UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Funciones de desplazamiento y deformación de una barra por axil y flector

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se obtendrá la expresión de las funciones de desplazamiento por axil y por flector de una barra, además de sus correspondientes funciones de deformación, suponiendo un comportamiento elástico y lineal de la estructura. Estas expresiones se deducirán, en cada caso, mediante integración sucesiva de las ecuaciones de campo, a las que se impondrán las condiciones cinemáticas correspondientes.

2 Introducción

Sea una barra en la que se ha definido un sistema de ejes dextrógiro, siendo X el que va desde su extremo inicial (extremo i) hasta su extremo final (extremo j), e Y, Z los ejes principales de la sección. Las funciones de desplazamiento longitudinal, u(x), transversal, v(x), y giro, θ(x), caracterizan cinemáticamente cada una de las secciones de la barra, ya que definen el movimiento longitudinal, transversal y de giro en una sección cualquiera de la misma como suma de las deformaciones efectivas y de los movimientos de sólido rígido hasta la sección considerada.

Las funciones de deformación longitudinal, u'(x), y transversal o ley de curvaturas, v''(x), relacionadas con las solicitaciones correspondientes (N(x) y M(x)) mediante el factor de rigidez EA o EI, se obtienen, respectivamente, derivando las funciones de desplazamiento.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- determinar la expresión de las funciones de desplazamiento longitudinal, transversal y giro de una barra a partir de las cargas que actúan sobre la barra y de los movimientos de sus extremos
- identificar las funciones de forma del axil y la flexión
- obtener las funciones de deformación de la barra y relacionarlas con las solicitaciones

4 Funciones de desplazamiento y deformación

4.1 Concepto, nomenclatura y criterio de signos

Definidos los ejes de la barra, los movimientos en el extremo inicial (i) son $\mathbf{dx_i}$, $\mathbf{dy_i}$ y θ_i y en el extremo final (j) son $\mathbf{dx_j}$, $\mathbf{dy_j}$ y θ_j, (Figura 1).

Llamamos **u(x)**, **v(x)** y **θ(x)** a las funciones de desplazamientos longitudinales, transversales y de giros, expresadas en ejes locales de la barra.

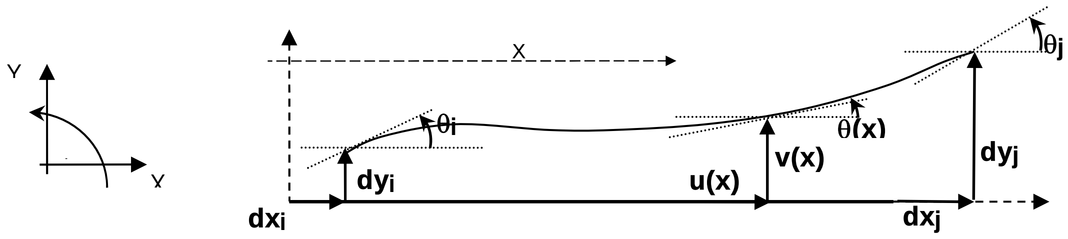

Figura 1. Movimientos en la barra

Si particularizamos para los extremos inicial y final, es decir, para x=0 y para x=L:

$$\mathbf{dx_i} = u(0) \qquad \mathbf{dx_j} = u(L)$$

$$\mathbf{dy_i} = v(0) \qquad \mathbf{dy_j} = v(L)$$

$$\theta_i = \theta(0) \qquad \theta_j = \theta\,(L)$$

Llamamos **u'(x)** y **v''(x)** respectivamente a las funciones de deformación longitudinales y transversales, expresadas en ejes locales de la barra.

4.2 Funciones de desplazamiento por axil

La ecuación de campo del axil de una barra para una carga axial variable $p_A(x)$, siendo L, su longitud, A, el área de la sección transversal y E, el módulo de elasticidad longitudinal es [1]:

ECUACIÓN DE CAMPO DEL AXIL $$\boxed{EA\,u''(x) = -p_A(x)} \qquad (1)$$

<u>CARGA AXIAL CONSTANTE POSITIVA</u>: $p_A(x)=p$ (kN/m)

Se obtendrá, inicialmente, la expresión para una barra sobre la que actúa una carga axial constante $p_A(x)=p$, figura 2, generalizando, posteriormente la expresión para carga variable.

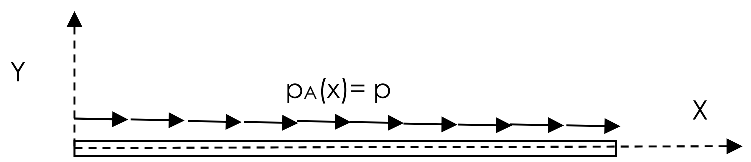

Figura 2. Barra con carga axial constante positiva

Integraremos sucesivamente dos veces para llegar a la expresión de la función de desplazamiento u(x):

$$EA\,u'(x) = -px + c_1 \qquad (2)$$

$$EA\,u(x) = -p\frac{x^2}{2} + c_1\,x + c_2 \qquad (3)$$

Aplicando las condiciones cinemáticas en los extremos i, j (figura 3) obtendremos el valor de las constantes c_1 y c_2:

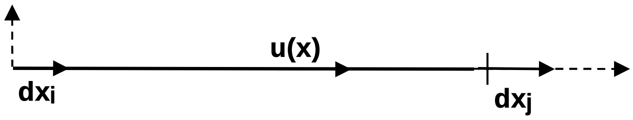

Figura 3. Condiciones cinemáticas del axil

Para x=0: $u(0) = dx_i$

Para x=L: $u(L) = dx_j$

$$c_1 = \frac{pL}{2} - \frac{EA}{L} dx_i + \frac{EA}{L} dx_j \qquad c_2 = EAdx_i$$

Sustituimos en la ecuación (3), agrupando términos y despejando u(x):

Función de desplazamientos:

$$\boxed{u(x) = \left[\frac{-px^2}{2EA} + \frac{pLx}{2EA}\right] + \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx_i + \left(\frac{x}{L}\right) dx_j}$$

La parte de la expresión entre corchetes depende de la carga, mientras que los otros dos sumandos dependen de los movimientos de los extremos.

Llamamos **funciones de forma del axil** a la forma que adopta la función de desplazamientos cuando su movimiento asociado es 1 y los demás 0. Así en el axil tenemos dos funciones de forma:

Funciones de forma axil: $N_1^a(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad N_2^a(x) = \left(\frac{x}{L}\right)$

Sustituyendo en la ecuación 2 tendremos la expresión de la función de deformación:

Función de deformación:

$$\boxed{u'(x) = \left[\frac{-px}{EA} + \frac{pL}{2EA}\right] + N_1^{'a}(x)dx_i + N_2^{'a}(x)dx_j}$$

$$N_1^{'a}(x) = \left(-\frac{1}{L}\right) \qquad N_2^{'a}(x) = \left(\frac{1}{L}\right)$$

<u>BARRA SIN CARGA AXIAL</u>: $p_A(x)=0$

Función de desplazamientos:

$$\boxed{u(x) = N_1^a(x)\, dx_i + N_2^a(x)dx_j}$$

$$N_1^a(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad N_2^a(x) = \left(\frac{x}{L}\right)$$

Función de deformación:

$$\boxed{u'(x) = N_1'^a(x)dx_i + N_2'^a(x)dx_j}$$

$$N_1'^a(x) = \left(-\frac{1}{L}\right) \qquad N_2'^a(x) = \left(\frac{1}{L}\right)$$

CARGA AXIAL GENÉRICA [1]: $p_A(x)$

Función de desplazamientos:

$$\boxed{u(x) = \frac{-1}{EA}\left[\int_0^x \int p_A(x)dx - \frac{x}{L}\int_0^L \int p_A(x)dx\,\right] + N_1^a(x)\,dx_i + N_2^a(x)\,dx_j}$$

Funciones de forma axil: $N_1^a(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad N_2^a(x) = \left(\frac{x}{L}\right)$

Función de deformación:

$$\boxed{u'(x) = \frac{-1}{EA}\left[\int_0^x p_A(x)dx - \frac{1}{L}\int_0^L \int p_A(x)dx\,\right] + N_1'^a(x)dx_i + N_2'^a(x)\,dx_j}$$

$$N_1'^a(x) = \left(-\frac{1}{L}\right) \qquad N_2'^a(x) = \left(\frac{1}{L}\right)$$

4.3 Funciones de desplazamiento por flexión

La ecuación de campo de la flexión de una barra para una carga transversal variable $p_N(x)$, siendo L, su longitud, I, el momento de inercia de la sección transversal y E, el módulo de elasticidad longitudinal es [1]:

ECUACIÓN DE CAMPO DE LA FLEXIÓN $\boxed{EI\,v''''(x) = p_N(x)}$ (4)

CARGA TRANSVERSAL CONSTANTE POSITIVA: $p_N(x)=p$ (kN/m)
Se obtendrá, inicialmente, la expresión para una barra sobre la que actúa una carga Transversal constante $p_N(x)=p$, figura 4, generalizando, posteriormente la expresión para carga variable.

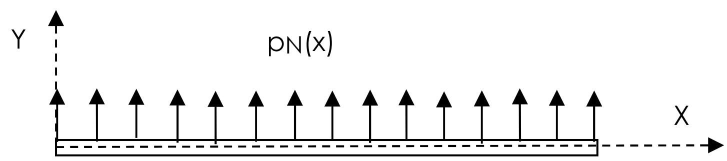

Figura 4. Barra con carga transversal constante positiva

Integraremos sucesivamente cuatro veces para llegar a la expresión de la función de desplazamiento v(x):

$$EI\,v'''(x) = px + c_1 \qquad (5)$$

$$EI\,v''(x) = p\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \qquad (6)$$

$$EI\,v'(x) = p\frac{x^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \qquad (7)$$

$$EI\,v(x) = p\frac{x^4}{24} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \qquad (8)$$

Aplicando las condiciones cinemáticas en los extremos i, j (figura 5) obtendremos el valor de las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4:

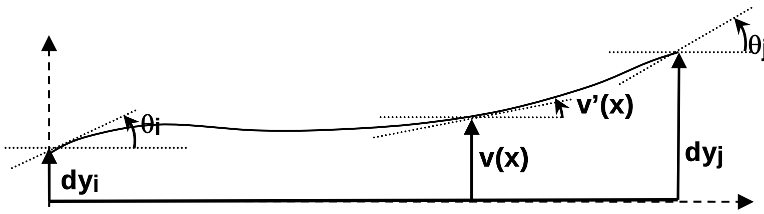

Figura 5. Condiciones cinemáticas de la flexión

Para x=0: $v(0) = dy_i$ $\quad v'(0) = \boldsymbol{\theta_i}$ $\qquad$ Para x=L: $v(L) = dy_i$ $\quad v'(L) = \boldsymbol{\theta_j}$

$$c_1 = -\frac{pL}{2} + \frac{12EI}{L^3}dy_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_i - \frac{12EI}{L^3}dy_j + \frac{6EI}{L^2}\theta_j$$

$$c_2 = \frac{pL^2}{12} - \frac{6EI}{L^2}dy_i - \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}dy_j - \frac{2EI}{L}\theta_j$$

$$c_3 = EI\theta_i \qquad\qquad c_4 = EIdy_i$$

Sustituimos en las ecuaciones (7) y (8), agrupando términos y despejando v(x) y v'(x)

Función de desplazamientos (ley de flechas):

$$\boxed{v(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{px^4}{24} - \frac{pLx^3}{12} + \frac{pL^2x^2}{24}\right] + N_1^f(x)dy_i + N_2^f(x)\theta_i + N_3^f(x)dy_j + N_4^f(x)\theta_j}$$

Funciones de forma flexión:

$$N_1^f(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \qquad N_2^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \qquad N_3^f(x) = \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \qquad N_4^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Ley de giros:

$$\boxed{v'(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{px^3}{6} - \frac{pLx^2}{4} + \frac{pL^2x}{12}\right] + N_1'^f(x)dy_i + N_2'^f(x)\theta_i + N_3'^f(x)dy_j + N_4'^f(x)\theta_j}$$

$$N_1'^f(x) = \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \qquad N_2'^f(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \qquad N_3'^f(x) = \frac{-6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \qquad N_4'^f(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}$$

Ley de curvaturas:

$$v''(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{px^2}{2} - \frac{pLx}{2} + \frac{pL^2}{12}\right] + N_1''^f(x)\,dy_i + N_2''^f(x)\,\theta_i + N_3''^f(x)\,dy_j + N_4''^f(x)\,\theta_j$$

$$N_1''^f(x) = \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) \quad N_2''^f(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right) \quad N_3''^f(x) = \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}\right) \quad N_4''^f(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)$$

<u>BARRA SIN CARGA TRANSVERSAL</u>: $p_N(x)=0$

Función de desplazamientos (ley de flechas):

$$v(x) = N_1^f(x)dy_i + N_2^f(x)\theta_i + N_3^f(x)dy_j + N_4^f(x)\theta_j$$

Funciones de forma flexión:

$$N_1^f(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad N_2^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad N_3^f(x) = \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \quad N_4^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Ley de giros:

$$v'(x) = N_1'^f(x)dy_i + N_2'^f(x)\theta_i + N_3'^f(x)dy_j + N_4'^f(x)\theta_j$$

$$N_1'^f(x) = \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \quad N_2'^f(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \quad N_3'^f(x) = \frac{-6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \quad N_4'^f(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}$$

Ley de curvaturas:

$$v''(x) = N_1''^f(x)\,dy_i + N_2''^f(x)\,\theta_i + N_3''^f(x)\,dy_j + N_4''^f(x)\,\theta_j$$

$$N_1''^f(x) = \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) \quad N_2''^f(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right) \quad N_3''^f(x) = \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}\right) \quad N_4''^f(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)$$

<u>CARGA TRANSVERSAL GENÉRICA [1]</u>: $p_N(x)$

Función de desplazamientos (ley de flechas):

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[\int_0^x\int\int\int p_N(x)dx + \frac{6}{L^2}A\left(\frac{x^3}{3L} - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{2B}{L}\left(\frac{x^3}{2L} - \frac{x^2}{2}\right)\right] + N_1^f(x)dy_i + N_2^f(x)\theta_i + N_3^f(x)dy_j + N_4^f(x)\theta_j$$

$$A = \int_0^L\int\int\int p_N(x)dx \qquad B = \int_0^L\int\int p_N(x)dx$$

Funciones de forma flexión:

$$N_1^f(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad N_2^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad N_3^f(x) = \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \quad N_4^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Ley de giros:

$$v'(x) = \frac{1}{EI}\left[\int_0^x\int\int p_N(x)dx + \frac{6}{L^2}A\left(\frac{x^2}{L} - x\right) - \frac{2B}{L}\left(\frac{3x^2}{2L} - x\right)\right] + N_1'^f(x)dy_i + N_2'^f(x)\theta_i + N_3'^f(x)dy_j + N_4'^f(x)\theta_j$$

$$N_1'^f(x) = \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \quad N_2'^f(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \quad N_3'^f(x) = \frac{-6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \quad N_4'^f(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}$$

Ley de curvaturas:

$$\boxed{v''(x) = \frac{1}{EI}\left[\int_0^x \int p_N(x)dx + \frac{6}{L^2}\, A(\frac{2x}{L}-1) - \frac{2B}{L}\,(\frac{3x}{L}-1)\right] + N_1''^f(x)\, dy_i + N_2''^f(x)\, \theta_i + N_3''^f(x)\, dy_j + N_4''^f(x)\, \theta_j}$$

$$N_1''^f(x) = \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) \quad N_2''^f(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right) \quad N_3''^f(x) = \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}\right) \quad N_4''^f(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)$$

4.4 Ejemplo

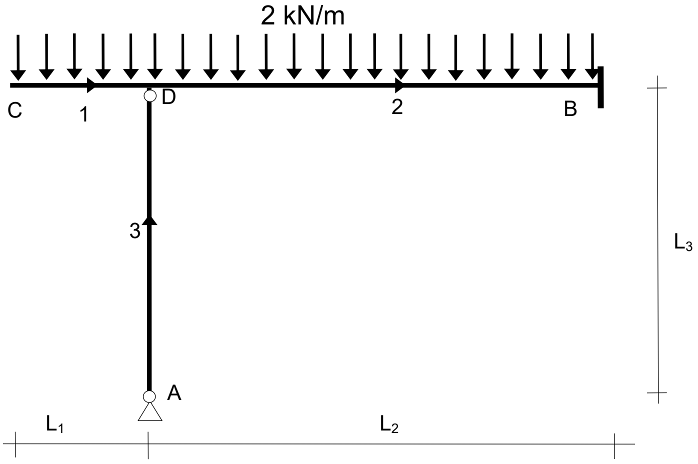

Figura 6. Ejemplo.

En este ejemplo (figura 6) se expresarán las funciones de desplazamiento y las funciones de deformación de las barras.

<u>BARRAS 1 y 2</u>:

Para el estado de cargas propuesto, las barras 1 y 2, no tendrán axil, por lo que la deformación por axil será nula. Como además el desplazamiento dxB es nulo, también lo serán dxC y dxD, es decir, la función de desplazamiento por axil de ambas barras es nula y también su función de deformación por axil

$u_1(x)=0 \qquad u_1'(x)=0 \qquad u_2(x)=0 \qquad u_2'(x)=0$

Función de desplazamientos por flexión (ley de flechas):

$$v_1(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{(-2)x^4}{24} - \frac{(-2)L_1x^3}{12} + \frac{(-2)L_1{}^2x^2}{24}\right] + \left(\frac{2x^3}{L_1{}^3} - \frac{3x^2}{L_1{}^2} + 1\right) dy_{i1} + (\frac{x^3}{L_1{}^2} - \frac{2x^2}{L_1} + x)\theta_{i1} + \left(\frac{-2x^3}{L_1{}^3} + \frac{3x^2}{L_1{}^2}\right) dy_{j1} + (\frac{x^3}{L_1{}^2} - \frac{x^2}{L_1})\theta_{j1}$$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{(-2)x^4}{24} - \frac{(-2)L_2x^3}{12} + \frac{(-2)L_2{}^2x^2}{24}\right] + \left(\frac{2x^3}{L_2{}^3} - \frac{3x^2}{L_2{}^2} + 1\right) dy_{i2} + (\frac{x^3}{L_2{}^2} - \frac{2x^2}{L_2} + x)\ \theta_{i2}$$

Ley de giros:

$$v_1'(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{(-2)x^3}{6} - \frac{(-2)L_1x^2}{4} + \frac{(-2)L_1{}^2x}{12}\right] + (\frac{6x^2}{L_1{}^3} - \frac{6x}{L_1{}^2})dy_{i1} + (\frac{3x^2}{L_1{}^2} - \frac{4x}{L_1} + 1)\theta_{i1} + (\frac{-6x^2}{L_1{}^3} + \frac{6x}{L_1{}^2})dy_{j1} + (\frac{3x^2}{L_1{}^2} - \frac{2x}{L_1})\theta_{j1}$$

$$v_2'(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{(-2)x^3}{6} - \frac{(-2)L_2x^2}{4} + \frac{(-2){L_2}^2x}{12}\right] + (\frac{6x^2}{{L_2}^3} - \frac{6x}{{L_2}^2})dy_{i2} + (\frac{3x^2}{{L_2}^2} - \frac{4x}{L_2} + 1)\theta_{i2}$$

Ley de curvaturas:

$$v_1''(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{(-2)x^2}{2} - \frac{(-2)L_1x}{2} + \frac{(-2){L_1}^2}{12}\right] + \left(\frac{12x}{{L_1}^3} - \frac{6}{{L_1}^2}\right) dy_{i1} + \left(\frac{6x}{{L_1}^2} - \frac{4}{L_1}\right) \theta_{i1} + \left(-\frac{12x}{{L_1}^3} + \frac{6}{{L_1}^2}\right) dy_{j1} + \left(\frac{6x}{{L_1}^2} - \frac{2}{L_1}\right) \theta_{j1}$$

$$v_2''(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{(-2)x^2}{2} - \frac{(-2)L_1x}{2} + \frac{(-2){L_1}^2}{12}\right] + \left(\frac{12x}{{L_2}^3} - \frac{6}{{L_2}^2}\right) dy_{i2} + \left(\frac{6x}{{L_2}^2} - \frac{4}{L_2}\right) \theta_{i2}$$

BARRA 3:

Para el estado de cargas propuesto, al ser la barra 3 biarticulada, no tendré ni cortante ni momento por lo que su deformación por flexión (ley de curvaturas) será nula:

$$v_3''(x)=0$$

Función de desplazamientos por flexión (ley de flechas): $v_3(x) = \theta_{i3}\, x$

Ley de giros: $\theta_3(x) = \theta_{i3}$

Función de desplazamientos (por axil): $u_3(x) = \left(\frac{x}{L_3}\right) dx_{j3}$

Función de deformación (por axil): $u_3'(x) = \left(\frac{1}{L}\right) dx_{j3}$

5 Cierre

A lo largo de este tema hemos obtenido las funciones de desplazamiento y de deformación de una barra, necesarias para la resolución cinemática de una estructura de barras, relacionándolas con la carga exterior y con los movimientos de extremo de barra. Mediante estas expresiones queda definida cinemáticamente la estructura.

Se propone la siguiente cuestión:

1. Determinar las funciones de desplazamiento y deformación para una carga triangular (orientada en sentido del eje Y negativo), $p_N(x)$=-2 X, a partir de la expresión genérica.

Solución:

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{x^5}{60} + \frac{3L^2x^3}{20} + \frac{-2L^3x^2}{20}\right)\right] + N_1^f(x)dy_i + N_2^f(x)\theta_i + N_3^f(x)dy_j + N_4^f(x)\theta_j$$

$$v'(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{x^4}{12} + \frac{9L^2x^2}{20} + \frac{-L^3x}{5}\right] + N'^f_1(x)dy_i + N'^f_2(x)\theta_i + N'^f_3(x)dy_j + N'^f_4(x)\theta_j$$

$$v''(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{9L^2x}{10}+\frac{-L^3}{5}\right] + N''^f_1(x)\,dy_i + N''^f_2(x)\,\theta_i + N''^f_3(x)\,dy_j + N''^f_4(x)\,\theta_j$$

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Abdilla E. "Fundamentos energéticos de la Teoría de Estructuras. Segunda parte-Aplicaciones. Volumen 1". Editorial UPV, ref.: 2003.718, 2003

[2] Gere J.M., Timoshenko S.P. "Mecánica de Materiales" Grupo editorial Iberoamérica. 1984

[3] ICE: "Leyes de esfuerzos y funciones de desplazamiento a lo largo de una barra", Artículo Docente ETSA, 2011.
Disponible en Riunet: http://hdl.handle.net/10251/12714

6.2 Figuras:

Autora de las figuras: Luisa Basset