



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

# ESTUDIO ANALÍTICO Y POR ELEMENTOS FINITOS DEL PANDEO ELASTO-PLÁSTICO E IMPERFECTO EN PANELES AERONÁUTICOS

Autor

**Soledad Mínguez Gómez**

Director

**José Luis Pérez Aparicio**

**Universidad Politécnica de Valencia**

**Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño**

Valencia - Septiembre de 2020



ESTUDIO ANALÍTICO Y POR ELEMENTOS FINITOS DEL  
PANDEO ELASTO-PLÁSTICO E IMPERFECTO EN PANELES  
AERONÁUTICOS

**Soledad Mínguez Gómez**

Universidad Politécnica de Valencia  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Septiembre de 2020



*“I have seen flowers come in stony places.  
And kind things done by men with ugly faces.  
And the gold cup won by the worst horse at the races.  
So I trust, too.”*

*John Masefield*



## *Agradecimientos*

*Gracias a mis padres, por la educación y el apoyo que siempre me han dado, nada de esto hubiese sido posible sin vosotros. Gracias a mis hermanos, Pedro y Laura, por haber dejado que os moleste todos estos años. Gracias a mi tutor, José Luis Pérez Aparicio, por sus consejos, dedicación y exigencia. Gracias a mis amigas, por ser hogar y felicidad. Gracias a Valencia, por haberme permitido conocer gente tan especial. Por último, gracias a Pablo, por haberme acompañado en este camino, por haber confiado siempre en mí y enseñarme el verdadero valor de la amistad.*



# Resumen

El presente trabajo aborda el estudio del pandeo y post-pandeo de placas y paneles rectangulares, propios de la estructura semi-monocasco predominante en los diseños aeronáuticos actuales. Se añade la influencia de una imperfección inicial coincidente con el modo de pandeo de la estructura y el comportamiento elasto-plástico del material.

En primera instancia se analiza el pandeo y post-pandeo de una placa elástica e imperfecta bajo diferentes condiciones de contorno. A continuación, se introduce la posibilidad de que el material entre en zona elasto-plástica bien al inicio de pandeo o bien en post-pandeo, lo que constituye dos problemáticas diferentes. Además, se comparan soluciones experimentales con diferentes teorías elasto-plásticas modernas aún debatidas en la actualidad. Posteriormente, se repite el estudio completo de post-pandeo para placas largas y se realiza la comparativa con placas cuadradas. Se finaliza el trabajo abordando un análisis completo de pandeo y post-pandeo en un panel integral, en el que se incluyen la teoría elasto-plástica y la imperfección inicial. Se presta especial atención a la distinción entre modos de pandeos locales y globales, así como los peligros asociados a este último.

Para el análisis de cada caso se contrastan métodos analíticos, el método de los elementos finitos y, en algunos casos, soluciones experimentales y referencias externas. El cálculo analítico se aborda con ayuda del software comercial *Mathematica*<sup>®</sup>, el numérico con *Abaqus*<sup>®</sup> y el post-procesado de gráficas con *Illustrator*<sup>®</sup>.



# *Abstract*

The study of buckling and post-buckling of rectangular plates and panels, specific of the semi-monocoque structure, is discussed. The possibility of an initial imperfection that matches with the buckling mode of the structure and the elasto-plastic behaviour of the material is included.

Firstly, the buckling and post-buckling of an elastic and imperfect plate is analyzed under different boundary conditions. Then, the possibility of elasto-plastic behaviour for both buckling or post-buckling is studied, raising two different problems. Different controversial modern elasto-plastic theories are also compared with experimental solutions. Subsequently, the full post-buckling study is repeated for long plates and compared with the results of square plates. The work is concluded addressing a complete analysis of buckling and post-buckling for an integral panel, including both the elasto-plastic theory and the initial imperfection. Particular attention is paid to the distinction between local and global buckling modes, as well as to the risks associated with the last one.

In every study, analytical methods, the finite element method and, in some cases, experimental solutions are contrasted. The analytical calculation is approached with the support of the commercial software *Mathematica*<sup>®</sup>, the numerical one with *Abaqus*<sup>®</sup> and the post-processing of plots with *Illustrator*<sup>®</sup>.



# *Índice general*

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IV</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>VIII</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>X</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.1.1. Antecedentes históricos. . . . .	1
1.1.2. Introducción al pandeo en estructuras aeronáuticas. . . . .	2
1.1.3. Estado actual . . . . .	4
1.2. Objetivos . . . . .	7
1.3. Organización de la memoria . . . . .	8
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>9</b>
2.1. Teoría de placa delgada . . . . .	9
2.1.1. Sistema de referencia y criterio de signos. . . . .	9
2.1.2. Hipótesis generales. . . . .	10
2.1.3. Funciones de prueba y condiciones de contorno . . . . .	10
2.2. Placas con comportamiento elástico . . . . .	11
2.2.1. Ecuaciones cinemáticas . . . . .	12
2.2.2. Ecuaciones constitutivas . . . . .	12
2.2.3. Solicitaciones . . . . .	12
2.2.4. Inicio de pandeo . . . . .	13
2.2.5. Post-pandeo . . . . .	14
2.2.6. Influencia de imperfecciones. . . . .	15
2.3. Placas con comportamiento elasto-plástico . . . . .	16
2.3.1. Ecuaciones constitutivas . . . . .	17
2.3.2. Modelo elasto-plástico . . . . .	18
2.3.3. Formulación energética en inicio de pandeo . . . . .	19
2.3.4. Post-pandeo . . . . .	20
2.4. Paneles imperfectos con comportamiento elasto-plástico. . . . .	22
2.4.1. Inicio de pandeo . . . . .	23
2.4.2. Post-pandeo . . . . .	24
2.5. Método de los Elementos Finitos . . . . .	26

2.5.1. Inicio de pandeo . . . . .	27
2.5.2. Post-pandeo . . . . .	27
<b>3. Pandeo y post-pandeo en régimen elástico.</b>	<b>29</b>
3.1. Inicio de pandeo . . . . .	29
3.1.1. Placa articulada bajo compresión uniforme $N_x$ . . . . .	30
3.1.2. Influencia de otras condiciones de contorno . . . . .	31
3.2. Solución analítica de post-pandeo . . . . .	34
3.3. Solución numérica de post-pandeo . . . . .	40
3.3.1. Deformada y movimientos en el plano . . . . .	41
3.3.2. Tensiones . . . . .	44
3.4. Comparación de la solución de post-pandeo: anchos efectivos . . . . .	47
3.4.1. Ancho efectivo tensional . . . . .	47
3.4.2. Ancho efectivo para desplazamientos . . . . .	50
<b>4. Pandeo y post-pandeo en régimen elasto-plástico</b>	<b>53</b>
4.1. Inicio de pandeo . . . . .	53
4.1.1. Resolución analítica . . . . .	53
4.1.2. Resolución por el Método de los Elementos Finitos . . . . .	56
4.1.3. Resultados experimentales . . . . .	58
4.1.4. Contraste de resultados . . . . .	59
4.2. Post-Pandeo . . . . .	62
4.2.1. Contraste de resultados . . . . .	66
4.3. Post-Pandeo de placas largas . . . . .	69
4.3.1. Resultados analíticos . . . . .	70
4.3.2. Selección de la relación de aspecto $r$ . . . . .	72
4.3.3. Deformada y movimientos en el plano . . . . .	73
4.3.4. Reacciones . . . . .	76
4.3.5. Tensiones . . . . .	77
<b>5. Pandeo y post-pandeo elasto-plástico e imperfecto de paneles</b>	<b>81</b>
5.1. Inicio de pandeo . . . . .	83
5.1.1. Cálculos de los larguerillos . . . . .	86
5.2. Resultados . . . . .	87
5.3. Post-Pandeo . . . . .	89
5.4. Resultados numéricos . . . . .	92
5.4.1. Deformada y giros . . . . .	92
5.4.2. Tensiones . . . . .	93
5.4.3. Pandeo global del panel . . . . .	95
<b>6. Conclusiones, trabajos futuros y presupuesto</b>	<b>98</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	98

---

## ÍNDICE GENERAL

---

6.2. Trabajos futuros . . . . .	101
6.3. Presupuesto . . . . .	102
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>

## Índice de figuras

1.1. Ejemplos de la evolución de las estructuras aeronáuticas. . . . .	1
1.2. Deformación $\Delta$ vs. factor de carga $\mathcal{P}$ en pandeo y post-pandeo: comparación de diferentes casos. . . . .	3
1.3. Ejemplos de estructuras aeronáuticas formadas por paneles rigidizados . . . . .	5
1.4. Ejemplos de estructuras conformadas por paneles integrales. . . . .	6
1.5. Ejemplos de estructuras aeronáuticas bajo tensión diagonal. . . . .	6
1.6. Porcentajes de los modos de fallo de un panel aeronáutico [8]. . . . .	7
1.7. Ejemplos de fallos en estructuras aeronáuticas debidos al pandeo. . . . .	7
2.1. Sistema de referencia asociado a la placa, izquierda. Cargas en el plano, derecha. . . . .	9
2.2. Curva tensión $\sigma$ vs. deformación $\varepsilon$ mediante el modelo de Ramberg-Osgood. Concepto módulo elástico $E$ , módulo secante $E_s$ y módulo tangente $E_t$ . . . . .	19
2.3. Equilibrio sobre un elemento diferencial de placa $dx \times dy$ . Criterio de signos de fuerzas y momentos y sistema de referencia. . . . .	20
2.4. Sistema de referencia de una placa reforzada por largueros. . . . .	22
3.1. Placa articulada en todos sus bordes SSSS bajo carga uniforme $N_x$ . . . . .	30
3.2. Placas a compresión con varias condiciones de contorno. Línea continua: empotramiento, línea discontinua: articulación. . . . .	32
3.3. Carga crítica de pandeo adimensional $K$ para placa rectangular sometida a compresión vs. relación de aspecto $r$ para diferentes métodos: Ritz, Lévy y MEF. Cuatro condiciones de contorno: SSSS, SCSC, CSCS y CCCC. . . . .	33
3.4. Seis primeros modos de pandeo para placa SSSS. . . . .	34
3.5. Seis primeros modos de pandeo para placa CCCC. . . . .	34
3.6. Placa SSSS a compresión con bordes descargados inmóviles. . . . .	35
3.7. Comparación para diferentes imperfecciones $w_{011}$ del factor de carga $\mathcal{P}_x$ en función de los incrementos de longitud de arco $\Delta\tilde{a}$ con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	41
3.8. Flecha total $\tilde{w}$ en el centro de la placa vs. factor de carga $\mathcal{P}_x$ para distintos $w_{011}/t$ . Los círculos representan los resultados con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> y las líneas Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	42
3.9. Flecha total $\tilde{w}$ en el centro de la placa vs. $\mathcal{P}_x$ para $w_{011}$ del orden de $t$ . Los marcadores circulares representan los resultados con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> y la línea continua Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	43
3.10. Flecha adimensional $\tilde{w}/t$ para $w_{011}/t = 0,1$ con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> y los $\mathcal{P}_x$ de la Figura 3.7. . . . .	43
3.11. Distribución de tensiones normalizadas $\sigma_x/\sigma_{cr}$ en $x/a = 0,5$ para distintos $\mathcal{P}_x$ y $w_{011}/t = 0,1$ . Círculos: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> , líneas continuas: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	44
3.12. Distribución de tensiones normalizadas $\sigma_x/\sigma_{cr}$ para $\mathcal{P}_x = 1$ y $x/a = 0,5$ para distintos valores de $w_{011}/t$ . Resultados mediante Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	45
3.13. Distribución de tensiones normalizadas $\sigma_x/\sigma_{cr}$ para $\mathcal{P}_x = 2$ y $w_{011}/t = 0,1$ a lo largo de distintas rectas $x/a = cte$ . Resultados interpolados de <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	45

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.14. Tensión adimensional $\sigma_{VM}/\sigma_{cr}$ para $w_{011}/t = 0,1$ para <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> y los $p_i$ de la Figura 3.7. . . . .	46
3.15. Concepto de ancho efectivo tensional (rectángulos en Figura derecha). Representación de la tensión de borde $\sigma_{ed}$ , máxima en placa $\sigma_{mx}$ y promedio de cada distribución $\sigma_{av}$ . . . . .	47
3.16. Tensión máxima $\sigma_{mx}$ en $x = a/2$ , $y = 0$ en función del factor de carga $\mathcal{P}_x$ . Unidades en SI. . . . .	48
3.17. Ancho efectivo tensional adimensional $b_e/b$ vs. tensión máxima adimensional $\sigma_{mx}/\sigma_{cr}$ . Marcadores circulares: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . Líneas continuas: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> y [14]. . . . .	50
3.18. Desplazamiento $\tilde{u}$ en el borde cargado en función del factor de carga $\mathcal{P}_x$ . Unidades en SI. . . . .	51
3.19. Ancho efectivo para desplazamientos adimensional $b_{\tilde{e}}/b$ vs. tensión equivalente adimensional $\sigma_{ed}/\sigma_{cr}$ . Marcadores circulares: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . Líneas continuas: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> y [14]. . . . .	52
4.1. Curva tensión $\sigma$ vs. deformación $\varepsilon$ para aluminio 14S-T6, representada con el modelo de Ramberg-Osgood y parámetros de la Tabla 4.1. . . . .	55
4.2. Cargas o restricciones realizadas en cada <i>step</i> en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> para la resolución del problema. . . . .	57
4.3. Deformada $w$ de la placa tras el <i>step</i> 1 en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	57
4.4. Método de ensayo para medir el pandeo de cuatro placas que conforman un tubo de sección cuadrada. Obtenida de NACA L-55234 [20]. . . . .	58
4.5. Evolución de carga crítica adimensional $K$ en función de relación espesor-ancho $\phi = h/b$ para $r = 4,5$ . Comparación de teorías de plasticidad DT, IT con teoría elástica ET, elementos finitos <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> y resultados experimentales [20]. . . . .	59
4.6. Evolución de la carga crítica adimensional $K$ en función de la relación de aspecto $r$ para $h/b = 0,035$ . Comparación de las teorías de plasticidad DT, IT con la teoría elástica ET y elementos finitos <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	60
4.7. Evolución de la carga crítica adimensional $K$ en función de la relación de aspecto $r$ para $\phi = 0,05$ . Comparación de las teorías de plasticidad DT, IT con la teoría elástica ET y elementos finitos <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	61
4.8. Placa a compresión con bordes descargados rectos. . . . .	62
4.9. Flecha adimensional en centro de la placa $w_c = w(a/2, b/2)/t$ vs. factor de carga $\mathcal{P}_x$ . Resultados analíticos Bleich, DT, IT y ET y MEF elásticos y elasto-plásticos. Placa $r = 1$ , $\phi = 0,026$ . Carga de fluencia $\mathcal{P}_Y$ y de rotura $\mathcal{P}_U$ con MEF. . . . .	67
4.10. Tensión adimensional $\sigma_x/\sigma_n$ a lo largo de la sección $x/a = 0,5$ , para $\mathcal{P}_x = 2$ y placa $r = 1$ , $\phi = 0,026$ . Métodos MEF, DT y Bleich; la solución IT coincide con la de DT. . . . .	68
4.11. Tensión adimensional $\sigma_{VM}/\sigma_n$ para $\phi = 0,026$ y $\mathcal{P}_x = 2,3$ con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . En figura derecha, rojo es zona plastificada y azul zona elástica. . . . .	68

---

4.12. Tensión adimensional $\sigma_{VM}/\sigma_n$ para $\phi = 0,015$ y $\mathcal{P}_x = 6,5$ con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> ; plasticidad y rotura en el segundo modo. En figura derecha, rojo es zona plastificada y azul zona elástica. . . . .	69
4.13. Placa rectangular larga SSSS sometida a compresión con bordes descargados inmóviles. . . . .	70
4.14. Evolución del factor de carga $\mathcal{P}_x$ en función de la longitud de arco $\Delta\tilde{a}$ en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . Líneas verticales indican predominio del número de modo. Comparación de modelo MEF elástico y elasto-plástico. . . . .	73
4.15. Flecha máxima adimensional $w/t$ en el punto $(a/6, b/2)$ vs. factor de carga $\mathcal{P}_x$ para las teorías analíticas ET, DT, IT, Bleich y para <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> elástico y elasto-plástico. Placa rectangular $r = 2$ , $\phi = 0,014$ . Carga de rotura $\mathcal{P}_U$ . . . . .	74
4.16. Movimiento $u/t$ en el centro del borde cargado $(a, b/2)$ vs. factor de carga $\mathcal{P}_x$ para teorías analíticas ET, DT, IT, Bleich y para <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> elástico y elasto-plástico. Placa rectangular $r = 2$ , $\phi = 0,014$ . . . . .	75
4.17. Movimientos en el plano adimensionales $w/t$ , $u/t$ , $v/t$ para $\mathcal{P}_x = 2$ . Izquierda: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> , derecha: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	76
4.18. Reacción $N_y$ en los bordes no cargados para $\mathcal{P}_x = 2$ . Resultados <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> , promediados y Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	77
4.19. Tensión normalizada $\sigma_x/\sigma_n$ a lo largo de la línea $x = a/2$ vs. $\mathcal{P}_x$ . Marcadores: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> , líneas: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	79
4.20. Tensión normalizada $\sigma_y/\sigma_n$ a lo largo de la línea $y = b/2$ vs. $\mathcal{P}_x$ . Marcadores: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> , líneas: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	79
4.21. Tensiones normalizadas $\sigma_x/\sigma_n$ , $\sigma_y/\sigma_n$ para $\mathcal{P}_x = 2$ . Izquierda: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> , derecha: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	80
4.22. Tensión de Von Mises normalizada $\sigma_{VM}/\sigma_n$ justo antes de la rotura $\mathcal{P}_x = 3,8$ . Comparación en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> del modelo elástico, elasto-plástico y zona plastificada. Placa girada 90 en $z$ con respecto al sistema de referencia de la Figura 4.13. . . . .	80
5.1. Estructuras aeronáuticas formadas por paneles integrales. . . . .	81
5.2. Esquema de un panel integral. Sistema de referencia y cargas. . . . .	82
5.3. Región de estudio de un panel integral. Izquierda: esquema para el modelo analítico. Derecha: esquema para el modelo numérico en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	82
5.4. Tipos de pandeo en un panel. Arriba: pandeo local de la piel, giro del larguerillo. Abajo: pandeo global del panel, flexión del larguerillo. . . . .	83
5.5. Esquema del larguerillo de un panel integral. Sistema de referencia asociado y dimensiones. . . . .	86
5.6. Carga crítica de pandeo $K$ vs. distancia entre larguerillos $\xi$ de un panel articulado en los bordes cargados. Comparación método de Ritz vs. MEF <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	87
5.7. Primer y segundo modo de pandeo global del panel obtenidos con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	88
5.8. Primer, segundo, tercer y cuarto modo de pandeo local del panel en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	89

5.9. Deformada adimensional $\tilde{w}/t$ y giros $\theta_x \times 10^2$ , $\theta_y \times 10^2$ , $\theta_z \times 10^2$ de un panel con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> para $\mathcal{P}_x = 2$ y $w_{012}/t = 0,2$ . En cada una de las cuatro figuras plano $x - y$ a la izquierda (placa) y $x - z$ a la derecha (larguerillo), ver Figura 5.2. . . .	92
5.10. Flecha adimensional máxima $\tilde{w}/t$ vs. $\mathcal{P}_x$ : caso elástico, elasto-plástico y elasto-plástico imperfecto con $w_{012}/t = 0,1$ , tanto con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> como con Ritz. . . . .	93
5.11. Tensión $\sigma_x/\sigma_n$ para diferentes $\mathcal{P}_x$ y $w_{012}/t = 0,1$ . Marcadores: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> , líneas: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	94
5.12. Tensión $\sigma_y/\sigma_n$ para diferentes $\mathcal{P}_x$ y $w_{012}/t = 0,1$ . Marcadores: <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> , líneas: Von Karman con <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> . . . . .	94
5.13. Izquierda: tensión equivalente $\sigma_{VM}$ . Derecha: zona plastificada. Resultados para $\mathcal{P}_x = 2,6$ y $w_{012}/t = 0,1$ obtenidos con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	95
5.14. Izquierda: tensión equivalente $\sigma_{VM}$ . Derecha: zona plastificada. Resultados para $\mathcal{P}_x = 2,5$ y $w_{012}/t = 0,5$ obtenidos con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	95
5.15. Evolución del factor de carga $\mathcal{P}_x$ en función de la longitud de arco $\Delta\tilde{a}$ en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . Comparación pandeo local y global. . . . .	96
5.16. Izquierda: tensión equivalente $\sigma_{VM}$ . Derecha: zona plastificada. Resultados para pandeo global antes de la rotura, $\mathcal{P}_x = 1,5$ y $w_{012}/t = 0,1$ obtenidos con <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	97

## Índice de tablas

2.1.	Resumen de las CC ideales. Las funciones de prueba $Y(y)$ son análogas [13]. . . .	11
2.2.	Desplazamientos restringidos en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> para cada CC. U1, U2, U3 se refieren a los desplazamientos y UR1, UR2, UR3 a los giros, ambos en $x, y, z$ . . . . .	27
2.3.	Parámetros de longitud de arco introducidos en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	28
3.1.	Datos habituales en aluminios aeronáuticos numéricos para el caso de estudio. . .	40
4.1.	Constantes de material del aluminio 14S-T6 [19]. . . . .	54
4.2.	Comparación de resultados para carga crítica de pandeo adimensional $K$ en placa cuadrada articulada y cargada unidireccionalmente. . . . .	60
5.1.	Comparación resultados de $K$ para dos $\xi$ en un panel integral y placa equivalente SSSS. Resultados MEF, analíticos y de [22]. . . . .	88
6.1.	Presupuesto del trabajo. . . . .	102



# Lista de Símbolos

## Mayúsculas

$A$	—	Área ( $\text{m}^2$ ).
$A_{0i}$	—	Grado imperfección de modo en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> (-).
$A_C$	—	Constante condiciones de contorno en [14] (-).
$C_i$	—	Constante (-).
$D$	—	Rigidez a flexión de una placa ( $\text{N m}$ ).
$E$	—	Módulo de Young ( $\text{N}/\text{m}^2$ ).
$E_s$	—	Módulo de Young secante ( $\text{N}/\text{m}^2$ ).
$E_t$	—	Módulo de Young tangente ( $\text{N}/\text{m}^2$ ).
$F$	—	Fuerza ( $\text{N}$ ).
$\mathcal{F}$	—	Componente de una función.
$G$	—	Módulo de rigidez a cortante ( $\text{N}/\text{m}^2$ ).
$I$	—	Momento de inercia de área ( $\text{m}^4$ ).
$J$	—	Módulo de torsión ( $\text{m}^4$ ).
$K$	—	Factor de pandeo (-).
$L$	—	Longitud ( $\text{m}$ ).
$M$	—	Momento flector en una viga ( $\text{N m}$ ) o en una placa ( $\text{N m}/\text{m}$ ).
$N$	—	Carga en el plano ( $\text{N}/\text{m}$ ).
$P$	—	Fuerza puntual ( $\text{N}$ ).
$\mathcal{P}$	—	Ratio de carga de postpandeo (-).
$Q$	—	Cortante en una viga ( $\text{N}$ ) o en una placa ( $\text{N}/\text{m}$ ).
$S$	—	Total de rigidizadores (-).
$T$	—	Momento torsor ( $\text{N m}$ ).
$U_i$	—	Desplazamiento en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> ( $\text{m}$ ).
$UR_i$	—	Giro en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> ( $\text{rad}$ ).
$U$	—	Energía interna ( $\text{N m}$ ).
$V$	—	Energía de las cargas externas ( $\text{N m}$ ).
$W$	—	Peso ( $\text{N}$ ).
$X$	—	Función de prueba en la dirección $x$ (-).
$Y$	—	Función de prueba en la dirección $y$ (-).

## Minúsculas

$a$	—	Dimensión de una placa en la dirección $x$ ( $\text{m}$ ).
$\tilde{a}$	—	Longitud de arco ( $\text{m}$ ).
$b$	—	Dimensión de una placa en la dirección $y$ ( $\text{m}$ ).
$c$	—	Constante de no linealidad del material (-).
$e$	—	Posición del centro de esfuerzos cortantes ( $\text{m}$ ).

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$f$	—	Función.
$g$	—	Eje de giro.
$h$	—	Longitud característica de una sección (m).
$l$	—	Longitud de arco (m).
$m$	—	Contador para los sumatorios en $x$ (-).
$n$	—	Contador para los sumatorios en $y$ (-).
$o$	—	Centro de la placa.
$p$	—	Carga repartida en una placa ( $\text{N/m}^2$ ) o en una viga ( $\text{N/m}$ ).
$r$	—	Relación de aspecto de una placa (-).
$t$	—	Espesor (m).
$u$	—	Desplazamiento en la dirección $x$ (m).
$\tilde{u}$	—	Desplazamiento con imperfección en la dirección $x$ (m).
$v$	—	Desplazamiento en la dirección $y$ (m).
$\tilde{v}$	—	Desplazamiento con imperfección en la dirección $y$ (m).
$w^*$	—	Patrón completo de imperfección en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> (m).
$w_i$	—	Amplitud modo en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> (m).
$w$	—	Desplazamiento en la dirección $z$ (m).
$\tilde{w}$	—	Desplazamiento con imperfección en la dirección $z$ (m).
$x, y, z$	—	Componentes de los ejes espaciales (m).

### Letras griegas

$\alpha$	—	Coefficiente elasto-plástico (-).
$\beta$	—	Coefficiente elasto-plástico (-).
$\Gamma$	—	Módulo de alabeo ( $\text{m}^6$ ).
$\gamma$	—	Coefficiente elasto-plástico (-).
$\gamma_c$	—	Pendiente relación $\sigma_{mx} - \sigma_{av}$ (-).
$\delta$	—	Coefficiente elasto-plástico (-).
$\Delta$	—	Incremento.
$\epsilon$	—	Deformación adimensional (-).
$\epsilon_{ij}$	—	Deformación lineal (-).
$\eta$	—	Coefficiente reductor de plasticidad (-).
$\lambda$	—	Autovalor .
$\mu_c$	—	Pérdida de rigidez adimensional en post-pandeo (-).
$\nu$	—	Coefficiente de Poisson (-).
$\xi$	—	Espaciado adimensional entre larguerillos (-).
$\Pi$	—	Energía potencial (N m).
$\phi$	—	Relación ancho-espesor (-).
$\Phi$	—	Función de tensiones de Airy (N).

$\rho$	—	Coefficiente elasto-plástico (-).
$\sigma_{ij}$	—	Tensión normal (N/m <sup>2</sup> ).
$\sigma_n$	—	Tensión a la que $E_t = 0,5 E$ (N/m <sup>2</sup> ).
$\sigma_u$	—	Tensión última de rotura (N/m <sup>2</sup> ).
$\sigma_Y$	—	Tensión de fluencia (N/m <sup>2</sup> ).
$\tau_{ij}$	—	Tensión tangencial (N/m <sup>2</sup> ).
$\theta$	—	Giro de una sección (rad).
$\Omega$	—	Volumen de control (m <sup>3</sup> ).
$\omega$	—	Alabeo unitario (m <sup>2</sup> ).
$\nabla$	—	Operador gradiente (m <sup>-1</sup> ).

Subíndices

$av$	—	Valor medio.
$b$	—	De flexión.
$c$	—	De compresión.
$cr$	—	Crítico.
$e$	—	Efectivo tensional.
$\bar{e}$	—	Efectivo de desplazamientos.
$ed$	—	De borde.
$g$	—	En el eje.
$\Gamma$	—	De alabeo.
$H$	—	Homogéneo.
$i$	—	Subíndice entero.
$J$	—	De Saint-Venant.
$j$	—	Subíndice entero.
$l$	—	Del número de modo.
$mx$	—	Máximo.
$mn$	—	Mínimo.
$m$	—	Contador en $x$ .
$n$	—	Contador en $y$ .
$o$	—	Del centro.
$P$	—	Particular.
$p$	—	Referido a una placa.
$s$	—	Referido un larguero.
$T$	—	De torsión.
$t$	—	En la dirección tangencial.
$\theta$	—	Rotacional.
$tot$	—	Total.

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$u$	—	Última de rotura.
$V$	—	De cortante.
$VM$	—	De Von Mises.
$x, y, z$	—	En las direcciones de los ejes espaciales.
$Y$	—	De fluencia.
$0$	—	Referido a una imperfección inicial.
$\infty$	—	En el infinito.

### Siglas

AL	—	Aluminio.
CC	—	Condiciones de contorno.
$cdg$	—	Centro de gravedad.
$cec$	—	Centro de esfuerzos cortantes.
$cte$	—	Constante.
DT	—	Teoría de la Deformación ( <i>Deformation Theory</i> ).
$gdl$	—	Grado de libertad.
imp	—	Imperfecto.
IT	—	Teoría Incremental ( <i>Incremental Theory</i> ).
E	—	Elástico.
EDO	—	Ecuación diferencial ordinaria.
EDP	—	Ecuación en derivadas parciales.
EP	—	Elasto-Plástico.
ESDU	—	<i>Engineering Sciences Data Unit</i> .
ET	—	Teoría Elástica ( <i>Elastic Theory</i> ).
LPF	—	<i>Load Proportionality Factor</i> .
MEF	—	Método de los elementos finitos.
NACA	—	<i>National Advisory Committee for Aeronautics</i> .
NASA	—	<i>National Aeronautics and Space Administration</i> .
OHC	—	<i>Open hole compression</i> .
OHT	—	<i>Open hole tension</i> .
PVE	—	Principio del valor estacionario.
SI	—	Sistema Internacional de unidades.
VK	—	Von Karman.





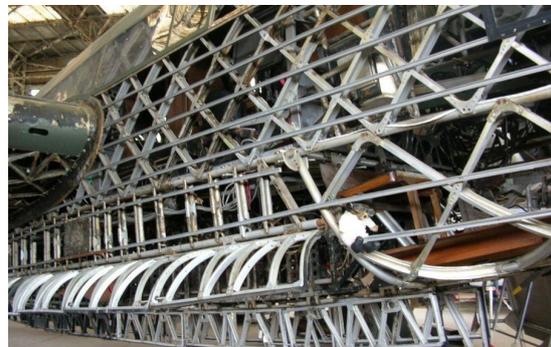
## 1.1. Motivación

### 1.1.1. Antecedentes históricos.

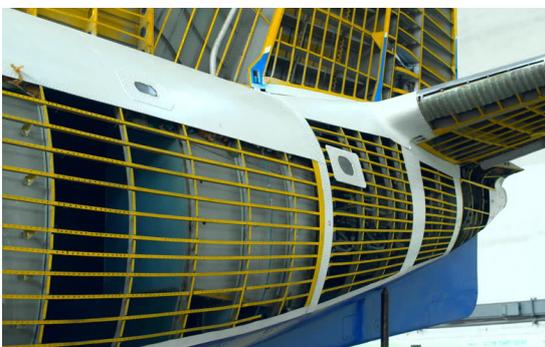
Las estructuras aeronáuticas han sufrido una gran evolución en el último siglo. La primera aeronave en realizar un vuelo con éxito, el *Flyer* de los hermanos Wright, poseía una estructura reticulada en la que todas las cargas estaban soportadas por una serie de barras de madera y reforzadas diagonalmente mediante cables (Figura 1.1a). No fue hasta la Segunda Guerra Mundial cuando se comenzaron a desarrollar estructuras mucho más sofisticadas: los fuselajes geodésicos. En ellos, los esfuerzos de compresión y tracción se compensaban mutuamente, disminuyendo mucho el peso estructural y permitiendo volar incluso con gran parte de la estructura dañada (Figura 1.1b). La piel de dichas estructuras no estaba preparada para resistir esfuerzos, y por tanto, los modos de fallo aparecían en las vigas, por colapso, ya que eran capaces de resistir muy poca carga una vez comenzaban a pandear.



(a) Estructura Pratt [24].



(b) Estructura geodésica [25].



(c) Estructura semi-monocasco [26].



(d) Estructura monocasco [34].

Figura 1.1: Ejemplos de la evolución de las estructuras aeronáuticas.

Simultáneamente se desarrollaron las estructuras monocasco (Figura 1.1d). En ellas, el elemento estructural principal era la piel por lo que era extremadamente gruesa para evitar cargas críticas de pandeo bajas [12]. Se asumía que las placas, al igual que las columnas, colapsaban al desarrollarse este fenómeno, por lo que pretendían evitar alcanzar la carga de inicio de pandeo.

No fue hasta la década de 1950 cuando los estudios de la NACA demostraron que la carga de pandeo local de un panel es mucho menor que su carga última de rotura. En consecuencia, cualquier estructura formada por paneles en la que se produzca pandeo controlado y estable, puede trabajar en régimen de post-pandeo. La piel de la aeronave llegó a espesores milimétricos, debidamente reforzada con un gran número de elementos: largueros, larguerillos, cuadernas, etc. (Figura 1.1c). El ahorro de masa comparado con los diseños en los que no se permitía pandeo era muy notable; comenzó el auge de las estructuras semi-monocasco, que se mantiene hasta la actualidad.

### 1.1.2. Introducción al pandeo en estructuras aeronáuticas.

Bajo un determinado estado de cargas de tipo compresión y/o cortante, puede aparecer una inestabilidad estructural: el pandeo. Se define el pandeo ante cargas estáticas, es decir, lentamente aplicadas. Este fenómeno adquiere mucha importancia en estructuras de pared delgada que sufren las cargas en las secciones de mayor longitud característica. Se atribuyen tres propiedades principales al pandeo [5]:

- Cambio en el patrón de deformación.
- Cambio de la forma de la curva de tensión-deformación.
- Aparición repentina, a una determinada carga crítica  $N_{cr}$ .

Existen diversos tipos de pandeo en función de cómo se comporta la estructura una vez alcanzado el estado de inestabilidad. El más importante, y que más atención ha recibido, es conocido por el nombre de *pandeo elástico* o *pandeo bifurcado*. Se caracteriza porque la estructura permanece comparativamente indeformable y en equilibrio hasta alcanzar el punto de bifurcación, en el cual comienza a sufrir grandes desplazamientos  $\Delta$  fuera del plano.

Una vez sobrepasado dicho punto relacionado la carga crítica de pandeo, es posible que se alcance un nuevo estado de equilibrio que aumentará la capacidad de carga de la estructura: es el caso de las placas. Por otro lado, puede aparecer el efecto contrario, sobrepasado este punto disminuye la capacidad de carga de la estructura y desencadena en el colapso de la estructura, tal como sucede en las columnas [6]. Estos razonamientos pueden observarse en la Figura 1.2a.

El pandeo bifurcado es propio de placas planas y perfectas. Sin embargo, los paneles aeronáuticos reales no son perfectos, ya que debido a los procesos de fabricación poseen imperfecciones, como distorsiones geométricas y tensiones residuales. Además, los requerimientos aerodinámicos obligan a dotar a las placas de ciertas curvaturas. La principal consecuencia de las imperfec-

ciones y/o curvaturas es una reducción en la carga que puede soportar la estructura. Otra de las consecuencias es que el punto de bifurcación queda difuso y, en consecuencia, el pandeo y el post-pandeo se desarrollan simultáneamente (ver Figura 1.2b).

El hecho de que existan imperfecciones da lugar a dos grandes problemas. El primero hace referencia a que no existe una manera precisa de medir ni cuantificar dicha imperfección, lo que hace obligatorio ensayar y a continuación estimar la amplitud de las imperfecciones para que las curvas experimental y analítica se superpongan. El segundo problema está asociado a que no aparece una carga de pandeo bien definida; comparar entre placas en fases preliminares se vuelve una tarea complicada. Si se desean diseños competitivos es necesario definir un criterio que no está estandarizado y da lugar a discrepancias entre fuentes bibliográficas [5].

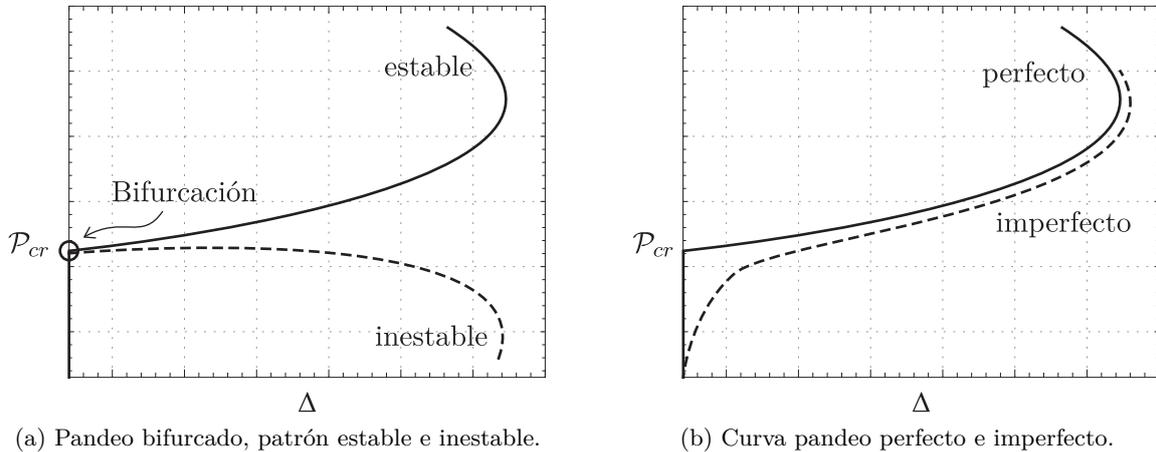


Figura 1.2: Deformación  $\Delta$  vs. factor de carga  $\mathcal{P}$  en pandeo y post-pandeo: comparación de diferentes casos.

Durante cientos de años, se tuvo la creencia que la contribución de Euler de 1759 acerca del pandeo era errónea, ya que los resultados experimentales no se aproximaban a los teóricos. El principal fallo de su teoría era considerar que la estructura debía permanecer en régimen elástico, por lo que a factores de carga altos se producían demasiadas discrepancias.

En estructuras que sufren grandes deformaciones y de espesores delgados, como en aeronáutica, habitualmente las tensiones que se desarrollan durante el pandeo son superiores al límite de fluencia  $\sigma_Y$  o “*yield point*” del material, por lo que el pandeo se produce en la región elasto-plástica. Esta zona se caracteriza por una relación no lineal entre la tensión-deformación de la pieza y por una reducción progresiva del módulo elástico de Young. Tres aproximaciones a este problema han destacado a lo largo del siglo XX [7]:

- Método semi-racional de Bleich (1924).

Primer intento de extender la teoría elasto-plástica de Engesser-Von Karman para colum-

nas a placas. La formulación se basa en remplazar el módulo elástico por el módulo secante en la formulación elástica. Ofrece soluciones aceptables con una metodología muy sencilla, por lo que es muy utilizada.

- Teoría de la deformación (Hencky, 1924).

Se basa en la suposición de que para un estado de cargas monótono, el estado de deformación está determinado únicamente por el estado de tensiones, independientemente de cómo haya sido alcanzado. Básicamente, establece una nueva ley constitutiva no lineal y asume que las deformaciones son reversibles, es decir, se vuelve siempre al estado inicial de deformación una vez que las cargas se retiran. Las hipótesis de la teoría de la deformación reducen el problema a ecuaciones simples, pero su aplicación está más limitada que la teoría siguiente.

- Teoría de flujo incremental (Lévy-Mises, 1928).

Asume incrementos infinitesimales en la deformación determinados por el estado actual de tensiones y su incremento; el estado no sólo depende del instante actual, sino también de cómo se ha alcanzado. Por otro lado, las deformaciones son irreversibles debidas a la disipación de energía que producen. La teoría de flujo incremental es de gran aplicabilidad, pero los cálculos son mucho más complejos.

A pesar de que la teoría de flujo representa de manera más precisa el fenómeno físico de la plasticidad, la teoría de la deformación se corresponde mejor con los resultados experimentales: es la conocida *paradoja del pandeo plástico*, promovida en 1949 por Bijlaard and Stowell y estudiada aún en la actualidad [7].

### 1.1.3. Estado actual

En la actualidad, la gran mayoría de las estructuras aeroespaciales son semi-monocasco, formadas por una serie de placas reforzadas por rigidizadores como larguerillos, costillas, largueros y cuadernas. Los paneles se encuentran en toda la estructura de los vehículos aeroespaciales: mamparos de presión, cajón de torsión, timón de cola, etc. El bajo peso de la estructura semi-monocasco y sus grandes capacidades estructurales facilita que estén presentes en todos los diseños aeronáuticos actuales.

En las Figuras 1.3a y 1.3b se muestran un cajón de torsión y un mamparo de presión de una aeronave, respectivamente. Además de en aeronaves, es muy común encontrar paneles en vehículos espaciales y misiles; en la Figura 1.3c aparece un módulo propulsivo de la nave espacial *Orión* y en 1.3d el interior de un tanque de combustible del cohete *Falcon 9*. Todas las figuras tienen una característica común: una piel muy delgada reforzada con numerosas vigas capaz de soportar grandes cargas.



(a) Cajón de torsión del B787 *Dreamliner* [28].



(b) Mamparo de presión en línea de ensamblaje [27].



(c) Módulo propulsivo nave espacial *Orión* [33].



(d) Interior tanque de combustible *Falcon 9* [35].

Figura 1.3: Ejemplos de estructuras aeronáuticas formadas por paneles rigidizados

Los paneles están conformados por una fina piel, la placa, y una serie de rigidizadores, habitualmente los larguerillos. En la mayoría de diseños, ambos elementos estructurales se fabrican en procesos diferentes y en una etapa posterior se remachan para conformar el panel. Sin embargo, el remachado presenta una serie de inconvenientes: aumento de peso, pandeo entre remaches y que son concentradores de tensiones. Una propuesta de mejora se presenta con los paneles integrales, en los cuales la placa y los rigidizadores se fabrican como una única pieza.

En la Figura 1.4a se muestra la cubierta inferior del ala del *Airbus A350 XWB*, formado por paneles integrales. El A350 es una aeronave moderna (2011) con una estructura muy sofisticada debido a los grandes requerimientos de diseño que posee. No obstante, los paneles integrales se reservan a zonas reducidas de la aeronave debido a que su fabricación es muy costosa e implica notable derroche de material al necesitar una etapa de mecanizado.

El *Concorde* fue una de las aeronaves pioneras en incluir paneles integrales: sus especificaciones debían ser muy buenas para poder convertirse en la primera aeronave supersónica de pasajeros. El *Concorde* posee esta configuración de paneles por toda la estructura del ala y fuselaje; en la Figura 1.4b se muestra una sección de fuselaje.



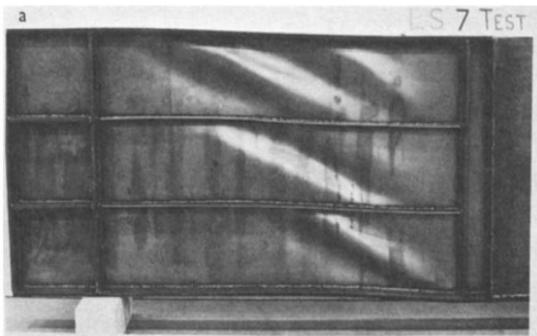
(a) Panel inferior del ala del A350 XWB [37].



(b) Sección central fuselaje *Concorde* [36].

Figura 1.4: Ejemplos de estructuras conformadas por paneles integrales.

Como consecuencia de las cargas aerodinámicas, la mayoría de estos paneles trabajan a compresión y flujo de cortante; además, lo hacen dentro del régimen de post-pandeo elasto-plástico. Un caso muy habitual dentro de las estructuras aeronáuticas son los paneles o láminas rigidizadas sometidas a cortante que conforman una viga armada bajo tensión diagonal. El pandeo bajo cortante presenta un modo de deformación muy característico, identificable por unos pliegues en dirección diagonal. En la Figura 1.5a aparece el ensayo de un panel bajo tensión diagonal, mientras que en la Figura 1.5b se observa dicho fenómeno sobre un fuselaje real; en ambos casos los pliegues son claramente visibles.



(a) Ensayo panel bajo tensión diagonal [29].



(b) Pliegues en el fuselaje del A-3B *Skywarrior* [30].

Figura 1.5: Ejemplos de estructuras aeronáuticas bajo tensión diagonal.

Son numerosos los modos de fallo que pueden aparecer en un panel: pandeo entre remaches, pandeo de los rigidizadores, *crippling*, pandeo global del panel, etc. El hecho de que sea tan importante conocer las cargas que producen pandeo, así como su evolución, se debe a que dichos modos de fallo representan más de la mitad de los globales del panel. El porcentaje asociado a cada fallo se recoge en la Figura 1.6.

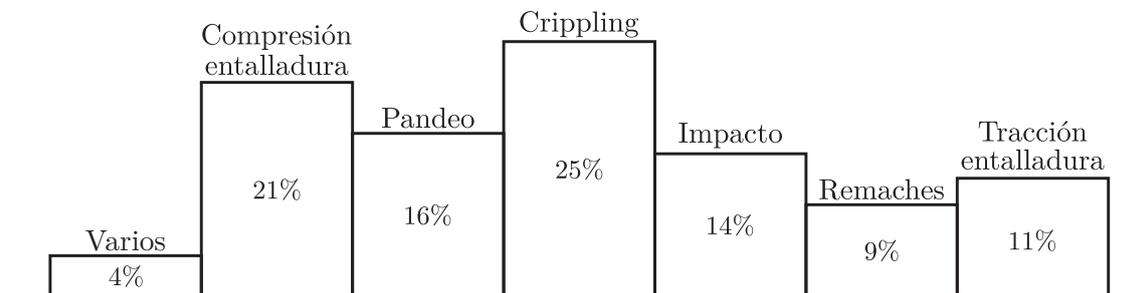


Figura 1.6: Porcentajes de los modos de fallo de un panel aeronáutico [8].

Para evitar que una estructura falle por alguno de los fenómenos mencionados, es de vital importancia conocer con precisión como sucede y se desarrolla el pandeo, manteniéndolo así controlado bajo cualquier carga: numerosos han sido los accidentes debido a un mal dimensionamiento de la estructura. En la Figura 1.7a se muestra la parte delantera del fuselaje del *Boeing DC-10*, que muestra daño extendido debido al pandeo causado por una serie de entradas de control muy bruscas durante el aterrizaje de la aeronave, para las cuales no estaba dimensionada. Por otro lado, en la Figura 1.7b se muestran los ensayos llevados a cabo por la NASA al vehículo experimental *Goodyear Inflatoplane*. Múltiples experimentos se realizaron con esta aeronave a escala real en un túnel de viento para detectar el factor de carga al que se producía el pandeo completo del ala, ya que en esa época se carecían de herramientas numéricas precisas.



(a) Fuselaje DC-10 tras accidente en 2009 [31].



(b) Ensayos *Goodyear Inflatoplane*, NASA 1960 [32].

Figura 1.7: Ejemplos de fallos en estructuras aeronáuticas debidos al pandeo.

## 1.2. Objetivos

El objetivo del presente Trabajo Final de Grado es reproducir el comportamiento de un panel típico de la estructura semi-monocasco, con el fin de obtener un diseño realista y competitivo. Para ello, se combinan las teorías de placas y vigas con teorías elasto-plásticas y de imperfec-

ciones para conformar el estudio de paneles rigidizados. El orden de complejidad es creciente, comenzando por la obtención de soluciones de inicio de pandeo y post-pandeo elásticas e imperfectas en placas a compresión, continuando con el estudio elasto-plástico y perfecto y finalizando con un estudio completo de post-pandeo elasto-plástico e imperfecto en un panel integral.

Los métodos analíticos, para los cuales se utiliza el programa informático *Mathematica*<sup>®</sup>, se contrastan con el método de los elementos finitos, empleando el software comercial *Abaqus*<sup>®</sup>. Los resultados de ambos métodos se comparan con soluciones experimentales y otras referencias para discutir la precisión y el alcance del trabajo.

### 1.3. Organización de la memoria

La memoria consta de seis capítulos, siendo el primero este introductorio, organizados de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presenta la teoría de cálculo de placas y paneles rectangulares. Se desarrollan dos formulaciones: la energética y la basada en ecuaciones diferenciales, ambas permiten estudiar placas perfectas o imperfectas y en régimen elástico o elasto-plástico.
- En el Capítulo 3 se lleva a cabo el estudio de inicio de pandeo y post-pandeo en placas imperfectas y con comportamiento elástico sometidas a compresión y diferentes condiciones de contorno. Parte de las soluciones analíticas y MEF se comparan con referencias de renombre externas.
- En el Capítulo 4 se repite el análisis del Capítulo 3 incluyendo la elasto-plasticidad del material y simplificando la placa a perfecta. El desarrollo de la plasticidad en inicio de pandeo o post-pandeo se estudia como dos problemas diferentes y se comparan diferentes teorías modernas elasto-plásticas aún debatidas en la actualidad. Algunas soluciones son comparadas con resultados experimentales y con otras referencias.
- En el Capítulo 5 se resuelve un panel aeronáutico a compresión, recapitulando el estudio de imperfecciones desarrollado en el Capítulo 4 y las teorías elasto-plásticas del Capítulo 6. Además, se distingue entre pandeo local y global del panel, haciendo hincapié en las ventajas y desventajas de cada uno.
- En el Capítulo 6 se muestran las conclusiones, los posibles trabajos y vías de investigación futuras y el presupuesto global del trabajo.

## 2.1. Teoría de placa delgada

En general, se define una placa fina o delgada como aquel elemento estructural plano en el cual su espesor es pequeño en comparación con las otras dos dimensiones. Habitualmente resiste tanto las fuerzas a flexión como de membrana o en el plano. Las placas son un elemento básico en la estructura de aeronaves, siendo por ejemplo una zona de piel de ala rodeada de larguerillos y costillas o en el fuselaje de larguerillos y cuadernas [9].

La principal característica de las placas reforzadas, y por lo que son tan utilizadas, es su capacidad para resistir el post-pandeo. Mientras que las vigas colapsan con cargas cercanas a la crítica, las placas reforzadas son capaces de resistir cargas muy superiores manteniéndose estables.

### 2.1.1. Sistema de referencia y criterio de signos.

En la Figura 2.1a se presenta el sistema de referencia asociado a una placa plana rectangular de dimensiones  $a \times b$ . Se definen los ejes de coordenadas con origen en una esquina, ejes  $x$ ,  $y$  contenidos en el plano medio y eje  $z$  positivo hacia abajo.

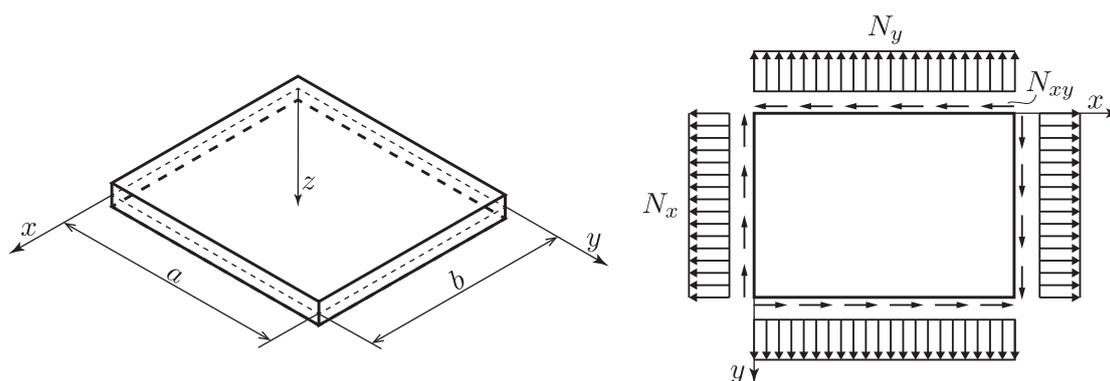


Figura 2.1: Sistema de referencia asociado a la placa, izquierda. Cargas en el plano, derecha.

En cuanto a las cargas en el plano, se muestra el criterio de signos en la Figura 2.1b. Notése que las cargas normales  $N_x$ ,  $N_y$  se definen positivas a tracción y negativas a compresión, y que  $N_{xy}$  es positiva en las direcciones de la figura.

### 2.1.2. Hipótesis generales.

Las principales hipótesis de la teoría de pequeñas deformaciones para placas delgadas pueden ser establecidas (véase [3] y [6]) como:

1. El material de la placa es homogéneo e isotrópico.
2. La placa es inicialmente plana.
3. La deflexión del plano medio es pequeña en comparación con el espesor de la placa  $w \ll t$ . La pendiente de la superficie deflectada es por tanto muy pequeña y su cuadrado es despreciable frente a la unidad.
4. Las líneas rectas y normales al plano medio  $z = 0$  permanecen rectas y normales a éste durante la deformación y su longitud no se altera, de modo que las deformaciones  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\epsilon_z$  son nulas.
5. La tensión normal al plano medio  $\sigma_z$  y las tangenciales  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  fuera del plano son pequeñas y pueden despreciarse en las relaciones tensión-deformación.
6. El plano medio permanece inextensible tras la flexión:  $u_0, v_0 \approx \text{cte}$ .

Las cuatro últimas ecuaciones son conocidas como las hipótesis de Kirchhoff y permiten reducir un problema tridimensional en uno bidimensional. Durante todo este trabajo se asume la validez de la teoría de Kirchhoff, a excepción de que se indique lo contrario.

### 2.1.3. Funciones de prueba y condiciones de contorno

Habitualmente es complicado obtener una solución analítica del pandeo: el problema se rige por ecuaciones diferenciales de cuarto orden con términos cruzados. Por tanto, se emplean métodos semianalíticos que asumen que  $w(x, y)$  puede expresarse en una serie doble de Fourier, en el que el sumando es un producto de dos funciones independientes:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{nm} X(x) Y(y) \quad (2.1)$$

Las funciones  $X(x)$ ,  $Y(y)$  reciben el nombre de *funciones de prueba*; deben ser mutuamente ortogonales y cumplir las CC de la placa. El primero en proponer una solución de este tipo fue Navier, que en 1820 obtuvo la solución para una placa articulada utilizando funciones de prueba tipo *seno*.

Ahora es necesario definir las CC que deben cumplir las funciones de prueba. Las CC se definen en el borde de la placa y pueden ser de dos tipos: CC geométricas o esenciales (Dirichlet), que imponen restricciones al giro o flecha en ese borde, y CC de fuerza o naturales (Neumann) que implican a solicitaciones en dicho borde.

Durante este trabajo se van a utilizar CC ideales, con poca aplicación real pero que permiten ilustrar con claridad el problema:

- Borde empotrado (C, *Clamped*). Restringe los seis grados de libertad del borde de la placa, es decir, no permite ni giro ni desplazamiento en ninguna dirección. Es una primera aproximación a placas delimitadas por vigas de alta rigidez torsional, por ejemplo cuadernas y largueros.
- Borde articulado (S, *Simply Supported*). Restringe los tres grados de libertad de desplazamiento pero permite el giro en cualquier dirección. Podría aplicarse en placas delimitadas por vigas de muy baja rigidez torsional, como por ejemplo, los larguerillos.
- Borde libre (F, *Free*). No restringe ningún grado de libertad.

En la Tabla 2.1 aparecen las tres condiciones de contorno mencionadas, las restricciones geométricas y de fuerza que imponen y una posible función de prueba  $X(x)$ .

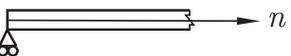
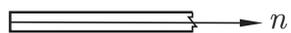
CC	Representación	Restr. geométrica	Restr. fuerza	F. prueba $X(x)$
C		$w = w_{,n} = 0$	-	$1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)$
S		$w = 0$	$M_n = 0$	$\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$
F		-	$M_n = Q_n = 0$	$\left(1 - \frac{x}{a}\right)^m$

Tabla 2.1: Resumen de las CC ideales. Las funciones de prueba  $Y(y)$  son análogas [13].

A partir de ahora, con el fin de simplificar la notación se define:

$$S(mx) := \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad C(mx) := \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.2)$$

## 2.2. Placas con comportamiento elástico

En esta sección se tratan los conceptos básicos de la teoría elástica de placas. Que el material tenga un comportamiento elástico implica que la tensión y la deformación siguen una relación lineal sea cual sea el estado. Además, se considera que el material es homogéneo e isótropo, es decir, sus propiedades elásticas son las mismas en todas las direcciones y puntos.

Únicamente se presenta un resumen de la teoría elástica y las ecuaciones se presentan sin su derivación. Para conocer los detalles consultar la bibliografía [3], [6] y [9].

### 2.2.1. Ecuaciones cinemáticas

Las ecuaciones cinemáticas, expresadas como deformación-curvatura, relacionan las derivadas de los desplazamientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$  con las deformaciones  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_{ij}$ . Siguiendo las hipótesis de la Sección 2.1.2 se obtienen las ecuaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_z &= 0 & \gamma_{yz} &= 0 & \gamma_{xz} &= 0 \\
 \varepsilon_x &= z \kappa_x & \varepsilon_y &= z \kappa_y & \gamma_{xy} &= 2z \kappa_{xy} \\
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \kappa_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

### 2.2.2. Ecuaciones constitutivas

La ley generalizada de Hooke [6] proporciona la relación entre el estado tensional y la deformación que sufre la estructura. Particularizando para un problema bidimensional, las relaciones para las componentes del tensor tensión  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = G \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} w_{,xy}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Se puede observar que todas las relaciones son lineales en  $z$ ; así se ha definido con las hipótesis de Kirchoff de la Sección 2.1.2.

### 2.2.3. Solicitaciones

En lugar del estado tensional en un punto es útil conocer las sollicitaciones estáticamente equivalentes: momentos flectores  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  y fuerzas cortantes  $Q_x$ ,  $Q_y$ ;

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) & Q_x &= -D (w_{,xxx} + w_{,xyy}) \\
 M_y &= -D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) & Q_y &= -D (w_{,xyx} + w_{,xyy}) \\
 M_{xy} &= M_{yx} = -D (1-\nu) w_{,xy}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)}$  es la rigidez a flexión de la placa.

#### 2.2.4. Inicio de pandeo

##### Ecuación de gobierno

Considerando el equilibrio de un elemento  $dx \times dy$  e incluyendo las sollicitaciones en el plano de la Figura 2.1b, se obtiene la Ec. (2.6) en régimen de pequeñas deformaciones [3]:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p_z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

La Ec. (2.6) permite obtener el desplazamiento de  $w(x, y)$  antes del post-pandeo. No se va a considerar la carga distribuida vertical  $p_z$  cuando se estudie inicio de pandeo; sólo se consideran las fuerzas en el plano  $N_x, N_y, N_{xy}$ . En consecuencia, el pandeo es independiente de la flexión, la ecuación se transforma en homogénea y el comienzo de pandeo viene dado por la solución no trivial  $w \neq 0$ .

##### Formulación energética

La formulación energética, desarrollada a finales del siglo XIX, surge ante la complejidad de resolver la ecuación de gobierno completa bajo ciertas CC. La formulación se basa en el Principio del Valor Estacionario (PVE) que establece que si un cuerpo esta en equilibrio su energía potencial total  $\Pi$  debe ser mínima; si no es mínima la placa se encontrará en un estado o neutro o inestable. La energía  $\Pi$  se expresa como la diferencia de la energía interna de deformación  $U$  y el trabajo de las fuerzas en el plano  $V$ ; y considerando que la única variable es  $w_{nm}$  de aplicar el PVE resulta en:

$$\Pi = U - V \quad \frac{\partial(U - V)}{\partial w_{nm}} = 0 \quad (2.7)$$

Al aplicar el PVE de la Ec. (2.7) se obtiene un sistema de  $n \times m$  ecuaciones, en el cual las únicas incógnitas son las cargas críticas de pandeo  $N_{cr}$ . La energía interna de deformación se define como el producto de las componentes del tensor tensión y deformación integrados en todo el dominio de la placa [3]. Teniendo en cuenta las hipótesis de Kirchhoff (Sección 2.1.2) y sustituyendo en ella las constitutivas Ecs. (2.4), y las cinemáticas Ecs. (2.3) se obtiene la

ecuación de la energía interna de una placa plana:

$$U_p = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dy dx \quad (2.8)$$

En la Ec. (2.8) el término entre corchetes integra a cero para las placas en las que todos los bordes se mantienen rectos, es decir, articulados o empotrados. Por último, el trabajo de las solicitaciones en el plano es [3]:

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy dx \quad (2.9)$$

### 2.2.5. Post-pandeo

Una vez superada la carga crítica de pandeo  $N_{cr}$  las placas permanecen en equilibrio en el régimen de post-pandeo, que se caracteriza por grandes deflexiones fuera del plano con evolución altamente no lineal. Por tanto, la sexta hipótesis de Kirchhoff (Sección 2.1.2) que establece que el plano medio de la placa es inextensible ante flexión ya no es aceptable.

Dado que  $w > t$ , las relaciones cinemáticas de las Ecs. 2.3 para placas en elasticidad de deformación intermedia no son lineales dado que se incluye el término cuadrático de la serie de Taylor:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.10)$$

Las curvaturas de las Ecs. (2.3) y las constitutivas de las Ecs. (2.4) siguen siendo válidas ya que el comportamiento del material no cambia. Además, para la resolución del problema de post-pandeo es necesario introducir una función biarmónica de tensiones  $\Phi(x, y)$  conocida como función de tensiones de Airy o Stokes:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

Como se ha justificado tras la Ec. (2.6), se asume  $p_z$  nula: sustituyendo  $\Phi$  en la Ec. (2.6) se obtiene la primera ecuación de Von Karman:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

La segunda ecuación de Von Karman se obtiene utilizando la ecuación de compatibilidad de Saint-Venant [11], la cual se deriva de eliminar los desplazamientos  $u$ ,  $v$  de la Ec. (2.10) e introducir las constitutivas Ecs. (2.4) y la definición de  $\Phi$  Ec. (2.11):

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

### 2.2.6. Influencia de imperfecciones.

Las placas perfectamente planas no existen en la práctica debido a que los procesos de fabricación nunca son perfectos. Para cualquier condición de contorno, aquellas imperfecciones cuya forma coincide con los modos de pandeo son las más perjudiciales. Con el fin de calcular de manera conservadora se presenta el estudio de este tipo de imperfecciones.

Las placas imperfectas siguen un patrón de deformación estable, progresivo y sin una carga de pandeo claramente definida (ver Figura 1.2b). Las deformaciones grandes fuera del plano ocurren a cargas cercanas a las carga de bifurcación. Se supone una imperfección geométrica inicial del tipo:

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0nm} X(x) Y(y) \quad (2.14)$$

en la que  $w_{0nm}$  es la amplitud máxima de la imperfección que pondera a cada término de la serie de Taylor y  $X(x)$ ,  $Y(y)$  coinciden con las elegidas para la función de prueba en el caso perfecto.

A continuación se define la función desplazamiento total  $\tilde{w}(x, y)$  como una superposición de la deformada del caso perfecto  $w(x, y)$  y una amplitud inicial  $w_0(x, y)$ :

$$\tilde{w}(x, y) = w(x, y) + w_0(x, y) \quad (2.15)$$

Además, las cinemáticas Ecs. (2.10) también se ven modificadas; introduciendo el término de imperfección:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \quad (2.16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Maguerre en 1937 estableció las ecuaciones de gobierno para el caso imperfecto, que introducía la deflexión total  $\tilde{w}$  como la incógnita a resolver. Para obtenerlas, es necesario seguir el mismo proceso que para las ecuaciones Ecs. (2.12) y (2.12) pero con las cinemáticas Ecs. (2.16). La primera es [11]:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial y^4} = \frac{t}{D} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (\tilde{w} + w_0)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (\tilde{w} + w_0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\tilde{w} + w_0)}{\partial y^2} \right] \quad (2.17)$$

y la segunda es:

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) = \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (2.18)$$

### 2.3. Placas con comportamiento elasto-plástico

Los primeros intentos de extender la teoría elástica del pandeo de placas al régimen elasto-plástico fueron realizados por Bleich en 1924, que extendió a placas la teoría Engesser-Von Karman para columnas. La formulación se basa en remplazar  $E$  por el módulo secante  $E_s$  (Figura 4.1) en la formulación elástica; sin embargo, únicamente era válida para el caso de placas de alta  $r$  articuladas en los lados cargados que pandean con una única curvatura, de manera similar a una columna. El método fue mejorado por Gerard en 1945 con mejores resultados. Otra de las propuestas de Bleich (1952) consistía en modificar las cargas de pandeo  $N_{cr}$  multiplicándolas por el coeficiente reductor de plasticidad  $\eta$ ; en una placa articulada  $\eta = \sqrt{E_t/E_s}$ , donde  $E_t$  es el módulo tangente [15].

De manera simultánea Hencky desarrollaba la Teoría de la Deformación (DT) en plasticidad. Estudiada más adelante por Bijlaard en 1941 y Stowell en 1948, establece que las relaciones tensión-deformación dependen exclusivamente del estado actual  $\varepsilon_p = f(\sigma)$ . Además, no considera deformaciones permanentes y la curva de descarga coincide con la de carga a pesar de que haya plastificación del material. La aplicación de esta teoría se reduce a aquellas placas con un patrón de carga monótono, debido a la hipótesis de dependencia del estado actual [15].

En 1925 Prandtl planteó la Teoría del Flujo o Teoría Incremental (IT), aunque el mérito se otorga a Lévy-Mises en 1928. A diferencia de DT, establece que la deformación total no sólo depende del estado tensional instantáneo, sino también del patrón de carga anterior. En consecuencia puede aplicarse a todos los problemas, incluso aquellos en los que las tensiones no son proporcionales; además, tiene en cuenta la deformación residual una vez se alcanza la zona plástica. Todo esto hace la teoría IT mucho más compleja que DT [7].

A pesar de que la teoría IT ofrece una representación más fiel de la realidad, sobrestima la capacidad del material y no permite adoptar una posición conservadora. Sin embargo, DT concuerda con los resultados experimentales de una manera bastante precisa; esta contradicción es la *paradoja del pandeo plástico* que es aún estudiada en la actualidad [7].

### 2.3.1. Ecuaciones constitutivas

Con respecto al modelo elástico, el elasto-plástico únicamente modifica las constitutivas Ecs. (2.4) y las cinemáticas Ecs. (2.3) siguen siendo válidas. Se presentan en esta subsección las relaciones constitutivas de Prandtl-Reuss para IT y las de Hencky para DT; ambas asumen que la carga y descarga se realiza por la misma curva. Se omite la demostración, para detalles consultar [16].

Para establecer las nuevas constitutivas se introducen los coeficientes  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  y  $\rho$  que modelan es comportamiento no lineal de la curva tensión deformación; coeficientes que toman un valor diferente para cada método. La forma general de las ecuaciones constitutivas en ambos métodos es:

$$\sigma_x = E (\alpha \varepsilon_x + \beta \varepsilon_y) \quad \sigma_y = E (\beta \varepsilon_x + \gamma \varepsilon_y) \quad \tau_{xy} = E \delta \gamma_{xy} \quad (2.19)$$

Las expresiones para los coeficientes anteriores en DT vienen dados por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{VM}^2} \right] & \beta &= \frac{1}{\rho} \left[ 2 - 2(1 - 2\nu) \frac{E_t}{E} - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{VM}^2} \right] \\ \gamma &= \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{VM}^2} \right] & \delta &= \left( 2\nu + 3 \frac{E}{E_s} - 1 \right)^{-1} \\ \rho &= 3 \frac{E}{E_s} + (1 - 2\nu) \left[ 2 - (1 - 2\nu) \frac{E_t}{E} - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{VM}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde en 2D se ha elegido la tensión de Von Mises  $\sigma_{VM}$  como la equivalente, ya que el material en este trabajo es aluminio:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (2.21)$$

En la teoría incremental los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{VM}^2} \right] & \beta &= \frac{1}{\rho} \left[ 2 - 2(1 - 2\nu) \frac{E_t}{E} - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{VM}^2} \right] \\
 \gamma &= \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{VM}^2} \right] & \delta &= \frac{1}{2(\nu + 1)} \\
 \rho &= 3 + (1 - 2\nu) \left[ 2 - (1 - 2\nu) \frac{E_t}{E} - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{VM}^2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

En las Ecs. (2.20) y (2.22) si se sustituyen  $E_s = E_t = E$  se recuperan las primeras Ecs. (2.3) para el problema elástico:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{1 - \nu^2} & \beta &= \frac{\nu}{1 - \nu^2} & \gamma &= \frac{1}{1 - \nu^2} \\
 \delta &= \frac{1}{2(1 + \nu)} & \rho &= 4(1 - \nu^2)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

### 2.3.2. Modelo elasto-plástico

Para definir el comportamiento del material se va a utilizar el modelo de Ramberg-Osgood, adecuado para materiales no lineales como el aluminio [17]:

$$\frac{\varepsilon E}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_n} + \frac{1}{c} \left( \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_n} \right)^c \tag{2.24}$$

donde  $\sigma_n$  es la tensión a la cual  $E_t = 0,5 E$  y  $c$  una constante del material que controla la no linealidad de su respuesta. Los módulos tangente y secante en este modelo quedan:

$$E_t = E \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_n} \right)^{c-1} \right] \quad E_s = E \left[ 1 + \frac{1}{c} \left( \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_n} \right)^{c-1} \right] \tag{2.25}$$

Una representación del modelo, así como el concepto de  $E_s$  y  $E_t$  está dibujada en la Figura 4.1:

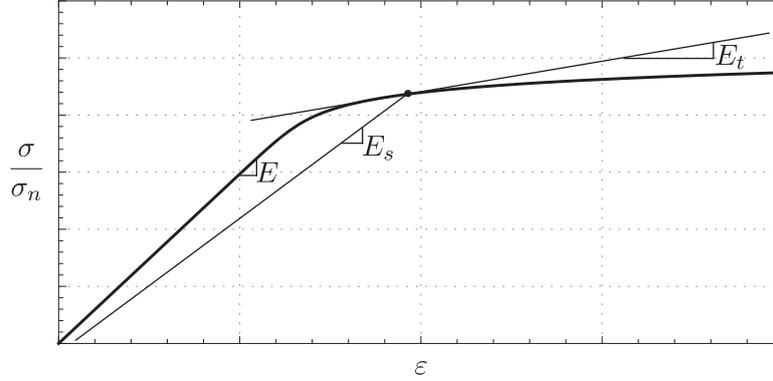


Figura 2.2: Curva tensión  $\sigma$  vs. deformación  $\varepsilon$  mediante el modelo de Ramberg-Osgood. Concepto módulo elástico  $E$ , módulo secante  $E_s$  y módulo tangente  $E_t$ .

### 2.3.3. Formulación energética en inicio de pandeo

Se plantea en esta subsección la formulación energética para placas en régimen elasto-plástico; se omite el desarrollo diferencial ya que su resolución es demasiado compleja y redundante.

Al cambiar el comportamiento tensión-deformación de la placa, el término de la energía que se ve alterado es la energía interna  $U$ . Por definición,  $U$  es la integral volumétrica del invariante  $J_2$ :

$$U = \frac{1}{2} \oint_{\Omega} J_2 \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^a \int_0^b (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \, dz \, dx \, dy \quad (2.26)$$

Sustituyendo las cinemáticas Ecs. (2.3) y las constitutivas Ecs. (2.19) e integrando en  $z$ :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^a \int_0^b E z^2 \left[ \alpha \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\beta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4\delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dz \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} D (1 - \nu^2) \int_0^a \int_0^b \left[ \alpha \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\beta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4\delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx \, dy \end{aligned} \quad (2.27)$$

El PVE de la Ec. (2.7) y la energía de las fuerzas en el plano  $V$  de la Ec. (2.9) siguen siendo válidos. La principal diferencia con el caso elástico es que ahora las solicitaciones  $N_x$ ,  $N_y$  aparecen dentro de la energía  $U$  de la Ec. (2.27) en los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ .

### 2.3.4. Post-pandeo

Se deducen en esta subsección las ecuaciones de Von Karman para el caso elasto-plástico y se extienden las teorías de inicio de pandeo DT, IT a este régimen. La primera ecuación de Von Karman se deriva a partir del equilibrio de fuerzas y momentos sobre el elemento diferencial de la Figura 2.3 [3].

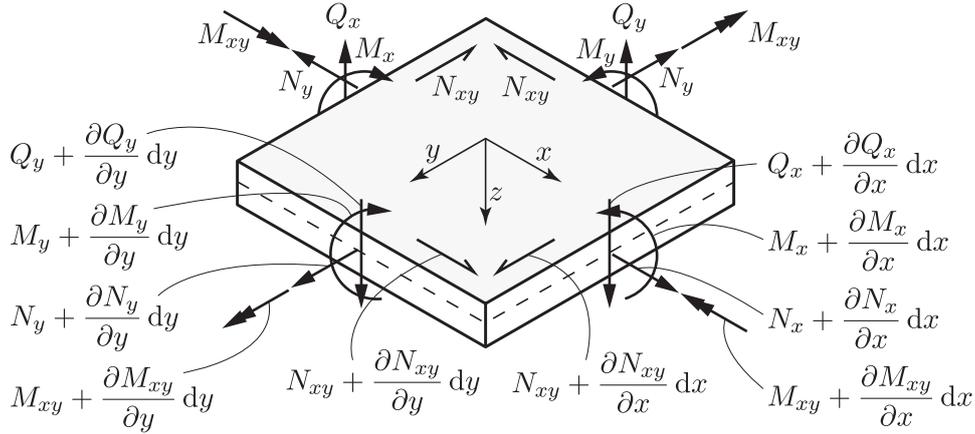


Figura 2.3: Equilibrio sobre un elemento diferencial de placa  $dx \times dy$ . Criterio de signos de fuerzas y momentos y sistema de referencia.

Mediante un equilibrio de momentos y fuerzas en  $x$ ,  $y$  se obtiene la ecuación de equilibrio de la Ec. (2.28). Se omite el desarrollo, para más detalles sobre pasos intermedios consultar la referencia [3].

$$-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = p_z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.28)$$

Sustituyendo las curvaturas Ecs. (2.3) en las constitutivas Ecs. (2.19) se obtienen las tensiones en función de derivadas de la deformada  $w$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -E(\alpha w_{,xx} + \beta w_{,yy}) z \\ \sigma_y &= -E(\beta w_{,xx} + \gamma w_{,yy}) z \\ \tau_{xy} &= -E \delta w_{,xy} z \end{aligned} \quad (2.29)$$

y planteando la equivalencia entre tensión y momento para cualquier borde:

$$\begin{aligned}
 M_x &:= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \, dz = -\frac{E t^3}{12} (\alpha w_{,xx} + \beta w_{,yy}) \\
 M_y &:= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \, dz = -\frac{E t^3}{12} (\beta w_{,xx} + \gamma w_{,yy}) \\
 M_{xy} &:= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \, dz = -\frac{E t^3}{12} \delta w_{,xy}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Introduciendo la expresión de los momentos de la Ec. (2.30) en la ecuación de equilibrio Ec. (2.28) y sin considerar carga lateral  $p_z = 0$  (aunque si tenga influencia en post-pandeo):

$$\frac{E t^3}{12} \left[ \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \gamma \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(\beta + 2\gamma) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.31}$$

Introduciendo la función de Airy Ec. (2.11) se obtiene la primera ecuación de Von Karman ampliada al caso elasto-plástico:

$$D (1 - \nu^2) \left[ \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \gamma \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(\beta + 2\gamma) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = t \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \tag{2.32}$$

Nótese que en la Ec. (2.32) las tensiones no sólo aparecen en  $\Phi$ , sino también en los coeficientes  $\alpha, \gamma, \beta, \delta$ . La segunda ecuación de Von Karman parte de la ecuación de compatibilidad de Saint-Venant; se obtiene derivando  $\varepsilon_x$  dos veces con respecto a  $y$ , sumando la segunda derivada de  $\varepsilon_y$  con respecto a  $x$  y restando la derivada cruzada de  $\gamma_{xy}$  con respecto a  $x, y$  (todas ellas en las Ecs. (2.10)):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.33}$$

Las deformaciones  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  se despejan de las constitutivas Ecs. (2.19):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E(\beta^2 - \alpha\gamma)} (\beta \sigma_y - \gamma \sigma_x) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E(\beta^2 - \alpha\gamma)} (\beta \sigma_x - \alpha \sigma_y) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{E\delta} \tau_{xy} \tag{2.34}$$


---

y sustituyendo las Ecs. (2.34) en la ecuación de compatibilidad de Saint-Venant Ec. (2.33):

$$\frac{1}{\beta^2 - \alpha\gamma} \left( \beta \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.35)$$

Por último, se simplifica la Ec. (2.35) e introduciendo la función Airy Ec. (2.11) se obtiene la segunda ecuación de Von Karman para el caso elasto-plástico:

$$- \left( \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \left( \frac{\gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \left( \frac{2\beta}{\beta^2 - \alpha\gamma} + \frac{1}{\delta} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.36)$$

De nuevo, en la Ec. (2.36) las tensiones no sólo aparecen en la función de Airy  $\Phi$ , sino también en los coeficientes  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ .

## 2.4. Paneles imperfectos con comportamiento elasto-plástico.

Una placa delgada pandea a baja carga  $N_x$  debido a su reducido espesor: en la práctica se refuerzan con otros elementos estructurales como largueros, larguerillos, costillas o cuernas. Se presenta en esta sección la teoría de pandeo y post-pandeo de un panel reforzado por larguerillos en régimen elasto-plástico y se considera la posible influencia de imperfecciones. En la Figura 2.4 se presenta el esquema del panel, a partir del que se desarrolla la teoría.

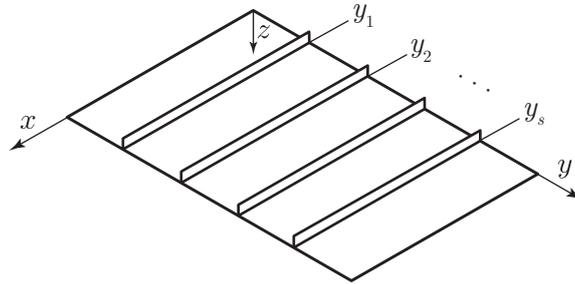


Figura 2.4: Sistema de referencia de una placa reforzada por larguerillos.

Nótese que la dirección de los larguerillos es  $x$ . Se va a emplear la formulación energética ya que la formulación en ecuaciones diferenciales resulta muy complicada al añadir la contribución de los larguerillos. Las ecuaciones de Von Karman se utilizarán exclusivamente para obtener la función de Airy de la placa.

### 2.4.1. Inicio de pandeo

El inicio de pandeo se considera elástico ya que en placas delgadas la plasticidad se desarrolla durante el post-pandeo, hipótesis que se demostrará en la Sección 4.1. Además, se resuelve una placa perfecta debido a que en las imperfectas no hay diferencia apreciable entre inicio de pandeo y post-pandeo.

La energía total del panel  $\Pi$  se obtiene considerando las contribuciones a la energía interna  $U_p$  y externa  $V_p$  de la placa y  $U_s$ ,  $V_s$  de los larguerillos en la Ec. (2.7):

$$\Pi = U - V = U_p - V_p + U_s - V_s \quad (2.37)$$

Los términos  $U_p$ ,  $V_p$  son los definidas de las Ecs. (2.8), (2.9) respectivamente. La energía interna del larguerillo viene dada por las contribuciones de flexión  $U_{bs}$ , cortante  $U_Q$ , torsión de Saint-Venant  $U_J$  y torsión alabeada  $U_\Gamma$ :

$$U_s = U_{bs} + U_Q + U_J + U_\Gamma \quad (2.38)$$

Se desprecia la contribución de cortante al considerar vigas de alta esbeltez. La expresión de cada una de las energías es:

$$\begin{aligned} U_{bs} &= \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M_y^2(x)}{EI_{ys}} dx \right]_{y=y_s} = \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a EI_{ys} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]_{y=y_s} \\ U_J &= \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a \frac{T_J^2(x)}{GJ_s} dx \right]_{y=y_s} = \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a GJ_s \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx \right]_{y=y_s} \\ U_\Gamma &= \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M_\Gamma^2(x)}{E\sigma\Gamma_s} dx \right]_{y=y_s} = \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a E\Gamma_s \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)^2 dx \right]_{y=y_s} \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde  $s$  es el contador de los larguerillos (Figura 2.4) y  $S$  su número total. Se ha omitido la deducción de las Ecs. (2.39), para detalles consultar [21].

Por otro lado, la energía del larguero  $V_s$  debida a una fuerza externa  $A_s N_x$  es:

$$V_s = \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a A_s N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right]_{y=y_s} \quad (2.40)$$

$A_s$  es el área de la sección  $x$ - $y$ . Las cargas críticas se obtienen sustituyendo en la Ec. (2.37) las Ecs. (2.39), (2.40), (2.8), (2.9) y aplicando el PVE de la Ec. (2.7).

### 2.4.2. Post-pandeo

La formulación en ecuaciones diferenciales se vuelve demasiado complicada al introducir la posibilidad de elementos rigidizadores. Por ese motivo, se va a trabajar el post-pandeo mediante el planteamiento energético. Se considera la imperfección inicial de la Ec. (2.14) y un material con comportamiento elasto-plástico. En consecuencia, tanto las ecuaciones constitutivas en las Ecs. (2.19) como las cinemáticas en las Ecs. (2.16) se modifican con respecto a las del caso elástico y perfecto.

En primer lugar, se obtiene la energía interna de flexión de la placa  $U_{bp}$  aplicando la definición del invariante  $J_2$  de la Ec. (2.26) y sustituyendo las cinemáticas, las constitutivas y la deformada  $\tilde{w}$  de la Ec. (2.15):

$$U_{bp} = \frac{1}{2} D (1 - \nu^2) \int_0^a \int_0^b \left[ \alpha \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. 2\beta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right) + 4\delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.41)$$

A  $U_{bp}$  se le añade la energía interna debida a la deformación longitudinal del plano medio de la placa  $U_{lp}$ , dado que no se puede asumir que este permanece inextensible. Sustituyendo las cinemáticas Ecs. (2.16) y la función de Airy (2.11) se obtiene la Ec. (2.42):

$$U_{lp} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = \\ \frac{t}{2E} \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{1}{\alpha \gamma - \beta^2} \left[ \alpha \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2\beta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.42)$$

Las energías de las fuerzas externas  $V_p$  no se ven alteradas por la plasticidad ya que en su desarrollo no aparecen las ecuaciones constitutivas, por lo que sólo hay que introducir la imperfección de la Ec. (2.15):

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.43)$$

Además, no se considera la posibilidad de plasticidad en las vigas; entonces  $U_{bs}$ ,  $U_J$ ,  $U_\Gamma$ ,  $V_s$  quedan:

$$\begin{aligned} U_{bs} &= \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a EI_{ys} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]_{y=y_s} \\ U_J &= \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a GJ_s \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 dx \right]_{y=y_s} \\ U_\Gamma &= \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a E\Gamma_s \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial y \partial x^2} \right)^2 dx \right]_{y=y_s} \\ V_s &= \sum_{s=1}^S \left[ \frac{1}{2} \int_0^a A_s N_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 dx \right]_{y=y_s} \end{aligned} \quad (2.44)$$

De nuevo, el problema se resolverá aplicando el PVE de la Ec. (2.7) a la energía  $\Pi$  de la Ec. (2.45)

$$\Pi = U_{bp} + U_{lp} - V_p + U_{bs} + U_J + U_\Gamma - V_s \quad (2.45)$$

En la Ec. (2.42) aparece la función de Airy: para obtenerla es necesaria la segunda ecuación de Von Karman para el caso elasto-plástico e imperfecto. Mediante un procedimiento idéntico al de la Subsección 2.3.4 se obtiene:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \left( \frac{\gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \left( \frac{2\beta}{\beta^2 - \alpha\gamma} + \frac{1}{\delta} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} =$$

$$E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \quad (2.46)$$

## 2.5. Método de los Elementos Finitos

El método de los Elementos Finitos MEF (en inglés *Finite Element Analysis, FEA*) tiene su origen a mitad del siglo XX y se ha ido perfeccionando hasta la actualidad, cuando constituye una herramienta muy potente para la obtención de soluciones precisas a un coste medio. Para resolver un caso, el MEF divide el dominio en pequeñas subpartes o celdas llamadas elementos finitos. En cada elemento finito se aplican las ecuaciones discretizadas y se obtiene una solución aproximada numérica.

El Método de los Elementos Finitos presenta numerosas ventajas, entre las que destacan:

- No realiza ninguna simplificación sobre las ecuaciones, únicamente se discretizan. Ofrece resultados más precisos que los métodos analíticos.
- Permite resolver prácticamente cualquier problema, hasta aquellos de los que no es posible obtener una solución analítica.
- Requieren relativamente poca inversión en comparación con un ensayo y proporcionan rápidos cálculos para la mayoría de aplicaciones.

Sin embargo, tiene una serie de desventajas que si no se consideran pueden suponer un problema:

- Problemas complejos implican costes computacionales muy altos. Se requieren ordenadores muy potentes para ciertas operaciones.
- En ocasiones es complicado un reflejo de la realidad. Requieren un alto conocimiento del usuario para conseguir un modelo equivalente al real.
- Los resultados suelen ser llamativos y el usuario tiende a creerse todo lo que software de MEF calcula. Es necesario aplicar un criterio físico y contrastar con experimentos reales.

En el presente trabajo se hará uso del software *Abaqus*<sup>®</sup> para resolver los problemas de pandeo y post-pandeo. Así, se encontrará una solución alternativa a la analítica, que permitirá contrastar ambas soluciones y extraer conclusiones sobre los distintos métodos. Para detalles de como funciona el software, acudir al Manual Teórico [10].

### 2.5.1. Inicio de pandeo

Para todos los problemas será necesario calcular en primer lugar la solución de inicio de pandeo. En general se sigue la siguiente secuencia:

1. Se introduce la geometría, se selecciona la opción *shell* y forma *planar*, que define una placa plana de la cual únicamente se resuelve la línea media.
2. Se define el tipo de material y su comportamiento. En caso de utilizar un material con comportamiento elástico se utiliza la opción *elastic* y se asigna el Módulo de Young y el coeficiente de Poisson. En el caso de material elasto-plástico es necesario introducir la curva tensión-deformación del material. Para ello se utiliza la herramienta *calibrations* que crea un material a partir de una matriz que contiene los datos de tensión y de deformación para cada estado.
3. Se asigna un espesor a la placa mediante la opción *section* que permite además establecer el material como homogéneo.
4. Una vez definidas todas las características físicas de la placa se procede al mallado. Se utiliza la opción *mesh* y se emplean elementos tipo cuadrados de orden lineal.
5. En la opción *load* se establecen tanto las CC como la carga, que son particulares de cada problema. Las cargas serán tipo *shell edge load* y se definirán como *normal* en el caso de compresiones y como *shear* en el caso de cortantes. Las CC para los casos que aparecerán en este trabajo se recogen en la Tabla 2.2. Este paso será diferente para cada caso.
6. Por último, se crea un *step* de perturbación lineal *linear perturbation* y se establece que el problema es de pandeo *Buckle*. Se emplea el *subspace eigensolver* que obtiene una carga crítica de pandeo *eigenvalue* para cada modo de pandeo *eigenvector*.

CC	bordes $x = cte$	bordes $y = cte$
S	U3, UR3	U3, UR3
C	U3, UR2, UR3	U3, UR1, UR3
F	-	-

Tabla 2.2: Desplazamientos restringidos en *Abaqus*<sup>®</sup> para cada CC. U1, U2, U3 se refieren a los desplazamientos y UR1, UR2, UR3 a los giros, ambos en  $x, y, z$ .

### 2.5.2. Post-pandeo

Para la resolución del post-pandeo en *Abaqus*<sup>®</sup> los pasos 1-5 de la Sección 2.5.1 siguen siendo los mismos. La diferencia radica en *step*, ya que ahora debe utilizarse un algoritmo de resolución

no lineal. Se selecciona un *step* tipo *Static Riks*.

Otra modificación es el valor de la *shell edge load* que ahora deberá ser la carga crítica de inicio de pandeo previamente calculada. Además, para resolver el post-pandeo, el algoritmo requiere de un patrón de imperfecciones iniciales sobre los desplazamientos normales al plano medio de la placa. Se introducirá por tanto un patrón  $\mathbf{w}^*$ , que se decide esté basado en los cuatro primeros modos de pandeo y cuyas amplitudes  $A_{0n}$  son porcentaje del espesor [10]:

$$\mathbf{w}^* = A_{01}\mathbf{w}_1 + A_{02}\mathbf{w}_2 + A_{03}\mathbf{w}_3 + A_{04}\mathbf{w}_4 \quad (2.47)$$

Por último, es necesario hacer unas modificaciones dentro de *solver*, referidas al incremento de longitud de arco (del algoritmo no lineal *arclength*), cuyo valor se recoge en la Tabla 2.3;

Inicial	Mínimo	Máximo	Long. estimada	Inc. máximos
0,1	$10^{-15}$	1	1	100

Tabla 2.3: Parámetros de longitud de arco introducidos en *Abaqus*<sup>®</sup>.

## *Pandeo y post-pandeo en régimen elástico.*

### 3.1. Inicio de pandeo

El estudio del fenómeno de pandeo siempre comienza por la resolución del inicio de pandeo; el objetivo es encontrar la carga crítica  $N_{cr}$  a la cual comienza la inestabilidad estructural. Como es habitual, la  $N_{cr}$  se adimensionaliza en el coeficiente de pandeo  $K$ , independiente del material:

$$K = N_{cr} \frac{b^2}{\pi^2 D} \quad (3.1)$$

El problema de inicio de pandeo fue muy estudiado durante finales del siglo XIX y de hecho, la teoría de pequeñas deformaciones de la Sección 2.2.4 ofrece resultados bastante fieles a la realidad. El método más extendido, dada su sencillez, es el de Ritz cuyas funciones de prueba se establecen variables en ambas coordenadas  $x$ ,  $y$ :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_m X_m(x) Y_n(y) \quad (3.2)$$

en la que  $X_m$ ,  $Y_n$  son funciones independientes que imponen la forma de la deformada en cada dirección y que deben satisfacer únicamente las CC geométricas. A diferencia del PVE, que establecía que energía total del sistema debía ser mínima, Ritz afirma que –cada uno de– los términos de la Ec. (3.2) deben ser mínimos:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_{mn}} = 0 \quad \forall m, n \quad (3.3)$$

lo que permite obtener un sistema de  $m \times n$  ecuaciones lineales, en el que las únicas variables desconocidas son los coeficientes  $w_{mn}$ . El resultado es un problema de autovalores y autovectores, en el cual los autovalores son las cargas críticas  $N_{cr}$  y los autovectores los modos de pandeo [3].

Para placas en las que existe un eje de simetría, el método de Lévy (1900) destaca por su gran precisión. En él,  $w$  se expresa como una serie única de Fourier, en la que  $X_m$  es conocida e  $Y$  se deja como incógnita:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} X_m(x) Y(y) \quad (3.4)$$

Si se sustituye la Ec. (3.4) en la Ec. (2.6) se obtiene una EDO de cuarto orden homogénea. Las constantes de integración se calculan a partir de las CC geométricas y de fuerza, luego la solución automáticamente cumple ambas; para detalles consultar [3].

La principal ventaja del método de Lévy es que ofrece soluciones precisas, pero como se ha comentado está limitado solo a placas con un eje de simetría y además la resolución de las cargas críticas de pandeo es laborioso y complicado de automatizar.

### 3.1.1. Placa articulada bajo compresión uniforme $N_x$

Se comienza el estudio con el caso más sencillo, una placa articulada bajo compresión uniforme en dirección  $x$ . La Figura 3.1 esquematiza el caso de estudio:

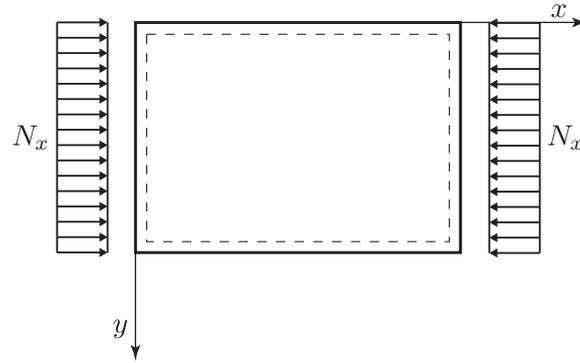


Figura 3.1: Placa articulada en todos sus bordes SSSS bajo carga uniforme  $N_x$ .

La función de prueba para una placa articulada viene dada en la Ec. (3.5), que cumple la CC de  $w$  nulo en todos los bordes:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^1 w_{mn} S(mx) S(ny) \quad (3.5)$$

Nótese que se eligen los seis primeros términos en  $m$  y sólo 1 en  $n$ , ya que para relaciones de lados  $r = a/b < 5$  las  $N_{cr}$  más pequeñas vienen dadas por los términos en  $x$ .

A continuación se calcula la energía total  $\Pi$  mediante la diferencia de la interna de flexión  $U$  de la Ec. (2.8), que tiene una expresión cerrada [3], y la externa de las fuerzas en el plano  $V$  de la Ec. (2.9):

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\pi^4 D}{8a^3 b^3} \left\{ w_{21}^2 \left[ (a^2 + 4b^2)^2 - 4a^2 b^2 K \right] + w_{31}^2 \left[ (a^2 + 9b^2)^2 - 9a^2 b^2 K \right] + \right. \\ w_{41}^2 \left[ (a^2 + 16b^2)^2 - 16a^2 b^2 K \right] + w_{51}^2 \left[ (a^2 + 25b^2)^2 - 25a^2 b^2 K \right] + \\ \left. w_{61}^2 \left[ (a^2 + 36b^2)^2 - 36a^2 b^2 K \right] + w_{11}^2 \left[ a^4 - a^2 b^2 (K - 2) + b^4 \right] \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

Se aplica el PVE a la Ec. (3.6) se obtiene un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo:

$$\frac{\pi^2}{4r^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ w_{31} \\ w_{41} \\ w_{51} \\ w_{61} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

donde,

$$\lambda_l = -l^2 (K - 2) r^2 + r^4 + l^4 \quad (3.8)$$

Como se puede observar se trata de resolver un problema de autovalores y autovectores, con la ventaja en este caso de que la matriz es diagonal. Las cargas críticas se obtienen igualando el determinante de la matriz a cero, lo que coincide con igualar a cero cada uno de los elementos de la diagonal  $\lambda_l$ . Así se obtienen las expresiones de la carga crítica adimensional  $K$  en función de  $r$ :

$$K_l = \frac{r^4 + 2l^2 r^2 + l^4}{l^2 r^2} \quad (3.9)$$

Para cada  $r$ , la carga crítica es la menor de las  $K_l$  anteriores, no necesariamente la de menor  $l$ . A medida que se aumenta el número de términos en la Ec. (3.5) aumenta el número de autovalores obtenidos. La representación de la evolución de  $K$  en función de  $r$  se muestra en la Figura 3.3.

### 3.1.2. Influencia de otras condiciones de contorno

A continuación se estudia la influencia que tienen otras CC sobre la carga crítica. Además, se van a comparar las soluciones que ofrecen tres métodos: Ritz, Lévy y MEF. El primero es el explicado en la Sección 3.1.1 para una placa articulada en todos sus bordes SSSS. En cuanto al segundo, se tomarán los resultados de la bibliografía [4]. Para el último método se ha utilizado *Abaqus*<sup>®</sup> tal como fue explicado en la Sección 2.5.1.

Se estudian cuatro placas con diferentes CC:

- Caso A (SSSS): todos los lados articulados, resuelto en la Sección 3.1.1.
- Caso B (CSCS): lados cargados empotrados y lados descargados articulados; Figura 3.2

izquierda. La función de prueba para el método de Ritz es:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^1 w_{mn} [1 - C(2mx)] S(ny) \quad (3.10)$$

- Caso C (SCSC): lados cargados articulados y lados descargados empotrados; Figura 3.2 central.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^1 w_{mn} S(mx) [1 - C(2ny)] \quad (3.11)$$

- Caso D (CCCC): todos los lados empotrados; Figura 3.2 derecha.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^1 w_{mn} [1 - C(2mx)] [1 - C(2ny)] \quad (3.12)$$

La Figura 3.2 muestra el esquema de los tres casos expuestos: CSCS, SCSC y CCC, respectivamente. Nótese que el empotramiento no sigue la simbología tradicional sino que se ha representado por una línea continua para compactar la figura.

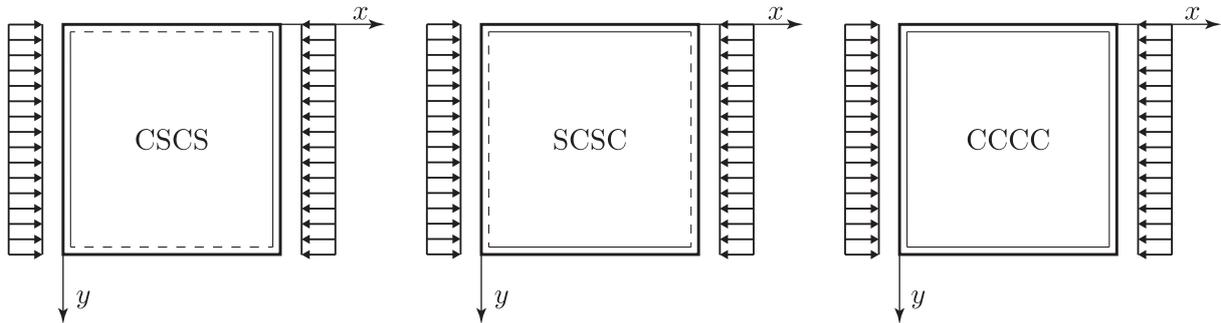


Figura 3.2: Placas a compresión con varias condiciones de contorno. Línea continua: empotramiento, línea discontinua: articulación.

La Figura 3.3 presenta la carga adimensional  $K$  en función de  $r$  para tres métodos: Ritz, Lévy y MEF.

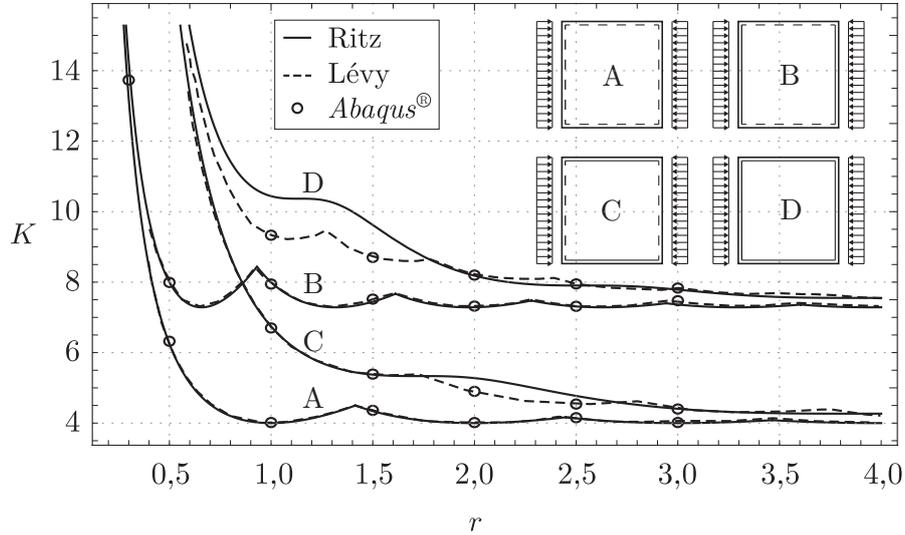


Figura 3.3: Carga crítica de pandeo adimensional  $K$  para placa rectangular sometida a compresión vs. relación de aspecto  $r$  para diferentes métodos: Ritz, Lévy y MEF. Cuatro condiciones de contorno: SSSS, SCSC, CSCS y CCCC.

Para todos los casos el método de Lévy y MEF ofrecen pocas discrepancias; el primero utiliza una función  $Y(y)$  que satisface la Ec. (2.6), y por tanto cumple tanto las CC de fuerza como las geométricas. Sin embargo, el método de Ritz presenta algunas diferencias para los casos C, D, en los cuales el borde cargado está empotrado; la función coseno que se impone en  $y$  no ofrece buenos resultados en el intervalo  $1 \leq r \leq 2$ . Para los casos con borde cargado articulado A, B la solución de Ritz coincide con el resto ya que la deformada en dirección  $y$  está bien representada con una función seno.

Por tanto, en aquellos casos donde el borde cargado está empotrado conviene aplicar Lévy si se quieren asegurar soluciones precisas en todo el intervalo. Por el contrario, en aquellos casos donde el borde cargado está articulado es preferible aplicar Ritz dado a su gran sencillez y reducido coste computacional.

Además, cuanto más restringida está la placa, más alta es su  $K$  para un  $r$  dado. Así, la carga crítica más alta la tiene la placa CCCC de D, seguida por la placa CSCS de B, con los bordes cargados empotrados.

Se representan en las Figuras 3.4 y 3.5 los seis primeros modos de pandeo obtenidos mediante Ritz con *Mathematica*® para los casos A, D; se prescinde de los B, C y de los métodos de Lévy y MEF ya que no ofrecen información adicional. El número del modo coincide con el número de semiondas que presenta la deformada.

Comparando los modos de la placa SSSS de la Figura 3.4 con los de placa CCCC de la Figura 3.5, se observa cómo aquellos lados empotrados presentan menos desplazamiento cerca

del borde: el empotramiento restringe más el movimiento en ese lado y en consecuencia las semiondas aparecen más juntas.

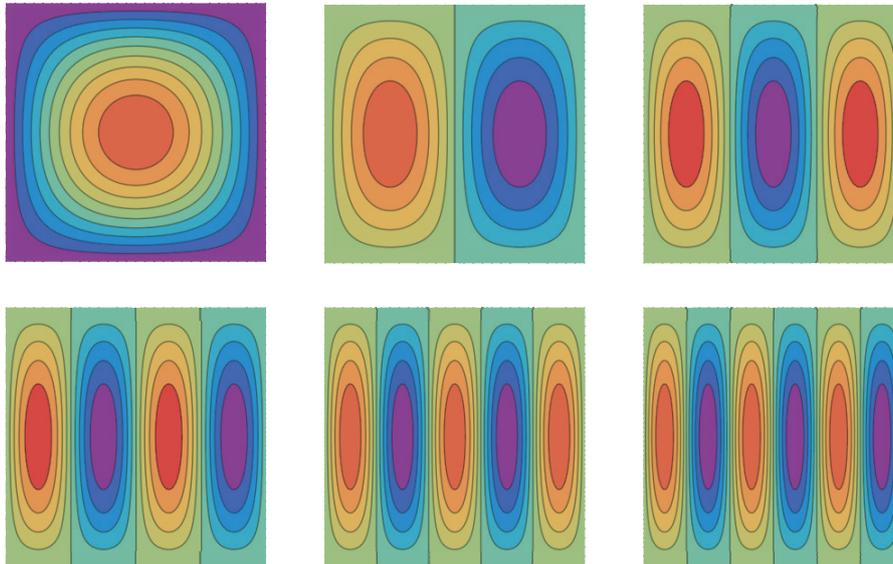


Figura 3.4: Seis primeros modos de pandeo para placa SSSS.

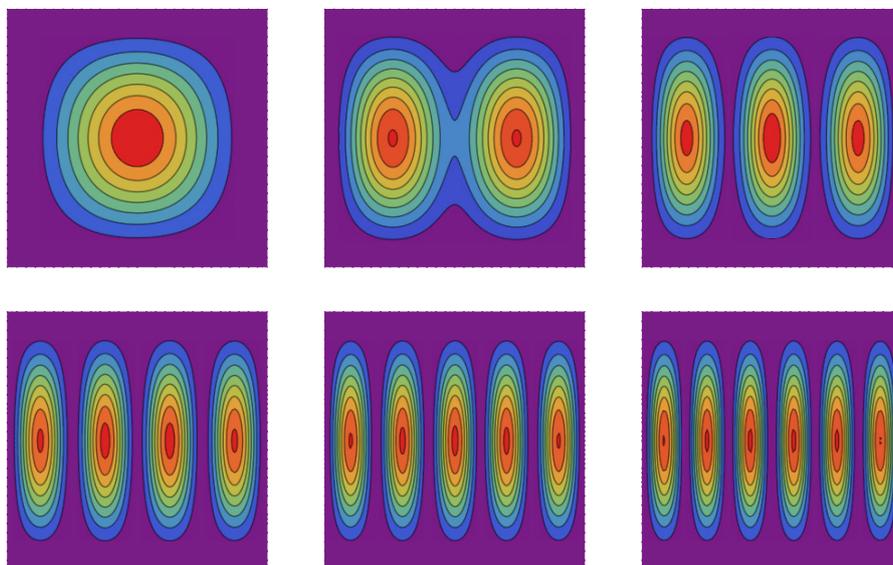


Figura 3.5: Seis primeros modos de pandeo para placa CCCC.

### 3.2. Solución analítica de post-pandeo

En esta sección se resuelve el problema de post-pandeo de una placa articulada e imperfecta. Cuando se estudia el problema de post-pandeo no es suficiente con considerar que todos los

bordes estén articulados como en la Figura 3.1, sino que hay que especificar como se comportan los lados no cargados. Habitualmente, se diferencian tres casos: lados no cargados inmóviles, cargados rectos pero capaces de moverse y cargados no restringidos (veáse [14]). En esta sección se va a resolver el primer caso esquematizado en la Figura 3.6:

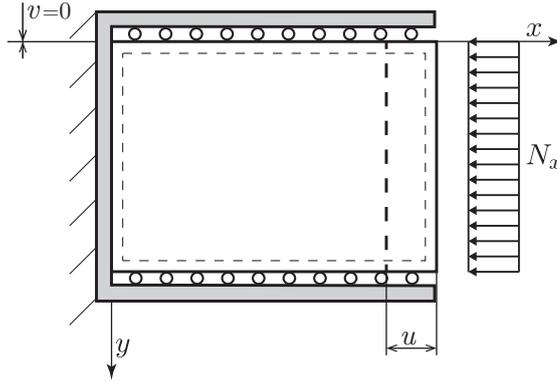


Figura 3.6: Placa SSSS a compresión con bordes descargados inmóviles.

Como consecuencia de la inmovilización de los bordes laterales aparece una reacción  $N_y$ , convirtiendo un problema de compresión uniaxial  $x$  en uno biaxial  $x, y$ . El primer paso es obtener la carga crítica de inicio de pandeo para una placa articulada bajo compresión  $N_x, N_y$ . Siguiendo el mismo procedimiento de la Sección 3.1, se obtiene para una placa perfecta [14]:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{\left(\frac{1}{r^2} + 1\right)^2}{\nu + \frac{1}{r^2}} \quad K = \frac{b^2}{\pi^2 D} N_{cr} \quad (3.13)$$

Las soluciones de la Ec. (3.13) son exclusivas para el primer modo de pandeo. La transición al segundo modo es en  $r = 2,08$ , lo que hay que considerar para interpretar soluciones, ya que por encima de ese valor la solución no será válida. Las CC en esta placa serán:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(0, y) = \tilde{v}(0, y) = 0 & \quad \tilde{u}(0, y) = 0 \\ \tilde{w}(a, y) = \tilde{v}(a, y) = 0 & \quad \tilde{u}(a, y) = cte \\ \tilde{w}(x, 0) = \tilde{v}(x, 0) = 0 & \quad \tilde{u}(x, 0) \neq cte \\ \tilde{w}(x, b) = \tilde{v}(x, b) = 0 & \quad \tilde{u}(x, b) \neq cte \end{aligned} \quad (3.14)$$

El símbolo tilde ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) indica que se considera la posible influencia de una imperfección. Dado que se estudia una placa articulada, para reproducir el post-pandeo se utilizan funciones seno-seno de la Ec. (3.5) para la deformación total  $\tilde{w}$  y la imperfección  $w_0$ . Esta imperfección se modela con la misma función de prueba que la deformación como se explicó en la Sección 2.2.5. Para obtener una solución analítica exacta se debería reproducir la solución con los  $\infty$  términos de la serie lo cual es imposible de calcular. Para simplificar el cálculo, las series de Fourier para  $\tilde{w}(x, y)$  y  $w_0(x, y)$  se van a aproximar a sólo primer término:

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{mn} S(mx) S(ny) \approx \tilde{w}_{11} S(x) S(y) \quad (3.15)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} S(mx) S(ny) \approx w_{011} S(x) S(y)$$

Introduciendo las funciones de prueba de la Ec. (3.15) en la segunda ecuación de Von Karman modificada Ec. (2.18):

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) &= \left[ \frac{\pi^2}{ab} \tilde{w}_{11} C(x) C(y) \right]^2 - \left[ \frac{\pi^2}{ab} w_{011} C(x) C(y) \right]^2 \\ &- \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 (\tilde{w}_{11} - w_{011}) S(x) S(y) \right] \left[ \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 (\tilde{w}_{11} - w_{011}) S(x) S(y) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mediante una serie de simplificaciones trigonométricas básicas se obtiene:

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) = \frac{\pi^4}{2a^2 b^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) [C(2x) + C(2y)] \quad (3.17)$$

La Ec (3.16) contiene dos incógnitas: la función  $\Phi$  y el coeficiente  $\tilde{w}_{11}$ , ya que  $w_{011}$  es un dato del estado inicial de la placa. Se resolverá  $\Phi$  descomponiéndola en la suma de una parte homogénea y una particular:  $\Phi = \Phi_h + \Phi_p$  [13]. La solución homogénea no tiene en cuenta las CC de la placa y por tanto es válida para cualquier placa bajo compresión biaxial; para calcularla se resuelven las Ecs. (2.11):

$$\frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial y^2} = \sigma_x = -\frac{N_x}{t} \qquad \frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial x^2} = \sigma_y = -\frac{N_y}{t} \qquad \frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial x \partial y} = \tau_{xy} = -\frac{N_{xy}}{t} = 0 \quad (3.18)$$

en donde a diferencia de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  las solicitaciones  $N_x$ ,  $N_y$  se definen positivas a compresión, de ahí los signos negativos; se asumen además constantes, por lo que es posible satisfacer las tres Ecs. (3.18) si la parte homogénea es:

$$\Phi_h(x, y) = -\frac{N_x}{2t}y^2 - \frac{N_y}{2t}x^2 \quad (3.19)$$

Sin embargo, la solución particular es exclusiva para el caso de estudio y debe satisfacer la Ec. (3.17) completa; además,  $\Phi_p$  siempre ha de ser de la misma forma que el término inhomogéneo, es decir, debe tener exactamente la misma forma que la parte derecha de la Ec (3.17) debida a las CC:

$$\Phi_p(x, y) = C_1 C(2x) + C_2 C(2y) \quad (3.20)$$

Para hallar el valor de las constantes se sustituye la Ec. (3.20) en la (3.17):

$$\frac{16\pi^4}{E a^4} C_1 C(2x) + \frac{16\pi^4}{E b^4} C_2 C(2y) = \frac{\pi^4}{2 a^2 b^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) [C(2x) + C(2y)] \quad (3.21)$$

Mediante identificación de términos se obtienen dos ecuaciones desacopladas; entonces, es posible despejar las incógnitas  $C_i$ :

$$\frac{16}{E a^4} C_1 - \frac{1}{2 a^2 b^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{E a^2}{32 b^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) \quad (3.22)$$

$$\frac{16}{E b^4} C_2 - \frac{1}{2 a^2 b^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{E b^2}{32 a^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2)$$

Sumando la solución homogénea y la particular se obtiene la función de Airy total:

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_p = -\frac{N_x}{2t}y^2 - \frac{N_y}{2t}x^2 - \frac{E}{32} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) \left[ r^2 C(2x) + \frac{1}{r^2} C(2y) \right] \quad (3.23)$$

Para comprobar la equivalencia entre solicitaciones y la carga externa en los bordes de la

placa, se retoma la definición  $\Phi$  de la Ec. (2.11):

$$\begin{aligned} \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(0, y)}{\partial y^2} dy &= \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(a, y)}{\partial y^2} dy = -N_x \\ \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} dx &= \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, b)}{\partial x^2} dx = -N_y \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(0, y)}{\partial x \partial y} dy = \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(a, y)}{\partial x \partial y} dy = \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x \partial y} dx = \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, b)}{\partial x \partial y} dx = 0$$

La solución  $\Phi$  se introduce en la primera ecuación de Von Karman modificada Ec. (2.17), resultando en la Ec. (3.25) que a partir de ahora, con todos los términos en la izquierda de la igualdad, se denota por  $f(\tilde{w}_{11})$ :

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\pi^4}{a^4} + \frac{2\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \right) \tilde{w}_{11} S(x) S(y) = \\ &\frac{h}{D} \left[ -\frac{N_x}{t} + \frac{E \pi^2}{8 a^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) C(2y) \right] \left[ -\frac{\pi^2}{a^2} (w_{011} + \tilde{w}_{11}) S(x) S(y) \right] + \\ &\frac{h}{D} \left[ -\frac{N_y}{t} + \frac{E \pi^2}{8 b^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) C(2y) \right] \left[ -\frac{\pi^2}{b^2} (w_{011} + \tilde{w}_{11}) S(x) S(y) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sería posible despejar la incógnita  $\tilde{w}_{11}$  directamente de Ec. (3.25) con un robot matemático. Sin embargo, para problemas con funciones de prueba conocidas resulta muy útil utilizar el método de Galerkin (1915), cuya explicación se encuentra detallada en [3] y consiste en:

$$\int_0^a \int_0^b f(\tilde{w}_{11}) S(x) S(y) dx dy = 0 \quad (3.26)$$

Integrando y simplificando la ecuación anterior se obtiene:

$$K \left( \mathcal{P}_x + r^2 \mathcal{P}_y \right) = \frac{4h^2 (1+r^2)^2}{r^2} \frac{\tilde{w}_{11}}{w_{011} + \tilde{w}_{11}} - \frac{3(1-\nu^2)(r^2+1)}{4t^2 r^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) \quad (3.27)$$

donde se han definido los ratios de carga de post-pandeo:

$$\mathcal{P}_x = \frac{N_x}{N_{cr}} \quad \mathcal{P}_y = \frac{N_y}{N_{cr}} \quad (3.28)$$

La Ec. (3.27) vuelve a requerir de *Mathematica*<sup>®</sup> para despejar  $\tilde{w}_{11}$ ; no se presenta su solución debido al gran número de términos que aparecen.

Una vez obtenidas  $\Phi$ ,  $\tilde{w}_{11}$ , se puede resolver la reacción  $N_y$  aplicando las Ecs. (3.14) segunda y tercera a los bordes  $y = cte$  de la Figura 3.6. Se parte de la cinemática Ec. (2.16) para  $\varepsilon_y$ , se sustituye la constitutiva Ec. (2.4) y se integra  $\forall y$ :

$$\int_0^b \frac{N_y(x, y) - \nu N_x(x, y)}{E t} dy = \int_0^b \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dy + \int_0^b \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right)^2 dy - \int_0^b \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 dy \quad (3.29)$$

Nótese que  $N_y(x, y)$ ,  $N_x(x, y)$  son solicitaciones y no las cargas aplicadas  $N_x$ ,  $N_y$  de los bordes en la Ec. (3.29). Para introducir  $N_x$ ,  $N_y$  se recurre la Ec. (3.23) y a su definición de la Ec. (2.11):

$$\frac{b}{E t} (N_y - \nu N_x) = \tilde{v}(x, b) - \tilde{v}(x, 0) + \frac{\pi^2}{8b} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) \quad (3.30)$$

Por último se introduce el valor de las CC de la Ec. (3.14) y se despeja  $N_y$ , que resulta ser constante:

$$N_y = \nu N_x + \frac{E \pi^2 t}{8b^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) \quad (3.31)$$

La carga de pandeo de la Ec. (3.13) es consistente con el resultado  $N_y$  de la Ec. (3.31), ya que la  $N_{cr}$  se define para el caso perfecto  $w_{011} = 0$  y antes de pandeo  $\tilde{w}_{11} = 0$ .

Será útil disponer de la expresión de  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  en el plano medio de la placa. Se sigue un proceso análogo al de Ec. (3.31): se parte de las cinemáticas Ecs. (2.16) primera y segunda, se sustituye la constitutiva Ec. (2.4) para  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y se integra en el borde correspondiente:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= \tilde{u}(0, y) + \int_0^x \frac{N_x(x, y) - \nu N_y(x, y)}{E t} dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^x \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx \\ \tilde{v}(x, y) &= \tilde{v}(x, 0) + \int_0^y \frac{N_y(x, y) - \nu N_x(x, y)}{E t} dy - \int_0^y \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right)^2 dy + \int_0^y \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 dy \end{aligned} \quad (3.32)$$

De nuevo se sustituyen  $N_x(x, y)$ ,  $N_y(x, y)$  por las correspondientes a la definición de  $\Phi$  de la

---

Ec. (2.11) y el valor particular de dicha función en este problema Ec. (3.23):

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & -\frac{N_x - \nu N_y}{E t} x - \frac{\pi^2 \tilde{w}_{11}}{8 a^2} x - \frac{\pi}{16 a b^2} \left[ a^2 \nu \left( w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2 \right) + b^2 \tilde{w}_{11} \right] S(2x) \\
 & + \frac{\pi^2 w_{011}^2}{8 a^2} x \cos \left( \frac{2\pi y}{b} \right) + \frac{\pi \tilde{w}_{11}^2}{16 a} C(2y) S(2x)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y) = & -\frac{N_y - \nu N_x}{E t} y - \frac{\pi^2 \tilde{w}_{11}}{8 b^2} y - \frac{\pi}{16 a b} \left[ \left( r^2 - \nu^2 \right) \tilde{w}_{11}^2 + \nu w_{011} \right] S(2y) \\
 & + \frac{\pi^2 w_{011}^2}{8 b^2} y \cos \left( \frac{2\pi x}{a} \right) + \frac{\pi \tilde{w}_{11}^2}{16 b} C(2x) S(2y)
 \end{aligned}$$

### 3.3. Solución numérica de post-pandeo

Se muestran en esta sección los resultados al problema de post-pandeo mediante el método analítico desarrollado en la subsección anterior y *Abaqus*<sup>®</sup>. Se ha elegido un aluminio de tipo aeronáutico con comportamiento elástico, cuyas propiedades y dimensiones se recogen en la Tabla 3.1. Además se van a estudiar como influye en los resultados la presencia de imperfecciones.

Mód. Young $E$	Coef. Poisson $\nu$	Rel. aspecto $r$	Long. caract. $b$	Espesor $t$
70 (GPa)	0,3	1	1 (m)	2 (mm)

Tabla 3.1: Datos habituales en aluminios aeronáuticos numéricos para el caso de estudio.

La Figura 3.7 muestra la evolución del factor de carga  $\mathcal{P}_x$  frente a los incrementos  $\Delta \tilde{a}$  del algoritmo *Arc Length* para diferentes valores de  $w_{011}/t$ . Con  $w_{011}/t = 10^{-3}$  se representa el caso perfecto, ya que la imperfección es tan pequeña que puede considerarse inexistente. Hasta la carga  $\mathcal{P}_x \approx 1$  las flechas son pequeñas ya que no se ha alcanzado la  $N_{cr}$ .

Una vez se sobrepasa esa  $\mathcal{P}_x$ , la distribución presenta un patrón oscilatorio: aparece un tramo en el que la curva es ascendente y por tanto la placa se deforma de una manera estable, de acuerdo con el primer modo de la Figura 3.4 superior izquierda. Cuando se alcanza la carga máxima del primer modo  $\mathcal{P}_x \approx 5,25$ , la trayectoria cambia, se vuelve decreciente y comienza la transición al

segundo modo de pandeo. Durante la transición la placa sigue un régimen inestable hasta que alcanza el nuevo patrón de estabilidad del segundo modo de la Figura 3.4 superior central.

La longitud de arco  $\Delta\tilde{a}$  está directamente relacionada con el número de *steps* que realiza el programa *Abaqus*<sup>®</sup> para hallar la solución; a mayor longitud de arco mayor coste computacional, por lo que, de la Figura 3.7 se extrae que a mayor  $w_{011}$  menor es el coste computacional. Esto se debe a que la presencia de imperfecciones reduce la no linealidad (en el primer modo); como consecuencia, no hay que buscar una carga que provoque inestabilidad. Se observa que para  $w_{011}/t = 0,2$  el factor de carga es lineal hasta la transición al segundo modo  $\mathcal{P}_x \approx 5,5$ , en general la carga de transición aumenta con el grado de imperfección.

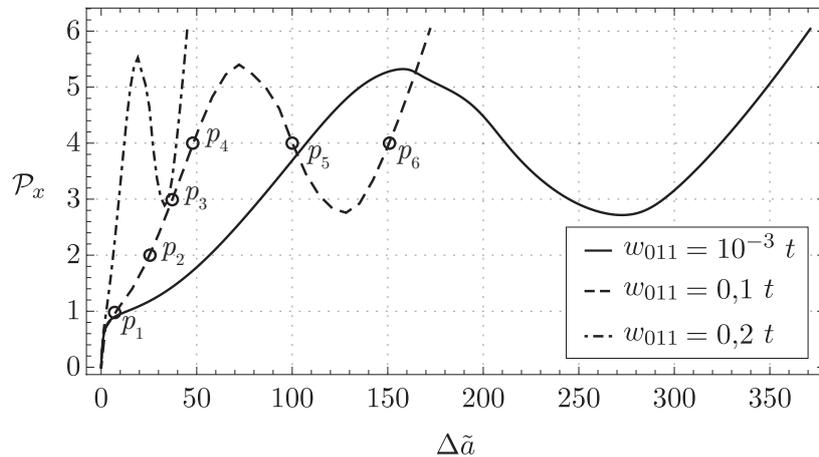


Figura 3.7: Comparación para diferentes imperfecciones  $w_{011}$  del factor de carga  $\mathcal{P}_x$  en función de los incrementos de longitud de arco  $\Delta\tilde{a}$  con *Abaqus*<sup>®</sup>.

### 3.3.1. Deformada y movimientos en el plano

En primer lugar se analiza  $\tilde{w}$  en el plano medio de la placa: la Figura 3.8 representa esta flecha en el centro de la placa frente a  $\mathcal{P}_x$  para distintas imperfecciones  $w_{011}/t$ . Todas las cargas han sido adimensionalizadas con la  $N_{cr}$  del caso perfecto.

Para valores inferiores a  $\mathcal{P}_x < 1$  y  $w_{011}/t = 10^{-3}$  la flecha es nula: la placa permanece en equilibrio hasta que se alcanza la  $N_{cr}$ . Si se introduce una imperfección coincidente con el primer modo de pandeo, la flecha ya no es nula sino que es progresiva hasta  $\mathcal{P}_x = 1$  y  $\mathcal{P}_{cr}$  no está definida. A medida que aumenta  $w_{011}/t$ , este efecto se vuelve más acusado.

En todos los casos los resultados obtenidos mediante Von Karman son bastante precisos – comparados con los de MEF considerado exacto– hasta llegar a  $\mathcal{P}_x \approx 2,8$ . Con este factor de carga empieza a ser importante el segundo modo de pandeo, cuyos términos no se han tenido

en cuenta en la Ec. (3.15).

A medida que se aumenta  $\mathcal{P}_x$  la flecha para el método Von Karman tiende a  $\infty$ : como sólo se ha considerado un término de la serie, en el primer modo la flecha en el centro siempre aumenta. Sin embargo, en el caso real representado por los resultados obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup> la flecha comienza a disminuir a cierto  $\mathcal{P}_x$  hasta llegar a cero; se instaure el segundo modo y los otros subsecuentes, para los que el centro de la placa coincide con un nodo con flecha nula (véase la Figura 3.10). Si se representase un intervalo de  $\mathcal{P}_x$  mayor se observaría como la flecha en el centro de la placa volvería a aumentar, una vez predominase el tercer modo de pandeo.

Para capturar la transición entre modos de pandeo, es necesario resolver el problema con los infinitos modos de pandeo de la placa y ponderarlos en función del factor de carga al que está sometido la placa. A factores de carga bajos predomina el primer modo, seguido del segundo y así sucesivamente. El gran problema es decidir que porcentaje de cada modo se encuentra en la placa a cierto  $\mathcal{P}_x$ , imposible de determinar con el método de Ritz.

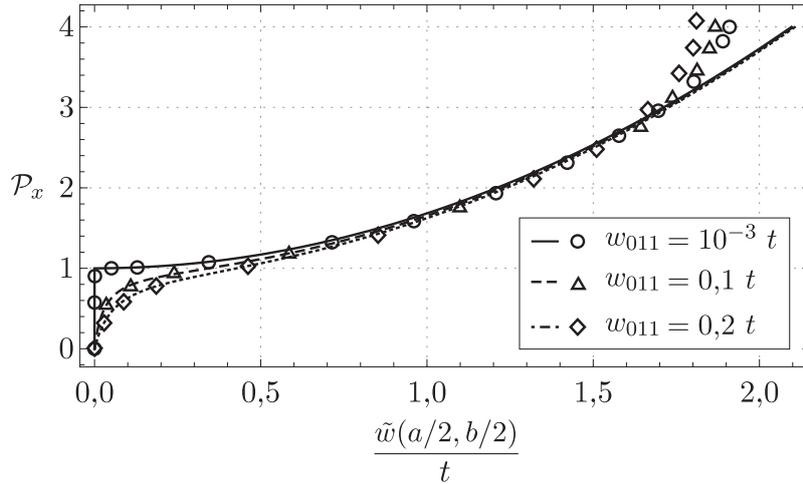


Figura 3.8: Flecha total  $\tilde{w}$  en el centro de la placa vs. factor de carga  $\mathcal{P}_x$  para distintos  $w_{011}/t$ . Los círculos representan los resultados con *Abaqus*<sup>®</sup> y las líneas Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

Las ecuaciones de Von Karman permiten entonces resolver problemas en los que las deformaciones máximas son del orden del espesor de la placa. Por tanto, al introducir imperfecciones muy grandes los resultados mediante este método son muy imprecisos. En la Figura 3.9 se presentan resultados para imperfecciones del orden de la mitad del espesor  $w_{011}/t = 0,5$ , además de para  $w_{011}/t = 10^{-3}$ :

Se puede observar como los resultados pueden considerarse válidos hasta  $\mathcal{P}_x < 2$ . Para valores superiores, las deformaciones son demasiado grandes para que la teoría de Von Karman pueda predecirlas; sólo la imperfección representa un 50 % del espesor y los resultados se parecen poco a los obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup>.

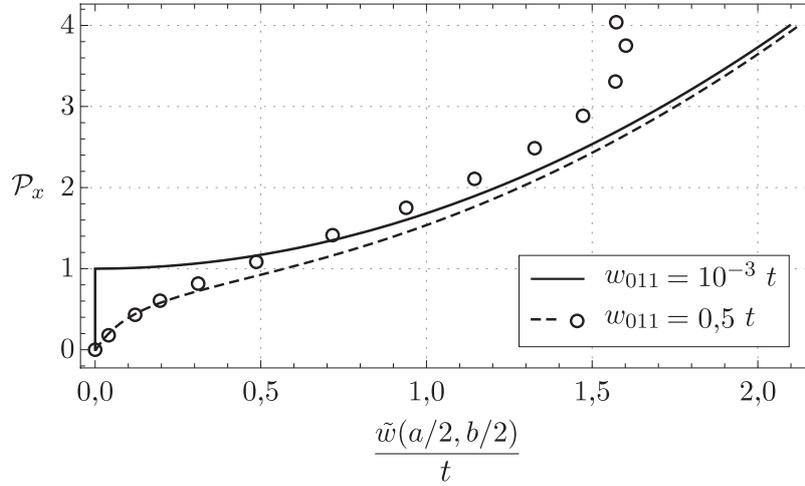


Figura 3.9: Flecha total  $\tilde{w}$  en el centro de la placa vs.  $\mathcal{P}_x$  para  $w_{011}$  del orden de  $t$ . Los marcadores circulares representan los resultados con *Abaqus*<sup>®</sup> y la línea continua Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

La evolución de  $\tilde{w}$  en el plano medio de la placa se muestra en la Figura 3.10. Los resultados se han obtenido para  $w_{011}/t = 0,1$ , aunque no presentan diferencias cualitativas para otras imperfecciones. Se muestran las configuraciones de pandeo para los estados  $p_i$  de la curva de carga representados en la Figura 3.7:

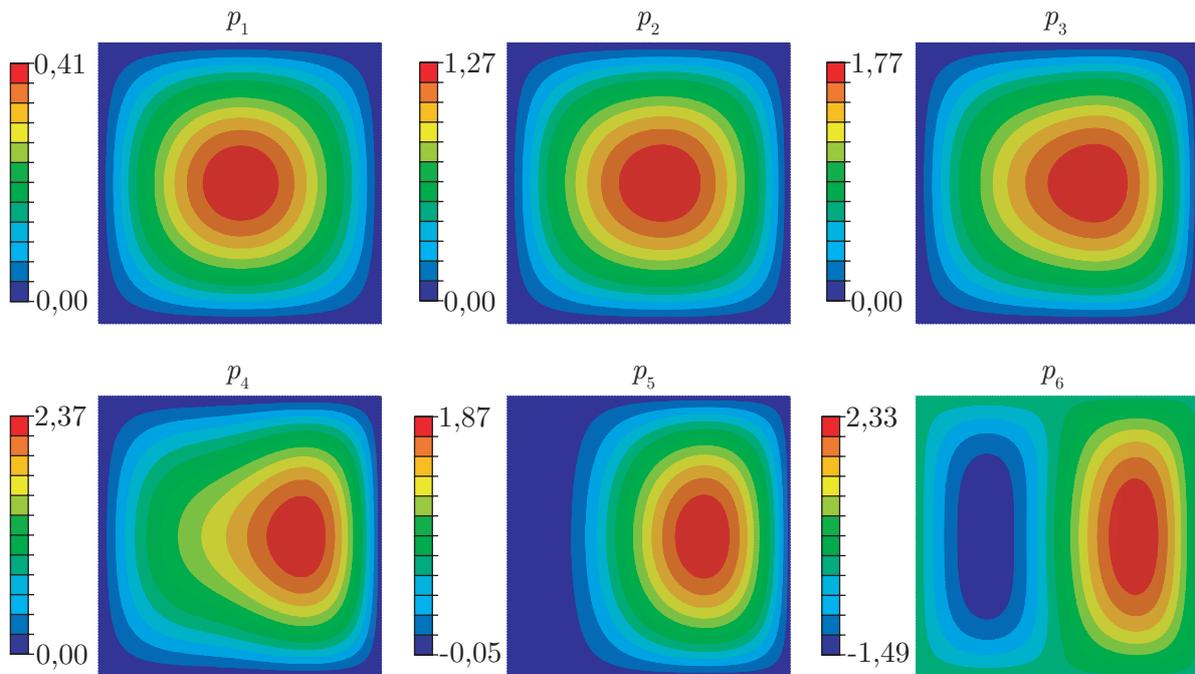


Figura 3.10: Flecha adimensional  $\tilde{w}/t$  para  $w_{011}/t = 0,1$  con *Abaqus*<sup>®</sup> y los  $\mathcal{P}_x$  de la Figura 3.7.

La deformación comienza en  $p_1$  con una semionda que coincide con el primer modo de pandeo. A medida que se aumenta  $\mathcal{P}_x$ , la semionda se va desplazando hacia el lado cargado (estados  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ ). El estado  $p_5$  representa la parte de la curva inestable, cuando se produce la transición del primer al segundo modo de pandeo. Una vez se alcanza este segundo modo, en el estado  $p_6$ , la placa comienza de nuevo a deformarse de manera estable mediante una onda tipo seno completa.

### 3.3.2. Tensiones

Las tensiones en el plano medio de la placa se calculan a partir de la definición Ec. (2.11) y del resultado analítico Ec. (3.23):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{N_x}{t} + \frac{E \pi^2}{8 a^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) C(2y) \\ \sigma_y &= -\frac{N_y}{t} + \frac{E \pi^2}{8 b^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) C(2x) \\ \sigma_{cr} &= -\frac{N_{cr}}{t}\end{aligned}\tag{3.34}$$

La Figura 3.11 muestra la distribución de tensión normal  $\sigma_x$  para  $w_{011}/t = 0,1$  a lo largo de la línea  $x/a = 0,5$ . Con todos los factores la tensión máxima se encuentra en los apoyos  $y = 0$ ,  $y = b$ . Dado que sólo se representan valores  $\mathcal{P}_x < 2$  para los que predomina el primer modo, existen pocas discrepancias entre los resultados obtenidos mediante MEF y Von Karman.

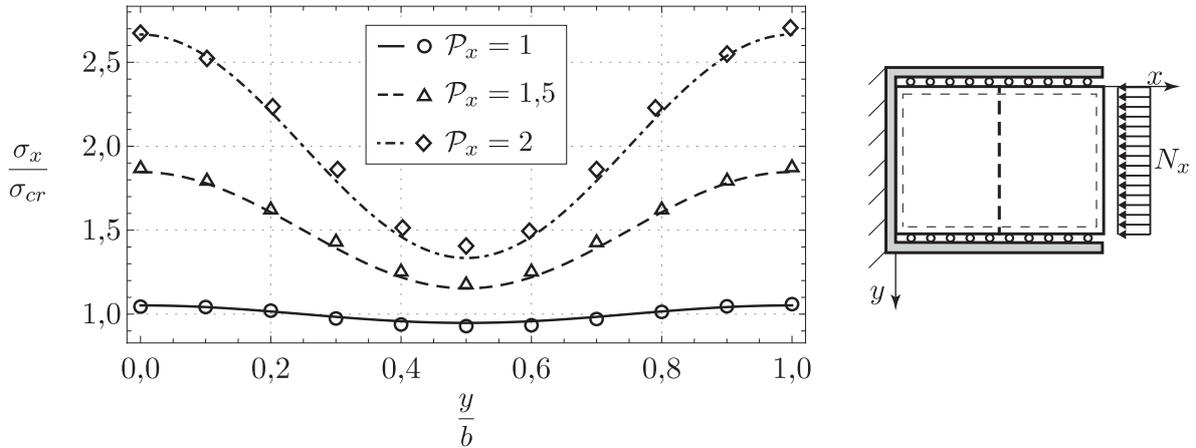


Figura 3.11: Distribución de tensiones normalizadas  $\sigma_x/\sigma_{cr}$  en  $x/a = 0,5$  para distintos  $\mathcal{P}_x$  y  $w_{011}/t = 0,1$ . Círculos: *Abaqus*<sup>®</sup>, líneas continuas: Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

En la Figura 3.11 la tensión para  $\mathcal{P}_x = 1$  no es exactamente constante debido a la presencia de la imperfección. Por otro lado, en la Figura 3.12 se representa la distribución de este factor para diferentes amplitudes de  $w_{011}/t$ :

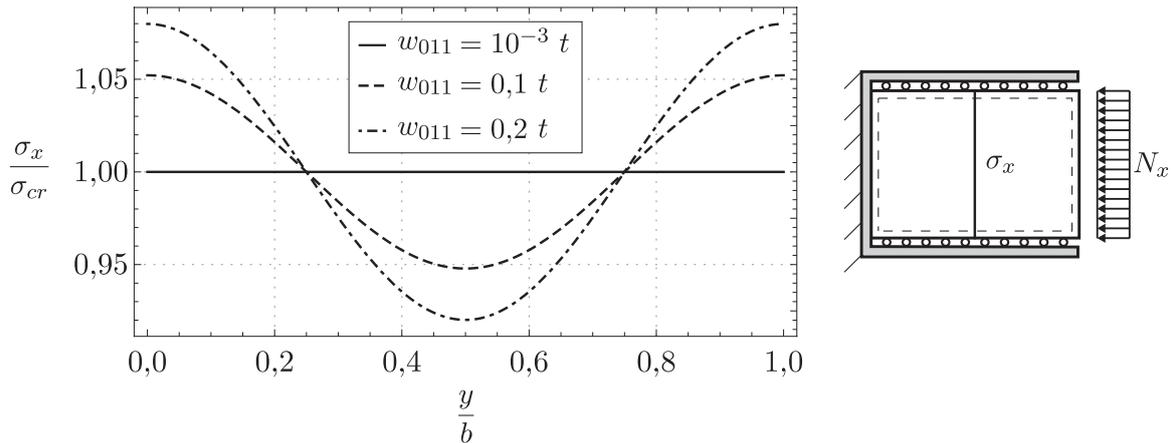


Figura 3.12: Distribución de tensiones normalizadas  $\sigma_x/\sigma_{cr}$  para  $\mathcal{P}_x = 1$  y  $x/a = 0,5$  para distintos valores de  $w_{011}/t$ . Resultados mediante Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

A mayor  $w_{011}/t$  mayor es la diferencia de tensiones entre el borde y el centro de la placa: en los casos imperfectos ya hay deformaciones  $\tilde{w}$  fuera del plano, proporcionales cuanto mayor es  $w_{011}$ . Que la distribución de tensiones se aleje de una constante es bastante perjudicial en el diseño de una placa, ya que aparecen zonas con tensión cercana a la de plastificación y/o rotura mientras que otras están muy descargadas; como se verá, la placa es menos eficiente.

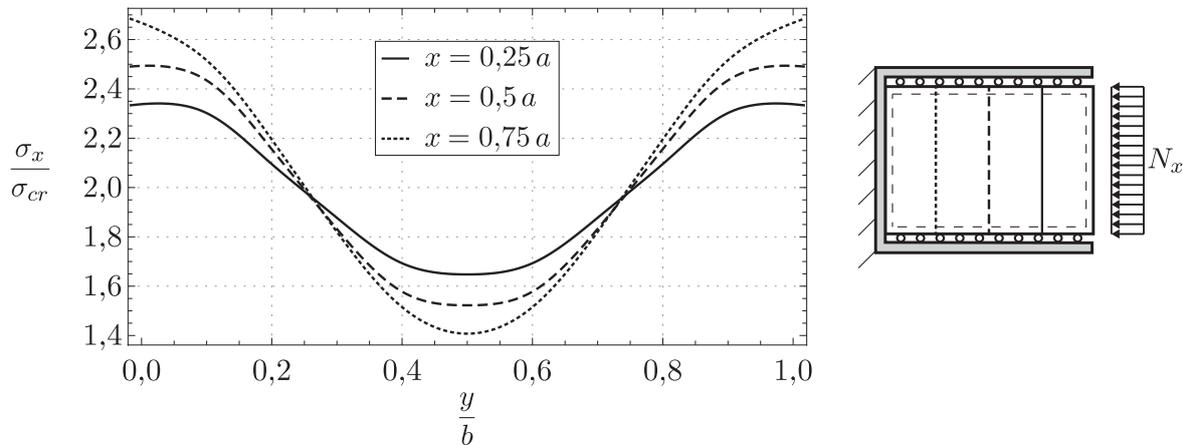


Figura 3.13: Distribución de tensiones normalizadas  $\sigma_x/\sigma_{cr}$  para  $\mathcal{P}_x = 2$  y  $w_{011}/t = 0,1$  a lo largo de distintas rectas  $x/a = cte$ . Resultados interpolados de *Abaqus*<sup>®</sup>.

La distribución de tensiones no es la misma para cada línea  $x = cte$ , sino que en zonas cercanas al borde  $x = 0$  la concentración de tensiones es mayor, mientras que en zonas próximas al borde libre se reduce; la resolución mediante Von Karman no es capaz de predecir este fenómeno debido a que la Ec. 3.15 sólo incluye un término, y por tanto  $N_y$  en la Ec. (3.31) es constante. En la Figura 3.13 se muestra la redistribución de tensión normal obtenida mediante MEF.

A pesar de que  $\sigma_x$  es predominante, es conveniente estudiar los efectos de  $\sigma_y$ . Por separado,  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  no permiten establecer el punto más solicitado de la placa y por tanto el que primero plastificará y/o romperá. Para materiales isotrópicos como el aluminio, se establece una tensión equivalente de Von Mises  $\sigma_{VM}$  que incluye las tres componentes del tensor tensión. Aplicando su definición Ec. (2.21) al caso de estudio y sustituyendo las Ecs. (3.34):

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{8t a^2 b^2} \sqrt{a^4 [\pi^2 t E (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) C(2x) - 8b^2 N_y]^2 + b^4 [\pi^2 t E (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) C(2y) - 8a^2 N_x]^2} \quad (3.35)$$

Se representan los resultados obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup> para los estados definidos la Figura 3.7:

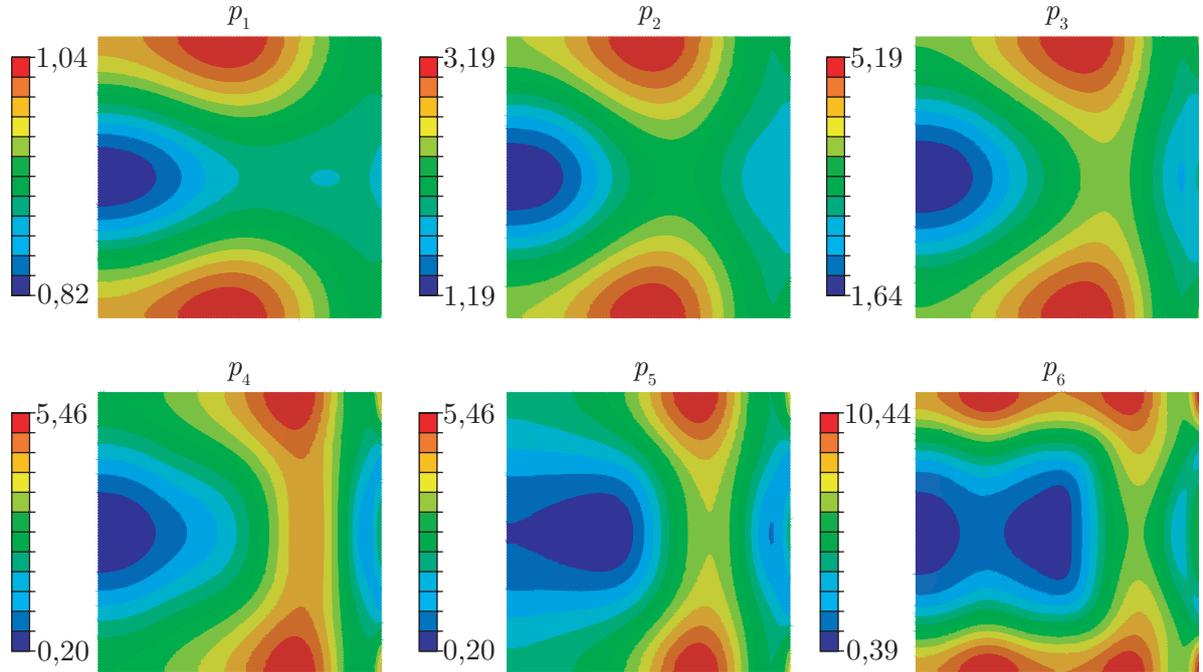


Figura 3.14: Tensión adimensional  $\sigma_{VM}/\sigma_{cr}$  para  $w_{011}/t = 0,1$  para *Abaqus*<sup>®</sup> y los  $p_i$  de la Figura 3.7.

En todos los estados de carga, las tensiones  $\sigma_{VM}$  más grandes se encuentran en  $y = 0, y = b$ ; estos bordes están obligados a permanecer rectos además de estar soportados por una articulación que los restringe en dirección  $z$ . A medida que aumenta  $\mathcal{P}_x$  la diferencia entre el

punto más y menos cargado se hace mayor. Por ejemplo, para  $\mathcal{P}_x = 4$  y  $p_6$ , los bordes están cargados con diez veces  $\sigma_{cr}$  mientras en centro sólo 0,4 veces  $\sigma_{cr}$ , prácticamente no está cargada. Este comportamiento refleja que un buen diseño deberá reforzar los extremos de la placa con larguerillos o costillas.

### 3.4. Comparación de la solución de post-pandeo: anchos efectivos

El documento DES 8726/1 de la Universidad de Cranfield [14] contiene ciertas correlaciones semiempíricas acerca del post-pandeo de placas a compresión y la influencia que tiene sobre su comportamiento la presencia de imperfecciones. En particular, se van a comparar en esta subsección anchos efectivos, un concepto ampliamente usado en diseño práctico ya que permite comparar los efectos del pandeo de una manera sencilla. El documento define dos anchos efectivos:  $b_e$  controlado por tensiones y  $b_{\bar{e}}$  controlado por desplazamientos.

#### 3.4.1. Ancho efectivo tensional

La definición de  $b_e$  surge de asumir que el estado tensional sobre un borde  $b$  es equivalente a dos bordes cargados de anchura  $b_e/2$  sometidos a la tensión máxima  $\sigma_{mx}$ .

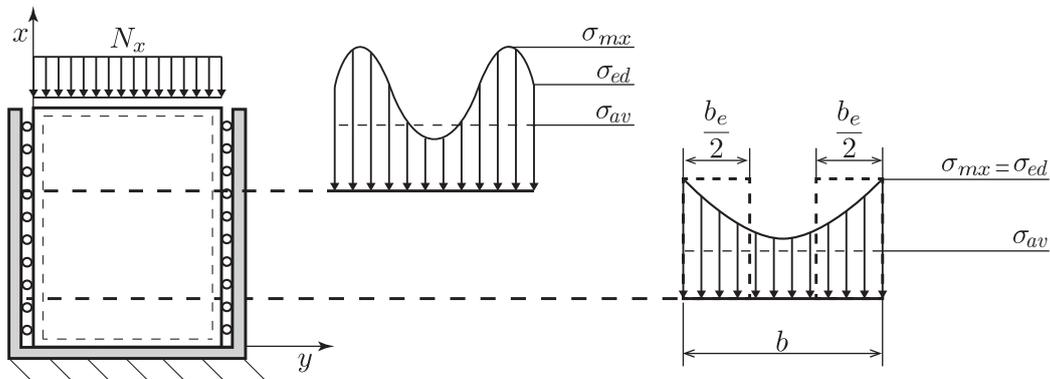


Figura 3.15: Concepto de ancho efectivo tensional (rectángulos en Figura derecha). Representación de la tensión de borde  $\sigma_{ed}$ , máxima en placa  $\sigma_{mx}$  y promedio de cada distribución  $\sigma_{av}$ .

Mediante la equivalencia de tensiones en cualquier  $x = cte$  de la Figura 3.15:

$$\int_0^b \sigma_x \, dy = \begin{cases} \sigma_{mx} b_e \\ \sigma_{av} b \end{cases} \Rightarrow \frac{b_e}{b} = \frac{\sigma_{av}}{\sigma_{mx}} = \left( \frac{\sigma_{av}}{\sigma_{mx}} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{mx}} \right) \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_{cr}} \quad (3.36)$$

donde se ha expresado  $b_e/b$  en función de  $\sigma_{mx}/\sigma_{cr}$  ya que es la relación que establece [14] y será necesaria en la ordenada de la Figura 3.17. Para todos los métodos la tensión media  $\sigma_{av}$  debe ser estáticamente equivalente a la carga aplicada; aplicando la definición matemática de media a la Ec. (3.34) superior:

$$\sigma_{av} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \sigma_x(x, y) \, dx dy := -\frac{N_x}{t} \quad (3.37)$$

Por observación de la Ec. (3.34) y la Figura 3.14 se obtiene que  $\sigma_{mx}$  se encuentra en los puntos  $(a/2, 0)$  y  $(a/2, b)$ . Para el método de Von Karman:

$$\sigma_{mx} = \sigma_{VM} \left( \frac{a}{2}, 0 \right) = \sigma_{VM} \left( \frac{a}{2}, b \right) = \frac{1}{8t a^2 b^2} \cdot \quad (3.38)$$

$$\sqrt{a^4 \left[ \pi^2 t E (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) - 8b^2 N_y \right]^2 - b^4 \left[ \pi^2 t E (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) C(2y) + 8a^2 N_x \right]^2}$$

Por otra parte, con *Abaqus*<sup>®</sup> se mide directamente la tensión en los nodos correspondientes a los puntos mencionados. En la Figura 3.16 se presenta  $\sigma_{mx}$  en función de  $\mathcal{P}_x$  para ambos métodos; la referencia [14] no ofrece esta solución.

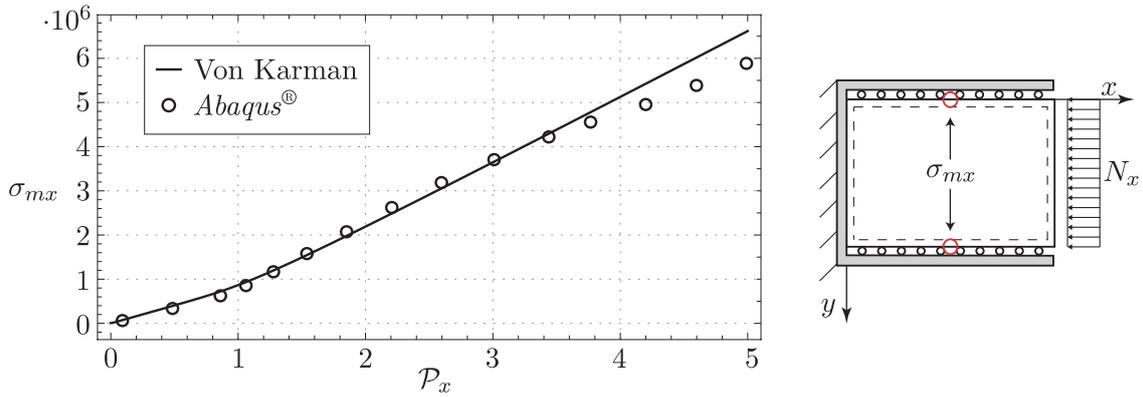


Figura 3.16: Tensión máxima  $\sigma_{mx}$  en  $x = a/2$ ,  $y = 0$  en función del factor de carga  $\mathcal{P}_x$ . Unidades en SI.

La figura muestra como la solución en mitad de los apoyos mediante Von Karman se asemeja a la de MEF para factores de carga incluso superiores a los de la flecha máxima de la Figura 3.8. La mejora se debe a que en este caso se estudia un punto en los apoyos y, en consecuencia, que se llegue al segundo modo tiene poca influencia: la función de prueba es nula en esos puntos

independientemente del número de términos. No obstante, se observa una tendencia divergente de los resultados a partir de  $\mathcal{P}_x > 4$ .

Por otro lado,  $b_e$  viene dado por [14]:

$$\frac{b_e}{b} = \gamma_c + (1 - \gamma_c) \left( 1 - \frac{w_{011}}{\tilde{w}_{11}} \right) \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{mx}} \quad (3.39)$$

$$\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_{cr}} = 1 - \frac{w_{011}}{\tilde{w}_{11}} + \frac{A_c \mu_c}{\gamma_c K} \left[ \left( \frac{\tilde{w}_{11}}{t} \right)^2 - \left( \frac{w_{011}}{t} \right)^2 \right]$$

En la Ec. (3.39) aparecen los coeficientes adimensionales  $A_c$ ,  $\mu_c$ ,  $\gamma_c$  que permiten describir el comportamiento de la placa en post-pandeo. El último  $\gamma_c$ , es la pendiente de la recta que ajusta la curva que relaciona  $\sigma_{mx}$  con  $\sigma_{av}$ , coeficiente calculado mediante Von Karman con un único término:

$$\gamma_c = \frac{\partial \sigma_{av}}{\partial \sigma_{mx}} \approx \arctan \left( \frac{\sigma_{av} - \sigma_{cr}}{\sigma_{mx} - \sigma_{cr}} \right) = \arctan \left\{ \frac{(1 + 3r^4)(1 + r^4)}{(3 + r^4)(1 + 3r^4) - 2r^2[2r^2 - \nu(1 + r^4)]} \right\} \quad (3.40)$$

válida para  $\mathcal{P}_x < 2$  debido al uso del primer término en [14]. El segundo,  $\mu_c$  es la pérdida de rigidez adimensional debido al post-pandeo y coincide con la pendiente de la recta interpolada que relaciona la tensión de borde  $\sigma_{ed}$  con  $\sigma_{av}$ :

$$\mu_c = \frac{\partial \sigma_{av}}{\partial \sigma_{ed}} \approx \arctan \left( \frac{\sigma_{av} - \sigma_{cr}}{\sigma_{ed} - \sigma_{cr}} \right) = \arctan \left\{ \frac{(1 + r^4)(1 + 3r^4)(1 - \nu^2)}{(3 + r^4)(1 + 3r^4) - [2r^2 - \nu(1 + r^4)]^2} \right\} \quad (3.41)$$

Por último,  $A_c$  es el parámetro que introduce las CC:

$$A_c = \frac{2,73(1 + r^4)}{4\mu_c r^2(1 + \nu r^2)} \quad (3.42)$$

La Figura 3.17 representa el ancho efectivo tensional adimensional en función de la tensión máxima adimensional. Los resultados de [14] y el método Von Karman se representan mediante la misma línea ya que no hay prácticamente desviación entre ambos; [14] también parte de las Ecs. (2.17) y (2.18).

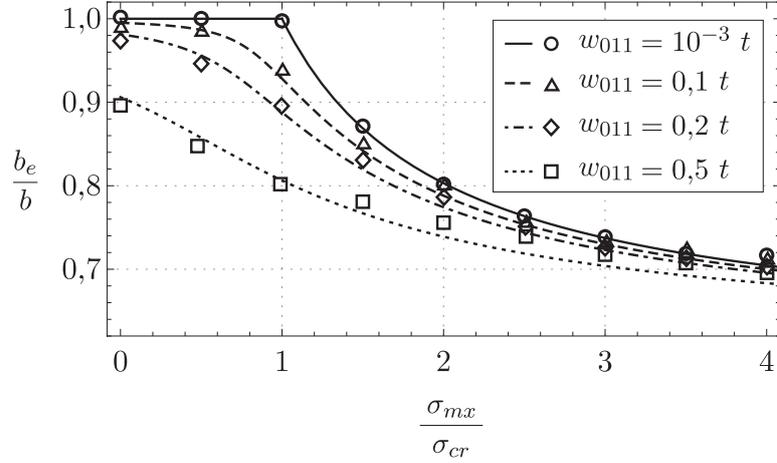


Figura 3.17: Ancho efectivo tensional adimensional  $b_e/b$  vs. tensión máxima adimensional  $\sigma_{mx}/\sigma_{cr}$ . Marcadores circulares: *Abaqus*<sup>®</sup>. Líneas continuas: Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup> y [14].

En el caso perfecto antes de inicio de pandeo  $\mathcal{P}_x < 1$ , el ancho efectivo es igual al ancho total de la placa ya que la tensión es constante en todo el borde. En régimen de post-pandeo, a medida que se carga la placa  $b_e$  se reduce, es decir, los bordes están más cargados y el centro menos. Por este motivo es necesario reforzar los bordes de la placa con larguerillos o costillas. Introducir una imperfección provoca también una reducción importante de  $b_e$ ; además, como no hay una carga definida para  $\mathcal{P}_x < 1$ ,  $b_e$  se reduce también. Notése que cuando la carga es nula, el ancho efectivo en los casos imperfectos ya se ve afectado: es importante vigilar la calidad de la placa si se quiere una buena distribución tensional.

De nuevo, los resultados obtenidos mediante *Abaqus*<sup>®</sup> y Von Karman son bastante parecidos para  $w_{011}/t$  razonables. Para imperfecciones del orden del espesor  $w_{011}/t = 0,5$ , la teoría de Von Karman no es capaz de predecir el comportamiento de la placa (véase la Figura 3.9). En todos los casos a partir de  $\sigma_{mx}/\sigma_{cr} \approx 3$  los resultados se empiezan a distanciar y comienza a predominar el segundo modo de pandeo.

### 3.4.2. Ancho efectivo para desplazamientos

El concepto de ancho efectivo para desplazamientos  $b_{\bar{e}}$  hace referencia a que una placa del mismo espesor y material tiene la misma deformación  $\tilde{u}$  axial antes del pandeo. De igual manera que en la Ec. (3.36) [14]:

$$\int_0^b \sigma_x dy = \begin{cases} \sigma_{ed} b_{\bar{e}} \\ \sigma_{av} b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{b_{\bar{e}}}{b} = \frac{\sigma_{av}}{\sigma_{ed}} = \left( \frac{\sigma_{av}}{\sigma_{ed}} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{ed}} \right) \frac{\sigma_{ed}}{\sigma_{cr}} \quad (3.43)$$

La tensión  $\sigma_{ed}$  es la tensión en el borde de la placa (ver Figura 3.15) antes del pandeo, por lo que es una constante y está relacionada con el movimiento  $\tilde{u}$  del punto medio del borde cargado. Para el método Von Karman, se obtiene  $\sigma_{ed}$  mediante la Ec. (2.4) constitutiva en dirección  $x$ : los valores negativos indican que el desplazamiento es en sentido contrario al eje  $x$  y en dirección de la carga.

$$\sigma_{ed} = E \varepsilon_x(x, y) \approx E \frac{\tilde{u}(a, b/2)}{a} = \frac{-N_x + \nu N_y}{t} - \frac{E\pi^2(1 + \nu r^2)}{8a^2} (w_{011}^2 - \tilde{w}_{11}^2) \quad (3.44)$$

De nuevo para la solución *Abaqus*<sup>®</sup> se mide directamente el movimiento  $\tilde{u}$  en nodo que simula ese punto. En la Figura 3.18 se presenta  $\tilde{u}$  en función de  $\mathcal{P}_x$  para ambos métodos; [14] no ofrece esta solución.

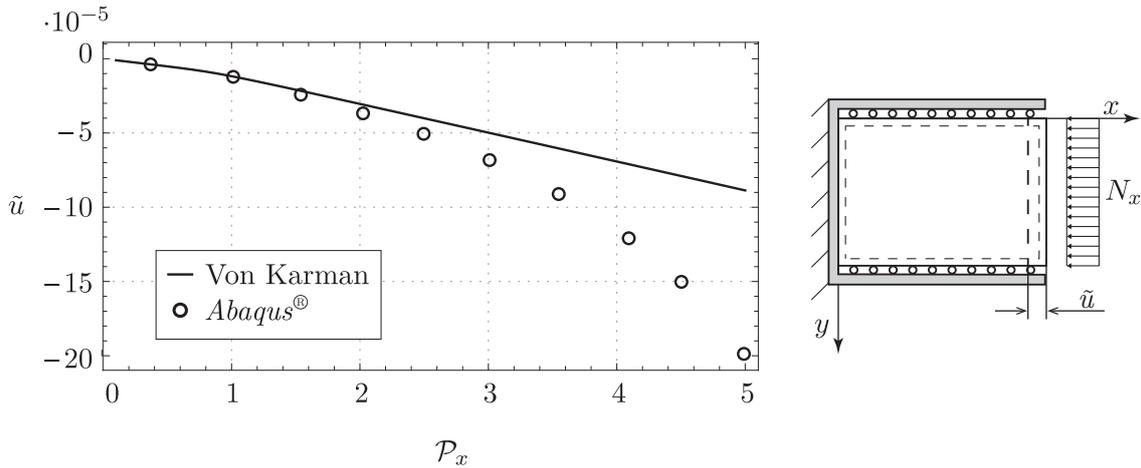


Figura 3.18: Desplazamiento  $\tilde{u}$  en el borde cargado en función del factor de carga  $\mathcal{P}_x$ . Unidades en SI.

Al igual que sucedía con la flecha en el centro de la placa de la Figura 3.8, para  $\mathcal{P}_x > 2$  los resultados mediante Von Karman empiezan a distanciarse de los de MEF; como ya se explicó, para esas cargas se desarrolla el segundo modo de pandeo.

En [14]  $b_{\bar{e}}$  viene dado por:

$$\frac{b_{\bar{e}}}{b} = \mu_c + (1 - \mu_c) \left( 1 - \frac{w_{011}}{\tilde{w}_{11}} \right) \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{ed}} \quad (3.45)$$

donde,

$$\frac{\sigma_{ed}}{\sigma_{cr}} = \left( 1 - \frac{w_{011}}{\tilde{w}_{11}} \right) + \frac{A_c}{K} \left[ \left( \frac{\tilde{w}_{11}}{t} \right)^2 - \left( \frac{w_{011}}{t} \right)^2 \right] \quad (3.46)$$

La Figura 3.19 representa el ancho efectivo para el desplazamiento  $\tilde{u}$  en función  $\sigma_{ed}/\sigma_{cr}$ :

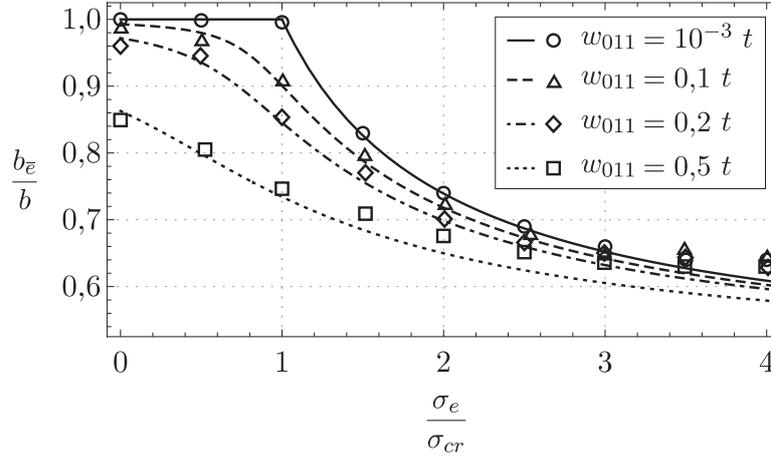


Figura 3.19: Ancho efectivo para desplazamientos adimensional  $b_e/b$  vs. tensión equivalente adimensional  $\sigma_{ed}/\sigma_{cr}$ . Marcadores circulares: *Abaqus*<sup>®</sup>. Líneas continuas: Von Karman con *Matematica*<sup>®</sup> y [14].

Las conclusiones son muy similares a las de la Figura 3.17: las imperfecciones reducen  $b_e$  notablemente. Por ejemplo, para  $w_{011}/t = 0,5$  y  $\sigma_{ed}/\sigma_{cr} = 0$  la placa está descargada y el ancho efectivo es  $b_e/b = 0,962$ , es decir, para que los desplazamientos  $\tilde{u}$  fuesen los mismos habría que construir una placa un 4% más ancha. En aeronáutica un aumento del 4% de material y de peso es muy considerable, por lo que se deberán reducir las imperfecciones al máximo. Los resultados obtenidos mediante *Abaqus*<sup>®</sup> y Von Karman son similares excepto para amplitudes similares al espesor.

## *Pandeo y post-pandeo en régimen elasto-plástico*

### 4.1. Inicio de pandeo

La mayoría de placas y láminas aeronáuticas se encuentran en régimen elasto-plástico durante el post-pandeo, lo que hace imprescindible incluir este comportamiento en la formulación. Se permite trabajar a las placas en la zona elasto-plástica ya que así aumenta la capacidad de carga con respecto al cálculo elástico. Además, en aquellas placas donde la relación espesor-ancho de la placa  $\phi = h/b > 1/30$  la plasticidad de la placa también afecta al inicio de pandeo, reduciendo las cargas críticas de pandeo  $N_{cr}$ .

El principal problema de considerar comportamiento puramente elástico en inicio de pandeo es que se sobrestima  $N_{cr}$ , más cuanto mayor es el espesor de la placa. Se estudia en esta sección la posibilidad de plasticidad en inicio de pandeo para una placa articulada en todos sus bordes SSSS y bajo carga  $N_x$  representada en la Figura 3.1.

#### 4.1.1. Resolución analítica

Se utiliza el método de Ritz expuesto en la Sección 3.1 basado en el PVE y se retoma la función de prueba de la Ec (3.5):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^1 w_{mn} S(mx) S(ny) \quad (4.1)$$

Por el mismo motivo que en la Ec (3.5) se eligen los seis primeros términos en  $m$  y sólo uno en  $n$ . A continuación se calcula la energía interna de flexión  $U$  considerando el comportamiento elasto-plástico de la Ec. (2.27):

$$\begin{aligned} U = & \frac{D\pi^4}{8a^3b^3} (1 - \nu^2) \left[ a^4 \gamma (w_{11}^2 + w_{21}^2 + w_{31}^2 + w_{41}^2 + w_{51}^2 + w_{61}^2) + \right. \\ & 2a^2b^2\beta (w_{11}^2 + 4w_{21}^2 + 9w_{31}^2 + 16w_{41}^2 + 25w_{51}^2 + 36w_{61}^2) + \\ & 4a^2b^2\delta (w_{11}^2 + 4w_{21}^2 + 9w_{31}^2 + 16w_{41}^2 + 25w_{51}^2 + 36w_{61}^2) + \\ & \left. \alpha b^4 (w_{11}^2 + 16w_{21}^2 + 81w_{31}^2 + 256w_{41}^2 + 625w_{51}^2 + 1296w_{61}^2) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

La energía de las fuerzas en el plano  $V$  es independiente del material de la placa; aplicando la Ec (2.9):

$$V = \frac{b\pi^2}{8a} N_x \left( w_{11}^2 + 4w_{21}^2 + 9w_{31}^2 + 16w_{41}^2 + 25w_{51}^2 + 36w_{61}^2 \right) \quad (4.3)$$

La expresión de la energía total de la placa  $\Pi$  es la diferencia entre las Ec. (4.2) y (4.3); mediante el PVE de la Ec. (2.7) se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo y no lineal:

$$\frac{\pi^4}{4r^3 b^2} D \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ w_{31} \\ w_{41} \\ w_{51} \\ w_{61} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

donde para  $1 \leq l \leq 6$ ,

$$\lambda_l = l^2 r^2 K + \left[ l^4 \alpha - r^2 \left( 2l^2 \beta r^2 \gamma + 4l^2 \delta \right) \left( 1 - \nu^2 \right) \right] \quad (4.5)$$

La diferencia con los coeficientes  $\lambda_l$  de la solución elástica de la Ec. (3.8) es que la Ec. (4.5) es no lineal en  $K$  debido a que los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  también contienen el término de carga  $K$ . En consecuencia, el problema no tiene una solución analítica cerrada y es necesario utilizar un método iterativo para hallar la solución numérica. Se ha elegido como material el aluminio 14S-T6 ya que para él se dispone de soluciones experimentales de pandeo en [20], permitiendo así comparar los métodos:

$E$	$\nu$	$c$	$\sigma_n$	$\sigma_Y$
73,1 (GPa)	0,32	20	423 (MPa)	420 (MPa)

Tabla 4.1: Constantes de material del aluminio 14S-T6 [19].

La Figura 4.1 presenta el modelo de Ramberg-Osgood para 14S-T6, explicado en la Sección 2.3.2. Se observa en la figura como el material tiene una relación tensión deformación lineal hasta que se alcanza  $\sigma_Y = 420$  MPa; a partir de esa tensión, no se agota la capacidad del material sino que es capaz de soportar una superior.

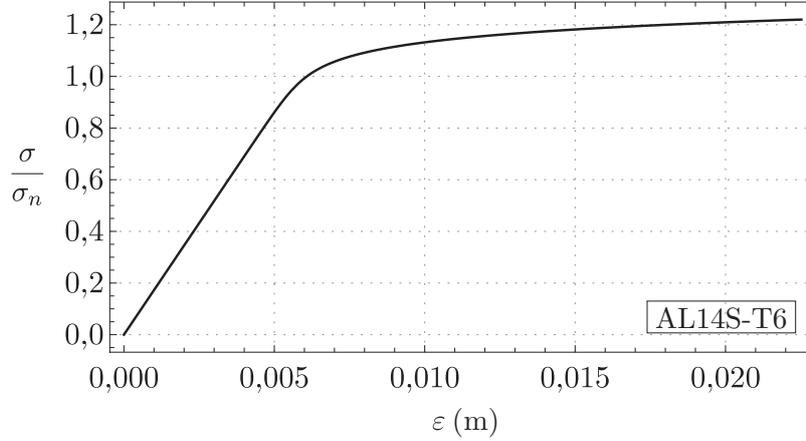


Figura 4.1: Curva tensión  $\sigma$  vs. deformación  $\varepsilon$  para aluminio 14S-T6, representada con el modelo de Ramberg-Osgood y parámetros de la Tabla 4.1.

Los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  para la teoría DT se obtienen sustituyendo en la Ec. (2.20) los datos de la Tabla 4.1:

$$\alpha = \frac{4 + 4,87 \times 10^{42} K^{19} \phi^{38}}{3,59 + 2,69 \times 10^{84} K^{38} \phi^{76} + 1,64 \times 10^{43} K^{19} \phi^{38}}$$

$$\beta = \frac{1,28 + 8,47 \times 10^{42} K^{19} \phi^{38}}{3,59 + 2,69 \times 10^{84} K^{38} \phi^{76} + 1,64 \times 10^{43} K^{19} \phi^{38}} \quad (4.6)$$

$$\gamma = 4 \left( 6,33 + 6,33 \times 10^{41} K^{19} \phi^{38} - \frac{0,13}{1 + 4,24 \times 10^{42} K^{19} \phi^{38}} \right)^{-1}$$

$$\delta = \left( 2,64 + 6,33 \times 10^{41} K^{19} \phi^{38} \right)^{-1}$$

Para IT se sustituyen en la Ec. (2.22) los datos de la Tabla 4.1 y se obtienen los coeficientes de la Ec. (4.7).

$$\alpha = \frac{4 + 4,24 \times 10^{42} K^{19} \phi^{38}}{3,59 + 1,56 \times 10^{43} K^{19} \phi^{38}} \quad \gamma = 4 \left( 3,72 - \frac{0,13}{4,24 \times 10^{42} K^{19} \phi^{38} + 1} \right)^{-1} \quad (4.7)$$

$$\beta = \frac{1,28 + 8,47 \times 10^{42} K^{19} \phi^{38}}{3,59 + 1,58 \times 10^{43} K^{19} \phi^{38}} \quad \delta = 0,3788$$

Nótese que el parámetro  $\delta$  en la Ec. (2.19) modela los esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$ , por lo que

IT asume cortantes constantes en compresión uniaxial Ec. (4.7), mientras que DT los establece variables en  $K$ ,  $\phi$ , ver Ec. (4.6). La ecuación de  $K$  para DT se obtiene de sustituir la Ec. (4.6) en la Ec. (4.5) y para la teoría IT la Ec. (4.7) en la Ec. (4.5) e igualarlas a cero, ya que la matriz Ec. (4.4) es diagonal y por tanto todos los  $l_i$  deben ser nulos. En ambas teorías se obtiene una ecuación altamente no lineal y con dependencia de  $r$  y de  $\phi$ . Esta ecuación sólo tiene solución numérica aplicando *Mathematica*<sup>®</sup>. En el caso elástico ET, la carga adimensional  $K$  de la Ec. (3.9) dependía exclusivamente de  $r$ ;  $\phi$  introduce el grado de plasticidad en la placa, a mayor espesor mayor superficie plastificará.

#### 4.1.2. Resolución por el Método de los Elementos Finitos

El procedimiento con *Abaqus*<sup>®</sup> es diferente al expuesto en la Sección 2.5.1 ya que el *step* tipo *Buckle* sólo permite resolver problemas lineales en los que el comportamiento es elástico. La metodología adoptada es [23]:

1. Se resuelve el problema de pandeo elástico con el *step Buckle* para observar el primer modo, que no cambiará al considerar plasticidad. En la Figura 4.5 la placa padea con cinco semiondas en dirección  $x$  (ver también la Figura 4.3). Este paso es idéntico al de la Sección 2.5.1.
2. Una vez conocido el modo de pandeo inicial se plantea un problema estático que se resolverá mediante tres *steps* consecutivos. El primero es tipo *Initial*: se introducen las condiciones de contorno de una placa articulada;  $UR3 = U3 = 0$  en todos los bordes y  $U1 = U2 = 0$  en el nodo central para imponer la simetría de la deformada. Este *step* se representa en la Figura 4.2 en color naranja.
3. El segundo *step* es *Static General* e introduce una imperfección que coincide con el modo de pandeo calculado en el paso 1 para que la placa se deforme con ese patrón. Para ello se introducen cinco fuerzas puntuales en los nodos donde la deformación es máxima. Se representa en la Figura 4.2 en rojo y la respuesta que tiene la placa a dicha perturbación en la Figura 4.3.
3. El tercer *step* introduce la carga distribuida  $N_x$  cuyo valor es el de la carga crítica adimensional  $K$  obtenida en el paso 1, que es la máxima.  $N_x$  se aplica en incrementos del 5% por unidad de tiempo; cuanto menor sea este incremento más preciso es el cálculo. El *step* 3 se representa en la Figura 4.2 en morado.
4. Se establece que las deformaciones grandes fuera del plano no están permitidas por lo que cuando la placa padea, se provoca un error en el cálculo.
5. Se cambia el comportamiento del material a elasto-plástico mediante la opción *deformation plasticity*, lo que permite introducir el modelo de Ramberg-Osgood para el aluminio de la Tabla 4.1.
6. Se monitoriza el cálculo con la opción *monitor*. Con el instante temporal en el que el

cálculo diverge se calcula el porcentaje de carga aplicada en el momento en el que las deformaciones fuera del plano aumentan considerablemente; ese porcentaje es la carga  $K$  para el caso elasto-plástico.

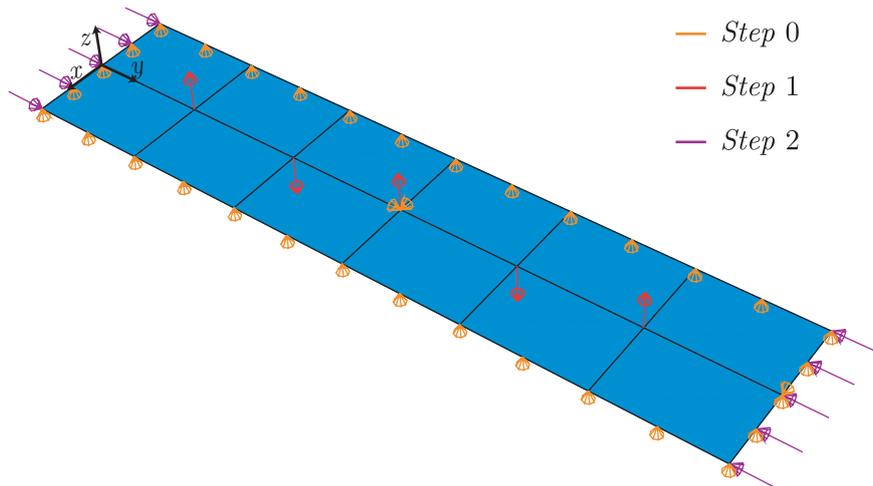


Figura 4.2: Cargas o restricciones realizadas en cada *step* en *Abaqus*<sup>®</sup> para la resolución del problema.

En resumen, *Abaqus*<sup>®</sup> no dispone de una opción directa para resolver el problema de inestabilidad de pandeo elasto-plástico y es necesario recurrir a un análisis estático en el que la solución se encuentra cuando el cálculo diverge. Además, se realizó un estudio paramétrico de la malla y de los incrementos de porcentaje de carga del paso 5 para obtener unos resultados precisos.

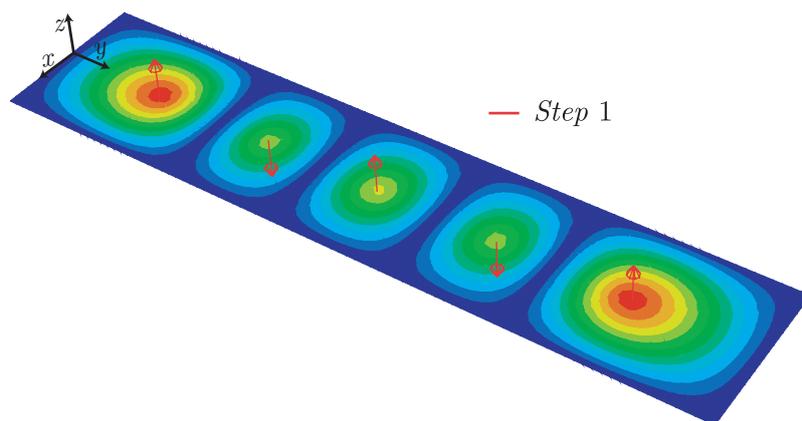


Figura 4.3: Deformada  $w$  de la placa tras el *step* 1 en *Abaqus*<sup>®</sup>.

La Figura 4.3 muestra la respuesta de la placa tras el primer *step* en el que se introducen las cinco fuerzas nodales. En principio, estas fuerzas debería proporcionar cinco semiondas perfectas; sin embargo la primera y la última están ligeramente desplazadas hacia centro de la placa.

Esta diferencia, no afecta a los cálculos debido a que este step impone el número de semiondas y la dirección que tiene cada una. Si se omite este *step* la placa continúa comprimiéndose infinitamente, sin alcanzar nunca la inestabilidad del pandeo y por otra parte, si se introduce una única fuerza en el centro de la placa patea como una columna.

### 4.1.3. Resultados experimentales

Pride y Heimerl publicaron en 1949 la *Technical Note* 1817 [20] para NACA en la que daban a conocer los resultados de los ensayos de inicio de pandeo para placas rectangulares articuladas de aluminio 14S-T6. En realidad, recrear la condición de contorno de cuatro bordes articulados puros fue complicado ya que debían permitir tanto a los bordes cargados como a los no cargados girar libremente. Utilizaron una técnica propuesta por Timoshenko [1] que consistía en utilizar un tubo de sección cuadrada y pared delgada, de tal manera que cada cara del tubo se comportase como una placa rectangular aislada. Debido al poco espesor de la sección, cada cara del tubo permite a las otras girar libremente en los lados no cargados, ya que los momentos de reacción en las aristas son prácticamente nulos [20].

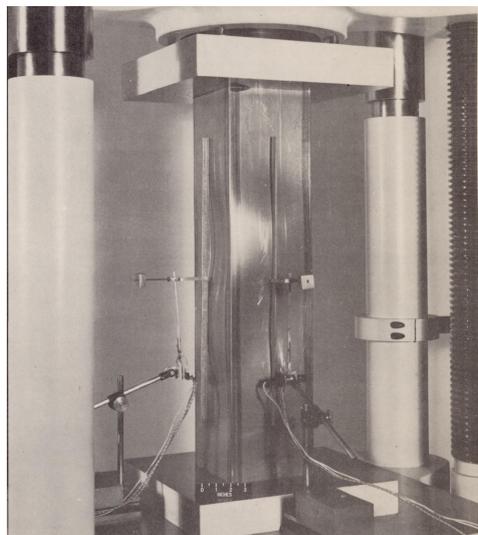


Figura 4.4: Método de ensayo para medir el pandeo de cuatro placas que conforman un tubo de sección cuadrada. Obtenida de NACA L-55234 [20].

En cuanto a los lados cargados, no existía una manera de aplicar la carga y a la vez mantenerlos articulados. La solución pasó por fabricar un tubo lo suficientemente largo para que las condiciones de contorno en esos extremos tuviesen poca influencia sobre  $K$ . Además, la longitud del tubo debía ser controlada ya que placas muy esbeltas patea como una columna. Se determinó que esta debía ser al menos cuatro veces el ancho, es decir,  $r > 4$ ; la relación que mejores resultados ofreció fue  $r = 4,5$ . Se muestra una foto del montaje del ensayo en la Figura 4.4.

#### 4.1.4. Contraste de resultados

La Figura 4.5 muestra la evolución  $K$  de una sola placa con el parámetro  $\phi$  para las soluciones obtenidas mediante las teorías IT, DT, ET, MEF y los resultados experimentales NACA [20].

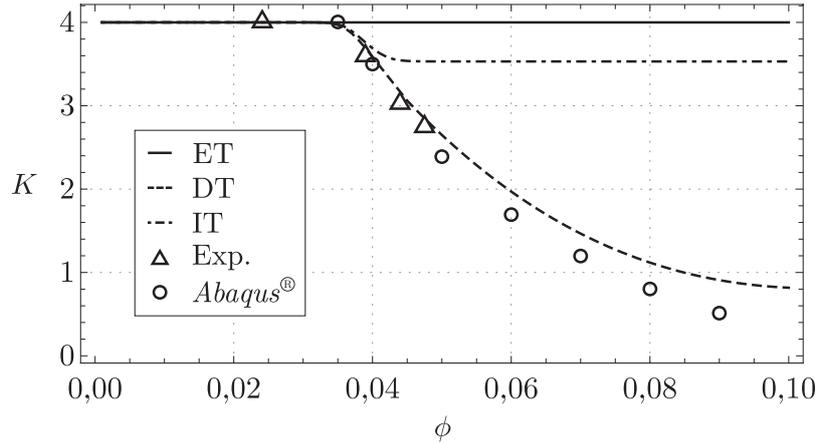


Figura 4.5: Evolución de carga crítica adimensional  $K$  en función de relación espesor-ancho  $\phi = h/b$  para  $r = 4,5$ . Comparación de teorías de plasticidad DT, IT con teoría elástica ET, elementos finitos *Abaqus*<sup>®</sup> y resultados experimentales [20].

En la Figura 4.5 se comprueba la conocida *paradoja del pandeo plástico*, expuesta en la Sección 2.3, por que DT predice de manera mucho más precisa el comportamiento de la placa en inicio de pandeo que IT –esta última no puede considerarse válida. La plasticidad en la placa aparece para  $\phi \approx 0,035$ , por debajo de este valor el inicio de pandeo siempre es elástico. Los resultados MEF se consideran exactos para valores de  $\phi$  en los que no hay solución experimental.

La teoría DT sobrestima la carga adimensional  $K$  cuando  $\phi$  es grande; la explicación radica en que se ha asumido la validez de las hipótesis de Kirchhoff, y para espesores grande deberían haberse utilizado las de Mindlin. Las segundas, a diferencias de las primeras, consideran dentro de las cinemáticas Ecs. (2.3) que para espesores grandes  $\gamma_{yz} \neq 0$ ,  $\gamma_{zx} \neq 0$ , es decir, que las deformaciones cortantes no son despreciables.

La referencia [17] recomienda aplicar las hipótesis de Mindlin con  $\phi > 0,05$ ; para valores menores el error no supera el 1,5 % tal y como se lista en la Tabla 4.2. Se ha añadido a esta tabla la solución semi-racional de Bleich [18] expuesta en la Sección 2.3, que para una placa cuadrada articulada propone la siguiente aproximación:

$$K = \sqrt{\frac{E_t}{E}} \left( \frac{r}{p} \sqrt[4]{\frac{E}{E_t}} + \frac{E_t}{pE} \sqrt[4]{\frac{1}{r}} \right)^2 \quad (4.8)$$

donde  $p$  es el número de semiondas con las que la placa pandea en dirección  $x$ .

$\phi = h/b$	Carga crítica adimensional de pandeo $K$				
	DT Mind. [17]	DT Kirch.	IT Mind. [17]	IT Kirch.	Bleich [18]
0,0357	3,9524	3,9457	3,9645	3,9573	3,8965
0,0385	3,7451	3,7430	3,8002	3,7971	3,5993
0,0417	3,4041	3,4042	3,6007	3,6003	3,2091
0,0455	2,9941	2,9954	3,5305	3,5357	2,7970

Tabla 4.2: Comparación de resultados para carga crítica de pandeo adimensional  $K$  en placa cuadrada articulada y cargada unidireccionalmente.

En la Tabla 4.2 y Figura 4.5 se comprueba la validez de las hipótesis de Kirchhoff cuando  $\phi \leq 0,0455$ . La solución sencilla de Bleich concuerda con los resultados obtenidos mediante la teoría DT, que a su vez describe de una manera precisa los resultados experimentales.

Para justificar que  $r$  influye en la plasticidad, se presenta en la Figura 4.6 la evolución de la carga  $K$  con la relación de aspecto  $r$  para  $\phi = 0,035$ .

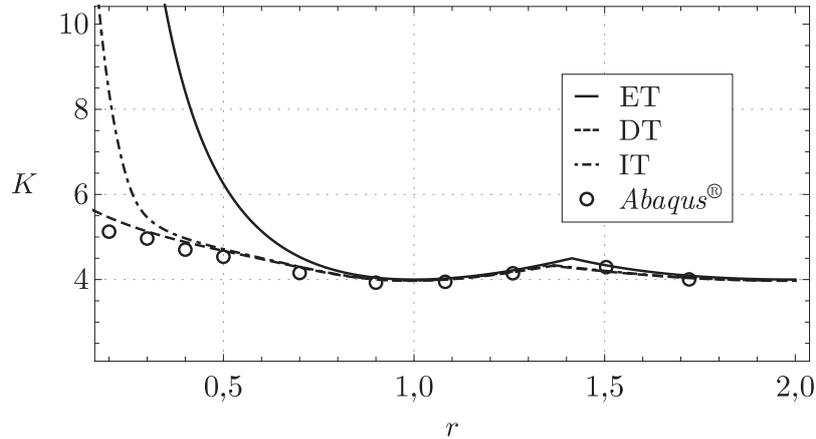


Figura 4.6: Evolución de la carga crítica adimensional  $K$  en función de la relación de aspecto  $r$  para  $h/b = 0,035$ . Comparación de las teorías de plasticidad DT, IT con la teoría elástica ET y elementos finitos *Abaqus*<sup>®</sup>.

Para valores  $r > 1$  se observa que la placa pandea en régimen elástico, mientras que para valores inferiores lo hace en el elasto-plástico. Si se asumen los resultados MEF como exactos, ambas teorías ofrecen buenos resultados hasta  $r < 0,25$ , donde IT ya no se puede asumir válida,

aunque DT sigue siendo precisa. Uno de los problemas que comparten ET y IT es que cuando  $r \rightarrow 0$ , la carga  $K \rightarrow \infty$ , imposible en la realidad ya que antes plastificará o romperá la placa.

La relación  $\phi/r = t/a$  representa el grosor de la placa en función del largo, definición análoga a la esbeltez de una columna. Cuanto mayor es  $\phi/r$  más discrepancias se encuentran entre MEF y el resto de teorías, debido a que las hipótesis de Kirchhoff de placa fina pierden validez. A continuación se representa en la Figura 4.7 la solución cuando la relación  $\phi$  se aumenta hasta 0,05.

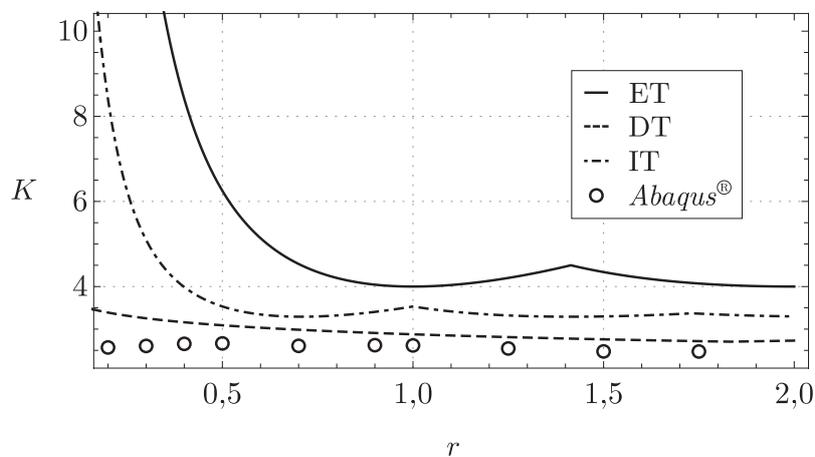


Figura 4.7: Evolución de la carga crítica adimensional  $K$  en función de la relación de aspecto  $r$  para  $\phi = 0,05$ . Comparación de las teorías de plasticidad DT, IT con la teoría elástica ET y elementos finitos *Abaqus*<sup>®</sup>.

En la Figura 4.7 el pandeo se predice elasto-plástico para todas las teorías  $\forall r$ , excepto ET. Además, es prácticamente constante debido a que la carga crítica está por encima de la carga que provoca la fluencia del material, por lo que el pandeo se produce a dicha carga. Además, los resultados de la teoría IT no pueden considerarse válidos en ningún caso ya que sobrestima la carga crítica con un error mínimo del 27%. Con respecto a DT,  $K$  también es ligeramente superior a la solución MEF, pero se puede asumir su validez para  $r > 0,5$ ; valores menores de  $r$  precisarían, de nuevo, el uso de la teoría de Mindlin.

Otra característica a destacar es que cuando la placa pandeo en elasto-plástico, la transición al segundo modo de pandeo se da para valores inferiores de  $r$  con respecto a la de ET: en la Figura 4.7 la transición con IT ocurre para  $r \approx 1$  mientras que con ET para  $r \approx 1,4$ . Es decir, la placa elasto-plástica pandeo con el mismo modo que una placa elástica más larga.

En las placas aeronáuticas  $\phi$  suele estar entre 0,002–0,01, por lo que en vista de los resultados obtenidos en esta sección se puede concluir que la plasticidad no afecta al inicio de pandeo pero sí que lo hará en el régimen de post-pandeo. No obstante, ha sido necesario llevar a cabo el estudio de esta sección para establecer los límites en los que el inicio de pandeo elástico es válido.

## 4.2. Post-Pandeo

En esta sección se resuelve el problema de post-pandeo de una placa articulada en régimen elasto-plástico. El objetivo principal es extender las teorías de inicio de pandeo DT e IT al régimen de post-pandeo y comprobar la aplicabilidad de los resultados. Además, se presenta la solución semi-racional de Bleich, expuesta en la Sección 2.3, que ofrece resultados buenos a pesar de su sencillez.

Al igual que ocurría en la Sección 3.2, en el estudio de post-pandeo no es suficiente con considerar que todos los bordes están articulados como en la Figura 3.1, sino que hay que especificar como se van a comportar los lados no cargados. En la Sección 3.2 los lados cargados permanecen inmóviles, mientras que en la presente sección los bordes no cargados se mantienen rectos pero son capaces de moverse, libres de la contracción de Poisson y esquematizado en la Figura 4.8.

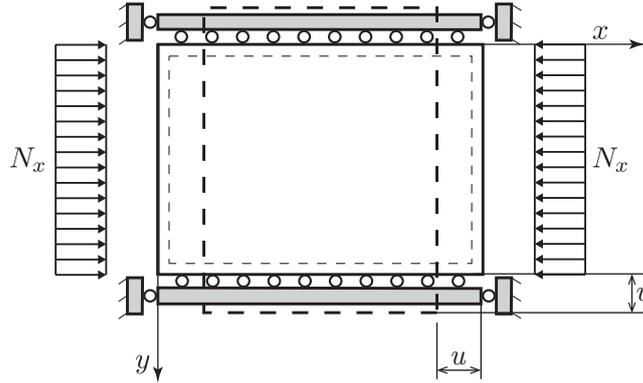


Figura 4.8: Placa a compresión con bordes descargados rectos.

Que los bordes no cargados puedan moverse libremente en  $y$  implica que el valor promedio de la tensión  $\sigma_y$  en estos bordes debe ser nulo y, en consecuencia, la carga de reacción es  $N_y = \mathcal{P}_y = 0$ .

El problema de inicio de pandeo se asume elástico y se toman los resultados analíticos de la Ec. (3.9) particularizados para el primer modo  $l = 1$ . Así, la carga crítica  $N_{cr}$  y el coeficiente de pandeo  $K$  de una placa perfecta SSSS son:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{r^4 + 2r^2 + 1}{r^2} \quad K = \frac{b^2}{\pi^2 D} N_{cr} \quad (4.9)$$

La transición al segundo modo se da para  $r = 1,41$ , lo que hay que considerar para interpretar

soluciones, ya que por encima de ese valor la solución no será válida. Las CC en esta placa serán:

$$\begin{aligned}
 w(0, y) = v(0, y) = 0 & & u(0, y) = cte \\
 w(a, y) = v(a, y) = 0 & & u(a, y) = cte \\
 w(x, 0) = u(x, 0) = 0 & & v(x, 0) = cte \\
 w(x, b) = u(x, b) = 0 & & v(x, b) = cte \\
 u\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = v\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0 & & w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \neq 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Al igual que en la Ec. (3.15) para reproducir el post-pandeo se utiliza la función seno-seno al describir la deformada  $w$ . Dado que la solución elasto-plástica es compleja de resolver, se aproxima la serie de Fourier a un único término:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} S(mx) S(ny) \approx w_{11} S(x) S(y) \tag{4.11}$$

Nótese que se está considerando una placa perfecta. La función de la Ec. (4.11) únicamente es capaz de reproducir el primer modo de pandeo, por lo que en las soluciones analíticas se deberá considerar  $\phi > 0,02$  para que el fenómeno elasto-plástico aparezca en el primer modo. Introduciendo la función de prueba de la Ec. (4.11) en la segunda ecuación de Von Karman para el caso elasto-plástico Ec. (2.36):

$$-\alpha \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \gamma \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta\delta}{\delta} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{E\pi^2}{2a^2 b^2} (\beta^2 - \alpha\gamma) [C(2x) + C(2y)] w_{11} \tag{4.12}$$

En la Ec (4.12) hay dos incógnitas:  $\Phi$ ,  $w_{11}$ . Es importante tener en cuenta que los coeficientes  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  y  $\beta$  son conocidos pero varían con el estado tensional de la placa en cada instante; dependencia indicada en la Ec. (2.20) para DT y Ec. (2.22) para IT.

De la misma manera que en la Sección 3.2 se descompone  $\Phi = \Phi_h + \Phi_p$ ; para la parte homogénea se resuelven las Ecs. (2.11):

$$\frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial y^2} = \sigma_x = -\frac{N_x}{t} \quad \frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial x^2} = \sigma_y = -\frac{N_y}{t} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial x \partial y} = \tau_{xy} = -\frac{N_{xy}}{t} = 0 \tag{4.13}$$

La solución de la Ec. (4.14) satisface las tres Ecs. (4.13):

$$\Phi_h(x, y) = -\frac{N_x}{2t} y^2 \quad (4.14)$$

La ecuación anterior es válida para cualquier placa bajo compresión uniaxial, mientras que la particular es única para cada problema y satisface la Ec. (4.12);  $\Phi_p$  debe ser de la forma:

$$\Phi_p(x, y) = C_1 C(2x) + C_2 C(2y) \quad (4.15)$$

Sustituyendo la Ec. (4.15) en la (4.12):

$$\frac{16\pi^4}{\beta^2 - \alpha\gamma} \left[ \alpha \frac{C_1}{a^4} C(2x) + \gamma \frac{C_2}{b^4} C(2y) \right] = \frac{E\pi^4}{2b^2 a^2} w_{11} [C(2x) + C(2y)] \quad (4.16)$$

e identificando términos:

$$-\frac{16\alpha\pi^4}{a^4(\beta^2 - \alpha\gamma)} C_1 - \frac{E\pi^4}{2a^2 b^2} w_{11}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{a^2 E w_{11}^2 (\beta^2 - \alpha\gamma)}{32\alpha b^2} \quad (4.17)$$

$$-\frac{16\gamma\pi^4}{b^4(\beta^2 - \alpha\gamma)} C_2 - \frac{E\pi^4}{2a^2 b^2} w_{11}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{b^2 E w_{11}^2 (\beta^2 - \alpha\gamma)}{32\gamma a^2}$$

Sumando la solución homogénea y la particular se obtiene la función de Airy total:

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_p = -\frac{N_x}{2t} y^2 - \frac{E(\beta^2 - \alpha\gamma)}{32\alpha\gamma a^2 b^2} \left[ \gamma a^4 C(2x) + \alpha b^4 C(2y) \right] w_{11}^2 \quad (4.18)$$

Al igual que en la Ec. (3.24), se comprueba la equivalencia entre sollicitaciones y carga externa:

$$\begin{aligned} \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(0, y)}{\partial y^2} dy &= \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(a, y)}{\partial y^2} dy = -N_x \\ \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} dx &= \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, b)}{\partial x^2} dx = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(0, y)}{\partial x \partial y} dy = \frac{t}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(a, y)}{\partial x \partial y} dy = \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x \partial y} dx = \frac{t}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, b)}{\partial x \partial y} dx = 0$$

Una vez conocida  $\Phi$  se introduce en la primera ecuación de Von Karman Ec. (2.32):

$$\left\{ -2\alpha\gamma a^2 N_x + \frac{\alpha\gamma\pi^2 t^3}{6} E \left[ \alpha + r^2 (2\beta + 4\delta + \gamma r^2) \right] + \right. \\ \left. \frac{t\pi^2 (\beta^2 - \alpha\gamma)}{4} E w_{11} \left[ \gamma r^4 C(2x) + \alpha C(2y) \right] \right\} S(x)S(y) = 0 \quad (4.20)$$

Aplicando a la Ec. (4.20) el método de Galerkin de Ec. (3.26) y simplificando se obtiene:

$$-48\alpha\gamma a^2 N_x + \pi^2 E t \left[ 3 w_{11}^2 (\alpha\gamma - \beta^2) (\alpha + \gamma r^4) + 4\alpha\gamma t^2 (\alpha + 2\beta r^2 + 4\delta r^2 + \gamma r^4) \right] = 0 \quad (4.21)$$

De la Ec. (4.21) es posible despejar la solución genérica de la deformada  $w_{11}$ :

$$w_{11} = 2t \sqrt{\frac{\alpha\gamma \left[ \mathcal{P}_x (r^2 + 1)^2 + (\nu^2 - 1) (\alpha + 2\beta r^2 + 4\delta r^2 + \gamma r^4) \right]}{3(\nu^2 - 1)(\beta^2 - \alpha\gamma)(\alpha + \gamma r^4)}} \quad (4.22)$$

donde se ha introducido la definición de ratio de carga de post-pandeo  $\mathcal{P}_x$  de la Ec. (3.28); además  $\mathcal{P}_x$  está implícito en los coeficientes  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  que han sido calculados para el aluminio de la Tabla 4.1 y  $r = 1$ . Así, con DT quedan:

$$\alpha = \frac{4 + 1,34 \times 10^{54} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}}{3,59 + 2,03 \times 10^{107} \mathcal{P}_x^{38} \phi^{76} + 4,51 \times 10^{54} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}} \\ \beta = \frac{1,28 + 2,33 \times 10^{54} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}}{3,59 + 2,03 \times 10^{107} \mathcal{P}_x^{38} \phi^{76} + 4,51 \times 10^{54} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}} \\ \gamma = 4 \left( 3,72 + 1,75 \times 10^{53} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38} + \frac{1}{-7,71 - 8,99 \times 10^{54} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}} \right)^{-1} \\ \delta = \frac{1}{2,64 + 1,75 \times 10^{53} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}} \quad (4.23)$$

y para IT:

$$\alpha = \frac{4 + 1,16 \times 10^{54} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}}{3,59 + 4,33 \times 10^{107} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}} \quad \gamma = 4 \left( 3,72 + \frac{1}{-7,71 - 8,99 \times 10^{54} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}} \right)^{-1}$$

$$\beta = \frac{1,28 + 2,33 \times 10^{54} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}}{3,59 + 4,33 \times 10^{107} \mathcal{P}_x^{19} \phi^{38}} \quad \delta = 0,3788$$
(4.24)

La solución de Bleich se obtiene reemplazando el módulo de Young  $E$  por el módulo secante  $E_s$  en la solución elástica de la Ec (4.22), para la cual los coeficientes anteriores aplicando la Ec. (2.23) son:

$$\alpha = 1,1141 \quad \gamma = 0,3565 \quad \beta = 1,1141 \quad \delta = 0,3788 \quad (4.25)$$

y el coeficiente  $w_{11}$  para Bleich:

$$w_{11} = 2t \left( 1 + r^2 \right) \sqrt{\frac{E \mathcal{P}_x - E_s}{E_s (1 + r^4) (1 - \nu^2)}} \quad (4.26)$$

#### 4.2.1. Contraste de resultados

Se muestran en esta sección los resultados del problema de post-pandeo elasto-plástico mediante los métodos analíticos DT, IT, Bleich y MEF ; además, se comparan con las soluciones elásticas. El material de estudio es el mismo de inicio de pandeo: aluminio 14S-T6, cuyas propiedades se recogen en la Tabla 4.1.

Se representa la flecha adimensional  $w/t$  en función del factor de carga  $\mathcal{P}_x$  en el centro de la placa para  $\phi = 0,026$  en la Figura 4.9. Se han definido  $P_Y$ ,  $P_u$  que son, respectivamente, el factor de carga al que se alcanzan la tensión de fluencia  $\sigma_Y$  y la de rotura  $\sigma_u$  en *Abaqus*<sup>®</sup>. El patrón de imperfecciones introducido en *Abaqus*<sup>®</sup> para los dos casos [10] es:

$$\mathbf{w}^* = 10^{-4} \mathbf{w}_1 + 5 \times 10^{-5} \mathbf{w}_2 + 2,5 \times 10^{-5} \mathbf{w}_3 + 1,25 \times 10^{-5} \mathbf{w}_4 \quad (4.27)$$

En la Figura 4.9 todas las soluciones analíticas predicen flecha nula en el centro de la placa hasta  $\mathcal{P}_x = 1$ ; modelan una placa perfecta, por lo que no se producen deformaciones fuera del plano antes de alcanzar la carga crítica de pandeo. Sin embargo los resultados mediante MEF sí que predicen variación de la flecha para cargas inferiores a la crítica debido al patrón de imperfecciones de la Ec. (4.9).

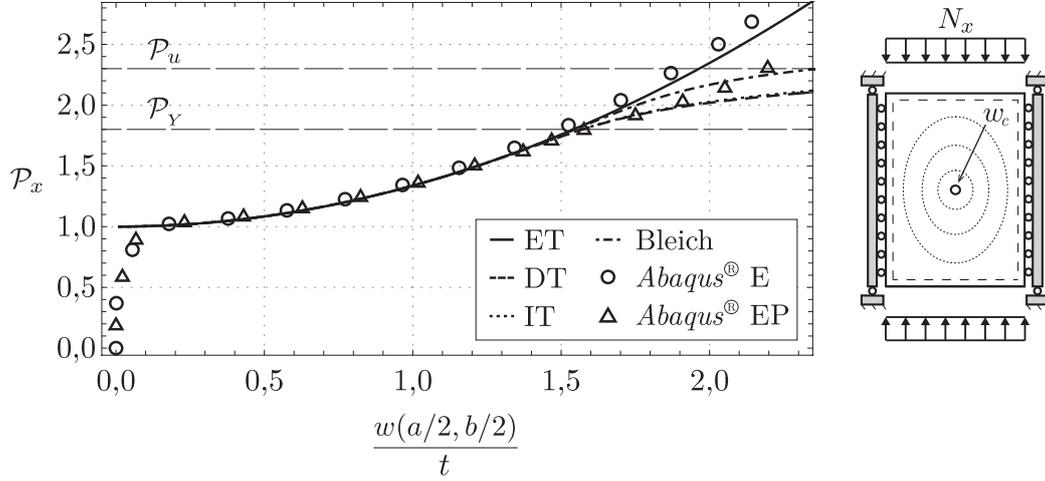


Figura 4.9: Flecha adimensional en centro de la placa  $w_c = w(a/2, b/2)/t$  vs. factor de carga  $\mathcal{P}_x$ . Resultados analíticos Bleich, DT, IT y ET y MEF elásticos y elasto-plásticos. Placa  $r = 1$ ,  $\phi = 0,026$ . Carga de fluencia  $\mathcal{P}_Y$  y de rotura  $\mathcal{P}_U$  con MEF.

A pesar de su sencillez, los resultados obtenidos mediante el método de Bleich son los que mejor se asemejan a *Abaqus*<sup>®</sup>; no obstante, tanto DT, como IT también ofrecen buenos resultados. Las mayores diferencias se encuentran cerca de la tensión de rotura  $\sigma_U$  ya que a esa tensión empieza a instaurarse el segundo modo de pandeo, no modelado en esta solución analítica. Bleich, IT y DT no predicen la rotura del material, por lo que si  $\mathcal{P}_x$  aumenta,  $w \rightarrow \infty$ .

Las teorías DT, IT y Bleich son precisas simulando  $w$ , pero además es necesario estudiar las tensiones en la placa. Las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  con IT, DT se calculan a partir de la definición Ec. (2.11) y el resultado analítico Ec. (4.18) particularizadas para  $r = 1$ :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E \pi^2 \phi^2}{6(\alpha + \gamma)(1 - \nu^2)} \left\{ 2\mathcal{P}_x(\alpha + \gamma) + \alpha \left[ (\nu^2 - 1)(\alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta) + 4\mathcal{P}_x \right] C(2y) \right\} \\ \sigma_y &= -\frac{E \gamma \pi^2 \phi^2}{6(\alpha + \gamma)(1 - \nu^2)} \left\{ 4\mathcal{P}_x + \left[ (\nu^2 - 1)(\alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta) \right] C(2x) \right\}\end{aligned}\quad (4.28)$$

Para la solución de Bleich se sustituyen los coeficientes  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  por los de la Ec. (2.23):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E \pi^2 \phi^2}{3 E_s (1 - \nu^2)} \left[ E \mathcal{P}_x + (E \mathcal{P}_x - E_s) C(2y) \right] \\ \sigma_y &= -\frac{E \pi^2 \phi^2}{3 E_s (1 - \nu^2)} (E \mathcal{P}_x - E_s) C(2x)\end{aligned}\quad (4.29)$$

La tensión adimensional  $\sigma_x/\sigma_n$  con los métodos DT Ec. (4.28), Bleich Ec. (4.29) y MEF a lo largo de la sección  $x/a = 0,5$  para  $\mathcal{P}_x = 2$  se muestra en la Figura 4.10.

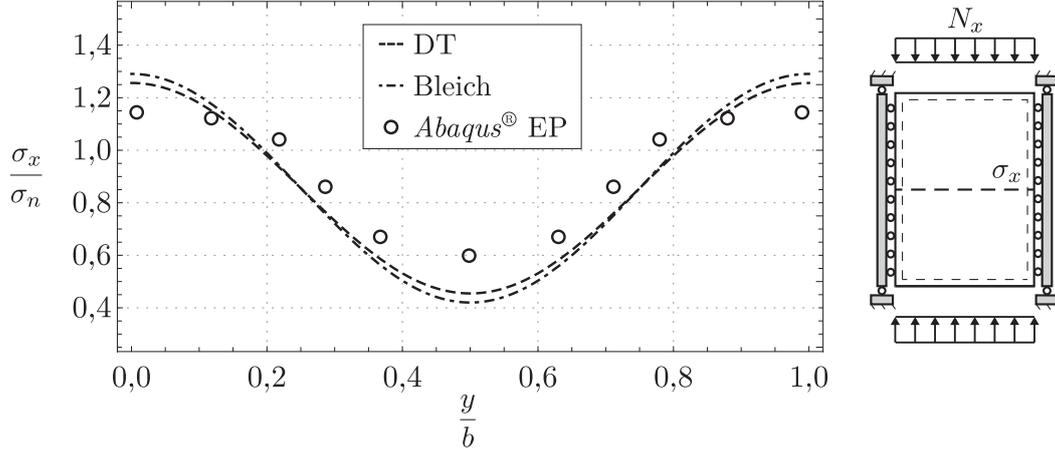


Figura 4.10: Tensión adimensional  $\sigma_x/\sigma_n$  a lo largo de la sección  $x/a = 0,5$ , para  $\mathcal{P}_x = 2$  y placa  $r = 1$ ,  $\phi = 0,026$ . Métodos MEF, DT y Bleich; la solución IT coincide con la de DT.

A diferencia de los cálculos de flecha representados en la Figura 4.9, las teorías estudiadas en esta sección no son capaces de predecir el cambio en la distribución tensional al plastificar la placa. Cuando una zona entra en régimen elasto-plástico, las zonas contiguas empiezan a estar sometidas a tensión más alta, por lo que su distribución general se vuelve más uniforme; entonces, las soluciones *Abaqus*<sup>®</sup> tienen más sentido físico que las obtenidas por Von Karman en la Figura 4.10 ya que predicen la uniformización de tensiones en los dos bordes restringidos.

Existen diferentes modos de fallo en una placa dependiendo del modo de pandeo para el que comience la plastificación del material. En la Figura 4.11 se representa la tensión adimensional  $\sigma_{VM}/\sigma_n$  para una placa con  $\phi = 0,026$ .

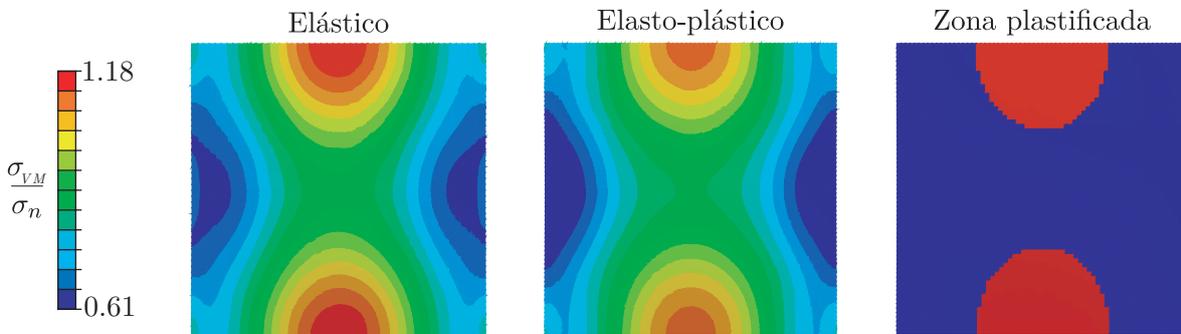


Figura 4.11: Tensión adimensional  $\sigma_{VM}/\sigma_n$  para  $\phi = 0,026$  y  $\mathcal{P}_x = 2,3$  con *Abaqus*<sup>®</sup>. En figura derecha, rojo es zona plastificada y azul zona elástica.

Con el primer modo de pandeo (Figura 4.11), los puntos más solicitados son  $(a/2, 0)$ ,  $(a/2, b)$  ya que están en los bordes obligados a permanecer rectos: dichos puntos serán los primeros en alcanzar la tensión de fluencia  $\sigma_Y$ . En la Figura 4.11 se observa que con el modelo elasto-plástico, la tensión es más uniforme en el centro de los bordes no cargados que en el modelo elástico. Se muestra en la Figura 4.11 derecha la zona plastificada justo antes de la rotura –un 30% de la placa–.

A continuación se estudia una placa más fina  $\phi = 0,015$ , relación habitual en placas aeronáuticas; esta placa entra en régimen plástico con  $\mathcal{P}_x \approx 6$  y su  $\sigma_{VM}$  está representada en la Figura 4.12.

Una placa  $0,012 < \phi < 0,025$  y material 14S-T6 desarrolla plasticidad y rotura en el segundo modo de pandeo, el primero es completamente elástico. La Figura 4.12 muestra como durante el segundo modo, los puntos más solicitados cambian con respecto a los del primer modo (similares a los de la Figura 4.11): dejan de ser los puntos centrales del borde no cargado y pasan a serlo puntos intermedios. De nuevo, la placa en régimen elasto-plástico desarrolla tensiones más uniformes que en el modelo elástico.

La Figura 4.12 derecha muestra la zona plastificada durante el segundo modo, muy diferente a la de la Figura 4.11 derecha. Por tanto, es de vital importancia conocer en qué modo de pandeo se va a desarrollar el fenómeno plástico, para elegir las zonas a reforzar y, sobre todo, revisar en inspecciones de mantenimiento.

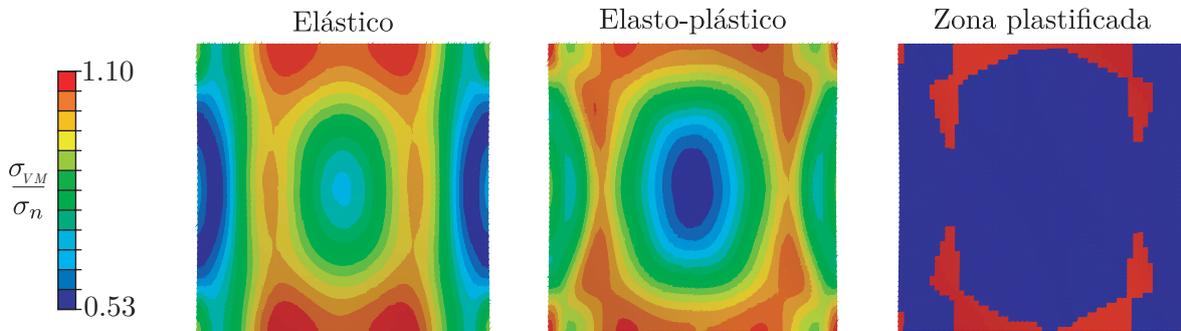


Figura 4.12: Tensión adimensional  $\sigma_{VM}/\sigma_n$  para  $\phi = 0,015$  y  $\mathcal{P}_x = 6,5$  con *Abaqus*<sup>®</sup>; plasticidad y rotura en el segundo modo. En figura derecha, rojo es zona plastificada y azul zona elástica.

### 4.3. Post-Pandeo de placas largas

En las Secciones 4.2 y 3.2 se han estudiado placas cuadradas en las que el post-pandeo se desarrolla de acuerdo al primer modo; sin embargo, las placas aeronáuticas suelen ser largas en una de las direcciones y están sometidas a factores de carga altos por lo que pandean con más de una semionda.

Se estudia en esta sección el post-pandeo de una placa SSSS rectangular  $a > b$  esquematizada

en la Figura 4.13 con los bordes no cargados inmóviles (similar a la de la Figura 3.6), cuya deformada está dominada por el tercer modo de pandeo –tres semiondas–. Las CC para el problema son idénticas a las de las Ecs. (3.14) sin imperfección  $w_0 = 0$  y en consecuencia,  $\tilde{w} = w$ .

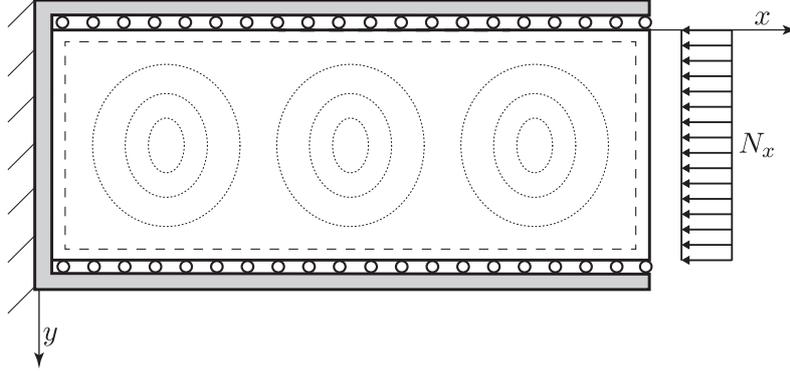


Figura 4.13: Placa rectangular larga SSSS sometida a compresión con bordes descargados inmóviles.

#### 4.3.1. Resultados analíticos

El primer paso de la solución analítica es resolver el problema de inicio de pandeo para una placa articulada bajo compresión biaxial  $N_x, N_y$  tal y como en la Sección 3.1. Se obtienen las cargas críticas:

$$K_l = \frac{\left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{l^2}{r^2} + \nu} \quad N_{cr} = \frac{b^2}{\pi^2 D} K_l \quad (4.30)$$

donde  $l$  es el modo o número de semiondas con el que pandea la placa: se impone que  $l = 3$  (ver Figura 4.13).

Al igual que en las Ecs. (3.15) y (4.11), se utiliza la función seno-seno para describir la deformada  $w$ : se aproxima la serie de Fourier al tercer término en  $m$  y el primero en  $n$ :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} S(mx) S(ny) \approx w_{31} S(3x) S(y) \quad (4.31)$$

Siguiendo un procedimiento idéntico al expuesto en las Secciones 3.2 y 4.2, se obtiene la

función de Airy total  $\Phi$ :

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_p = -\frac{N_x}{2t}y^2 - \frac{N_y}{2t}x^2 - \frac{E(\beta^2 - \alpha\gamma)}{288\alpha\gamma a^2 b^2} \left[ \gamma a^4 C(6x) + 81\alpha b^4 C(2y) \right] w_{31}^2 \quad (4.32)$$

Una vez obtenida  $\Phi$ , se calcula la reacción  $N_y$  de manera similar al método seguido en la Ec. (3.29); ahora las constitutivas son las de plasticidad Ecs. (2.19). Se parte de la cinemática Ec. (2.10) para  $\varepsilon_y$ , se sustituye la constitutiva Ec. (2.19) y se integra  $\forall y$  con las CC de las Ecs. (3.14):

$$\int_0^y \frac{\beta N_x(x, y) - \alpha N_y(x, y)}{Et(\beta^2 - \alpha\gamma)} dy = \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy + \int_0^b \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy \quad (4.33)$$

Recuérdese que  $N_y(x, y)$ ,  $N_x(x, y)$  son solicitaciones y no las cargas aplicadas  $N_x$ ,  $N_y$  de los bordes. Para introducir  $N_x$ ,  $N_y$  se recurre la Ec. (4.32) y a su definición de la Ec. (2.11). Integrando y despejando  $N_y$ :

$$N_y = \frac{\beta}{\alpha} N_x - \frac{Et\pi^2(\beta^2 - \alpha\gamma)}{8\alpha b^2} w_{31}^2 \approx \nu N_x - \frac{Et\pi^2}{8b^2} w_{31}^2 \quad (4.34)$$

Se ha aproximado  $N_y$  a la solución elástica ya que los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  también contienen al término  $N_y$  y provocan que el problema no tenga solución analítica cerrada, siendo necesario recurrir a métodos iterativos. Como se observa en las Figuras 4.15 y 4.16 es una buena aproximación ya que la plasticidad tiene lugar en un intervalo de  $\mathcal{P}_x$  pequeño.

La solución genérica de la deformada  $w_{31}$  se obtiene aplicando el método Galerkin, Ec. (3.26):

$$w_{31} = 2t \sqrt{\alpha\gamma \frac{\mathcal{P}_x (r^2 + 9)^2 - (\nu^2 - 1) (81\alpha + 18\beta r^2 + 36\delta r^2 + \gamma r^4)}{3(\nu^2 - 1) (81\alpha^2\gamma - 81\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 r^4 + 2\alpha\gamma r^4 - \beta^2\gamma r^4)}} \quad (4.35)$$

$\mathcal{P}_x$  está implícito en el numerador y además en los coeficientes  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ : para DT se muestran en las Ecs. (4.23) y para IT en las Ecs. (4.24).

La solución de Bleich se obtiene reemplazando el módulo de Young  $E$  por el módulo secante  $E_s$  en la solución elástica de la Ec (4.35); esta solución es obtenida sustituyendo los coeficientes de la Ecs. (4.25):

$$w_{31} = \frac{2}{3} t (9 + r^2) \sqrt{\frac{E \mathcal{P}_x - E_s}{E_s (27 + r^4) (1 - \nu^2)}} \quad (4.36)$$

### 4.3.2. Selección de la relación de aspecto $r$

En la Figura 4.13 se plantean tres semiondas durante el postpandeo. La relación de  $r$  para este problema debe discutirse, lo más intuitivo es plantear una placa que directamente comience el post-pandeo con el tercer modo. Para ello se hallan los valores de  $r$  para los que se produce el cambio de modo, intersectando las curvas Ec. (4.30) de modos contiguos:

$$\begin{aligned}
 K_1 = K_2 &\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{1}{r^2} + \nu} = \frac{\left(\frac{4}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{4}{r^2} + \nu} \Rightarrow r_{1 \rightarrow 2} = 2,01 \\
 K_2 = K_3 &\Rightarrow \frac{\left(\frac{4}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{4}{r^2} + \nu} = \frac{\left(\frac{9}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{9}{r^2} + \nu} \Rightarrow r_{2 \rightarrow 3} = 2,62 \quad (4.37) \\
 K_3 = K_4 &\Rightarrow \frac{\left(\frac{9}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{9}{r^2} + \nu} = \frac{\left(\frac{16}{r^2} + 1\right)^2}{\frac{16}{r^2} + \nu} \Rightarrow r_{3 \rightarrow 4} = 3,11
 \end{aligned}$$

Por tanto, si se desea que la placa pandee inicialmente con tres semiondas,  $r$  debe ser tal que  $2,62 < r < 3,11$ . El principal problema de elegir un  $r$  en ese intervalo es que la transición al siguiente modo se produce para valores de  $\mathcal{P}_x$  muy bajos. Por ejemplo, para  $r = 3$  y de acuerdo con los datos de la Tabla 4.1:

$$\begin{aligned}
 K_1 = 2,86 \Rightarrow \mathcal{P}_x = 1,052 & \qquad K_3 = 2,72 \Rightarrow \mathcal{P}_x = 1,000 \\
 K_2 = 2,75 \Rightarrow \mathcal{P}_x = 1,012 & \qquad K_4 = 2,73 \Rightarrow \mathcal{P}_x = 1,003
 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Es decir, con  $\Delta\mathcal{P}_x = 0,052$  la placa ha pasado por cuatro modos diferentes de pandeo. En consecuencia, el tercer modo no puede considerarse de desarrollo de post-pandeo estable, habría que considerar al menos el quinto o sexto. Si se elige por ejemplo, un valor inferior  $r = 2$ , la placa iniciará el pandeo con una semionda, pero pronto transicionará a tres, que se mantendrán durante un intervalo amplio de carga  $\mathcal{P}_x \in (1, 6)$  (intervalo obtenido con *Abaqus*<sup>®</sup> ver Figura 4.14).

$$\begin{aligned}
 K_1 = 2,74 \Rightarrow \mathcal{P}_x = 0,67 & \qquad K_3 = 4,11 \Rightarrow \mathcal{P}_x = 1,000 \\
 K_2 = 3,03 \Rightarrow \mathcal{P}_x = 0,74 & \qquad K_4 = 5,78 \Rightarrow \mathcal{P}_x = 1,41
 \end{aligned} \quad (4.39)$$

En la Figura 4.14 se muestra la evolución del factor de carga con los incrementos de longitud de arco  $\Delta\tilde{a}$  obtenidos mediante *Abaqus*<sup>®</sup> para  $r = 2$ ,  $\phi = 0,014$  tanto en el caso elástico como en el elasto-plástico. La bifurcación inicial ( $\Delta\tilde{a} = 0$ ) se produce con  $\mathcal{P}_x < 1$  dado que los resultados están adimensionalizados con  $K_3$  y no con  $K_1$ . De acuerdo con la figura, el intervalo  $\Delta\tilde{a} \in (0, 15)$  representa el primer modo de pandeo, que se desarrolla en un  $\Delta\mathcal{P}_x \approx 0,3$ , demasiado pequeño como para estudiar el post-pandeo de ese modo. El segundo modo representado por  $\Delta\tilde{a} \in (25, 50)$  y el tercero por  $\Delta\tilde{a} \in (90, 120)$  ocurren para rangos de  $\mathcal{P}_x$  mayores, siendo este último el más amplio y el que se va a estudiar. Los tramos  $\Delta\tilde{a} \in (15, 25) \cup (50, 90)$  son inestables y de transición entre modos.

Las curvas elástica y elasto-plástica se separan en  $\Delta\tilde{a} \approx 110$ ; para estas iteraciones se alcanza la tensión de fluencia  $\sigma_Y$  en algún punto por lo que incrementos iguales de carga producen mayores deformaciones en el modelo elasto-plástico.

Cuando la placa sea más larga, habrá que utilizar un modo superior ya que los primeros cambiarán con incrementos de carga muy pequeños.

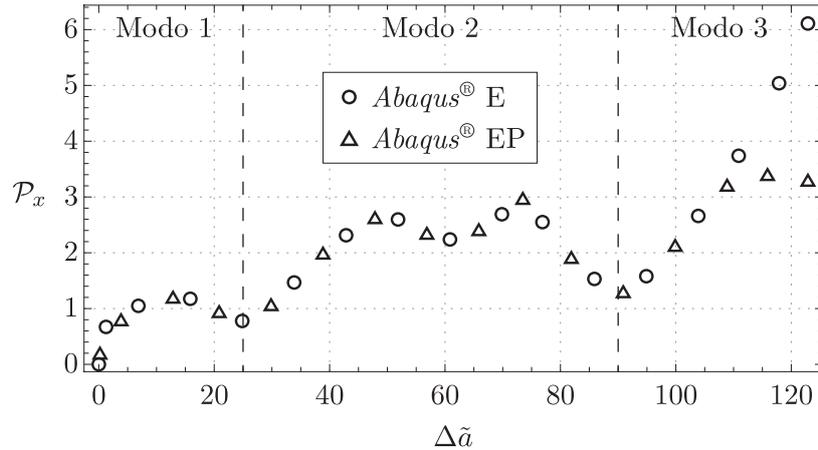


Figura 4.14: Evolución del factor de carga  $\mathcal{P}_x$  en función de la longitud de arco  $\Delta\tilde{a}$  en *Abaqus*<sup>®</sup>. Líneas verticales indican predominio del número de modo. Comparación de modelo MEF elástico y elasto-plástico.

### 4.3.3. Deformada y movimientos en el plano

En primer lugar, se analiza  $w$  en el plano medio de la placa: la Figura 4.15 representa la flecha máxima en el punto  $(a/6, b/2)$  frente a  $\mathcal{P}_x$  para diferentes modelos elásticos (ET y *Abaqus*<sup>®</sup> E) y elasto-plásticos (DT, IT, Bleich y *Abaqus*<sup>®</sup> EP). Todas las cargas han sido adimensionalizadas para  $N_{cr}$  de la Ec. (4.30) con  $l = 3$ .

Los resultados con *Abaqus*<sup>®</sup> de la Figura 4.15 son los correspondientes al intervalo  $\Delta\tilde{a} \in (90, 120)$  de la Figura 4.14 ya que pertenecen principalmente al tercer modo. En la primera figura, la solución elástica Von Kármán puede considerarse válida hasta  $\mathcal{P}_x \approx 5$  ya que para valores

superiores comienza la transición al cuarto modo de pandeo; además, en el punto  $(a/6, b/2)$  se verifica  $w \rightarrow 0$  ya que pasa de un máximo a un nodo. Nótese que para  $\mathcal{P}_x > 5$  el error entre Von Karman y *Abaqus*<sup>®</sup> EP es superior al  $< 20\%$  y la solución analítica basada en el tercer modo ya no es válida.

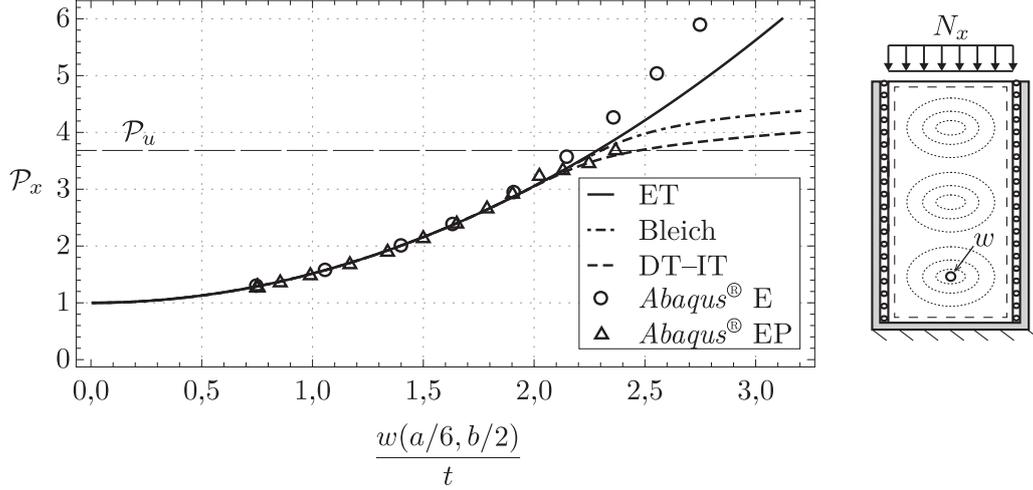


Figura 4.15: Flecha máxima adimensional  $w/t$  en el punto  $(a/6, b/2)$  vs. factor de carga  $\mathcal{P}_x$  para las teorías analíticas ET, DT, IT, Bleich y para *Abaqus*<sup>®</sup> elástico y elasto-plástico. Placa rectangular  $r = 2$ ,  $\phi = 0,014$ . Carga de rotura  $\mathcal{P}_U$ .

En cuanto a los resultados elasto-plásticos, la plasticidad aparece por primera vez bajo  $\mathcal{P}_x \approx 3,2$  en una placa más fina que la cuadrada de la Sección 4.2; luego, a mayor  $r$  menor es el  $\phi$  al que se alcanza  $\sigma_Y$  para un mismo  $\mathcal{P}_x$ . Las teorías DT, IT ofrecen prácticamente la misma solución por lo que se representan con una única línea en la Figura 4.15. Tanto DT, IT como Bleich ofrecen buenos resultados pero no son capaces de predecir la rotura de la placa, por lo que con ellas  $w \rightarrow \infty$ . Sin embargo, en el rango que tiene lugar la fluencia  $3,2 < \mathcal{P}_x < 3,8$  la solución elástica ET subestima la flecha y en consecuencia, las elasto-plásticas también estarán subestimadas: la solución DT-IT es más precisa.

Por otro lado, los desplazamientos  $u, v$  en el plano medio de la placa se obtienen de manera análoga a las Ecs. (3.32): se parte de las cinemáticas Ecs. (2.10) primera y segunda, se sustituyen las constitutivas Ecs. (2.19) para  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  y se integran en el borde correspondiente:

$$u(x, y) = u(0, y) + \int_0^x \frac{\beta N_y(x, y) - \gamma N_x(x, y)}{E t (\beta^2 - \alpha \gamma)} dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.40)$$

$$v(x, y) = v(x, 0) + \int_0^y \frac{\beta N_x(x, y) - \alpha N_y(x, y)}{E t (\beta^2 - \alpha \gamma)} dy - \int_0^y \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy$$

De nuevo se sustituyen  $N_x(x, y)$ ,  $N_y(x, y)$  por la definición de  $\Phi$  de la Ec. (2.11) y su expresión particular Ec. (4.32) obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \frac{\gamma N_x - \beta N_y}{Et(\beta^2 - \alpha\gamma)} x - \frac{9\pi^2 w_{31}^2}{8r^2 b^2} x - \frac{\pi w_{31}^2}{48\alpha b r} [\beta r^2 - 9\alpha + 9\alpha C(2y)] S(6x) \\
 v(x, y) &= \frac{\alpha N_y - \beta N_x}{Et(\beta^2 - \alpha\gamma)} y - \frac{\pi^2 w_{31}^2}{8b^2} y - \frac{\pi w_{31}^2}{16\gamma r^2} [9\beta - \gamma r^2 + \gamma r^2 C(6x)] S(2y)
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

La Figura 4.16 presenta  $u$  en el punto medio del borde cargado ( $a, b/2$ ) vs.  $\mathcal{P}_x$  para los modelos elásticos (ET, *Abaqus*<sup>®</sup> E.) y elasto-plásticos (DT, IT, Bleich, *Abaqus*<sup>®</sup> E.P);  $u$  es negativo dado que el borde se mueve en dirección contraria a  $x$ .

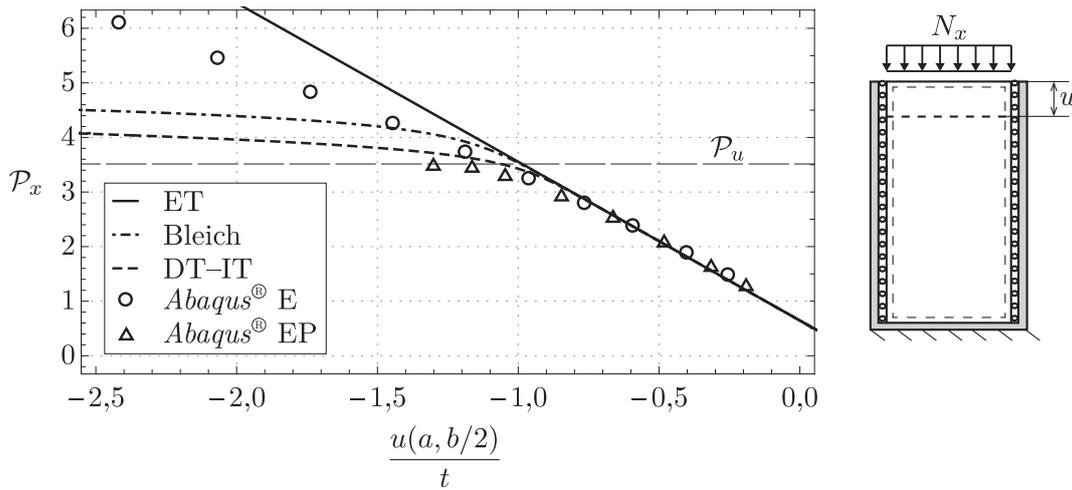


Figura 4.16: Movimiento  $u/t$  en el centro del borde cargado ( $a, b/2$ ) vs. factor de carga  $\mathcal{P}_x$  para teorías analíticas ET, DT, IT, Bleich y para *Abaqus*<sup>®</sup> elástico y elasto-plástico. Placa rectangular  $r = 2$ ,  $\phi = 0,014$ .

Al igual que en la Figura 4.15 sólo se representan los resultados con *Abaqus*<sup>®</sup> en el intervalo  $\Delta\tilde{\alpha} \in (90, 120)$  de la Figura 4.14. En la Figura 4.16, la solución elástica Von Karman puede considerarse válida hasta  $\mathcal{P}_x \approx 4,2$ , carga inferior a la de la Figura 4.15, ya que comparada con *Abaqus*<sup>®</sup> el error es  $< 20\%$ . La predicción de  $u$  de Von Karman es lineal, mientras que la de *Abaqus*<sup>®</sup> se curva conforme aumenta  $\mathcal{P}_x$ ; la CC de  $u = cte$  en el borde cargado pierde validez.

La plasticidad del primer punto aparece, de nuevo, con  $\mathcal{P}_x \approx 3,2$  y la rotura con  $\mathcal{P}_x = 3,8$ . Tanto DT-IT como Bleich ofrecen buenos resultados con la diferencia de que no predicen la rotura y en ellos  $u \rightarrow \infty$ . Al contrario que para  $w$ , la fluencia tiene lugar con  $3,2 < \mathcal{P}_x < 3,8$ , la solución

elástica sobrestima la flecha y en consecuencia, la elasto-plástica también; en consecuencia, la solución DT-IT es más precisa.

Se muestran  $u$ ,  $v$  en la Figura 4.17 para  $\mathcal{P}_x = 2$ ; se representa cualquiera de los métodos ya que todas las soluciones se superponen.

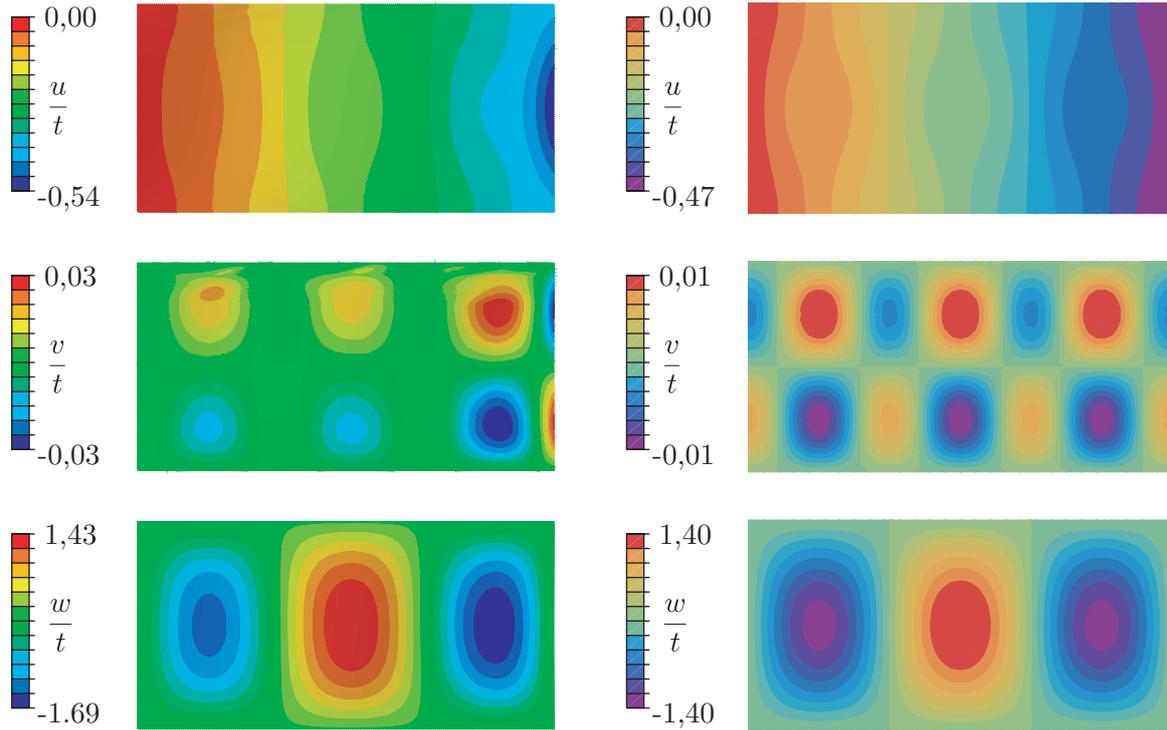


Figura 4.17: Movimientos en el plano adimensionales  $w/t$ ,  $u/t$ ,  $v/t$  para  $\mathcal{P}_x = 2$ . Izquierda: *Abaqus*<sup>®</sup>, derecha: Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

La primera gran diferencia aparece en  $u$ : la CC  $u = cte$  en Von Karman no es cierta. No obstante, el resto de la distribución es muy similar, incluso en los valores máximos y mínimos; además se comprueba la CC  $u(0, y) = 0$ .

El movimiento  $v$  es el que mayor discrepancias presenta debido a que es dos órdenes de magnitud inferior a  $w$ . Por este mismo motivo, no tiene mucha importancia e incluso podría despreciarse. En cuanto a  $w$ , es la más precisa tanto en forma como en valores máximos y mínimos. Nótese que en *Abaqus*<sup>®</sup> las tres semiondas no son perfectas, sino que la cercana al borde cargado es mayor que la del borde no cargado.

#### 4.3.4. Reacciones

La reacción  $N_y$  calculada en la Ec. (4.34) es una aproximación, ya que en realidad no es constante. Que  $N_y$  sea variable en  $x$  implicaría considerar esta dependencia en todo el proceso,

para el que aparecen numerosas derivadas parciales e integrales. El problema se complica tanto que no admite solución analítica cerrada y obliga a recurrir a métodos numéricos.

Con el fin de comprobar la validez de  $N_y$  de la Ec. (4.34), se representan en la Figura 4.18 las reacciones *Abaqus*<sup>®</sup> y Von Karman. Además, dado que la solución MEF captura la variabilidad de  $N_y$ , se representa también su promedio.

La reacción en el borde no cargado es oscilatoria, bastante diferente de una constante. Sin embargo, cuando se realiza el promedio de la onda coincide con la aproximación de la Ec. (4.34) con un error del 2%. Esto permite que las soluciones obtenidas mediante Von Karman sean bastante precisas y que la  $N_y$  de la Ec. (4.34) se pueda asumir una buena aproximación.

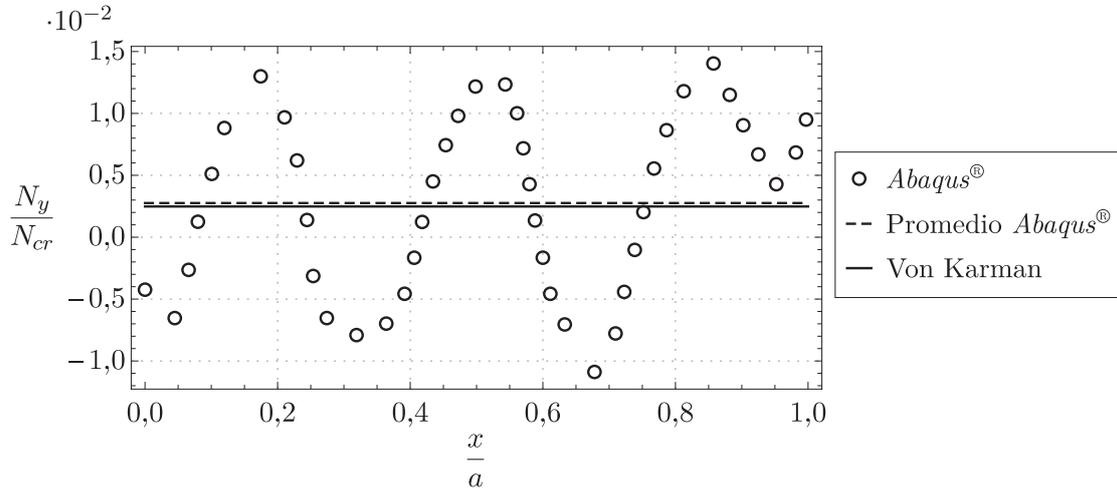


Figura 4.18: Reacción  $N_y$  en los bordes no cargados para  $\mathcal{P}_x = 2$ . Resultados *Abaqus*<sup>®</sup>, promediados y Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

#### 4.3.5. Tensiones

Las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en IT, DT se calculan a partir de la definición  $\Phi$  de la Ec. (2.11) y el resultado analítico Ec. (4.32). Como la placa únicamente está sometida a compresión, los cortantes  $\tau_{xy}$  son nulos. Así,  $\sigma_x$  en el caso de estudio queda:

$$\sigma_x = -\frac{E \pi^2 \phi^2}{12r^2 (1 - \nu^2)} \left\{ \frac{(9 + r^2)^2}{9 + \nu r^2} \mathcal{P}_x + \frac{18\alpha (\alpha\gamma - \beta^2) (r^2 + 9)^2}{81\alpha^2\gamma - 81\alpha\beta^2 + \alpha\gamma(\gamma + 2)r^4 - \beta^2\gamma r^4} \right. \\ \left. \left[ \mathcal{P}_x - \frac{1 - \nu^2}{(r^2 + 9)^2} (81\alpha + 18\beta r^2 + 36\delta r^2 + \gamma r^4) \right] C(2y) \right\} \quad (4.42)$$

y  $\sigma_y$  es:

$$\sigma_y = -\frac{E\pi^2\phi^2}{36(1-\nu^2)} \left\{ (r^2+9)^2 \frac{81\nu\mathcal{P}_x + \nu(\mathcal{P}_x+2)r^4 - 18(\mathcal{P}_x-1)r^2}{r^2(r^4+27)(\nu r^2+9)} + \frac{6\gamma(\alpha\gamma-\beta^2)(r^2+9)^2}{81\alpha^2\gamma-81\alpha\beta^2+\alpha\gamma(\gamma+2)r^4-\beta^2\gamma r^4} \left[ \mathcal{P}_x - \frac{1-\nu^2}{(r^2+9)^2} (81\alpha+18\beta r^2+36\delta r^2+\gamma r^4) \right] C(6x) \right\} \quad (4.43)$$

La solución de Bleich se obtiene reemplazando en la Ec (4.43) los coeficientes elásticos  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  de la Ec. (2.23) e intercambiando  $E$  por  $E_s$ . Para este método,  $\sigma_x$  es:

$$\sigma_x = -\frac{E\pi^2\phi^2(r^2+9)^2}{12r^2E_s(1-\nu^2)(r^4+27)(\nu r^2+9)} \left[ E\mathcal{P}_x(r^4+27) - 6(\nu r^2+9)(E_s - E\mathcal{P}_x)C(2y) \right] \quad (4.44)$$

y la tensión  $\sigma_y$  en Bleich queda:

$$\sigma_y = -\frac{E\pi^2\phi^2(r^2+9)^2}{36r^2E_s(1-\nu^2)(r^4+27)(\nu r^2+9)} \left[ 18r^2(E_s - E\mathcal{P}_x) + E\nu\mathcal{P}_x(r^4+81) + 2E_s\nu r^4 - 2r^2(\nu r^2+9)(E_s - E\mathcal{P}_x)C(6x) \right] \quad (4.45)$$

La tensión normalizada  $\sigma_x/\sigma_n$  se presenta en la Figura 4.19 para diferentes valores de  $\mathcal{P}_x$ ; además, no importa qué solución analítica de Von Karman se elija ya que para  $\mathcal{P}_x \in (1, 3)$  todos los resultados se superponen.

La tensión  $\sigma_x$  resulta en una única semionda en  $x = a/2$ , siendo los bordes articulados los puntos más cargados y el centro de la placa los más descargados. Para todos los factores de carga existen pocas discrepancias entre los resultados obtenidos mediante MEF y Von Karman, por lo que se asumen válidas ambas teorías: en el centro de la placa es donde más discrepancias aparecen, mayores cuando mayor es  $\mathcal{P}_x$ .

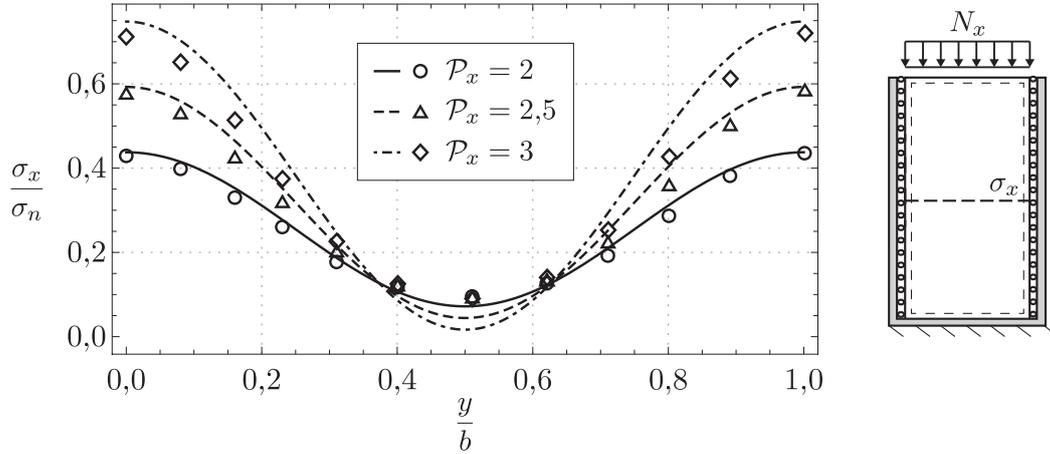


Figura 4.19: Tensión normalizada  $\sigma_x/\sigma_n$  a lo largo de la línea  $x = a/2$  vs.  $\mathcal{P}_x$ . Marcadores: *Abaqus*<sup>®</sup>, líneas: Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

En la Figura 4.20 se muestra la tensión normalizada  $\sigma_y/\sigma_n$  para dos valores de  $\mathcal{P}_x$ . La solución analítica predice tres semiondas idénticas en dirección  $x$ , mientras que en MEF se obtiene un aumento de la tensión en el borde cargado; cuanto mayor es  $\mathcal{P}_x$  más acusado es este efecto. Nótese que los máximos de  $\sigma_y/\sigma_n$  son cuatro veces menores que los de  $\sigma_x/\sigma_n$ , siendo esta última en consecuencia la más importante.

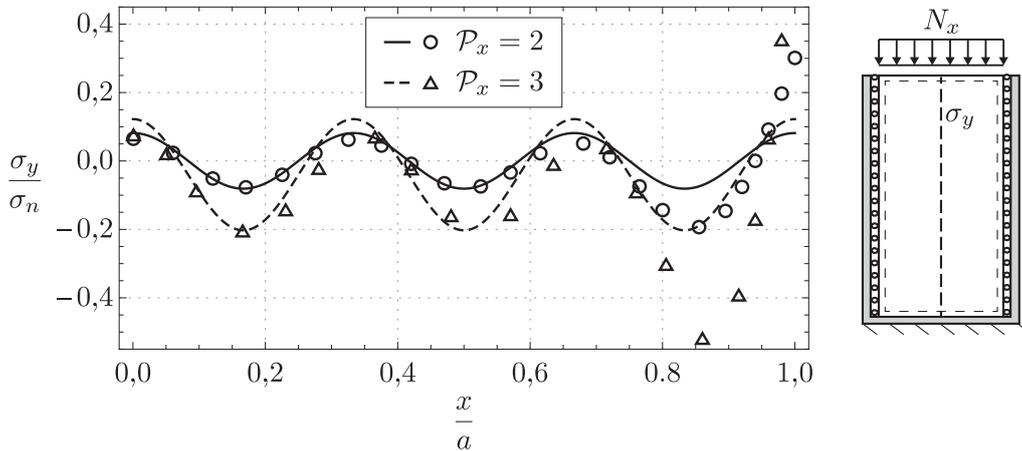


Figura 4.20: Tensión normalizada  $\sigma_y/\sigma_n$  a lo largo de la línea  $y = b/2$  vs.  $\mathcal{P}_x$ . Marcadores: *Abaqus*<sup>®</sup>, líneas: Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

Se comparan los resultados de las Ecs. (4.43) en la Figura 4.21 derecha con los de *Abaqus*<sup>®</sup> en la Figura 4.21 izquierda. Ambos métodos predicen una única semionda para  $\sigma_x$  en  $y$  y tres para  $\sigma_y$  en dirección  $x$ . Al igual que en la Figura 4.20, para *Abaqus*<sup>®</sup>  $\sigma_y$  es mayor cerca del borde cargado, fenómeno que Von Karman no es capaz de predecir.

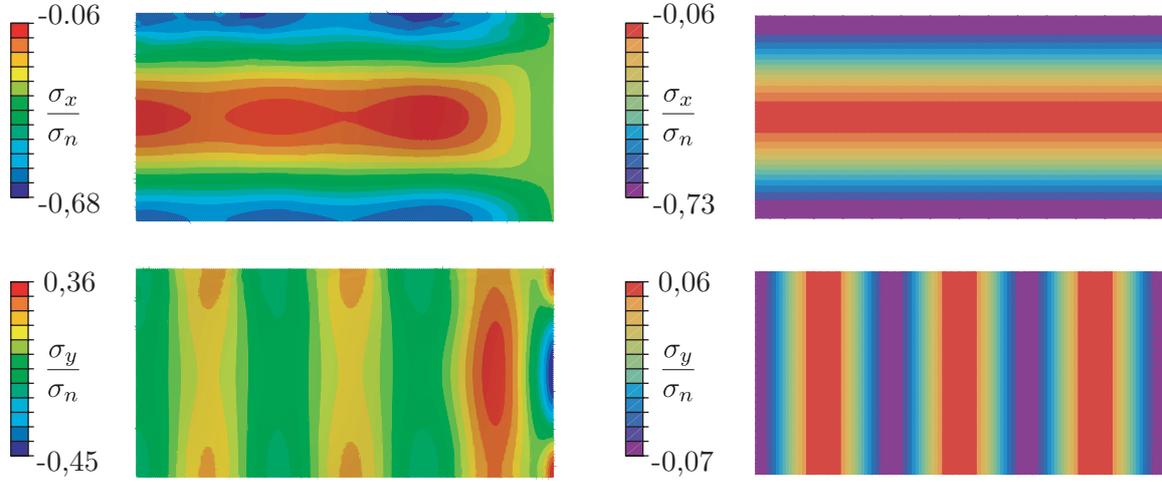


Figura 4.21: Tensiones normalizadas  $\sigma_x/\sigma_n$ ,  $\sigma_y/\sigma_n$  para  $\mathcal{P}_x = 2$ . Izquierda: *Abaqus*<sup>®</sup>, derecha: Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

Por último, se presenta en la Figura 4.22 la tensión  $\sigma_{VM}$  justo antes de la rotura de la placa  $\mathcal{P}_x = 3,8$  con *Abaqus*<sup>®</sup> elástico y elasto-plástico. Existe una gran diferencia para  $\sigma_{VM}$  entre los puntos del centro de la placa y los de los bordes no cargados: los primeros están a una tensión prácticamente nula y los segundos a la máxima, por lo que la placa no es muy eficiente. Los puntos mas solicitados son  $(5a/6, 0)$ ,  $(5a/6, b)$  y cuando entran en zona plástica, las tensiones aumentan hacia el centro de la placa.

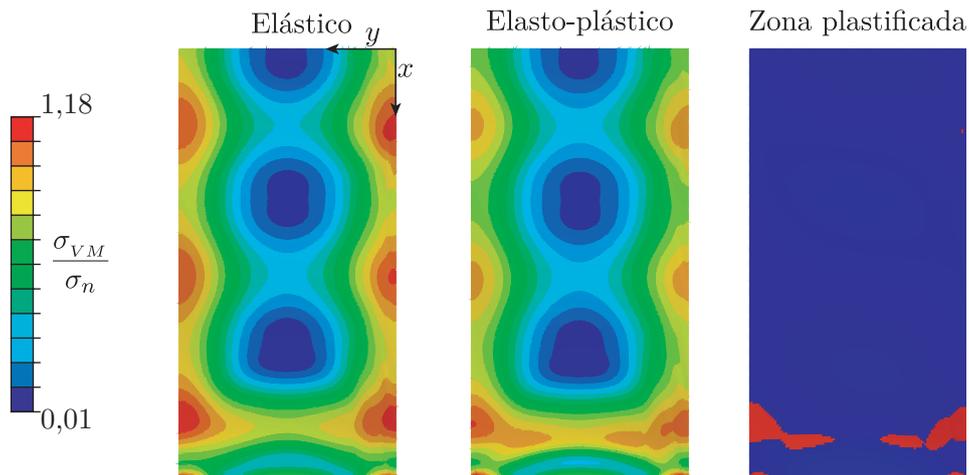


Figura 4.22: Tensión de Von Mises normalizada  $\sigma_{VM}/\sigma_n$  justo antes de la rotura  $\mathcal{P}_x = 3,8$ . Comparación en *Abaqus*<sup>®</sup> del modelo elástico, elasto-plástico y zona plastificada. Placa girada 90 en  $z$  con respecto al sistema de referencia de la Figura 4.13.

## *Pandeo y post-pandeo elasto-plástico e imperfecto de paneles*

Las placas aeronáuticas están rigidizadas por una serie de vigas de pared delgada: los larguerillos. Una de las principales funciones de los rigidizadores es aumentar la carga crítica de pandeo, ya que fuerzan a la placa a pandear con un modo más alto que el primer modo natural de la placa.

Los rigidizadores pueden ser de dos tipos: sección cerrada y abierta. Los primeros, tienen mucha más rigidez a torsión pero no permiten observar deterioros internos como la corrosión. Las secciones más habituales son abiertas, destacando algunas como la tipo  $Z$ ,  $\Omega$ , doble  $T$ .

Una de las mejores configuraciones es la de los paneles integrales en las cuales los larguerillos forman parte de la placa, por lo que evitan el remachado y consiguen un bajo peso. No son comunes dado a que su fabricación es costosa e implica mecanizado. El *Concorde* (Figura 5.1b) diseñado en la década de 1970, está formado por paneles integrales distribuidos a lo largo del fuselaje y del ala, dado que debía alcanzar velocidades supersónicas y poseer una alta carga de pago. Actualmente, los métodos de fabricación son mucho más sofisticados y rápidos, debido a lo cual se están utilizando en más aeronaves como el *Airbus A320 neo* (Figura 5.1a).



(a) Sección de fuselaje del *Airbus A320 neo* [38].



(b) Sección fuselaje del *Concorde* [39].

Figura 5.1: Estructuras aeronáuticas formadas por paneles integrales.

Se desarrolla en este capítulo el inicio de pandeo y post-pandeo de un panel integral; además, se recapitula el estudio de imperfecciones del Capítulo 3 y el efecto elasto-plástico del Capítulo 4. Un esquema bastante realista del panel de un ala como el de la Figura 5.1b está representado en la Figura 5.2: una placa larga rigidizada con un número de larguerillos  $s$  en la dirección principal de carga  $x$  y soportada en los extremos por dos costillas y dos largueros.

Dada la baja rigidez torsional de las costillas [22], las condiciones de contorno que imponen

se aproximan a las de un borde articulado. La CC que imponen los largueros no se considera debido a que la placa es larga y los largueros se encuentran lejos del centro de esta placa.

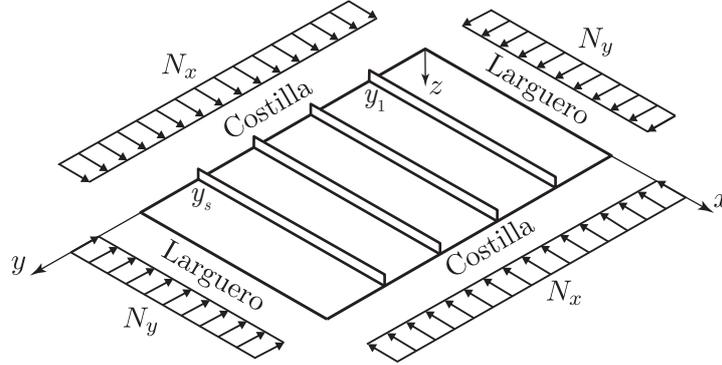


Figura 5.2: Esquema de un panel integral. Sistema de referencia y cargas.

El estudio el comportamiento de la placa es diferente en MEF y en forma analítica. El segundo, esquematizado en la Figura 5.3 izquierda, se simplifica notablemente si se consideran los tramos entre largueros completos, en caso contrario las funciones de prueba trigonométricas seno y coseno no son válidas y es necesario recurrir a funciones complicadas como la de Legendre. La rigidez de las vigas en las que se establece la discontinuidad debe reducirse a la mitad. Además, dada la condición de simetría/antisimetría en estas discontinuidades, la estructura tiene restringido el movimiento  $\tilde{v}$ , efecto que se modela con una reacción  $N_y$ .

En cuanto al MEF, cuyo modelo está esquematizado en la Figura 5.3 derecha, lo más sencillo es cortar la placa por las zonas donde la deformada es simétrica y así poder aplicar la CC correspondiente *symmetry* en *Abaqus*<sup>®</sup>. El propio programa calcula la reacción  $N_y$  al imponer esta última CC.

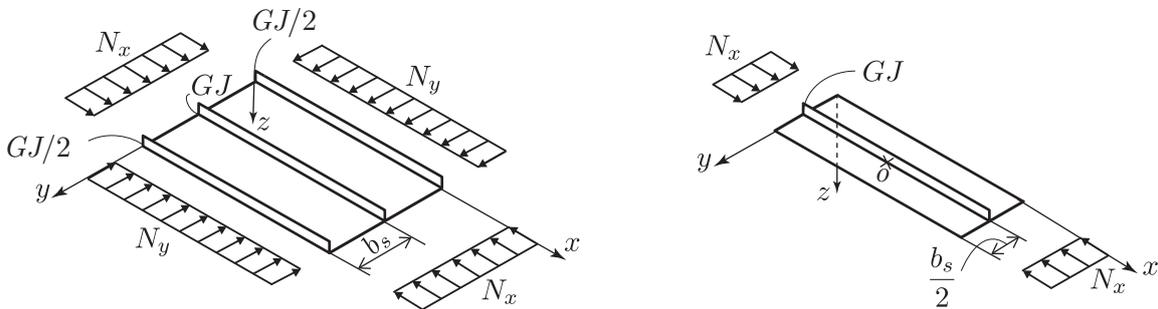


Figura 5.3: Región de estudio de un panel integral. Izquierda: esquema para el modelo analítico. Derecha: esquema para el modelo numérico en *Abaqus*<sup>®</sup>.

Las CC para el método de Ritz únicamente son las de antisimetría-simetría en los bordes de

$y = \text{cte}$  y las de borde articulado debido a las costillas en los bordes de  $x = \text{cte}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, 0) = \tilde{v}(x, 2b_s) = 0 & \quad \text{Simetría/antisimetría en } x \\ \tilde{w}(0, y) = \tilde{w}(a, y) = 0 & \quad \text{Bordes articulados} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Con *Abaqus*<sup>®</sup> es necesario imponer más CC; la primera es la de centro inmóvil en las direcciones  $x, y$  ya que MEF no puede proceder si no fija al menos un nodo en ambas direcciones. A continuación se aplican las de simetría en los bordes de  $y = \text{cte}$  que restringen además del movimiento en  $y$  los giros en  $x, z$ . Por último, se establecen las CC de los bordes articulados:

$$\begin{aligned} U1(x_o, y_o) = U2(x_o, y_o) = 0 & \quad \text{Centro inmóvil en } x, y \\ U2(x, 0) = UR1(x, 0) = UR3(x, 0) = 0 & \quad \text{Simetría en } x \\ U2(x, b_s) = UR1(x, b_s) = UR3(x, b_s) = 0 & \quad \text{Simetría en } x \\ U3(0, y) = U3(a, y) = 0 & \quad \text{Bordes articulados} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nótese que en ancho del panel es la mitad en *Abaqus*<sup>®</sup> que en el modelo analítico.

## 5.1. Inicio de pandeo

Existen varios tipos de pandeo en un panel, entre los que destacan dos: pandeo local y pandeo global.

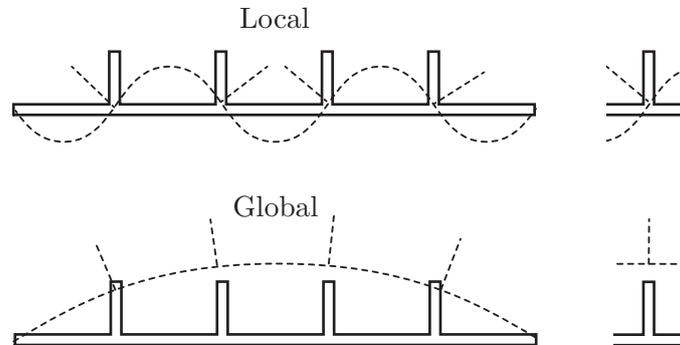


Figura 5.4: Tipos de pandeo en un panel. Arriba: pandeo local de la piel, giro del larguerillo. Abajo: pandeo global del panel, flexión del larguerillo.

El pandeo local se produce entre los larguerillos y por tanto estos sólo giran; mientras que en el pandeo global tanto el panel como los larguerillos flectan. A pesar de que en el último los larguerillos también giran, el ángulo es tan pequeño en comparación con la flecha que el movimiento puede aproximarse a sólo una flexión. El pandeo local se representa en la Figura 5.4 superior y el global en la inferior.

El pandeo global es catastrófico para las estructuras y se desarrolla a cargas críticas superiores a las de pandeo local, debido a que la energía de flexión del larguerillo en un panel integral es de magnitud muy superior a la de torsión. Como primera aproximación, en este trabajo se asume pandeo local y se establecen los larguerillos como nodos. Se ha comprobado para el estudio que cuatro términos  $m$  es suficiente:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^4 w_{m2} S(mx) S(2y) \quad (5.3)$$

En primer lugar se calcula la carga lateral  $N_y$  que fuerza la simetría de la deformada y permite estudiar una única porción de panel. Considerando las cinemáticas Ecs. (2.3) y las constitutivas Ecs. (2.4) antes del pandeo e imponiendo  $\tilde{v} = 0$  en los bordes descargados :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{b_s} \left( \frac{N_y - \nu N_x}{Et} \right) dy = 0 \quad \Rightarrow \quad N_y = \nu N_x \quad (5.4)$$

donde se han asumido  $N_x, N_y$  constantes. El primer término de  $\Pi$  en la Ec (2.37) es la energía interna de la placa, la cual se obtiene de la Ec. (2.8).

$$U_{bp} = \frac{\pi^4 D}{64a^3 b_s^3} \left[ w_{12}^2 (4a^2 + 4b_s^2)^2 + 16 w_{22}^2 (a^2 + 4b_s^2)^2 + w_{32}^2 (4a^2 + 36b_s^2)^2 + 16 w_{42}^2 (a^2 + 16b_s^2)^2 \right] \quad (5.5)$$

La energía interna del larguerillo resulta de sustituir la Ec. (5.3) en la (2.39). Se compone de tres términos: de flexión, de torsión de Saint-Venant y de torsión alabeada. En primer lugar, la primera es es:

$$U_{bs} = \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{EI_{ys} \pi^4 (w_{12}^2 + 16w_{22}^2 + 81w_{32}^2 + 256w_{42}^2) S(2y)^2}{4a^3} \right]_{y=y_s} = \quad (5.6)$$

$$\frac{E\pi^4 (w_{12}^2 + 16w_{22}^2 + 81w_{32}^2 + 256w_{42}^2)}{4a^3} \left[ \frac{I_y}{2} S(0)^2 + I_y S\left(\frac{2b_s}{2}\right)^2 + \frac{I_y}{2} S(2b_s)^2 \right] = 0$$

Como era de esperar,  $U_{bs}$  es nula debido a la hipótesis de pandeo local, por la cual el larguerillo sólo gira (ver Figura 5.4). A continuación, la energía de torsión de Saint-Venant es:

$$\begin{aligned}
 U_J &= \sum_{s=1}^3 \left[ GJ_s \frac{\pi^4 (w_{12}^2 + 4w_{22}^2 + 9w_{32}^2 + 16w_{42}^2) C(2y)^2}{4ab_s^2} \right]_{y=y_s} = \\
 &= \frac{G\pi^4 (w_{12}^2 + 4w_{22}^2 + 9w_{32}^2 + 16w_{42}^2)}{4ab_s^2} \left[ \frac{J}{2} C(0)^2 + JC \left( \frac{2b_s}{2} \right)^2 + \frac{J}{2} C(2b_s)^2 \right] = \quad (5.7) \\
 &= 2GJ\pi^4 \frac{w_{12}^2 + 4w_{22}^2 + 9w_{32}^2 + 16w_{42}^2}{4ab_s^2}
 \end{aligned}$$

La última contribución a la energía interna es la de torsión alabeada. Como ya se verá más adelante, los larguerillos compuestos exclusivamente de un panel vertical no alabean  $\Gamma = 0$ , y por tanto esta energía será nula. No obstante, se ha añadido esta contribución por si los larguerillos tuviesen otro tipo de sección; así,  $U_\Gamma$  queda:

$$\begin{aligned}
 U_\Gamma &= \frac{E\Gamma_s \pi^6 (w_{1,2}^2 + 16w_{2,2}^2 + 81w_{3,2}^2 + 256w_{4,2}^2) C(2y)^2}{4a^3b_s^2} = \\
 &= \frac{E\pi^6 (w_{12}^2 + 16w_{22}^2 + 81w_{32}^2 + 256w_{42}^2)}{4a^3b_s^2} \left[ \frac{\Gamma}{2} C(0)^2 + \Gamma C \left( \frac{2b_s}{2} \right)^2 + \frac{\Gamma}{2} C(2b_s)^2 \right] = \quad (5.8) \\
 &= \frac{2E\Gamma\pi^6 (w_{12}^2 + 16w_{22}^2 + 81w_{32}^2 + 256w_{42}^2)}{4a^3b_s^2} = 0
 \end{aligned}$$

El trabajo de las cargas externas en la placa se calcula conforme a la Ec. (2.9), considerando compresión biaxial con  $N_y$  calculada Ec. (5.4):

$$V_p = \frac{\pi^4 DK}{64ab_s^3} \left[ w_{12}^2 (4a^2\nu + 4b_s^2) + 4w_{22}^2 (a^2\nu + 4b_s^2) + w_{32}^2 (4a^2\nu + 36b_s^2) + 4w_{42}^2 (a^2\nu + 16b_s^2) \right] \quad (5.9)$$

Por último, el trabajo de las cargas externas es nulo en el larguerillo, debido a que este no pandeo, exclusivamente gira con la placa. Aplicando la Ec. (2.40) se demuestra:

$$\begin{aligned}
 V_s &= \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{\pi^6 A_s DK (w_{12}^2 + 16w_{22}^2 + 81w_{32}^2 + 256w_{42}^2) S(2y)^2}{16a^3b_s^2 t} \right]_{y=y_s} = \\
 &= \frac{\pi^6 DK (w_{12}^2 + 16w_{22}^2 + 81w_{32}^2 + 256w_{42}^2)}{16a^3b_s^2 t} \left[ \frac{A}{2} S(0)^2 + A S \left( \frac{2b_s}{2} \right)^2 + \frac{A}{2} S(2b_s)^2 \right] = 0 \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

### 5.1.1. Cálculos de los larguerillos

Los cálculos de paneles integrales pueden abordarse de dos maneras: los larguerillos se consideran vigas o placas. La segunda opción tiene un problema asociado y es que no es tan directo considerar la energía por torsión del larguerillo, obligando a introducir un término arbitrario para penalizar la energía total; es necesario entonces tener otra solución con la que comparar. Por este motivo en este trabajo se utiliza la formulación de vigas para el larguerillo, cuyas dimensiones y ejes de coordenadas están esquematizados en la Figura 5.5.

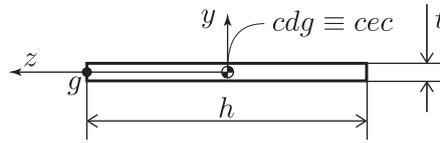


Figura 5.5: Esquema del larguerillo de un panel integral. Sistema de referencia asociado y dimensiones.

La hipótesis anterior da lugar a un problema bastante sencillo: el  $cdg$  y el  $cec$  coinciden con el centro geométrico de la sección. El centro de giro  $g$  no es el  $cec$  sino el punto de unión a la placa; sus coordenadas y el área de la sección son:

$$g_y = 0 \qquad g_z = \frac{h}{2} \qquad A = ht \qquad (5.11)$$

Debido a que las inercias no están referenciadas al  $cdg$  sino con respecto al eje de giro  $g$ , es necesario aplicar el teorema de Steiner:

$$I_{yg} = I_y + g_z^2 A = \frac{1}{12} h^3 t + \left(\frac{h}{2}\right)^2 ht = \frac{h^3 t}{3} \qquad I_{zg} = I_z + g_y^2 A = 0 \qquad (5.12)$$

El módulo de cortante  $J$  para secciones abiertas de pared delgada admite la siguiente expresión [3]:

$$J = \sum \frac{1}{3} h_i t_i^3 = \frac{1}{3} h t^3 \qquad (5.13)$$

Por último, como ya se había anticipado, el módulo de alabeo  $\Gamma$  es nulo aún aplicando Steiner, por lo que la sección no alabea con respecto al giro en el punto  $g$ :

$$\Gamma_g = \Gamma + g_z^2 I_z + I_y g_y^2 = 0 \qquad (5.14)$$

## 5.2. Resultados

Las cargas críticas de los cuatro primeros modos de pandeo son resultado de aplicar el PVE a la Ec. (2.37), vienen dadas por:

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{b_s^3 D (n^2 + \xi^2)^2 + b_s^2 n^2 \xi^2 GJ}{b_s^5 \xi^2 (n^2 + 4\nu r^2)} \quad (5.15)$$

donde se ha definido un nuevo parámetro  $\xi = a/b_s$  que representa la distancia entre larguerillos adimensionalizada con el ancho de la placa en  $x$ . Se observa en la ecuación anterior como el único parámetro del larguerillo que influye es  $J$ , debido a la hipótesis de pandeo local.

En la Figura 5.6 se muestra las cargas adimensionales  $K$  en función del parámetro  $\xi$ . El material utilizado es el aluminio de la Tabla 4.1 y se toma  $h = 15t$  [m] y  $t = 0,01$  [m], necesarias para computar el módulo  $J$ .

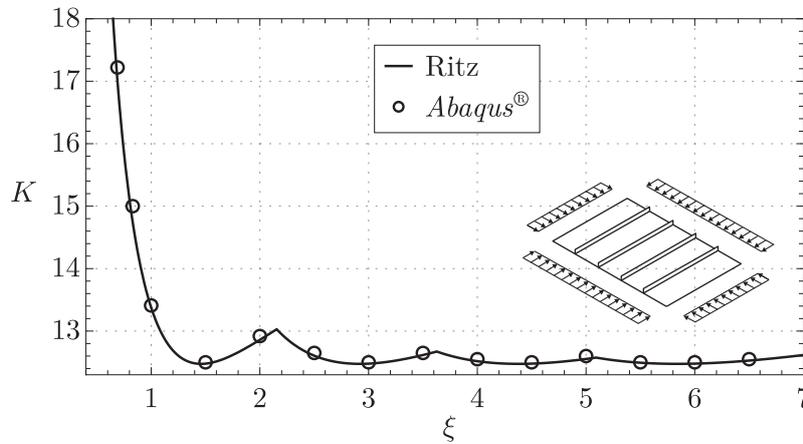


Figura 5.6: Carga crítica de pandeo  $K$  vs. distancia entre larguerillos  $\xi$  de un panel articulado en los bordes cargados. Comparación método de Ritz vs. MEF *Abaqus*<sup>®</sup>.

De la figura se extrae que cuanto más juntos están los larguerillos, más alta es la carga a la que pandea la placa. Ambos métodos, MEF y Ritz, ofrecen soluciones muy similares. Nótese que las cargas críticas son muy superiores a las de los casos A y C de la Figura 3.3, que también tienen los lados cargados articulados. A partir de  $\xi > 7$  es necesario utilizar más términos  $m$  en la serie de la Ec. (5.3) ya que los resultados analíticos divergen con respecto *Abaqus*<sup>®</sup>.

En la Tabla 5.1 se comparan las soluciones MEF y analíticas Ritz con la solución obtenida por [22], donde se opta por sustituir los larguerillos por muelles a torsión de rigidez equivalente.

	Carga adimensional de pandeo $K$				
	Panel integral			Placa SSSS	
	Ritz	MEF	[22]	Ritz	MEF
$\xi = 1$	13,376	13,412	13,390	12,806	12,765
$\xi = 2$	12,860	12,924	12,911	12,504	12,471

Tabla 5.1: Comparación resultados de  $K$  para dos  $\xi$  en un panel integral y placa equivalente SSSS. Resultados MEF, analíticos y de [22].

Tanto Ritz, MEF y la referencia [22] ofrecen soluciones similares para el panel integral, la máxima diferencia es del 0,5%, por lo que cualquier método puede asumirse válido. No se presentan más valores de  $\xi$  dado que no aparecen en la referencia [22].

En placas reforzadas por larguerillos de baja rigidez torsional, como son los de un panel integral, se pueden sustituir estos larguerillos por articulaciones lineales sin cometer mucho error. En la Tabla 5.1 el máximo error de esta aproximación es del 5%, asumible ya que simplifica muchísimo el problema.

En la Figura 5.7 se muestran los dos primeros modos globales del panel obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup>, en los que predomina la flexión del larguerillo ante el giro. El primer modo global aparece tras 26 modos locales y el segundo tras 36, lo que confirma la hipótesis de pandeo local a cargas menores al las del global.

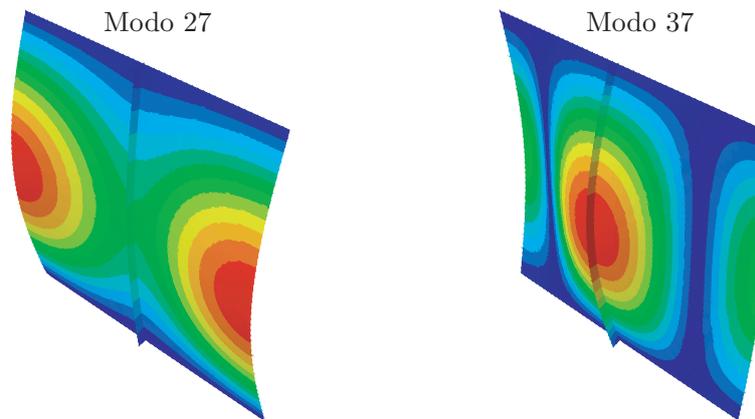


Figura 5.7: Primer y segundo modo de pandeo global del panel obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup>.

Por último, se presentan en la Figura 5.8 los cuatro primeros modos locales de la placa, coincidentes con los cuatro correspondientes a las curvas de la Figura 5.6: son los que requieren

menos energía y por tanto, los primeros en desarrollarse. Se comprueba que en ellos la flexión del larguerillo es nula.

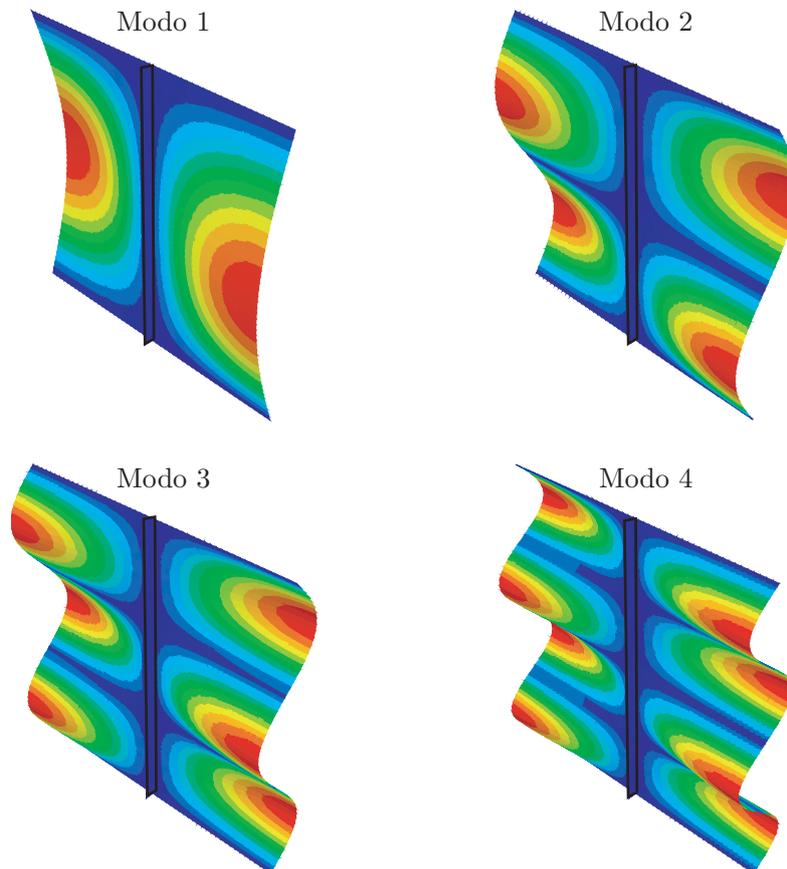


Figura 5.8: Primer, segundo, tercer y cuarto modo de pandeo local del panel en *Abaqus*<sup>®</sup>.

### 5.3. Post-Pandeo

Una vez conocidas las cargas críticas y los modos de pandeo del caso perfecto, se estudia el post-pandeo del panel, que se asume imperfecto y elasto-plástico. De manera analítica se resuelve el caso de la Figura 5.3 izquierda, aplicando las CC de simetría de la Ec. (5.1) y considerando la mitad de la rigidez de los larguerillos de los extremos. Se aproxima la deformada y la imperfección a dos semiondas en dirección  $y$  y una en  $x$ , coincidente con el primer modo local de pandeo de la Figura 5.8:

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x, y) &\approx \tilde{w}_{12}S(x)S(2y) \\ w_0(x, y) &\approx w_{012}S(x)S(2y)\end{aligned}\tag{5.16}$$

A pesar de que se va a resolver el problema mediante planteamiento energético para incluir

la contribución de los larguerillos, es necesario recurrir a la segunda ecuación de Von Karman Ec. (2.46) para obtener la función total de Airy  $\Phi$ . Siguiendo un procedimiento idéntico al expuesto en las Secciones 3.2 y 4.2, pero intercambiando la segunda ecuación de Von Karman elasto-plástica Ec. (2.36) por la Ec. (2.46) que además incluye la influencia de imperfecciones, se obtiene  $\Phi$ :

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_p = -\frac{N_x}{2t}y^2 - \frac{N_y}{2t}x^2 + \frac{E(w_{012}^2 - \tilde{w}_{12}^2)(\beta^2 - \alpha\gamma)}{32} \left[ \frac{C(4y)}{\gamma\xi^2} + \frac{\xi^2 C(2x)}{\alpha} \right] \quad (5.17)$$

Por otro lado, es necesario calcular analíticamente la reacción  $N_y$  que impone la condición de simetría en los bordes no cargados. La reacción se obtiene de una manera muy similar al método seguido en las Ecs. (3.29), (4.33). Las ecuaciones constitutivas son las de plasticidad Ecs. (2.19) y las cinemáticas las que consideran una imperfección inicial Ecs. (2.16). Se sustituye la constitutiva en la cinemática  $\varepsilon_y$  y se integra  $\forall y$  con las CC de las Ecs. (5.1):

$$\int_0^y \frac{\beta N_x(x, y) - \alpha N_y(x, y)}{Et(\beta^2 - \alpha\gamma)} dy = \int_0^b \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dy + \int_0^b \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right)^2 dy - \int_0^b \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 dy \quad (5.18)$$

Se sustituyen  $N_x(x, y)$ ,  $N_y(x, y)$  por su definición Ec. (2.11) aplicada a la Ec. (5.17). Integrando y despejando  $N_y$ :

$$N_y = \frac{\beta}{\alpha} N_x - \frac{Et\pi^2(\beta^2 - \alpha\gamma)(w_{012}^2 - \tilde{w}_{12}^2)}{2\alpha b_s^2} \approx \nu N_x - \frac{Et\pi^2}{2b_s^2} (w_{012}^2 - \tilde{w}_{12}^2) \quad (5.19)$$

Al igual que en la Ec. (4.34), se considera razonable aproximar  $N_y$  a la solución elástica ya que la plasticidad tiene lugar en un intervalo de  $\mathcal{P}_x$  pequeño. La validez de esta hipótesis se discutió con la Figura 4.18.

Una vez obtenidas  $\Phi$ ,  $N_y$  se puede resolver la última incógnita  $\tilde{w}_{12}$  ya que  $w_{012}$  es dato. Se aplica el método energético de Ritz; considerando que el larguerillo no flexa debido al estudio de pandeo local ni alabea, el potencial  $\Pi$  de la Ec. (2.45) queda:

$$\Pi = U_{bp} + U_{lp} + U_{bs} + U_j + U_{\cancel{T}} - V_p - V_s \quad (5.20)$$

La energía interna de flexión de la placa se calcula a partir de la Ec. (2.41), diferente a la de la Ec. (5.5) con un solo término sólo por la consideración de imperfecciones y régimen elasto-plástico:

$$U_{bs} = \frac{\pi^4 D (1 - \nu^2) (\alpha + 2\beta\xi^2 + \gamma\xi^4 + 4\delta\xi^2) (w_{012} - \tilde{w}_{12})^2}{b_s^2 \xi^3} \quad (5.21)$$

La energía interna debida a la deformación longitudinal del plano medio de la placa se obtiene a partir de la Ec. (2.42). El término  $U_{lp}$  es nulo en inicio de pandeo y en post-pandeo resulta:

$$U_{lp} = \frac{8b_s^2\xi \left( \gamma N_x^2 - 2\beta N_x N_y + \alpha N_y^2 \right)}{32t E (\alpha\gamma - \beta^2)} - \frac{\pi^4 E (w_{012}^2 - \tilde{w}_{012}^2)^2 (\beta^2 - \alpha\gamma) (\alpha + \gamma \xi^4)}{32 \alpha \gamma b_s^2 \xi^3} \quad (5.22)$$

La energía de las fuerzas externas no se ve influenciada por la plasticidad ya que en su desarrollo analítico no intervienen las ecuaciones constitutivas. Por tanto, aplicando la Ec. (2.43)  $V_p$  queda:

$$V_p = \frac{\pi^2 (w_{012} - \tilde{w}_{12})^2 (N_x + \xi^2 N_y)}{4\xi} \quad (5.23)$$

Por último, la única contribución del larguerillo es la energía de torsión, en la que se tiene en cuenta la posible imperfección en la placa. Aplicando la Ec. (2.44) y considerando que las rigideces de los larguerillos en los que se establece la simetría son  $J/2$  se obtiene:

$$U_J = \frac{4\pi^4 G J (w_{012} - \tilde{w}_{12})^2}{b_s^3 \xi} \quad (5.24)$$

Aplicando el PVE a la Es. (5.20) es posible despejar el valor del coeficiente  $\tilde{w}_{12}$ , particularizado para  $\xi = b_s = 1$  con el fin de aligerar la ecuación. Así, estableciendo la deformada como un cociente  $\tilde{w}_{12} = \mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$  queda:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ 8\alpha\gamma \left[ \alpha^2\gamma - \alpha\beta^2 + \alpha\gamma(\gamma + 2) - \beta^2\gamma \right] \left[ 8D (\nu^2 - 1) (\alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta) + 32D\mathcal{P}_x \right] + \right. \\ \left. Etw_{012}^2 + 32GJ(\mathcal{P}_x - 1) \right\}^{1/2} + w_{012}^2 (\alpha + \gamma)^2 (\beta^2 - \alpha\gamma)^2 \quad (5.25)$$

$$\mathcal{F}_2 = -2\sqrt{Et} \left[ -\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \alpha(\alpha + 2)\gamma - \beta^2\gamma \right]$$

Nótese que  $\tilde{w}_{12}$  depende del estado tensional de la placa no sólo en  $\mathcal{P}_x$  sino también en los coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Además, la imperfección  $w_{012}$  aumenta la deformada ya que su contribución aparece sumando.

## 5.4. Resultados numéricos

### 5.4.1. Deformada y giros

En primer lugar, se estudia la deformada y los giros del panel completo. Se presentan en la Figura 5.9 la deformada adimensional  $\tilde{w}/t$  y los giros  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  del panel con *Abaqus*<sup>®</sup>; cualitativamente las del método de Ritz son iguales.

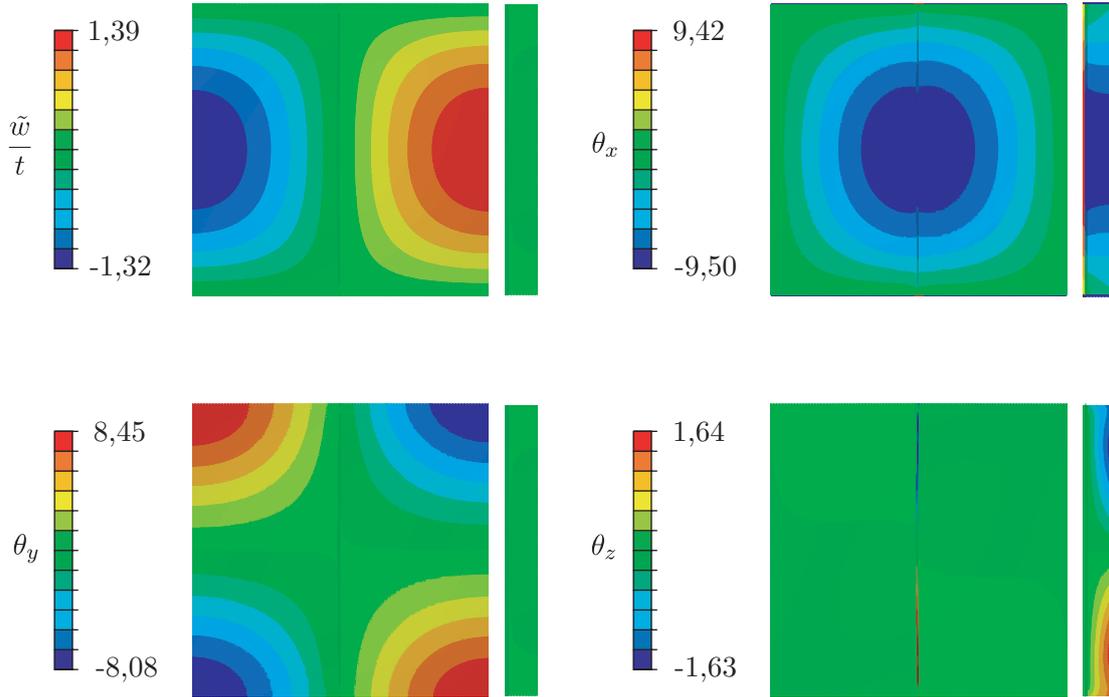


Figura 5.9: Deformada adimensional  $\tilde{w}/t$  y giros  $\theta_x \times 10^2$ ,  $\theta_y \times 10^2$ ,  $\theta_z \times 10^2$  de un panel con *Abaqus*<sup>®</sup> para  $\mathcal{P}_x = 2$  y  $w_{012}/t = 0,2$ . En cada una de las cuatro figuras plano  $x-y$  a la izquierda (placa) y  $x-z$  a la derecha (larguerillo), ver Figura 5.2.

La deformada  $\tilde{w}/t$  en la Figura 5.9 no es completamente antisimétrica, sino que en el lado derecho la flecha máxima es ligeramente superior a la mínima en la izquierda. Los resultados de la Ec. (5.25) predicen una deformada perfectamente antisimétrica: las discrepancias se deben sobre todo al patrón de imperfecciones y a que en la Ec. (5.16) se considera un único término de la serie de Taylor cuando en realidad deberían tender a  $\infty$ .

En cuanto a los giros, ambos modelos predicen que la placa la placa no gira en  $z$  pero si que lo hace el larguerillo, fenómeno que el método analítico no es capaz de predecir. El larguerillo gira además a través de su eje longitudinal  $x$ ; además, el giro coincide con el de la placa en la unión, por lo que se verifica la hipótesis  $\tilde{w}_{,x}|_{y=b_s} = \theta_x$  en larguerillos de sección abierta y pared delgada.

En la Figura 5.10 se estudia la flecha máxima  $\tilde{w}(a/2, b_s/2)$  en función del factor de carga  $\mathcal{P}_x$ . Se muestran los resultados elasto-plásticos de las teorías DT-IT con la misma línea ya que las soluciones se superponen en el intervalo de  $\mathcal{P}_x$ ; se omite la teoría de Bleich ya que en el Capítulo 4 se demostró que DT-IT ofrecen una mejor aproximación. Se representan tres casos, tanto mediante *Abaqus*<sup>®</sup> como mediante Ritz: el elástico, el elasto-plástico perfecto y el elasto-plástico con una imperfección del 10% del espesor de la placa.

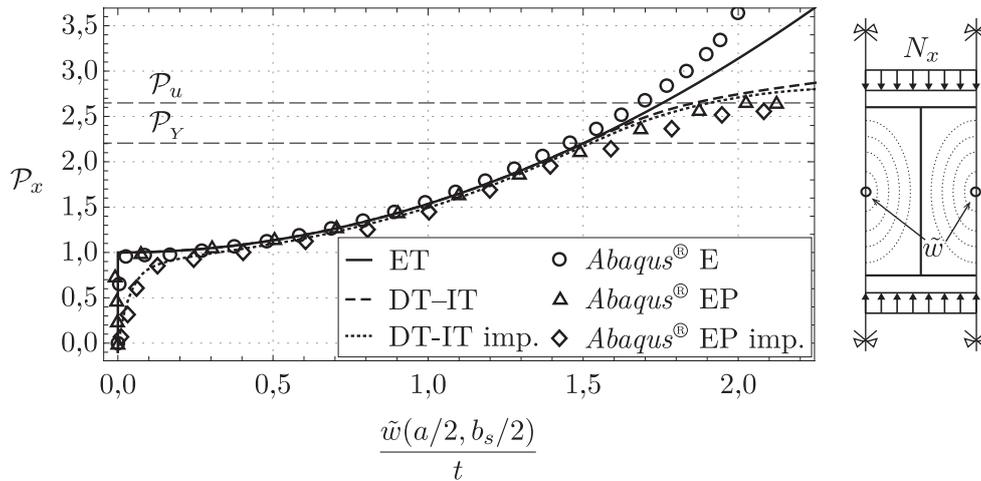


Figura 5.10: Flecha adimensional máxima  $\tilde{w}/t$  vs.  $\mathcal{P}_x$ : caso elástico, elasto-plástico y elasto-plástico imperfecto con  $w_{012}/t = 0,1$ , tanto con *Abaqus*<sup>®</sup> como con Ritz.

En la Figura 5.10 se han dibujado  $\mathcal{P}_Y$ ,  $\mathcal{P}_u$  que son, respectivamente, el factor de carga al que se alcanza la tensión de fluencia  $\sigma_Y$  y la de rotura  $\sigma_u$  con los cálculos de *Abaqus*<sup>®</sup>.

En la figura, las soluciones elásticas *Abaqus*<sup>®</sup> y Ritz son similares hasta  $\mathcal{P}_x \approx 3$ , valor para el cual la presencia del segundo modo de la Figura 5.8 empieza a ser considerable. Cuando se introduce el comportamiento elasto-plástico, para  $\mathcal{P}_Y = 2,2$  la flecha comienza a aumentar en gran medida ante pequeños  $\Delta\mathcal{P}_x$ . De nuevo, el método analítico expuesto ofrece muy buenos resultados comparado con *Abaqus*<sup>®</sup>. En los casos perfectos la flecha es prácticamente nula hasta  $\mathcal{P} \approx 1$ .

Sin embargo, al introducir una imperfección  $w_{012} = 0,1t$  ya no hay una carga crítica definida y puede considerarse que no hay inicio de pandeo y todo el proceso es post-pandeo. La mayor diferencia se encuentra en valores bajos de  $\mathcal{P}_x$ , para  $\mathcal{P}_x > 1,2$  las soluciones elasto-plásticas y las elasto-plásticas imperfectas pueden considerarse las mismas.

### 5.4.2. Tensiones

Las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en la piel se calculan a partir de la definición  $\Phi$  Ec. (2.11) y el resultado analítico Ec. (5.17). Como la placa únicamente está sometida a compresión, el método analítico predice cortantes  $\tau_{xy}$  nulos. La expresión analítica no se muestra debido a su gran longitud.

En la Figura 5.11 se muestra la tensión normal  $\sigma_x$  para varios  $\mathcal{P}_x$ . La zona más cargada es la del larguero, mientras que la más descargada es la central entre rigidizadores. Los resultados *Abaqus*<sup>®</sup> y Ritz son similares, apareciendo las mayores discrepancias en la zona cercana al larguero, superiores cuando mayor es el factor de carga.

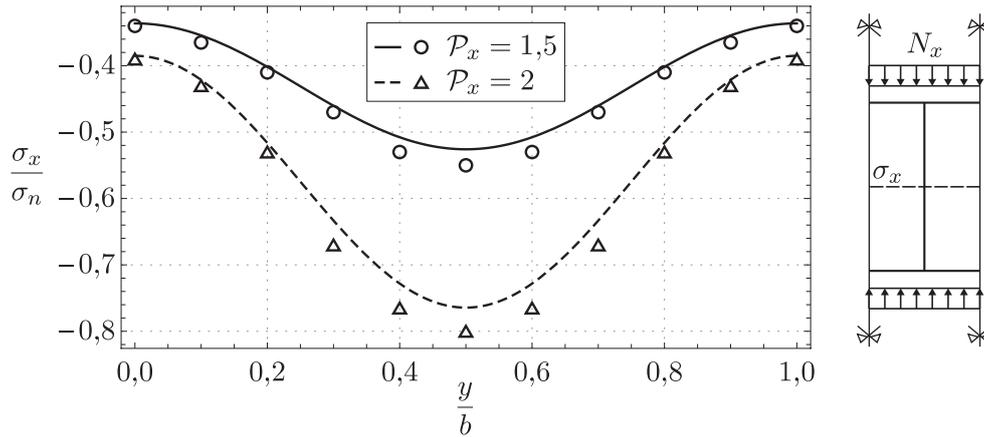


Figura 5.11: Tensión  $\sigma_x/\sigma_n$  para diferentes  $\mathcal{P}_x$  y  $w_{012}/t = 0,1$ . Marcadores: *Abaqus*<sup>®</sup>, líneas: Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

Aunque inferior a  $\sigma_x$ , también es necesario considerar la contribución de  $\sigma_y$ : se representa en la Figura 5.12 para varios  $\mathcal{P}_x$ . Considerando esta tensión, las zonas más cargadas son los apoyos articulados y el centro de la placa, la primera a compresión y la segunda a tracción. De nuevo, los resultados *Abaqus*<sup>®</sup> y Ritz son similares; a medida que se aumenta  $\mathcal{P}_x$  las diferencias se magnifican ya que el segundo modo de pandeo empieza a predominar.

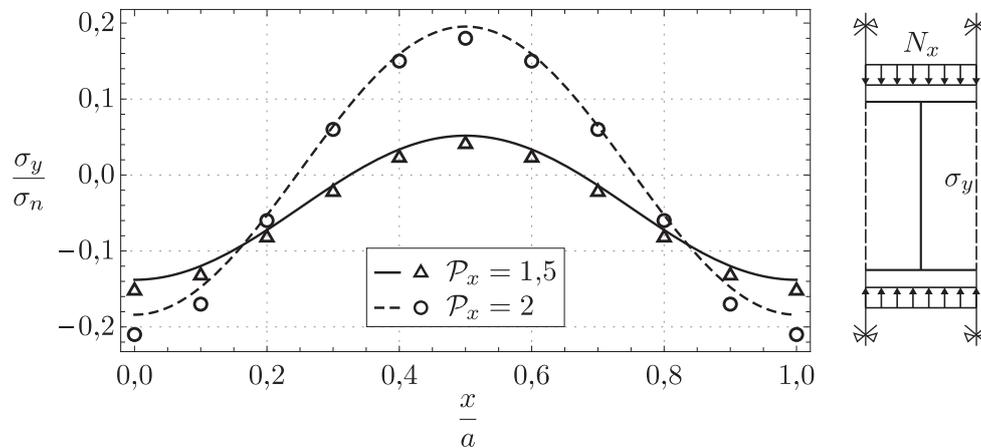


Figura 5.12: Tensión  $\sigma_y/\sigma_n$  para diferentes  $\mathcal{P}_x$  y  $w_{012}/t = 0,1$ . Marcadores: *Abaqus*<sup>®</sup>, líneas: Von Karman con *Mathematica*<sup>®</sup>.

A continuación, se presenta la tensión equivalente de Von Mises justo antes de la rotura del material con  $\mathcal{P}_u = 2,6$  y  $w_{012}/t = 0,1$  obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup>. Además, a la derecha se muestran las zonas plásticas que han superado la tensión de fluencia del material (ver Tabla 4.1).

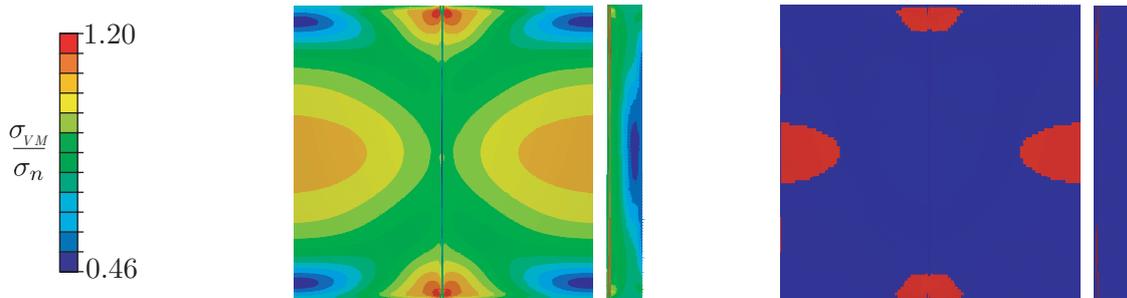


Figura 5.13: Izquierda: tensión equivalente  $\sigma_{VM}$ . Derecha: zona plastificada. Resultados para  $\mathcal{P}_x = 2,6$  y  $w_{012}/t = 0,1$  obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup>.

Aquellas regiones de la placa donde se juntan el larguerillo y la articulación son las más solicitadas; en consecuencia, son las primeras en entrar en zona plástica. Este efecto coincide con la combinación de los resultados de las Figuras 5.11 y 5.12. La siguiente región más solicitada y en plastificar es el centro de la placa. Los larguerillos se encuentran sometidos a poca tensión, dado que exclusivamente giran en pandeo local.

Si se aumenta la imperfección de la placa a un 50 % del espesor, se obtiene una distribución mucho menos uniforme; el contorno de tensiones en este supuesto se muestra en la Figura 5.14. En la figura se puede observar como la distribución cambia notablemente, además de que la tensión de rotura se alcanza para un valor de  $\mathcal{P}_x$  inferior debido a que aparecen puntos aleatorios concentradores de tensión.

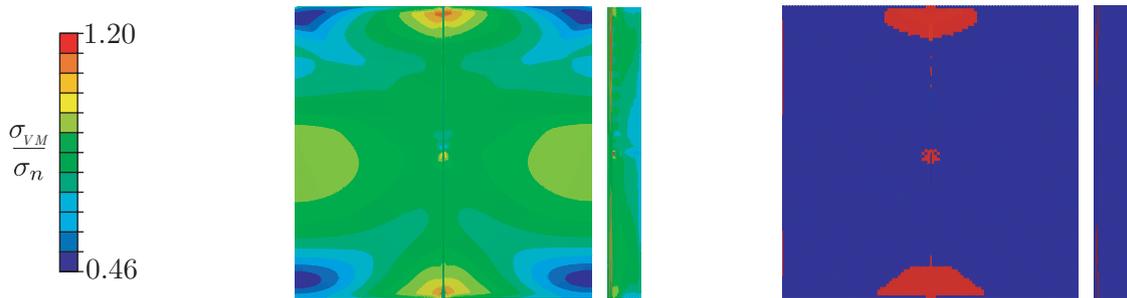


Figura 5.14: Izquierda: tensión equivalente  $\sigma_{VM}$ . Derecha: zona plastificada. Resultados para  $\mathcal{P}_x = 2,5$  y  $w_{012}/t = 0,5$  obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup>.

### 5.4.3. Pandeo global del panel

Por último, se pretende exponer en esta subsección el problema práctico del pandeo global y por qué se intenta evitar su desarrollo en el diseño de un panel aeronáutico.

Como se ha definido en este capítulo, el pandeo global implica directamente pandeo y flexión del larguerillo. Habitualmente, las vigas simplemente articuladas en sus extremos pandean de forma inestable y la flexión desarrolla tensiones muy altas en el larguerillo que llevan al colapso de la estructura.

En la Figura 5.15 se muestra la evolución del factor de carga  $\mathcal{P}_x$  con los incrementos de longitud de arco  $\Delta\tilde{a}$  para los casos en los que el segundo modo de pandeo es el primero global de la Figura 5.7 y el segundo local de la Figura 5.8. Para provocar que el segundo modo sea global se reduce de  $h = 15t$  a  $h = 3t$ .

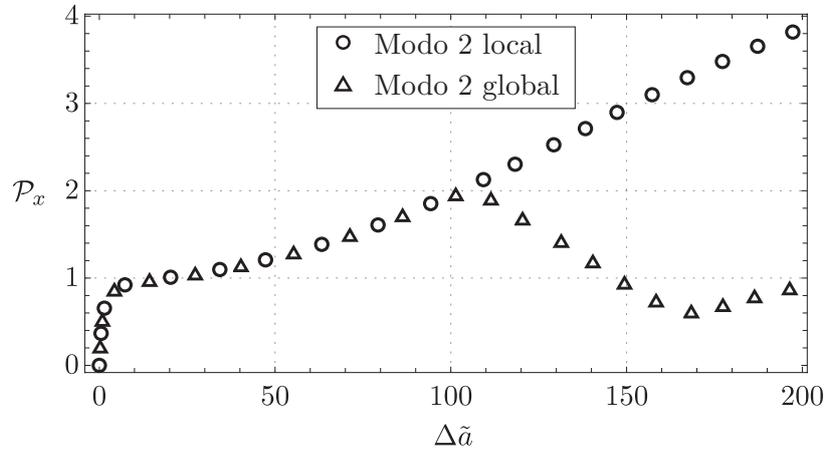


Figura 5.15: Evolución del factor de carga  $\mathcal{P}_x$  en función de la longitud de arco  $\Delta\tilde{a}$  en *Abaqus*<sup>®</sup>. Comparación pandeo local y global.

De la figura se extrae que mientras que la transición al segundo modo local en un panel es estable e imperceptible, la transición a uno global no lo es. Además, esta inestabilidad, que aparece para  $\mathcal{P}_x = 2$ , no es instantánea sino que se mantiene durante un intervalo de  $\mathcal{P}_x$  amplio. Por tanto, se deben dimensionar adecuadamente los larguerillos, ya que si  $h = 15t$  el primer modo global se desarrolla el vigésimo séptimo y si  $h = 3t$  lo hace el segundo: la energía de flexión se incrementa a razón de  $h^3$  según la Ec. (5.6).

En la Figura 5.16 se muestran las tensiones en el panel cuando se desarrolla el primer modo global de la Figura 5.7. Las más altas se desarrollan en el larguerillo, que duplican a las máximas de la placa; es decir, para el factor de carga con el que el larguerillo rompe, la placa tiene un coeficiente de seguridad 2.

Además, el factor de carga al que el material rompe  $P_u \approx 1,5$  es más de una unidad inferior al del caso en el que el pandeo es local  $P_u \approx 2,6$ , una reducción que puede marcar la diferencia entre un diseño competitivo y un mal diseño.

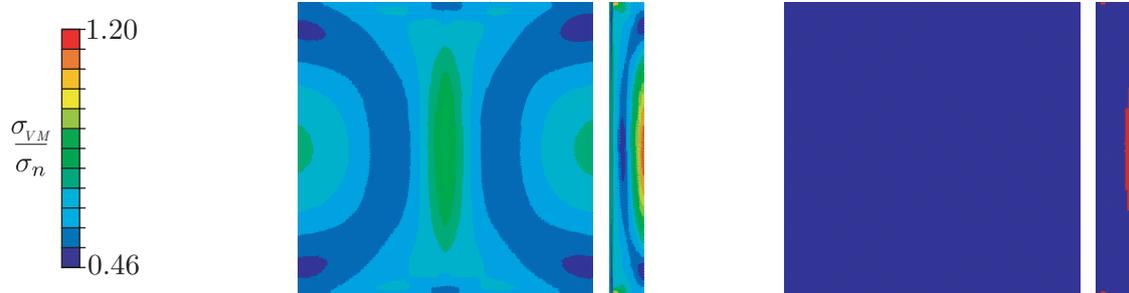


Figura 5.16: Izquierda: tensión equivalente  $\sigma_{VM}$ . Derecha: zona plastificada. Resultados para pandeo global antes de la rotura,  $\mathcal{P}_x = 1,5$  y  $w_{012}/t = 0,1$  obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup>.

## *Conclusiones, trabajos futuros y presupuesto*

### 6.1. Conclusiones

En el presente Trabajo de Fin de Grado se ha resuelto el pandeo y post-pandeo de paneles formados por una fina piel y reforzados por rigidizadores, propios de la estructura semimonocasco. Además, se han incluido dos efectos de gran importancia en paneles aeronáuticos como son la elasto-plasticidad del material y la presencia de imperfecciones. Para ello, se han combinado métodos analíticos en los que se ha empleado la herramienta de cálculo *Mathematica*<sup>®</sup>, con métodos numéricos, concretamente el Método de los Elementos Finitos MEF mediante *Abaqus*<sup>®</sup>. Algunas soluciones también se han contrastado con resultados de artículos publicados en revistas de renombre como el *International Journal of Solids and Structures* o el *Thin Walled Structures Journal*, con centros de investigación como la *Cranfield University* y con resultados experimentales obtenidos por la *National Advisory Committee for Aeronautics* o NACA.

De acuerdo a lo mencionado, las principales conclusiones que se pueden extraer del trabajo llevado a cabo son:

- Es imprescindible una buena comprensión de las bases teóricas y desarrollos analíticos para realizar una correcta interpretación de las soluciones MEF. De esta manera, el ingeniero es capaz de predecir cual debe ser la solución y ser crítico con las soluciones, detectando y corrigiendo los posibles errores.
- La gran ventaja de los métodos analíticos es que permiten determinar los parámetros que afectan a la solución y cuales lo hacen en mayor medida. Además, una vez obtenida la solución los estudios paramétricos son rápidos. Sin embargo, los métodos MEF ofrecen la solución para un caso aislado, ocultando la dependencia de las variables y siendo los estudios paramétricos costosos computacionalmente.
- Se ha analizado el inicio de pandeo en una placa sometida a compresión uniaxial ante diferentes condiciones de contorno y mediante tres métodos diferentes: Ritz, Lévy y MEF. Cuando los bordes descargados están articulados los tres métodos ofrecen soluciones similares, mientras que si están empotrados, existe un intervalo en el cual Ritz diverge. Por tanto, es preferible utilizar el método de Lévy dado que la función de prueba cumple las CC de fuerza y geométricas, mientras que Ritz sólo cumple las geométricas.
- Los apoyos empotrados aumentan la carga crítica de pandeo con respecto a los articulados, predominando la CC del lado cargado al descargado. El principal motivo es que un empotramiento restringe seis grados de libertad mientras que la articulación sólo tres.
- En todos los estudios de inicio de pandeo, los resultados analíticos y numéricos difieren con error relativo muy pequeño. En consecuencia, se asume que se han obtenido resultados

satisfactorios.

- El conjunto placa-rigidizador aumenta notablemente la carga crítica de pandeo, con un incremento de peso muy pequeño. Por este motivo las estructuras semimonocasco se han impuesto a todas las demás.
- El pandeo global debe evitarse como primer modo de fallo en un diseño eficiente. El problema es la flexión de los larguerillos, que provoca tensiones altas y colapso de la estructura a factores de carga bajos.
- Los modos locales de los paneles constituidos por larguerillos de sección abierta se dan para cargas críticas pequeñas comparadas con las de los modos globales. El principal motivo es que la energía de flexión de un rigidizador es varios órdenes de magnitud superior a la de torsión.
- Los larguerillos de baja rigidez torsional pueden modelarse como articulaciones sin inducir mucho error.
- Los paneles formados por numerosos rigidizadores pueden simplificarse extrayendo una región y aplicando condiciones de simetría. Esto simplifica notablemente los cálculos analíticos y reduce varios órdenes de magnitud el coste computacional en MEF.
- En post-pandeo existen intervalos de carga donde las soluciones analíticas y numéricas no son similares. La explicación radica en que analíticamente se modela la deformada como un único modo de pandeo mientras que en realidad la placa transiciona entre varios. Se asume en este trabajo la aproximación de un único modo debido a que en cada intervalo de factor de carga suele predominar uno de ellos.
- Las placas con una curvatura inicial o imperfección no tienen una carga crítica de pandeo definida, sino que el pandeo y el post-pandeo ocurren simultáneamente. En consecuencia, para factores de carga inferiores a la unidad se producen deformaciones fuera del plano.
- Las imperfecciones más perjudiciales para una estructura son aquellas que coinciden con el modo ya que facilitan la deformación con ese patrón.
- Aquellas placas con imperfecciones del orden y superiores al espesor de la placa no pueden ser estudiadas por la teoría de Von Karman. En estos casos los errores relativos son superiores al 50 %, valores no asumibles.
- Se ha estudiado el ancho efectivo de varias placas con diferentes imperfecciones y se ha comparado con el documento DES 8726/1 [14] de la Universidad de Cranfield. Las imperfecciones iniciales pueden reducir hasta un 10 % el ancho efectivo de la placa, dando lugar a diseños muy poco competitivos. Es necesario tener un control acerca de la calidad de la placa.
- Será imprescindible considerar la plasticidad en inicio de pandeo para aquellas placas en las que la relación espesor-ancho supere el 3,5 % para un aluminio típico aeronáutico.

Espesores menores podrán aproximar el inicio de pandeo a un problema elástico con poco error.

- Destacan tres teorías elasto-plásticas: Teoría de la Deformación DT, Teoría Incremental IT y el modelo de Bleich. En inicio de pandeo DT ofrece las soluciones más precisas comparadas con las soluciones experimentales de la *Technical Note* 1817 [20] de la NACA. Esto constituye la *paradoja del pandeo elasto-plástico* debido a que IT parte de hipótesis más fieles a la física que DT, y sin embargo, la primera ofrece soluciones que difieren mucho más de la realidad.
- En post-pandeo, las teorías elasto-plásticas DT e IT ofrecen soluciones similares y mejores que el modelo sencillo de Bleich.
- Cuando se alcanza la tensión de fluencia en un punto de la placa las deformaciones comienzan a aumentar a incrementos de carga menores cuanto mayor es el grado de plasticidad de la placa.
- Las zonas que plastifican y en las que se produce la rotura cambian mucho dependiendo del modo de pandeo al que se desarrolla la plasticidad. Es muy importante conocer cual será ese modo ya que cambiarán las zonas a reforzar, revisar y mantener.
- Las placas largas pandean bajo modos con numerosas semiondas en su dirección larga. Estos modos de pandeo son mucho más inestables y se mantienen durante intervalos de carga menos amplio a los de las placas cuadradas. Una de las soluciones para evitar esta inestabilidad es reforzar los nodos con rigidizadores, que obligan a mantener el modo.

## 6.2. Trabajos futuros

Durante la investigación y realización del presente trabajo final de grado, se han encontrado nuevas vías de investigación en las que es posible profundizar, bien relacionadas con el estudio del pandeo en placas y paneles o de diferente carácter. Entre todas destaca el estudio de:

- el pandeo y post-pandeo elasto-plástico de paneles aeronáuticos bajo sollicitación cortante y/o sollicitaciones combinadas
- las teorías elasto-plásticas actuales como la *High Order Shear Deformation Theory* (HOST)
- la plasticidad en rigidizadores: larguerillos, cuadernas, costillas, etc.
- el efecto de las imperfecciones y/o curvaturas que no coinciden con un modo de pandeo
- una imperfección y/o curvatura varios ordenes mayor que el espesor, en la que la teoría de Von Karman de deformaciones intermedias ya no es válida
- del diseño optimizado de paneles: aumento de espesor en zonas más sollicitadas del panel, refuerzo con rigidizadores, etc.
- el pandeo y post-pandeo de paneles fabricados en materiales compuestos
- los modos de fallo en paneles de material compuesto como consecuencia del pandeo y post-pandeo: delaminado entre capas, grietas en la matriz, etc.
- el pandeo y post-pandeo elasto-plástico ante cargas dinámicas
- el pandeo provocado por cambios térmicos
- el pandeo en placas no rectangulares y bajo cargas no uniformes
- el pandeo global de un panel de manera analítica, modos de fallo en los rigidizadores
- el pandeo y post-pandeo elasto-plástico en estructuras formadas por láminas: cilindros, casquetes esféricos, etc.
- el diseño de ensayos experimentales en paneles y la problemática de reproducir condiciones de contorno ideales, aplicar presiones uniformes, etc.

### 6.3. Presupuesto

En el siguiente desglose se detalla el coste total para la realización del presente trabajo:

Cantidad	Concepto	Precio/ud.	Precio total
400	Horas totales ingeniero	40,00 €	16 000,00 €
40	Documentación		
60	Formación teórica		
30	Formación en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup>		
40	Modelos analíticos en <i>Mathematica</i> <sup>®</sup>		
30	Modelos MEF en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup>		
20	Post-procesado de resultados en <i>Illustrator</i> <sup>®</sup>		
40	Análisis de resultados		
60	Validaciones y depuración de errores		
80	Redacción del informe		
300	Horas totales de servidor	5,00 €	1 500,00 €
150	Resolución analítica		
150	Resolución MEF		
264	Consumo eléctrico en kilovatios-hora	0,145 €	38,28 €
1	Licencia anual de <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> académica	425,00 €	425,00 €
1	Licencia anual de <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> académica	159,00 €	159,00 €
1	Licencia anual de <i>Illustrator</i> <sup>®</sup> académica	252,00 €	252,00 €
	Coste total (sin IVA)		18 336,00 €
	IVA (21 %)		3 850,56 €
	<b>Total presupuestado</b>		<b>22 186,56€</b>

Tabla 6.1: Presupuesto del trabajo.

El presupuesto del presente Trabajo Final de Grado asciende a los VEINTIDÓS MIL CIENTO OCHENTA Y SEIS EUROS CON CINCUENTA Y SEIS CÉNTIMOS (22 186,56 €).

## Bibliografía

- [1] S. Timoshenko & J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Company, 1985
- [2] S. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, 1989
- [3] J.L. Pérez Aparicio, *Teoría de placas y láminas en Ingeniería Aeroespacial*, Universidad Politècnica de València, 2019
- [4] T. Yao & M. Fujikubo, *Buckling and Ultimate Strength of Ship and Ship-like Floating Structures*, Elsevier Inc., 2016
- [5] R.M. Jones, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, Bull Ridge Publishing, 2006
- [6] E. Ventsel & T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells. Theory, Analysis and Applications*, CRC Press, 2001
- [7] M.G. Simonelli, *Plastic Buckling of thin and moderately thin plates and shells: classic problems and new perspectives*, UNFII, 2017
- [8] E. de la Fuente Tremps, *Introducción al análisis de las Estructuras Aeronáuticas*, Garceta, 2014
- [9] T.H.G. Megson, *Introduction to Aircraft Structural Analysis*, Elsevier Ltd, 2018
- [10] DS SIMULIA, *Abaqus 6.11 Theory Manual*, 2011
- [11] O. A. Oguaghamba, *Analysis of buckling and postbuckling loads of isotropic thin rectangular plates*, FUTU & UNN, 2015
- [12] L.M García-Cuevas, M. Carreres Talens & A.O. Tiseira Izaguirre, *Arquitectura general de aeronaves*, UPV, 2018
- [13] J. Andérez, *Estudio analítico y por elementos finitos del postpandeo de paneles aeronáuticos*, UPV, 2018
- [14] Cranfield University, *The Post-Buckled Behaviour of Thin Plates in Compression*, DES 8726
- [15] S.J. Moghadam, *Plastic Buckling of Columns and Plates*, Imperial College London, 2015
- [16] C.M. Wang & T.M. Aung, *Plastic Buckling of thick plates using p-Ritz method*, International Journal of Solids and Structures, 2007
- [17] C.M. Wang, Y. Xiang & J. Chakrabarty, *Elastic/Plastic Buckling of thick plates*, International Journal of Solids and Structures, 2001
- [18] F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, 1952

- [19] *Generalisation of smooth continuous stress-strain curves for metallic materials*, ESDU 76016, 1976
- [20] R.A. Pride & G.J. Heimerl, *Plastic Buckling of Simply Supported Compressed Plates*, NACA, 1949
- [21] T.H.G. Megson, *Aircraft Structures for Engineering Students (Fourth Edition)*, Elsevier, 2007
- [22] C. Bisagni & R. Vescovini, *Analytical formulation for local buckling and post-buckling analysis of stiffened laminated panels*, Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Milano, 2009
- [23] <https://www.youtube.com/watch?v=Gz98VPB4pyw&t=1344s>
- [24] <https://www.quora.com/Is-it-possible-to-make-an-airplane-from-wood>
- [25] <https://hiveminer.com/Tags/n2980%2Cvickers>
- [26] <https://ak1.picdn.net/shutterstock/videos/1027914731/thumb/1.jpg>
- [27] [https://www.figeac-aero.com/sites/default/files/contenu\\_site/sous\\_ensemble\\_fuselage\\_cloison.jpg](https://www.figeac-aero.com/sites/default/files/contenu_site/sous_ensemble_fuselage_cloison.jpg)
- [28] [https://www.icas.org/ICAS\\_ARCHIVE/ICAS2014/data/papers/2014\\_0701\\_paper.pdf](https://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2014/data/papers/2014_0701_paper.pdf)
- [29] [https://www.researchgate.net/post/Abaqus\\_How\\_to\\_get\\_the\\_web\\_local\\_buckling\\_of\\_I\\_girder\\_at\\_failure](https://www.researchgate.net/post/Abaqus_How_to_get_the_web_local_buckling_of_I_girder_at_failure)
- [30] [https://www.reddit.com/r/aviation/comments/2ca5oi/the\\_skin\\_of\\_an\\_a3b\\_skywarrior\\_wrinkles\\_under\\_the/](https://www.reddit.com/r/aviation/comments/2ca5oi/the_skin_of_an_a3b_skywarrior_wrinkles_under_the/)
- [31] <https://aviationsafetynetwork.wordpress.com/tag/kbwi/>
- [32] [https://www.youtube.com/watch?v=za\\_JOQxR1EI](https://www.youtube.com/watch?v=za_JOQxR1EI)
- [33] [https://spacenews.com/wp-content/uploads/2014/11/Orion\\_NASA4X3.jpg](https://spacenews.com/wp-content/uploads/2014/11/Orion_NASA4X3.jpg)
- [34] <https://hlcopters.blogspot.com/2018/08.html>
- [35] <https://arstechnica.com/civis/viewtopic.php?f=2&t=1449703&start=80>
- [36] <https://www.flickr.com/photos/justgareth/19022442388/>
- [37] <https://www.airbus.com/newsroom/press-releases>
- [38] <https://www.msn.com/en-us/money/companies>
- [39] [https://farm3.staticflickr.com/2045/2162114277\\_8c4a669fb6\\_b.jpg](https://farm3.staticflickr.com/2045/2162114277_8c4a669fb6_b.jpg)