herramientas de dinámica real multidimensional. Este estudio es el que permite determinar los miembros más estables de la familia. Previo a este análisis dinámico, se propone a continuación la extensión de la clase propuesta a una familia de esquemas iterativos de cuatro pasos obtenida con la composición de la familia Γ consigo misma.

8.3 Extensión de la familia Γ a familias de métodos de cuatro pasos

La clase iterativa (8.2) se diseña a partir de un proceso de composición de esquemas iterativos y el uso de funciones peso matriciales. Siguiendo este mismo proceso, una extensión directa de la clase iterativa Γ a familias de órdenes de convergencia mayor es la siguiente familia, denotada

Γ_2 , definida como

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= x^{(k)} - \Gamma_1(\eta^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ w^{(k)} &= z^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(z^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \Gamma_2(\tau^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(z^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.15)$$

donde $\Gamma_1(\eta)$ y $\Gamma_2(\tau)$ son dos funciones peso matriciales cuyas variables son

$$\begin{aligned} \eta &= [F'(x)]^{-1} (F'(x) - [y, x; F]), \\ \tau &= [F'(x)]^{-1} (F'(x) - [z, w; F]). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Nótese que, a pesar de que ahora se tiene una clase iterativa de cuatro pasos, el único sistema lineal a resolver en cada iteración de (8.15) tiene también la misma matriz de coeficientes. Aunque el número de evaluaciones de la función no lineal F se ha incrementado con respecto a la familia Γ , también lo hace su orden de convergencia.

Teorema 8.2. *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable Fréchet en un conjunto abierto y convexo D y $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Supongamos que la estimación inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ está lo suficientemente cerca de la solución y que las funciones peso $\Gamma_1(\eta)$ y $\Gamma_2(\tau)$ satisfacen*

$$(a) \quad \Gamma_1(0) = I, \quad G_1 = 1, \quad G_2 = 4 \quad \text{y} \quad G_3 = 30,$$

$$(b) \quad \Gamma_2(0) = I, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = 2 \quad \text{y} \quad H_3 = 6,$$

Entonces, todos los métodos iterativos de la familia Γ_2 convergen a x^* con orden de convergencia 9.

Demostración. *Utilizando los desarrollos de la prueba del Teorema 8.1 (con más términos en las expresiones del error) y siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene para el segundo paso de la familia (8.15)*

$$\begin{aligned} z^{(k)} - x^* &= e^{(k)} - \Gamma_1(\eta^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \\ &= -K_4 e^{(k)4} - K_5 e^{(k)5} - K_6 e^{(k)6} - K_7 e^{(k)7} - K_8 e^{(k)8} - K_9 e^{(k)9} + \mathcal{O}\left(e^{(k)10}\right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Los coeficientes K_j se obtienen utilizando las expresiones (8.6), (8.8), (8.11), (8.12) y

$$S_4 = C_5 + C_3C_2^2 + C_4C_2 - C_2J_4 - C_3J_3,$$

$$S_5 = C_6 + C_4C_2^2 + C_5C_2 - C_2J_5 - C_3J_4 - C_4J_3 - C_3C_2J_3 - C_3J_3C_2,$$

$$S_6 = C_7 + C_4C_2^3 + C_5C_2^2 + C_6C_2 - C_2J_6 - C_3J_5 - C_4J_4 - C_5J_3 - C_3C_2J_4 - C_3J_4C_2 \\ - C_4C_2J_3 - C_4J_3C_2 + C_3J_3^2,$$

$$S_7 = C_8 + C_5C_2^3 + C_6C_2^2 + C_7C_2 - C_2J_7 - C_3J_6 - C_4J_5 - C_5J_4 - C_6J_3 - C_3C_2J_5 \\ - C_3J_5C_2 - C_4C_2J_4 - C_4J_2C_2 - C_5C_2J_3 - C_5J_3C_2 + C_4J_3^2 - C_4C_2^2J_3 - C_4C_2J_3C_2 \\ - C_4J_3C_2^2 + C_3J_3J_4 + C_3J_4J_3.$$

De estas expresiones, se tiene

$$A_j = (j+1)C_{j+1} - S_j + X_jC_2 + \sum_{k=2}^{j-1} X_k((j-k+2)C_{j-k+2} - S_{j-k+1}), \quad j > 3,$$

y

$$B_3 = C_2A_2 + A_2C_2,$$

$$B_j = C_{j-1}A_{j-1} + \sum_{k=2}^{j-2} A_kA_{j-k} + A_{j-1}C_{j-1}, \quad j > 3,$$

$$D_4 = C_2B_3 + A_2C_2^2,$$

$$D_j = C_2B_{j-1} + \sum_{k=2}^{j-3} A_kB_{j-k} + A_{j-2}C_2^2, \quad j > 4.$$

Entonces, se obtiene

$$F_1 = C_2,$$

$$F_2 = 2C_3 - C_2^2,$$

$$F_3 = C_2^3 + 3C_4 - 2C_2C_3,$$

$$F_j = A_j + 2B_j + 5D_j, \quad j > 3.$$

y por tanto los coeficientes en (8.17) son

$$K_4 = J_4 + 3C_2^3 - 2C_2C_3 - 2C_3C_2 + F_3,$$

$$K_j = J_j + \sum_{k=1}^{j-1} F_kJ_{j-k} + 2F_{j-3}(C_2^2 - C_3) - F_{j-2}C_2 + F_{j-1}, \quad j > 4.$$

Siendo $w^{(k)} = z^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)})$, se expresa el operador de diferencias divididas de la forma

$$\begin{aligned} [z^{(k)}, w^{(k)}; F] &= F'(z^{(k)}) + \frac{1}{2}F''(z^{(k)})(w^{(k)} - z^{(k)}) + \mathcal{O}(e^{(k)6}) \\ &= F'(x^*) \left[I - C_2K_4e^{(k)4} + (-C_2K_5 + C_2X_2K_4)e^{(k)5} \right] + \mathcal{O}(e^{(k)6}). \end{aligned}$$

Del anterior operador, la expresión de la variable $\tau^{(k)}$ de la función peso Γ_2 está dada por

$$\begin{aligned} \tau^{(k)} &= [F'(x^{(k)})]^{-1}(F'(x^{(k)}) - [z^{(k)}, w^{(k)}; F]) \\ &= N_1e^{(k)} + N_2e^{(k)2} + N_3e^{(k)3} + N_4e^{(k)4} + N_5e^{(k)5} + \mathcal{O}(e^{(k)6}), \end{aligned}$$

donde

$$N_i = -X_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{y} \quad N_4 = C_2K_4 - X_5.$$

Cuando se aplican las condiciones (b) del enunciado del teorema a la función peso Γ_2 , se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\tau^{(k)}) &= \Gamma_2(0) + H_1\tau^{(k)} + \frac{1}{2!}H_2\tau^{(k)2} + \frac{1}{3!}H_3\tau^{(k)3} + \mathcal{O}(\tau^{(k)4}) \\ &= I + \tau^{(k)} + \tau^{(k)2} + \tau^{(k)3} + \mathcal{O}(\tau^{(k)4}) \\ &= I + P_1e^{(k)} + P_2e^{(k)2} + P_3e^{(k)3} + P_4e^{(k)4} + \mathcal{O}(e^{(k)5}), \end{aligned}$$

siendo los coeficientes

$$\begin{aligned} P_1 &= N_1, \\ P_2 &= N_2 + N_1^2, \\ P_3 &= N_3 + N_1N_2 + N_2N_1 + N_1^3, \\ P_4 &= N_4 + N_1N_3 + N_2^2 + N_3N_1 + N_1^2N_2 + N_1N_2N_1 + N_2N_1^2. \end{aligned}$$

Por último,

$$\Gamma_2(\tau^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}) = Q_4e^{(k)4} + Q_5e^{(k)5} + Q_6e^{(k)6} + Q_7e^{(k)7} + Q_8e^{(k)8} + \mathcal{O}(e^{(k)9}),$$

siendo

$$\begin{aligned}
 Q_4 &= -K_4, \\
 Q_5 &= -K_5 - X_2K_4 - N_1K_4, \\
 Q_6 &= -K_6 - X_2K_5 - X_3K_4 - N_1K_5 - N_1X_2K_4 - P_2K_4, \\
 Q_7 &= -K_7 - X_2K_6 - X_3K_5 - X_4K_4 - N_1K_6 - N_1X_2K_5 - N_1X_3K_4 - P_2K_5 \\
 &\quad - P_2X_2K_4 - P_3K_4, \\
 Q_8 &= -K_8 + C_2K_4^2 - X_3K_6 - X_2K_7 - X_4K_5 - X_5K_4 - N_1K_7 - N_1X_2K_6 \\
 &\quad - N_1X_3K_5 - N_1X_4K_4 - P_2K_6 - P_2X_2K_5 - P_2X_3K_4 - P_4K_4 - P_3K_5 - P_3X_2K_4.
 \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación del error de la familia Γ_2 es

$$\begin{aligned}
 e^{(k+1)} &= z^{(k)} - x^* - \Gamma_2(\tau^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}) \\
 &= T_4e^{(k)4} + T_5e^{(k)5} + T_6e^{(k)6} + T_7e^{(k)7} + T_8e^{(k)8} + \mathcal{O}(e^{(k)9}),
 \end{aligned}$$

donde

$$T_i = -K_i - Q_i, \quad i = 4, \dots, 8.$$

Se puede probar que $T_i = 0$ para $4 \leq i \leq 8$. Como consecuencia, la familia Γ_2 tiene orden de convergencia 9. \square

La técnica de composición aplicada a la estructura iterativa de (8.2) proporciona una clase de métodos con dos funciones peso matriciales, incluyendo por tanto más esquemas iterativos que la familia Γ y con mayor orden de convergencia. En la Sección 8.5 de este capítulo se selecciona un miembro de la familia Γ_2 para comprobar el funcionamiento de esta clase resolviendo diversos sistemas no lineales académicos. La selección del miembro perteneciente a la clase Γ_2 se realiza teniendo en cuenta los resultados de estabilidad obtenidos en la siguiente sección sobre la familia Γ .

8.4 Estudio dinámico de miembros de la familia Γ

La comparativa en términos de eficiencia de esquemas iterativos de la familia Γ permite seleccionar los métodos más eficientes computacionalmente. No obstante, otro parámetro a tener en cuenta es su estabilidad dependiendo de las estimaciones iniciales seleccionadas para cada método. Como consecuencia, en esta sección se aplica la familia Γ sobre tres funciones peso matriciales para estudiar la estabilidad de los esquemas iterativos resultantes.

Los dos primeros métodos iterativos analizados son los métodos \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 , asociados a las funciones peso $\Gamma(\eta^{(k)}) = I + \eta^{(k)} + 2\eta^{(k)2}$ y $\Gamma(\eta^{(k)}) = [I - 2\eta^{(k)}]^{-1}(I - \eta^{(k)})$, respectivamente, y cuya eficiencia ya se ha analizado en la Sección 8.2 de este capítulo. Para trabajar con una subfamilia de (8.2) uniparamétrica y estudiar el efecto que tiene un parámetro en su estabilidad, también

se analiza la familia Γ utilizando la función peso matricial

$$\Gamma(\eta^{(k)}) = I + \eta^{(k)} + 2\eta^{(k)^2} + \frac{\alpha}{6}\eta^{(k)^3}, \quad (8.18)$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$. La familia de funciones peso matriciales (8.18) satisface las condiciones del Teorema 8.1, por lo que la clase iterativa obtenida, denotada por \mathcal{G}_α , también es un conjunto de métodos que pertenece a la familia Γ con orden de convergencia cuatro. Notar que el valor $\alpha = 0$ da lugar al método $\mathcal{G}1$.

Las clases iterativas seleccionadas se aplican a continuación sobre polinomios cuadráticos bidimensionales para poder mostrar las representaciones dinámicas fundamentales en el plano real. No obstante, los resultados bidimensionales se pueden extender fácilmente al caso n -dimensional.

Los dos sistemas polinómicos cuadráticos bidimensionales considerados para realizar el estudio dinámico de los esquemas son

$$\begin{aligned} 1. \quad p(x) &= \begin{cases} p_1(x) = x_1^2 - 1 \\ p_2(x) = x_2^2 - 1 \end{cases}, \\ 2. \quad q(x) &= \begin{cases} q_1(x) = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \\ q_2(x) = x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

cuyas raíces son $(\pm 1, \pm 1)$ para $p(x)$, y $(1, 1), (-1, -1)$ para $q(x)$.

A continuación, los métodos $\mathcal{G}1$, $\mathcal{G}2$ y la familia \mathcal{G}_α se aplican sobre los sistemas de polinomios $p(x)$ y $q(x)$, analizando los puntos fijos y críticos de los operadores multidimensionales obtenidos. Tras los cálculos analíticos, también se representan para cada método algunos planos dinámicos asociados a cada polinomio.

8.4.1 Análisis dinámico de $\mathcal{G}1$

La función racional $R_1(x_1, x_2)$ asociada al método iterativo $\mathcal{G}1$ aplicado sobre $p(x)$ es

$$R_1(x_1, x_2) = \left[\begin{array}{c} \frac{5x_1^6 + 15x_1^4 - 5x_1^2 + 1}{16x_1^5} \\ \frac{5x_2^6 + 15x_2^4 - 5x_2^2 + 1}{16x_2^5} \end{array} \right]. \quad (8.19)$$

Los puntos fijos de (8.19) coinciden con las raíces de $p(x)$ y son puntos superatractores, como se prueba a continuación.

Proposición 8.1. *La función racional $R_1(x_1, x_2)$, asociada al método $\mathcal{G}1$ aplicado sobre el sistema polinómico $p(x)$, tiene cuatro puntos fijos, $(x_1^*, x_2^*) = (\pm 1, \pm 1)$, siendo todos ellos puntos superatractores.*

Demostración. La j -ésima coordenada ($j = 1, 2$) de la función racional $R_1(x_1, x_2)$ es

$$\frac{5x_j^6 + 15x_j^4 - 5x_j^2 + 1}{16x_j^5}.$$

Los puntos fijos se obtienen resolviendo $R_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ o de forma equivalente, resolviendo las ecuaciones

$$\frac{5x_j^6 + 15x_j^4 - 5x_j^2 + 1}{16x_j^5} = x_j, \quad j = 1, 2. \quad (8.20)$$

Desarrollando la ecuación (8.20), se obtiene para $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \frac{5x_j^6 + 15x_j^4 - 5x_j^2 + 1}{16x_j^5} = x_j &\Leftrightarrow -11x_j^6 + 15x_j^4 - 5x_j^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_j - 1)(x_j + 1)(-11x_j^4 + 4x_j^2 - 1) = 0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Las únicas raíces reales del anterior polinomio de grado seis son $x_j = \pm 1$. Por tanto, los puntos fijos de R_1 son $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$.

Calculando la matriz Jacobiana $R'_1(x_1, x_2)$, se obtiene la matriz diagonal

$$R'_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{5(x_1^2-1)^3}{16x_1^6} & 0 \\ 0 & \frac{5(x_2^2-1)^3}{16x_2^6} \end{bmatrix}, \quad (8.22)$$

cuyos valores propios son $\lambda_1(x_1, x_2) = \frac{5(x_1^2-1)^3}{16x_1^6}$ y $\lambda_2(x_1, x_2) = \frac{5(x_2^2-1)^3}{16x_2^6}$. Evaluando los valores propios para cada punto fijo, se tiene $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Como consecuencia, todos los puntos fijos son superatractores. \square

En cuanto a los puntos críticos de $R_1(x_1, x_2)$, todos coinciden con las raíces del sistema polinómico $p(x)$. Por tanto, el operador no tiene puntos críticos libres, lo cual garantiza la estabilidad del método, porque las únicas cuencas de atracción son las correspondientes a las raíces del polinomio.

Los planos dinámicos muestran el conjunto de Fatou (unión de las cuencas de atracción de todos los puntos fijos y periódicos) y el conjunto de Julia (su complementario en la esfera de Riemann). Su implementación, con el software Matlab R2018b, se realiza utilizando la función racional multidimensional resultante tras aplicar el esquema iterativo sobre un sistema de polinomios. En este capítulo, tomando un malla de 500×500 estimaciones iniciales en el plano para $(x_1, x_2) \in [-10, 10] \times [-10, 10]$ ó $(x_1, x_2) \in [-20, 20] \times [-20, 20]$, cada punto se representa de un color dependiendo del punto atractor al cual converge, siendo representado en negro en caso contrario. El proceso iterativo se detiene cuando se alcanza el máximo de 50 iteraciones o cuando la norma de la diferencia entre el iterado y alguna de las raíces del sistema polinómico es menor

que 10^{-3} . La implementación de estos planos sigue unas pautas similares a las presentadas en [28].

En la Figura 8.2(a) se muestra el plano dinámico asociado a $R_1(x_1, x_2)$. Las cuencas de atracción de las raíces $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$ se han representado con los colores naranja, rojo, verde y azul, respectivamente, y se han marcado en el plano con estrellas blancas. Además, la intensidad de los colores se utiliza para indicar mayor o menor número de iteraciones hasta que se produce la convergencia a las raíces, de forma que los colores más claros indican que se necesitan pocas iteraciones. El plano dinámico de la Figura 8.2(a) muestra el buen funcionamiento del método $\mathcal{G}1$ para el polinomio $p(x)$, ya que toda estimación inicial converge a la raíz más próxima.

Cuando el esquema iterativo $\mathcal{G}1$ se aplica sobre $q(x)$, cuyas ecuaciones no son independientes, la función racional asociada, denotada $S_1(x_1, x_2)$, tiene la expresión

$$S_1(x_1, x_2) = \left[\frac{x_1^5 x_2 + x_1^4 (3x_2^2 + 2) + x_1^3 (4x_2^3 + 6x_2) + x_1^2 (x_2^4 + 12x_2^2 - 3) + x_1 x_2 (x_2^4 + 6x_2^2 - 2) + 4x_2^4 - 5x_2^2 + 2}{x_1^5 x_2 + x_1^4 (3x_2^2 + 2) + x_1^3 (4x_2^3 + 6x_2) + x_1^2 (x_2^4 + 12x_2^2 - 3) + x_1 x_2 (x_2^4 + 6x_2^2 - 2) + 4x_2^4 - 5x_2^2 + 2} \frac{(x_1 + x_2)^5}{(x_1 + x_2)^5} \right]. \quad (8.23)$$

Notemos que las dos componentes de la función racional son iguales. Los únicos puntos fijos de $S_1(x_1, x_2)$ son $(-1, -1)$ y $(1, 1)$, coincidiendo con las raíces de $q(x)$ y son puntos superatractores. En este caso, el operador asociado al método $\mathcal{G}1$ tiene puntos críticos libres. El siguiente resultado resume los resultados dinámicos obtenidos para $S_1(x_1, x_2)$.

Proposición 8.2. *Los puntos fijos de la función racional vectorial $S_1(x_1, x_2)$, obtenida tras aplicar el método $\mathcal{G}1$ sobre el sistema polinómico $q(x)$, son $(-1, -1)$ y $(1, 1)$, siendo puntos superatractores. Además, el operador racional tiene puntos críticos libres, cuyo valor aproximado es $(-1.07142, -2.55449)$, $(0.07142, -0.93485)$, $(-0.13412, -1.22734)$ y $(1.14102, 0.57816)$, y pertenecen a las cuencas de atracción de las raíces.*

Demostración. *Los puntos fijos se obtienen resolviendo $S_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, es decir,*

$$\frac{1}{(x_1 + x_2)^5} \left(x_1^5 x_2 + x_1^4 (3x_2^2 + 2) + x_1^3 (4x_2^3 + 6x_2) + x_1^2 (x_2^4 + 12x_2^2 - 3) + x_1 x_2 (x_2^4 + 6x_2^2 - 2) + 4x_2^4 - 5x_2^2 + 2 \right) = x_j,$$

para $j = 1, 2$. Equivalentemente, resolviendo las ecuaciones

$$\frac{5x_1^6 + 15x_1^4 - 5x_1^2 + 1}{16x_1^5} = x_1, \\ x_1 = x_2.$$

De las soluciones de la ecuación (8.21) para cada $j = 1, 2$, los puntos fijos de $S_1(x_1, x_2)$ son $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

Por otro lado, los valores propios de $S'_1(x_1, x_2)$ son $\lambda_1(x_1, x_2) = 0$ y

$$\lambda_2(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1 + x_2)^6} \left(x_1^6 + 2x_1^5x_2 + x_1^4(5x_2^2 - 6) + (13x_2^4 - 36x_2^2 + 22) - 2x_1x_2^3(x_2^2 - 2) + x_2^6 - 18x_2^4 + 38x_2^2 - 20 - 4x_1^3x_2 + x_1^2 \right).$$

Por tanto, el comportamiento asintótico de los puntos fijos depende del segundo valor propio. En este caso, $\lambda_2(-1, -1) = \lambda_2(1, 1) = 0$, de forma que los dos puntos fijos son superatractores.

Como $\lambda_1(x_1, x_2) = 0$ para todo (x_1, x_2) , los puntos críticos se calculan resolviendo $\lambda_2(x_1, x_2) = 0$. Se obtienen cuatro puntos reales diferentes de las raíces del polinomio, siendo puntos críticos libres del operador. Su valor aproximado es $(-1.07142, -2.55449)$, $(0.07142, -0.93485)$, $(-0.13412, -1.22734)$ y $(1.14102, 0.57816)$. Se puede observar en el plano dinámico representado en la Figura 8.2(b) que todos los puntos críticos libres pertenecen a las cuencas de atracción de las raíces, por lo que no hay otro comportamiento posible más que la convergencia a las mismas. \square

El plano dinámico de $S_1(x_1, x_2)$ se ha representado en la Figura 8.2(b). La cuenca de atracción de $(-1, -1)$ se ha representado en naranja, mientras que la cuenca asociada a $(1, 1)$, en azul. Además, se han representado los cuatro puntos críticos libres con círculos blancos. Se observa que los cuatro pertenecen a las cuencas de atracción de las raíces, lo cual garantiza la estabilidad del método. Para el polinomio $q(x)$ las cuencas de atracción no tienen la misma apariencia que en el polinomio $p(x)$ o el método de Newton. Sin embargo, tampoco aparecen regiones de divergencia.

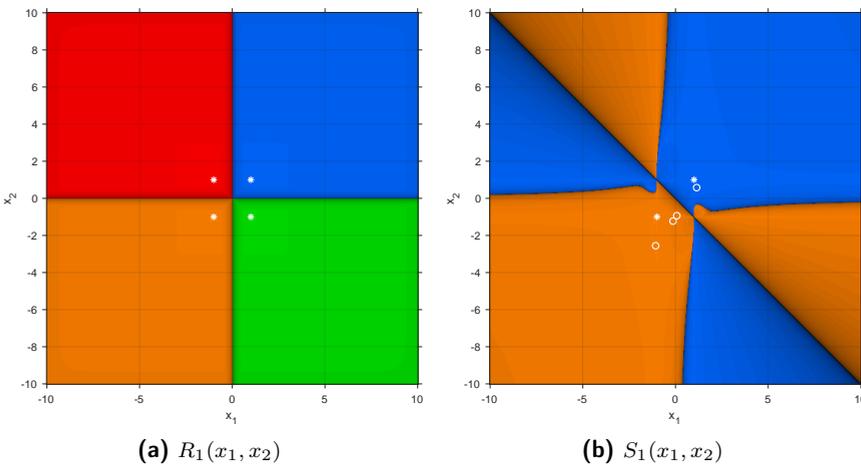


Figura 8.2: Planos dinámicos de las funciones racionales correspondientes al método \mathcal{G}_1

8.4.2 Análisis dinámico de \mathcal{G}_2

La función racional $R_2(x_1, x_2)$ asociada al método iterativo \mathcal{G}_2 aplicado sobre $p(x)$ es

$$R_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{x_1^4 + 6x_1^2 + 1}{4(x_1^3 + x_1)} \\ \frac{x_2^4 + 6x_2^2 + 1}{4(x_2^3 + x_2)} \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$

Su comportamiento dinámico, que se muestra que en el siguiente resultado, es similar al del método \mathcal{G}_1 sobre $p(x)$.

Proposición 8.3. *Los únicos puntos fijos de $R_2(x_1, x_2)$, el operador resultante de la aplicación del método \mathcal{G}_2 sobre el sistema polinómico $p(x)$, coinciden con las raíces del polinomio y son superatractores.*

La prueba de la Proposición 8.3 sigue las mismas pautas que en las Proposiciones 8.1 y 8.2, por lo que se omite su desarrollo. Además, $R_2(x_1, x_2)$ no tiene puntos críticos libres. Como consecuencia, no existen cuencas de atracción distintas a las de las raíces de $p(x)$.

El plano dinámico de $R_2(x_1, x_2)$ se ha representado en la Figura 8.3(a). El código de colores asociado a cada cuenca de atracción de las raíces es el mismo que en la Figura 8.2(a). De nuevo, el comportamiento del método para este polinomio es el adecuado, ya que todo punto del plano tomado como estimación inicial converge a una de las raíces, y además esta raíz es la más próxima al punto.

La función racional $S_2(x_1, x_2)$ es el resultado de aplicar el esquema \mathcal{G}_2 sobre $q(x)$. Su expresión es

$$S_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{x_1^3 x_2 + x_1^2 (x_2^2 + 2) - x_1 x_2 (x_2^2 - 4) + 1}{(x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 + 2)} \\ \frac{x_1^3 x_2 + x_1^2 (x_2^2 + 2) - x_1 x_2 (x_2^2 - 4) + 1}{(x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 + 2)} \end{bmatrix}. \quad (8.25)$$

Notemos que de nuevo las dos componentes del operador racional son iguales. En el siguiente resultado se resume el número de puntos fijos y críticos de $S_2(x_1, x_2)$, y la estabilidad de los primeros.

Proposición 8.4. *Los puntos fijos de $S_2(x_1, x_2)$ coinciden con las raíces del sistema polinómico $q(x)$, es decir, $(-1, -1)$ y $(1, 1)$, y son puntos superatractores. Además, el operador racional tiene cuatro puntos críticos, cuyo valor es aproximadamente $(-1.74193, -3.50389)$, $(0.16533, -0.80333)$, $(-0.25033, -1.39188)$ y $(1.22803, 0.70137)$.*

Los pasos a seguir en la demostración de la Proposición 8.4 son los mismos que en la prueba de la Proposición 8.2. Se basan en las soluciones reales de la ecuación $S_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ y los

valores propios de $S_2'(x_1, x_2)$, siendo $\lambda_1(x_1, x_2) = 0$ y

$$\lambda_2(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1 + x_2)^2 (x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 2)^2} \left(x_1^6 + 2x_1^5x_2 + x_1^4(x_2^2 - 2) - 4x_1^3x_2 + x_1^2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2) - 2x_1x_2^3(x_2^2 - 2) + x_2^6 - 6x_2^4 + 10x_2^2 - 4 \right).$$

Como $\lambda_2(-1, -1) = \lambda_2(1, 1) = 0$, los puntos fijos son superatractores. La resolución de $\lambda_2(x_1, x_2) = 0$ proporciona cuatro puntos diferentes de las raíces, siendo puntos críticos libres, cuyo valor aproximado es $(-1.74193, -3.50389)$, $(0.16533, -0.80333)$, $(-0.25033, -1.39188)$ y $(1.22803, 0.70137)$.

En la Figura 8.3(b) se ha representado el plano dinámico asociado a $S_2(x_1, x_2)$. Las cuencas de atracción de $(-1, -1)$ y $(1, 1)$ se han representado en naranja y azul, respectivamente. De nuevo, los puntos críticos libres convergen a las raíces del polinomio $q(x)$ ya que pertenecen a alguna de las cuencas de atracción de éstas. Además, se observa en el plano dinámico que toda estimación inicial converge a uno de los dos puntos fijos superatractores, por lo que el comportamiento dinámico es estable.

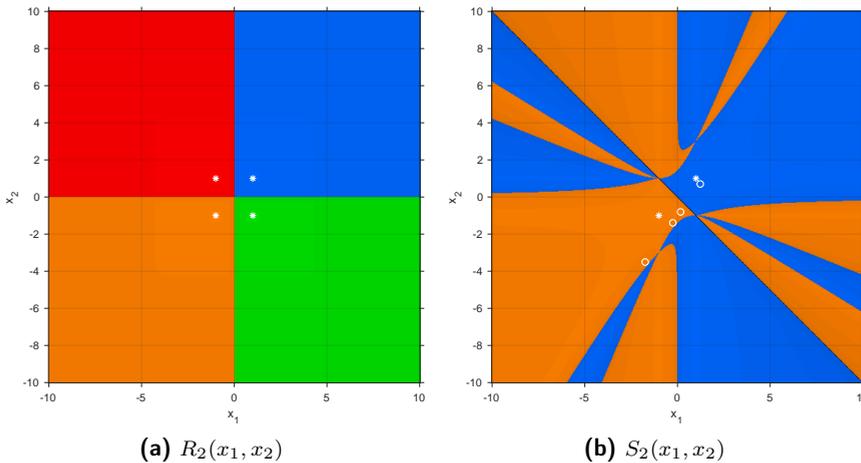


Figura 8.3: Planos dinámicos de las funciones racionales correspondientes al método $\mathcal{G}2$

8.4.3 Análisis dinámico de \mathcal{G}_α

Nótese que la familia \mathcal{G}_α tiene el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ en su expresión iterativa, por lo que su estabilidad también depende del valor que tome este parámetro. Además, cuando $\alpha = 0$, la familia \mathcal{G}_α se reduce al método $\mathcal{G}1$, cuya dinámica ya se ha analizado previamente.

Cuando se aplica la familia \mathcal{G}_α sobre el sistema polinómico $p(x)$, la función racional vectorial resultante se denota $R_3(x_1, x_2)$ y se puede expresar de la forma

$$R_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha + 4(12 + \alpha)x_1^2 - 6(40 + \alpha)x_1^4 + 4(180 + \alpha)x_1^6 + (240 - \alpha)x_1^8}{768x_1^7} \\ \frac{-\alpha + 4(12 + \alpha)x_2^2 - 6(40 + \alpha)x_2^4 + 4(180 + \alpha)x_2^6 + (240 - \alpha)x_2^8}{768x_2^7} \end{bmatrix}. \quad (8.26)$$

Los puntos fijos correspondientes se obtienen resolviendo la ecuación $R_3(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. La matriz Jacobiana $R'_3(x_1, x_2)$ es la matriz diagonal

$$R'_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\frac{(x_1^2 - 1)^3 (7\alpha + (\alpha - 240)x_1^2)}{768x_1^8} & 0 \\ 0 & -\frac{(x_2^2 - 1)^3 (7\alpha + (\alpha - 240)x_2^2)}{768x_2^8} \end{bmatrix},$$

por lo que sus valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1, x_2) &= -\frac{(x_1^2 - 1)^3 (7\alpha + (\alpha - 240)x_1^2)}{768x_1^8}, \\ \lambda_2(x_1, x_2) &= -\frac{(x_2^2 - 1)^3 (7\alpha + (\alpha - 240)x_2^2)}{768x_2^8}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

A continuación se resumen los puntos fijos de este operador racional así como su estabilidad dependiendo del valor del parámetro α .

Proposición 8.5. *Los puntos fijos de $R_3(x_1, x_2)$ y su comportamiento asintótico son*

- para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, las raíces del sistema polinómico $p(x)$, es decir, $(\pm 1, \pm 1)$ son puntos fijos de $R_3(x_1, x_2)$, siendo superatractores,
- cuando $\alpha \in (-\infty, -528) \cup (0, +\infty)$ el operador racional tiene, además de $(\pm 1, \pm 1)$, doce puntos fijos extraños: $(\pm 1, r_1)$, $(\pm 1, r_2)$, $(r_1, \pm 1)$, $(r_2, \pm 1)$, que son puntos de silla; y (r_1, r_1) , (r_1, r_2) , (r_2, r_1) , (r_2, r_2) , que son puntos repulsivos, siendo los valores r_1 y r_2 las raíces reales del polinomio de grado seis

$$p_6(x) = -\alpha + (48 + 3\alpha)x^2 + (-192 - 3\alpha)x^4 + (528 + \alpha)x^6.$$

(c) Cuando $\alpha \in [-528, 0]$, el operador no tiene puntos fijos extraños por lo que los únicos puntos fijos son las raíces de $p(x)$.

Demostración. De (8.26), los puntos fijos son las soluciones reales de las ecuaciones

$$\frac{-\alpha + 4(12 + \alpha)x_j^2 - 6(40 + \alpha)x_j^4 + 4(180 + \alpha)x_j^6 + (240 - \alpha)x_j^8}{768x_j^7} = x_j, \quad j = 1, 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_j^2 - 1)(-\alpha + (48 + 3\alpha)x^2 + (-192 - 3\alpha)x^4 + (528 + \alpha)x^6)}{768x_j^7} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (8.28)$$

El producto de los términos del numerador de (8.28) proporcionan las componentes de los puntos fijos de $R_3(x_1, x_2)$. Por un lado, de $x_j^2 - 1$ se obtienen los puntos fijos $(\pm 1, \pm 1)$. Por otro lado, el otro término del producto es un polinomio de grado seis que solo tiene dos raíces reales, denotadas r_1 y r_2 , cuando $\alpha \in (-\infty, -528) \cup (0, +\infty)$. El conjunto de puntos fijos extraños se obtiene con todos los pares de soluciones de (8.28), es decir, son los puntos $(\pm 1, r_1)$, $(\pm 1, r_2)$, $(r_1, \pm 1)$, $(r_2, \pm 1)$, (r_1, r_2) , (r_2, r_1) , (r_1, r_1) y (r_2, r_2) .

De (8.27), $\lambda_1(\pm 1, \pm 1) = \lambda_2(\pm 1, \pm 1) = 0$, por lo que los puntos fijos son superatractores. El comportamiento asintótico de los puntos fijos extraños se prueba numéricamente a partir de los valores de $|\lambda_1(x_1, x_2)|$ y $|\lambda_2(x_1, x_2)|$ evaluados en cada uno de éstos puntos. La Figura 8.4 muestra gráficamente los resultados obtenidos para algunos de los puntos fijos extraños. En esta figura se ha representado el valor absoluto de los valores propios asociados a cada uno de los puntos fijos extraños considerados. Se puede observar en las Figuras 8.4(a) y 8.4(b) que los puntos fijos extraños $(1, r_1)$ y $(r_2, -1)$ son puntos de silla, ya que un valor propio siempre es en valor absoluto mayor que 1, mientras que el otro es menor que 1 (se obtienen gráficas análogas para los puntos $(-1, r_1)$, $(r_2, 1)$, $(r_1, \pm 1)$ y $(\pm 1, r_2)$). En cambio, (r_1, r_1) y (r_1, r_2) son puntos fijos extraños repulsivos. En las Figuras 8.4(c) y 8.4(d) el valor absoluto de los dos valores propios siempre es igual, siendo mayor que 1 (los resultados son los mismos para (r_2, r_1) y (r_2, r_2)). \square

Los puntos críticos se calculan igualando a cero los valores propios de la matriz Jacobiana $R'_3(x_1, x_2)$.

Proposición 8.6. El conjunto de puntos críticos del operador racional $R_3(x_1, x_2)$ está dado por

(a) las raíces del sistema polinómico $p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

(b) los doce puntos críticos libres

$$\left(\pm 1, \pm \sqrt{\frac{7\alpha}{240 - \alpha}} \right), \quad \left(\pm \sqrt{\frac{7\alpha}{240 - \alpha}}, \pm 1 \right), \quad \left(\pm \sqrt{\frac{7\alpha}{240 - \alpha}}, \pm \sqrt{\frac{7\alpha}{240 - \alpha}} \right)$$

para valores del parámetro $\alpha \in (0, 30) \cup (30, 240)$.

(c) Cuando $\alpha \in (-\infty, 0] \cup \{30\} \cup [240, +\infty)$, los únicos puntos críticos definidos coinciden con las raíces de $p(x)$. Por tanto, no existen puntos críticos libres.

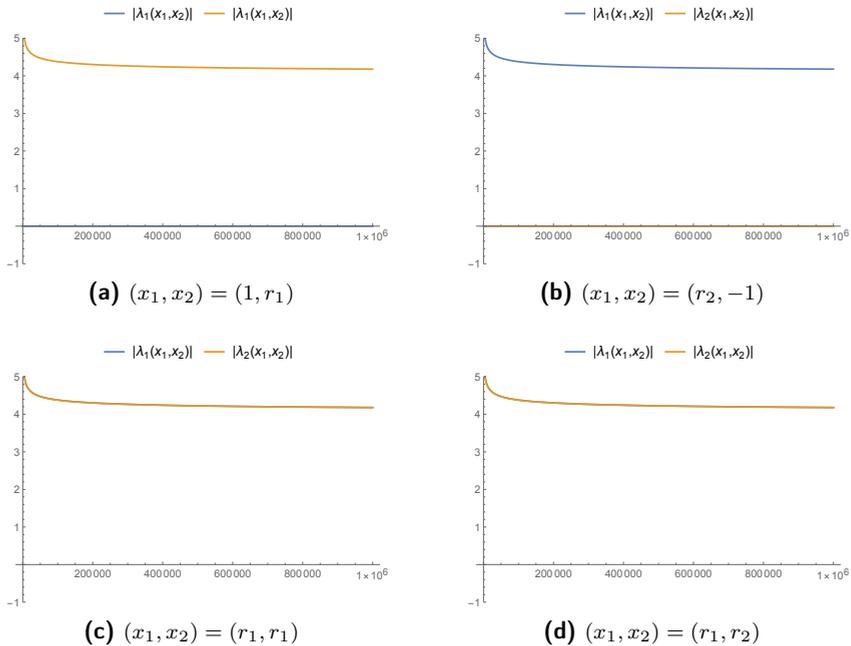


Figura 8.4: Valores propios de algunos puntos fijos extraños del operador $R_3(x_1, x_2)$

Notemos que, de la Proposición 8.6, cuando $\alpha \in (-\infty, 0] \cup \{30\} \cup [240, +\infty]$ las únicas cuencas de atracción son las correspondientes a las raíces de $p(x)$.

Cuando el operador racional depende de un parámetro, una herramienta gráfica de gran utilidad es la recta de parámetros. Esta representación permite seleccionar los valores del parámetro que dan lugar a los métodos de la familia más estables. En las rectas de parámetros, cada punto de la recta real corresponde a un valor del parámetro, por lo que representa un método particular que pertenece a la familia uniparamétrica original.

La recta de parámetros representada en la Figura 8.5 ha sido generada en Matlab R2018b siguiendo rutinas similares a las de los planos dinámicos mostrados previamente en este capítulo. La diferencia fundamental con respecto a los planos dinámicos es que en las rectas de parámetros la estimación inicial del proceso iterativo es un punto crítico libre, por lo que existen tantas rectas de parámetros como puntos críticos libres tenga la familia. Con los mismos criterios de parada que los utilizados para generar los planos dinámicos, cada punto de la recta real se representa en blanco o en negro, dependiendo de si el correspondiente método de la familia converge a alguna de las raíces o de si no existe convergencia, respectivamente.

Las rectas de parámetros de la familia \mathcal{G}_α cuando se aplica sobre el polinomio $p(x)$ son iguales para todos los puntos críticos libres. Por tanto únicamente se ha representado una de ellas en la Figura 8.5. El parámetro toma valores en el intervalo $\alpha \in [0, 240]$, ya que es la única región donde los puntos críticos libres están definidos.

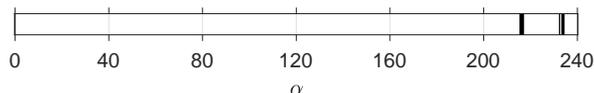


Figura 8.5: Recta de parámetros de $R_3(x_1, x_2)$

En la Figura 8.5 se puede observar una región amplia de valores de α en la recta real representados en blanco. Los métodos más estables de la familia \mathcal{G}_α son los asociados los valores de α en esta región blanca, ya que solo se produce convergencia a las raíces. No obstante, se puede observar en la Figura 8.5 que existen dos bandas negras que se corresponden con valores de α cuyos métodos asociados no convergen a ninguna de las raíces.

De acuerdo a los resultados proporcionados por las rectas de parámetros, se han seleccionado valores de α de las zonas blancas y negras para representar los planos dinámicos asociados a estos valores. La Figura 8.6 muestra los planos dinámicos de $R_3(x_1, x_2)$ siguiendo las mismas rutinas de Matlab que las Figuras 8.2 y 8.3. En particular, las Figuras 8.6(a) y 8.6(b) corresponden a valores de α en la zona blanca de la recta de parámetros, mientras que las Figuras 8.6(c) y 8.6(d) corresponden a valores situados en las bandas negras. Además, los puntos fijos, fijos extraños y críticos libres se han representado con estrellas, cuadrados y círculos blancos, respectivamente.

Como es de esperar, para los valores de $\alpha = 50$ y $\alpha = 200$ representados en los planos dinámicos de la Figura 8.6, existe convergencia completa en todo el plano a alguna de las raíces del polinomio $p(x)$. Asimismo, se observa que los puntos fijos extraños pertenecen al conjunto de Julia, mientras que los puntos críticos libres permanecen en las cuencas de atracción de las raíces. Sin embargo, cuando α se toma de la región negra de la recta de parámetros, se puede observar que aparecen regiones representadas en negro en las Figuras 8.6(c) y 8.6(d) donde no existe convergencia a las raíces. Estas zonas negras corresponden a cuencas de atracción de puntos periódicos de periodo cuatro. En este caso, existen seis órbitas periódicas distintas. En la Figura 8.7 se muestra la órbita de diferentes puntos iniciales del plano que tienden a cada una de las seis órbitas periódicas distintas para $\alpha = 216$, siendo los resultados para $\alpha = 234$ completamente análogos.

También se han representado los planos dinámicos asociados a $\alpha = -50$ y $\alpha = 250$ en la Figura 8.8. De acuerdo a la Proposición 8.6, para valores del parámetro en $(-\infty, 0] \cup \{30\} \cup [240, +\infty)$ el operador racional $R_3(x_1, x_2)$ no tiene ningún punto crítico libre, por lo que las únicas cuencas de atracción son las de las raíces de $p(x)$. Como consecuencia, se observa en ambos planos dinámicos que todas las estimaciones iniciales convergen a una raíz de $p(x)$, hecho que muestra la estabilidad de los métodos de la familia \mathcal{G}_α asociados a los parámetros considerados. Además, en la Figura 8.8(a) el operador no tiene puntos fijos extraños, y el plano dinámico resultante muestra que todo iterado inicial converge a la raíz más cercana.

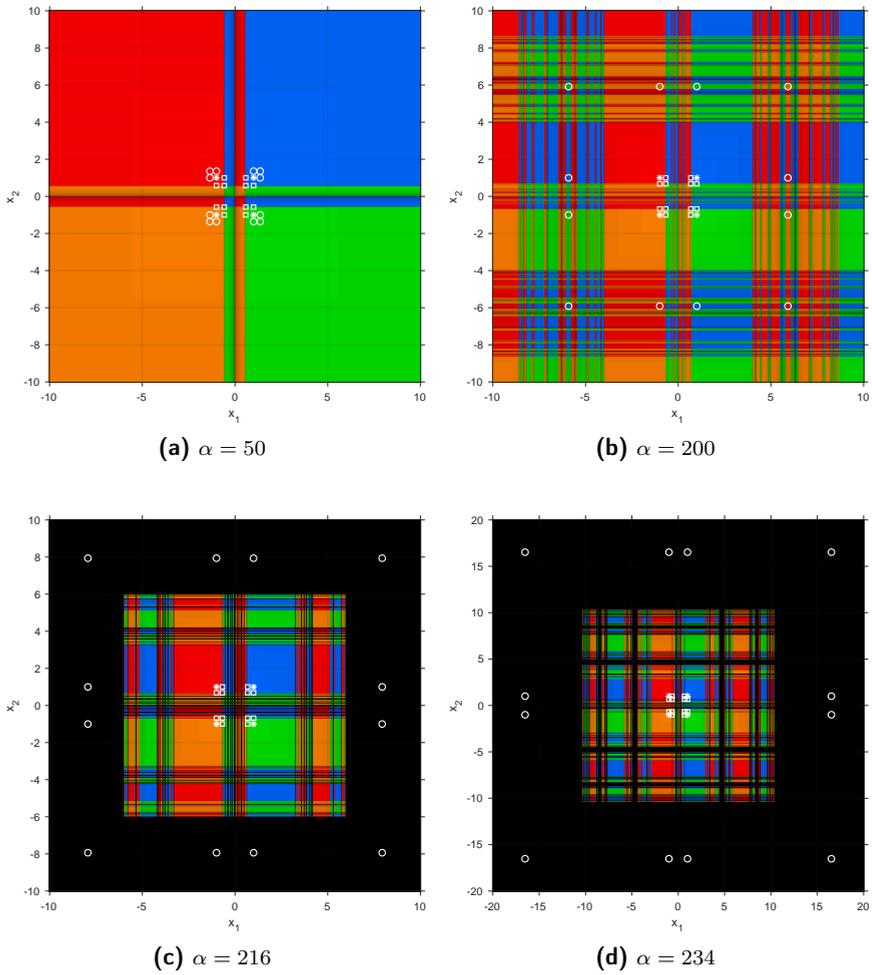


Figura 8.6: Planos dinámicos de \mathcal{G}_α sobre $p(x)$ para valores distintos de α

Por último, la función racional asociada a la familia \mathcal{G}_α sobre el sistema polinómico $q(x)$ es

$$S_3(x_1, x_2) = \left[\begin{array}{c} \frac{N(x_1, x_2)}{6(x_1 + x_2)^7} \\ \frac{N(x_1, x_2)}{6(x_1 + x_2)^7} \end{array} \right],$$

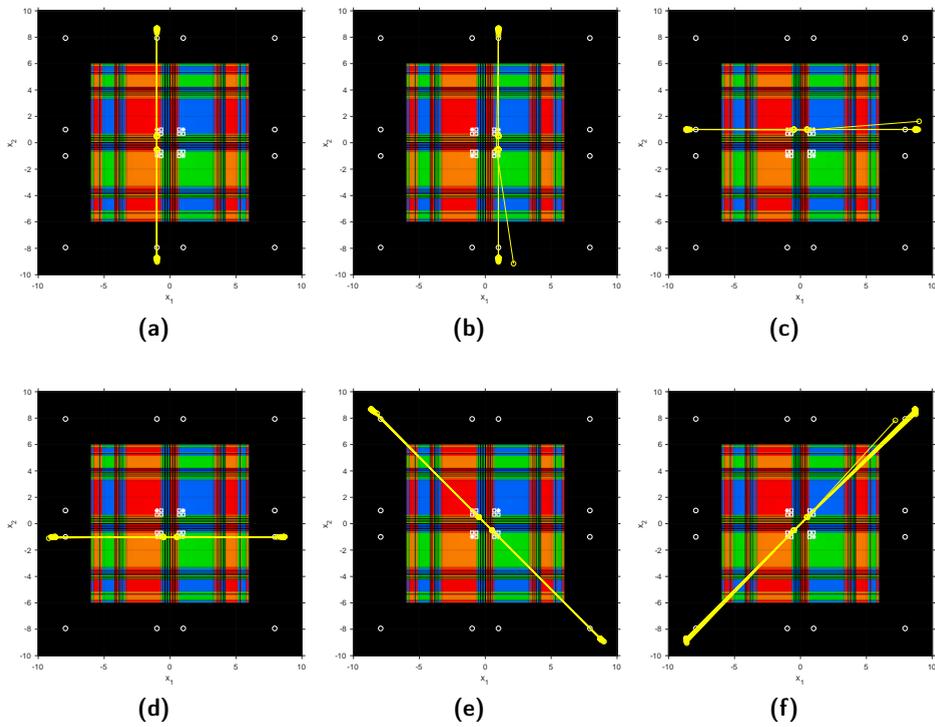


Figura 8.7: Planos dinámicos de \mathcal{G}_α sobre $p(x)$ para $\alpha = 216$. Órbitas periódicas atractoras

donde

$$N(x_1, x_2) = 6(x_1 + x_2)^2 \left(2x_1^4 + (x_1^2 + 4)x_2^4 + 2x_1(2x_1^2 + 3)x_2^3 + (3x_1^2(x_1^2 + 4) - 5)x_2^2 - 3x_1^2 + x_1(x_1^4 + 6x_1^2 - 2)x_2 + x_1x_2^5 + 2 \right) - \alpha(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)^3.$$

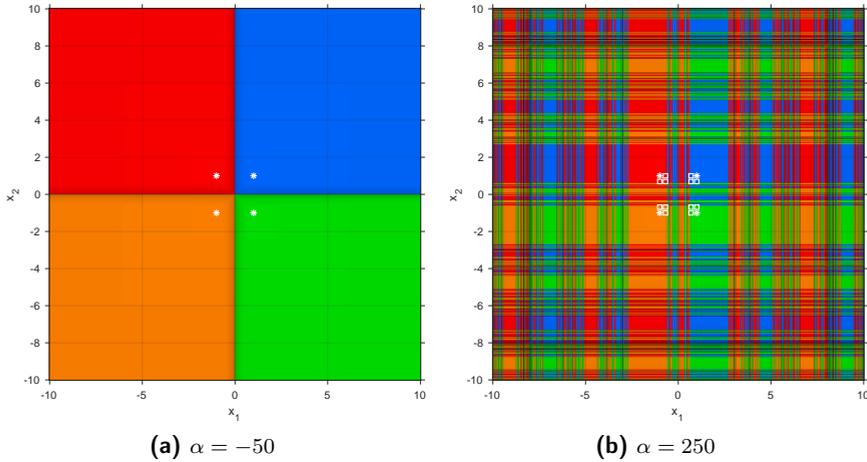


Figura 8.8: Planos dinámicos de \mathcal{G}_α sobre $p(x)$ para valores distintos de α

Como en el caso previo, el número de puntos fijos de $S_3(x_1, x_2)$ depende del valor de α . El siguiente resultado muestra los intervalos donde el operador racional tiene puntos fijos extraños, así como su estabilidad.

Proposición 8.7. *Las raíces del sistema polinómico $q(x)$, $(-1, -1)$ y $(1, 1)$, son puntos fijos superatractores de $S_3(x_1, x_2)$. Además de las raíces de $q(x)$, el operador tiene un número distinto de puntos fijos extraños dependiendo del intervalo donde se define α , siendo todos ellos puntos de silla. En la Tabla 8.3 se muestra el número de puntos fijos extraños para cada subintervalo, donde s_i , $i = 1, 2, 3, 4$, denotan las raíces reales del polinomio*

$$\begin{aligned}
 q_{15}(x) = & -39661043818954752 + 307043333194383360x + 25077472880689152x^2 \\
 & + 7853236406710272x^3 - 222839021721600x^4 - 190418146541568x^5 \\
 & - 58994872694784x^6 - 1651783083264x^7 + 678676558464x^8 + 137025732672x^9 \\
 & + 3521159424x^{10} - 1129826880x^{11} - 67248360x^{12} - 285300x^{13} + 438x^{14} + x^{15}.
 \end{aligned}$$

De la Tabla 8.3, los valores t_i ($i = 1, 2$), u_j ($j = 1, 2, 3$) y w_k ($k = 1, 2, 3, 4$) corresponden a las raíces reales de polinomios de grado seis diferentes. Los valores t_1 y t_2 son las raíces reales de

$$q_6^1(x) = -\alpha + (48 + 3\alpha)x^2 + (-192 - 3\alpha)x^4 + (529 + \alpha)x^6.$$

α	Puntos fijos extraños
$\alpha < s_1$	$(t_1, u_1), (t_2, w_1)$
$\alpha = s_1$	$(t_1, t_1), (t_2, t_2)$
$s_1 < \alpha < -528$	$(t_1, u_1), (t_2, w_2)$
$-528 \leq \alpha \leq 0$	\nexists
$0 < \alpha < s_2$	$(t_1, u_2), (t_2, w_3)$
$\alpha = s_2$	$(t_1, t_1), (t_2, t_2), (-1, 1.00731), (1, -1.00731),$ $(-0.990314, 0.997551), (0.990314, -0.997551)$
$s_2 < \alpha < s_3$	$(t_1, u_3), (t_2, w_3)$
$\alpha = s_3$	$(t_1, t_1), (t_2, t_2), (-1, 1.00731), (1, -1.00731),$ $(-0.992758, 1.00001), (0.992758, -1.00001)$
$s_3 < \alpha < s_4$	$(t_1, u_3), (t_2, w_4)$
$\alpha = s_4$	$(t_1, t_1), (t_2, t_2)$
$\alpha > s_4$	$(t_1, u_2), (t_2, w_4)$

Tabla 8.3: Puntos fijos extraños de $S_3(x_1, x_2)$

Se denota por u_1, u_2, u_3 las raíces reales del polinomio

$$q_6^2(x) = -\alpha + (12 + \alpha)t_1^2 - 18t_1^4 + 12t_1^6 + (24t_1 - 48t_1^3 + 60t_1^5)x$$

$$+ (12 + 2\alpha - (60 + 2\alpha)t_1^2 + 138t_1^4)x^2 + (-48t_1 + 168t_1^3)x^3$$

$$+ (-18 - \alpha + (108 + \alpha)t_1^2)x^4 + 36t_1x^5 + 6x^6,$$

y w_1, w_2, w_3, w_4 denotan las raíces reales del polinomio

$$q_6^3(x) = -\alpha + (12 + \alpha)t_2^2 - 18t_2^4 + 12t_2^6 + (24t_2 - 48t_2^3 + 60t_2^5)x$$

$$+ (12 + 2\alpha - (60 + 2\alpha)t_2^2 + 138t_2^4)x^2 + (-48t_2 + 168t_2^3)x^3$$

$$+ (-18 - \alpha + (108 + \alpha)t_2^2)x^4 + 36t_2x^5 + 6x^6.$$

Los puntos críticos de $S_3(x_1, x_2)$ tienen una expresión complicada cuyo cálculo es difícil de efectuar, en general. Debido a ello, se fijan ciertos valores del parámetro α para estudiar los

puntos fijos y críticos de $S_3(x_1, x_2)$ y también representar los planos dinámicos asociados. En particular, se ha analizado el operador racional asociado a valores de α seleccionados de cada uno de los distintos subintervalos definidos en la Tabla 8.3.

Si $\alpha \in]0, s_2[\cup]s_2, s_3[\cup]s_3, s_4[\cup]s_4, +\infty[$, los correspondientes métodos de la familia \mathcal{G}_α tienen planos dinámicos con convergencia absoluta a los puntos fijos superatractores. Este no es el caso de los demás intervalos, por lo que a continuación se analiza cada caso.

Cuando $\alpha \in]-\infty, s_1[\cup]s_1, -528[\cup]s_3, s_4[$, los operadores racionales de los esquemas iterativos de la familia asociados tienen, además de dos puntos fijos extraños (Tabla 8.3), seis puntos críticos libres en cada subintervalo. Las Figuras 8.9 y 8.10 muestran los planos dinámicos asociados a $S_3(x_1, x_2)$ para valores distintos de α . Los valores del parámetro seleccionados son $\alpha = -750 \in]-\infty, s_1[$ y $\alpha = -600 \in]s_1, -528[$ en las Figuras 8.9(a) y 8.9(b), respectivamente, y $\alpha = 216 \in]s_3, s_4[$ en la Figura 8.10. También se han representado los puntos fijos extraños con cuadrados blancos y los puntos críticos libres con círculos blancos cuando pertenecen a la región del plano representada.

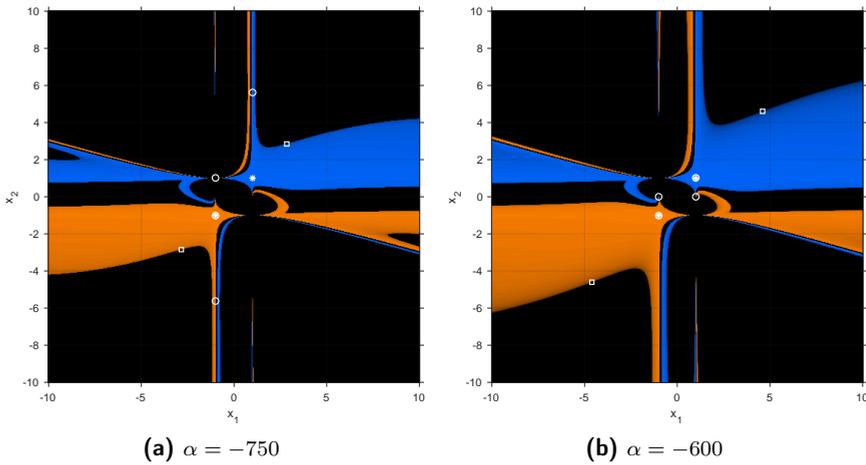


Figura 8.9: Planos dinámicos de \mathcal{G}_α sobre $q(x)$ mostrando zonas de divergencia

El comportamiento dinámico que se muestra en las Figuras 8.9(a) y 8.9(b) es el mismo. Existen regiones negras correspondientes a estimaciones iniciales que convergen a infinito y los puntos fijos extraños pertenecen al conjunto de Julia, ya que son puntos de silla. Los planos dinámicos de la Figura 8.10 muestran que para $\alpha = 216$ existen puntos periódicos con periodo cuatro. Su órbita se ha representado en los planos dinámicos.

Por último, los planos dinámicos asociados a valores de α que proporcionan los miembros de la familia \mathcal{G}_α más estables se han representado en la Figura 8.11, ya que el operador $S_3(x_1, x_2)$ no tiene puntos fijos extraños cuando $\alpha \in [-528, 0]$. Para $\alpha = -50$ y $\alpha = -200$ el operador

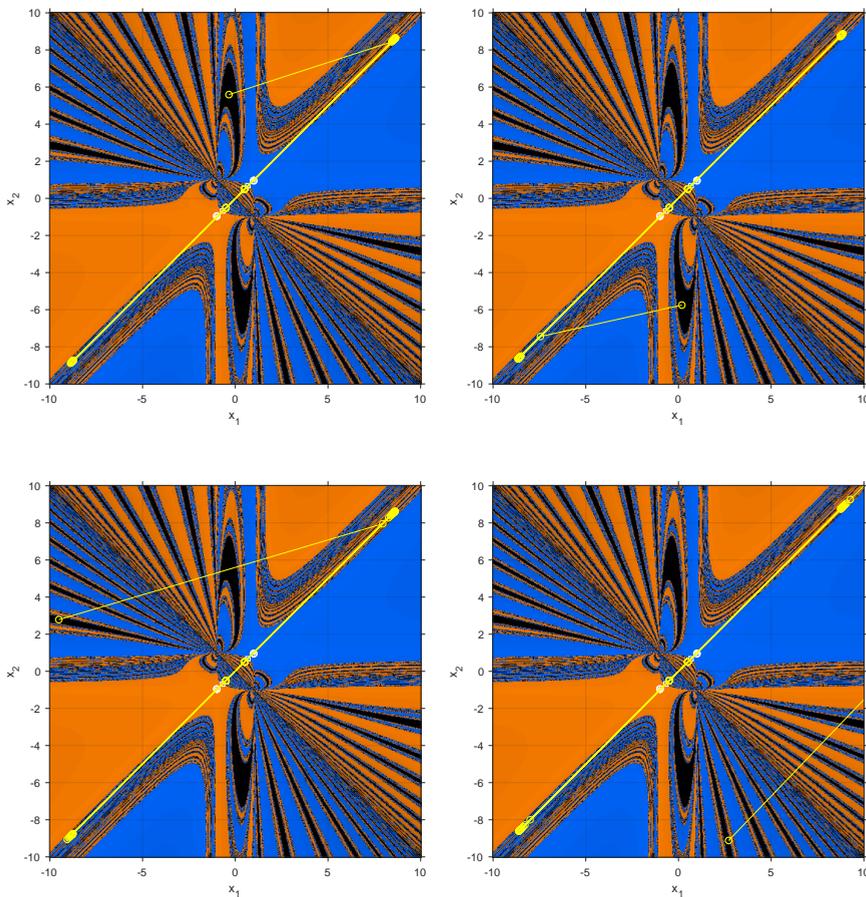


Figura 8.10: Planos dinámicos de \mathcal{G}_α sobre $q(x)$ para $\alpha = 216$. Órbitas periódicas atractoras

tiene seis puntos críticos libres, denotados con círculos blancos cuando se encuentran en el dominio representado en el plano. Los planos dinámicos de la Figura 8.11 muestran que todas las estimaciones iniciales pertenecen a la cuenca de atracción de $(-1, -1)$ ó $(1, 1)$. Aunque en la Figura 8.11(a) existen zonas representadas en negro, corresponden a estimaciones iniciales que requieren de más iteraciones hasta converger a alguno de los puntos fijos atractoras. Por tanto, tampoco existen iterados iniciales que den lugar a divergencia.

El análisis de la clase \mathcal{G}_α realizado en esta sección permite afirmar que los valores de α que dan lugar a los métodos más estables se localizan en $\alpha \in [-528, 0]$. Los únicos puntos fijos y críticos del operador vectorial $R_3(x_1, x_2)$ en este intervalo son las raíces de $p(x)$, motivo por el

cual en los planos dinámicos observados todas las estimaciones iniciales pertenecen a las cuencas de atracción de las raíces. Por otro lado, aunque el operador $S_3(x_1, x_2)$ no tiene puntos fijos extraños para este intervalo de valores del parámetro, sí existen seis puntos críticos libres. Sin embargo, todos pertenecen a las cuencas de atracción de las raíces de $q(x)$, no existiendo órbitas periódicas atractoras distintas a éstas. En particular, el método de la familia \mathcal{G}_α asociado a $\alpha = -50$ presenta las mejores propiedades en términos de estabilidad para ambos polinomios, observándose que las cuencas de atracción de las raíces comprenden todo el plano dinámico en las Figuras 8.8(a) y 8.11(b).

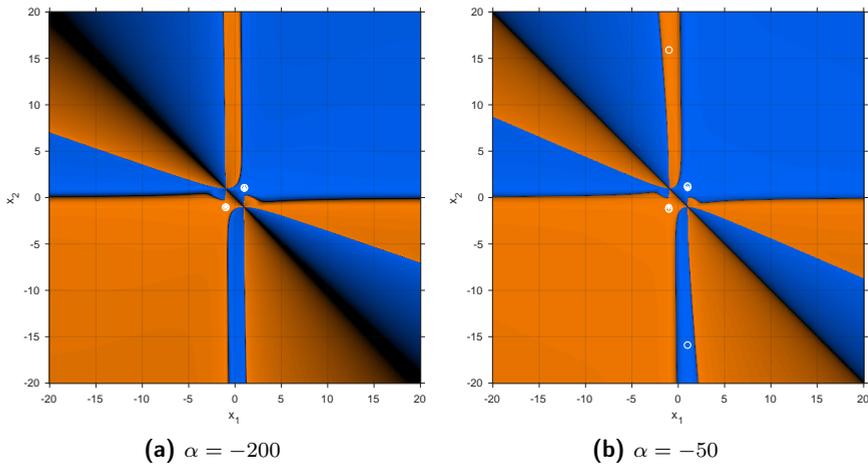


Figura 8.11: Planos dinámicos de \mathcal{G}_α sobre $q(x)$ para valores distintos de α

8.5 Resultados numéricos

En esta sección, se comprueban numéricamente las características de algunos de los métodos estudiados en secciones anteriores de este capítulo. Con este objetivo, se utiliza en primer lugar uno de los miembros perteneciente a la familia Γ para resolver la ecuación en derivadas parciales de Fisher y, en segundo lugar, uno de los esquemas de la familia Γ_2 para resolver diferentes problemas no lineales académicos. También se comparan todos los resultados con los obtenidos para otros métodos iterativos conocidos.

8.5.1 Aplicación de la familia Γ a la ecuación de Fisher

La ecuación de Fisher [48]

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + ru(x, t) \left(1 - \frac{u(x, t)}{c}\right), \quad (8.29)$$

representa un modelo de difusión en dinámica de poblaciones, donde $D > 0$ es la constante de difusión, r es la tasa de crecimiento de la especie y c es la capacidad de carga. En esta sección, se resuelve un caso específico de la ecuación de Fisher usando métodos iterativos. En este caso, $D = r = c = 1$, por lo que (8.29) resulta en

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + u(x, t) - u^2(x, t). \quad (8.30)$$

El dominio de x es el intervalo $[-25, 50]$. Las condiciones de contorno del problema son $u(-25, t) = 1$ y $u(50, t) = 0$, para $t > 0$, mientras que la condición inicial es

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < -10 \\ 0, & -10 \leq x \leq 10 \\ 1/4, & 10 < x < 20 \\ 0, & x \geq 20. \end{cases} \quad (8.31)$$

Discretizando (8.30) y utilizando diferencias finitas, el problema se puede resolver como una familia de sistemas no lineales. Con este objetivo, se considera un mallado de puntos en el dominio $(x_i, t_j) \in [-25, 50] \times [0, T_{max}]$, donde i y j representan, respectivamente, los nodos en las variables espacial y temporal, definidos por

$$\begin{aligned} x_i &= -25 + ih, & i &= 0, 1, \dots, nx, \\ t_j &= 0 + jk, & j &= 0, 1, \dots, nt, \end{aligned}$$

h y k son los pasos espacial y temporal, respectivamente, y nx y nt el número de subintervalos de las variables x y t , respectivamente. Entonces, se obtiene una aproximación a la solución en cada punto (x_i, t_j) del mallado, es decir, $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$.

Aplicando diferencias finitas regresivas para la variable temporal y diferencias centrales para la variable espacial, es decir,

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &\approx \frac{u(x, t) - u(x, t - k)}{k}, \\ u_{xx}(x, t) &\approx \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}, \end{aligned}$$

el esquema de diferencias finitas para el problema aproximado es

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + u_{i,j} + u_{i,j}^2, \quad (8.32)$$

para $i = 1, \dots, nx - 1$, $j = 1, \dots, nt$. Con algunas transformaciones algebraicas, (8.32) se reescribe como

$$(1 + 2\lambda - k)u_{i,j} - \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + ku_{i,j}^2 = u_{i,j-1}, \quad (8.33)$$

donde $\lambda = k/h^2$. De (8.33) se obtiene, dependiendo del número de subintervalos en la variable x y para cada $j \in \{1, \dots, nt\}$, un sistema de ecuaciones no lineales de dimensión $(nx-1) \times (nx-1)$ definido para un j fijo como

$$A \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} u_{1,j}^2 \\ u_{2,j}^2 \\ \vdots \\ u_{nx-1,j}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j-1} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j} \end{pmatrix} = 0, \quad (8.34)$$

siendo la matriz A

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda - k & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda - k & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + 2\lambda - k & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 + 2\lambda - k \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Cada sistema proporciona una solución aproximada del problema en el instante t_j a partir de la aproximación obtenida en el instante t_{j-1} , de forma que para comenzar el proceso de resolución del sistema se utiliza la solución en t_0 dada por (8.31).

Utilizando métodos iterativos, como los de la familia Γ , se puede resolver de forma iterativa el sistema (8.34). A la vista de los resultados obtenidos en las Tablas 8.1 y 8.2 y en la Figura 8.1, así como del análisis dinámico realizado en la Sección 8.4, el método $\mathcal{G}1$ es, de entre los miembros de la familia Γ considerados, el que tiene mejores propiedades en términos de eficiencia y estabilidad. Como consecuencia, se ha seleccionado este método para resolver la ecuación de Fisher. También se ha utilizado el método SGS para poder comparar los resultados obtenidos con un esquema iterativo con el mismo orden de convergencia.

Se ha resuelto el sistema (8.34) utilizando los métodos SGS y $\mathcal{G}1$ para $nx = 20$. La implementación numérica se ha realizado utilizando el software Matlab R2017b con aritmética de precisión variable de 1000 dígitos de mantisa. Los resultados de la aplicación de los métodos para resolver el sistema no lineal se recogen en la Tabla 8.4 variando el valor de nt y T_{max} . Para cada resolución, el proceso iterativo se detiene cuando $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-6}$ o el número de iteraciones alcanza el número 50. El valor de $iter$ representa el número medio de iteraciones necesarias cuando todas las columnas han sido calculadas. Además, se muestra el tiempo transcurrido en segundos para obtener la solución del problema después de 10 ejecuciones consecutivas.

Los resultados de la Tabla 8.4 muestran el buen funcionamiento de $\mathcal{G}1$ para resolver el problema de Fisher. El método $\mathcal{G}1$ solo necesita 2 iteraciones para calcular una solución para el sistema,

$T_{max} = 0.5$	Método	nt	iter	$\ F(x^{(k+1)})\ $	tiempo
	SGS	100	16.0	9.6054e-7	397.1095
	$\mathcal{G}1$		2.0	9.233e-19	93.5890
	SGS	200	15.0	7.8637e-7	781.0227
	$\mathcal{G}1$		2.0	7.2024e-21	152.5548
	SGS	500	13.0	8.4237e-7	1652.0
	$\mathcal{G}1$		2.0	1.179e-23	515.5332
$T_{max} = 1$	Método	nt	iter	$\ F(x^{(k+1)})\ $	tiempo
	SGS	100	17.96	8.1801e-7	838.7530
	$\mathcal{G}1$		2.0	1.6217e-16	205.8390
	SGS	200	16.37	6.6969e-7	880.8873
	$\mathcal{G}1$		2.0	1.2656e-18	211.5296
	SGS	500	14.592	7.1745e-7	1902.1
	$\mathcal{G}1$		2.0	2.0725e-21	518.8443
$T_{max} = 2$	Método	nt	iter	$\ F(x^{(k+1)})\ $	tiempo
	SGS	100	19.5	7.2062e-7	529.8552
	$\mathcal{G}1$		2.0	2.4203e-14	106.0159
	SGS	200	17.98	9.6415e-7	965.8759
	$\mathcal{G}1$		2.0	1.8728e-16	209.1218
	SGS	500	16.11	6.3074e-7	2091.4
	$\mathcal{G}1$		2.0	3.0515e-19	513.5127

Tabla 8.4: Resultados numéricos del problema de Fisher para $nx = 20$

siendo el número medio de iteraciones siempre menor que el del esquema SGS. Para un valor fijo de T_{max} , cuando nt aumenta, también lo hace el tiempo transcurrido pero la aproximación a la solución es mejor ya que $\|F(x^{(k+1)})\|$ es menor. Además, el tiempo es menor para el método $\mathcal{G}1$, por lo que aproxima la solución con más eficiencia computacional y precisión aritmética que el otro esquema.

8.5.2 Aplicación de la familia Γ_2 a sistemas no lineales académicos

En las Tablas 8.1 y 8.2 se comparan los índices de eficiencia y eficiencia computacional de los métodos $\mathcal{G}1$, $\mathcal{G}2$ y $\mathcal{G}3$, determinando que la función peso matricial polinómica es la más eficiente computacionalmente. Basándonos en esta observación, los experimentos numéricos presentados a continuación se han realizado seleccionando las funciones peso matriciales

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\eta^{(k)}) &= I + \eta^{(k)} + 2\eta^{(k)^2} + 5\eta^{(k)^3}, \\ \Gamma_2(\tau^{(k)}) &= I + \tau^{(k)} + \tau^{(k)^2} + \tau^{(k)^3}.\end{aligned}\tag{8.36}$$

Notemos que las funciones peso (8.36) satisfacen las condiciones del Teorema 8.2. Se ha denotado el método resultante de utilizar las funciones (8.36) en la estructura iterativa de la familia Γ_2 por \mathcal{GG} .

Para comparar las características del método \mathcal{GG} con otros esquemas presentes en la literatura, los resultados numéricos también se han realizado sobre dos esquemas iterativos de orden 8 que se pueden encontrar en [78, 81], denotados en este trabajo por SA para [78], y SLB para [81]. Los índices de eficiencia y eficiencia computacional de los métodos \mathcal{GG} , SA y SLB se resumen en las Tablas 8.5 y 8.6.

Método	nF	nF'	nDD	d	p	I
\mathcal{GG}	2	1	1	$2n^2 + n$	9	$9\frac{1}{2n^2+n}$
SA	3	2	0	$2n^2 + 3n$	8	$8\frac{1}{2n^2+3n}$
SLB	3	2	0	$2n^2 + 3n$	8	$8\frac{1}{2n^2+3n}$

Tabla 8.5: Índice de eficiencia de los métodos \mathcal{GG} , SA y SLB

Método	d	S1	S2	$M \times V$	op	p	IC
\mathcal{GG}	$2n^2 + n$	8	0	6	$\frac{1}{3}n^3 + 14n^2 - \frac{1}{3}n$	9	$9\frac{1}{\frac{1}{3}n^3 + 16n^2 + \frac{2}{3}n}$
SA	$2n^2 + 3n$	7	0	2	$\frac{1}{3}n^3 + 11n^2 - \frac{2}{3}n$	8	$8\frac{1}{\frac{1}{3}n^3 + 13n^2 + \frac{7}{3}n}$
SLB	$2n^2 + 3n$	2	9	6	$\frac{2}{3}n^3 + 17n^2 - \frac{2}{3}n$	8	$8\frac{1}{\frac{2}{3}n^3 + 19n^2 + \frac{7}{3}n}$

Tabla 8.6: Índice de eficiencia computacional de los métodos \mathcal{GG} , SA y SLB

Se observa en las Tablas 8.5 y 8.6 que el método \mathcal{GG} es el que menos evaluaciones funcionales requiere. Además, tiene un índice de eficiencia computacional competitivo (ver Figura 8.12) que

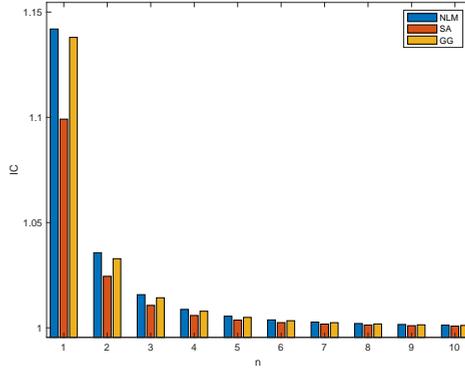


Figura 8.12: Índice de eficiencia computacional de los métodos \mathcal{GG} , SA y SLB para diferentes tamaños del sistema

mejora el de los métodos SA y SLB cuando aumentan las dimensiones del sistema. A continuación se observa que los experimentos numéricos confirman estos resultados. Se utilizan los métodos \mathcal{GG} , SA y SLB para resolver los siguientes sistemas no lineales:

a) $F_1(x, y) = (f_{11}(x, y), f_{12}(x, y))^T = 0$, donde

$$\begin{cases} f_{11}(x, y) = x^2 - y - 19 \\ f_{12}(x, y) = \frac{1}{6}y^3 - x^2 + y - 17 \end{cases}$$

b) $F_2(x, y, z) = (f_{21}(x, y, z), f_{22}(x, y, z), f_{23}(x, y, z))^T = 0$, siendo

$$\begin{cases} f_{21}(x, y, z) = \sin(x) + y^2 + \log(z) - 7 \\ f_{22}(x, y, z) = 3x + 2^y - \frac{1}{z^3} + 1 \\ f_{23}(x, y, z) = x + y - z - 5, \end{cases}$$

c) $F_3(x, y, z) = (f_{31}(x, y, z), f_{32}(x, y, z), f_{33}(x, y, z))^T = 0$, donde

$$\begin{cases} f_{31}(x, y, z) = 2x + y - z - 4 \\ f_{32}(x, y, z) = 2y + z + x - 4 \\ f_{33}(x, y, z) = xyz - 1 \end{cases}$$

Los resultados obtenidos para los sistemas no lineales F_1 , F_2 y F_3 se han resumido en la Tabla 8.7 tomando diferentes estimaciones iniciales. El criterio de parada utilizado es una diferencia entre dos iterados consecutivos menor que 10^{-200} o la condición $\|F^{(k+1)}\| < 10^{-200}$ con un máximo de 50 iteraciones. Los experimentos numéricos se han realizado utilizando el software Matlab

R2017b con aritmética de precisión con 2000 dígitos de mantisa. De esta forma, las perturbaciones numéricas no afectan al resultado final.

El valor del orden de convergencia computacional aproximado (ACOC) obtenido para cada método junto con el número de iteraciones y el valor de $\|F^{(k+1)}\|$ obtenido en la última iteración realizada se pueden observar en la Tabla 8.7. Para cada sistema no lineal, el mayor orden de convergencia obtenido corresponde al método \mathcal{GG} , lo cual es de esperar porque es el método con mayor orden teórico. En general, el esquema \mathcal{GG} requiere de menos iteraciones que los métodos SA y SLB para lograr una aproximación a la solución con una tolerancia mayor que 10^{-200} , obteniendo también unas cotas del error muy competitivas.

8.6 Conclusiones

En este capítulo se ha diseñado una nueva familia de métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales con orden de convergencia cuatro. El interés en esta clase reside en la presencia de una función peso matricial en su estructura iterativa, proporcionando una gran generalidad de esquemas pertenecientes a ésta. Asimismo, se ha realizado un estudio de la eficiencia y estabilidad en términos de dinámica real multidimensional de determinados miembros de esta clase. Además, con la composición del esquema inicial, se ha propuesto otra clase con dos funciones peso matriciales, y cuyo orden de convergencia asciende hasta nueve. Todos los resultados obtenidos a lo largo del capítulo han sido utilizados para seleccionar de cada clase los mejores métodos en términos de eficiencia y estabilidad de entre los propuestos, y por último, comprobar sobre éstos su funcionamiento práctico, obteniendo resultados satisfactorios en la resolución de problemas no lineales.

F	x_0	Método	iter	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC
F_1	$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$	SA	3	1.929e-201	6.9500
		SLB	3	1.433e-378	7.8627
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	3	4.151e-343	8.2992
	$\begin{pmatrix} 4 \\ -4.5 \end{pmatrix}$	SA	47	1.255e-865	6.0711
		SLB	36	3.522e-203	7.7505
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	20	1.164e-1218	7.9956
	$\begin{pmatrix} -10 \\ -7.5 \end{pmatrix}$	SA	20	3.371e-501	6.4336
		SLB	5	6.248e-1248	8.0000
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	4	1.722e-416	8.1830
F_2	$\begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$	SA	4	7.484e-633	6.3006
		SLB	4	3.902e-1402	7.9274
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	4	7.286e-1127	8.0749
	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1.5 \end{pmatrix}$	SA	5	9.291e-1174	5.8920
		SLB	4	2.557e-1318	7.9291
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	4	1.064e-425	8.5315
	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	SA	5	1.200e-958	5.9817
		SLB	5	1.306e-839	8.0606
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	4	3.982e-350	8.3187
F_3	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	SA	4	2.587e-412	7.8793
		SLB	13	2.419e-854	7.9973
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	4	6.575e-616	8.0173
	$\begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \\ 2.7 \end{pmatrix}$	SA	34	1.393e-290	7.7554
		SLB	14	7.066e-785	7.9959
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	4	2.445e-511	8.0092
	$\begin{pmatrix} -2.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	SA	15	1.667e-420	7.9179
		SLB	5	7.361e-1165	7.9992
		$\mathcal{G}\mathcal{G}$	4	2.522e-325	8.3981

Tabla 8.7: Resultados numéricos para los sistemas de ecuaciones F_1 , F_2 y F_3

Capítulo 9

Métodos iterativos con memoria para sistemas no lineales

Basado en:

[26] *"On the improvement of the order of convergence of iterative methods for solving nonlinear systems by means of memory", Applied Mathematics Letters.*

[21] *"A new efficient parametric family of iterative methods for solving nonlinear systems", Journal of Difference Equations and Applications.*

9.1 Introducción

El método iterativo más conocido para encontrar la solución x^* de un sistema no lineal $F(x) = 0$ es el esquema de Newton [83]. Basados en este método o en esquemas iterativos de tipo Newton y técnicas como la composición de esquemas conocidos, funciones peso, aproximaciones de la matriz Jacobiana, etc., se han propuesto en la literatura algunos métodos de alto orden para aproximar una solución de $F(x) = 0$. Por ejemplo, Soleymani et al. [81] y Hueso et al. [53] construyeron clases multipaso de métodos iterativos de sexto orden para resolver sistemas no lineales que requieren evaluaciones de la función F y de la matriz Jacobiana F' . Por otro lado, Wang et al. [86] desarrollaron un método iterativo libre de derivadas de séptimo orden evaluando el operador de diferencias divididas de primer orden $[x, y; F]$ tres veces por iteración. Entre los esquemas iterativos que utilizan la matriz Jacobiana y operadores de diferencias divididas se pueden citar, entre otros, los métodos de sexto orden presentados por Sharma y Arora [76] y Grau et al. [50]. El objetivo de estos nuevos esquemas es acelerar la convergencia o mejorar la eficiencia computacional.

Sin embargo, todos estos métodos de referencia únicamente utilizan una iteración previa para calcular la siguiente estimación. A pesar de que los métodos con memoria ofrecen la posibilidad de mejorar el orden de convergencia de una clase de procesos iterativos sin añadir nuevas evaluaciones funcionales, la literatura en relación a este tipo de métodos es escasa y muy reciente. Prácticamente los únicos esquemas con memoria para resolver sistemas de ecuaciones no lineales diseñados hasta el momento son los presentados por Ezquerro et al. [46], Narang et al. [63] y Petković y Sharma [69].

El objetivo principal de este capítulo es desarrollar métodos iterativos de alto orden con bajo coste computacional y buenas propiedades de estabilidad en sistemas de gran tamaño. A partir del método de Newton y utilizando un proceso de variación de parámetros, se presentan a continuación dos bloques de familias de métodos. El primer bloque parte de una clase biparamétrica obtenida utilizando en los dos últimos pasos un operador de diferencias divididas adecuado y cuyo primer paso es el método de Newton. En cambio, el segundo bloque parte del reemplazamiento de la matriz Jacobiana del método de Newton por un operador de diferencias divididas. De esta forma, se obtiene el método de Traub-Steffensen, el cual se toma como esquema de partida para la posterior extensión a esquemas de más puntos con la composición de su estructura iterativa, todos ellos sin matrices Jacobianas. En ambos casos, se analizan diversas aproximaciones de los parámetros aceleradores generando métodos con y sin memoria de mayor orden. Se estudia para cada uno de ellos el orden de convergencia, la eficiencia computacional y su funcionamiento aplicado al cálculo de raíces de funciones no lineales multidimensionales.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. Las Secciones 9.2 y 9.3 están dedicadas a describir los nuevos métodos iterativos, con y sin memoria, tanto utilizando matrices Jacobianas como libres de ellas, respectivamente, y demostrar su orden de convergencia. Los índices de eficiencia y eficiencia computacional de los métodos propuestos se analizan en la Sección 9.4, comparándolos con los de otros esquemas iterativos conocidos con estructura similar. En la Sección 9.5, dedicada a los resultados numéricos, se transforma la ecuación de Fisher en un sistema no lineal, aproximando las diferentes derivadas por diferencias finitas de orden dos. Este sistema

se resuelve aplicando una de las clases propuestas, así como otros métodos conocidos. También se aproxima la solución de diferentes problemas no lineales utilizando las familias iterativas con memoria diseñadas. Por último se muestran las conclusiones obtenidas en el capítulo.

9.2 Métodos con matrices Jacobianas para resolver sistemas

La composición del método de Newton y un esquema tipo Traub sin matrices Jacobianas y con dos parámetros da lugar a la familia de métodos iterativos de tres pasos

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1}F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1}F(z^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.1)$$

donde $w^{(k)} = y^{(k)} + \gamma F(y^{(k)}) + \delta (F(y^{(k)}))^2$, para γ y δ reales no simultáneamente nulos, y $(F(x))^2 = (f_1^2(x), f_2^2(x), \dots, f_n^2(x))^T$, siendo $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, las funciones coordenadas de $F(x)$. Para realizar los desarrollos de Taylor de $(F(y^{(k)}))^2$ utilizados en el análisis de la convergencia se sigue la notación definida en [4].

Notemos que la expresión iterativa de la familia (9.1), que se ha denotado como $M_{\gamma, \delta}$, realiza cuatro evaluaciones funcionales de F y una del operador de diferencias divididas en cada iteración. Su análisis de convergencia se establece en el siguiente resultado.

Teorema 9.1. *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en un conjunto abierto y convexo D y $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Si la estimación inicial $x^{(0)}$ está suficientemente cerca de la solución, entonces la familia de métodos iterativos $M_{\gamma, \delta}$ converge a x^* con orden de convergencia seis para cualesquiera valores de γ y δ . Su ecuación del error es*

$$e^{(k+1)} = C_2(2I + \gamma F'(x^*))C_2^2(I + \gamma F'(x^*))C_2^2 e^{(k)6} + \mathcal{O}(e^{(k)7}), \quad (9.2)$$

donde $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $C_j = \frac{1}{j!}[F'(x^*)]^{-1}F^{(j)}(x^*)$, $j \geq 2$, e I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Demostración. *Consideremos los siguientes desarrollos en serie de Taylor de $F(x^{(k)})$ y $F'(x^{(k)})$ en torno a x^* :*

$$\begin{aligned} F(x^{(k)}) &= F'(x^*) \left[e^{(k)} + C_2 e^{(k)2} + C_3 e^{(k)3} + C_4 e^{(k)4} + C_5 e^{(k)5} + C_6 e^{(k)6} \right] + \mathcal{O}(e^{(k)7}), \\ F'(x^{(k)}) &= F'(x^*) \left[I + 2C_2 e^{(k)} + 3C_3 e^{(k)2} + 4C_4 e^{(k)3} + 5C_5 e^{(k)4} + 6C_6 e^{(k)5} \right] + \mathcal{O}(e^{(k)6}), \end{aligned}$$

donde $C_j = \frac{1}{j!}[F'(x^*)]^{-1}F^{(j)}(x^*)$, $j \geq 2$. La inversa de la matriz Jacobiana de F es de la forma

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = [X_1 + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2} + X_4e^{(k)3} + X_5e^{(k)4} + X_6e^{(k)5}][F'(x^*)]^{-1} + \mathcal{O}(e^{(k)6}).$$

Como $[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}) = I$, se obtiene $X_1 = I$ y los demás coeficientes están dados por

$$X_j = -\sum_{i=2}^j iX_{j-i+1}C_i, \quad i = 2, 3, \dots \quad (9.3)$$

Entonces,

$$[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) = e^{(k)} - C_2e^{(k)2} + J_3e^{(k)3} + J_4e^{(k)4} + J_5e^{(k)5} + J_6e^{(k)6} + \mathcal{O}(e^{(k)7}),$$

donde

$$J_j = C_j + \sum_{i=3}^j X_{j-i+2}C_{i-1} + X_j, \quad j > 2. \quad (9.4)$$

De los desarrollos previos, el error en el primer paso de (9.1) puede expresarse de la forma

$$\begin{aligned} y^{(k)} - x^* &= e^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \\ &= C_2e^{(k)2} - J_3e^{(k)3} - J_4e^{(k)4} - J_5e^{(k)5} - J_6e^{(k)6} + \mathcal{O}(e^{(k)7}), \end{aligned}$$

y por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} F(y^{(k)}) &= F'(x^*) \left[(y^{(k)} - x^*) + C_2(y^{(k)} - x^*)^2 + C_3(y^{(k)} - x^*)^3 \right] + \mathcal{O}(e^{(k)7}) \\ &= F'(x^*) \left[C_2e^{(k)2} - J_3e^{(k)3} + (-J_4 + C_2^3)e^{(k)4} + (-J_5 - C_2^2J_3 - C_2J_3C_2)e^{(k)5} \right. \\ &\quad \left. + (-J_6 + C_2J_3^2 - C_2^2J_4 - C_2J_4C_2 + C_3C_2^3)e^{(k)6} \right] + \mathcal{O}(e^{(k)7}). \end{aligned}$$

Siendo $w^{(k)} = y^{(k)} + \gamma F(y^{(k)}) + \delta (F(y^{(k)}))^2$, el operador de diferencias divididas, definido en el Capítulo 2 por (2.9), sobre los puntos $y^{(k)}$ y $w^{(k)}$ dados por la familia (9.1) tiene el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} [w^{(k)}, y^{(k)}; F] &= F'(y^{(k)}) + \frac{1}{2}F''(y^{(k)})(w^{(k)} - y^{(k)}) + \frac{1}{6}F'''(y^{(k)})(w^{(k)} - y^{(k)})^2 + \mathcal{O}(e^{(k)5}) \\ &= F'(x^*) \left[I + A_2e^{(k)2} + A_3e^{(k)3} + A_4e^{(k)4} \right] + \mathcal{O}(e^{(k)5}), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_2 &= 2C_2^2 + \gamma C_2 F'(x^*) C_2, \\ A_3 &= -2C_2 J_3 - \gamma C_2 F'(x^*) J_3, \\ A_4 &= 3C_3 C_2^2 - 2C_2 J_4 - \gamma C_2 F'(x^*) J_4 + \gamma C_2 F'(x^*) C_2^3 + \delta C_2 F'(x^*) C_2 F'(x^*) C_2 \\ &\quad + 3\gamma C_3 C_2 F'(x^*) C_2 + \gamma^2 C_3 F'(x^*) C_2 F'(x^*) C_2. \end{aligned}$$

De la misma forma,

$$[w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} = \left[I + B_2 e^{(k)2} + B_3 e^{(k)3} + B_4 e^{(k)4} \right] [F'(x^*)]^{-1} + \mathcal{O}\left(e^{(k)5}\right), \quad (9.5)$$

donde $B_2 = -A_2$, $B_3 = -A_3$ y $B_4 = A_2^2 - A_4$. Entonces,

$$[w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} F(y^{(k)}) = D_2 e^{(k)2} + D_3 e^{(k)3} + D_4 e^{(k)4} + D_5 e^{(k)5} + D_6 e^{(k)6} + \mathcal{O}\left(e^{(k)7}\right),$$

para los valores

$$\begin{aligned} D_2 &= C_2, \\ D_3 &= -J_3, \\ D_4 &= B_2 C_2 - J_4 + C_2^3, \\ D_5 &= B_3 C_2 - B_2 J_3 - J_5 - C_2^2 J_3 - C_2 J_3 C_2, \\ D_6 &= B_4 C_2 - B_3 J_3 - B_2 J_4 + B_2 C_2^3 - J_6 + C_2 J_3^2 - C_2^2 J_4 - C_2 J_4 C_2 + C_3 C_2^3. \end{aligned}$$

Por tanto, el error en el segundo paso de (9.1) es de la forma

$$\begin{aligned} z^{(k)} - x^* &= y^{(k)} - x^* - [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} F(y^{(k)}) \\ &= H_4 e^{(k)4} + H_5 e^{(k)5} + H_6 e^{(k)6} + \mathcal{O}\left(e^{(k)7}\right), \end{aligned} \quad (9.6)$$

con $H_i = -J_i - D_i$, para $i = 4, 5, 6$. De este desarrollo y siendo $F(z^{(k)}) = F'(x^*)(z^{(k)} - x^*) + \mathcal{O}(e^{(k)7})$, se obtiene

$$[w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} F(z^{(k)}) = H_4 e^{(k)4} + H_5 e^{(k)5} + (H_6 + B_2 H_4) e^{(k)6} + \mathcal{O}\left(e^{(k)7}\right). \quad (9.7)$$

Por último, utilizando los desarrollos (9.6) y (9.7) en el tercer paso de la expresión iterativa (9.1), se obtiene la ecuación del error de la familia

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= z^{(k)} - x^* - [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} F(z^{(k)}) \\ &= -B_2 H_4 e^{(k)6} + \mathcal{O}\left(e^{(k)7}\right) \\ &= C_2(2I + \gamma F'(x^*)) C_2^2 (I + \gamma F'(x^*)) C_2^2 e^{(k)6} + \mathcal{O}\left(e^{(k)7}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, la clase de esquemas iterativos $M_{\gamma,\delta}$ tiene orden de convergencia 6. \square

A continuación se estudia cómo mejorar el orden de convergencia de la familia $M_{\gamma,\delta}$ sin incrementar el número de evaluaciones funcionales. Este análisis da lugar a dos clases uniparamétricas de métodos iterativos utilizando como acelerador el parámetro restante.

9.2.1 Diseño de clases iterativas de mayor orden con y sin memoria

Partiendo de la ecuación del error (9.2), se observa que determinados valores del parámetro γ pueden dar lugar a esquemas iterativos con órdenes de convergencia mayores. En particular, si $\gamma = -2[F'(x^*)]^{-1}$ ó $\gamma = -[F'(x^*)]^{-1}$, el orden de los esquemas pertenecientes a las clases resultantes es siete. Debido a que x^* no es conocido, se requiere aproximar el valor de $F'(x^*)$ con el objetivo de lograr este incremento en el orden de convergencia. La aproximación requerida se realiza a continuación de dos formas distintas: en primer lugar, con el uso de un operador de diferencias divididas que utiliza más de una iteración previa, y en segundo lugar, utilizando una matriz Jacobiana evaluada en el iterado actual, dando lugar a familias de métodos con o sin memoria, respectivamente.

Consideremos la aproximación de la matriz Jacobiana F' en la solución utilizando puntos de la iteración anterior a $x^{(k)}$ del proceso iterativo

$$F'(x^*) \approx [w^{(k-1)}, y^{(k-1)}; F]. \quad (9.8)$$

Nótese que en (9.8) no se realizan evaluaciones funcionales adicionales puesto que ya han sido empleadas en el cálculo del iterado $x^{(k)}$. A partir del término $I + \gamma F'(x^*)$ de la ecuación del error (9.2) y la aproximación (9.8), se considera el valor del parámetro γ , variando ahora en cada iteración, de la forma

$$\gamma_k = -[w^{(k-1)}, y^{(k-1)}; F]^{-1},$$

que reemplazado en (9.1) da lugar a una clase uniparamétrica de métodos iterativos que se ha denotado por MM_δ . El estudio del orden de convergencia teórico de esta nueva familia de métodos con memoria se realiza en el siguiente resultado, siendo análogas las conclusiones obtenidas utilizando $\gamma_k = -2[w^{(k-1)}, y^{(k-1)}; F]^{-1}$.

Teorema 9.2. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en un conjunto abierto y convexo D , siendo $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Supongamos que las estimaciones iniciales $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$ están suficientemente cerca de la solución. Entonces, la familia de métodos iterativos MM_δ converge a x^* con orden de convergencia $p \approx 6.3166$ para todo valor del parámetro δ .

Demostración. De la ecuación del error (9.2), se satisface la relación

$$e^{(k+1)} \sim C_2(2I + \gamma_k F'(x^*))C_2^2(I + \gamma_k F'(x^*))C_2^2 e^{(k)6}, \quad (9.9)$$

donde $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y $C_j = \frac{1}{j!}[F'(x^*)]^{-1}F^{(j)}(x^*)$, $j \geq 2$.

Supongamos que la sucesión de iterados $\{x^{(k)}\}$ generada por la familia MM_δ converge a la

solución con R -orden al menos p , de forma que se verifica

$$e^{(k+1)} \sim D_{k,p} e^{(k)p},$$

donde $D_{k,p}$ tiende a la constante de error asintótico, D_p , cuando $k \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$e^{(k)} \sim D_{k-1,p} e^{(k-1)p} \quad (9.10)$$

y

$$e^{(k+1)} \sim D_{k,p} D_{k-1,p}^p e^{(k-1)p^2}. \quad (9.11)$$

De (9.5), el parámetro acelerador se puede desarrollar de la forma

$$\begin{aligned} \gamma_k &= -[w^{(k-1)}, y^{(k-1)}; F]^{-1} \\ &= -\left[I + B_2 e^{(k-1)^2} + B_3 e^{(k-1)^3} + B_4 e^{(k-1)^4} \right] [F'(x^*)]^{-1} + \mathcal{O}\left(e^{(k-1)^5}\right), \end{aligned}$$

con B_i , $i = 2, 3, 4$, definidos en la demostración del Teorema 9.1. Como consecuencia, los siguientes términos de la ecuación del error se pueden expresar como

$$\begin{aligned} I + \gamma_k F'(x^*) &= -B_2 e^{(k-1)^2} + \mathcal{O}\left(e^{(k-1)^3}\right), \\ 2I + \gamma_k F'(x^*) &= I + \mathcal{O}\left(e^{(k-1)^2}\right), \end{aligned}$$

y entonces,

$$(I + \gamma_k F'(x^*)) C_2^2 (2I + \gamma_k F'(x^*)) \sim e^{(k-1)^2}. \quad (9.12)$$

Por último, utilizando (9.10) y (9.12) en la relación del error (9.9), se satisface

$$e^{(k+1)} \sim e^{(k-1)^2} e^{(k)^6} \sim D_{k-1,p}^6 e^{(k-1)^{6p+2}}. \quad (9.13)$$

Igualando los exponentes de $e^{(k+1)}$ en (9.11) y (9.13) se obtiene

$$p^2 = 6p + 2,$$

cuya única solución positiva proporciona el orden de convergencia de la familia MM_δ utilizando una extensión multidimensional del Teorema de Ortega-Rheinboldt [65]:

$$p = \frac{6 + \sqrt{44}}{2} \approx 6.3166.$$

□

Como se observa en el Teorema 9.2, sin la necesidad de añadir evaluaciones funcionales de F sobre nuevos puntos, es posible aumentar el orden de convergencia de 6 a 6.3166. Asimismo, se mantiene libre el parámetro δ , por lo que se ha diseñado una clase iterativa de métodos con

memoria dependiente de un parámetro. A continuación se estudia el orden de la familia obtenida utilizando otra aproximación de γ .

Por otro lado, si se considera la aproximación

$$F'(x^*) \approx F'(x^{(k)}),$$

el valor del parámetro acelerador γ es

$$\gamma_k = -[F'(x^{(k)})]^{-1}. \quad (9.14)$$

Reemplazando el parámetro γ por (9.14) en la clase (9.1), se obtiene una nueva familia de esquemas iterativos que depende de δ , denotada por MJ_δ , y cuyo orden de convergencia se incrementa con respecto la familia biparamétrica de partida.

Teorema 9.3. *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en un conjunto abierto y convexo D . Consideremos $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Supongamos que la estimación inicial $x^{(0)}$ está suficientemente cerca de la solución, entonces la familia de métodos iterativos MJ_δ converge a x^* con orden de convergencia $p = 7$ para todo valor del parámetro δ .*

Demostración. Denotemos el error en cada iteración por $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Utilizando los desarrollos de la demostración del Teorema 9.1, el error en el primer paso de la familia MJ_δ se puede expresar como

$$y^{(k)} - x^* = C_2 e^{(k)2} - \sum_{i=3}^7 J_i e^{(k)i},$$

donde $C_j = \frac{1}{j!} [F'(x^*)]^{-1} F^{(j)}(x^*)$, $j \geq 2$. De aquí, se obtiene

$$F(y^{(k)}) = F'(x^*) \left[P_2 e^{(k)2} + P_3 e^{(k)3} + P_4 e^{(k)4} + P_5 e^{(k)5} + P_6 e^{(k)6} + P_7 e^{(k)7} \right] + \mathcal{O} \left(e^{(k)8} \right),$$

siendo los coeficientes

$$P_2 = C_2,$$

$$P_3 = -J_3,$$

$$P_4 = -J_4 + C_2^3,$$

$$P_5 = -J_5 - C_2^2 J_3 - C_2 J_3 C_2,$$

$$P_6 = -J_6 + C_2 J_3^2 - C_2^2 J_4 - C_2 J_4 C_2 + C_3 C_2^3,$$

$$P_7 = -J_7 - C_2^2 J_5 + C_2 J_3 J_4 - C_2 J_5 C_2 + C_2 J_4 J_3 - C_3 C_2^2 J_3 - C_3 C_2 J_3 C_2 - C_3 J_3 C_2^2.$$

Con los desarrollos anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} w^{(k)} - x^* &= y^{(k)} - x^* - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}) + \delta(F(y^{(k)}))^2 \\ &= (-P_3 - X_2 P_2 - J_3) e^{(k)3} + (-P_4 - X_2 P_3 - X_3 P_2 - J_4 + \delta P_2 F'(x^*) P_2) e^{(k)4} \\ &\quad + (-P_5 - X_2 P_4 - X_3 P_3 - X_4 P_2 - J_5 + \delta P_2 F'(x^*) P_3 + \delta P_3 F'(x^*) P_2) e^{(k)5} \\ &\quad + \mathcal{O}(e^{(k)6}), \end{aligned}$$

Por tanto, el desarrollo del operador de diferencias divididas es

$$\begin{aligned} [w^{(k)}, y^{(k)}; F] &= F'(y^{(k)}) + \frac{1}{2} F''(y^{(k)})(w^{(k)} - y^{(k)}) + \frac{1}{6} F'''(y^{(k)})(w^{(k)} - y^{(k)})^2 + \mathcal{O}(e^{(k)6}) \\ &= F'(x^*) \left[I + R_2 e^{(k)2} + R_3 e^{(k)3} + R_4 e^{(k)4} + R_5 e^{(k)5} \right] + \mathcal{O}(e^{(k)6}), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} R_2 &= 2C_2^2 - C_2 P_2, \\ R_3 &= -2C_2 J_3 - C_2 P_3 - C_2 X_2 P_2, \\ R_4 &= 3C_3 C_2^2 - 2C_2 J_4 - C_2 P_4 - C_2 X_2 P_3 - C_2 X_3 P_2 - 3C_3 C_2 P_2 + C_3 P_2^2 + C_2 \delta P_2 F'(x^*) P_2, \\ R_5 &= -3C_3 C_2 J_3 - 3C_3 J_3 C_2 - 2C_2 J_5 + C_3 P_2 P_3 + C_3 P_3 P_2 + C_3 P_2 X_2 P_2 + C_3 X_2 P_2^2 \\ &\quad - C_2 P_5 - C_2 X_2 P_4 - 3C_3 C_2 P_3 - C_2 X_3 P_3 - C_2 X_4 P_2 - 3C_3 C_2 X_2 P_2 + 3C_3 J_3 P_2 \\ &\quad + C_2 \delta P_2 F'(x^*) P_3 + C_2 \delta P_3 F'(x^*) P_2. \end{aligned}$$

De la misma forma, la inversa del operador anterior se escribe como

$$[w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} = \left[I + S_2 e^{(k)2} + S_3 e^{(k)3} + S_4 e^{(k)4} + S_5 e^{(k)5} \right] + \mathcal{O}(e^{(k)6}),$$

para los valores

$$\begin{aligned} S_i &= -R_i, \quad i = 2, 3, \\ S_4 &= R_2^2 - R_4, \\ S_5 &= R_2 R_3 + R_3 R_2 - R_5. \end{aligned}$$

Por tanto, el error en el segundo paso del esquema se expresa de la forma

$$\begin{aligned} z^{(k)} - x^* &= (-J_5 - P_5 - S_2 P_3 - S_3 P_2) e^{(k)5} + (-J_6 - P_6 - S_2 P_4 - S_3 P_3 - S_4 P_2) e^{(k)6} \\ &\quad + (-J_7 - P_7 - S_3 P_5 - S_3 P_4 - S_4 P_3 - S_5 P_2) e^{(k)7} + \mathcal{O}(e^{(k)8}) \\ &= T_5 e^{(k)5} + T_6 e^{(k)6} + T_7 e^{(k)7} + \mathcal{O}(e^{(k)8}). \end{aligned}$$

Con el desarrollo $F(z^{(k)}) = F'(x^*)(z^{(k)} - x^*) + \mathcal{O}(e^{(k)8})$, la ecuación del error resulta en

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= z^{(k)} - x^* - [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} F(z^{(k)}) = (-S_2 T_5 - S_3 T_4) e^{(k)7} + \mathcal{O}(e^{(k)8}) \\ &= 2C_2^6 e^{(k)7} + \mathcal{O}(e^{(k)8}), \end{aligned}$$

quedando probado que el orden de convergencia de la familia MJ_δ es 7. \square

Nótese que el orden de convergencia con respecto a la familia $M_{\gamma,\delta}$ se ha incrementado en una unidad. Además, MJ_δ también tiene mayor orden que la familia con memoria MM_δ . En ninguna de las dos clases diseñadas se incrementa el número de evaluaciones funcionales. No obstante, los Teoremas 9.2 y 9.3 prueban que el uso de la matriz Jacobiana $F'(x^{(k)})$ proporciona mejores resultados para aproximar el parámetro γ de la familia biparamétrica de partida que el operador de diferencias divididas $[w^{(k-1)}, y^{(k-1)}; F]$. En la Sección 9.4 se comparan numéricamente las tres familias de métodos para aproximar la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Previamente, se realiza un análisis de la convergencia de los métodos con memoria libres de matrices Jacobianas.

9.3 Métodos sin matrices Jacobianas para resolver sistemas

Con el objetivo de diseñar métodos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales que no requieran del cálculo de matrices Jacobianas, es común trabajar con operadores de diferencias divididas. Asimismo, reemplazando la matriz Jacobiana del método de Newton por un operador de diferencias divididas, se obtiene la familia de Traub-Steffensen [83] cuya estructura iterativa es

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1} F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9.15)$$

donde $w^{(k)} = x^{(k)} + bF(x^{(k)})$, y b es un parámetro real no nulo. Nótese que para $b = 1$ la clase iterativa (9.15) es el conocido método de Steffensen para sistemas, introducido por Samanskii en [72].

Teorema 9.4. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en un conjunto abierto y convexo D y $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Si la estimación inicial $x^{(0)}$ está suficientemente cerca de la solución, entonces la familia de métodos iterativos (9.15) converge a x^* con orden de convergencia dos para todo valor del parámetro b . Su ecuación del error es

$$e^{(k+1)} = C_2(I + bF'(\alpha))e^{(k)2} + \mathcal{O}(e^{(k)3}), \quad (9.16)$$

donde $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $C_j = \frac{1}{j!}[F'(x^*)]^{-1}F^{(j)}(x^*)$, $j \geq 2$, e I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Siguiendo un desarrollo análogo al realizado en la sección anterior, a continuación se estudia a partir de la ecuación del error (9.16) cómo incrementar el orden de convergencia de la familia

de Traub-Steffensen utilizando aproximaciones del parámetro acelerador. También se utiliza un proceso de composición para extender su estructura iterativa a clases de métodos multipunto con mayor orden.

9.3.1 Diseño de clases iterativas de mayor orden con memoria

De la ecuación del error (9.16) se podría tomar el valor del parámetro $b = -[F'(x^*)]^{-1}$, obteniendo como resultado un esquema iterativo con orden de convergencia cúbico. Sin embargo, como el valor de x^* no es conocido, el incremento del orden de la familia (9.15) se debe realizar de otra forma. Una de las opciones más eficientes para lograr este aumento es, al igual que en la sección anterior, aproximar el valor de $F'(x^*)$ sin incrementar el número de nuevas evaluaciones funcionales. Concretamente, en esta sección se aproxima el valor de $F'(x^*)$ utilizando el operador de diferencias divididas de Kurchatov $[2x^{(k)} - x^{(k-1)}, x^{(k-1)}; F]$. Por tanto, reemplazando el parámetro b de la familia de Traub-Steffensen por $b := B^{(k)}$, donde $B^{(k)}$ es la matriz

$$B^{(k)} = -[2x^{(k)} - x^{(k-1)}, x^{(k-1)}; F]^{-1} \approx -[F'(x^*)]^{-1}, \quad (9.17)$$

se obtiene un esquema con memoria, denotado por MK3, con expresión iterativa

$$\begin{aligned} w^{(k)} &= x^{(k)} - [2x^{(k)} - x^{(k-1)}, x^{(k-1)}; F]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - [w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1} F(x^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.18)$$

Nótese que (9.17) utiliza evaluaciones funcionales ya realizadas por el método, por lo que no se añaden evaluaciones adicionales de la función no lineal.

Teorema 9.5. *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en un conjunto abierto y convexo D y $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Entonces, si las estimaciones iniciales $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$ están suficientemente cerca de la solución, el orden de convergencia del método MK3 es tres.*

Demostración. Denotamos por $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, el error en cada iteración del método MK3. Utilizando desarrollos de Taylor de $F(x^{(k-1)})$ y sus derivadas en torno a x^* , se obtiene la siguiente expresión del operador de diferencias divididas de Kurchatov:

$$\begin{aligned} [2x^{(k)} - x^{(k-1)}, x^{(k-1)}; F] &= F'(x^{(k-1)}) + \frac{1}{2}F''(x^{(k-1)})2(e^{(k)} - e^{(k-1)}) \\ &\quad + \frac{1}{6}F'''(x^{(k-1)})(2(e^{(k)} - e^{(k-1)}))^2 + \mathcal{O}_3(e^{(k-1)}, e^{(k)}) \\ &= F'(\alpha)[I + 2C_2e^{(k)} - 2C_3e^{(k-1)}e^{(k)} + C_3e^{(k-1)^2} + 4C_3e^{(k)^2}] \\ &\quad + \mathcal{O}_3(e^{(k-1)}, e^{(k)}), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}_3(e^{(k-1)}, e^{(k)})$ denota todos los términos en los que la suma de los exponentes de $e^{(k-1)}$ y $e^{(k)}$ es al menos 3.

Entonces, se obtiene:

$$[2x^{(k)} - x^{(k-1)}, x^{(k-1)}; F]^{-1} = \left[I - 2C_2e^{(k)} + 2C_3e^{(k-1)}e^{(k)} - C_3e^{(k-1)^2} + 4(C_2^2 - C_3)e^{(k)^2} \right] [F'(x^*)]^{-1} + \mathcal{O}_3(e^{(k-1)}, e^{(k)}). \quad (9.19)$$

Siendo $b = B^{(k)}$ definido en (9.17), de (9.19) se tiene

$$\begin{aligned} I + B^{(k)}F'(x^*) &= 2C_2e^{(k)} - 2C_3e^{(k-1)}e^{(k)} + C_3e^{(k-1)^2} - 4(C_2^2 - C_3)e^{(k)^2} \\ &\quad + \mathcal{O}_3(e^{(k-1)}, e^{(k)}) \\ &\sim e^{(k)}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Por otro lado, de la ecuación del error (9.16), se satisface la relación

$$e^{(k+1)} \sim (I + B^{(k)}F'(x^*))e^{(k)^2}. \quad (9.21)$$

Por último, utilizando (9.20), se verifica

$$e^{(k+1)} \sim e^{(k)}e^{(k)^2} = e^{(k)^3},$$

por lo que el orden de convergencia del método MK3 es 3. □

El Teorema 9.5 prueba el aumento del orden de convergencia en una unidad con respecto a la familia de Traub-Steffensen utilizando el operador de diferencias divididas de Kurchatov para aproximar el parámetro acelerador. Sin embargo, tal y como se muestra en el siguiente apartado, el uso de este operador hace posible aumentar el orden hasta cinco aplicando un proceso previo de composición.

9.3.2 Extensión a familias de métodos iterativos multipunto con memoria

Basándonos en el esquema iterativo (9.15), a continuación desarrollamos un nuevo método con memoria con orden de convergencia cinco. Previamente, se analiza la clase iterativa de dos pasos resultante de la composición de la familia de Traub-Steffensen. Esta composición da lugar a la clase de métodos iterativos libre de matrices Jacobianas con orden de convergencia tres:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1}F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1}F(y^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (9.22)$$

donde $w^{(k)} = x^{(k)} + bF(x^{(k)})$, y b es un parámetro real no nulo.

Teorema 9.6. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en un conjunto abierto y convexo D y $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de

forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Si la estimación inicial $x^{(0)}$ está suficientemente cerca de la solución, entonces la familia de métodos iterativos (9.22) converge a x^* con orden de convergencia tres para todo valor del parámetro b , siendo su ecuación del error

$$e^{(k+1)} = C_2(I + bF'(x^*))C_2(I + bF'(x^*))e^{(k)3} + \mathcal{O}(e^{(k)4}), \quad (9.23)$$

donde $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $C_j = \frac{1}{j!}[F'(x^*)]^{-1}F^{(j)}(x^*)$, $j \geq 2$, e I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Demostración. De forma análoga a lo expuesto en los resultados previos, se obtiene

$$\begin{aligned} [w^{(k)}, x^{(k)}; F] &= F'(x^*) \left[F'(x^{(k)}) + \frac{1}{2}F''(x^{(k)})(w^{(k)} - x^{(k)}) + \frac{1}{6}F'''(x^{(k)})(w^{(k)} - x^{(k)})^2 \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(e^{(k)4}) \\ &= F'(x^*) \left[I + (2C_2 + bC_2F'(x^*))e^{(k)} + (3C_3 + bC_2F'(x^*)C_2 + 3bC_3F'(x^*) \right. \\ &\quad \left. + b^2C_3F'(x^*)^2)e^{(k)2} + (bC_2F'(x^*)C_3 + 3bC_3F'(x^*)C_2 + 6bC_4F'(x^*) \right. \\ &\quad \left. + b^2C_3F'(x^*)^2C_2 + b^2C_3F'(x^*)C_2F'(x^*) + 4b^2C_4F'(x^*)^2 + 4C_4)e^{(k)3} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(e^{(k)4}). \end{aligned}$$

Como consecuencia, la inversa del operador de diferencias divididas $[w^{(k)}, x^{(k)}; F]$ puede ser expresada de la siguiente forma:

$$[w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1} = [X_1 + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2}] + \mathcal{O}(e^{(k)3}).$$

Los coeficientes X_i se calculan de la igualdad $[w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1}[w^{(k)}, x^{(k)}; F] = I$, obteniéndose $X_1 = I$ y

$$\begin{aligned} X_2 &= -2C_2 - bC_2F'(x^*), \\ X_3 &= -3C_3 + bC_2F'(x^*)C_2 + 2bC_2^2F'(x^*) - 3bC_3F'(x^*) - b^2C_3F'(x^*)^2 \\ &\quad + b^2C_2F'(x^*)C_2F'(x^*) + 4C_2^2. \end{aligned}$$

Entonces, el error en el primer paso de la familia (9.22) es

$$\begin{aligned} y^{(k)} - x^* &= e^{(k)} - [w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1}F(x^{(k)}) \\ &= C_2(I + bF'(x^*))e^{(k)2} + (2C_3 - 2C_2^2 - 2bC_2^2F'(x^*) + 3bC_3F'(x^*) \\ &\quad + b^2C_3F'(x^*)^2 - b^2C_2F'(x^*)C_2F'(x^*))e^{(k)3} + \mathcal{O}(e^{(k)4}). \end{aligned}$$

Desarrollando $F(y^{(k)})$ y sus derivadas en torno a x^* , se tiene

$$\begin{aligned} [w^{(k)}, y^{(k)}; F] &= F'(y^{(k)}) + \frac{1}{2}F''(y^{(k)})(w^{(k)} - y^{(k)}) + \frac{1}{6}F'''(y^{(k)})(w^{(k)} - y^{(k)})^2 + \mathcal{O}(e^{(k)3}) \\ &= F'(x^*) \left[I + C_2(I + bF'(x^*))e^{(k)} + (2C_2^2(I + bF'(x^*)) + C_2(bF'(x^*)C_2 \right. \\ &\quad \left. - C_2 - bC_2F'(x^*)) + C_3(I + bF'(x^*))^2)e^{(k)2} \right] + \mathcal{O}(e^{(k)3}). \end{aligned}$$

De la igualdad $[w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1}[w^{(k)}, y^{(k)}; F] = I$, la inversa del operador de diferencias divididas resultante es

$$\begin{aligned} [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} &= \left[I - C_2(I + bF'(x^*))e^{(k)} + (-2C_2^2(I + bF'(x^*)) \right. \\ &\quad \left. - C_2(bF'(x^*)C_2 - C_2 - bC_2F'(x^*)) - C_3(I + bF'(x^*))^2 \right. \\ &\quad \left. + C_2(I + bF'(x^*))C_2(I + bF'(x^*))e^{(k)2} \right] [F'(x^*)]^{-1} + \mathcal{O}(e^{(k)3}). \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación del error de la familia iterativa (9.22) es

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= y^{(k)} - x^* - [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1}F(y^{(k)}) \\ &= C_2(I + bF'(x^*))C_2(I + bF'(x^*))e^{(k)3} + \mathcal{O}(e^{(k)4}), \end{aligned}$$

por lo que su orden de convergencia es cúbico. □

Notemos que de nuevo el término $I + bF'(x^*)$ aparece en la ecuación del error (9.23). Como consecuencia, siguiendo el mismo proceso que con la familia de métodos (9.15), se va a utilizar el operador de diferencias divididas de Kurchatov para aproximar el parámetro b . Por tanto, con $b = B^{(k)}$ definido en (9.17), el esquema con memoria resultante, denotado como MK5, tiene la expresión iterativa

$$\begin{aligned} w^{(k)} &= x^{(k)} - [2x^{(k)} - x^{(k-1)}, x^{(k-1)}; F]^{-1}F(x^{(k)}), \\ y^{(k)} &= x^{(k)} - [w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [w^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1}F(y^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{9.24}$$

En el siguiente resultado se establece el orden de convergencia del método MK5.

Teorema 9.7. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en un conjunto abierto y convexo D y $x^* \in D$ una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, de forma que $F'(x)$ es continua y no singular en x^* . Si las estimaciones iniciales $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$ están suficientemente cerca de la solución, entonces el método iterativo MK5 converge a x^* con orden de convergencia cinco.

Demostración. A partir de la prueba del Teorema 9.5, de (9.20) se satisface la relación

$$I + B^{(k)}F'(x^*) \sim e^{(k)}.$$

Reemplazando esta relación en la ecuación del error (9.23), se verifica de forma inmediata

$$e^{(k+1)} \sim e^{(k)} e^{(k)} e^{(k)^3} = e^{(k)^5}. \quad (9.25)$$

Entonces, el orden de convergencia del método MK5 es cinco. \square

Tras demostrar el orden de convergencia teórico de las diferentes clases iterativas mostradas en las Secciones 9.2 y 9.3 de este capítulo, realizamos a continuación un estudio de su eficiencia en función del número de evaluaciones funcionales y las operaciones realizadas en cada iteración. Este estudio también se utiliza para comparar los métodos y familias de métodos propuestos con otros esquemas presentes en la literatura con y sin memoria con estructura iterativa semejante a éstos.

9.4 Índices de eficiencia y eficiencia computacional

Para comparar los diferentes esquemas iterativos de resolución de sistemas no lineales se utilizan dos índices: la extensión multidimensional del índice de eficiencia [66], $I = p^{1/d}$, y el índice de eficiencia computacional [40], $IC = p^{1/(d+op)}$, donde p es el orden de convergencia, d es el número de evaluaciones funcionales por iteración y op es el número de productos-cocientes por iteración. Recordemos que para evaluar F en un paso del proceso iterativo se necesita evaluar n funciones escalares, donde n es el tamaño del sistema. Por otro lado, las nuevas evaluaciones de la derivada F' requieren de n^2 evaluaciones de funciones escalares. Asimismo, el número de productos y cocientes requeridos para resolver un sistema lineal mediante la eliminación gaussiana es $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$. Además, para resolver q sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes, utilizando la descomposición LU, se necesitan $\frac{1}{3}n^3 + qn^2 - \frac{1}{3}n$ productos-cocientes.

Por otra parte, el operador matricial de diferencias divididas de primer orden se define en la práctica en [51] para todo $1 \leq i, j \leq n$ por medio de la expresión

$$[y, x; F]_{i,j} = \frac{F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - F_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)}{y_j - x_j},$$

donde $x = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_n)$, para $1 \leq i, j \leq n$. Por tanto, la evaluación de un operador de diferencias divididas de primer orden implica n^2 divisiones y $\frac{n(n-1)}{2}$ evaluaciones de funciones escalares. Se deben añadir n productos para las multiplicaciones vector-vector y n^2 productos para los productos matriz-vector.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, a continuación se analizan los índices de eficiencia y eficiencia computacional de los diferentes métodos propuestos en las Secciones 9.2 y 9.3. Este estudio se lleva a cabo en dos bloques: por un lado, se comparan las familias de métodos sin memoria $M_{\gamma,\delta}$ y MJ_δ con otros esquemas sin memoria; y por otro lado, se realiza el mismo estudio para los esquemas con memoria MM_δ , MK3 y MK5, comparándolos con otras dos familias con memoria.

9.4.1 Análisis de la eficiencia de los esquemas iterativos sin memoria

En primer lugar, se muestran las expresiones iterativas de los métodos vectoriales sin memoria utilizados en la comparativa de los índices de eficiencia. El esquema diseñado por Soleymani et al. en [81], denotado en esta memoria por SLB, tiene la expresión iterativa

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3}[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{1}{2}\left[3F'(y^{(k)}) - F'(x^{(k)})\right]^{-1}\left[3F'(y^{(k)}) + F'(x^{(k)})\right][F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \left(\frac{1}{2}\left[3F'(y^{(k)}) - F'(x^{(k)})\right]^{-1}\left[3F'(y^{(k)}) + F'(x^{(k)})\right]\right)^2[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \end{aligned} \quad (9.26)$$

mientras que el método descrito en [53], denotado por HMT, es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3}[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= x^{(k)} - \left[\frac{5}{8}I + \frac{3}{8}\left([F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)})\right)^2\right][F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - A^{(k)}[F'(y^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \end{aligned} \quad (9.27)$$

donde

$$A^{(k)} = -\frac{9}{4}I + \frac{15}{8}[F'(y^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}) + \frac{11}{8}[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(y^{(k)}),$$

e I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$. Entre los esquemas que, además de matrices Jacobianas, utilizan diferencias divididas, se considera el método diseñado por Sharma y Arora en [75], cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - (3I - 2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F])[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - (3I - 2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F])[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \end{aligned} \quad (9.28)$$

y el esquema presentado por Grau et al. en [50], con expresión iterativa

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \left(2[x^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} - [F'(x^{(k)})]^{-1}\right)F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \left(2[x^{(k)}, y^{(k)}; F]^{-1} - [F'(x^{(k)})]^{-1}\right)F(z^{(k)}). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Se ha denotado a estos métodos por SA y GGN, respectivamente. Todos estos métodos tienen orden de convergencia seis y se han utilizado tanto para comparar la eficiencia de los métodos sin memoria como para resolver diversos sistemas de ecuaciones no lineales.

En la Tabla 9.1 se muestra el número de evaluaciones funcionales de los métodos SA, GGN, HMT, SLB, $M_{\gamma,\delta}$ y MJ_δ junto con sus índices de eficiencia.

Método	nF	nF'	nDD	d	p	I
SA	3	1	1	$\frac{3n^2+5n}{2}$	6	$6 \frac{2}{3n^2+5n}$
GGN	3	1	1	$\frac{3n^2+5n}{2}$	6	$6 \frac{2}{3n^2+5n}$
HMT	2	2	-	$2n^2 + 2n$	6	$6 \frac{1}{2n^2+2n}$
SLB	2	2	-	$2n^2 + 2n$	6	$6 \frac{1}{2n^2+2n}$
$M_{\gamma,\delta}$	3	1	1	$\frac{3n^2+5n}{2}$	6	$6 \frac{2}{3n^2+5n}$
MJ_δ	3	1	1	$\frac{3n^2+5n}{2}$	7	$7 \frac{2}{3n^2+5n}$

Tabla 9.1: Índices de eficiencia de diferentes esquemas iterativos

De la Tabla 9.1 se concluye que, con el objetivo de reducir el número de evaluaciones funcionales, el uso del operador de diferencias divididas de primer orden es preferible frente a las matrices Jacobianas, ya que de entre los esquemas utilizados para realizar la comparativa, los esquemas SA, GGN, $M_{\gamma,\delta}$ y MJ_δ son los que requieren de menos evaluaciones funcionales. Además, la clase iterativa con mayor índice de eficiencia es MJ_δ , ya que realizando las mismas evaluaciones funcionales que la familia biparamétrica $M_{\gamma,\delta}$, tiene un orden de convergencia una unidad mayor.

Por otro lado, para calcular el número de productos-cocientes por iteración del método $M_{\gamma,\delta}$, se tiene en cuenta que, en cada iteración, se necesita resolver un sistema lineal con la matriz de coeficientes $F'(x^{(k)})$, dos sistemas lineales con la matriz $[w^{(k)}, y^{(k)}; F]$, una multiplicación vector-vector (n operaciones) y n^2 divisiones del operador de diferencias divididas. Por tanto, el IC de $M_{\gamma,\delta}$ es

$$IC_{M_{\gamma,\delta}} = 6 \frac{1}{\frac{2}{3}n^3 + \frac{11}{2}n^2 + \frac{17}{6}n}.$$

De la misma forma, para la familia MJ_δ únicamente se añade con respecto a $M_{\gamma,\delta}$ la resolución de un sistema lineal con matriz de coeficientes $F'(x^{(k)})$, presente en la definición del parámetro $\gamma_k = -[F'(x^{(k)})]^{-1}$. Por tanto:

$$IC_{MJ_\delta} = 7 \frac{1}{\frac{2}{3}n^3 + \frac{13}{2}n^2 + \frac{17}{6}n}.$$

En la Tabla 9.2 se muestra el índice computacional IC de los esquemas SA, GGN, HMT, SLB y $M_{\gamma,\delta}$. En la tabla, S1 denota el número de sistemas lineales con matriz de coeficientes $F'(x^{(k)})$ que se necesitan resolver en cada iteración del proceso iterativo, S2 es el número de sistemas lineales con otra matriz de coeficientes, $M \times V$ es el número de productos matriz-vector, $V \times V$ el número de productos vector-vector y nDD es el número de diferencias divididas de primer orden utilizadas por el método.

Método	S1	S2	$M \times V$	$V \times V$	nDD	op	IC
SA	5	-	2	-	1	$\frac{1}{3}n^3 + 8n^2 - \frac{1}{3}n$	$6 \frac{\frac{1}{3}n^3 + \frac{19}{2}n^2 + \frac{13}{6}n}{\frac{1}{3}n^3 + \frac{19}{2}n^2 + \frac{13}{6}n}$
GGN	3	2	-	-	1	$\frac{2}{3}n^3 + 6n^2 - \frac{2}{3}n$	$6 \frac{\frac{2}{3}n^3 + \frac{15}{2}n^2 + \frac{11}{6}n}{\frac{2}{3}n^3 + \frac{15}{2}n^2 + \frac{11}{6}n}$
HMT	3	3	4	-	-	$\frac{2}{3}n^3 + 10n^2 - \frac{2}{3}n$	$6 \frac{\frac{2}{3}n^3 + 12n^2 + \frac{4}{3}n}{\frac{2}{3}n^3 + 12n^2 + \frac{4}{3}n}$
SLB	2	3	3	-	-	$\frac{2}{3}n^3 + 8n^2 - \frac{2}{3}n$	$6 \frac{\frac{2}{3}n^3 + 10n^2 + \frac{4}{3}n}{\frac{2}{3}n^3 + 10n^2 + \frac{4}{3}n}$
$M_{\gamma,\delta}$	1	2	-	1	1	$\frac{2}{3}n^3 + 4n^2 + \frac{1}{3}n$	$6 \frac{\frac{2}{3}n^3 + \frac{11}{2}n^2 + \frac{17}{6}n}{\frac{2}{3}n^3 + \frac{11}{2}n^2 + \frac{17}{6}n}$
MJ_δ	2	2	-	1	1	$\frac{2}{3}n^3 + 5n^2 + \frac{1}{3}n$	$7 \frac{\frac{2}{3}n^3 + \frac{13}{2}n^2 + \frac{17}{6}n}{\frac{2}{3}n^3 + \frac{13}{2}n^2 + \frac{17}{6}n}$

Tabla 9.2: Índices de eficiencia computacional de diferentes esquemas iterativos

Notemos que, aunque el índice clásico es similar en todos los casos considerados, éste no es el caso del índice de eficiencia computacional, ya que el número de operadores lineales inversos es diferente para cada esquema. En la Figura 9.1 se muestra el índice de eficiencia computacional para varios métodos y sistemas de tamaño de 1 a 100. Se puede observar que hasta $n = 10$ el mejor índice corresponde al método $M_{\gamma,\delta}$, mientras que para $n \geq 20$ hay pocas diferencias entre los métodos siendo SA el mejor.

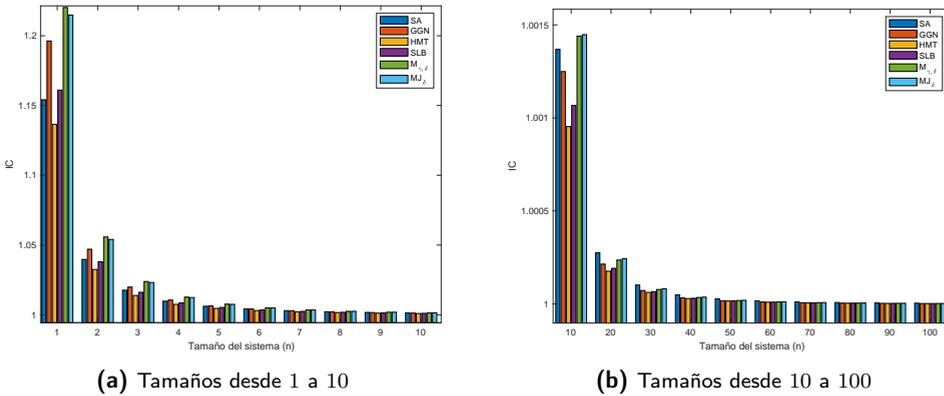


Figura 9.1: Índices de eficiencia computacional para diversos métodos

9.4.2 Análisis de la eficiencia de los esquemas iterativos con memoria

Para realizar la comparativa de la eficiencia de los esquemas con memoria, se utiliza la familia de métodos presentada en [63]

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [u^{(k)}, v^{(k)}; F]^{-1} F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [u^{(k)}, v^{(k)}; F]^{-1} F(y^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9.30)$$

donde

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= x^{(k)} + \gamma [u^{(k-1)}, v^{(k-1)}; F]^{-1} F(x^{(k)}), \\ v^{(k)} &= x^{(k)} - \delta [u^{(k-1)}, v^{(k-1)}; F]^{-1} F(x^{(k)}), \end{aligned}$$

siendo γ y δ parámetros arbitrarios. Notemos que este esquema no utiliza matrices Jacobianas y, al igual que los métodos MK3 y MK5, también se introduce más de un iterado previo por medio de la inversa de un operador de diferencias divididas. Cuando los parámetros satisfacen la condición $\delta - \gamma = 1$, la familia (9.30) tiene orden de convergencia $p = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30$. En esta memoria se ha denotado por M1.

Por otro lado, se utiliza la clase de métodos con memoria presentada en [69] con estructura iterativa

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [u^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1} F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - \left(aI + G^{(k)}((3-2a)I + (a-2)G^{(k)}) \right) [u^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1} F(y^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9.31)$$

siendo $G^{(k)} = [u^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1} [z^{(k)}, y^{(k)}; F]$ y los puntos

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= y^{(k)} + cF(y^{(k)}), \\ u^{(k)} &= x^{(k)} - [u^{(k-1)}, x^{(k-1)}; F]^{-1} F(x^{(k)}), \end{aligned}$$

donde $a, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. La familia (9.31), denotada en esta memoria por M2, tiene orden de convergencia $p = 2 + \sqrt{6} \approx 4.45$ cuando $a = 3$, y orden $p = 2 + \sqrt{5} \approx 4.24$ en otro caso.

Siguiendo el mismo proceso que en las clases de métodos sin memoria, en las Tablas 9.3 y 9.4 se muestran los resultados obtenidos para las evaluaciones funcionales y el número de productos-cocientes de cada uno de los esquemas sin memoria considerados, así como el índice de eficiencia clásico asociado.

En la Tabla 9.3 se puede ver que M1 es el esquema que realiza el menor número de evaluaciones funcionales. No obstante, su índice de eficiencia no siempre es el más elevado debido a que tiene orden 3.30, tal y como se observa en la Figura 9.2(a) para sistemas de tamaño menor que 10. Aunque la familia MM_δ es la que presenta un orden de convergencia mayor de entre las clases con memoria que se han tomado para el estudio, ésta requiere de un operador de diferencias

divididas, tres evaluaciones funcionales distintas de F y una matriz Jacobiana, siendo de las clases que requieren de un mayor número de evaluaciones funcionales. Sin embargo, en la Figura 9.2(a) se observa que, cuando aumenta la dimensión del sistema, los índices de eficiencia de todos los esquemas son parecidos, siendo MM_δ el mejor en algunos casos.

Método	nF	nF'	nDD	d	p	I
M1	2	-	2	$\frac{n^2+3n}{2}$	3.30	$3.30 \frac{2}{n^2+3n}$
M2	2	-	2	$n^2 + n$	4.24	$4.24 \frac{1}{n^2+n}$
MM_δ	3	1	1	$\frac{3n^2+5n}{2}$	6.31	$6.31 \frac{2}{3n^2+5n}$
MK3	1	-	2	n^2	3	$3 \frac{1}{n^2}$
MK5	2	-	3	$\frac{9n^2-3n}{2}$	5	$5 \frac{2}{9n^2-3n}$

Tabla 9.3: Índices de eficiencia de diferentes esquemas iterativos con memoria

En cuanto al índice de eficiencia computacional, el número de productos-cocientes realizados en los esquemas con memoria se calcula teniendo en cuenta los mismos parámetros que con los métodos sin memoria analizados anteriormente. Por ello, en la Tabla 9.4 se ha seguido la misma notación que en la Tabla 9.2, pero además se ha añadido la resolución de otro sistema lineal (columna S3) con matriz de coeficientes distinta a la de los sistemas S1 y S2.

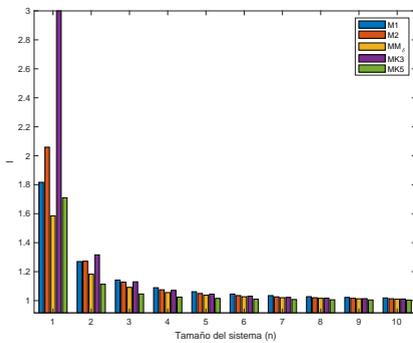
Sin embargo, hay algunas consideraciones a tener en cuenta. Por ejemplo, para el número de productos-cocientes de MM_δ , únicamente se añade con respecto a $M_{\gamma,\delta}$ la resolución del sistema lineal $\gamma_k F(y^{(k)}) = [w^{(k-1)}, y^{(k-1)}; F]^{-1} F(y^{(k)})$. Notemos que en la iteración k -ésima no se añaden las operaciones correspondientes al cálculo del operador $[w^{(k-1)}, y^{(k-1)}; F]$, considerándose que estas operaciones ya se han realizado en la iteración $k - 1$. Por tanto, el índice de eficiencia computacional de MM_δ tiene el valor

$$IC_{MM_\delta} = 6.3166 \frac{1}{n^3 + \frac{13}{2}n^2 + \frac{5}{2}n}.$$

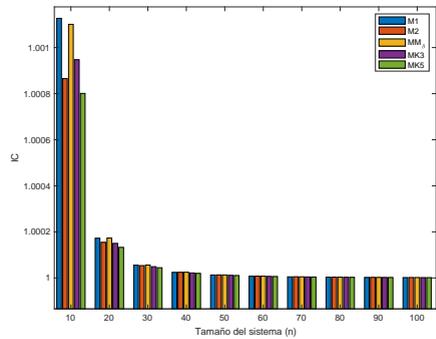
Los índices de eficiencia computacional de los esquemas M1, M2, MK3 y MK5 se calculan siguiendo las mismas pautas que con MM_δ , y se muestran en la Tabla 9.4. Debido a que cada método tiene un orden de convergencia distinto, estos resultados se visualizan de forma más clara en la Figura 9.2(b), donde se ha representado el IC de cada esquema para dimensiones del sistema no lineal (n) desde 10 hasta 100. Se observa que a medida que n aumenta, los mejores valores del IC , asociados a las familias M1 y MM_δ , se igualan a los de las demás clases iterativas, e incluso el método MK3 presenta un IC competente a pesar de ser el método con menor orden de convergencia.

Método	S1	S2	S3	$M \times V$	$V \times V$	nDD	op	IC
M1	2	1	-	-	1		$\frac{2}{3}n^3 + 4n^2 - \frac{2}{3}n$	$3.30 \frac{\frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{6}n}{\frac{2}{3}n^3 + 4n^2 - \frac{2}{3}n}$
M2	4	1	-	2		2	$\frac{2}{3}n^3 + 9n^2 - \frac{2}{3}n$	$4.24 \frac{\frac{1}{10}n^3 + \frac{1}{3}n}{\frac{2}{3}n^3 + 9n^2 - \frac{2}{3}n}$
MM_δ	1	2	1	-	1	1	$n^3 + 5n^2$	$6.31 \frac{\frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{2}n}{n^3 + 5n^2}$
MK3	1	1	-	-	-	2	$\frac{2}{3}n^3 + 4n^2 - \frac{2}{3}n$	$3 \frac{\frac{1}{5}n^3 + \frac{2}{3}n}{\frac{2}{3}n^3 + 4n^2 - \frac{2}{3}n}$
MK5	1	1	1	-	-	3	$n^3 + 6n^2 - n$	$5 \frac{\frac{1}{2}n^3 - 4n}{n^3 + 6n^2 - n}$

Tabla 9.4: Índices de eficiencia computacional de diferentes esquemas iterativos con memoria



(a) Tamaños desde 1 a 10



(b) Tamaños desde 10 a 100

Figura 9.2: (a) Índice de eficiencia y (b) índice de eficiencia computacional para diversos métodos

9.5 Resultados numéricos

Esta sección está dedicada a la implementación numérica de todos los métodos y familias propuestos en este capítulo para aproximar soluciones de problemas no lineales y comprobar el comportamiento de éstos. Siguiendo la misma estructura que en las Secciones 9.2 y 9.3, los experimentos numéricos quedan divididos en dos bloques: uno para las clases que utilizan matrices Jacobianas y operadores de diferencias divididas de primer orden, y otro para las que únicamente utilizan diferencias divididas.

9.5.1 Clases iterativas con matrices Jacobianas

En este apartado se comprueba, en primer lugar, el funcionamiento práctico de la familia de métodos iterativos $M_{\gamma,\delta}$ para resolver el problema de Fisher [48]. Tras discretizar la ecuación en derivadas parciales que define el problema, se resuelve utilizando $M_{\gamma,\delta}$ y otros esquemas iterativos con el mismo orden de convergencia, comparando los resultados obtenidos. En segundo lugar, se compara la familia $M_{\gamma,\delta}$ con las clases iterativas MM_δ y MJ_δ obtenidas a partir de ésta aproximando la solución de sistemas de ecuaciones no lineales académicos.

A continuación se considera el siguiente caso particular de la ecuación de Fisher (véanse, por ejemplo [48, 55]):

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + u(x, t) - u^2(x, t), \quad x \in [-25, 50], t \geq 0, \quad (9.32)$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < -10 \\ 0, & -10 \leq x \leq 10 \\ 1/4, & 10 < x < 20 \\ 0, & x \geq 20, \end{cases} \quad (9.33)$$

y condiciones de contorno $u(-25, t) = 1$ y $u(50, t) = 0$, para $t > 0$.

En el Capítulo 8 de esta memoria se realiza una discretización de (9.32) utilizando diferencias finitas regresivas y centrales para las variables temporal y espacial, respectivamente. Con este objetivo, se define un mallado de valores

$$\begin{aligned} x_i &= -25 + ih, & i &= 0, 1, \dots, nx, \\ t_j &= 0 + jk, & j &= 0, 1, \dots, nt, \end{aligned}$$

en el plano $(x_i, t_j) \in [-25, 50] \times [0, T_{max}]$, siendo respectivamente nx y nt el número de subintervalos de las variables x y t , y por tanto, $h = 75/nx$ y $k = T_{max}/nt$.

La aproximación a la solución en cada punto (x_i, t_j) del mallado, denotada por $u_{i,j}$, se obtiene en cada instante j a partir la solución en el instante $j-1$, resolviendo para cada $j = 1, \dots, nt-1$ el siguiente sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ u_{nx,j} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} u_{1,j}^2 \\ u_{2,j}^2 \\ \vdots \\ u_{nx-1,j}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j-1} \end{pmatrix}, \quad (9.34)$$

donde $\lambda = \frac{k}{h^2}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda - k & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda - k & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + 2\lambda - k & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 + 2\lambda - k \end{pmatrix}.$$

Entonces, empezando con la condición inicial (9.33), se obtiene la solución para cada t_j resolviendo el sistema no lineal (9.34) utilizando métodos iterativos.

Para comparar la eficiencia de la familia propuesta $M_{\gamma,\delta}$ resolviendo el problema de Fisher, se han tomado dos esquemas iterativos con características parecidas a esta familia. Uno de ellos es el método SA, descrito en la ecuación (9.28), y el otro esquema utilizado para la comparativa es GGN, mostrado en (9.29), ambos con orden de convergencia seis, y cuya eficiencia se ha estudiado en la Sección 9.4.

Tal y como se ha probado en el Teorema 9.1, la familia $M_{\gamma,\delta}$ tiene orden de convergencia seis para cualesquiera valores de los parámetros γ y δ . En este caso, el comportamiento numérico de la familia se comprueba utilizando $\gamma = \delta = 0.1$, denotando el método resultante por $M_{0.1,0.1}$. La implementación de todos los métodos y la aproximación de la solución del problema de Fisher se ha llevado a cabo en Matlab R2017b. En la Tabla 9.5 se muestran los resultados obtenidos cuando se resuelve el sistema de ecuaciones no lineales (9.34) para $nx = 30$, $nt = 100$, $nt = 200$ y distintos valores de T_{max} .

Comenzando con la condición inicial del problema, la solución para cada $t_j = 0, \dots, T_{max}$ se obtiene del instante anterior. Consideramos que la solución se ha alcanzado cuando el método iterativo correspondiente satisface $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-6}$ en un máximo de 50 iteraciones. Para cada método, se muestra el número medio de iteraciones necesario para aproximar la solución en cada paso temporal, el valor de $\|F(x^{(k+1)})\|$ y el tiempo computacional requerido (en segundos) tras 10 ejecuciones consecutivas.

Como se puede observar en la Tabla 9.5, todos los esquemas iterativos requieren de pocas iteraciones para aproximar la solución del problema. Sin embargo, el método $M_{0.1,0.1}$ proporciona mejores resultados que los esquemas SA y GGN debido a su precisión, dada por el valor de $\|F(x^{(k+1)})\|$, el cual es inferior y el tiempo requerido también.

En la Figura 9.3 se muestra la solución aproximada del problema de Fisher tomando $nx = 30$, $nt = 200$ y $T_{max} = 10$. En esta aproximación, obtenida utilizando el método $M_{0.1,0.1}$, se puede observar la onda viajera que caracteriza al problema de Fisher.

En la Sección 9.2.1 de esta memoria se ha demostrado el incremento del orden de convergencia que se produce con respecto a la familia $M_{\gamma,\delta}$ utilizando aproximaciones de γ con y sin memoria. Recordemos que las familias uniparamétricas obtenidas, MM_δ y MJ_δ , no utilizan evaluaciones funcionales adicionales y tienen órdenes de 6.3166 y 7, respectivamente, para todo valor del

$T_{max} = 1$	Método	nt	iter	$\ F(x^{(k+1)})\ $	tiempo
	M _{0.1,0.1}	100	2.0	6.8964e-26	129.0055
	SA		2.0	3.6096e-8	195.5632
	GGN		2.0	2.2563e-7	131.6601
	M _{0.1,0.1}	200	2.0	3.3489e-29	254.9187
	SA		2.0	4.5089e-9	388.7566
	GGN		2.0	2.8182e-8	261.5245
$T_{max} = 1.5$	M _{0.1,0.1}	100	2.0	8.3614e-24	127.0950
	SA		2.0	1.3537e-7	191.2135
	GGN		2.0	8.4627e-7	129.8840
	M _{0.1,0.1}	200	2.0	4.0699e-27	253.4365
	SA		2.0	1.6901e-8	386.6087
	GGN		2.0	1.0564e-7	260.1644
$T_{max} = 2$	M _{0.1,0.1}	100	2.0	1.6946e-22	127.5932
	SA		2.0	3.2791e-7	194.0390
	GGN		3.0	8.6916e-14	247.3468
	M _{0.1,0.1}	200	2.0	8.2946e-26	254.0421
	SA		2.0	4.0898e-8	388.4068
	GGN		2.0	2.5564e-7	260.0794

Tabla 9.5: Resultados numéricos del problema de Fisher para $nx = 30$

parámetro δ . Estas clases, junto con la familia biparamétrica original, se han utilizado para aproximar las raíces de las funciones multidimensionales de los Ejemplos 1 y 2. De esta forma, es posible comparar el funcionamiento práctico de las tres clases iterativas y a su vez comprobar los resultados teóricos anteriormente descritos en esta memoria.

Ejemplo 1

$$\begin{aligned} \cos(y) - \sin(x) &= 0, \\ z^x - 1/y &= 0, \\ e^x - z^2 &= 0, \end{aligned}$$

con solución aproximada $x^* \approx (0.909569494520045, 0.661226832274852, 1.575834143907)^T$.

Ejemplo 2

$$\begin{aligned} x_i^2 x_{i+1} - 1 &= 0, & i = 1, 2, \dots, 99, \\ x_{100}^2 x_1 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

con solución $x^* = (1, 1, \dots, 1)^T$.

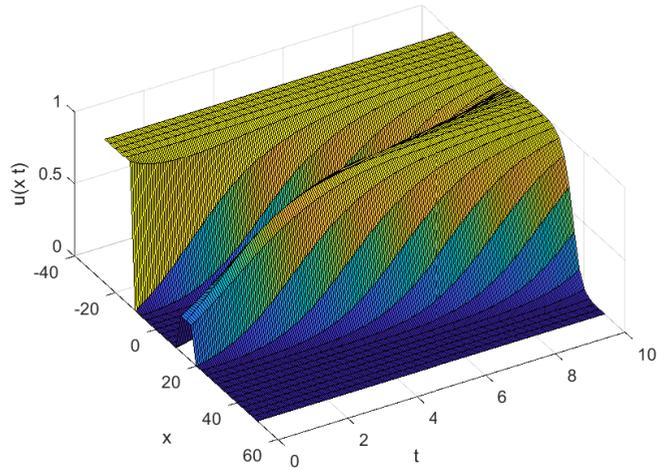


Figura 9.3: Solución del problema de Fisher obtenida por $M_{0.1,0.1}$

Los resultados mostrados en las Tablas 9.6 y 9.7 para los Ejemplos 1 y 2 se han implementado en Matlab R2017b con aritmética de precisión variable con 2000 dígitos de mantisa. Como en la resolución anterior de la ecuación de Fisher, se han utilizado los métodos correspondientes a $\gamma = 0.1$ y $\delta = 0.1$ para cada clase iterativa. Los criterios de parada para aproximar la solución son $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-200}$ o $\|F(x^{(k)})\| < 10^{-200}$ con un máximo de 50 iteraciones. Los valores de las estimaciones del error y las iteraciones requeridas en cada método se muestran en las Tablas 9.6 y 9.7 tomando distintos puntos iniciales $x^{(0)}$ y un valor inicial del parámetro $\gamma_0 = 0.1I$ para la clase con memoria MM_δ , junto con el orden de convergencia computacional aproximado (ACOC) obtenido tras finalizar el proceso iterativo.

Los resultados obtenidos para los Ejemplos 1 y 2 (Tablas 9.6 y 9.7, respectivamente) muestran muy buenas estimaciones del error en todos los casos, lo cual es un indicador del buen funcionamiento de las clases iterativas para los valores de los parámetros y los sistemas de ecuaciones no lineales que se han seleccionado. Además, estas estimaciones se obtienen con pocas iteraciones, siendo el número requerido por los métodos $MM_{0.1}$ y $MJ_{0.1}$ siempre menor que para $M_{0.1,0.1}$. La estabilidad de los métodos considerados para el cálculo de raíces también se visualiza en los valores del ACOC obtenidos, con resultados muy próximos a los esperados en los valores teóricos.

$x^{(0)}$	Método	iter	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$M_{0.1,0.1}$	5	3.610e-160	2.736e-956	6.0001
	$MM_{0.1}$	3	4.684e-38	1.638e-235	6.3504
	$MJ_{0.1}$	4	3.085e-37	4.326e-255	7.0223
$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$M_{0.1,0.1}$	5	6.986e-91	1.435e-540	5.9947
	$MM_{0.1}$	4	8.094e-112	1.148e-701	6.3294
	$MJ_{0.1}$	5	7.018e-172	1.361e-1197	6.9980
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.7 \\ 1.8 \end{pmatrix}$	$M_{0.1,0.1}$	5	4.390e-174	8.838e-1040	5.9995
	$MM_{0.1}$	3	8.796e-34	9.007e-209	6.3144
	$MJ_{0.1}$	5	1.046e-73	1.455e-510	6.9960

Tabla 9.6: Resultados numéricos para el Ejemplo 1

$x^{(0)}$	Método	iter	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC
$\begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$	$M_{0.1,0.1}$	5	1.701e-189	2.172e-1137	6.0000
	$MM_{0.1}$	3	2.735e-36	3.113e-230	6.3198
	$MJ_{0.1}$	4	2.563e-72	4.364e-507	6.9940
$\begin{pmatrix} 0.5 \\ \vdots \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$M_{0.1,0.1}$	5	1.527e-95	1.136e-573	5.9998
	$MM_{0.1}$	4	1.239e-118	2.436e-750	6.3291
	$MJ_{0.1}$	4	4.546e-48	2.407e-337	6.9697
$\begin{pmatrix} 5 \\ \vdots \\ 5 \end{pmatrix}$	$M_{0.1,0.1}$	7	6.954e-142	1.014e-851	6.0000
	$MM_{0.1}$	6	4.366e-196	1.424e-1239	6.3228
	$MJ_{0.1}$	5	7.416e-89	7.401e-623	6.9978

Tabla 9.7: Resultados numéricos para el Ejemplo 2

9.5.2 Clases iterativas sin matrices Jacobianas

A continuación se prueba numéricamente el funcionamiento de los esquemas con memoria diseñados a partir del método de Traub-Steffensen en la Sección 9.3.2. La implementación de los métodos MK3 y MK5 para calcular las raíces de funciones no lineales multidimensionales permite comprobar los resultados teóricos de los Teoremas 9.5 y 9.7, y también comparar el funcionamiento de éstos con otros esquemas con memoria libres de matrices Jacobianas.

Todos los esquemas propuestos en este apartado son familias de métodos con memoria que requieren de dos estimaciones iniciales, $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$, para iniciar el proceso iterativo. Siguiendo las pautas de [63, 69], tomamos un valor inicial para el parámetro $B^{(0)} = -0.01I$ en los métodos MK3 y MK5, $[u^{(0)}, v^{(0)}; F] = -0.01I$ para la familia (9.30) y $[u^{(0)}, x^{(0)}; F] = -0.01I$ para la familia (9.31), donde I denota la matriz identidad. Por tanto, únicamente se necesita una estimación inicial $x^{(0)}$ para la implementación numérica propuesta a continuación. Además, denotamos por M1 al método resultante de tomar $\gamma = 1$ y $\delta = 2$ en (9.30). Cuando en (9.31) los parámetros son $a = 3$ y $c = -0.01$, denotamos al esquema obtenido por M2.

La comparativa del funcionamiento práctico de los métodos mencionados se ha realizado utilizando los siguientes ejemplos académicos de sistemas de ecuaciones no lineales:

Ejemplo 3 Se considera el mismo sistema no lineal que el Ejemplo 2 del apartado anterior, pero con dimensión 10. Por tanto:

$$\begin{aligned}x_i^2 x_{i+1} - 1 &= 0, & i = 1, 2, \dots, 9, \\x_{10}^2 x_1 - 1 &= 0,\end{aligned}$$

con solución $x^* = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Ejemplo 4

$$\begin{aligned}x_2 x_3 + x_4(x_2 + x_3) &= 0, \\x_1 x_3 + x_4(x_1 + x_3) &= 0, \\x_1 x_2 + x_4(x_1 + x_2) &= 0, \\x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 1 &= 0,\end{aligned}$$

cuya solución aproximada es $x^* \approx (0.57735, 0.57735, 0.57735, -0.28867)^T$.

Ejemplo 5

$$\arctan x_i - 2 \left(\sum_{j=1}^{20} x_j^2 \right) + 2x_i^2 = -1, \quad i = 1, 2, \dots, 20,$$

siendo la solución $x^* \approx (0.1757, 0.1757, \dots, 0.1757)^T$.

Los resultados numéricos se han realizado utilizando el software Matlab R2019a con aritmética de precisión variable con 2000 dígitos de mantisa. El proceso iterativo finaliza tras tres iteraciones, de forma que se puede comparar el error de cada método en todas las iteraciones analizando los valores de $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ y $\|F^{(k+1)}\|$ para $k = 0, 1, 2$. También se compara el orden de convergencia de cada método con el orden de convergencia obtenido computacionalmente, utilizando para ello el ACOC definido en [44]. Las Tablas 9.8-9.10 contienen los resultados obtenidos para los sistemas no lineales seleccionados, donde se han tomado diferentes estimaciones iniciales de la solución de cada sistema.

En general, se puede observar en las Tablas 9.8-9.10 que todos los métodos alcanzan el orden de convergencia esperado con tan solo tres iteraciones, siendo el método MK5 el que tiene mayor orden tras la última iteración. Además, el esquema MK5 proporciona mejores aproximaciones a

$x^{(0)}$		MK3	MK5	M1	M2
$\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ \vdots \\ 0.9 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.03749	0.0375	0.3076	0.316
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	6.920e-6	1.287e-9	0.008655	0.0002238
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	7.427e-16	1.890e-46	1.151e-8	4.096e-18
	$\ F(x^{(1)})\ $	2.076e-5	3.861e-9	0.0259	0.0006712
	$\ F(x^{(2)})\ $	2.228e-15	5.245e-46	3.454e-8	1.229e-17
	$\ F(x^{(3)})\ $	5.232e-31	1.079e-184	9.633e-28	2.669e-71
	ACOC	2.67	4.9344	3.7895	4.3612
$\begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ \vdots \\ 1.1 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.03749	0.0375	0.3076	0.316
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	6.920e-6	1.287e-9	0.008655	0.0002238
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	7.427e-16	1.890e-46	1.151e-8	4.096e-18
	$\ F(x^{(1)})\ $	2.076e-5	3.861e-9	0.0259	0.0006712
	$\ F(x^{(2)})\ $	2.228e-15	5.245e-46	3.454e-8	1.229e-17
	$\ F(x^{(3)})\ $	5.232e-31	1.079e-184	9.633e-28	2.669e-71
	ACOC	2.656	4.9164	3.4684	4.5223
$\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ \vdots \\ -0.5 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.1066	0.1051	4.399	0.7246
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	0.001496	2.080e-5	0.316	4.587
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	6.020e-10	1.177e-22	0.02848	0.5377
	$\ F(x^{(1)})\ $	0.004489	6.239e-5	0.925	3.225
	$\ F(x^{(2)})\ $	1.806e-9	3.530e-22	0.08467	2.03
	$\ F(x^{(3)})\ $	1.284e-25	1.818e-89	2.089e-6	0.09263
	ACOC	3.4512	4.6568	0.91391	-

Tabla 9.8: Resultados numéricos para el Ejemplo 3

la solución que los métodos MK3, M1 y M2. Esto se puede observar en las columnas correspondientes a $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|$ y $\|F(x^{(3)})\|$, donde MK5 tiene siempre valores inferiores con respecto a los otros métodos. Escribimos "-" cuando el valor del ACOC obtenido no es estable.

9.6 Conclusiones

En este capítulo, se han diseñado diversas familias de esquemas iterativos utilizando procedimientos distintos. Por un lado, la composición del método de Newton con una variante del método de Traub con operadores de diferencias divididas y dos parámetros aceleradores. Este proceso da lugar a una familia biparamétrica de orden seis que, tras la aproximación de uno de los parámetros aceleradores, permite la obtención de clases de métodos iterativos de hasta orden siete. Por

$x^{(0)}$		MK3	MK5	M1	M2
$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ \vdots \\ 0.8 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.297	0.2946	1.074	1.135
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	0.002474	1.993e-6	0.08273	0.02034
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	7.219e-9	3.443e-31	1.631e-6	4.263e-12
	$\ F(x^{(1)})\ $	0.004924	3.966e-6	0.1747	0.04171
	$\ F(x^{(2)})\ $	1.444e-8	6.887e-31	3.354e-6	8.543e-12
	$\ F(x^{(3)})\ $	3.354e-25	1.336e-173	1.619e-23	9.242e-42
	ACOC	2.6619	4.7899	4.2266	5.5409
$\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ \vdots \\ 0.75 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.2396	0.2385	1.028	1.071
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	0.00108	3.700e-7	0.05387	0.01053
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	5.543e-10	2.120e-33	2.245e-7	8.809e-14
	$\ F(x^{(1)})\ $	0.002154	7.376e-7	0.1122	0.02144
	$\ F(x^{(2)})\ $	1.109e-9	4.240e-33	4.598e-7	1.763e-13
	$\ F(x^{(3)})\ $	5.202e-25	1.820e-183	2.757e-26	1.216e-44
	ACOC	2.6812	4.5171	4.2017	5.5185
$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ \vdots \\ 0.3 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.6649	0.6945	0.8105	4.513
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	0.031	0.0003301	1.376	5.309
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	1.331e-5	1.250e-19	0.01725	0.1816
	$\ F(x^{(1)})\ $	0.06098	0.0006494	1.969	4.854
	$\ F(x^{(2)})\ $	2.662e-5	2.500e-19	0.03494	0.3626
	$\ F(x^{(3)})\ $	9.098e-17	3.628e-94	1.069e-8	6.352e-10
	ACOC	2.5291	4.6408	-	-

Tabla 9.9: Resultados numéricos para el Ejemplo 4

otro lado, el uso del esquema uniparamétrico de Traub-Steffensen, con convergencia cuadrática, y la composición de su estructura iterativa, da lugar a dos métodos con memoria con órdenes de convergencia tres y cinco obtenidos reemplazando el parámetro acelerador por el operador de diferencias divididas de Kurchatov. Se ha demostrado el orden de convergencia de todos los esquemas de forma teórica, verificándose también con experimentos numéricos realizados sobre diferentes funciones no lineales. El análisis de los índices de eficiencia y eficiencia computacional llevado a cabo sobre cada esquema permite comprobar la efectividad de todos los métodos para la resolución de sistemas de grandes dimensiones.

$x^{(0)}$		MK3	MK5	M1	M2
$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ \vdots \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.3821	0.396	1.13	1.278
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	0.01455	0.0006666	0.3122	0.1716
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	1.442e-6	5.622e-17	0.008046	0.0001324
	$\ F(x^{(1)})\ $	0.1821	0.008262	4.843	2.38
	$\ F(x^{(2)})\ $	1.787e-5	6.965e-16	0.1002	0.00164
	$\ F(x^{(3)})\ $	2.185e-17	1.757e-48	9.878e-7	3.751e-17
	ACOC	2.821	4.7132	2.8447	3.5698
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.9402	1.039	2.409	2.799
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	0.1176	0.0198	1.108	0.853
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	0.0006277	7.519e-10	0.1682	0.03435
	$\ F(x^{(1)})\ $	1.585	0.2486	29.77	17.72
	$\ F(x^{(2)})\ $	0.00778	9.315e-9	2.347	0.4356
	$\ F(x^{(3)})\ $	1.504e-9	3.341e-40	0.01729	1.727e-6
	ACOC	2.5179	4.3144	2.4261	2.7034
$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ \vdots \\ 0.3 \end{pmatrix}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ $	0.1033	0.1038	0.5007	0.5384
	$\ x^{(2)} - x^{(1)}\ $	0.0004325	1.93e-6	0.05483	0.01718
	$\ x^{(3)} - x^{(2)}\ $	3.989e-11	6.056e-28	4.340e-5	6.614e-9
	$\ F(x^{(1)})\ $	0.005359	2.391e-5	0.7055	0.2153
	$\ F(x^{(2)})\ $	4.941e-10	7.502e-27	0.0005377	8.193e-8
	$\ F(x^{(3)})\ $	3.283e-26	4.019e-59	2.596e-14	1.884e-33
	ACOC	2.9581	4.5458	3.229	4.2872

Tabla 9.10: Resultados numéricos para el Ejemplo 5

Conclusiones y líneas futuras

El análisis realizado en esta Tesis ha permitido la obtención de esquemas y familias de métodos iterativos, diseñados con el objetivo de mejorar la convergencia, la eficiencia y la estabilidad de los presentes en la literatura. Las principales conclusiones obtenidas, fruto de estos resultados, se resumen a continuación.

10.1 Conclusiones

A lo largo de esta memoria se describen diferentes técnicas para construir nuevos métodos. Entre éstas destacamos el uso de parámetros aceleradores, la composición de esquemas iterativos, el uso de funciones peso, la aproximación de las matrices Jacobianas por medio de operadores de diferencias divididas y el uso de más de una iteración previa. A continuación hacemos un recorrido general de las técnicas principales utilizadas en cada una de las partes que componen este trabajo, así como de los resultados obtenidos como consecuencia del uso de las mismas.

Tomando como punto de partida el método de Traub, se ha diseñado un conjunto amplio de clases de esquemas iterativos que mejoran su orden de convergencia. Este objetivo se ha logrado con la introducción en su estructura multipaso de uno o dos parámetros aceleradores y el análisis del orden de convergencia resultante, así como las posibilidades de mejorarlo con determinadas aproximaciones de estos parámetros. El estudio de la ecuación del error de cada familia paramétrica ha determinado la estimación de los parámetros que permiten incrementar este orden. La posterior aproximación de éstos se ha realizado de forma eficiente, es decir, utilizando evaluaciones funcionales ya realizadas por los métodos, dando lugar a distintos esquemas con memoria.

Concretamente, se han utilizado polinomios de interpolación lineales y cuadráticos. Este proceso se ha realizado para métodos con y sin derivadas, y se ha logrado incrementar la convergencia cúbica de Traub hasta un orden de convergencia de 4.23 sin añadir nuevas evaluaciones funcionales.

Asimismo, el estudio de la estabilidad de los esquemas aplicados a polinomios cuadráticos utilizando herramientas de dinámica discreta real ha permitido, mediante la representación de los planos de parámetros, seleccionar los valores de los parámetros de las familias iterativas que proporcionan los métodos más estables. También, ha permitido comprobar que el incremento de la velocidad de convergencia no siempre produce una reducción del conjunto de valores iniciales para los cuales existe convergencia a las raíces de los polinomios cuadráticos considerados, ya que en los planos dinámicos de muchos de los esquemas se han obtenido cuencas de atracción de la misma amplitud que las del método de Traub.

Por otro lado, en el Capítulo 6 se ha realizado el estudio dinámico complejo de una familia biparamétrica de Kim, fijando a partir de este análisis el valor de uno de los parámetros para obtener los miembros más estables de la familia. A continuación, se ha seguido un proceso similar al realizado con las variantes de Traub presentadas en capítulos anteriores. Es decir, se ha incluido un parámetro acelerador en el esquema iterativo para aproximarlos posteriormente de forma eficiente y mejorar el orden de convergencia. A diferencia de las variantes de Traub con memoria, la aproximación del parámetro en este capítulo se realiza con aproximaciones de Padé, dando como resultado una familia de métodos con memoria cuyo orden se incrementa de 4 a 4.23 sin evaluaciones funcionales adicionales. Por último, el análisis dinámico real multidimensional de la familia con memoria diseñada, ha determinado el rango de valores del parámetro cuyos métodos asociados tienen las mejores propiedades de estabilidad.

Los Capítulos 7 y 8 tienen como nexo de unión el uso simultáneo de la técnica de composición de esquemas iterativos y el uso de funciones peso para desarrollar métodos para ecuaciones, en el Capítulo 7, y métodos para sistemas de ecuaciones, en el Capítulo 8.

En primer lugar, destacamos en el Capítulo 7 la obtención de una clase de esquemas iterativos óptima con orden 4 obtenida tras la composición del método de Newton consigo mismo e incluyendo una función peso en el segundo paso. Para el caso escalar, se ha fijado una función peso y se ha probado que la clase resultante satisface el Teorema del Escalado, por lo que se ha analizado su estabilidad en términos de dinámica compleja para todo polinomio cuadrático sin dependencia de ningún parámetro. Este estudio ha mostrado que en el método obtenido todos los puntos del plano complejo convergen a uno de los dos puntos fijos superatractores y que por tanto se trata de un esquema estable.

En segundo lugar, en el Capítulo 8 se ha extendido la familia óptima de orden 4 a la resolución de problemas multidimensionales. Se ha realizado un análisis dinámico discreto multidimensional de miembros distintos asociados a funciones peso diferentes, comparando las cuencas de atracción obtenidas, representadas por medio de los planos dinámicos, tras aplicar los esquemas sobre dos sistemas polinómicos cuadráticos. Por otro lado, se utiliza de nuevo la técnica de composición

de esquemas para extender esta clase a familias de métodos compuestas por cuatro pasos en los cuales intervienen dos funciones peso matriciales distintas y cuyo orden de convergencia es 9.

Una de las aportaciones más novedosas de esta memoria es el diseño de métodos con memoria para la resolución de problemas multidimensionales llevado a cabo el Capítulo 9. En capítulos previos, se ha demostrado que el uso de más de una iteración previa en métodos escalares es una estrategia adecuada para mantener la eficiencia de un esquema e incrementar su orden de convergencia. Como consecuencia, se ha extendido este proceso al caso multidimensional obteniendo resultados satisfactorios tanto para esquemas con matrices Jacobianas como en los esquemas sin matrices Jacobianas. Hacemos especial hincapié en este último conjunto de métodos, en el cual la técnica de composición de métodos combinada con el uso del operador de diferencias divididas de Kurchatov ha hecho posible la obtención de métodos con memoria de mayor orden para sistemas. Además de evitar el coste computacional que conlleva el cálculo de matrices Jacobianas, se ha obtenido un orden de convergencia de hasta cinco partiendo de un esquema con convergencia cúbica. Por tratarse de métodos para la resolución de sistemas no lineales, la eficiencia de los esquemas tiene especial relevancia, sobre todo si se trabaja con problemas de grandes dimensiones. Por este motivo, también se han estudiado los índices de eficiencia y eficiencia computacional de todos los esquemas propuestos, comparándolos con los de otros métodos iterativos conocidos.

En las secciones numéricas incluidas al final de cada capítulo, se han utilizado los métodos propuestos para aproximar las soluciones de diferentes ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales académicos. También, en algunas clases de esquemas iterativos, se ha resuelto el problema de frontera no lineal descrito por la ecuación de Fisher. Estos ejemplos numéricos han permitido verificar el comportamiento de los esquemas propuestos para la resolución de problemas no lineales, así como comprobar todos los resultados teóricos obtenidos en los correspondientes análisis numéricos y dinámicos previos.

10.2 Líneas futuras

A partir del análisis realizado en esta memoria y de los resultados obtenidos, surgen futuras líneas de investigación, algunas de las cuales describimos a continuación.

- El uso de funciones peso escalares y matriciales, junto con la técnica de composición de esquemas iterativos, ha permitido el incremento de la velocidad de convergencia de los métodos propuestos, dando lugar a familias iterativas de mayor orden. Hemos analizado numérica y dinámicamente las clases correspondientes a funciones peso polinómicas y racionales para el caso multidimensional. No obstante, uno de los objetivos que proponemos es el estudio de otras funciones peso que satisfagan las condiciones de convergencia requeridas, y que permitan la obtención de esquemas más estables y eficientes.
- En los métodos para la resolución de ecuaciones no lineales, el uso de más de una iteración previa ha incrementado el orden de convergencia de las familias de partida desarrolladas en esta Tesis sin evaluaciones funcionales adicionales. Extendiendo este proceso a los métodos para sistemas de ecuaciones, nos preguntamos si el diseño de métodos con memoria que

utilicen más de dos iteraciones previas permite, sin incrementar de forma excesiva el coste operacional, aumentar más el orden de convergencia de un esquema. En esta línea, se requeriría del uso de operadores de diferencias divididas multidimensionales de más de dos puntos, lo cual es un área compleja cuya aplicación en los métodos iterativos está todavía por desarrollar.

- La dinámica discreta real multidimensional ha demostrado ser una herramienta extraordinariamente eficiente para estudiar la dependencia de las estimaciones iniciales de los métodos iterativos escalares. Al tratarse de esquemas de punto fijo dependientes de más de un iterado inicial, es necesaria la definición de una función auxiliar multidimensional (cuya dimensión se corresponde con el número de iterados previos utilizados en la expresión iterativa) que permita el análisis de los puntos fijos del operador. Sin embargo, los métodos con memoria vectoriales no han podido todavía analizarse bajo este punto de vista. La resolución de sistemas de ecuaciones no lineales mediante métodos con memoria es un área en pleno desarrollo en los últimos años y su vertiente dinámica no se ha desarrollado todavía. Así, la estabilidad de este tipo de esquemas iterativos mediante funciones reales multidimensionales (cuya dimensión es múltiplo del tamaño del sistema, n) es una de las líneas de investigación que pretendemos abordar en los próximos años.
- Hasta donde sabemos, la mayoría de métodos iterativos que se utilizan para resolver ecuaciones matriciales son esquemas sin memoria. La utilización de métodos con memoria para aproximar inversas de matrices, inversas generalizadas, raíces de matrices, y otro tipo de ecuaciones matriciales, puede mejorar los resultados existentes en este campo, sobre todo si las fórmulas iterativas que se obtienen son libres de inversos. En esta misma línea, el diseño de métodos iterativos con memoria para resolver sistemas de ecuaciones matriciales, puede suponer un avance significativo en la resolución de este tipo de problemas.
- Por último, la aplicación de los métodos iterativos a la resolución de ecuaciones Fuzzy. En esta línea de trabajo queremos analizar cómo se comportan los métodos iterativos clásicos al adaptarlos a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales difusos. Dada una ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$, donde A , B y C son números difusos triangulares, trapezoidales, etc., ¿qué interpretación tendrían sus soluciones?, ¿cómo podríamos adaptar el método de Newton para encontrar las raíces de esa ecuación?, ¿qué orden tendría el método de Newton? Estas mismas preguntas nos las plantearemos para otros métodos clásicos y para los esquemas diseñados en esta Tesis, aplicados a ecuaciones no lineales, no necesariamente cuadráticas. También, la extensión de estos métodos a sistemas no lineales difusos, aprovechando lo que ya está publicado para sistemas lineales difusos, será parte de nuestra investigación en esta línea.

Apéndice A

Méritos

A.1 Publicaciones

- [14] P.B. Chand, F.I. Chicharro, N. Garrido y P. Jain. Design and complex dynamics of Potra-Pták-Type optimal methods for solving nonlinear equations and its applications. *Mathematics*, 7:942, 2019.
- [15] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Wide stability in a new family of optimal fourth-order iterative methods. *Computational and Mathematical Methods*, 1:e1023, 2019.
- [16] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Anomalies in the convergence of Traub-type methods with memory. *Computational and Mathematical Methods*, 2:e1060, 2020.
- [19] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Generalized high-order classes for solving nonlinear systems and their applications. *Mathematics*, 7:1194, 2019.
- [20] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Generating root-finder iterative methods of second order: convergence and stability. *Axioms*, 8:55, 2019.
- [21] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. A new efficient parametric family of iterative methods for solving nonlinear systems. *Journal of Difference Equations and Applications*, 25:1454–1467, 2019.

- [22] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. On the choice of the best members of the Kim family and the improvement of its convergence. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, doi.org/10.1002/mma.6014, 2019.
- [23] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Stability and applicability of iterative methods with memory. *Journal of Mathematical Chemistry*, 57:1282–1300, 2019.
- [24] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Impact on stability by the use of memory on Traub-type schemes. *Mathematics*, 8:274, 2020.
- [25] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. On the effect of the multidimensional weight functions on the stability of iterative processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020. *Enviado*.
- [26] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. On the improvement of the order of convergence of iterative methods for solving nonlinear systems by means of memory. *Applied Mathematics Letters*, 104:106277, 2020.

A.2 Congresos

Algunos de los resultados desarrollados en esta Tesis Doctoral se han presentado en diversos congresos tanto nacionales como internacionales. A continuación mostramos un resumen de las aportaciones realizadas.

- Mathematical Modelling in Engineering and Human Behaviour 2017. Valencia 2017.
 - Efficient class of iterative schemes with memory for solving nonlinear problems.
- XII Jornadas de Análisis Numérico y Aplicaciones. Logroño 2017.
 - Métodos iterativos con memoria para la resolución de ecuaciones no lineales.
- 18th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. Rota 2018.
 - Anomalies in the convergence of Traub-type methods with memory.
- Mathematical Modelling in Engineering and Human Behaviour 2018. Valencia 2018.
 - Improving the order of convergence of Traub-type derivative-free methods.
- XIII Jornadas de Análisis Numérico y Aplicaciones. Logroño 2018.
 - A new family of iterative methods for solving nonlinear systems of equations.

- Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española. Santander 2019.
 - Convergence and stability in a new family of iterative methods for solving nonlinear systems of equations.
- 19th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. Rota 2019.
 - On the improvement of the order of iterative methods for nonlinear systems by means of memory.
- Mathematical Modelling in Engineering and Human Behaviour 2019. Valencia 2019.
 - Design and convergence of a new iterative family with memory for solving nonlinear problems.
- 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics. Valencia 2019.
 - Generating classes of iterative methods with memory.
- XIV Jornadas de Análisis Numérico y Aplicaciones. Logroño 2019.
 - A revision on some Traub-type iterative methods with and without memory.

A.3 Otros méritos

A.3.1 *Relacionados con el área de Matemáticas*

- Titulaciones:
 - Grado en Matemáticas (2016), por la Universitat de València.
 - Máster Universitario en Investigación Matemática (2017), por la Universitat de València y la Universitat Politècnica de València.
 - Máster Universitario en Profesora de Educación Secundaria (2018), por la Universitat de València
- Contratos:
 - Técnico Superior de Investigación en el Instituto de Matemática Multidisciplinar, de la Universitat Politècnica de València (Proyecto PROMETEO 2016/089). Período 01/06/2018 - 31/10/2019.

- Profesora en la Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, de la Universidad Internacional de la Rioja. Período desde 01/09/2019.

A.3.2 *Méritos docentes*

- Dirección de Trabajos Fin de Grado, del Grado en Ingeniería Informática de la Universidad Internacional de La Rioja.
 - Título del trabajo: Creación de juego educativo en Roblox
 - Alumno: Alberto Lorente Paricio.
 - Curso: 2018/2019.
 - Título del trabajo: Aprendizaje automático aplicado al desarrollo de videojuegos.
 - Alumno: José Antonio Romero Martínez.
 - Curso: 2018/2019.
- Elaboración de contenidos de la asignatura "Cálculo I" del Grado en Matemática Computacional de la Universidad Internacional de La Rioja. Curso 2018-2019.
- Profesora de la asignatura "Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos", del Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja. Curso 2019-2020.
- Profesora de la asignatura "Técnicas Multivariantes", del Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja. Curso 2019-2020.
- Profesora de la asignatura "Matemáticas I", del Grado en Ingeniería en Organización Industrial de la Universidad Internacional de La Rioja. Curso 2019-2020.
- Profesora de la asignatura "Prácticas en Empresa", del Máster Universitario en Análisis y Visualización de Datos Masivos / Visual Analytics & Big Data de la Universidad Internacional de La Rioja. Curso 2019-2020.

A.3.3 *Relacionados con el área de idiomas*

- Certificat Oficial de Coneixements de Valencià, Grau Mitjà (C1), Junta Qualificadora de Coneixements de Valencià, 2010.
- Certificat de Capacitació per a l'Ensenyament en Valencià, Junta Qualificadora de Coneixements de Valencià, 2018.
- Preliminary English Test (B1), University of Cambridge, 2017.

Bibliografía

- [1] M. Abad, A. Cordero y J.R. Torregrosa. A family of seventh-order schemes for solving nonlinear systems. *Bulletin Mathématique Societe des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 57(105):133–145, 2014.
- [2] S. Amat y S. Busquier. *Advances in iterative methods for nonlinear equations*. Springer, 2016.
- [3] S. Amat, S. Busquier y S. Plaza. Chaotic dynamics of a third-order Newton-type method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 366:24–32, 2010.
- [4] A. Amiri, A. Cordero, M. Darvishi y J. R. Torregrosa. Preserving the order of convergence: Low-complexity jacobian-free iterative schemes for solving nonlinear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 337:87–97, 2018.
- [5] A. Amiri, A. Cordero, M. Darvishi y J. R. Torregrosa. Stability analysis of a parametric family of seventh-order iterative methods for solving nonlinear systems. *Applied Mathematics and Computation*, 323:43–57, 2018.
- [6] I.K. Argyros, A. Cordero, Á.A. Magreñán y J.R. Torregrosa. Third-degree anomalies of Traub’s method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309:511–521, 2017.
- [7] I.K. Argyros, Á.A. Magreñán y L. Orcos. Local convergence and a chemical application of derivative free root finding methods with one parameter based on interpolation. *Journal of Mathematical Chemistry*, 54:1404–1416, 2016.
- [8] S. Artidiello. *Diseño, implementación y convergencia de métodos iterativos para resolver ecuaciones y sistemas no lineales utilizando funciones peso*. Universitat Politècnica de València, 2014.

- [9] S. Artidiello, A. Cordero, J. R. Torregrosa y M. P. Vassileva. Design and multidimensional extension of iterative methods for solving nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computation*, 293:194–203, 2017.
- [10] A. Bahl, A. Cordero, R. Sharma y J. R. Torregrosa. A novel bi-parametric sixth order iterative scheme for solving nonlinear systems and its dynamics. *Applied Mathematics and Computation*, 357:147–166, 2019.
- [11] P. Blanchard. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 11:85–141, 1984.
- [12] B. Campos, A. Cordero, J.R. Torregrosa y P. Vindel. A multidimensional dynamical approach to iterative methods with memory. *Applied Mathematics and Computation*, 271:701–715, 2015.
- [13] B. Campos, A. Cordero, J.R. Torregrosa y P. Vindel. Stability of King's family of iterative methods with memory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 318:504–514, 2017.
- [14] P.B. Chand, F.I. Chicharro, N. Garrido y P. Jain. Design and complex dynamics of Potra-Pták-type optimal methods for solving nonlinear equations and its applications. *Mathematics*, 7:942, 2019.
- [15] F. I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J. R. Torregrosa. Wide stability in a new family of optimal fourth-order iterative methods. *Computational and Mathematical Methods*, 1:e1023, 2019.
- [16] F. I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J. R. Torregrosa. Anomalies in the convergence of Traub-type methods with memory. *Computational and Mathematical Methods*, 2:e1060, 2020.
- [17] F. I. Chicharro, A. Cordero y J. R. Torregrosa. High-order extension of an efficient iterative method for solving nonlinear problems. *AIP Proceedings*, 1978:330002, 2018.
- [18] F.I. Chicharro. *Análisis dinámico y aplicaciones de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales*. Universitat Politècnica de València, 2017.
- [19] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Generalized high-order classes for solving nonlinear systems and their applications. *Mathematics*, 7:1194, 2019.
- [20] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Generating root-finder iterative methods of second order: convergence and stability. *Axioms*, 8:55, 2019.
- [21] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. A new efficient parametric family of iterative methods for solving nonlinear systems. *Journal of Difference Equations and Applications*, 25:1454–1467, 2019.

-
- [22] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. On the choice of the best members of the Kim family and the improvement of its convergence. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, doi.org/10.1002/mma.6014, 2019.
- [23] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Stability and applicability of iterative methods with memory. *Journal of Mathematical Chemistry*, 57:1282–1300, 2019.
- [24] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. Impact on stability by the use of memory in Traub-type schemes. *Mathematics*, 8:274, 2020.
- [25] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. On the effect of the multidimensional weight functions on the stability of iterative processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Enviado, 2020.
- [26] F.I. Chicharro, A. Cordero, N. Garrido y J.R. Torregrosa. On the improvement of the order of convergence of iterative methods for solving nonlinear systems by means of memory. *Applied Mathematics Letters*, 104:106277, 2020.
- [27] F.I. Chicharro, A. Cordero, J.M. Gutiérrez y J.R. Torregrosa. Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219:7023–7035, 2013.
- [28] F.I. Chicharro, A. Cordero y J.R. Torregrosa. Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods. *The Scientific World Journal*, 780153:1–11, 2013.
- [29] F.I. Chicharro, A. Cordero y J.R. Torregrosa. Dynamics and fractal dimension of Steffensen-type methods. *Algorithms*, 8:271–279, 2015.
- [30] F.I. Chicharro, A. Cordero y J.R. Torregrosa. Dynamics of iterative families with memory based on weight functions procedure. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 354:286–298, 2019.
- [31] F.I. Chicharro, A. Cordero, J.R. Torregrosa y M.P. Vassileva. King-type derivative-free iterative families: real and memory dynamics. *Complexity*, 2713145:1–15, 2017.
- [32] N. Choubey, A. Cordero, J. P. Jaiswal y J. R. Torregrosa. Dynamical techniques for analyzing iterative schemes with memory. *Complexity*, 1231341:1–13, 2018.
- [33] C. Chun. Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 195:454–459, 2008.
- [34] C. Chun, B. Neta, J. Kozdon y M. Scott. Choosing weight functions in iterative methods for simple roots. *Applied Mathematics and Computation*, 227:788–800, 2014.
- [35] C.F. Colebrook y C.M. White. Experiments with fluid friction in roughened pipes. *Proceedings of the Royal Society of London*, 161:367–381, 1937.
- [36] A. Cordero, L. Guasp y J. R. Torregrosa. Choosing the most stable members of Kou's family of iterative methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330:769–769, 2018.

- [37] A. Cordero, J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán y J. R. Torregrosa. Stability analysis of a parametric family of iterative methods for solving nonlinear models. *Applied Mathematics and Computation*, 285:26–40, 2016.
- [38] A. Cordero, E. Gómez y J.R. Torregrosa. Efficient high-order iterative methods for solving nonlinear systems and their application on heat conduction problems. *Complexity*, 6457532:1–11, 2017.
- [39] A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martínez y J. R. Torregrosa. A new technique to obtain derivative-free optimal iterative methods for solving nonlinear equations. *Journal of Computer and Applied Mathematics*, 252:95–102, 2013.
- [40] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez y J.R. Torregrosa. A modified Newton-Jarratt's composition. *Numerical Algorithms*, 55:87–99, 2010.
- [41] A. Cordero, J. Maimó, J.R. Torregrosa y M. P. Vassileva. Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families. *Journal of Mathematical Chemistry*, 53:430–449, 2015.
- [42] A. Cordero, J. Maimó, J.R. Torregrosa y M. P. Vassileva. Multidimensional stability analysis of a family of biparametric iterative methods. *Journal of Mathematical Chemistry*, 55:1461–1480, 2017.
- [43] A. Cordero, F. Soleymani y J. R. Torregrosa. Dynamical analysis of iterative methods for nonlinear systems or how to deal with the dimension? *Applied Mathematics and Computation*, 244:398–412, 2014.
- [44] A. Cordero y J.R. Torregrosa. Variants of Newton's method using fifth order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation*, 190:686–698, 2007.
- [45] R.L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, 1989.
- [46] J.A. Ezquerro, A. Grau, M. Grau-Sánchez y M.A. Hernández. On the efficiency of two variants of Kurchatov's method for solving nonlinear systems. *Numerical Algorithms*, 64:685–698, 2013.
- [47] P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 48:33–94, 208–314, 1920.
- [48] R. Fisher. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, 7:353–369, 1933.
- [49] Y. H. Geum, Y. I. Kim y B. Neta. Developing an optimal class of generic sixteenth-order simple-root finders and investigating their dynamics. *Mathematics*, 7(1), 2019.
- [50] M. Grau-Sánchez, A. Grau y M. Noguera. Ostrowski type methods for solving systems of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218:2377–2385, 2011.

-
- [51] M. Grau-Sánchez, M. Noguera y S. Amat. On the approximation of derivatives using divided difference operators preserving the local convergence order of iterative methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 237:363–372, 2013.
- [52] C. Hermite. Sur la formule d'interpolation de Lagrange. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84:70–79, 1878.
- [53] J. L. Hueso, E. Martínez y C. Teruel. Convergence, efficiency and dynamics of new fourth and sixth order families of iterative methods for nonlinear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 275:412–420, 2015.
- [54] G. Julia. Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 8:47–245, 1918.
- [55] C. Khalique y I. Mhlanga. Travelling waves and conservation laws of a $(2 + 1)$ -dimensional coupling system with korteweg-de vries equation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 3:241–254, 2018.
- [56] Y. I. Kim. A triparametric family of three-step optimal eighth-order methods for solving nonlinear equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 89:1051–1059, 2012.
- [57] R. F. King. A family of fourth-order methods for nonlinear equations. *Journal of Numerical Analysis*, 10:876–879, 1973.
- [58] J. Kou y Y. Li. A family of new Newton-like method. *Applied Mathematics and Computation*, 192:162–167, 2007.
- [59] H. T. Kung y J. F. Traub. Optimal order of one-point and multipoint iteration. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21:643–651, 1974.
- [60] S. D. Lee, Y. I. Kim y B. Neta. An optimal family of eighth-order simple-root finders with weight functions dependent on function-to-function ratios and their dynamics underlying extraneous fixed points. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 317:31–54, 2017.
- [61] Á.A. Magreñán. A new tool to study real dynamics: the convergence plane. *Applied Mathematics and Computation*, 248:215–224, 2014.
- [62] Á.A. Magreñán, A. Cordero, J.M. Gutiérrez y J.R. Torregrosa. Real qualitative behaviour of a fourth-order family of iterative methods by using the convergence plane. *Mathematics and Computers in Simulation*, 105:49–61, 2014.
- [63] M. Narang, S. Bathia, A.S. Alshomrani y V. Kanwar. General efficient class of Steffensen type methods with memory for solving systems of nonlinear equations. *Journal of Computation and Applied Mathematics*, 352:23–39, 2019.
- [64] M. A. Noor, K. I. Noor, W. A. Khan y F. Ahmad. On iterative methods for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 183:128–133, 2006.

- [65] J.M. Ortega y W.C. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Academic Press, 1970.
- [66] A.M. Ostrowski. *Solutions of equations and systems of equations*. Academic Press, 1966.
- [67] M.S. Petković, B. Neta, L.D. Petković y J. Džunić. *Multipoint methods for solving nonlinear equations*. Elsevier, 2013.
- [68] M.S. Petković, B. Neta, L.D. Petković y J. Džunić. Multipoint methods for solving nonlinear equations: a survey. *Applied Mathematics and Computation*, 226:635–660, 2014.
- [69] M.S. Petković y J.R. Sharma. On some efficient derivative-free iterative methods with memory for solving systems of nonlinear equations. *Numerical Algorithms*, 71:457–474, 2016.
- [70] S. Plaza y J. M. Gutiérrez. *Dinámica del método de Newton*. Servicio de Publicaciones Universidad de La Rioja, 2013.
- [71] R.C. Robinson. *An introduction to dynamical systems: continuous and discrete*. American Mathematical Society, 2012.
- [72] V. Samanskii. On a modification of the Newton's method. *Ukrainian Mathematical Journal*, 19:133–138, 1967.
- [73] M. Scott, B. Neta y C. Chun. Basin attractors for various methods. *Applied Mathematics and Computation*, 218:2584–2599, 2011.
- [74] M. Shacham. An improved memory method for the solution of a nonlinear equation. *Chemical Engineering Science*, 44:1495–1501, 1989.
- [75] J. R. Sharma y H. Arora. On efficient weighted-Newton methods for solving systems of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 222:497–506, 2013.
- [76] J. R. Sharma y H. Arora. Efficient Jarratt-like methods for solving systems of nonlinear equations. *Calcolo*, 51:193–210, 2014.
- [77] J. R. Sharma y H. Arora. A new family of optimal eighth order methods with dynamics for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 273:924–933, 2016.
- [78] J. R. Sharma y H. Arora. Improved Newton-like methods for solving systems of nonlinear equations. *SeMA Journal*, 74:147–163, 2017.
- [79] J. R. Sharma, R. Guha y R. Sharma. An efficient fourth order weighted-Newton method for systems of nonlinear equations. *Numerical Algorithms*, 62:307–323, 2013.
- [80] J. R. Sharma, R. Sharma y A. Bahl. An improved Newton-Traub composition for solving systems of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 290:98–110, 2016.
- [81] F. Soleymani, T. Lotfi y P. Bakhtiari. A multi-step class of iterative methods for nonlinear systems. *Optimization Letters*, 8:1001–1015, 2014.

- [82] J.F. Steffensen. Remarks on iteration. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1:64–72, 1933.
- [83] J.F. Traub. *Iterative methods for the solution of equations*. Chelsea Publishing Company, 1977.
- [84] J.L. Varona. Graphic and numerical comparison between iterative methods. *The Mathematical Intelligencer*, 24:37–46, 2002.
- [85] W. Wang y T. Zhang. High-order Newton-type iterative methods with memory for solving nonlinear equations. *Mathematical Communications*, 19:91–109, 2014.
- [86] W. Wang, T. Zhang, W. Qian y M. Teng. Seventh-order derivative-free iterative method for solving nonlinear systems. *Numerical Algorithms*, 70:545–558, 2015.
- [87] S. Weerakoon y T.G.I. Fernando. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics Letters*, 13:87–93, 2000.
- [88] X. Xiao y H. Yin. Increasing the order of convergence for iterative methods to solve nonlinear systems. *Calcolo*, 53:285–300, 2016.