MATEMÀTIQUES

INTRODUCCIÓ A L'ÀLGEBRA LINEAL

Robert Fuster

UPV punto de partida

edUPV
Universitat Politècnica de València

Robert Fuster

Introducció a l'Àlgebra Lineal

edUPV
Universitat Politècnica de València

http://tiny.cc/edUPV_rea

Col·lecció *Punto de Partida*

Per a referenciar aquesta publicació utilitze la següent cita:
Fuster, Robert (2022). Introducció a l'àlgebra lineal. València: edUPV

Autoria
Robert Fuster Capilla

Editat per edUPV, 2022
Venda: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 6708_01_01_01

ISBN: 978-84-9048-918-5
DOI: https://doi.org/10.4995/REA.2022.670801

Si el lector detecta algun error en el llibre o bé vol contactar amb els autors, pot enviar un correu a edicion@editorial.upv.es

AUTOR

ROBERT FUSTER

Doctor en Matemàtiques per la Universitat de València. Ha estat com a professor de la Universitat Politècnica de València des de 1980 fins que es va jubilar el 2018. Entre altres activitats científiques ha publicat diversos articles de recerca i ha dirigit tesis doctorals. Ha publicat els llibres docents *Variable compleja y ecuaciones diferenciales* (Reverté) i *Matemàtica discreta* (edUPV).

RESUM

Aquest llibre cobreix tots (o quasi tots) els continguts habituals en un primer curs d'àlgebra lineal, des del punt de vista que considere adequat per a presentar la matèria. Comencem estudiant els vectors i les matrius, en principi com a eines adequades per estudiar els sistemes d'equacions lineals. A la segona part estudiem els espais vectorials, l'ortogonalitat i les aplicacions lineals (en aquestes dues parts fem servir les operacions elementals i les matrius elementals per a justificar molts resultats i per a resoldre quasi tots els problemes). La part tercera la dediquem a la factorització en valors singulars i a la diagonalització i fem notar que la descomposició en valors singulars ens proporciona la millor descripció de qualsevol aplicació lineal entre els espais K^n i K^m. La part quarta conté les solucions de tots els exercicis.

SUMARI

Introducció destinada (sobretot) a professors vii
Introducció per a l'estudiant xv
Lliçó 0. Problemes lineals 1

Llibre primer. $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ **13**

Capítol 0. Nombres complexos i polinomis **15**

Lliçó 1. Els nombres complexos 17
Lliçó 2. Polinomis reals i complexos. El teorema fonamental de l'àlgebra 34

Capítol 1. Sistemes d'equacions lineals **47**

Lliçó 3. Vectors i matrius 49
Lliçó 4. Multiplicació de matrius 68
Lliçó 5. Equacions i sistemes lineals 80
Lliçó 6. Matrius elementals. Algorisme de Gauss-Jordan 101
Lliçó 7. L'equació matricial $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$ i els sistemes homogenis 120

Capítol 2. Matrius **129**

Lliçó 8. El rang d'una matriu 131
Lliçó 9. La matriu inversa 143
Lliçó 10. Transposició i conjugació. Matrius hermítiques i matrius unitàries 154
Lliçó 11. Matrius triangulars. Factoritzacions LU 165

Llibre segon. $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ **181**

Capítol 3. Els espais $\mathbb{K}^n$ **183**

Lliçó 12. Els espais $\mathbb{K}^n$ 185
Lliçó 13. Subespais de $\mathbb{K}^n$ 195
Lliçó 14. Els quatre subespais deduïts d'una matriu 205
Lliçó 15. Intersecció i suma de subespais. Suma directa 220

Capítol 4. Ortogonalitat i mínims quadrats **237**

Lliçó 16. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals 238
Lliçó 17. Aproximació per mínims quadrats 245
Lliçó 18. El mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt i la factoritza-
ció QR 256

Capítol 5. Espais vectorials i aplicacions lineals **267**

Lliçó 19. Espais vectorials 269
Lliçó 20. Base d'un espai vectorial 279
Lliçó 21. Espais vectorials euclidians 294
Lliçó 22. Aplicacions lineals 313
Lliçó 23. Canvis de base 329

Llibre tercer. $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$ **341**

Capítol 6. Determinants **343**

Lliçó 24. Determinants . . . 344
Lliçó 25. Aplicacions dels determinants . . . 369

Capítol 7. Diagonalització. Valors propis i vectors propis **377**

Lliçó 26. Endomorfismes i matrius diagonalitzables . . . 379
Lliçó 27. Diagonalització unitària. Matrius normals . . . 398
Lliçó 28. Aplicacions de la diagonalització . . . 408
Lliçó 29. La forma reduïda de Jordan . . . 426

Capítol 8. Factorització en valors singulars. Valors singulars i vectors singulars **449**

Lliçó 30. Vectors singulars i valors singulars . . . 450
Lliçó 31. Aplicacions dels valors singulars. La pseudoinversa . . . 466

Epíleg. Què hem aprés? **477**

Llibre quart. Solucions dels exercicis **493**
Lliçó 1. Els nombres complexos . . . 495
Lliçó 2. Polinomis reals i complexos. El teorema fonamental de l'àlgebra 500
Lliçó 3. Matrius i vectors . . . 503
Lliçó 4. Multiplicació de matrius . . . 511
Lliçó 5. Equacions i sistemes lineals . . . 520
Lliçó 6. Matrius elementals. Algorisme de Gauss-Jordan . . . 526
Lliçó 7. L'equació matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ i els sistemes homogenis . . . 534
Lliçó 8. El rang d'una matriu . . . 540
Lliçó 9. La matriu inversa . . . 546
Lliçó 10. Transposició i conjugació. Matrius hermítiques . . . 554
Lliçó 11. Matrius triangulars. Factoritzacions LU i matrius unitàries . . . 560
Lliçó 12. Els espais $\mathbb{K}^n$ . . . 566
Lliçó 13. Subespais de $\mathbb{K}^n$ . . . 570
Lliçó 14. Els quatre subespais deduïts d'una matriu . . . 576
Lliçó 15. Intersecció i suma de subespais. Suma directa . . . 586
Lliçó 16. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals . . . 592
Lliçó 17. Aproximació per mínims quadrats . . . 597
Lliçó 18. El mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt i la factorització QR . . . 603
Lliçó 19. Espais vectorials . . . 608
Lliçó 20. Base d'un espai vectorial . . . 613
Lliçó 21. Espais vectorials euclidians . . . 619
Lliçó 22. Aplicacions lineals . . . 628
Lliçó 23. Canvis de base . . . 634
Lliçó 24. Determinants . . . 640
Lliçó 25. Altres propietats i aplicacions dels determinants . . . 648
Lliçó 26. Endomorfismes i matrius diagonalitzables . . . 652

Lliçó 27. Diagonalització unitària. Matrius normals 665
Lliçó 28. Aplicacions de la diagonalització 672
Lliçó 29. La forma reduïda de Jordan 680
Lliçó 30. Vectors singulars i valors singulars 692
Lliçó 31. Aplicacions dels valors singulars. La pseudoinversa 698

Índex analític **705**

Algorismes i mètodes **717**

Índex general **719**

INTRODUCCIÓ DESTINADA (SOBRETOT) A PROFESSORS

You are allowed to lie a little,
but you must never mislead
Paul Halmos

Els darrers anys els qui ens dediquem a la docència en el camp de l'àlgebra lineal hem anat modificant-ne els continguts i els punts de vista, en part per l'evolució del format dels estudis universitaris, però també (i molt més) per l'impacte dels canvis tecnològics, especialment els informàtics, quant a la nostra capacitat real d'aplicar les matemàtiques a problemes de grans dimensions (sense fer servir recursos de grans dimensions). Amb això no vull dir que l'objectiu d'un primer curs d'àlgebra lineal siga el de tractar aquest tipus de problemes; més que d'abordar els problemes numèrics, es tracta de conéixer l'àlgebra lineal d'una manera adequada per a *després* estar en disposició d'entendre les estratègies numèriques (potser en un curs d'àlgebra lineal numèrica o potser en diverses matèries que la fan servir). L'àlgebra lineal *no és el mateix* que l'àlgebra lineal numèrica, però una comprensió correcta de la segona depén molt de com enfoquem la primera.

Parlant de matemàtiques (i passeu-me les exageracions), hi ha dos tipus de llibres de text: uns de molt grossos, amb moltes pàgines i grans dimensions que diuen molt poques coses, però que les expliquen molt bé, amb tots els detalls i força exemples; els altres, petits, amb poques pàgines, dimensions reduïdes i una tipografia menuda, que diuen moltes coses, perfectament justificades i que als estudiants els costa molt d'entendre. En el límit, ens trobaríem amb un llibre molt petit, que ho diu tot, ho defineix tot amb precisió i ho demostra tot, o amb un patracol grandíssim que no diu res, no defineix res i no demostra res. Així que he intentat fer un llibre de dimensions mitjanes, que diga algunes coses, que les justifique d'una manera adequada per al públic al qual va dirigit, que cobrisca els aspectes bàsics de la matèria, els que a la pràctica s'inclouen habitualment en un primer curs en el nostre entorn universitari.

He escrit aquest llibre pensant en un públic potencial molt ampli: qualsevol estudiant que haja de fer un curs d'àlgebra lineal, ço és, qualsevol estudiant de ciències o enginyeria, la qual cosa implica que haurà de satisfer unes necessitats ben diverses. Així que la qüestió és aquesta: com hem d'escriure, si escrivim matemàtiques per a *estudiants* (no necessàriament per a estudiants *de* matemàtiques, però també)? Què hi hem de dir i com ho hem de dir? La citació de Halmos que obre aquesta introducció amaga l'essència de la qüestió: *Esteu autoritzat a dir alguna petita mentida, però el que no podeu fer mai és enganyar.* No és necessari (ni una bona idea) que justifiquem absolutament i perfectament tot el que diem; però el conjunt ha de ser rigorós i, bàsicament, ben justificat. En aquest llibre es justifica tot (o quasi tot) el que es diu,[1] però s'hi posa més èmfasi

[1]Unes vegades, l'enunciat d'una propietat va seguit d'una demostració explícita; altres vegades, però, hi ha un raonament previ a l'enunciat que el fa evident. I, en algun cas, les demostracions es troben en un annex al final de la lliçó, per tal de fer-les opcionals sense interferir el discurs principal. I

en el significat dels conceptes, en la utilitat d'aquests conceptes i en els mètodes de resolució dels problemes que no en les propietats i les demostracions. També és Halmos qui diu que

> *El problema bàsic a l'hora d'escriure matemàtiques és el mateix que el d'escriure biologia, el d'escriure una novel·la o el d'escriure les instruccions per muntar un clavicèmbal: el problema és comunicar una idea. Per fer-ho i fer-ho clarament, heu de tenir alguna cosa a dir i haureu de tenir algú a qui dir-ho, heu d'organitzar el que voleu dir i organitzar-ho en l'ordre en què voleu que es diga, ho heu d'escriure, reescriure i tornar-ho a escriure diverses vegades, i heu d'estar disposat a pensar i treballar molt en detalls mecànics com la dicció, la notació i la puntuació. Això és tot el que hi ha...*[2]

He intentat seguir el consell: pensar què és el que vull dir (si se suposa que parlem d'àlgebra lineal) i en qui vull que ho llegisca. I escriure-ho i reescriure-ho tant com calga, mirant també de no destrossar massa l'idioma.

Abans de començar a escriure'l, vaig llegir molts *llibres de text* d'àlgebra lineal, que han influït poderosament (si més no quant als punts de la matèria que crec que convé marcar com a bàsics, o –equivalentment– sobre quins són els continguts que convé destacar) en aquest llibre.

CONTINGUTS

Parlem dels continguts. En realitat, més que els *continguts*, el que pot ser discutible és *l'ordre* en què els presentem, aquests continguts (i la importància que els atribuïm). Perquè aquesta ordenació condiciona, i molt, la manera en què els presentarem. Si trieu a l'atzar un llibre *de text* d'àlgebra lineal, és possible que trobeu un índex com aquest: *Teoria de conjunts; grups, anells i cossos; espais vectorials; aplicacions lineals; matrius i determinants; sistemes d'equacions lineals; espai vectorial euclidià; diagonalització.* Un *índex* com aquest respon a una visió diguem-ne *tradicional* de la matèria (o, més que de la matèria, de l'enfocament amb què cal presentar-la).

Els dos primers ítems d'aquest índex no són propis de l'àlgebra lineal. Jo no ho he fet, però no posaré cap objecció a una introducció lleugera a la teoria intuïtiva de conjunts, que assegure que l'estudiant sap què signifiquen els símbols $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ i $\varnothing$, què és una aplicació i poca cosa més, simplement perquè els

també hi ha coses que no es demostren, especialment algunes propietats més o menys immediates o quan la prova consisteix en una comprovació tediosa.

[2] *The basic problem in writing mathematics is the same as in writing biology, writing a novel, or writing directions for assembling a harpsichord: the problem is to communicate an idea. To do so, and to do it clearly, you must have something to say, and you must have someone to say it to, you must organize what you want to say, and you must arrange it in the order you want it said in, you must write it, rewrite it, and re-rewrite it several times, and you must be willing to think hard about and work hard on mechanical details such as diction, notation, and punctuation. That's all there is to it…* P Halmos, *How to write mathematics*, Enseign. Math. (2) 16 (1970), 123-152.

gargots que dibuixa el professor no li semblen escriptura jeroglífica o sànscrita.[3] En algun moment cal transmetre a l'estudiant les idees bàsiques sobre conjunts i aplicacions i, com que en la majoria d'estudis de ciències o enginyeria, al nostre país, no hi ha una matèria de matemàtica bàsica, un primer curs d'àlgebra lineal és un lloc tan bo com qualsevol altre per a incloure-les.

Però parlar d'estructures algèbriques, simplement perquè un espai vectorial és un grup abelià amb una operació externa sobre un cos, és absolutament innecessari, sobretot, perquè l'àlgebra lineal *és alguna cosa diferent* d'una part de l'àlgebra.

La resta del llibre inclouria, més o menys, els continguts raonables en un curs d'àlgebra lineal, però els presenta en un ordre que implica un nivell d'abstracció contrari al que des d'un punt de vista pedagògic sembla recomanable, perquè la manera en què s'organitzen els continguts no és precisament la més amigable: desenvolupar una teoria d'espais vectorials i aplicacions lineals per a, després, resoldre un sistema d'equacions lineals és perfectament coherent, però dubtosament pedagògic.

És per això que, en un text modern, és més probable que els continguts siguen, aproximadament, *sistemes d'equacions lineals i matrius; determinants; espais vectorials i aplicacions lineals; diagonalització; productes escalars i espais euclidians.* Amb algunes matisacions, aquesta és l'estructura d'aquest llibre.

He retardat la presentació dels determinants fins al moment que estudiarem la diagonalització; i he situat aquí els determinants per dos motius: perquè no té massa sentit fer-los servir per atacar problemes que amb l'ús de les operacions elementals es resolen d'una manera molt més eficient i perquè quan de veritat els farem servir és quan calcularem els valors propis. És cert que podem prescidir-ne per complet (dels determinants),[4] però em sembla que tampoc no cal bandejar per complet una eina que l'estudiant (segurament) ja coneix, que li resultarà útil en altres matèries i que ens proporciona una justificació directa del fet que els valors propis són les arrels de l'equació característica.

En canvi, el producte escalar (en $\mathbb{K}^n$) l'introduesc des del primer moment, com una operació entre vectors, perquè d'aquesta manera les qüestions geomètriques van sempre de la mà de les algèbriques. I una altra decisió important que he pres ha estat de treballar sempre amb nombres *reals o complexos*; perquè, excepte en allò que fa referència a la diagonalització, no hi ha cap diferència significativa entre el cas real i el complex, així que un plantejament del tipus *treballem amb nombres reals fins que arribem cap al final del curs i llavors diem que tot el que hem fet fins ara també és vàlid amb nombres complexos* no aporta res a la facilitat de comprensió per part de l'estudiant.[5]

[3] La notació matemàtica —que bàsicament és la notació de la teoria de conjunts— és ben útil per assegurar precisió (i concisió) en allò que s'escriu, però quan la fem servir extensivament per comunicar-nos amb algú que no la coneix bé, el que hauria de ser clarificador es converteix en un entrebanc.

[4] Vegeu, per exemple, l'article *Down With Determinants*, de Sheldon Axler, o el llibre del mateix autor *Linear Algebra Done Right*.

[5] Tot i això, a quasi tots els exemples i exercicis treballem amb nombres reals (enters o racionals, de fet).

L'he dividit en quatre *llibres* (parts), nou capítols i trenta-dues lliçons, tot i que, realment, la unitat didàctica important és la lliçó. D'aquestes lliçons, la primera (la lliçó zero) més que una lliçó és el recull d'uns quants problemes on s'apliquen les tècniques que exposarem al llarg del curs; i les lliçons 1, 2, 25 i 29 són opcionals (les dues primeres contenen alguns prerequisits; la 25 tracta les aplicacions clàssiques dels determinats i, la 29, la forma reduïda de Jordan, que pot no ser inclosa al curs). També es pot evitar la lliçó 21 (espais vectorials euclidians), però em sembla interessant incloure-la pel fet que realment aquests espais (més que no pas els espais vectorials) són la generalització dels espais $\mathbb{K}^n$ i perquè en molts problemes d'optimització els valors òptims estan lligats a l'ortogonalitat.

Els tres primers llibres es corresponen amb tres punts de vista possibles a prop del que és l'àlgebra lineal (l'estudi dels sistemes d'equacions lineals; el dels espais vectorials i les aplicacions lineals; l'art de factoritzar matrius de diverses maneres):

El llibre primer, $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, tracta els sistemes d'equacions lineals i les matrius: en el capítol primer posem tot l'èmfasi en l'algorisme de Gauss-Jordan que presentem inicialment com una manera simple però estructurada de reduir un sistema lineal a una forma en la qual la discussió i la resolució siguen trivials, però que immediatament interpretem com una aplicació sistemàtica de les operacions elementals i els productes per matrius elementals; en el segon capítol, estudiem especialment les matrius inverses i les matrius relacionades amb la geometria, és a dir, les matrius hermítiques i les unitàries.

Els meus objectius, en aquesta primera part, són de convéncer l'estudiant que discutir (i resoldre) un sistema lineal és justificar que un vector és combinació lineal d'uns altres vectors donats (i trobar els pesos d'aquesta combinació lineal); que l'operació important és el producte matriu-vector (perquè una matriu és una llista de vectors i aquest producte és una combinació lineal); que les operacions elementals, que són l'eina bàsica dels algorismes d'esglaonament, són multiplicacions de matrius (així que els algorismes del tipus Gauss són en realitat multiplicacions de matrius); i que les matrius diagonals i les triangulars són útils perquè ens faciliten la resolució dels problemes, però les matrius unitàries (o ortogonals, si pensem en termes reals) són les més importants perquè els conjunts de vectors ortonormals són els més adequats en termes geomètrics.

A més, hi he inclòs un capítol *zero*, amb dues lliçons opcionals on presentem els dos prerequisits únics de l'assignatura: els nombres complexos i els polinomis. És possible que molts alumnes no coneguen (o no tinguen gaire seguretat amb) els nombres complexos; els polinomis sí que els han estudiats, però aquest curs requereix que l'estudiant tinga perfectament clar què és el que diu el teorema fonamental de l'àlgebra i quin és el seu significat en termes de factorització de polinomis.

El llibre segon, $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, estudia els espais vectorials i les aplicacions lineals; en el cas dels espais vectorials, comencem, al capítol tercer, amb els espais $\mathbb{K}^n$

i els seus subespais i mostrem els quatre subespais que es dedueixen de manera *natural* d'una matriu; dediquem un altre capítol a les qüestions relatives a l'ortogonalitat (complements ortogonals i projeccions, mínims quadrats i la factorització QR); finalment, al capítol cinquè, definim els espais vectorials generals (sempre sobre els nombres reals o complexos), els espais euclidians i les aplicacions lineals. El capítol cinquè és el més *abstracte* del curs, però l'estudiant no hi deuria trobar gaire problema en estudiar-lo, atesos els coneixements que ja ha adquirit.

Quins objectius hauríem d'assolir al llibre segon? primer de tot, mostrar que $\mathbb{K}^n$ és un espai de dimensió n i que això vol dir que totes les bases tenen n vectors; que un *espai* és un conjunt de vectors en el qual es poden fer combinacions lineals; quins subconjunts de $\mathbb{K}^n$ són subespais i quines dimensions tenen; que una matriu qualsevol defineix quatre subespais, les dimensions dels quals venen determinades per les dimensions i el rang de la matriu; i quines relacions d'ortogonalitat hi ha, entre aquests subespais; això ens porta a un segon bloc d'objectius: la relació entre l'ortogonalitat (i l'aproximació òptima) amb el problema de mínims quadrats, entés com la cerca de la millor *solució* d'un sistema incompatible. Finalment, presentar les aplicacions lineals i els problemes de canvi de base.

El llibre tercer l'he titulat $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$. Aquest títol és, diguem-ho així, una declaració de principis: d'una manera o una altra, en qualsevol curs d'àlgebra lineal s'estudia la diagonalització (i, de vegades, la forma reduïda de Jordan); però la descomposició en valors singulars sol associar-se a l'àlgebra lineal numèrica i gairebé mai no forma part del currículum de l'assignatura diguem-ne bàsica. Des del meu punt de vista, la millor manera de culminar el curs és explicant que (si més no, en els espais euclidians de dimensió finita) una aplicació lineal sempre és un isomorfisme entre dos subespais (els espais fila i columna d'una matriu o, si voleu, l'ortogonal del nucli i la imatge de l'aplicació) i que, si escollim les bases de manera adequada, aquest isomorfisme transforma una base ortonormal (de l'espai fila) en una base ortogonal (de l'espai columna). I, com que les millors bases són les ortonormals i les millors matrius les diagonals, la factorització en valors singulars és un final perfecte.

L'objectiu principal d'aquest bloc darrer és d'entendre la diagonalització i la factorització en valors singulars d'aquesta manera, és a dir, que les bases de vectors propis i les de vectors singulars són les que descriuen més bé les aplicacions lineals.

El llibre conté tres capítols on estudiem els determinants, la diagonalització (i les seues aplicacions) i la factorització en valors singulars (i la pseudoinversa).

Al cos del text principal s'inclouen força exemples que justifiquen les idees i les propietats, però que també són models de resolució dels exercicis. Molts dels exercicis que hi ha a cada lliçó són semblant als exemples que hi hem mostrat, però la millor manera que té l'estudiant d'assegurar-se que coneix la matèria és resolent aquest tipus d'exercicis.

El llibre quart conté les solucions detallades de tots els exercicis.

Qüestió de noms (i de notacions)

Malauradament (o no), tots tenim les nostres manies i, en allò que fa als noms i als símbols, no hi ha un consens totalment generalitzat. Jo intente fer servir la nomenclatura més general i, alhora, la que em sembla més amigable per a l'estudiant. Com que les dues coses són incompatibles, segurament he pres algunes decisions discutibles.

Aquestes en són algunes:

- Un vector de $\mathbb{K}^n$ és una llista de nombres, una columna, $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix}$. Però, per comoditat i estètica, el podem escriure com $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.
- Els vectors els represente amb una lletra amb una fletxa a sobre: $\vec{u}$. Perquè la negreta minúscula és irreproduïble quan escrivim a mà (algú fa servir la negreta de pissarra —com ara, $\mathbb{u}$— però no és un ús generalitzat) i, sobretot, perquè la intuïció que els vectors són segments orientats és ben adequada.
- Per representar les matrius faig servir majúscules de pal sec, com ara, A (però la matriu identitat és I).
- Una matriu és d'un arranjament rectangular de nombres, però és millor veure-la com una llista de vectors.

  Així que estenc a les columnes (que són vectors) el costum de representar les entrades de la matriu A amb la minúscula corresponent al nom de la matriu ($\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$). Les files no són vectors, així que les represente amb la majúscula ($\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots$):

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \cdots \\ \mathsf{A}_m \end{bmatrix}$$

- Com que les matrius elementals es fan servir força en aquest llibre, és molt convenient fixar-hi una notació: $\mathsf{E}_{i,j}$, $\mathsf{E}_i(\alpha)$ i $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ representen la permutació de dues files, l'escalat d'una fila i la suma d'un múltiple d'una fila a una altra fila en la matriu identitat.

  Aquesta notació és una mica defectiva, perquè no s'hi té en compte l'ordre de la matriu, però escriure coses com $\mathsf{E}_{n,i,j}(\alpha)$ em sembla excessiu.
- Els conjunts, en general, els escric amb majúscules itàliques (S, per exemple), però per a les bases gaste les cal·ligràfiques ($\mathcal{B}$).
- El teorema de Rouché és de Rouché (això de Rouché-Frobenius s'ho inventà Rey Pastor, i només es diu als països hispànics).

- Entre matrius *regulars*, *no singulars* i *invertibles*, invertible em sembla el millor nom (perquè defineix perfectament la cosa).
- La matriu *adjunta* no és la matriu dels cofactors, sinó la transposada conjugada, A^*, perquè això és coherent amb els operadors adjunts. Aquesta matriu (o més ben dit, la matriu A^*A) té un paper central al llibre (en canvi, la matriu dels cofactors només hi apareix tangencialment).
- Hi ha factoritzacions LU *estrictes* i *no estrictes*, segons que la matriu L siga o no triangular inferior. Perquè, normalment, en la teoria s'exigeix aquesta condició, però el programari tipus Scilab no ho fa i a efectes numèrics no aporta res.
- Una matriu no té nucli i imatge, sinó *espai nul* i *espai columna*. Són les aplicacions lineals, les que tenen nucli i imatge.
- Les matrius importants són les unitàries, perquè les bases més útils són les ortonormals.

  Per això, les factoritzacions de matrius més interessants són la factorització en valors singulars i la diagonalització de matrius normals.

Bona part dels mèrits que puga tenir aquest llibre són deguts a molts amics, amb els quals m'he divertit molt parlant de matemàtiques, especialment a Carmen Alegre, Rafa Bru, Cristina Corral, Ramon Esteban i Vicent del Olmo, que han tingut l'amabilitat de llegir-lo, de fer-me suggeriments i de descobrir errades, a més de fer-ne alguns comentaris elogiosos. Ja sé que, aquests elogis, són deguts en gran part a l'estima que em tenen, però vull creure que alguna cosa positiva hi deuen haver trobat.

INTRODUCCIÓ PER A L'ESTUDIANT

L'algèbre est genereuse,
elle donne souvent plus qu'on lui demande
Jean le Rond D'Alembert

Molts dels continguts que trobaràs en un primer curs d'àlgebra lineal ja els coneixes: sistemes d'equacions lineals, vectors i matrius, determinants... això és un avantatge, però també pot ser un inconvenient, perquè, si més no, en començar el curs, et pot semblar una pèrdua de temps estudiar novament allò que ja saps i potser et resistiràs a aprendre tècniques noves per atacar problemes que ja saps resoldre. Fora un error; perquè les primeres passes del curs (tal com l'enfoquem ací) van destinades a mostrar-te una eina molt simple, però ben poderosa: les operacions elementals i les matrius elementals, que són la base dels algorismes d'esglaonament i amb les quals tractarem gairebé tots els problemes del curs: començarem discutint i resolent els sistemes lineals fent servir les operacions elementals, però de seguida trobarem el rang d'una matriu, la matriu inversa, les factoritzacions LU i QR, les bases dels subespais, el rang i la imatge de les aplicacions lineals... fent operacions elementals. Fins i tot els determinants, els calcularem fent servir les operacions elementals.

Veuràs que el curs l'he dividit en quatre *llibres*; el quart llibre conté les solucions completes de tots els exercicis, però els tres primers porten uns títols curiosos: $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ i $\mathsf{A} = \mathsf{U\Sigma V}^*$. Això, aquests noms, correspon a tres punts de vista sobre el que és (o com es tracten els problemes a) l'àlgebra lineal: com l'estudi dels sistemes d'equacions lineals, les matrius i els vectors; com l'estudi dels espais vectorials i les aplicacions lineals; o com la factorització de les matrius com a producte de matrius que tenen una estructura determinada (la qual cosa equival a la recerca de les bases més adequades per a tractar un problema determinat).

El primer punt de vista sembla el més simple, però condueix ràpidament als altres dos; el segon és el més *abstracte* i també el *tradicional* (si parlem d'una tradició no massa antiga).[6] El tercer ens mostra molt bé els aspectes geomètrics dels problemes i té força aplicacions pràctiques. Ja ho va dir D'Alembert: l'àlgebra és generosa.

El curs està fet de capítols i els capítols de *lliçons*. Al final de cada lliçó s'inclou un resum esquemàtic, amb les idees i les propietats principals que s'hi ha exposat, una llista d'exercicis que, com ja hem dit adés, es troben resolts al llibre quart,[7] i, en unes poques lliçons, un apèndix que conté alguna demostració que no em semblava necessari d'incloure al text principal.

---

[6] Si regires per la bibliografia, hi trobaràs molts manuals d'àlgebra lineal que comencen amb la definició dels espais vectorials.

[7] No cal que et recorde que és el text complet (i no només el resum) que cal estudiar i que els exercicis els has de resoldre pel teu compte (com va dir Halmos, l'única manera d'aprendre matemàtiques és *fer* matemàtiques).

Al final de tot, hi trobaràs un *epíleg* que resumeix esquemàticament els aspectes més importants del curs. Més que un resum global i exhaustiu, és una visió unificada dels blocs de contingut més destacats.

☞ Respecte a l'aspecte *visual* del llibre, les definicions importants, els teoremes, les propietats i els algorismes van requadrats, per destacar la seua importància. A més a més, he fet servir un parell de marques especials, ☞ i ▫. El símbol ☞ cerca cridar la teua atenció per remarcar alguns fets importants o especialment interessants. El quadradet, ▫, ja és un clàssic en els textos matemàtics que s'utilitza per assenyalar la fi d'una demostració (allò que els clàssics marcaven com *quod erat demonstrandum*, *com volíem demostrar*). En aquest llibre, el quadradet acompleix aquesta funció, però també el faig servir quan he provat alguna cosa, encara que no l'haja enunciat explícitament, al final de l'enunciat d'una propietat que no es demostra (o que l'hem demostrada abans d'enunciar-la) i en acabar la justificació d'algun exemple.[8] ▫

[8] Així que, segons el context, quan et trobes aquest símbol, has d'interpretar *i així acaba la demostració* (o *el raonament*, o l'explicació de l'exemple) o bé *aquesta propietat no la demostrarem*.

Lliçó 0. Problemes lineals

Els matemàtics són una mena de poetes fraudulents,
que, de fet, intenten l'única poesia possible
Joan Fuster

En aquesta lliçó mirem de definir què és l'àlgebra lineal a través de diversos problemes que es resolen amb tècniques lineals i descrivim la relació que tenen aquests problemes amb la nostra assignatura.

L'adjectiu *lineal* apareixerà diverses vegades en aquest curs: hi ha sistemes d'equacions *lineals*, combinacions *lineals*, transformacions (o aplicacions) *lineals*, vectors *lineal*ment dependents o independents, equacions en diferències *lineals*, equacions diferencials *lineals*... En anglès, dels espais vectorials en diuen *vector spaces*, però també *linear spaces*.

L'objecte d'estudi de l'àlgebra lineal són les operacions i les transformacions lineals. Com que les operacions lineals es fan amb matrius (si més no, quan la dimensió és finita), podem concloure que l'àlgebra lineal s'ocupa del càlcul amb matrius i de les propietats de les matrius.

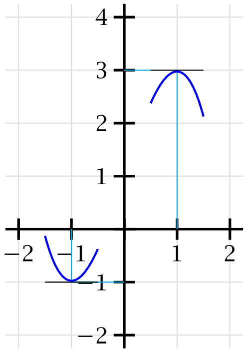
Però, com que les transformacions lineals tenen lloc en els espais vectorials, també resulta que l'àlgebra lineal s'ocupa dels espais vectorials, és a dir, dels espais de vectors, i de les transformacions entre espais vectorials, és a dir, de les aplicacions lineals.

Podem posar l'èmfasi en les matrius o en els espais vectorials i les aplicacions lineals. En qualsevol cas, però, l'instrument bàsic de l'àlgebra lineal són les combinacions lineals. Una operació entre vectors és lineal quan l'únic que fem amb els vectors és sumar-los i/o multiplicar-los per nombres. Combinant aquestes dues operacions fem una *combinació lineal*: si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors i α_1, α_2 dos nombres, aleshores $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ és un nou vector, obtingut com a combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.

El que farem ara serà mostrar alguns problemes de matèries diverses on s'apliquen les tècniques de l'àlgebra lineal.

0.1. Sistemes d'equacions lineals. Aproximació polinòmica d'una funció

La gràfica d'una funció polinòmica de tercer grau passa pels punts $(-1, -1)$ i $(1, 3)$ i té la tangent horitzontal en aquests dos punts. Quina és aquesta funció?

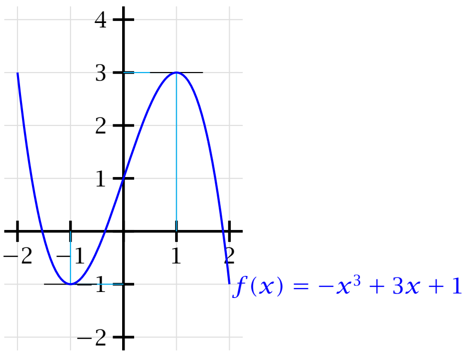


Encara que el problema es planteja en termes d'Anàlisi Matemàtica, la solució consisteix a resoldre un sistema lineal de quatre equacions amb quatre incògnites:

- La funció és $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ i la seua derivada, $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$.
- Que la corba passe pel punt $(-1, -1)$ amb tangent horitzontal en aquest punt vol dir que
  $f(-1) = -1$ i $f'(-1) = 0$, és a dir,
  $$\begin{aligned} -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 &= -1 \\ 3a_3 - 2a_2 + a_1 \quad &= 0 \end{aligned}$$
- I que passe també per $(1, 3)$ amb tangent horitzontal significa que
  $$\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 3 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, els coeficients del polinomi s'obtenen resolent el sistema d'equacions lineals
$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + \ \ a_2 - \ \ a_3 &= -1 \\ a_1 - 2a_2 + 3a_3 &= 0 \\ a_0 + a_1 + \ \ a_2 + \ \ a_3 &= 3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

La solució d'aquest sistema és $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$. En conseqüència, la funció que cerquem és $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.



Com que aquest sistema d'equacions lineals només té una solució, podem assegurar que el polinomi que hem trobat és únic: només hi ha una funció polinòmica de grau menor o igual a tres que passe pels dos punts donats i hi tinga una tangent horitzontal.

☞ En el capítol 1 estudiarem la resolució dels sistemes d'equacions lineals. Tot i que aquest és un tema aparentment trivial i ben conegut, les tècniques que s'hi fan servir i les propietats que s'hi troben són la base de gran part de l'àlgebra lineal.

0.2. Cadenes de Màrkov i matrius estocàstiques

Suposem que en un país l'evolució de les migracions internes al llarg d'un cert període de temps ha estat aquesta:

- Cada any, el 10 % de la població de la capital es trasllada a viure a una altra ciutat i el 5 % d'aquesta població se'n va al medi rural.
- Dels habitants de les altres ciutats, el 15 % emigra a la capital i un altre 10 % al medi rural.
- El 12 % dels habitants del medi rural emigren tots els anys a la capital i el 15 % a una altra ciutat.

En aquest context, ens plantegem les qüestions següents:

- Si en un moment determinat la població de la capital és el 20 % del total, la de les altres ciutats el 45 % i la resta dels habitants del país, és a dir, el 35 %, viuen al medi rural, quina serà la distribució al cap d'un any?
- I després de 5, 10, 20 anys?
- Hi ha alguna tendència a l'estabilitat, de manera que a llarg termini la distribució de la població no patisca canvis significatius?
- Si la distribució de la població inicial fos una altra, per exemple, 30 %, 20 %, 50 %, quins serien els resultats a llarg termini?

Introduïm les dades migratòries en un quadre de doble entrada:

	capital	altres ciutats	medi rural
capital	0,85	0,15	0,12
altres ciutats	0,10	0,75	0,15
medi rural	0,05	0,10	0,73

(0.1)

Cada columna d'aquest quadre és un vector de probabilitats: la primera columna conté les probabilitats que una persona que avui viu a la capital estiga d'ací un any (a) a la capital (0,85 = 85 %), (b) a una altra ciutat (0,10 = 10 %) o (c) al medi rural (0,05 = 5 %). Aquests tres nombres han de sumar necessàriament 1, atés que estem suposant que tota la població del país habita un d'aquests tres medis, i són no negatius, perquè un valor negatiu no té cap sentit en el problema que ens ocupa.

De manera semblant s'interpreten les altres dues columnes. Anomenem $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ i $\vec{p}_3$ aquests tres vectors i representem-los en forma de columna:

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}85 \\ 0{,}10 \\ 0{,}05 \end{bmatrix} \qquad \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}75 \\ 0{,}10 \end{bmatrix} \qquad \vec{p}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}15 \\ 0{,}73 \end{bmatrix}$$

D'altra banda, el vector $\vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}45 \\ 0{,}35 \end{bmatrix}$ representa la distribució inicial de la població.

Per saber quina serà la distribució de la població d'ara en un any, hem de

(a) multiplicar el vector $\vec{p}_1$ per $0,20$, per a esbrinar on seran l'any que ve les persones que avui viuen a la capital,

(b) multiplicar el vector $\vec{p}_2$ per $0,45$, per fer el mateix amb els habitants actuals de les altres ciutats,

(c) multiplicar el vector $\vec{p}_3$ per $0,35$ i

(d) sumar aquests tres vectors.

Llavors obtindrem:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= 0,20\vec{p}_1 + 0,45\vec{p}_2 + 0,35\vec{p}_3 \\ &= 0,20 \begin{bmatrix} 0{,}85 \\ 0{,}10 \\ 0{,}05 \end{bmatrix} + 0,45 \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}75 \\ 0{,}10 \end{bmatrix} + 0,35 \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}15 \\ 0{,}73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2795 \\ 0{,}41 \\ 0{,}3105 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

així que, d'ací a un any, la població de la capital serà del 27,95 %, la de les altres ciutats del 41 % i la del medi rural, del 31,05 %.

Hem resolt la primera qüestió fent una combinació lineal amb els tres vectors $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ i $\vec{p}_3$. Aquesta combinació lineal també la podem interpretar com un producte matriu-vector: si amb els tres vectors de probabilitats construïm la matriu

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}73 \end{bmatrix}$$

(la matriu M no és altra cosa que el quadre (0.1)) llavors

$$\vec{u}_1 = 0,20\vec{p}_1 + 0,45\vec{p}_2 + 0,35\vec{p}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}45 \\ 0{,}35 \end{bmatrix} = \mathsf{M}\vec{u}_0$$

Per a decidir com es distribueix la població al cap de 2, 3, 4, 5..., 10..., 20 anys hem de anar calculant els productes

$$\vec{u}_1 = \mathsf{M}\vec{u}_0, \ \vec{u}_2 = \mathsf{M}\vec{u}_1, \ \vec{u}_3 = \mathsf{M}\vec{u}_2, \ \ldots$$

El quadre següent mostra els resultats que obtindríem (arrodonits a quatre xifres decimals):

	anys									
	0	1	2	3	4	5	···	10	···	20
capital	0,20	0,2795	0,3363	0,3770	0,4061	0,4269		0,4695		0,4791
altres ciutats	0,45	0,41	0,3820	0,3623	0,3486	0,3388		0,3194		0,3152
medi rural	0,35	0,3105	0,2816	0,2606	0,2453	0,2343		0,2111		0,2057

És clar que la població de la capital creix i les de les altres ciutats i del camp decreixen. Però aquestes variacions van amortint-se, de manera que el primer any el creixement de població de la capital és aproximadament del 8 %, el segon any, del 5 %, en el pas del quart al cinqué any només del 2 % i en els deu anys que van del desé al vinté, només de l'1 %.[1] De fet, el vector de població a l'any 100 serà aquest:

a la capital 0,4795, a les altres ciutats 0,3151 i al medi rural 0,2055, amb una diferència màxima entre l'any 20 i l'any 100 de només el 4 per 10000.

En conseqüència, podem concloure que *a la llarga* la població tendirà a estabilitzar-se al voltant dels percentatges següents: 48 % 31,5 % i 20,5 %.

Ara bé, quin significat té el fet que *la població s'estabilitze*? Notem que les persones continuen migrant (sempre en els mateixos percentatges: tots els anys, el 15 % dels habitants de la capital emigren a un altre medi), però els moviments es compensen, de manera que, a la llarga, el nombre de persones que deixen la capital és aproximadament igual al de les que hi van a viure.

En termes de l'Anàlisi Matemàtica, la successió de vectors $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$... convergeix a un vector $\vec{u}$ i aquest vector, que representa la distribució estable de la població al cap d'uns quants anys, té la propietat següent:

$$\mathsf{M}\vec{u} = \vec{u}$$

Quan un vector té aquesta propietat diem que és *un vector estacionari de la matriu* M. De fet, es tracta del primer vector propi que veiem en aquest curs. Sabríeu calcular *exactament* aquest vector?

Suposem finalment que el vector de la població inicial és $\begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}20 \\ 0{,}50 \end{bmatrix}$. En els anys subsegüents tindrem aquestes proporcions:

	anys									
	0	1	2	3	4	5	···	10	···	20
capital	0,30	0,345	0,3795	0,4056	0,4251	0,4397		0,4742		0,4791
altres ciutats	0,20	0,255	0,2857	0,3025	0,3112	0,3155		0,3171		0,3152
medi rural	0,50	0,4	0,3347	0,2919	0,2636	0,2448		0,2115		0,2057

així que al cap de vint anys la distribució serà la mateixa que amb les dades inicials.

[1] No és un 1% anual, sinó un 1% en deu anys!

El que hem descrit és un exemple típic de *cadena de Màrkov*, és a dir, una successió de vectors *d'estat* $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$..., que es defineixen per recurrència com

$$\vec{u}_{n+1} = \mathsf{M}\vec{u}_n = \mathsf{M}^n\vec{u}_0$$

on

- Els components dels vectors $\vec{u}_n$ estan tots entre 0 i 1 (perquè representen probabilitats o, si es vol, percentatges).
- La suma de tots els components d'aquests vectors és 1 (perquè representa el conjunt unió de tots els estats).

  Un vector que compleix aquestes dues propietats és un vector *estocàstic*.
- Les columnes de la *matriu de transició* M són també vectors estocàstics, així que M és una *matriu estocàstica*.

Una cadena de Màrkov és *regular* si la matriu de transició M o una potència d'aquesta matriu té totes les entrades no nul·les. Doncs bé, es pot provar que si la cadena és regular, aleshores la successió $\vec{u}_n$ convergeix a un vector *estacionari* $\vec{u}$, de manera que $\mathsf{M}\vec{u} = \vec{u}$. Aquest vector es pot calcular per mètodes estrictament lineals: l'única cosa que hem de fer és resoldre el sistema d'equacions lineals

$$\mathsf{M}\vec{x} = \vec{x}$$

i, entre totes les solucions, elegir-ne una que siga un vector estocàstic.

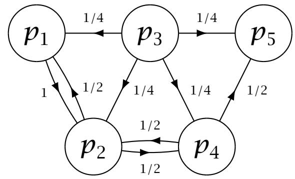
☞ En l'estudi de les matrius estocàstiques i les cadenes de Màrkov es fan servir diverses eines de l'àlgebra lineal: multiplicació de matrius, sistemes lineals, valors i vectors propis... A l'exercici 7.5. trobarem el vector estacionari estocàstic de la matriu M del nostre exemple.

0.2.1. L'algorisme PageRank

Aquest és l'algorisme que fa servir el Google per ordenar les pàgines web segons la seua *importància*. Quan hi fem una cerca, aquesta ordenació determina les pàgines que trobem i l'ordre en què apareixen. Aquest algorisme, que van dissenyar Larry Page i Serguei Brin (els fundadors de Google), s'ha anat millorant al llarg dels anys, però bàsicament és com el descriurem ací.

La WWW es pot representar com un graf dirigit,[2] on els vèrtexs són les pàgines web i hi ha un arc d'una pàgina cap a una altra si la primera inclou un enllaç a la segona.

[2]Un *graf dirigit* és un conjunt de *vèrtexs* i d'*arcs* orientats, que van d'un vèrtex a un altre.



Com a exemple, i per simplificar el model, suposarem que només hi ha cinc pàgines web, p_1, p_2, p_3, p_4 i p_5, que la pàgina p_1 apunta a la p_2, que p_2 inclou un enllaç a la pàgina p_1 i un altre a p_4, que p_3 enllaça amb totes les altres pàgines, la pàgina p_4 només apunta a la p_5 i des de p_5 no hi ha cap enllaç.

Tractarem de determinar la importància de les pàgines fent servir els criteris següents:

- Una pàgina és més important quan hi enllacen més pàgines.
- Si una pàgina que apunta a moltes altres pàgines, la importància que dona a aquestes pàgines no és massa gran.
- Una pàgina és més important si les pàgines que hi enllacen són importants.

Això ho podem modelitzar interpretant que cada pàgina atorga la mateixa importància a totes les pàgines que enllaça, així que la pàgina *reparteix* la seua importància a parts iguals entre aquestes pàgines: Si la pàgina p_i apunta a n_i pàgines i la importància de p_i és x_i, llavors atorga x_i/n_i punts d'importància a cadascuna.

En el nostre model, els arcs que surten de p_3 estan etiquetats amb $1/4$ perquè el fet que p_3 incloga quatre enllaços fa que el pes d'aquestes enllaços siga un quart del pes x_3. Així que

- la pàgina p_1 rep $x_2/2$ punts d'importància de p_2 (que enllaça amb dues pàgines) i $x_3/4$ punts de p_3 (perquè p_3 reparteix els seus punts entre quatre pàgines); per tant, la importància de p_1 és $x_1 = x_2/2 + x_3/4$
- p_2 rep x_1 punts de p_1, $x_3/4$ punts de p_3 i $x_4/2$ de p_4, així que és $x_2 = x_1 + x_3/4 + x_4/2$.
- p_3 no rep cap punt.
- p_4 en rep $x_2/2$ i $x_3/4$: $x_4 = x_2/2 + x_3/4$.
- p_5 en rep $x/4$ i $x_4/2$: $x_5 = x_3/4 + x_4/2$.

Tot això ens proporciona un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2/2 + x_3/4 \\ x_2 &= x_1 + x_3/4 + x_4/2 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= x_2/2 + x_3/4 \\ x_5 &= x/3/4 + x_4 \end{aligned} \quad \text{o (millor)} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{G}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\vec{x}}$$

I es tractaria de trobar una solució d'aquest sistema d'equacions, és a dir, un vector estacionari de la matriu G_1. A més a més, per normalitzar el resultat, imposarem la condició que la suma de totes les importàncies siga igual a 1 (és a dir, que el vector d'importàncies siga estocàstic). I també és convenient que aquest vector estocàstic i estacionari siga únic, per tenir una única ordenació de les pàgines.

☞ Tot això és possible quan la matriu és estocàstica i no conté zeros. Però és clar que la nostra matriu G_1 no compleix aquests requisits.

La matriu G_1 seria estocàstica si no fos per la darrera columna: les columnes corresponents a les pàgines p_1, p_2, p_3 i p_4 sumen 1. Però, com que p_5 no inclou cap enllaç, la columna cinquena només conté zeros. Així que hi introduirem algunes modificacions.

En primer lloc, podem pensar que el que fa un usuari quan arriba a una pàgina que no conté enllaços és elegir una pàgina qualsevol, escrivint directament l'adreça. Per tant, si el nombre total de pàgines és N, les columnes que només contenen zeros les substituirem per columnes amb totes les entrades iguals a $1/N$ (la probabilitat d'anar a qualsevol pàgina des d'una pàgina sense enllaços). En el nostre exemple, canviarem la matriu G_1 per

$$\mathsf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Ara la matriu és estocàstica, però encara conté zeros, de manera que no es garanteix l'existència d'un vector estacionari no negatiu que sume 1.[3] Així que introduirem una segona modificació.

Encara que la pàgina on ens trobem continga enllaços, és possible que en comptes de seguir-los optem per anar aleatòriament a qualsevol pàgina del sistema. De fet, un navegant d'Internet totalment aleatori no seguiria cap enllaç sinó que sempre elegiria una nova pàgina web aleatòriament. Aquest usuari, si hi ha N pàgines en total, fa servir una matriu d'aletorietat uniforme:

$$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} 1/N & 1/N & \cdots & 1/N \\ 1/N & 1/N & \cdots & 1/N \\ \cdots & & & \\ 1/N & 1/N & \cdots & 1/N \end{bmatrix}$$

El comportament que cal esperar d'un usuari de la xarxa és el de seguir prioritàriament els enllaços de les pàgines, però elegint una pàgina aleatòria de tant en tant (per exemple, perquè perd l'interès en el tema que seguia o perquè ja ha satisfet aquest interès). Diguem que la probabilitat de seguir la matriu G_2 és

[3] En el nostre exemple, sí que hi ha aquest vector, però en el cas general, no podem assegurar-ho.

més gran que la de fer servir la matriu U. Els dissenyadors del PageRank varen escollir una probabilitat de 0,85 per a G_2 (i, en conseqüència, de 0,15 per a U). Això es pot modelitzar fent servir la matriu

$$\mathsf{G} = 0{,}85\mathsf{G}_2 + 0{,}15\mathsf{U}$$

Aquesta és la *matriu Google* del PageRank. És una matriu estocàstica i totes les seues entrades són positives. Per tant, aquesta matriu té un únic vector estacionari i estocàstic. Les seues entrades són els índexs d'importància de les pàgines web.

En el nostre exemple,

$$\mathsf{G} = 0{,}85\mathsf{G}_2 + 0{,}15\mathsf{U} = \begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}455 & 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}2 \\ 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}2425 & 0{,}455 & 0{,}2 \\ 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}2 \\ 0{,}03 & 0{,}455 & 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}2 \\ 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}2425 & 0{,}455 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Recordem que el vector estacionari és el límit de la successió $\vec{x}_{n+1} = \mathsf{G}\vec{x}_n$. Podem partir d'un vector inicial *neutral* $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0{,}2$. Fent-hi unes quantes iteracions obtenim

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}1915 \\ 0{,}3615 \\ 0{,}064 \\ 0{,}1915 \\ 0{,}1915 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2297925 \\ 0{,}3203175 \\ 0{,}062555 \\ 0{,}2297925 \\ 0{,}1575425 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}2062101 \\ 0{,}3630606 \\ 0{,}0567822 \\ 0{,}2062101 \\ 0{,}167737 \end{bmatrix}, \ldots$$

i ja es veu clarament la tendència: la pàgina més important seria p_2, seguida de p_i, p_4 (amb el mateix grau d'importància), p_5 i p_3. De fet, el vector estacionari estocàstic d'aquesta matriu és (aproximadament)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0{,}2170078 \\ 0{,}3464510 \\ 0{,}0575390 \\ 0{,}2170078 \\ 0{,}1619944 \end{bmatrix}$$

En realitat, la matriu G_1 és una gran matriu buida (això vol dir que quasi totes les seues entrades són zeros, perquè una pàgina només apunta a unes (molt) poques pàgines i el total de pàgines és molt gran. En la matriu G aquests zeros estan substituïts per nombres positius molt petits. I, òbviament, l'algorisme que es fa servir per trobar (més ben dit, aproximar) el vector d'importància és molt complex.

0.3. Valors i vectors propis. Equacions en diferències

Una equació en diferències (o recurrència) lineal i homogènia és una expressió com aquesta:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

Aquesta equació és d'ordre 2, perquè hi apareixen els termes a_n, a_{n-1} i a_{n-2}, però podem transformar-la en una equació en diferències (matricial) d'ordre 1: Definim el vector $\vec{a}_n = (a_n, a_{n+1})$ i llavors les equacions anteriors són equivalents a

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vec{a}_n &= \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ -2a_{n-1} + 3a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \vec{a}_{n-1} \end{aligned}$$

D'ací es dedueix que

$$\vec{a}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^n \vec{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I el problema és ara el càlcul de les potències de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Quan estudiarem el problema de la diagonalització podrem provar que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}}$$

i, a partir d'ací, es prova fàcilment que

$$\vec{a}_n = \mathsf{A}^n \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 + 2^n \\ -1 + 2^{n+1} \end{bmatrix}$$

de manera que la solució de l'equació recurrent original és

$$\boxed{a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = -1 + 2^n, \; (n = 2, 3, \dots)}$$

Les columnes de la matriu P (és a dir, $(2, 1)$ i $(1, 1)$) són vectors propis de la matriu A, i les entrades diagonals de D (2 i 1) en són els valors propis.

0.3.1. Els nombres de Fibonacci

La famosa successió de Fibonacci, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$, es defineix per recurrència d'aquesta manera:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-2} + f_{n-1} \end{aligned}$$

Aplicant la tècnica que acabem de presentar es pot provar que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Per sorprenent que puga semblar, aquests nombres són enters! De fet, es pot simplificar el càlcul si es té en compte que els nombres $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$ són tan petits que f_n és l'enter més pròxim a $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$. Per exemple,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{12} = 144.00139\ldots$$

de manera que al cap de dotze mesos tindrem $f_{12} = 144$ parelles de conills.

☞ En els capítols 1 i 2 estudiarem les operacions amb matrius (que hem fet servir en aquest exemple per a calcular potències, productes i inverses) i al capítol 7 tractarem els problemes relacionats amb els valors propis. Per tal de calcular els valors propis farem servir els determinants, que estudiem al capítol 6.

LLIBRE PRIMER. $A\vec{x} = \vec{b}$

L'àlgebra lineal és la part de les matemàtiques que estudia els sistemes d'equacions lineals, amb l'objectiu de decidir si aquestes equacions tenen solucions i, en cas que en tinguen, quantes en tenen i quines són, aquestes solucions.

Les eines adequades per fer aquest estudi, i per entendre adequadament la relació que hi ha entre les solucions dels sistemes d'equacions lineals, són les matrius i els vectors. Per això, l'àlgebra lineal és la part de les matemàtiques que estudia les operacions amb matrius i amb vectors i les propietats de les matrius i dels vectors.

Tractem de resoldre un sistema d'equacions lineals, és a dir, (per exemple) de trobar els nombres x_1, x_2 i x_3 pels quals les igualtats

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

són correctes. Però, com resulta que això és equivalent a resoldre l'equació vectorial

$$x_1(2,1) + x_2(2,-1) + x_3(-1,1) = (1,0)$$

(és a dir, a escriure el vector $(0,1)$ com a combinació lineal dels vectors $(2,1)$, $(2,-1)$ i $(-1,1)$) o, també, a trobar els vectors $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tals que

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

abans dels sistemes d'equacions lineals estudiarem els vectors i les matrius.

Al capítol primer d'aquest curs estudiem els sistemes d'equacions lineals, i els vectors i les matrius, entesos com a eines útils en l'estudi dels sistemes d'equacions lineals.

Però les matrius tenen molta importància, al marge de la seua utilitat en l'estudi de les equacions, així que al capítol segon ens interessem per les propietats de les matrius, i per alguns tipus especials de matrius. Concretament, ens fixem en les matrius invertibles i en les matrius unitàries i hermítiques (ortogonals i simètriques, en el cas que pensem en matrius reals), que són les més importants en aquest curs i, en general, en l'àlgebra lineal.

Parlem de matrius i vectors *reals* o *complexos*. Aquest curs requereix un coneixement bàsic dels nombres complexos i, a la part final del curs, de les propietats dels polinomis (reals i complexos), especialment amb relació a la possibilitat de factoritzar-los en polinomis irreductibles. És per això que hem inclòs un capítol zero per introduir (o recordar) aquestes qüestions. Òbviament, si teniu un bon coneixement de la matèria, podeu anar directament al capítol primer; tot i això, us recomanem que, si més no, reviseu els resums de les lliçons primera i segona. Si hi teniu curiositat, podeu trobar una demostració ben elemental del teorema fonamental de l'àlgebra (tot polinomi complex té alguna arrel) a la lliçó segona.

Potser l'àlgebra lineal és *la part de les matemàtiques que estudia els espais vectorials i les aplicacions lineals.* Però d'això ens (pre)ocuparem més endavant.

CAPÍTOL 0

NOMBRES COMPLEXOS I POLINOMIS

Lliçó 1. Els nombres complexos **17**
- 1.1. Tres o quatre coses sobre els nombres reals 17
- 1.2. Els nombres complexos 18
  - 1.2.1. Forma polar 19
  - 1.2.2. Producte (o multiplicació) de dos nombres complexos 20
  - 1.2.3. El nombre i 21
  - 1.2.4. Potències dels nombres complexos . . . 22
  - 1.2.5. Suma de dos nombres complexos. Forma binòmica 22
  - 1.2.6. El producte i el quocient en forma binòmica. El conjugat d'un nombre complex 25
- 1.3. La forma exponencial 26
  - 1.3.1. La funció exponencial complexa 27
  - 1.3.2. Forma exponencial (o trigonomètrica) . 29
  - 1.3.3. Arrels d'un nombre complex 29
- 1.4. Resum 31
- 1.5. Exercicis 32

Lliçó 2. Polinomis reals i complexos. El teorema fonamental de l'àlgebra **34**
- 2.1. Polinomis (o funcions polinòmiques) 34
  - 2.1.1. Arrels i divisibilitat de polinomis 35
- 2.2. El teorema fonamental de l'àlgebra 36
  - 2.2.1. Arrels complexes de polinomis amb coeficients reals 37
- 2.3. Resum 39
- 2.4. Exercicis 40
- 2.5. Apèndix: Demostració del teorema fonamental de l'àlgebra 41
  - 2.5.1. Successions de nombres complexos . . . 41
  - 2.5.2. Algunes propietats dels polinomis complexos 42

2.5.3. La propietat clau 43

2.5.4. Demostració del teorema fonamental de l’àlgebra 44

Lliçó 1. Els nombres complexos

Déu feu el nombre natural.
Tota la resta és obra de l'home
Leopold Kronecker

La història dels nombres complexos comença amb una equació: $x^2 + 1 = 0$. Si habiteu el món dels nombres reals, aquesta equació no té cap solució, perquè, com que $x^2 + 1 = 0$ és equivalent a $x^2 = -1$, i el quadrat d'un nombre real no pot ser negatiu, això és impossible.
Per què és impossible, que el quadrat d'un nombre siga negatiu? Per allò de la famosa *regla dels signes*, recordeu?: *més per més, més; menys per menys, més*. Els nombres tenen un *signe*, i resulta que el signe del quadrat sempre és *més*. Així que *imaginarem* que hi ha més nombres, amb més de dos signes i que hi ha un signe que, en multiplicar-se per ell mateix fa *menys*, llavors hi ha uns nombres *imaginaris* els quadrats dels quals són nombres negatius.
En aquest cas, potser, hi ha un nombre i el quadrat del qual és -1 (i l'equació $x^2 + 1 = 0$ té la solució $x = \mathrm{i}$).

1.1. Tres o quatre coses sobre els nombres reals

Els nombres reals són un conjunt infinit, $\mathbb{R}$, de *nombres* que es poden sumar i multiplicar. Aquestes dues operacions són commutatives, associatives, tenen un element neutre (0 és el neutre de la suma i 1 el de la multiplicació) i la multiplicació és distributiva respecte a la suma. Tot nombre real x té un *oposat*, $-x$ tal que $x + (-x) = 0$ i tot nombre real, tret del zero, en té un d'*invers*, x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.[1]

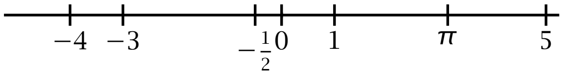
A més a més, el conjunt $\mathbb{R}$ és *totalment ordenat*, la qual cosa vol dir que si dos nombres x i y no són iguals, n'hi ha un que és *més gran* que l'altre: si x i y són nombres reals, es compleix una (i només una) de les següents propietats: $x < y$, $x = y$ o $x > y$. Això ens permet classificar els nombres reals no iguals a zero com a positius o negatius: els nombres més grans que 0 són *positius* i els més menuts que zero, *negatius*. El *valor absolut* (o *mòdul*), $|x|$, del nombre real x és el mateix x, quan el nombre és positiu o zero, i $-x$, quan és negatiu. Per això, podem expressar els nombres reals amb un signe i un mòdul. Per exemple, $-2{,}53$ o $+2{,}53$ (tot i que el signe positiu se sol suprimir).

☞ Els nombres complexos també tenen un *signe* i un valor absolut, però no hi ha només dos signes possibles, sinó infinits.

Els nombres reals els podem visualitzar com els punts d'una recta: si dibuixem una recta horitzontal i elegim un punt qualsevol per representar el zero, els

[1] Quan un conjunt amb dues operacions té totes aquestes propietats se'n diu un *cos*, així que els nombres reals són un cos.

nombres positius els situarem a la dreta del zero i els negatius a l'esquerra; com més gran és el valor absolut, més lluny del zero es troba el nombre.

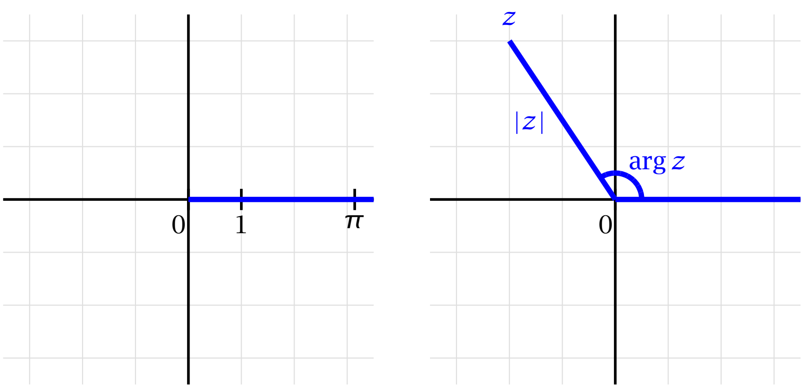


La semirecta a la dreta del zero representa els nombres positius; i l'esquerra, els negatius. Els dos nombres x i $-x$ es troben a la mateixa distància del zero; aquesta distància és el valor absolut del nombre.

1.2. Els nombres complexos

☞ Definim *provisionalment* els nombres complexos com el conjunt de tots els punts d'un pla.

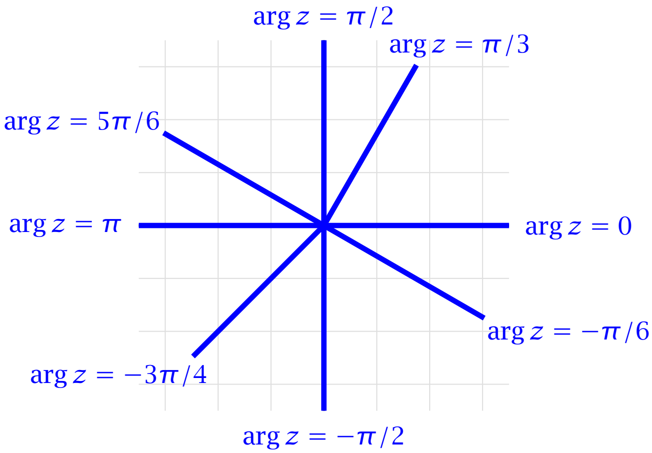
En aquest pla elegim un punt que representarà el nombre zero; la semirecta horitzontal dreta amb extrem al zero representa els nombres positius. Si z és un nombre complex (és a dir, un punt del pla) el valor absolut (o *mòdul*) de z, $|z|$, és la distància d'aquest punt al zero, és a dir, la longitud del segment $\overline{0z}$. I l'angle que fa la semirecta dels reals positius amb el segment $\overline{0z}$ és l'*argument* de z; el representem com $\arg z$.



El *signe* del nombre z és el seu argument. Tots els nombres que tenen el mateix argument es troben sobre una semirecta. Els nombres positius són els que tenen l'argument igual a zero (i, per això, són a la semirecta horitzontal dreta) i els negatius els que el tenen igual a π (o 180°).

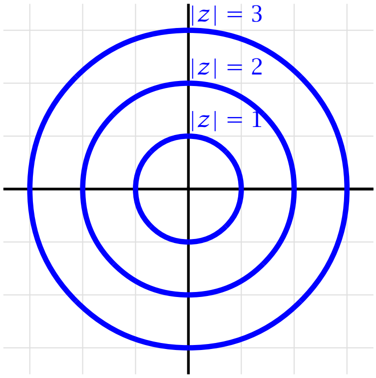
Els nombres complexos que no són reals, és a dir, els que no es troben sobre la recta horitzontal (des d'ara, la *recta real*), els anomenem *imaginaris*.[2]

[2] Fent gala de la nostra imaginació, anomenem *imaginari* allò que no és *real*.



Així que els nombres reals són també nombres complexos; si representem com $\mathbb{C}$ el conjunt dels nombres complexos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. El conjunt dels nombres reals és la unió de dues semirectes. Els complexos, la d'infinites semirectes.

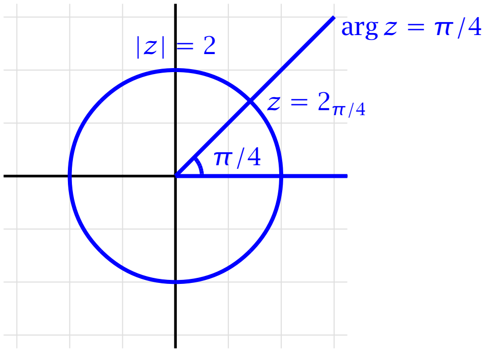
D'altra banda, els nombres que tenen el mateix valor absolut es troben sobre una circumferència.



Abans de continuar, convé que observem que el nombre 0 no té cap argument (o que qualsevol angle hi serviria, com a argument), perquè el segment $\overline{00}$ és un punt i no hi fa cap angle amb la semirecta dels reals positius.

1.2.1. Forma polar

Per conéixer un nombre complex hem de saber quin punt del pla el representa; i, això, ve determinat pel valor absolut i l'argument. Per exemple, si $|z| = 2$ i $\arg z = \pi/4$ el nombre z és a la semirecta de pendent 45° i a la circumferència de radi 2, és a dir, que z és el nombre que es mostra al gràfic següent.



Com que el mòdul 2 i l'argument $\pi/4$ descriuen perfectament el nombre z, l'hem representat com $2_{\pi/4}$. Aquesta és la *forma polar* del nombre complex. La farem servir de moment, però al final de la lliçó la canviarem per una altra més convenient, la forma *exponencial*.

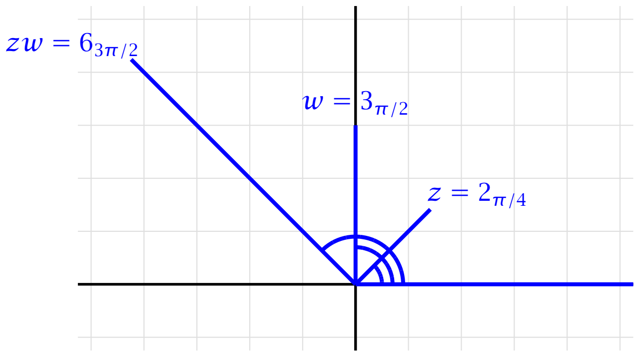
Ara, no podem parlar de *nombres* si no hi fem operacions. Així que haurem de veure com se sumen i com es multipliquen, els nombres complexos. Començarem, lògicament, per l'operació més senzilla: la multiplicació.

1.2.2. Producte (o multiplicació) de dos nombres complexos

Definició 1.1.

Per *multiplicar* dos nombres complexos es multipliquen els seus valors absoluts i se sumen els seus arguments: $r_\alpha s_\beta = (rs)_{\alpha+\beta}$.

Per exemple, $2_{\pi/4}3_{\pi/2} = 6_{3\pi/4}$ (perquè $2 \cdot 3 = 6$ i $\pi/4 + \pi/2 = 3\pi/4$).



El 0 no té forma polar, així que definim directament el producte amb un altre nombre complex: $0z = 0$.

El producte és commutatiu i associatiu; té un element neutre (el nombre real $1 = 1_0$) i si $z = |z|_{\arg z}$ és un nombre distint de zero, llavors el nombre z^{-1} de mòdul $1/|z|$ i argument $-\arg z$ és l'invers de z, $z^{-1} = (1/|z|)_{-\arg z}$.

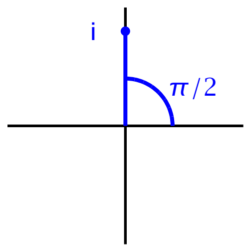
Això de l'invers està relacionat directament amb la *divisió* de dos nombres complexos. El quocient z/w (w ha de ser un nombre distint de zero), és el nombre $q = zw^{-1}$, així que el mòdul és el quocient dels mòduls, $|z/w| = |z| / |w|$ i l'argument, la diferència dels arguments, $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$. Per exemple, $(6_{3\pi/4}) / (2_{\pi/4}) = 3_{\pi/2}$.

1.2.3. El nombre i

Ara ja podem *resoldre* el nostre problema inicial; volem trobar un nombre i tal que $\mathrm{i}^2 = -1$. Aquest nombre tindrà un argument, α, i un valor absolut, r, és a dir, $\mathrm{i} = r_\alpha$. Llavors, el seu quadrat serà $\mathrm{i}^2 = (r^2)_{2\alpha} = -1 = 1_\pi$. Això passa si $r^2 = 1$ i $\alpha = \pi/2$.

Definició 1.2.

El nombre complex i és el que té el mòdul igual a 1 i l'argument igual a $\pi/2$, $\mathrm{i} = 1_{\pi/2}$.



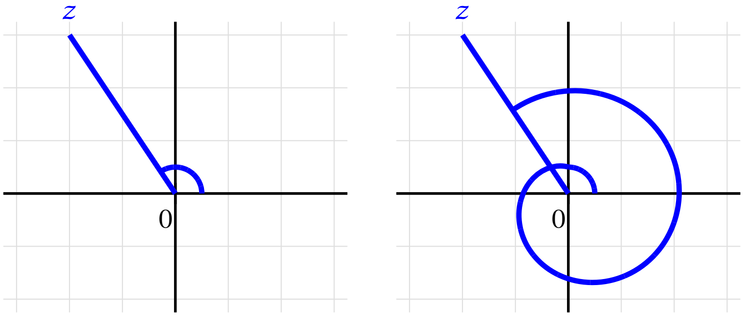
Propietat 1.1.

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Demostració: Com que $|\mathrm{i}| = 1$ i $\arg \mathrm{i} = \pi/2$ tenim que $|\mathrm{i}^2| = 1^2 = 1$ i $\arg \mathrm{i}^2 = 2(\pi/2) = \pi$. Així que $\mathrm{i}^2 = 1_\pi = -1$. □

Això vol dir que i és una arrel quadrada de -1. Però $1_{\pi/2+\pi}$ també ho és, perquè $(1_{\pi/2+\pi})^2 = 1_{\pi+2\pi} = -1$. Això passa perquè l'argument no és únic; un nombre complex té molts arguments, perquè els angles $\alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \ldots$ defineixen la mateixa semirecta. *Tots els arguments $\alpha + 2k\pi$ (si k és enter) són equivalents.*

☞ L'*argument principal* del nombre complex z és el que es troba a l'interval $]-\pi, \pi]$.



El nombre -1 té infinits arguments, tots els de la forma $\pi + 2k\pi$; això vol dir que hi ha infinites arrels quadrades de -1? Vegem-ho: de cada argument es dedueix una arrel quadrada:

$$\begin{aligned}
&\text{Amb l'argument } \pi \text{ trobem } w_0 = 1_{\pi/2} = \mathrm{i}.\\
&\text{Amb l'argument } \pi + 2\pi, \quad w_1 = 1_{\pi/2+\pi} = -\mathrm{i}.\\
&\text{Amb l'argument } \pi + 4\pi, \quad w_1 = 1_{\pi/2+2\pi} = \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

perquè l'argument $\pi/2 + 2\pi$ és equivalent a $\pi/2$. I, a partir d'ací, es van repetint periòdicament els mateixos resultats (amb valors negatius de k també surten els mateixos nombres). Així que només hi ha dues arrels complexes de -1, $w_0 = \mathrm{i}$ i $w_1 = -\mathrm{i}$.

1.2.4. Potències dels nombres complexos

El que acabem de fer és calcular les arrels quadrades d'un nombre complex. De manera general, com que és tan fàcil multiplicar nombres complexos, no ens costarà gaire calcular-ne les potències i les arrels. El problema de les potències és trivial, com que per a multiplicar nombres complexos es multipliquen els valors absoluts i se sumen els arguments,

Propietat 1.2.

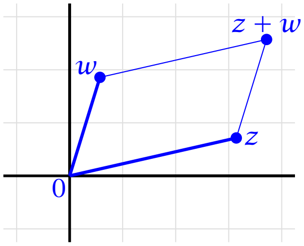
Si $z = |z|_{\arg z}$ és un nombre complex no nul i n és un nombre natural llavors, $z^n = |z|^n_{n \arg z}$, és a dir, que el valor absolut de z^n és $|z|^n$ i, l'argument, $n \arg z$. □

Per exemple, $(3_{\pi/3})^5 = (3^5)_{5\pi/3}$. Calcular arrels no és gaire més complicat, però ho deixarem per més endavant.

Ja sabem multiplicar, dividir i calcular potències. Però encara no sabem sumar.

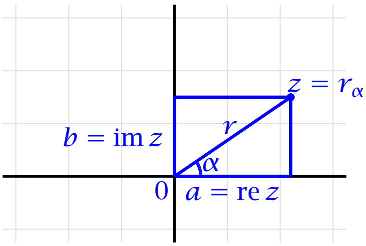
1.2.5. Suma de dos nombres complexos. Forma binòmica

Construirem la suma de manera geomètrica. Si z i w són dos nombres complexos que no són iguals a zero ni tenen el mateix argument, podem construir un paral·lelogram amb costats els segments $\overline{0z}$ i $\overline{0w}$. El quart vèrtex és la suma $z + w$.

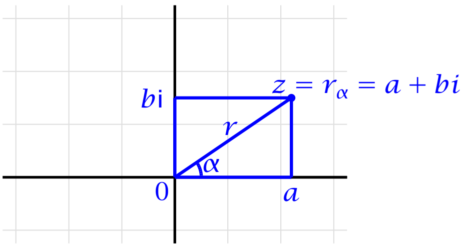


Això està molt bé, però no és operatiu (i encara no és del tot correcte, perquè no hem definit la suma en el cas que els nombres tinguen el mateix argument o un d'ells siga igual a 0). Per a obtenir explícitament la suma, haurem d'expressar-los en *forma binòmica*. Això vol dir que farem servir les coordenades cartesianes, en compte de les polars.

Suposem que z és un nombre complex amb valor absolut r i argument α. Podem construir un rectangle que té com a diagonal el segment $\overline{0z}$ i dos costats sobre els eixos.



La longitud del costat horitzontal d'aquest rectangle és la *part real* de z (perquè correspon a l'eix dels nombres reals), $\operatorname{re} z$ i, la del costat vertical, la *part imaginària*, $\operatorname{im} z$. A més a més, els quatre vèrtexs d'aquest rectangle són 0, a, z i $b\mathrm{i}$.



Per tant, $z = a + b\mathrm{i}$ (o $z = a + \mathrm{i}b$). Aquesta és la *forma binòmica* del nombre z. Conve notar que, pel teorema de Pitàgores, $|z|^2 = a^2 + b^2$.

Els nombres a i b (la part real i la part imaginària) són les coordenades cartesianes del nombre z, perquè l'hem representat sobre un pla cartesià. Aquest pla també es coneix com *pla d'Argand*, per Jean-Robert Argand, el primer que el feu servir per representar els nombres complexos.

Així que, els nombres complexos, els podem representar en forma polar o en forma binòmica. Amb una mica de trigonometria, podem deduir la relació entre una forma i l'altra: al triangle rectangle $0az$ trobem les relacions següents, que ens permeten determinar la forma binòmica a partir de la forma polar:

$$a = r\cos\alpha \qquad b = r\sin\alpha$$

En conseqüència,

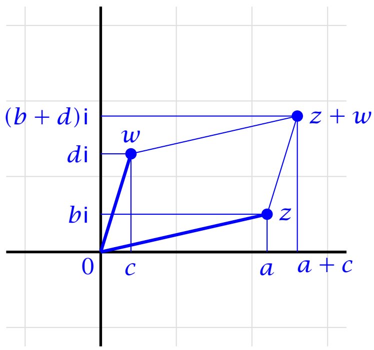
$$z = r_\alpha = r\cos\alpha + \mathrm{i}r\sin\alpha$$

Per exemple, $2_{\pi/4} = 2\cos\pi/4 + \mathrm{i}2\sin\pi/2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

☞ Això ens permet expressar les potències dels nombres complexos, en forma binòmica: si $z = r_\alpha$, llavors $z^n = (r^n)_{n\alpha} = r^n(\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha)$. Aquesta és la *fórmula de De Moivre.*

Els nombres $a + 0\mathrm{i}$ coincideixen amb els reals, i els escrivim simplement com a (són els que tenen arguments igual a 0 o π). Els nombres $0 + b\mathrm{i}$ s'abreugen com $b\mathrm{i}$ i els anomenem *imaginaris purs* (són els d'argument igual a $\pi/2$ o $-\pi/2$).

Tornem a la suma $z+w$. Si $z = a+b\mathrm{i}$ i $w = c+d\mathrm{i}$, la suma $z+w$ es construeix geomètricament d'aquesta manera:



Així que, si $z = a + b\mathrm{i}$ i $w = c + d\mathrm{i}$ són dos nombres complexos amb arguments distints, tindrem $(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$. Farem servir aquesta expressió per a definir la suma en el cas general.

DEFINICIÓ 1.3.

La *suma* dels nombres complexos $z = a + b\mathrm{i}$ i $w = c + d\mathrm{i}$ és

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$$

En altres paraules, per sumar dos nombres complexos se sumen, per una banda, les parts reals i, per l'altra, les parts imaginàries.

Per exemple, $(2+3\mathrm{i}) + (-4+5\mathrm{i}) = -2+8\mathrm{i}$.

La suma és commutativa i associativa. El nombre $0 = 0 + 0\mathrm{i}$ n'és el neutre, perquè $z+0 = z$, i el nombre $-z = -a-b\mathrm{i}$ és l'oposat de z, perquè $z+(-z) = 0$. Tot això es demostra sense cap dificultat. Però encara queda una propietat molt important: el producte és distributiu respecte a la suma; aquesta propietat és important, perquè sense ella no podem combinar sumes i productes de manera eficient.

1.2.6. El producte i el quocient en forma binòmica. El conjugat d'un nombre complex

Ara per ara, sabem sumar nombres en forma binòmica i multiplicar-los en forma polar. Sumar en forma polar és complicat; i multiplicar en forma binòmica, també, però no tant. En aquest apartat deduirem una fórmula per a la multiplicació de dos nombres expressats en forma binòmica.

Si multipliquem els nombres $z = a + b\mathrm{i} = r_\alpha$ i $w = c + d\mathrm{i} = s_\beta$ obtenim

$$\begin{aligned} zw &= r_\alpha s_\beta = (rs)_{\alpha+\beta} \\ &= rs\cos(\alpha+\beta) + (rs\sin(\alpha+\beta))\,\mathrm{i} \\ &= rs\,(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + rs\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\,\mathrm{i} \\ &= \big(\underbrace{(r\cos\alpha)}_{a}\underbrace{(s\cos\beta)}_{c} - \underbrace{(r\sin\alpha)}_{b}\underbrace{(s\sin\beta)}_{d}\big) \\ &\qquad + \big(\underbrace{(r\cos\alpha)}_{a}\underbrace{(s\sin\beta)}_{d} + \underbrace{(r\sin\alpha)}_{b}\underbrace{(s\cos\beta)}_{c}\big)\mathrm{i} \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)\mathrm{i} \end{aligned}$$

☞ $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) = (ac-bd) + (ad+bc)\mathrm{i}$

Per exemple, $(1+2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}) = (1\cdot 2 - 2\cdot 3) + (1\cdot 3 + 2\cdot 2)\mathrm{i} = -4+7\mathrm{i}$.

Propietat 1.3.

El producte de nombres complexos és distributiu respecte a la suma, és a dir, $z(w_1+w_2) = zw_1 + zw_2$.

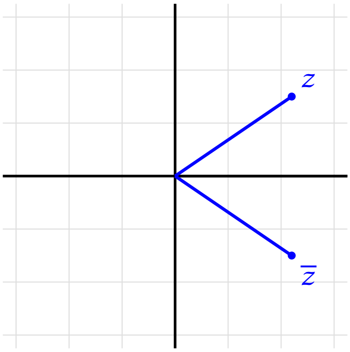
La demostració és fàcil però avorrida: escriviu $z(w_1+w_2)$ en forma binòmica i comproveu que això és igual a $zw_1 + zw_2$. □

Per aprendre a dividir en forma binòmica, necessitem un element nou:

Definició 1.4.

El *conjugat* del nombre complex $z = a + b\mathrm{i}$ és el nombre $a - b\mathrm{i}$ (que té la mateixa part real que z i la part imaginària canviada de signe).

El conjugat de z és el simètric de z respecte a l'eix real.



Propietat 1.4.

> *El producte d'un nombre pel seu conjugat és igual al quadrat del mòdul:* $z\overline{z} = |z|^2$

Demostració:

$z\overline{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = (aa - b(-b)) + (a(-b) + ba)\mathrm{i} = a^2 + b^2 + 0\mathrm{i} = |z|^2$ □

D'aquí es dedueix que, si $z \neq 0$, $z^{-1} = \overline{z}/\,|z|^2$, perquè

$$z\overline{z} = |z|^2 \Longrightarrow z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1$$

Això ens serà útil per dividir els nombres z i w. En el quocient z/w multiplicarem i dividirem pel conjugat de w:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

(aquest procés sol anomenar-se *racionalització*, perquè elimina el nombre i del denominador)

Per exemple,

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})} = \frac{1}{13}(-4+7\mathrm{i})$$

1.3. La forma exponencial

Hem dit que faríem servir la forma polar, $z = r_\alpha$, *de moment.* Ara la substituirem per la forma *exponencial.*

En primer lloc, *deduirem* com ha de ser la funció e^z, quan l'exponent z és complex.

1.3.1. La funció exponencial complexa

La funció exponencial real, $\exp x = \mathrm{e}^x$, té les propietats següents:

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$$

El que volem fer ara és *estendre* aquesta funció als nombres complexos. És a dir, definir una funció $\exp z = \mathrm{e}^z$ que tinga aquestes mateixes propietats i que, a més, quan z és real coincidisca amb la funció exponencial real.

Perquè passe això, haurà de ser

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$$

e^x és l'exponencial real; però $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ encara no sabem què és. Mirarem de deduir-ho.

La funció $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ Una funció complexa de variable real, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es pot escriure com $f(t) = f_1(t) + \mathrm{i}f_2(t)$, on f_1 i f_2 són funcions reals. Doncs bé, si les dues funcions f_1 i f_2 són derivables en un punt t_0, direm que f és derivable en t_0 i que la derivada de f en t_0 és

$$f'(t_0) = f_1'(t_0) + \mathrm{i}f_2'(t_0)$$

(en altres paraules, per derivar la funció f derivem les parts real i imaginària).

Per exemple, si $f(t) = t + t^2 - \cos t + (t^3 - \mathrm{e}^t)\mathrm{i}$, llavors, $f'(t) = 1 + 2t + \sin t + (3t^2 - \mathrm{e}^t)\mathrm{i}$

El que volem fer és definir una funció $E(t) = C(t) + \mathrm{i}S(t)$, que representarem com $E(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, i que s'ha de comportar com la funció exponencial real. Per tant, volem que les derivades successives de E siguen

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i}E(t) \Longrightarrow C'(t) + \mathrm{i}S'(t) = \mathrm{i}(C(t) + \mathrm{i}S(t)) = -S(t) + \mathrm{i}C(t)\\
E''(t) &= \mathrm{i}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = -E(t) \Longrightarrow C''(t) + \mathrm{i}S''(t) = -1(C(t) + \mathrm{i}S(t)) = -C(t) - \mathrm{i}S(t)\\
E'''(t) &= \mathrm{i}^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = -\mathrm{i}E(t) \Longrightarrow C'''(t) + \mathrm{i}S'''(t) = -\mathrm{i}(C(t) + \mathrm{i}S(t)) = S(t) - \mathrm{i}C(t)\\
E^{\mathrm{iv})}(t) &= \mathrm{i}^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = E(t) \Longrightarrow C^{\mathrm{iv})}(t) + \mathrm{i}S^{\mathrm{iv})}(t) = 1(C(t) + \mathrm{i}S(t)) = C(t) + \mathrm{i}S(t)
\end{aligned}$$

i, a partir d'ací, es repeteixen els resultats cíclicament. Separant-hi les parts reals i les imaginàries,

$$\begin{array}{lllll}
C'(t) = -S(t) & C''(t) = -C(t) & C'''(t) = S(t) & C^{\mathrm{iv})}(t) = C(t) & \dots\\
S'(t) = C(t) & S''(t) = -S(t) & S'''(t) = -C(t) & S^{\mathrm{iv})}(0) = S(t) & \dots
\end{array}$$

Tot això ens permet desenvolupar les funcions C i S com a sèries de potències: Com que $E(0) = \mathrm{e}^0 = 1 = 1 + 0\mathrm{i}$, tindrem que $C(0) = 1$ i $S(0) = 0$, així que

$$\begin{array}{lllll}
C(0) = 1 & C'(0) = 0 & C''(0) = -1 & C'''(0) = 0 & C^{\mathrm{iv})}(0) = 1\dots\\
S(0) = 0 & S'(0) = 1 & S''(0) = 0 & S'''(0) = -1 & S^{\mathrm{iv})}(0) = 0\dots
\end{array}$$

Llavors, les sèries de potències associades a les funcions C i S són, respectivament,

$$1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \qquad t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

I només cal recordar que

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \qquad \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

per concloure que ens convé elegir $C(t) = \cos t$ i $S(t) = \sin t$: La funció $E(t) = \cos t + \mathrm{i} \sin t$ té la propietat que $E'(t) = \mathrm{i}E(t)$.

☞ Per tant, $\cos t + \mathrm{i} \sin t$ és un bon candidat per a ser $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

DEFINICIÓ 1.5.

La *funció exponencial complexa* es defineix com

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y)$$

Us deixem com exercici comprovar que es compleixen les propietats fonamentals de la funció exponencial, $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w$, $\mathrm{e}^{z-w} = \mathrm{e}^z / \mathrm{e}^w$ i, si n és enter, $\mathrm{e}^{nz} = (\mathrm{e}^z)^n$.

LA FÓRMULA D'EULER En realitat, l'havia descobert Roger Cotes uns quants anys abans que no ho fes Euler. Per a obtenir-la hem de calcular el valor de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$:

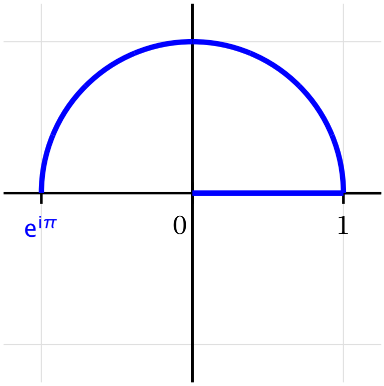
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi = -1 + \mathrm{i}0 = -1$$

és a dir,

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0}$$

Aquesta és la fórmula d'Euler. I és la fórmula més sorprenent de les matemàtiques, perquè involucra els cinc nombres més importats, és absolutament senzilla, i relaciona coses que aparentment no tenen cap relació: el nombre π és la longitud d'una circumferència de diàmetre unitari; e es pot interpretar com la taxa d'interès en un crèdit que actualitza el deute instantàniament; i és un nombre que ens hem inventat per poder calcular l'arrel quadrada d'un nombre negatiu; 1 i 0 són dos nombres enters, els neutres de la suma i el producte.

També podem provar-la amb un argument geomètric: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi$ és el nombre complex de mòdul 1 i argument π, així que el podem trobar fent girar el segment $\overline{01}$ un angle de 180º.



1.3.2. Forma exponencial (o trigonomètrica)

Si el mòdul i l'argument del nombre complex z són r i α, z es pot expressar en forma polar o en forma binòmica,

$$z = r_\alpha = (r\cos\alpha) + (r\sin\alpha)\mathrm{i} = r\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$$

és a dir,

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$$

Per això, en comptes de la forma polar, $z = |z|_{\arg z}$, farem servir la *forma exponencial* (o *trigonomètrica*), $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\arg z}$. Això, té l'avantatge que podem treballar-hi fent servir les manipulacions aritmètiques usuals: per exemple, si $z = 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$ i $w = -2\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}}$,

$$zw = \left(3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}\right)\left(-2\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}}\right) = 3(-2)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}-4\mathrm{i}} = -6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}$$

Les potències es calculen de manera *natural*,

$$\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha n}$$

1.3.3. Arrels d'un nombre complex

Per calcular les arrels enèsimes d'un nombre complex, cal que recordem que l'argument no és únic. Per això, si tenim un nombre $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ i $w = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ n'és una arrel enèsima, llavors el mòdul $|w|^n$ serà igual al mòdul $|z|$ i, l'argument, $n\arg w$, igual a *un argument* de z, és a dir,

$$s^n = r \qquad n\beta = \alpha + 2k\pi$$
$$s = \sqrt[n]{r} \qquad \beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$$

Així que les arrels enèsimes de z són tots els nombres

$$w = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+2k\pi)/n}$$

Per exemple, les arrels cúbiques de $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ són els nombres de la forma $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)/3}$

- Posant $k = 0$, obtenim $w_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.
- Amb $k = 1$, $w_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2\pi)/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.
- Amb $k = 2$, $w_2 = \mathrm{e}^{\nu(\pi+4\pi)/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/3}$.
- Amb $k = 3$, $w_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+6\pi)/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = w_0$.

A partir d'ací, es van repetint periòdicament els mateixos resultats i amb valors negatius de k surten els mateixos nombres. Així que hi ha tres arrels complexes de -1,

$$w_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} \qquad w_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 \qquad w_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/3}$$

En general,

Propietat 1.5.

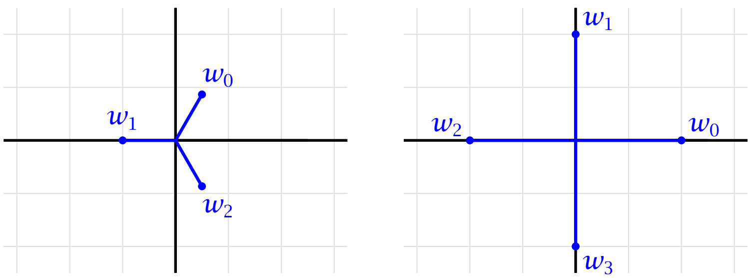
Qualsevol nombre complex $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 0$ té exactament n arrels complexes:

$$w = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+2k\pi)/n} \qquad k = 0, 1, 2, \dots n-1 \quad \square$$

Per exemple, les arrels quartes de $16 = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$ són

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}0/4} = 2 & \qquad w_1 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/4} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 2\mathrm{i} \\ w_2 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/4} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -2 & \qquad w_3 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\pi/4} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2} = -2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Els gràfics següents mostren les arrels cúbiques de -1 i les arrels quartes de 16.



Arrels cúbiques de -1 Arrels quartes de 16

Noteu que, en aquests dos casos, les arrels d'ordre n coincideixen amb els vèrtexs d'un polígon regular de n costats. Podríeu provar que, en general, les arrels enèsimes de qualsevol nombre complex no nul coincideixen amb els vèrtexs d'un polígon regular de n costats?

1.4. Resum

Un nombre complex és una expressió del tipus $z = a + b\mathrm{i}$ on a i b són nombres reals.

La funció exponencial complexa $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$.

- Es pot escriure com e^z o, també, com $\exp z$.
- $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$, $\mathrm{e}^{z-w} = \mathrm{e}^z/\mathrm{e}^w$.
- Si n és enter, $\mathrm{e}^{nz} = (\mathrm{e}^z)^n$.

Expressions alternatives

$\boxed{z = a + b\mathrm{i}}$ L'expressió $z = a + b\mathrm{i}$ (o $z = a + \mathrm{i}b$) és la *forma binòmica* del nombre z.

- a és la *part real* de z. La part real es representa com $\operatorname{re} z$.
- b la *part imaginària* de z. La part imaginària es representa com $\operatorname{im} z$.

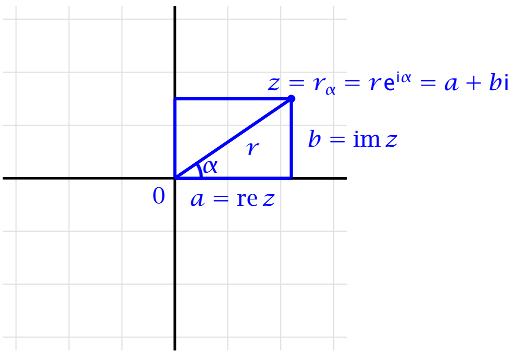
$\boxed{z = r_\alpha}$ Elegint les coordenades polars, el nombre z el podem expressar en la *forma polar* (*mòdul-argument*), $z = r_\alpha$.

- r és *el valor absolut* o *mòdul* de z. El mòdul es representa com $|z|$.
- α és *un argument* de z.

☞ El *nombre* i és el que té mòdul igual a 1 i argument igual a π: $\mathrm{i} = 1_\pi$.

Aquesta forma no es fa servir habitualment, perquè la forma exponencial és equivalent i més operativa.

$\boxed{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}$ Fent servir la funció exponencial, el nombre complex s'expressa en *forma exponencial* (o *trigonomètrica*) com $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ o $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.



El nombre i

$\mathrm{i} = 0 + 1\mathrm{i} = 1_{\pi/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$

$(\cdots)$

$(\cdots)$

Relacions entre els elements del nombre complex

Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = a + b\mathrm{i}$,

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{b}{a}$ (sempre que $a \neq 0$)
- $a = r\cos\alpha \quad b = r\sin\alpha$
- Si α és un argument de z, els arguments de z són tots els nombres de la forma $\alpha + 2k\pi$ (k enter).
  L'*argument principal* és el que hi ha a l'interval $]-\pi, \pi]$.

Operacions amb nombres complexos

Suma $(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + b) + (c + d)\mathrm{i}$

Producte $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\left(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) = rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}$

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$$

Conjugació $\overline{a + bi} = a - b\mathrm{i}$

$$\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$$

Divisió $\dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} = \dfrac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}, \quad (s \neq 0)$

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{|w|^2} z\overline{w}, \quad (w \neq 0)$$

Potències enèsimes $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$

Fórmula de De Moivre: ${r_\alpha}^n = r^n(\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha)$

☞ $\mathrm{i}^2 = -1$

Arrels enèsimes $w_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

1.5. Exercicis

Exercici 1.1. Representeu en un pla els nombres complexos $z_1 = 1_{\pi/3}$, $z_2 = 2_{\pi/6}$ i $z_3 = (1/2)_{-\pi/2}$ i calculeu el producte $z_1z_2z_3$.

(solució: pàg. 495)

Exercici 1.2. Dibuixeu al pla complex un hexàgon regular inscrit en la circumferència de centre l'origen i radi igual a 1 i amb un vèrtex en el nombre 1. Quins són els nombres complexos, z_0, z_1, …, z_5, que representen els sis vèrtexs de l'hexàgon? Quan valen les potències sisenes d'aquests nombres?

(solució: pàg. 495)

Exercici 1.3. Feu les operacions següents i expresseu els resultats en forma binòmica i en forma polar. (a) $1/\mathrm{i}$, (b) $(1 - \mathrm{i})/(1 + \mathrm{i})$, (c) $2/(1 - 3\mathrm{i})$, (d) $1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.

(solució: pàg. 495)

Exercici 1.4. Donats els nombres complexos $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + \mathrm{i}$, $z_4 = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})$, $z_5 = (1 + \mathrm{i})/(1 - \mathrm{i})$, (a) determineu-ne les parts reals i imaginàries, (b) calculeu-ne els mòduls i els arguments, (c) expresseu-los en forma polar i en forma exponencial, (d) calculeu-ne els conjugats i els inversos.

(solució: pàg. 496)

Exercici 1.5. Calculeu les potències següents: (a) $(1+\mathrm{i})^n$, (b) $\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right)^3$, (c) $\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right)^5$, (d) $\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right)^6$, (e) i^{153}.

(solució: pàg. 496)

Exercici 1.6. Calculeu les arrels quadrades dels nombres $-\mathrm{i}$, $3 + 4\mathrm{i}$ i $4 - 3\mathrm{i}$.

(solució: pàg. 496)

Exercici 1.7. Calculeu les arrels cinquenes de $z = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$.

(solució: pàg. 497)

Exercici 1.8. Proveu que les arrels enèsimes del nombre complex z estan en progressió geomètrica i deduïu-ne que la suma de totes les arrels enèsimes de z és igual a 0.

(solució: pàg. 498)

Exercici 1.9. Feu servir la fórmula de De Moivre per provar les següents (ben conegudes) identitats trigonomètriques:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

(solució: pàg. 498)

Exercici 1.10. Proveu que $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{x\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-x\mathrm{i}}}{2}$ i $\sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{x\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-x\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}$ (per a qualsevol nombre real x).

(solució: pàg. 498)

Exercici 1.11. Calculeu les sumes

$$\cos 0 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha, \quad \sin 0 + \sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha$$

(solució: pàg. 499)

Lliçó 2. Polinomis reals i complexos. El teorema fonamental de l'àlgebra

Le plus court chemin entre deux vérités
dans le domaine réel passe par le domaine complexe
Jacques Hadamard

La història dels nombres complexos comença amb una equació *polinòmica*: $x^2 + 1 = 0$. És una equació polinòmica perquè $x^2 + 1$ és un *polinomi*. En aquesta lliçó estudiarem les qüestions bàsiques sobre els polinomis i les equacions polinòmiques; o, més concretament, les propietats dels polinomis que necessiteu per treballar en l'àlgebra lineal amb nombres, matrius i vectors reals o complexos.

2.1. Polinomis (o funcions polinòmiques)

Parlant estrictament, un polinomi no és el mateix que una funció polinòmica. Però això és una qüestió que només interessa als matemàtics. Als efectes que ens preocupen ací, un *polinomi de la indeterminada x* és una aplicació de la forma

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\rightsquigarrow p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

on $\mathbb{K}$ és el conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals o bé el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos i $a_0, a_1, \dots, a_n$ són nombres d'aquest conjunt. Si $a_n \neq 0$, el *grau* del polinomi és $\operatorname{gr} p(x) = n$.

Per exemple, $x^2 + 1 - 2x$ és un polinomi de grau 2 i $-x^5$ és un polinomi de grau 5.

La lletra x sol substituir-se per z quan el polinomi és complex, és a dir, quan $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. I es representa com $\mathbb{K}[x]$ el conjunt de tots els polinomis (sobre $\mathbb{K}$); en particular, $\mathbb{R}[x]$ és el conjunt dels polinomis reals i $\mathbb{C}[z]$ el dels polinomis complexos.

Un nombre x_0 és una *arrel* del polinomi $p(x)$ si $p(x_0) = 0$ (dit d'altra manera, les arrels del polinomi $p(x)$ són les solucions de l'equació $p(x) = 0$). Per exemple, les arrels del polinomi $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ són $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$, perquè el polinomi es pot factoritzar com $p(x) = x(x-1)(x-2)$ i, llavors, perquè $p(x)$ siga zero ha de ser $x = 0$, $x = 1$ o $x = 2$.

Com que els nombres reals són també nombres complexos, els polinomis amb coeficients reals també són polinomis complexos. Però pot passar que un polinomi (real) tinga més arrels complexes que no reals. Per exemple, si $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$ només té una arrel real, $x_1 = -1$, però, de complexes, en té tres, $x_1 = -1$, $x_2 = \mathrm{i}$, $x_3 = -\mathrm{i}$.

2.1.1. Arrels i divisibilitat de polinomis

Recordeu que els polinomis es poden *dividir*: si $p(x)$ i $d(x)$ són polinomis i $\operatorname{gr} d(x) \leq \operatorname{gr} p(x)$ llavors $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$ on $q(x)$ i $r(x)$ són polinomis (el *quocient* i el *residu* de la divisió), $\operatorname{gr} p(x) = \operatorname{gr} q(x) \cdot \operatorname{gr} d(x)$ i $\operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr} d(x)$. Si $r(x) = 0$ es diu que $p(x)$ és múltiple de (o divisible per) $d(x)$ (o que $d(x)$ és *divisor* de $p(x)$).

Si a és un nombre i dividim $p(x)$ per $x-a$, com que el grau del residu ha de ser menor que el de $d(x)$, el residu serà un polinomi constant (un nombre): $p(x) = q(x)(x-a) + r$. A més a més, $r = p(a)$, perquè $p(a) = q(a)(a-a) + r = r$.

☞ El residu de la divisió de $p(x)$ per $x - a$ és igual a $p(a)$.

☞ Com a conseqüència d'això, a és una arrel de $p(x)$ si i només si $p(x)$ és múltiple de $x - a$, és a dir, $p(x) = q(x)(x - a)$.

Els polinomis constants $q(x) = a$ no nuls sempre són divisors del polinomi $p(x)$, perquè $p(x) = a\left(\frac{1}{a}p(x)\right)$. I els polinomis de la forma $ap(x)$, $(a \neq 0)$ també són divisors de $p(x)$, perquè $p(x) = ap(x)\left(\frac{1}{a}\right)$. Aquests són els *divisors trivials* de $p(x)$.

Un polinomi és *primer* (o irreductible) si no té divisors no trivials. Els polinomis constants i els de grau 1 són irreductibles. Però n'hi ha més. Per exemple, en $\mathbb{R}[x]$, el polinomi $x^2 + 1$ és irreductible. Però, en $\mathbb{C}[z]$, $z^2 + 1$ no ho és, perquè $z^2 + 1 = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})$, així que té el divisor no trivial $z - \mathrm{i}$.

El problema que més ens interessa en aquesta lliçó és el següent: Podem provar fàcilment que qualsevol polinomi es pot escriure com un producte de polinomis irreductibles; però, quins són els polinomis irreductibles?

La resposta és ben diferent, segons que parlem de polinomis reals o complexos: En $\mathbb{C}[z]$ és polinomis irreductibles són els constants i els de grau 1; en canvi, en $\mathbb{R}[x]$, són irreductibles els polinomis constants, els de grau 1 i *alguns* polinomis de grau 2. Tot això és conseqüència del teorema fonamental de l'àlgebra, del qual parlarem aviat.

Arrels múltiples Si a és una arrel del polinomi $p(x)$, és a dir, si $p(x) = q_1(x)(x - a)$, és possible que a també siga arrel del quocient $q_1(x)$. En aquest cas, tindrem que $q_1(x) = q_2(x)(x-a)$ i, per tant, $p(x) = q_2(x)(x-a)^2$. I, encara, podria ser a arrel de $q_2(x)$, amb la qual cosa tindríem $p(x) = q_3(x)(x - a)^3$.

☞ La *multiplicitat* de a com a arrel del polinomi $p(x)$ és al màxim valor de m per al qual $p(x)$ és múltiple de $(x - a)^m$.

Per exemple, el polinomi $p(x) = x(x+2)^2(x-1)^5$ té tres arrels distintes: $x_0 = 0$, $x_1 = -2$ i $x_3 = 1$. I les multiplicitats d'aquestes arrels són, respectivament, 1, 2 i 5. Si la multiplicitat d'una arrel és igual a 1 diem que és una arrel *simple* (també podem parlar d'arrels dobles, triples...).

El nombre total d'arrels d'un polinomi (comptant-les tantes vegades com indique la seua multiplicitat) és, com a molt, igual al grau del polinomi, perquè si

$$p(x) = q(x)(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_p)^{m_p}$$

el grau de $p(x)$ serà la suma dels graus,

$$\operatorname{gr} q(x) + m_1 + m_2 + \cdots + m_p \geq m_1 + m_2 + \cdots + m_p$$

Així que, per exemple, un polinomi de grau 5 no pot tenir 6 arrels.

Arrels múltiples i derivades successives Si a és una arrel simple del polinomi $p(x)$ llavors, $p(x) = q(x)(x - a)$, i $q(a) \neq 0$. Per tant, el valor de la derivada de $p(x)$ ($p'(x) = q'(x)(x - a) + q(x)$) és $p'(a) = q(a) \neq 0$, així que a no és arrel de la derivada. En canvi, si l'arrel és doble, $p(x) = q(x)(x - a)^2$ (amb $q(a) \neq 0$) i

$$p'(a) = q'(a)(x - a)^2 + 2q(a)(x - a) = (q'(a)(x - a) + 2q(a))(x - a) = 0$$

així que a és arrel simple de la derivada.

☞ En general, a és una arrel de $p(x)$ amb multiplicitat m, si i només si, a és arrel de la derivada $p'(x)$ amb multiplicitat $m - 1$.

☞ En conseqüència, a és una arrel de $p(x)$ amb multiplicitat m, si i només si, a és arrel de $p(x)$ i de les derivades successives $p'(x)$, $p''(x)$, ..., $p^{\mathrm{m}-1)}(x)$ i no ho és de la derivada d'ordre m.

Per exemple, una arrel és triple si és arrel de $p(x)$, $p'(x)$ i $p''(x)$.

2.2. El teorema fonamental de l'àlgebra

L'equació $z^2 + 1 = 0$ té dues arrels (o solucions), $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -\mathrm{i}$. I això passa perquè hem ampliat els nombres precisament per a poder resoldre aquesta equació. Però ara resulta que, de propina, totes les equacions polinòmiques tenen solucions.

Teorema 2.1. (Teorema fonamental de l'àlgebra)

Si $p(z)$ és un polinomi no constant llavors existeix $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

Provarem aquest teorema en un apèndix, a la fi de la lliçó. Ara ens interessa destacar que el teorema fonamental de l'àlgebra té una conseqüència molt important: els únics polinomis irreductibles en $\mathbb{C}[z]$ són els constants i els de grau igual a 1. En altres paraules, qualsevol polinomi no constant complex es factoritza com un producte de polinomis de primer grau:

- Si $p(z)$ és de grau 1, $p(z) = a_1 z + a_0$ ($a_1 \neq 0$), l'arrel única de $p(z)$ és a_0/a_1 i el podem escriure com $p(z) = a_1(z - z_1)$.

– Si el grau és 2 i z_1 és una arrel, tindrem que $p(z) = q(z)(z - z_1)$, amb $q(x)$ de grau 1, així que hi podem aplicar el cas anterior i $p(z) = a(z-z_1)(z-z_2)$.

– En general, si $p(z) = a_n z^n + z_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z_1 + a_0$ és un polinomi de grau $n > 1$, llavors, com que té una arrel z_1, dividint $p(z)$ entre $z - z_1$, ens quedarà $p(z) = (z - z_1)p_2(z)$, on $p_2(z)$ és de grau $n - 1$. És clar que, repetint aquest procés el nombre de vegades que calga ($n - 1$ vegades) arribarem a $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{n-1})p_n(z)$, on és de grau 1, $p_n(z) = az + b$ o, millor, $p_n(z) = a(z - z_n)$, és a dir,

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

Ací, els termes de grau n, als dos costats de la igualtat són $a_n z^n$ i az^n, així que $a = a_n$. □

☞ Hem provat que qualsevol polinomi complex (no constant) es pot factoritzar com a producte de polinomis de primer grau, $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$

Aquesta propietat s'expressa millor si agrupem les arrels múltiples:

Propietat 2.2. (Factorització d'un polinomi complex)

Qualsevol polinomi complex (no constant), $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, es pot factoritzar com a producte de polinomis de primer grau: si les arrels del polinomi són $z_1, z_2, \ldots, z_r$ amb multiplicitats $m_1, m_2, \ldots, m_r$,

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2}\cdots(z - z_r)^{m_r} \quad □$$

Per exemple, les arrels del polinomi $p(z) = z^6-(1+\mathrm{i})z^5+(1+2\mathrm{i})z^4+(1-\mathrm{i})z^3$ són $z = 0$ (triple), $z = \mathrm{i}$ (doble) i $z = 1 + \mathrm{i}$. Per tant, el podem factoritzar com

$$p(z) = z^3(z - \mathrm{i})^2(z - (1 + \mathrm{i}))$$

2.2.1. Arrels complexes de polinomis amb coeficients reals

Fins i tot quan només ens interessa la solució real d'un problema amb nombres reals, sovint el millor camí per arribar-hi passa pels nombres complexos. Per això, ara ens ocuparem de les arrels complexes de les equacions polinòmiques amb coeficients reals.

Suposem que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n$ són nombres reals. Si z_1 és una arrel complexa (i no real) de $p(x)$, és a dir, si $p(z_1) = a_n z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1} + \cdots + a_1 z_1 + a_0 = 0$, resulta que $\overline{z_1}$ també és arrel de l'equació, perquè

$$\begin{aligned} p(\overline{z_1}) &= a_n\overline{z_1}^n + a_{n-1}\overline{z_1}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z_1} + a_0 \\ &= \overline{a_n z_1^n} + \overline{a_{n-1}z_1^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z_1} + \overline{a_0} \end{aligned}$$

(perquè $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$ són nombres reals)

$$p(\overline{z_1}) = \overline{a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \cdots + a_1 z_1 + a_0} = \overline{0} = 0$$

Això vol dir que, si $z_1 = x_1 + x_2\mathrm{i}$ és una arrel del polinomi real $p(x)$, $\overline{z}_1 = x_1 - x_2\mathrm{i}$ també n'és arrel, i podrem fer la divisió de $p(x)$ entre $(x - z_1)(x - \overline{z_1})$ i ens quedarà $p(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1})p_3(x)$, on,

$$\begin{aligned}(x - z_1)(x - \overline{z_1}) &= (x - (x_1 + x_2\mathrm{i}))(x - (x_1 - x_2\mathrm{i}))\\ &= ((x - x_1) - x_2\mathrm{i})((x - x_1) + x_2\mathrm{i})\\ &= (x - x_1)^2 + x_2^2\end{aligned}$$

així que $p(x) = ((x - x_1)^2 + x_2^2)p_3(x)$. I, com que $p(x)$ i $(x - x_1)^2 + x_2^2$ són polinomis reals, $p_3(x)$ també és real.

- Si x_1 és una arrel real d'un polinomi de grau n, $p(x)$, llavors $p(x) = (x - x_1)p_2(x)$ (on $p_2(x)$ és de grau $n - 1$).
- Si $z_1 = x_1 + x_2\mathrm{i}$ és una arrel complexa i no real, llavors $p(x) = ((x - x_1)^2 + x_2^2)p_3(x)$ (on $p_3(x)$ és de grau $n - 2$).

Així que

Propietat 2.3. (Factorització d'un polinomi real)

Qualsevol polinomi real (no constant), $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, es pot factoritzar com a producte de polinomis de graus un i dos: si les arrels del polinomi són $x_1, \dots, x_r, a_1 \pm b_1\mathrm{i}, \dots, a_s \pm b_s\mathrm{i}$ i $m_1, \dots, m_{r+s}$ són les multiplicitats corresponents,
$p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_r)^{m_r} \left((x - a_1)^2 + b_1^2\right)^{m_{r+1}} \cdots ((x - a_s)^2 + b_s^2)^{m_{r+s}}$ □

☞ Els polinomis reals irreductibles són els constants, els de grau 1 i els polinomis de grau 2 que es poden escriure en la forma $p(x) = a\left((x - x_1)^2 + x_2^2\right)$.[1]

Per exemple, com que les arrels cúbiques de -1 són $z = 1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ i $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, el polinomi complex $z^3 + 1$ es factoritza com

$$z^3 + 1 = (z + 1)\left(z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)$$

i el polinomi real $x^3 + 1$ es factoritza així:

$$x^3 + 1 = (x + 1)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

[1] O, com ja sabíem, $p(x) = ax^2 + bx + c$ amb $b^2 - 4ac < 0$.

2.3. Resum

Un polinomi és una aplicació

$$\begin{array}{rcl} p\colon \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \rightsquigarrow & p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

on $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

En el cas complex se sol escriure z en lloc de x: $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.

El grau del polinomi

Si $a_n \neq 0$, el *grau* del polinomi és $\operatorname{gr} p(x) = n$.

Arrels d'un polinomi

- x_0 és una *arrel* de $p(x)$ si $p(x_0) = 0$.
  Això és equivalent a l'existència d'un polinomi $q(x)$ amb $p(x) = q(x)(x - x_0)$.

Arrels múltiples

- La *multiplicitat* de l'arrel x_0 és el màxim m per al qual existeix $q(x)$ amb $p(x) = q(x)(x - x_0)^m$.
- La multiplicitat de x_0 és m si i només si
  x_0 és arrel de $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$, ..., $p^{\mathrm{m-1)}}(x)$, però no de $p^{\mathrm{m)}}(x)$.

Teorema fonamental de l'àlgebra

☞ Tot polinomi complex no constant té alguna arrel.

☞ El nombre total d'arrels complexes d'un polinomi de grau n, si les comptem tantes vegades com indica la seua multiplicitat, és exactament n.

Polinomis irreductibles complexos i reals

- En $\mathbb{C}[z]$ els únics polinomis irreductibles són els de grau 0 (constants) i els de grau 1.
- En $\mathbb{R}[x]$ els únics polinomis irreductibles són els de grau 0 (constants), els de grau 1 i els de grau 2 que es poden escriure en la forma
  $p(x) = a\left((x - x_1)^2 + x_2^2\right)$.

Factorització d'un polinomi en $\mathbb{C}[z]$

Tot polinomi no constant es pot escriure com

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_r)^{m_r}$$

on $x_1, \ldots, x_r$ són les arrels del polinomi i $m_1, \ldots, m_r$ les multipicitats corresponents.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

Factorització d'un polinomi en $\mathbb{R}[x]$

Tot polinomi no constant es pot escriure com

$$p(x) = a_n(x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_r)^{m_r} \left((x-a_1)^2 + b_1^2\right)^{m_{r+1}} \cdots \left((x-a_s)^2 + b_s^2\right)^{m_{r+s}}$$

on $x_1, \ldots, x_r, a_1 \pm b_1\mathrm{i}, \ldots, a_s \pm b_s\mathrm{i}$ són les arrels del polinomi i $m_1, \ldots, m_{r+s}$ les multipicitats corresponents.

2.4. Exercicis

Exercici 2.1. Trobeu una factorització en polinomis irreductibles (complexos) de cadascun dels polinomis següents:

(a) $z^2 + z + 1$ (b) $z^4 + z^2 + 1$ (c) $7z^3 - 21$

(d) $z^6 + 1$ (e) $z^3 - z^2 - z - 2$ (f) $5z^4 - 15z^3 + 15z^2 - 5z$

(g) $z^2 + (3 - \mathrm{i})z - 3\mathrm{i}$

(solució: pàg. 500)

Exercici 2.2. Trobeu una factorització en polinomis irreductibles reals de cadascun dels polinomis següents:

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $x^4 + x^2 + 1$ (c) $7x^3 - 21$

(d) $x^6 + 1$ (e) $x^3 - x^2 - x - 2$ (f) $5x^4 - 15x^3 + 15x^2 - 5x$

(solució: pàg. 501)

Exercici 2.3. Trobeu una factorització en polinomis irreductibles racionals del polinomi $7x^3 - 21$.

(solució: pàg. 501)

Exercici 2.4. Proveu que si a és una arrel del polinomi $p(z)$, amb multiplicitat m, llavors a és arrel de $p'(z)$ amb multiplicitat $m - 1$.

(solució: pàg. 502)

Exercici 2.5. Demostreu que la successió $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, on $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ (x_n i y_n reals) és convergent a $z = x + \mathrm{i}y$ si i només si $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$.

(solució: pàg. 502)

2.5. Apèndix: Demostració del teorema fonamental de l'àlgebra

Se'n coneixen moltes, de proves. I, tot i que algunes fan servir tècniques avançades de variable complexa o d'àlgebra, la que farem ací només requereix uns coneixements relativament bàsics: l'existència d'arrels n-èsimes de qualsevol nombre complex i algunes propietats sobre successions i funcions de variable real.

La demostració, informalment, és aquesta: qualsevol polinomi no constant tendeix a infinit (en mòdul) quan z creix (si $|z|$ és gran, $|p(z)|$ també és gran); per tant, el mínim del polinomi correspon a un nombre z *petit*. D'altra banda, provarem que si $|p(z_1)| > 0$, llavors hi ha un altre nombre z_2 tal que $|p(z_2)|$ és més petit (és a dir, $|p(z_2)| < |p(z_1)|$). Per tant, el mínim de $|p(z)|$ ha de ser zero.

Però, perquè això siga rigorós, haurem de provar que el polinomi té un mínim.[2]

2.5.1. Successions de nombres complexos

Necessitarem un parell de propietats de les successions de nombres complexos, que es dedueixen sense cap dificultat.

Definició 2.1.

Una successió de nombres complexos, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, *convergeix* a z (simbòlicament, $\lim z_n = z$), si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} / \; n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon$$

Una successió de nombres complexos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sempre podem considerar-la com una suma $z_n = x_n + \mathrm{i} y_n$ on $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ són successions de nombres reals. Llavors $\{z_n\}$ és convergent a $z = x + \mathrm{i} y$ si $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$ (és a dir, que una successió complexa és convergent si ho són les parts real i imaginària). La demostració és molt senzilla i la deixem com a exercici.

Propietat 2.4.

Si la successió de nombres complexos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ és fitada llavors hi ha una subsuccessió convergent.

Demostració: Suposem que $z_n = x_n + \mathrm{i} y_n$ (x_n i y_n reals). Com que $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \max(|x_n|, |y_n|)$, les successions $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ també són fitades.

Per tant, $\{x_n\}$ té una subsuccessió convergent, $\{x_{n_k}\}$. Aleshores, $\{y_{n_k}\}$ és una subsuccessió de $\{y_n\}$, així que és fitada, i també té una subsuccessió convergent, $\{y_{n_{k_r}}\}$.

És obvi que la subsuccessió $z_{n_{k_r}} = x_{n_{k_r}} + \mathrm{i} y_{n_{k_r}}$ és convergent. □

Finalment,

[2] De fet, aquesta és bàsicament la prova que feu D'Alembert, tot i que la seua prova no és del tot correcta, perquè ell no justificà l'existència del mínim.

Propietat 2.5.

Si $\{z_n\}$ és una successió de nombres complexos i $\lim z_n = z$, *llavors,* $\lim |z_n| = |z|$.

Demostració: Si a i b són dos nombres complexos llavors, $\big| |a| - |b| \big| \leq |a - b|$. Per tant, si, per a $n \geq n_0$, $|z_n - z| < \epsilon$ també tindrem $\big| |z_n| - |z| \big| < \epsilon$. □

2.5.2. Algunes propietats dels polinomis complexos

Ara demostrarem que qualsevol polinomi no constant pren valors *petits* quan z és petit, i que *es fa infinit* quan z es fa gran. Si no us agraden les proves tècniques amb desigualtats, podeu obviar les demostracions.

Definició 2.2.

Un conjunt S de nombres complexos és *fitat* (o *acotat*) si existeix $K > 0$ tal que $|z| \leq K$, $\forall z \in S$.

Propietat 2.6.

Si $k > 0$ i $p(z)$ és un polinomi llavors el conjunt $\{|p(z)| : |z| \leq k\}$ és fitat.

Demostració: Si $|z| \leq k$ i $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$,

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\ &\leq |a_n| \, |z|^n + |a_{n-1}| \, |z|^{n-1} + \cdots + |a_1| \, |z| + |a_0| \\ &\leq |a_n| \, k^n + |a_{n-1}| \, k^{n-1} + \cdots + |a_1| \, k + |a_0| \quad \square \end{aligned}$$

La propietat següent la podríem enunciar dient que *si el polinomi $p(z)$ no és constant llavors* $\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$, però volem evitar parlar de límits de funcions complexes.

Propietat 2.7.

Si $A > 0$ i el polinomi $p(z)$ no és constant, existeix $B > 0$ tal que si $|z| > B$ llavors $|p(z)| > A$.

Demostració: Si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ (amb $a_n \neq 0$) i $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} p(z) &= z^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n} \right) \\ |p(z)| &= |z^n| \left| a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n} \right| \\ &= |z^n| \left| a_n + \frac{1}{z} \left(a_{n-1} + \cdots + a_1 \frac{1}{z^{n-2}} + a_0 \frac{1}{z^{n-1}} \right) \right| \\ &\geq |z^n| \left| |a_n| - \frac{1}{|z|} \left| a_{n-1} + \cdots + a_1 \frac{1}{z^{n-2}} + a_0 \frac{1}{z^{n-1}} \right| \right| \end{aligned}$$

Si $|z| > 1$, $\frac{1}{|z|}\left|a_{n-1} + \cdots + a_1\frac{1}{z^{n-2}} + a_0\frac{1}{z^{n-1}}\right| \leq \frac{1}{|z|}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)$ i podem elegir z prou gran perquè $|a_n| > \frac{1}{|z|}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)$. Llavors,

$$
\begin{aligned}
|p(z)| &\geq |z^n|\left(|a_n| - \frac{1}{|z|}\left|a_{n-1} + \cdots + a_1\frac{1}{z^{n-2}} + a_0\frac{1}{z^{n-1}}\right|\right)\\
&\geq |z^n|\left(|a_n| - \frac{1}{|z|}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)\right)
\end{aligned}
$$

I, com que

$$\lim_{R\to+\infty} R^n\left(|a_n| - \frac{1}{|z|}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)\right) = +\infty$$

existeix $B > 0$ tal que, si $|z| > R > B$, llavors

$$R^n\left||a_n| - \frac{1}{R}|a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0|\right| > A$$

i, per tant, $|p(z)| > A$. □

2.5.3. La propietat clau

Si $p(z)$ és un polinomi no constant i, per a un nombre z_1, $p(z_1) \neq 0$, llavors existeix un altre z_2 de manera que $p(z_2)$ és més petit, és a dir, que $|p(z_2)| < |p(z_1)|$. Això és el que demostrarem ara.

Aquesta és una propietat dels polinomis complexos, que no compleixen els polinomis reals; per exemple, si $p(x) = x^2 + 2$, $p(0) = 2$ i no hi ha cap nombre x_2 per al qual $p(x_2) < 2$. De fet, aquesta propietat és conseqüència del fet que en els nombres complexos sempre hi ha arrels n-èsimes, cosa que no passa amb els nombres reals.

Propietat 2.8.

Si $p(z)$ és un polinomi no constant i $p(z_1) \neq 0$, llavors existeix z_2 tal que $|p(z_2)| < |p(z_1)|$.

Demostració: Per simplificar, canviarem a la funció $f(z) = p(z + z_1)$; aquesta funció també és polinòmica, així que la podem escriure com

$$f(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$$

i $p(z_1) = f(0) = b_0 \neq 0$. Per tant, el que volem és trobar w_2 tal que $|f(w_2)| < |b_0|$.

Els coeficients b_n i b_0 no són zero, però algun altre sí que podria ser-ho. Siga b_m el primer coeficient posterior a b_0 que no és zero. Podem escriure el polinomi $f(z)$ com

$$f(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_{m+1}z^{m+1} + b_m z^m + b_0$$

(ací, podria ser $m = n$, i només tindríem els dos darrers termes de la suma). La idea de la prova és que, per a valors menuts de z, el terme variable dominant d'aquesta suma és z^m (és a dir, que $|z^n|$, $|z^{n-1}|,\dots$, $|z^{m+1}|$ són més petits que $|z^m|$), així que, si z és prou petit, $f(z)$ és *aproximadament* $b_m z^m + b_0$.

El nostre pla és trobar un w_2 per al qual $|b_m w_2^m + b_0| < |b_0|$ i prou petit perquè la resta de termes no trenque la desigualtat. Aquest w_2 el triarem de la manera següent: Si α és una arrel m-èsima de $-b_0/b_m$ llavors, elegim $w_2 = \alpha x$ amb $x \in]0,1[$ (x és un nombre real *petit*). Aleshores,

$$\begin{aligned}|b_m w_2^m + b_0| &= |b_m(\alpha x)^m + b_0| \\ &= |b_m(-b_0/b_m)x^m + b_0| = |-b_0 x^m + b_0| = |b_0|\,(1 - x^m) < |b_0|\end{aligned}$$

Si $f(z)$ es redueix a $b_m z^m + b_0$ ja hem acabat: $|f(w_2)| < |b_0|$. En cas contrari, tindrem que

$$\begin{aligned}|f(w_2)| &= \left|b_n w_2^n + b_{n-1} w_2^{n-1} + \cdots + b_{m+1} w_2^{m+1} + w_2^m + b_0\right| \\ &\le \left|b_n w_2^n + b_{n-1} w_2^{n-1} + \cdots + b_{m+1} w_2^{m+1}\right| + \left|b_m w_2^m + b_0\right| \\ &\le |b_n \alpha^n x^n + b_{n-1}\alpha^n x^{n-1} + \cdots + b_{m+1}\alpha^{m+1}x^{m+1}| + |b_0|\,(1 - x^m) \\ &\le |b_n \alpha^n x^{n-m} + b_{n-1}\alpha^{n-1} x^{n-m-1} + \cdots + b_{m+1}\alpha^{m+1}x|\, x^m \\ &\qquad + |b_0|\,(1 - x^m) \\ &\le \Big(\,|b_n \alpha^n|\, x^{n-m} + |b_{n-1}\alpha^{n-1}|\, x^{n-m-1} + \cdots + |b_{m+1}\alpha^{m+1}|\, x\Big) x^m \\ &\qquad + |b_0|\,(1 - x^m)\end{aligned}$$

Aleshores, com que

$$\lim_{x\to 0}\Big(\,|b_n \alpha^n|\, x^{n-m} + |b_{n-1}\alpha^{n-1}|\, x^{n-m-1} + \cdots + |b_{m+1}\alpha^{m+1}|\, x\Big) = 0$$

podem elegir x perquè

$$|b_n \alpha^n|\, x^{n-m} + |b_{n-1}\alpha^{n-1}|\, x^{n-m-1} + \cdots + |b_{m+1}\alpha^{m+1}|\, x < |b_0|$$

I tindrem el que volíem:

$$|f(w_2)| < |b_0|\, x^m + |b_0|\,(1 - x^m) = |b_0| \qquad \square$$

2.5.4. Demostració del teorema fonamental de l'àlgebra

Amb tot el que hem vist fins ara, la demostració és molt senzilla: serà prou que demostrem que el mòdul de qualsevol polinomi complex té un valor mínim, perquè, fent servir la darrera propietat, aquest mínim només pot ser igual a zero.

Teorema 2.1. (teorema fonamental de l'àlgebra)

Si $p(z)$ és un polinomi no constant llavors existeix $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

Demostració: Demostrarem que el polinomi $p(z) = a_n z + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, en mòdul, té un valor mínim. Ara per ara, no sabem si el conjunt $\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}\}$ té mínim, però sí que podem assegurar que té un ínfim, perquè, en tractar-se d'un conjunt de valors absoluts, és fitat inferiorment per 0. Anomenem m aquest ínfim.

Com que $p(z) = a_0$, resulta que $m \le |a_0|$. Aplicant-hi la propietat 2.7, sabem que existeix un nombre $B > 0$ tal que, si $|z| > B$, $|p(z)| > |a_0|$. Per tant, els valors *petits* de $|p(z)|$ corresponen a valors de z que es troben per davall de B:

$$m = \inf\{|p(z)| : |z| \le B\}$$

En conseqüència, podem trobar una successió $\{z_k\}$, amb $|z_k| \le B$, tal que $\lim |p(z_k)| = m$. En principi, la successió $\{z_k\}$ no té perquè ser convergent, però, com que és fitada, sí que té una subsuccessió convergent (per la propietat 2.4). Si $\{w_k\}$ és aquesta subsuccessió i $w_0 = \lim |w_k|$, llavors, el límit de $\{|p(w_k)|\}$ també és m.

Ara provarem que $|p(w_0)| = m$. Com que $m = \lim |p(w_k)|$, serà suficient que demostrem que $\lim p(w_k) = p(w_0)$.[3] El polinomi $p(z) - p(w_0)$ val zero quan $z = w_0$. Així que,

$$p(z) - p(w_0) = q(z)(z - w_0)$$

on $q(z)$ és un polinomi de grau $n-1$. En particular, per a $z = w_k$,

$$p(w_k) - p(w_0) = q(w_k)(w_k - w_0)$$

El polinomi $q(z)$ és fitat en el cercle $|z| \le B$ (per la propietat 2.6), de manera que existeix $M > 0$ tal que

$$|p(w_k) - p(w_0)| \le M\,|w_k - w_0|$$

Per tant, $\lim p(w_k) = p(w_0)$, i $m = \lim |p(w_k)| = |p(w_0)|$.

El nombre m és l'ínfim de $|p(z)|$, però també és $m = |p(w_0)|$, així que m és el valor mínim de $|p(z)|$.

L'últim pas consistirà a provar que $m = 0$, és a dir, que $p(w_0) = 0$. Però, això, és conseqüència de l'última propietat que hem demostrat, la propietat 2.8: si $|p(w_0)|$ no fora zero, existiria z_2 tal que $|p(z_2)| < |p(w_0)| = m$ i m no seria mínim. □

[3] Perquè, aplicant la propietat 2.5, $\lim |p(w_k)| = |p(w_0)|$.

Capítol 1

Sistemes d'equacions lineals

Lliçó 3. Vectors i matrius **49**
3.1. Vectors 49
3.1.1. Operacions amb vectors: Suma, producte escalar-vector i combinacions lineals 50
3.1.2. Interpretació geomètrica dels vectors i de les operacions amb vectors 51
3.2. El producte escalar 52
3.2.1. El producte escalar (cas real) 54
3.2.2. Aplicacions geomètriques del producte escalar (real) 55
3.2.3. El producte escalar (cas complex) 57
3.3. Matrius 58
3.3.1. Una matriu és una llista de vectors . . . 60
3.3.2. Operacions amb matrius: Suma, producte escalar-matriu i combinacions lineals 60
3.3.3. Matrius per blocs 62
3.4. Resum 64
3.5. Exercicis 65
Lliçó 4. Multiplicació de matrius **68**
4.1. El producte matriu-vector 68
4.2. El producte fila-matriu 69
4.3. El producte fila-columna 70
4.4. El producte matriu-matriu 70
4.4.1. Producte per columnes 72
4.4.2. Producte per files 73
4.4.3. Columnes per files 73
4.4.4. Propietats del producte 74
4.4.5. Producte per blocs 74
4.5. Resum 75
4.6. Exercicis 77
Lliçó 5. Equacions i sistemes lineals **80**
5.1. Equacions lineals 80

5.2. Sistemes d'equacions lineals 85
5.2.1. Classificació dels sistemes lineals atenent al nombre de solucions 91
5.3. Les formes vectorial i matricial d'un sistema d'equacions lineals. Quatre problemes equivalents . . 91
5.3.1. Matrius associades a un sistema lineal . 93
5.4. Mètode de reducció de Gauss-Jordan (primera aproximació) 93
5.5. Resum 98
5.6. Exercicis 99
Lliçó 6. Matrius elementals. Algorisme de Gauss-Jordan **101**
6.1. Matrius esglaonades i operacions elementals . . . 101
6.2. Matrius elementals 103
6.2.1. Matrius elementals del tipus permutació 103
6.2.2. Matrius elementals del tipus escalat . . . 104
6.2.3. Matrius elementals del tipus reducció . 105
6.3. Els algorismes de Gauss i de Gauss-Jordan 105
6.4. Discussió i resolució dels sistemes lineals 109
6.4.1. L'algorisme de substitució regressiva . . 112
6.5. Resum 114
6.6. Exercicis 117
Lliçó 7. L'equació matricial $AX = B$ i els sistemes homogenis **120**
7.1. La resolució d'un sistema lineal revisitada 120
7.2. L'equació matricial $AX = B$ 121
7.2.1. Resolució simultània de sistemes lineals 123
7.3. Sistemes homogenis 124
7.4. Resum 126
7.5. Exercicis 126

Lliçó 3. Vectors i matrius

"You can't add apples and oranges."
In a strange way, this is the reason for vectors!
Gilbert Strang

En aquesta lliçó repassarem les operacions amb vectors i amb matrius, fixant-nos especialment en el producte escalar de dos vectors i les aplicacions geomètriques d'aquest producte. També ens interessa remarcar la interpretació de les matrius com a conjunts de vectors.
L'operació amb matrius més important, la multiplicació, l'estudiarem en la propera sessió.

3.1. Vectors

Un *vector* és una llista de nombres ordenats en una columna.[1] Per exemple,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \\ -\pi \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

- ☞ Com que la notació en columnes provoca un espaiat excessiu del text en el sentit vertical (especialment quan s'inclou un vector a dins d'un paràgraf), sovint farem servir la notació tradicional, $(1, 1, 0, -2)$, per a representar el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.
- ☞ En aquest curs representarem els vectors amb una lletra amb una fletxeta a sobre (d'acord amb la visió geomètrica que identifica els vectors amb fletxes), com ara, $\vec{u}$, $\vec{v}$ o $\vec{x}$, o bé amb lletres majúscules, com ara U, V o X.[2]

Cadascun dels nombres que hi apareixen és un *component* del vector. Segons el nombre de components que tinguen, els vectors s'anomenen bidimensionals, tridimensionals, etc. (o, alternativament, de dimensió dos, de dimensió tres...).

El conjunt de tots els vectors n-dimensionals es representa com $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, segons que treballem amb nombres reals o complexos; ara bé, com que en la majoria de casos que tractarem serà indiferent que els vectors siguen reals o complexos, farem servir la lletra $\mathbb{K}$ per referir-nos indistintament als nombres reals o als complexos, així que escriurem $\mathbb{K}^n$, si ens estem referint tant al conjunt dels vectors reals com als dels complexos.

[1] Més endavant, també anomenarem *vectors* uns altres objectes, que no són llistes de nombres.
[2] En molts textos es representen, els vectors, amb lletres minúscules negretes, com ara **u**, **v** i **x**.

Anomenem *zero* el vector de dimensió n que té tots els components iguals a 0 (aquest vector el representarem com $\vec{0}$ o O).

3.1.1. Operacions amb vectors: Suma, producte escalar-vector i combinacions lineals

Amb els vectors, s'hi poden fer tres operacions bàsiques: la suma, la multiplicació per un escalar i el producte escalar. Del producte escalar ens ocuparem en l'apartat següent. Ara definirem la suma i el producte escalar-vector.

Per poder sumar dos vectors cal que tinguen el mateix nombre de components (és a dir, la mateixa dimensió). Llavors, l'únic que hem de fer és sumar-los *element a element*. Per exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 0+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per a restar dos vectors també ho farem element a element:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(recordeu que no es pot sumar ni restar dos vectors que no tinguen el mateix nombre de components).

Representarem com $-\vec{u}$ el vector que obtenim si multipliquem per -1 tots els components del vector $\vec{u}$; per exemple, $-(2,-1) = (-2,1)$. Aleshores, la diferència $\vec{u}-\vec{v}$ és el mateix que la suma dels vectors $\vec{u}$ i $-\vec{v}$, és a dir, $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$.

Propietats 3.1. (Propietats de la suma i la diferència de vectors)

1. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ *(commutativa)*
2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ *(associativa)*
3. $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$ *(el vector $\vec{0}$ és el neutre de la suma)*
4. $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$
5. $\vec{u}-\vec{u} = \vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$ *(el vector $-\vec{u}$ és el simètric de $\vec{u}$)* □

En àlgebra lineal se sol anomenar *escalars* els nombres, i sovint es representen amb lletres gregues (α, β, γ...), per tal de distingir-los dels vectors i de les matrius. Per a multiplicar un escalar (és a dir, un nombre) per un vector, hi multipliquem cada component del vector. Per exemple,

$$3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 \\ 3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

PROPIETATS 3.2. (PROPIETATS DEL PRODUCTE ESCALAR-VECTOR)

1. $\alpha_1(\alpha_2\vec{u}) = (\alpha_1\alpha_2)\vec{u}$ *(associativa)*
2. $(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{u} = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{u}$ *(distributiva respecte a la suma d'escalars)*
3. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ *(distributiva respecte a la suma de matrius)*
4. $1\vec{u} = \vec{u}$ *(el nombre 1 és l'element neutre)*
5. $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u}) = \alpha(-\vec{u})$ *(elements oposats)* □

☞ Una combinació qualsevol d'aquestes operacions és una *combinació lineal*.

Per exemple,

$$3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}$$

és una combinació lineal dels vectors $(1,0)$, $(-2,1)$ i $(1,1)$. Els nombres 3, -2 i 5, que multipliquen els vectors, són els *pesos* de la combinació lineal.

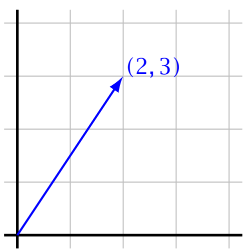
El vector $\vec{u}$ és la *combinació lineal* dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_p$, amb *pesos* α_1, α_2, …, α_p si

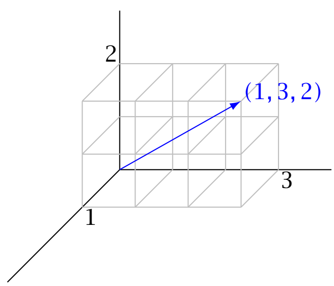
$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_1\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p$$

☞ Les combinacions lineals són les eines més importants del càlcul amb vectors.

3.1.2. INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DELS VECTORS I DE LES OPERACIONS AMB VECTORS

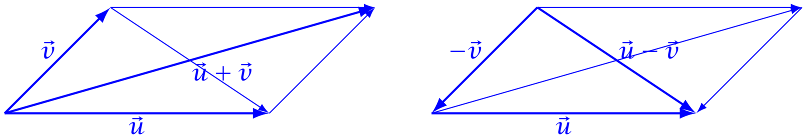
Els vectors de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ es visualitzen molt bé com a punts o com a fletxes en un pla (en el cas de $\mathbb{R}^2$) o en un espai tridimensional (quan es tracta de vectors de $\mathbb{R}^3$).





Per als vectors amb més de tres components, la imatge dels vectors com a fletxes segueix sent una representació intuïtiva molt adient. D'altra banda, les operacions i les propietats que coneixem bé en els casos bidimensional i tridimensional s'hi poden traslladar sense gaire dificultat. D'això, ens n'encarregarem tot seguit.

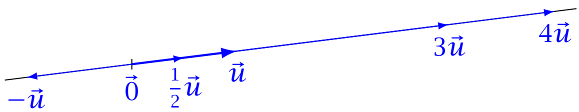
D'acord amb aquesta visió, les operacions entre vectors també es poden interpretar geomètricament: dos vectors, $\vec{u}$, i $\vec{v}$, defineixen un paral·lelogram. Llavors, la suma dels dos vectors és la diagonal d'aquest paral·lelogram, orientada des de l'origen fins a l'extrem oposat; i la diferència, $\vec{u} - \vec{v}$, és l'altra diagonal, orientada des de l'extrem de $\vec{v}$ cap al de $\vec{u}$.



Suma i diferència de dos vectors

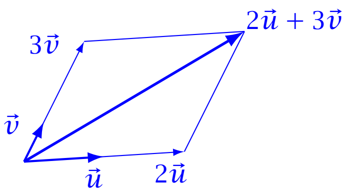
Multiplicar un vector per un escalar produeix una dilatació (o una contracció) del vector: multiplicar-lo per 3, triplica la longitud. Per 1/2, el divideix a la meitat. I, quan l'escalar és negatiu, llavors l'orientació del vector s'inverteix.

Notem que tots els productes es troben sobre la mateixa recta.

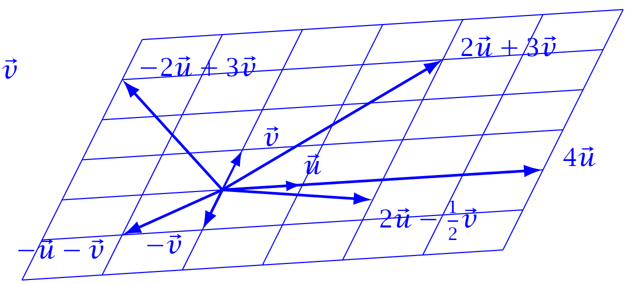


Producte de diversos escalars per un vector

Aleshores, per representar gràficament la combinació lineal $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v}$, haurem de dilatar els vectors, segons els pesos, α_1 i α_2 i fer-ne la suma.



La combinació lineal $2\vec{u} + 3\vec{v}$

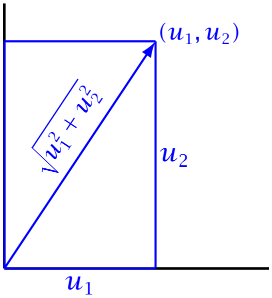


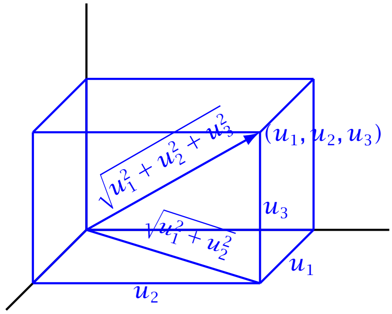
Diverses combinacions lineals dels dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

3.2. El producte escalar

La suma i el producte escalar-vector són les operacions que ens permetran resoldre un problema típicament *algèbric*, la resolució d'equacions lineals i sistemes d'equacions lineals. Per a tractar els problemes de tipus *geomètric*, com ara, quant mesura un vector? o quin angle fan dos vectors? necessitem una nova operació: el producte escalar.

En el cas dels vectors de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, el teorema de Pitàgores ens proporciona la mesura de la longitud dels vectors.





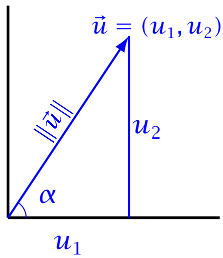
La longitud del vector (u_1, u_2) és $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. I la de (u_1, u_2, u_3), $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Generalitzant això, en $\mathbb{R}^n$, la longitud del vector $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$.

La longitud també es coneix com la norma del vector.

☞ La *norma* del vector real $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ és el nombre

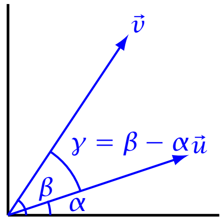
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Per a calcular l'angle entre dos vectors, primer de tot, notem que l'angle que fa un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ amb l'eix horitzontal es determina fàcilment fent ús de la trigonometria: el cosinus d'aquest angle és



$$\cos\alpha = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

Llavors, si els vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ fan, respectivament, angles amb l'horitzontal iguals a α i β, l'angle entre ells és $\gamma = \beta - \alpha$, així que el cosinus d'aquest angle és igual a



$$\begin{aligned} \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta &= \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}\frac{v_1}{\|\vec{v}\|} + \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}\frac{v_2}{\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \end{aligned}$$

☞ El cosinus de l'angle que fan dos vectors de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}$ i $\vec{v}$, és $\cos\gamma = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$.

El que apareix al numerador d'aquesta expressió és el que anomenarem el producte escalar dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

El producte escalar de dos vectors (no necessàriament bidimensionals) el definim generalitzant aquesta fórmula. En principi, però, distingirem si els vectors són reals o complexos.

3.2.1. El producte escalar (cas real)

En aquest apartat estudiem el producte escalar de dos vectors *reals.*

El producte escalar de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ es calcula multiplicant-los component a component i sumant tots aquests productes.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

(per tant, per poder multiplicar-los escalarment, els dos vectors han de ser de la mateixa dimensió). Per exemple,

$$(2, -1, 3, 0) \cdot (-1, 1, 4, 1) = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = -2 - 1 + 12 + 0 = 9$$

☞ Fixeu-vos bé que el producte *escalar* de dos vectors és un escalar (no un vector).

Propietats 3.3. (Propietats del producte escalar real)

1. *$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (el producte escalar real és* simètric*)*
2. *$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}$ (distributiva)*
3. *$\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (associativitat amb el producte escalar-vector)*
4. *$\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$ (el vector $\vec{0}$ és ortogonal a tots els vectors)*
5. *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, llavors $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ (el producte escalar és* definit positiu*)* □

☞ El producte escalar és un instrument molt potent per a l'estudi de les propietats geomètriques dels vectors. Com a conseqüència de la forta relació del producte escalar amb la geometria, molts problemes de l'àlgebra lineal (i algunes matrius molt importants en aquest curs) estan lligats al producte escalar. Així que al llarg d'aquest curs l'estudiarem amb certa profunditat.

En principi, com ja hem fet amb els vectors bidimensionals, el podem fer servir per a mesurar la longitud dels vectors i l'angle entre dos vectors.

3.2.2. Aplicacions geomètriques del producte escalar (real)

La *norma* (o *longitud*) del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ és el nombre

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \tag{3.1}$$

☞ Els vectors de norma igual a la unitat s'anomenen *vectors unitaris*.

La *distància* entre dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és la norma de la diferència:

$$\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Si γ és l'angle que fan els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, llavors

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \tag{3.2}$$

Aquesta expressió ens permet calcular l'angle entre els dos vectors. Notem que la fórmula de l'angle no té sentit si algun dels vectors és igual a zero (perquè llavors, el denominador seria igual a zero); en realitat, si un dels vectors és nul, aleshores no hi ha cap angle (un angle és l'obertura determinada per dos segments de recta; com que el vector zero es limita a un sol punt no s'hi pot definir cap angle).

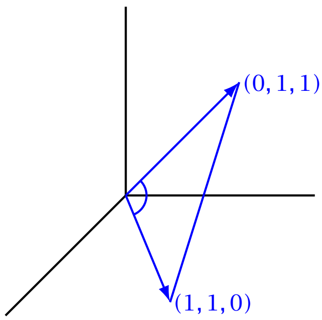
Exemple 3.1.

Determineu les longituds, la distància i l'angle que fan els dos vectors $\vec{u} = (1, 1, 0)$ i $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

- La longitud del vector $\vec{u}$ és $\|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. La longitud del vector $\vec{v}$ també és igual a $\sqrt{2}$.
- La distància que hi ha és $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(1, 0, -1)\| = \sqrt{2}$.
- A més, si γ és l'angle d'aquests dos vectors,

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

així que $\gamma = \pi/3$ (o 60º).



El triangle que fan els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{u} - \vec{v}$ és equilàter (la longitud dels tres costats és la mateixa); per això, els tres angles són de 60º. □

D'altra banda, de la fórmula (3.2) es dedueix una propietat molt important: la desigualtat de Cauchy-Schwarz.[3][4]

[3] Ací, estem deduint la desigualtat de Cauchy-Schwarz de la fórmula de l'angle. Al final de la lliçó, en farem una prova que no depén de cap propietat geomètrica prèvia.

[4] En realitat, caldria anomenar-la desigualtat de Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

PROPIETAT 3.4. (DESIGUALTAT DE CAUCHY-SCHWARZ)

Per a qualsevol parella de vectors de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$, $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$. □

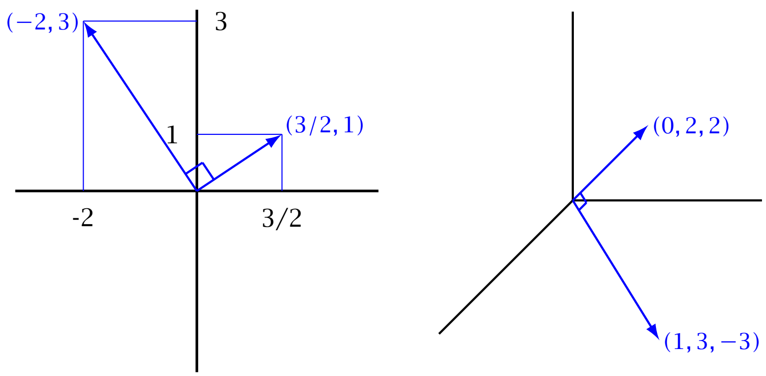
Dos vectors de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són *ortogonals* si el producte escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ és igual a zero. Per exemple, els vectors $(1,3,-3)$ i $(0,2,2)$ són ortogonals, perquè

$$(1,3,-3)\cdot(0,2,2) = 1\cdot 0 + 3\cdot 2 - 3\cdot 2 = 0 + 6 - 6 = 0$$

Si tenim dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ diferents de zero i són ortogonals, llavors aquests dos vectors formen un angle recte, perquè el cosinus d'aquest angle és

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = 0$$

així que el mot *ortogonal* és un sinònim de *perpendicular*.



Vectors ortogonals en dues i tres dimensions

Observem, però, que el vector $\vec{0}$ és ortogonal a qualsevol altre vector (per exemple, $(0,0,0)\cdot(1,2,3) = 0+0+0 = 0$), encara que amb el vector zero no podem parlar d'angles.

Un conjunt de vectors és *ortogonal* si cada vector del conjunt és ortogonal a tots els altres. Si, a més a més, tots els vectors d'un conjunt ortogonal són unitaris, llavors direm que el conjunt és *ortonormal*.

Notem, per acabar aquest apartat, que el teorema de Pitàgores es pot provar a partir de les propietats del producte escalar:

PROPIETAT 3.5. (TEOREMA DE PITÀGORES)

Si els vectors $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *són ortogonals llavors,* $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Demostració:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{\|\vec{u}\|^2} + \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u}}_{0} + \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{\|\vec{v}\|^2} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \quad \square$$

3.2.3. El producte escalar (cas complex)

Quan els vectors són complexos, el producte escalar es defineix com[5]

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n)\cdot(v_1, v_2, \dots, v_n) = \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n$$

Per exemple, si $\vec{u} = (1+2\mathrm{i}, -1)$ i $\vec{v} = (1-\mathrm{i}, 2\mathrm{i})$, llavors,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (\overline{1+2\mathrm{i}})(1-\mathrm{i}) + (\overline{-1})(2\mathrm{i})\\ &= (1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) + (-1)(2\mathrm{i}) = (-1-3\mathrm{i}) + (-2\mathrm{i})\\ &= -1-5\mathrm{i}\end{aligned}$$

- ☞ El producte escalar es defineix d'aquesta manera per assegurar que el producte d'un vector $\vec{u}$ per ell mateix, $\vec{u}\cdot\vec{u}$, és un nombre real no negatiu:

  $$\vec{u}\cdot\vec{u} = \overline{u_1}u_1 + \overline{u_2}u_2 + \cdots + \overline{u_n}u_n = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$$

- ☞ Aquesta definició és compatible amb la del producte escalar real (atés que el conjugat d'un nombre real és el mateix nombre). Tot i això, el producte escalar no compleix exactament les mateixes propietats que hem enumerat per al cas real, perquè no és una operació commutativa.

La longitud i els conceptes relatius a l'ortogonalitat que hem estudiat adés són també vàlids en el cas complex: anomenem *norma* (o longitud) del vector complex $\vec{u}$ el nombre real no negatiu $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$, i diem que $\vec{u}$ és *ortogonal* a $\vec{v}$ si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Propietats 3.6. (Propietats del producte escalar complex)

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{\vec{v}\cdot\vec{u}}$ *(el producte escalar és* hermític*)*
2. $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\cdot\vec{v} = \vec{u}_1\cdot\vec{v} + \vec{u}_2\cdot\vec{v}$ *(distributives)*
   $\vec{u}\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u}\cdot\vec{v}_1 + \vec{u}\cdot\vec{v}_2$
3. $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\overline{\alpha}\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$
4. $\vec{0}\cdot\vec{u} = 0$ *(el vector $\vec{0}$ és ortogonal a tots els vectors)*
5. *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, llavors $\vec{u}\cdot\vec{u} > 0$ (el producte escalar és definit positiu)*

$(\cdots)$

[5] Recordem que $\overline{a+b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}$ és el *conjugat* del nombre complex $a + b\mathrm{i}$.
En alguns textos es defineix el producte escalar conjugant el segon vector, en comptes del primer: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$.

$(\cdots)$

6. Si els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals llavors, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (teorema de Pitàgores)
7. $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \le \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)

Demostració: Provarem la fórmula de Cauchy-Schwarz (les altres propietats es comproven molt fàcilment): tenint en compte les propietats quarta i cinquena d'aquesta llista, si α i β són escalars, i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ vectors, $(\alpha\vec{u}-\beta\vec{v})\cdot(\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}) \ge 0$. Així que,

$$\begin{aligned}
(\alpha\vec{u}-\beta\vec{v})\cdot(\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}) &\ge 0\\
\overline{\alpha}\alpha\vec{u}\cdot\vec{u} - \overline{\alpha}\beta\vec{u}\cdot\vec{v} - \alpha\overline{\beta}\vec{v}\cdot\vec{u} + \overline{\beta}\beta\vec{v}\cdot\vec{v} &\ge 0\\
|\alpha|^2\|\vec{u}\|^2 - \overline{\alpha}\beta\vec{u}\cdot\vec{v} - \alpha\overline{\beta}\,\overline{\vec{u}\cdot\vec{v}} + |\beta|^2\|\vec{v}\|^2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Aquesta desigualtat és vàlida per a qualsevol valor dels escalars α i β. En particular, per a $\alpha = \vec{u}\cdot\vec{v}$ i $\beta = \|\vec{u}\|^2$:

$$\begin{aligned}
|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2\|\vec{u}\|^2 - 2|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^4\|\vec{v}\|^2 &\ge 0\\
-|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 + \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 &\ge 0\\
\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 &\ge |\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 \qquad \square
\end{aligned}$$

Convé observar que, tot i que el producte escalar complex no és commutatiu, si un vector $\vec{u}$ és ortogonal a un altre vector, $\vec{v}$, llavors $\vec{v}$ també és ortogonal a $\vec{u}$, perquè, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$,

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \overline{\vec{u}\cdot\vec{v}} = 0$$

3.3. Matrius

Una *matriu* és un conjunt de nombres reals o complexos, ordenats en una taula de doble entrada.

- $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ és una matriu 2×3 (llegiu *dos per tres*).
- $\begin{bmatrix} 0 & -2\\ 1+\mathrm{i} & 0\end{bmatrix}$ és una matriu *quadrada* 2×2 (o una matriu quadrada *d'ordre* 2). En general, una matriu és *quadrada* si té el mateix nombre de files i de columnes.
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\mathrm{i}\end{bmatrix}$ és una matriu *fila* 1×3.

– $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3\mathrm{i} \end{bmatrix}$ és un *vector* (o matriu *columna*) 3×1.

– $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és la matriu *zero* (o *nul·la*) 3×2. En general, la matriu zero, O, és la que només conté zeros: $\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

– $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ és la matriu *identitat* 3×3. En general, la matriu identitat, I, és una matriu quadrada que només té uns a la diagonal i zeros fora de la diagonal, $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

– Els nombres que hi ha a la matriu són els *elements* o les *entrades* de la matriu.

– Aquesta és la forma típica de representar una matriu $m \times n$ (m files per n columnes) qualsevol:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

S'hi fa servir una lletra majúscula per al nom de la matriu, i la minúscula corresponent amb dos subíndexs, per a les entrades. El primer índex es refereix a la fila i, el segon, a la columna. Per exemple, a_{23} és el nombre que hi ha a la segona fila i a la tercera columna.

n i m són les *dimensions* de la matriu. Si la matriu és quadrada $n \times n$, l'*ordre* de la matriu és n.

☞ Quan parlem d'una matriu $m \times n$, m sempre és el nombre de files i n el de columnes.

El conjunt de totes les matrius $m \times n$ el representarem com $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o bé $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, segons que treballem amb nombres reals o complexos. Ara bé, com en el cas dels vectors, usarem la lletra $\mathbb{K}$ per representar indistintament els nombres reals o els complexos, així que escriurem $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ per representar les matrius $m \times n$.[6][7]

3.3.1. Una matriu és una llista de vectors

En realitat, una matriu és alguna cosa més que un quadre ple de nombres. La millor manera d'entendre què és una matriu és mirant cada columna de la matriu com un vector, així que la matriu és un conjunt ordenat (una llista) de vectors.

☞ Una matriu és una llista de vectors.

És molt important que entenguem d'aquesta manera les matrius. Per exemple, les columnes de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ són els vectors $\vec{a}_1 = (1,2)$ i $\vec{a}_2 = (-1,0)$, i, en conseqüència, $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \text{columna 1} & \text{columna 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix}$.

3.3.2. Operacions amb matrius: Suma, producte escalar-matriu i combinacions lineals

Les operacions bàsiques que es poden fer amb matrius són la suma, la multiplicació per un escalar i les combinacions lineals i la multiplicació de dues matrius.

La suma, el producte escalar-matriu i les combinacions lineals són anàlogues a les operacions amb vectors:

- Per poder sumar (o restar) dues matrius cal que tinguen les mateixes dimensions (el mateix nombre de files i el mateix nombre de columnes). Llavors, l'únic que hem de fer és sumar-les (o restar-les) *element a element*. Per exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -1+3 \\ 0-2 & 0+0 \\ 2-1 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & -1-3 \\ 0+2 & 0-0 \\ 2+1 & -1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

  (no es pot sumar ni restar dues matrius que no tinguen les mateixes dimensions).

  La matriu $-\mathsf{A}$ és la matriu que resulta de multiplicar per -1 totes les entrades de A; per exemple, $-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

[6]També es fa servir habitualment la notació $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{m\times n}$ o $\mathbb{K}^{m\times n}$.

[7]És clar que el conjunt dels vectors n-dimensionals, $\mathbb{K}^n$, és idèntic al de les matrius $n \times 1$, $\mathcal{M}_{n\times 1}$.

Aleshores, la diferència $\mathsf{A} - \mathsf{B}$ és el mateix que la suma de les matrius A i $-\mathsf{B}$, és a dir, $\mathsf{A} - \mathsf{B} = \mathsf{A} + (-\mathsf{B})$.

– El producte d'un escalar α per la matriu A és el resultat de multiplicar α per cada entrada de la matriu. Per exemple,

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 2 & 3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Una combinació qualsevol d'aquestes operacions és una *combinació lineal*. Per exemple,

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

és una combinació lineal de les matrius $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Els nombres 3 i 2, que multipliquen les matrius, són els *pesos* de la combinació lineal.

En general, la matriu A és la combinació lineal de les matrius A_1, A_2, ..., A_p, amb pesos α_1, α_2, ..., α_p si

$$\mathsf{A} = \alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_1\mathsf{A}_2 + \cdots + \alpha_p\mathsf{A}_p$$

☞ Les operacions amb matrius, *columna a columna* són operacions amb vectors. Per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{A} + \mathsf{B} &= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 + \vec{b}_1 & \vec{a}_2 + \vec{b}_2 & \vec{a}_3 + \vec{b}_3 \end{bmatrix} \\ \mathsf{A} - \mathsf{B} &= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 - \vec{b}_1 & \vec{a}_2 - \vec{b}_2 & \vec{a}_3 - \vec{b}_3 \end{bmatrix} \\ 2\mathsf{A} &= \begin{bmatrix} 2\vec{a}_1 & 2\vec{a}_2 & 2\vec{a}_3 \end{bmatrix} \\ 2\mathsf{A} + 3\mathsf{B} &= \begin{bmatrix} 2\vec{a}_1 + 3\vec{b}_1 & 2\vec{a}_2 + 3\vec{b}_2 & 2\vec{a}_3 + 3\vec{b}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la multiplicació de matrius ens ocuparem a la lliçó següent.

Les propietats de la suma i del producte escalar-matriu són les mateixes de les operacions corresponents amb vectors:

PROPIETATS 3.7.

Propietats de la suma i la diferència de matrius

1. $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A}$ *(commutativa)*
2. $(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C})$ *(associativa)*
3. $\mathsf{A} + \mathrm{O} = \mathsf{A}$ *(la matriu* O *és el neutre de la suma)*
4. $\mathsf{A} - \mathsf{B} = \mathsf{A} + (-\mathsf{B})$
5. $\mathsf{A} - \mathsf{A} = \mathsf{A} + (-\mathsf{A}) = \mathrm{O}$ *($-\mathsf{A}$ és el simètric de A)*

Propietats del producte escalar-matriu

1. $\alpha_1(\alpha_2\mathsf{A}) = (\alpha_1\alpha_2)\mathsf{A}$ *(associativa)*
2. $(\alpha_1 + \alpha_2)\mathsf{A} = \alpha_1\mathsf{A} + \alpha_2\mathsf{A}$ *(distributiva respecte a la suma d'escalars)*
3. $\alpha(\mathsf{A} + \mathsf{B}) = \alpha\mathsf{A} + \alpha\mathsf{B}$ *(distributiva respecte a la suma de vectors)*
4. $1\mathsf{A} = \mathsf{A}$ *(el nombre 1 és l'element neutre)*
5. $(-\alpha)\mathsf{A} = -(\alpha\mathsf{A}) = \alpha(-\mathsf{A})$ *(elements oposats)* □

3.3.3. MATRIUS PER BLOCS

Una altra operació que es pot fer amb matrius és la *concatenació*. Si A i B són dues matrius amb el mateix nombre de files, la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \end{bmatrix}$ és la matriu resultant d'afegir les columnes de B darrere de les de A. Per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \end{bmatrix}$ és la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

De manera anàloga, si el nombre de columnes de les dues matrius A i B és el mateix, llavors, podem construir la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \end{bmatrix}$ posant les files de B davall les de A. Per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Iterant aquest procés, es pot definir una matriu *per blocs*, a base de concatenar diverses matrius, en files i en columnes. Per exemple, si

$$\mathsf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\mathsf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{12} & \mathsf{A}_{13} \\ \hline \mathsf{A}_{21} & \mathsf{A}_{22} & \mathsf{A}_{23} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr|rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Les ratlles que hi apareixen no tenen cap significat matemàtic, les fem servir, simplement, per fer palesa la composició per blocs (i, sovint, seran útils perquè ens facilitaran els càlculs).

La suma i el producte escalar-matriu (i també el producte de matrius, que encara no hem estudiat) es poden efectuar *per blocs*, sempre que les dimensions dels blocs siguen coherents; per exemple, si A i C són matrius 2×2 i, B i D, matrius 2×3,

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}+\mathsf{C} & \mathsf{B}+\mathsf{D} \end{bmatrix}, \qquad \alpha \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\mathsf{A} & \alpha\mathsf{B} \end{bmatrix}$$

Treballar per blocs és útil en diversos contextos. Per exemple, quan ens interessa visualitzar clarament l'estructura de la matriu, com ara, en aquest cas: la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la podem escriure com

$$\mathsf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3.4. Resum

Vectors

Un *vector* n-dimensional és una llista de n nombres,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Conjunts de vectors reals o complexos

$\mathbb{R}^n = \{\text{vectors } n - \text{dimensionals reals}\}$

$\mathbb{C}^n = \{\text{vectors } n - \text{dimensionals complexos}\}$

$\mathbb{K}^n$ representa $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ indistintament.

Operacions amb vectors

Suma: sumeu element a element.

Diferència: resteu element a element.

Producte escalar-vector: multipliqueu l'escalar per tots els elements del vector.

Combinació lineal: $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p$

Producte escalar real

- $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$
- *Norma:* $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- *Distància:* $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$
- *Angle:* $\cos\gamma = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$ (si $\vec{u} \neq \vec{0}$ i $\vec{v} \neq \vec{0}$)

Producte escalar complex

- $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n$
- *Norma:* $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- *Distància:* $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

Propietats del producte escalar

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{\vec{v} \cdot \vec{u}}$ (el producte escalar és hermític)
- $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}$ $\quad \vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2$ (distributives)
- $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\overline{\alpha}\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$
- $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
- $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ (el producte escalar és definit positiu)
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (teorema de Pitàgores)
- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz)

$(\cdots)$

$(\cdots)$

Vectors ortogonals

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són *ortogonals* ($\vec{u} \perp \vec{v}$) si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

☞ Zero és ortogonal a tots els vectors: $\vec{0} \perp \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{K}^n$.

Matrius

Una *matriu* $m \times n$ és un conjunt de nombres ordenats en m files i n columnes o (millor) una llista de n vectors m-dimensionals

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

- Una matriu *quadrada* és una matriu $n \times n$.
- Una matriu *columna* és una matriu $m \times 1$.

  ☞ Una matriu columna és un vector.
- Una matriu *fila* és una matriu $1 \times n$.
- Una matriu és *nul·la* (o *matriu zero*) si totes les entrades són zeros.
- La matriu *identitat* és quadrada i només conté uns a la diagonal i zeros fora de la diagonal.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{$matrius reals $m \times n\}$
  $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) = \{$matrius complexes $m \times n\}$
  $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ representa indistintament $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$

Operacions amb matrius

Suma: sumeu element a element.

Diferència resteu element a element.

Producte escalar-matriu: multipliqueu l'escalar per tots els elements de la matriu.

Combinació lineal: $\alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2 + \cdots + \alpha_p\mathsf{A}_p$

☞ Si les dimensions són adequades, les operacions es poden fer *per blocs*.

3.5. Exercicis

Exercici 3.1. (Operacions amb vectors) Considerem els vectors de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = (1, -1, 2), \vec{u}_2 = (0, 1, -3), \vec{u}_3 = (-1, 3, -8)$$

Calculeu (a) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, (b) $3\vec{u}_3$ i (c) $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

(solució: pàg. 503)

Exercici 3.2. (Representació gràfica dels vectors en $\mathbb{R}^2$) Siguen $\vec{u}_1 = (1, -2)$ i $\vec{u}_2 = (-1, 1)$. Representeu gràficament els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $2\vec{u}_1$, $-\vec{u}_2$, $3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$, $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $5\vec{u}_1 + 9\vec{u}_2$ i $-4\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2$.

(solució: pàg. 503)

Exercici 3.3. (Combinacions lineals) (a) Proveu que qualsevol vector de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u} = (a, b)$, és combinació lineal de $\vec{u}_1 = (1, 1)$ i $\vec{u}_2 = (1, -1)$. (b) És cert que qualsevol vector de $\mathbb{R}^3$ és combinació lineal de $(2, -1, -1)$, $(-1, 2, -1)$ i $(-1, -1, 2)$?

(solució: pàg. 504)

Exercici 3.4. (Norma d'un vector) Calculeu les longituds dels vectors $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$, $\vec{u} = (3, 4)$ i $\vec{v} = (-1, 2)$. (solució: pàg. 504)

Exercici 3.5. (Angle entre dos vectors) Calculeu l'angle entre les següents parelles de vectors:

(a) $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ i $\vec{v} = (0, 1)$

(b) $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ i $\vec{v} = (2, 2)$

(c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ i $\vec{v} = (1, 2, 6)$ (ací podeu fer servir la calculadora)

(d) $\vec{u} = (1, 2, 1, 2)$ i $\vec{v} = (2, -1, -2, 1)$

(solució: pàg. 504)

Exercici 3.6. (El teorema del cosinus) Feu servir el producte escalar real per demostrar el teorema del cosinus: *En qualsevol triangle de costats a, b i c, si α és l'angle oposat al costat a, llavors*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

(solució: pàg. 505)

Exercici 3.7. Digueu si els conjunts següents són ortogonals, ortonormals o cap de les dues coses.

(a) $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (-1, -1, 2)\}$

(b) $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1), \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)\right\}$

(c) $C = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 2), (1, -1, -1)\}$

(solució: pàg. 506)

Exercici 3.8. Trobeu tots els vectors de $\mathbb{R}^2$ que són ortogonals a $(1, 2)$ i interpreteu-los geomètricament.

(solució: pàg. 506)

Exercici 3.9. (Producte escalar complex) (a) Calculeu el producte escalar $(1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}) \cdot (2, \mathrm{i})$. (b) Comproveu que els vectors $\vec{u} = (-2 + 3\mathrm{i}, 1 + 5\mathrm{i})$ i $\vec{v} = (1 - \mathrm{i}, \mathrm{i})$ són ortogonals.

(solució: pàg. 507)

Exercici 3.10. (Ortogonalitat entre vectors complexos) (a) Siguen $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors de $\mathbb{C}^n$. Proveu que si $\vec{u}$ és ortogonal a $\vec{v}$, llavors $\vec{v}$ és ortogonal a $\vec{u}$. (b) Trobeu tots els vectors de $\mathbb{C}^2$ que són ortogonals al vector $(1, \mathrm{i})$.

(solució: pàg. 507)

Exercici 3.11. (Angle entre dos vectors complexos) Proveu que, si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors complexos no nuls, i γ l'angle entre aquests dos vectors, llavors,

$$\cos \gamma = \frac{\mathrm{re}(\vec{u} \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

(ací, $\mathrm{re}(z)$ representa la part real del nombre complex z).

(solució: pàg. 507)

Exercici 3.12. (Vectors unitaris) Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors unitaris (de longitud 1), calculeu els productes escalars

$$\vec{u} \cdot (-\vec{u}) \qquad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \qquad (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$$

(solució: pàg. 508)

Exercici 3.13. (Projecció ortogonal) Donats els vectors $\vec{u} = (1, 1)$ i $\vec{v} = (1, 5)$, trobeu el valor de α perquè el vector $\vec{v} - \alpha\vec{u}$ siga ortogonal a $\vec{u}$. Representeu sobre un diagrama cartesià els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v} - \alpha\vec{u}$ i $\alpha\vec{u}$.

(solució: pàg. 508)

Exercici 3.14. (Operacions amb matrius) Donades les matrius $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ calculeu $\mathsf{A} + \mathsf{B}$, $3\mathsf{A}$ i $\mathsf{A} - 2\mathsf{B}$.

(solució: pàg. 509)

Exercici 3.15. (Combinacions lineals) Expresseu, si és possible, les matrius $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ com a combinació lineal de les matrius $\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 509)

Exercici 3.16. Si I és la matriu identitat 2×2, O la matriu zero 2×3, $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ construïu la matriu per blocs $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathsf{A} & 3\mathsf{B} \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 510)

Lliçó 4. Multiplicació de matrius

Multiplícate por cero
Bart Simpson

Ací estudiem la multiplicació de matrius. Tot i que els estudiants ja hi esteu familiaritzats, el que més ens interessa és interpretar el producte de matrius des de diversos punts de vista, sobre tot com a operacions amb les columnes de les matrius.

Una matriu és una llista de vectors. En conseqüència, les operacions amb matrius són operacions amb vectors. Molt especialment, el producte d'una matriu per un vector és una combinació lineal dels vectors que componen la matriu i, en general, la multiplicació de dues matrius és una llista de combinacions lineals.

4.1. El producte matriu-vector

El producte d'una matriu A per un vector $\vec{b}$ és la combinació lineal de les columnes de la matriu que es compon fent servir els components del vector com a pesos. Per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En general,

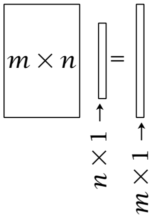
Definició 4.1. (El producte matriu-vector)

Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$ són les columnes de A i $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, llavors, el *producte* $\mathsf{A}\vec{b}$ és

$$\mathsf{A}\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_1\vec{a}_1 + b_2\vec{a}_2 + \cdots + b_n\vec{a}_n$$

☞ El producte d'una matriu per un vector és un vector.

Per a poder fer el producte $\mathsf{A}\vec{b}$, el nombre de columnes de A ha de coincidir amb el nombre de components de $\vec{b}$ (perquè hem de multiplicar cada columna per un element del vector). Per exemple, si A és una matriu $m \times n$, $\vec{b}$ ha de ser un vector de $\mathbb{K}^n$. Aleshores, el producte $\mathsf{A}\vec{b}$ és un vector de $\mathbb{K}^m$.



☞ És molt important que recordem que el producte d'una matriu per un vector és una combinació lineal de les columnes de la matriu.

4.2. El producte fila-matriu

El producte d'una matriu fila A per una matriu B és la matriu fila AB que s'obté com a combinació lineal de les files de la matriu B posant-hi, com a pesos, les entrades de A. Per exemple, si

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

llavors

$$\begin{aligned} \mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

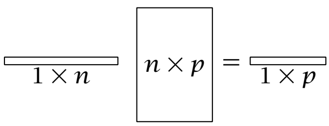
Definició 4.2. (El producte fila-matriu)

Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ i B_1, B_2, $\ldots \mathsf{B}_n$ són les files de B, llavors, el *producte* AB és

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{B}_2 \\ \cdots \\ \mathsf{B}_n \end{bmatrix} = a_1\mathsf{B}_1 + a_2\mathsf{B}_2 + \cdots + a_n\mathsf{B}_n$$

☞ El producte d'una matriu fila per una matriu és una matriu fila.

Per a poder fer el producte AB, el nombre d'entrades de A ha de coincidir amb el nombre de files de B. Per exemple, si A és una matriu $1 \times n$, B ha de ser una matriu $n \times p$. Aleshores, el producte AB és una matriu fila $1 \times p$.



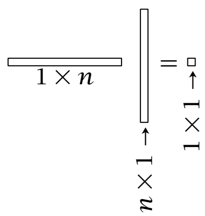
☞ La matriu (fila) AB és una combinació lineal de les files de B.

4.3. El producte fila-columna

El cas més simple de producte de dues matrius és el producte d'una fila per una columna. Observem que aquest producte es pot veure com un producte matriu-vector o, també, com un producte fila-matriu. En qualsevol cas, és clar que el que hem de fer, per calcular-lo, és component a component i sumar els resultats. Per exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 3$$

Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$, llavors $\mathsf{A}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.



☞ El producte fila-columna és una matriu 1×1, però això ho identificarem amb un escalar.

4.4. El producte matriu-matriu

La regla pràctica que sol donar-se del producte de dues matrius (i la que segurament coneixeu) és la següent:

Per a multiplicar les matrius reals A i B es fa el producte de cada fila de A per cada columna de B, de manera que l'element situat en la fila i i en la columna j de la matriu AB és el producte de la fila i de A per la columna j de B.

Exemple 4.1.

Producte de les matrius

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Per a multiplicar aquestes dues matrius seguirem els passos següents:

- Multipliquem la primera fila de A per la primera columna de B,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 3$$

  i posem aquest nombre en la posició $(1,1)$ de la matriu AB:

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

- Fem el mateix amb la primera fila de A i la segona columna de B i posem el resultat en la posició $(1,2)$:

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

  i això completa la primera fila de AB.

- Multipliquem la segona fila de A per la primera columna de B:

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \\ & \end{bmatrix}$$

- Segona fila per segona columna,

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ & \end{bmatrix}$$

- Tercera fila per primera columna,

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

- I, finalment, tercera fila per segona columna,

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Com que hem de fer els productes de les files de A per les columnes de B, cal que el nombre d'elements de les files de la primera matriu coincidisca amb el nombre d'elements de les columnes de la segona, és a dir, que *el nombre de columnes de* A *ha de ser el mateix que el nombre de files de* B.

$$\boxed{m \times n}\ \boxed{n \times p} = \boxed{m \times p}$$

☞ El producte d'una matriu $m \times n$ per una matriu $n \times p$ és una matriu $m \times p$.

Definició 4.3. (Producte de dues matrius)

Si A és una matriu $m \times n$ i B una matriu $n \times p$, llavors, el *producte* AB és la matriu $(m \times p)$

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \cdots \\ \mathsf{A}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1\vec{b}_1 & \mathsf{A}_1\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}_1\vec{b}_p \\ \mathsf{A}_2\vec{b}_1 & \mathsf{A}_2\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}_2\vec{b}_p \\ \cdots \\ \mathsf{A}_m\vec{b}_1 & \mathsf{A}_m\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}_m\vec{b}_p \end{bmatrix}$$

Així és com es defineix normalment el producte de dues matrius. Però a nosaltres ens interessa entendre el producte *columna a columna*, fent combinacions lineals de les columnes de B, o bé *fila a fila*, fent combinacions lineals de les files de A.

En els apartats següents mostrarem aquestes formes alternatives de calcular el producte. Hi farem servir les mateixes matrius A i B de l'exemple 4.1, així que retrobarem el producte

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

aplicant diversos mètodes alternatius. Però, més que aprendre noves maneres de multiplicar matrius, el que ens interessa és entendre el significat del producte com una operació entre vectors més que no entre nombres.

4.4.1. Producte per columnes

El producte AB es pot fer multiplicant la matriu A per cada columna de B. En el cas de l'exemple 4.1,

$$\mathsf{A}\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}\vec{b}_1 & \mathsf{A}\vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

☞ En general, $\mathsf{AB} = \mathsf{A}\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}\vec{b}_1 & \mathsf{A}\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}\vec{b}_p \end{bmatrix}$.

☞ Això vol dir que les columnes del producte AB són combinacions lineals de les columnes de A.

4.4.2. Producte per files

Alternativament, també podem multiplicar cada fila de A per la matriu B:

$$\mathsf{A}_1\mathsf{B} = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_2\mathsf{B} = \begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}_3\mathsf{B} = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix}\mathsf{A}_1\mathsf{B}\\ \mathsf{A}_2\mathsf{B}\\ \mathsf{A}_3\mathsf{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

☞ En general, $\mathsf{AB} = \begin{bmatrix}\mathsf{A}_1\\ \mathsf{A}_2\\ \cdots\\ \mathsf{A}_m\end{bmatrix}\mathsf{B} = \begin{bmatrix}\mathsf{A}_1\mathsf{B}\\ \mathsf{A}_2\mathsf{B}\\ \cdots\\ \mathsf{A}_m\mathsf{B}\end{bmatrix}$.

☞ Les files del producte AB són combinacions lineals de les files de B.

4.4.3. Columnes per files

Aquestes són les dues interpretacions del producte que ens interessen més. Encara, però, hi ha una altra opció: si multipliquem cada columna de A per la fila de B corresponent i les sumem, també obtindrem el producte AB:

$$\vec{a}_1\mathsf{B}_1 + \vec{a}_2\mathsf{B}_2 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0\\ -4 & 0\\ -2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

☞ En general, $\mathsf{AB} = \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathsf{B}_1\\ \mathsf{B}_2\\ \cdots\\ \mathsf{B}_n\end{bmatrix} = \vec{a}_1\mathsf{B}_1 + \vec{a}_2\mathsf{B}_2 + \cdots + \vec{a}_n\mathsf{B}_n$.

En resum, el producte AB es pot fer

(a) *Element a element*, multiplicant cada fila de A per cada columna de B: les entrades del producte són productes fila-columna.

(b) *Columna a columna*, multiplicant A per cada columna de B: les columnes del producte són combinacions lineals de les columnes de A.

(c) *Fila a fila*, multiplicant A per cada fila de B: les files del producte són combinacions lineals de les files de B.

(d) *Globalment*, multiplicant cada columna de A per la fila corresponent de B i sumant els resultats.

☞ En tot cas, el fet més important és que les columnes del producte són combinacions lineals de les columnes de la matriu A.

4.4.4. Propietats del producte

Propietats 4.1.

1. $IA = A$, $AI = A$ *(la matriu identitat és el neutre del producte)*
2. $OA = O$, $AO = O$ *(la matriu zero és absorbent)*
3. $(AB)C = A(BC)$ *(associativa)*
4. $(A + B)C = AC + BC$ *(distributiva per l'esquerra)*
5. $A(B + C) = AB + AC$ *(distributiva per la dreta)*
6. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
   (associativitat amb el producte escalar-matriu) □

☞ Cal tenir molt en compte que la multiplicació de matrius no té la propietat commutativa. Per exemple, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ aleshores

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

així que $AB \neq BA$. En realitat, aquest resultat no ens ha de sorprendre, si recordem que les columnes de AB són combinacions lineals de les columnes de A, mentre que les columnes de BA ho són de les columnes de B.

El fet que el producte no siga commutatiu té com a conseqüència que algunes simplificacions que estem acostumats a fer mecànicament quan treballem amb nombres no es puguen traslladar al càlcul amb matrius. Per exemple, la igualtat $ABA = A^2B$ no té perquè ser correcta, perquè es basa en el següent *raonament*: $ABA = AAB$; és a dir, estem suposant que A commuta amb B. Tampoc no és cert sempre que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (en realitat, $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$). Ni tampoc podem afirmar que $(AB)^2 = A^2B^2$ o que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

4.4.5. Producte per blocs

Com ja hem avançat a la lliçó anterior, les matrius també poden multiplicar-se per blocs, si les dimensions dels blocs ho permeten.

Per exemple, si $A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ i $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

$$\mathsf{AB} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathsf{A}_{12} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{B}_{11} & \mathsf{B}_{12} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right]$$

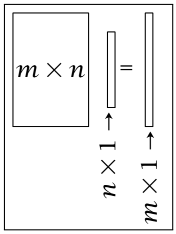
$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}\mathsf{B}_{11} + \mathsf{A}_{12}\mathrm{O} & \mathrm{I}\mathsf{B}_{12} + \mathsf{A}_{12}\mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O}\mathsf{B}_{11} + \mathrm{OO} & \mathrm{O}\mathsf{B}_{12} + \mathrm{OO} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{B}_{11} & \mathsf{B}_{12} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4.5. Resum

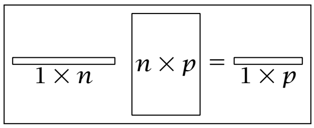
Producte matriu-vector: El producte matriu-vector és un vector (una combinació lineal de les columnes de A)

$$\mathsf{A}\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_1\vec{a}_1 + b_2\vec{a}_2 + \cdots + b_n\vec{a}_n$$



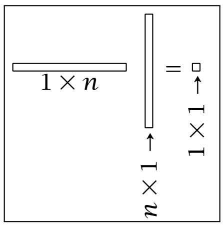
Producte fila-matriu: El producte fila-matriu és una matriu fila (una combinació lineal de les files de B)

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{B}_2 \\ \cdots \\ \mathsf{B}_n \end{bmatrix} = a_1\mathsf{B}_1 + a_2\mathsf{B}_2 + \cdots + a_n\mathsf{B}_n$$



Producte fila-columna: El producte fila-columna és un escalar (una matriu 1×1)

$$\mathsf{A}\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$



$(\cdots)$

$(\cdots)$

Producte matriu-matriu

☞ Per a poder fer el producte AB el nombre de columnes de A ha de coincidir amb el de files de B: si A és una matriu $m \times n$, B ha de ser una matriu $n \times p$. Llavors, el producte AB és una matriu $m \times p$.

$$\boxed{m \times n}\ \boxed{n \times p} = \boxed{m \times p}$$

1. **Files per columnes:**
   Cada element de la matriu AB és el producte d'una fila de A per una columna de B (per exemple, l'element $(2,3)$ de AB és el producte de la fila 2 de A per la columna 3 de B).

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \cdots \\ \mathsf{A}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1\vec{b}_1 & \mathsf{A}_1\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}_1\vec{b}_p \\ \mathsf{A}_2\vec{b}_1 & \mathsf{A}_2\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}_2\vec{b}_p \\ \cdots & & & \\ \mathsf{A}_m\vec{b}_1 & \mathsf{A}_m\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}_m\vec{b}_p \end{bmatrix}$$

☞ Cada entrada de AB és un producte fila-columna.

2. **A per columnes de B:**
   Cada columna de AB és el producte de la matriu A per una columna de B:

$$\mathsf{AB} = \mathsf{A}\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}\vec{b}_1 & \mathsf{A}\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}\vec{b}_p \end{bmatrix}$$

☞ Cada columna de AB és una combinació lineal de les columnes de A.

3. **Files de A per B:**
   Cada fila de AB és el producte d'una fila de A per la matriu B:
   Si A_1, A_2, …, A_m són les files de A, llavors

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \cdots \\ \mathsf{A}_m \end{bmatrix} \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1\mathsf{B} \\ \mathsf{A}_2\mathsf{B} \\ \cdots \\ \mathsf{A}_m\mathsf{B} \end{bmatrix}$$

☞ Cada fila de AB és una combinació lineal de les files de B.

4. **Columnes per files:**

$$\mathsf{AB} = \vec{a}_1\mathsf{B}_1 + \vec{a}_2\mathsf{B}_2 + \cdots + \vec{a}_n\mathsf{B}_n$$

☞ AB és una suma de productes columna-fila.

☞ Si les dimensions són adequades, el producte es pot fer *per blocs.*

4.6. Exercicis

Exercici 4.1. (Un producte matriu-vector) Calculeu el producte $\mathsf{A}\vec{b}$, essent $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, (a) element a element i (b) fent combinacions lineals de les columnes de A.

(solució: pàg. 511)

Exercici 4.2. Siga $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ i $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$. Escriviu el vector $\vec{b} = \mathsf{A}\vec{x}$ com a combinació lineal de les columnes de A.

(solució: pàg. 511)

Exercici 4.3. Donades les matrius $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, calculeu el producte AB de quatre maneres diferents: (a) fent productes de les files de A per les columnes de B, (b) fent combinacions lineals de les columnes de A, (c) fent combinacions lineals de les files de B i (d) fent productes de les columnes de A per les files de B.

(solució: pàg. 511)

Exercici 4.4. En cadascun dels casos següents, què podem dir de la matriu AB? Justifiqueu les respostes.

(a) si la primera fila de A és nul·la.

(b) si la primera fila de A és $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

(c) si la primera fila de A és $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

(d) si la primera columna de B és $(0, 1, 0, \dots, 0)$.

(e) Si A és la matriu identitat.

(f) Si B és la matriu identitat.

(solució: pàg. 512)

Exercici 4.5. Donades les matrius

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

calculeu tots els productes que siguen possibles.

(solució: pàg. 513)

EXERCICI 4.6. Calculeu totes les potències A^n, $n \geq 1$ de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 513)

EXERCICI 4.7. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 513)

EXERCICI 4.8. (Producte de matrius i operacions elementals)
Calculeu els productes següents fent combinacions lineals de les files de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{A}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{A}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{A}$

Expliqueu com modifiquen aquestes multiplicacions la matriu A.

(solució: pàg. 514)

EXERCICI 4.9. (Matrius elementals) Donada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$,

(a) Trobeu una matriu 3×3, E, de manera que, en multiplicar-la per A permute les dues primeres files de A. És a dir, que

$$\mathsf{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(fila 2a de A)} \\ \text{(fila 1a de A)} \\ \end{array}$$

(b) Trobeu una matriu 3×3, E, de manera que, en multiplicar-la per A dividisca entre 2 la segona fila de A. És a dir, que

$$\mathsf{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}\text{(fila 2a de A)} \\ \end{array}$$

(c) 3×3, E, de manera que, en multiplicar-la per A reste 2 vegades la fila segona a la fila tercera, és a dir, que

$$\mathsf{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{(fila 3a de A)}-2\text{(fila 2a de A)} \end{array}$$

(solució: pàg. 515)

EXERCICI 4.10. (Matrius inverses i determinants) Calculeu el producte AB essent

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 518)

EXERCICI 4.11. (Matrius transposades, matrius simètriques i matrius ortogonals)

(a) La transposada de la matriu A és la matriu A^T les files de la qual són les columnes de A (la primera fila de A^T és igual a la primera columna de A, la segona fila de A^T és igual a la segona columna de A, etc.).

Quines són les matrius transposades de les matrius següents?

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

(b) Es diu que la matriu A és simètrica si és igual a la seua matriu transposada.

Quines de les matrius de l'apartat anterior són simètriques?

(c) Es diu que la matriu real quadrada A és ortogonal si les seues columnes formen un conjunt de vectors ortonormal.

Proveu que la matriu $\mathsf{A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ és ortogonal.

(d) Si la matriu A és ortogonal, què podem dir del producte $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$?

(solució: pàg. 518)

Lliçó 5. Equacions i sistemes lineals

There is something I don't understand about algebra:
It has been around for thousands of years,
yet no one has ever found out
what the value of "x" or "y" really is
Anònim

Els continguts d'aquesta lliçó i les següents són molt simples i, probablement, ja els coneixeu dels vostres estudis anteriors; segurament esteu familiaritzats amb el mètode d'eliminació per a discutir i resoldre sistemes d'equacions lineals i amb la classificació dels sistemes segons el nombre de solucions que tenen. El que trobareu de nou és el concepte de matrius esglaonades i esglaonades reduïdes, que tampoc no són gaire complicats.
Tot i això, és molt important que estudieu la lliçó amb molt de compte, perquè en aquests continguts es troben les claus principals de l'àlgebra lineal.

Tot el que direm en aquesta lliçó (i, en general, quasi sempre al llarg del curs) és vàlid per a equacions, vectors i matrius reals o complexes; però en les interpretacions geomètriques treballarem normalment amb nombres reals.

5.1. Equacions lineals

Començarem amb una sola equació lineal amb dues incògnites:

Exemple 5.1.

Estudi de l'equació

$$x_1 + 2x_2 = 3 \tag{5.1}$$

Aquesta equació és *lineal* perquè les úniques operacions que fem amb les incògnites consisteixen a multiplicar-les per una constant i sumar els resultats. Qualsevol equació que requerisca un altre tipus d'operació no és lineal.[1] En gran mesura, l'àlgebra lineal és l'estudi de les equacions lineals.

És clar que l'equació (5.1) té moltes solucions, com ara, aquesta: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$; o aquesta altra: $x_1 = 0$, $x_2 = 3/2$ (simplement substituint els valors de x_1 i x_2 donats es comprova de seguida que efectivament són solucions de l'equació).

De fet, aquesta equació té infinites solucions, que podem trobar fàcilment: aïllant en (5.1) la primera incògnita tindrem

$$x_1 = 3 - 2x_2 \tag{5.2}$$

de manera que donant a x_2 qualsevol valor podem *calcular* el valor adequat de x_1 per a obtenir la solució. Per exemple, per a $x_2 = 0$ obtindrem $x_1 = 3 - 2 \cdot 0 = 3$,

[1] Per exemple, $x_1 x_2 = 1$ o $x_1 + \cos x_2 = 0$ no són equacions lineals.

així que retrobem la nostra primera solució: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$; en canvi, si partim de $x_2 = 1$ obtindrem $x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$ i podem assegurar que $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ és una altra solució.

Atés que cada solució de l'equació (5.1) és un parell de nombres, x_1, x_2, resulta molt convenient veure aquesta solució com el vector (x_1, x_2).

D'acord amb aquesta notació, les tres solucions *particulars* de l'equació que ja coneixem són aquestes:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aquestes solucions s'anomenen *particulars*, pel fet que n'hi ha moltes. Anomenarem solució *general* una expressió que represente totes les solucions particulars; per a obtenir-la, tornem a la fórmula (5.2). Si α representa un nombre qualsevol, llavors podem reescriure aquesta fórmula de la manera següent,

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 2\alpha \\ x_2 &= \alpha \end{aligned}$$

de manera que el conjunt de totes les solucions de l'equació (5.1) és

$$S = \{(3 - 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{K}\}$$

així que anomenarem solució general de l'equació el vector genèric $\vec{x} = (3-2\alpha, \alpha)$. Com que, ací, α representa un nombre qualsevol, direm que α és un *paràmetre* i que hem expressat la solució general de l'equació (5.1) en *forma paramètrica*.

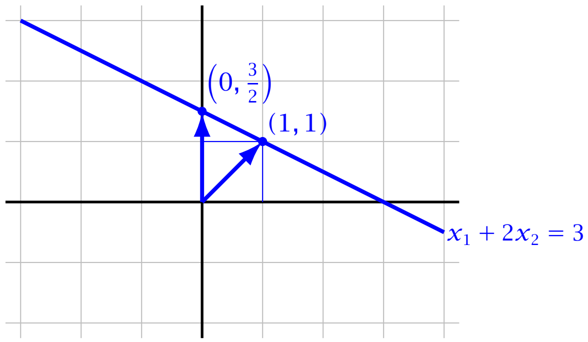
Per simple que parega, el fet d'interpretar les solucions de les equacions lineals com a vectors és un dels pilars de l'àlgebra lineal. La primera conseqüència d'aquesta interpretació és que podem fer servir el càlcul vectorial per a treballar amb les solucions; per exemple, la solució general de la nostra equació es pot expressar com

$$(x_1, x_2) = (3, 0) + \alpha(-2, 1)$$

o, millor, el conjunt de totes les solucions d'aquesta equació és

$$S = \{(3, 0) + \alpha(-2, 1) : \alpha \in \mathbb{K}\}$$

Per a visualitzar gràficament les solucions de l'equació (5.1), com que $x_1 + 2x_2 = 3$ és l'equació d'una recta en el pla i ja en coneixem diverses solucions, podem marcar-ne un parell i dibuixar la recta que les conté.

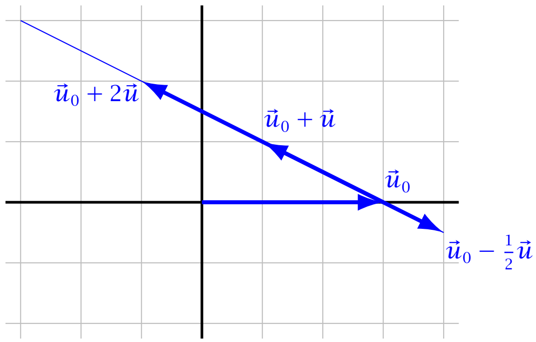


Les solucions de l'equació es corresponen amb tots els punts d'aquesta recta.

D'altra banda, que la solució general siga

$$\vec{x} = (3, 0) + \alpha(-2, 1)$$

significa que qualsevol solució de l'equació és la suma del vector $\vec{u}_0 = (3, 0)$ amb un múltiple de $\vec{u} = (-2, 1)$. El significat geomètric d'aquest fet es veu en el gràfic següent: les solucions són tots els punts de la recta que passa pel punt $(3, 0)$ i té la direcció del vector $\vec{u}$.



Així conclou l'estudi de l'equació (5.1). Ara tractarem una equació amb tres incògnites.

Exemple 5.2.

Solucions i interpretació gràfica de l'equació

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \tag{5.3}$$

Aquesta equació també té infinites solucions. Si aïllem la primera incògnita tindrem

$$x_1 = 1/2 - x_2 + (1/2)x_3$$

així que ara encara sembla que tenim més llibertat per a trobar solucions: podem donar qualsevol valor a x_2 i a x_3 i, llavors, calcular el valor adequat de x_1 per a obtenir una solució. Per exemple, si posem $x_2 = x_3 = 0$ haurà de ser $x_1 = 1/2$, de manera que $(1/2, 0, 0)$ és una solució de l'equació (5.3). Altres eleccions de x_2 i x_3 ens proporcionen aquestes altres solucions particulars:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per a determinar el conjunt de totes les solucions, assignarem un parell de paràmetres a les variables x_2 i x_3, com ara $x_2 = \alpha_1, x_3 = \alpha_2$, i obtindrem

$$x_1 = 1/2 - x_2 + (1/2)x_3 = 1/2 - \alpha_1 + (1/2)\alpha_2$$

de manera que el conjunt de les solucions és aquest:

$$S = \{(1/2 - \alpha_1 + (1/2)\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$$

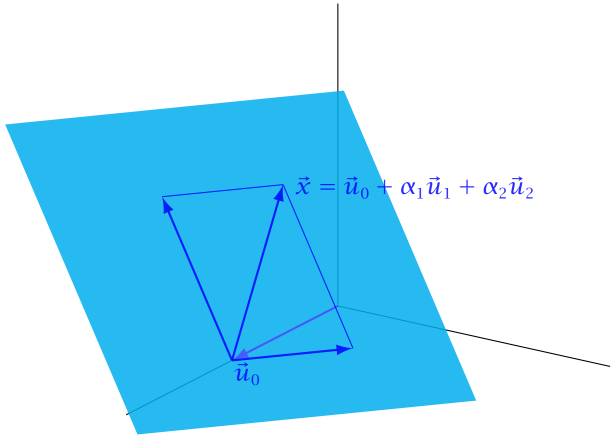
o bé,

$$S = \{(1/2, 0, 0) + \alpha_1(-1, 1, 0) + \alpha_2(1/2, 0, 1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$$

i direm que la solució general d'aquesta equació és

$$\vec{x} = (1/2, 0, 0) + \alpha_1(-1, 1, 0) + \alpha_2(1/2, 0, 1)$$

Així com en l'exemple anterior el conjunt de totes les solucions es podia interpretar com una recta en el pla, ara l'equació (5.3) representa un pla en l'espai tridimensional. Tots els vectors de posició dels punts d'aquest pla es poden obtenir sumant el vector $\vec{u}_0 = (1/2, 0, 0)$ amb una combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1 = (-1, 1, 0)$ i $\vec{u}_2 = (1/2, 0, 1)$.



Sembla clar que qualsevol equació lineal es pot resoldre de la mateixa manera, per moltes incògnites que tinga. Únicament pot haver-hi algun problema quan els coeficients (els nombres que multipliquen les incògnites) són zero. Per exemple, en l'equació

$$0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

no podem aïllar la primera incògnita (de fet, aquesta incògnita pot ser invisible, si escrivim l'equació com $2x_2 + 3x_3 = 5$), però sí que podem aïllar la segona incògnita,

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3$$

de manera que ara són x_1 i x_3 les incògnites a les quals donarem valors arbitraris i les solucions es poden expressar com $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = 5/2 - (3/2)\alpha_2$, $x_3 = \alpha_2$. Així que el conjunt de totes les solucions és

$$S = \{(0, 5/2, 0) + \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, -3/2, 1) \colon \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$$

Així, doncs, per a resoldre una equació lineal l'únic que hem de fer és aïllar una incògnita el coeficient de la qual no siga zero i substituir totes les altres incògnites per paràmetres. Tot i això, hi ha un parell de casos *patològics*:

1. En l'equació

   $$0x_1 + 0x_2 = 0$$

   no es pot aïllar cap incògnita! Però tot i això, és evident que qualsevol vector bidimensional n'és solució, és a dir, que la solució és $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$.

2. I tampoc podem aïllar cap incògnita en l'equació

   $$0x_1 + 0x_2 = a, \quad (a \neq 0)$$

   Però el que passa ara és que aquesta equació no té cap solució.

El quadre següent resumeix totes les possibilitats que pot haver-hi:

Discussió i resolució de l'equació lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

1. Si algun coeficient a_i és no nul, llavors l'equació és *consistent* (o *compatible*), és a dir, té alguna solució.

   Les solucions s'obtenen aïllant x_i i substituint totes les altres incògnites per paràmetres.

2. Si tots els coeficients a_1, a_2,..., a_n són iguals a zero, llavors

   2.1. Si $b \neq 0$ llavors, l'equació és *inconsistent* (o *incompatible*), és a dir, no té cap solució.

   2.2. Si $b = 0$ llavors, l'equació és *consistent* i qualsevol conjunt de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és solució.

5.2. Sistemes d'equacions lineals

Ara ens ocuparem dels sistemes d'equacions lineals. Es tracta de trobar les solucions comunes a dues o més equacions.

Exemple 5.3.

Estudi del sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$

El sistema es pot resoldre molt fàcilment sense més que fer una senzilla operació d'eliminació: si a la segona equació li restem la primera obtindrem un nou sistema que és equivalent al sistema inicial però en el qual la segona equació només té una incògnita:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ -3x_2 &= -6 \end{aligned}$$

així que dividint la segona equació entre -3 obtenim el valor de la segona incògnita, $x_2 = 2$, i el sistema es converteix en

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Finalment, podem restar a la primera equació el doble de la segona,

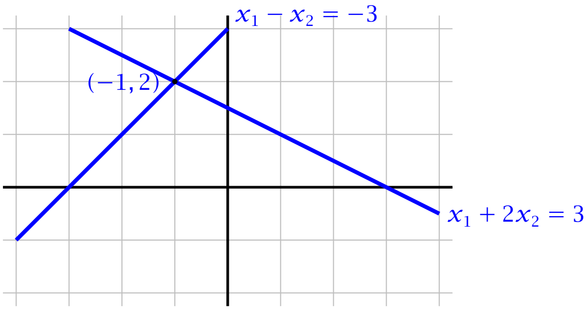
$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

En definitiva, el nostre sistema té una solució única: $(x_1, x_2) = (-1, 2)$. Com que sempre que es resol un problema cal comprovar els resultats, convé que ens assegurem que la solució és correcta substituint $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ en l'equació original:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -1 + 2 \cdot 2 = 3 \\ x_1 - x_2 &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

☞ En aquest curs no sempre comprovarem els resultats, perquè això només serviria per a fer-lo més tediós, però, sempre que resolgueu un problema, heu de comprovar que els resultats són correctes.

En farem dues interpretacions gràfiques. En primer lloc, com que la solució general de cadascuna d'aquestes equacions representa una recta, resulta que l'única solució comuna a les dues equacions és la intersecció d'aquestes dues rectes.



Per a visualitzar geomètricament la solució des d'un altre punt de vista, més interessant, ens convé observar que el sistema

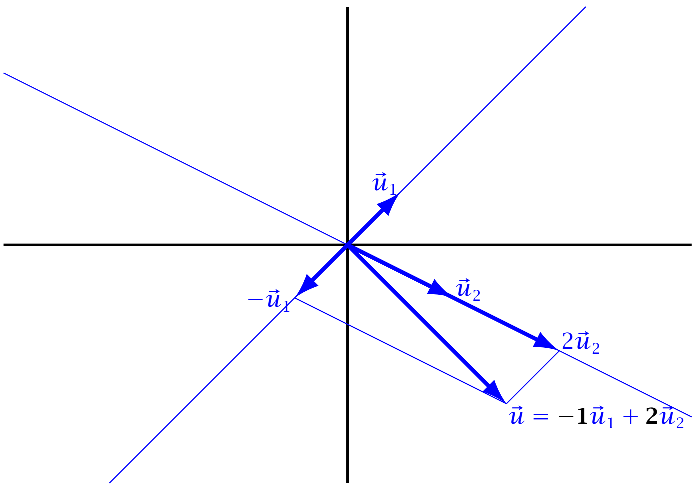
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

és equivalent a l'*equació vectorial*

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

així que *trobar una solució del sistema lineal és equivalent a escriure el vector* $(3, -3)$ *com a combinació lineal dels vectors* $\vec{u}_1 = (1, 1)$ *i* $\vec{u}_2 = (2, -1)$. Per tant, la solució $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (que hem obtingut fa un moment) significa que podem obtenir el vector $\vec{u} = (3, -3)$ amb la combinació lineal $-1\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$:

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$



Si mirem de generalitzar el resultat que hem trobat en aquest exemple, sembla que un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites ha de tenir una solució única, atés que la solució de cada equació és una recta i llavors el punt intersecció de les dues rectes és la solució del sistema; o bé, mirant-ho des del punt de vista de les combinacions lineals dels vectors, sembla que qualsevol vector de $\mathbb{K}^2$ s'ha de poder escriure com a combinació lineal de dos vectors donats. Doncs bé, això és cert *quasi sempre*, però hi ha un parell de casos especials en els quals no és així. Els següents exemples ho posaran en clar.

Exemple 5.4.

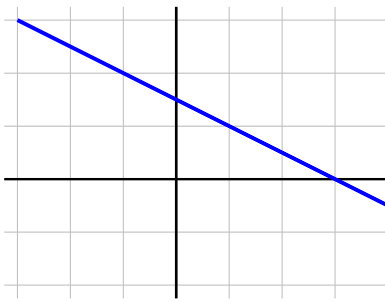
Estudi del sistema d'equacions lineals $\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}\right.$

Repetint l'estratègia d'eliminació, haurem de restar a la segona equació el triple de la primera, per tal d'eliminar-hi la incògnita x_1. Llavors obtenim el sistema següent:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

I la segona equació ha desaparegut! (perquè $3x_1 - 3x_1 = 0$, $6x_2 - 3(2x_2) = 0$ i $9 - 3 \cdot 3 = 0$), de manera que el sistema ha quedat reduït a una sola equació (la nostra ben coneguda equació de l'exemple 5.1), la solució general de la qual és $(x_1, x_2) = (3, 0) + \alpha(-2, 1)$. En definitiva, el sistema té infinites solucions (com en el cas d'una sola solució, anomenarem *solució particular* cadascuna d'aquestes solucions i *solució general* a una expressió que les englobe totes).

Evidentment, això passa perquè la segona equació és exactament el triple de la primera, de manera que en realitat no suposa cap restricció nova a les incògnites. Gràficament, si cada equació representa una recta, el que passa és que les dues equacions representen la mateixa recta.

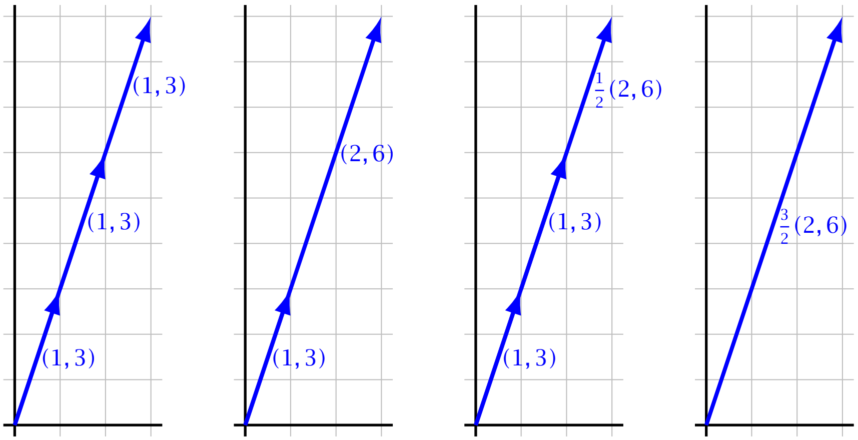


Per veure què passa amb la interpretació vectorial del problema, escrivim el sistema en forma vectorial:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}\right\} \iff x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Així que resoldre el sistema lineal és el mateix que el vector $(3,9)$ com a combinació lineal dels vectors $(1,3)$ i $(2,6)$, però això es pot fer de moltes maneres: per exemple, $(1,3)+(2,6)=(3,9)$; però també

$$\begin{aligned}3(1,3)+0(2,6)&=(3,9)\\(1,3)+(2,6)&=(3,9)\\2(1,3)+(1/2)(2,6)&=(3,9)\\0(1,3)+(3/2)(2,6)&=(3,9)\\&\dots\end{aligned}$$



$(3,9)=3(1,3)$ $\quad$ $(3,9)=(1,3)+(2,6)$ $\quad$ $(3,9)=2(1,3)+\frac{1}{2}(2,6)$ $\quad$ $(3,9)=\frac{3}{2}(2,6)$

Exemple 5.5.

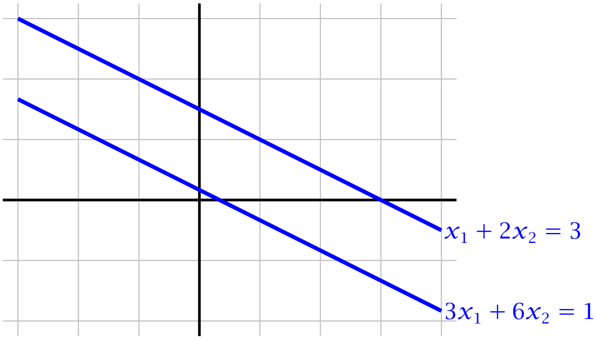
Estudi del sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x_1+2x_2=3\\ 3x_1+6x_2=1\end{cases}$

Restem a la segona equació el triple de la primera, per a eliminar la primera incògnita,

$$\begin{aligned}x_1+2x_2&=3\\0&=-8\end{aligned}$$

I el que passa ara és que la segona equació no pot tenir cap solució, així que el sistema tampoc no té solucions.

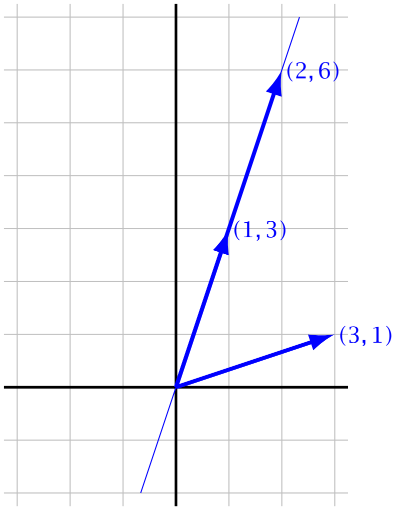
Si cada equació representa una recta, el problema és que les dues equacions del nostre exemple corresponen a rectes paral·leles, així que no tenen cap punt en comú:



En aquest cas, la forma vectorial del sistema és aquesta:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i el problema consisteix a expressar el vector $(3, 1)$ com a combinació lineal dels vectors $(1, 3)$ i $(2, 6)$. Però, com que el vector $(2, 6)$ és proporcional a $(1, 3)$, resulta que tots dos determinen la mateixa recta, i només els vectors que es troben sobre aquesta recta (que són els de la forma $\alpha(1, 3)$) es poden expressar com a combinacions lineals d'aquells dos vectors.
En altres paraules, les combinacions lineals dels vectors $\vec{u}_1 = (1, 3)$ i $\vec{u}_2 = (2, 6)$ són els vectors proporcionals a $\vec{u}_1$; com que el vector $\vec{u} = (3, 1)$ no és un múltiple de $\vec{u}_1$, llavors l'equació $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 = \vec{u}$ no té cap solució.



☞ El fet que $(2, 6)$ siga un múltiple de $(1, 3)$ fa que algunes equacions (com la de l'exemple 5.4) tinguen infinites solucions i, en canvi, altres (com la de l'exemple 5.5) no en tinguen cap!

Acabarem estudiant un sistema de dues equacions amb tres incògnites.

Exemple 5.6.

Resolució del sistema lineal $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

En primer lloc, eliminarem x_1 de la segona equació restant-hi la meitat de la primera,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - \quad x_3 &= 1 \\ -2x_2 + (3/2)x_3 &= -1/2 \end{aligned}$$

i també eliminarem x_2 en la primera equació, sumant-hi la segona equació:

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad + (1/2)x_3 &= 1/2 \\ -2x_2 + (3/2)x_3 &= -1/2 \end{aligned}$$

de manera que les dues equacions es poden resoldre aïllant x_1 i x_2 i assignant a x_3 un valor arbitrari. Si dividim la primera equació entre 2 i la segona entre -2 encara serà més senzill obtenir la solució:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + (1/4)x_3 &= 1/4 \\ x_2 - (3/4)x_3 &= 1/4 \end{aligned}$$

Així que,

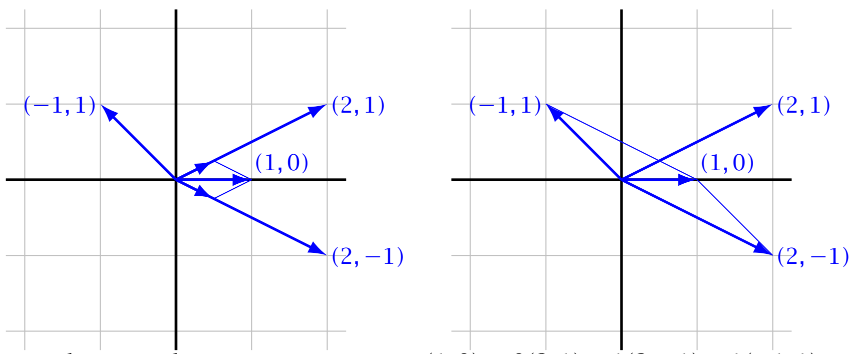
$$x_1 = 1/4 - (1/4)x_3, x_2 = 1/4 + (3/4)x_3$$

i és clar que la solució general d'aquest sistema és

$$\vec{x} = (1/4, 1/4, 0) + \alpha(-1/4, 3/4, 1)$$

Gràficament, cada equació d'aquest sistema representa un pla, de manera que la solució del sistema és la recta intersecció dels dos plans.

Des d'un altre punt de vista, el fet que aquest sistema tinga moltes solucions vol dir que hi ha moltes maneres d'expressar el vector $(1,0)$ com a combinació lineal dels tres vectors $(2,1)$, $(2,-1)$ i $(1,-1)$. La figura següent en mostra un parell.



$$(1,0) = \frac{1}{4}(2,1) + \frac{1}{4}(2,-1) + 0(1,-1)$$

$$(1,0) = 0(2,1) + 1(2,-1) + 1(-1,1)$$

5.2.1. Classificació dels sistemes lineals atenent al nombre de solucions

Els darrers exemples mostren que hi ha sistemes d'equacions lineals que tenen una solució única, d'altres que en tenen més d'una i d'altres que no en tenen cap. En conseqüència, podem classificar els sistemes en les següents categories:

Definicions 5.1.

1. Un sistema d'equacions lineals és *inconsistent* (o també, *incompatible*) quan no té cap solució.
2. En cas que el sistema tinga alguna solució, aleshores l'anomenem *consistent* (o *compatible*).

   Els sistemes consistents poden ser

   (a) *Determinats,* quan tenen només una solució.

   (b) *Indeterminats,* quan en tenen més d'una.

5.3. Les formes vectorial i matricial d'un sistema d'equacions lineals. Quatre problemes equivalents

En aquest apartat, introduirem una nova forma de representar els sistemes lineals (la més compacta i també la més interessant des del punt de vista de l'àlgebra lineal). Com hem vist als exemples, un sistema de m equacions lineals amb n incògnites,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

és equivalent a l'equació vectorial

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

o bé

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

☞ Aquesta és *la forma vectorial* del sistema.

☞ Resoldre el sistema d'equacions lineals és equivalent a expressar el vector $\vec{b}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_n$.

Però, si recordem que el producte d'una matriu per un vector és una combinació lineal de les columnes de la matriu,

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

observarem que el sistema lineal també és equivalent a l'equació matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

que podem expressar com

$$\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

☞ Aquesta és *la forma matricial* del sistema.

☞ Resoldre el sistema d'equacions lineals és equivalent a resoldre una equació matricial.

I encara hi ha una altra interpretació del sistema d'equacions lineals: una *transformació lineal* de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ és una aplicació de la forma $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ (si A és una matriu $m \times n$ i $\vec{x}$ un vector de $\mathbb{K}^n$, llavors $f(\vec{x})$ és un vector de $\mathbb{K}^m$).[2] Per tant, el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ es pot escriure com $f(\vec{x}) = \vec{b}$, així que

☞ Resoldre el sistema d'equacions lineals és equivalent a trobar les antiimatges del vector $\vec{b}$ en una transformació lineal.

En resum, si A és una matriu $m \times n$ i $\vec{b}$ un vector n-dimensional, els quatre problemes següents són equivalents:

(a) Trobeu n nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ tals que

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

(b) Trobeu els pesos adequats perquè el vector $\vec{b}$ siga combinació lineal de les columnes de la matriu A.

(c) Trobeu el vector $\vec{x}$ per al qual $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

(d) Si $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, trobeu una antiimatge $\vec{x}$ del vector $\vec{b}$.

[2] Recordeu que si $\vec{y} = f(\vec{x})$ es diu que $\vec{y}$ és la *imatge* de $\vec{x}$ i que $\vec{x}$ és una *antiimatge* de $\vec{y}$.

5.3.1. Matrius associades a un sistema lineal

Als efectes pràctics, per a discutir i resoldre un sistema lineal, farem servir un parell de matrius:

La matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ és la *matriu de coeficients* del sistema, el *vector de termes independents* és $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ i el *vector incògnita* és $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Per últim, anomenarem *matriu ampliada* la matriu que s'obté afegint el vector $\vec{b}$ a la matriu A. $\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$.

Aquesta matriu conté tota la informació necessària sobre el sistema.[3]

5.4. Mètode de reducció de Gauss-Jordan (primera aproximació)

Fins ara, hem resolt només sistemes de dues equacions. Però l'estratègia d'eliminació (sumar o restar a una equació un múltiple adequat d'una altra) es pot fer servir per a resoldre molts altres sistemes d'equacions lineals. De fet, tots els sistemes lineals es poden discutir, i resoldre, en cas que tinguen solució, mitjançant un mètode general molt simple, el mètode d'eliminació (o, més ben dit, *de reducció*) de Gauss-Jordan.

La idea bàsica del mètode de Gauss-Jordan és eliminar x_1 de totes les equacions excepte de la primera; fer el mateix amb x_2, eliminat-la de totes les equacions tret de la segona, i així successivament: En el millor cas, això conduirà a la separació de les incògnites, de manera que cada equació es podrà resoldre independentment de les altres.

En comptes de treballar directament sobre el sistema lineal, ho farem amb la matriu ampliada. Tot i això, perquè s'entenga perfectament el procés, en el primer exemple treballarem en paral·lel amb el sistema lineal i la matriu ampliada.

Exemple 5.7.

Discussió i resolució del sistema lineal $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

[3]Recordem que la ratlla vertical entre les matrius A i $\vec{b}$ no té cap significat matemàtic; únicament ens serveix per a separar els vectors de coeficients del vector de termes independents. Com que en moltes aplicacions $\vec{b}$ serà una matriu en comptes d'un vector, aquesta ratlla ens serà molt útil, per tal de delimitar on acaba la matriu de coeficients i comença la de termes independents.

La matriu ampliada d'aquest sistema és

$$\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

El primer pas consisteix a sumar (o restar) un múltiple adequat de la primera equació a la segona de tal manera que desaparega x_1 de la segona equació. Això es pot aconseguir, en aquest sistema, restant a la segona equació la primera

$$(x_1 - x_2 + x_3) - (x_1 + x_2 - x_3) = 0 - 1 \iff -2x_2 + 2x_3 = -1$$

(o restant la primera fila de la matriu ampliada a la segona fila):

$$(1, -1, 1, 0) - (1, 1, -1, 1) = (0, -2, 2, -1)$$

de manera que el sistema lineal es transforma en

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Per a eliminar x_1 de la tercera equació (fila), hi restem el doble de la primera:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_2 + 6x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

El següent pas consistiria a eliminar x_2 de les equacions primera i tercera. Tot i això, ho farem només amb la tercera equació (la reducció de la primera la farem més endavant, perquè d'aquesta manera ens estalviarem alguns càlculs). Així que restem la segona equació a la tercera.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

Ara ja hem eliminat les incògnites *per sota* (x_1 l'hem eliminada en la segona i en la tercera equacions i x_2 en la tercera). Ara eliminarem *per damunt*. Començarem per x_3, eliminant-la en les dues primeres equacions: sumem la tercera equació, dividida entre 8, a la primera:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

i restarem la tercera equació, dividida entre quatre, a la segona:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ - 2x_2 &= -1 \\ 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

Per últim, eliminem x_2 a la primera equació sumant-hi un mig de la segona:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/2 \\ - 2x_2 &= -1 \\ 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

Ara cada equació conté una sola incògnita, així que la solució s'obté dividint la segona equació entre -2 i la tercera entre 8:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/2 \\ x_2 &= 1/2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema és determinat i la solució general és

$$\vec{x} = (1/2, 1/2, 0)$$

Les tres equacions representen tres plans, de manera que la intersecció de cada dos d'aquests plans és una recta. El sistema és determinat perquè les tres rectes es tallen en un punt.

Exemple 5.8.

Discussió i resolució del sistema lineal $\begin{cases} 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

Repetim la mateixa estratègia. La matriu ampliada és

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Aquest sistema presenta un problema que encara no havíem trobat: se suposa que hem d'eliminar x_1 en totes les equacions excepte la primera, però és precisament a la primera equació que el coeficient de x_1 és zero. Per resoldre aquest problema intercanviarem les dues primeres equacions (files).

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Eliminem x_1 de la tercera equació, restant-hi la primera (restem la primera fila a la tercera),

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Restem la segona fila a la tercera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ara hauríem d'eliminar x_3 de les dues primeres files, però no ho podem fer, perquè aquesta incògnita ha desaparegut de la tercera fila. El que sí que es pot fer és eliminar x_2 a la primera fila, sumant-hi un terç de la segona.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dividim la segona fila entre 3, perquè el coeficient de x_2 siga 1,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Així doncs, el sistema original és equivalent a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{és a dir,} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aquest sistema es resol aïllant les incògnites x_1 i x_2,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/3 \\ x_2 &= 1/3 - x_3 \end{aligned}$$

i donant a x_3 un valor arbitrari, $x_3 = \alpha$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/3 \\ x_2 &= 1/3 - \alpha \\ x_3 &= \phantom{1/3 -{}} \alpha \end{aligned}$$

El sistema és indeterminat i la solució general, en forma vectorial, és aquesta:

$$\vec{x} = (1/3, 1/3, 0) + \alpha(0, -1, 1)$$

EXEMPLE 5.9.

Discussió i solucions del sistema lineal $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

La matriu ampliada és aquesta:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Primer pas: a la segona i a la tercera files els restem la primera.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

Segon pas: restem el doble de la segona fila a la tercera.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Aquesta és la matriu ampliada del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

I com que, ací, la tercera equació és $0 = 4$, podem concloure que el sistema és incompatible.

☞ En els tres exemples d'aquest apartat, per a eliminar les variables, hem fet sempre el mateix tipus de transformació: utilitzar una fila de la matriu per a modificar les altres. Aquest és el tipus d'operació elemental més important. En la fase final, si el sistema era compatible, únicament hem hagut de dividir cada equació pel primer coeficient per a trobar el valor de la incògnita corresponent. A més a més, en una ocasió hem hagut de permutar dues files de la matriu. D'això també en direm operacions elementals.

☞ Aquestes operacions transformen la matriu ampliada del sistema lineal en una altra matriu d'un tipus especial que ens permet decidir fàcilment si el sistema tenia solucions i, en aquest cas, calcular-les. Aquest tipus especial de matrius s'anomenen *esglaonades*.

En la lliçó propera definirem definitivament les operacions elementals i les matrius esglaonades i descriurem adequadament l'algorisme de Gauss-Jordan.

5.5. Resum

Equacions lineals

Una equació és *lineal* si té la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$).

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ són els *coeficients*.
- b és el *terme independent*.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són les *incògnites*.

Discussió i resolució

- L'equació $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ és *consistent* (o *compatible*) i tots els vectors de $\mathbb{K}^n$ en són solució.
- L'equació $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ és *inconsistent* (o *incompatible*) si $b \neq 0$.
- Si algun coeficient a_i és no nul llavors, l'equació $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ és *consistent* (o *compatible*).
  - La solució s'obté aïllant x_i i canviant totes les altres incògnites per paràmetres:
  - La solució es pot expressar en la forma

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\vec{u}_{n-1}$$

Sistemes d'equacions lineals

Un sistema de m equacions amb n incògnites és *lineal* si té la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ són els *coeficients*.
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ són els *termes independents*.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són les *incògnites*.

La matriu de coeficients és $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$

La matriu ampliada és $\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$

$(\cdots)$

(...)

El sistema lineal pot expressar-se en *forma vectorial* com

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

o bé

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

El sistema lineal pot expressar-se en *forma matricial* com

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{o bé} \quad \mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

Si $f(\vec{x}) = \vec{b}$, resoldre el sistema lineal és equivalent a trobar l'antiimatge $\vec{x} = f^{-1}(\vec{b})$

Classificació

1. *Consistent* (o *compatible*) si té alguna solució.
   (a) *Determinat,* quan té només una solució
   (b) *Indeterminat,* quan en té més d'una.
2. *Inconsistent* (o *incompatible*) quan no té cap solució.

☞ El sistema és compatible si i només si el vector dels termes independents és combinació lineal dels vectors dels coeficients.

☞ Per saber si un sistema lineal té solucions, i per calcular-les, farem servir l'algorisme de Gauss-Jordan, que descriurem a la lliçó següent.

5.6. Exercicis

Exercici 5.1. Classifiqueu les equacions següents (és a dir, dieu si són consistents o inconsistents) i, en cas que siguen consistents, calculeu-ne totes les solucions. En tots els casos, les incògnites són x_1, x_2 i x_3.

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (b) $x_2 + x_3 = 0$ (c) $x_1 - x_3 = -1$
(d) $x_2 = 0$ (e) $0x_3 = 0$ (f) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$

(solució: pàg. 520)

Exercici 5.2. Discutiu i resoleu, en cas que siguen compatibles, els sistemes lineals següents. Utilitzeu l'algorisme de Gauss-Jordan tal com ho hem fet als exemples d'aquesta unitat.

(a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 4 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 = -2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 4 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

(solució: pàg. 520)

Exercici 5.3. Trobeu tots els vectors que són ortogonals als dos vectors $(1, -1, 0)$ i $(1, 0, 1)$.

(solució: pàg. 522)

Exercici 5.4. Escriviu el sistema lineal

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 4 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

en forma vectorial i en forma matricial. Digueu quina és la matriu de coeficients i quina la matriu ampliada.

(solució: pàg. 523)

Exercici 5.5. Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és l'aplicació definida com $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 3x_2)$, calculeu les antiimatges $f^{-1}(0,0)$ i $f^{-1}(1,1)$ i (a) demostreu que f és bijectiva.

(solució: pàg. 523)

Exercici 5.6. Si la matriu de coeficients d'un sistema lineal és una matriu 7×5, quantes incògnites i quantes equacions té el sistema? Quants components té el vector de termes independents? I el vector incògnita?

(solució: pàg. 524)

Exercici 5.7. Proveu que quan un sistema lineal és indeterminat, en realitat té infinites solucions.

(solució: pàg. 524)

Lliçó 6. Matrius elementals. Algorisme de Gauss-Jordan

Divide et impera
(sentència atribuïda a Juli Cèsar)

En la lliçó anterior hem fet servir allò que anomenem operacions elementals per a transformar els sistemes lineals (o les matrius associades a aquests sistemes) a una forma esglaonada, que ens permet decidir si el sistema és consistent i, si ho és, resoldre'l. Ara estudiarem les matrius elementals, que ens permeten interpretar les operacions elementals com a productes de matrius, i explicarem què vol dir que una matriu és esglaonada.
Amb aquests instruments podem descriure de manera precisa l'algorisme de Gauss-Jordan.

6.1. Matrius esglaonades i operacions elementals

Definició 6.1.

Una matriu és *esglaonada* quan compleix aquestes condicions:

1. Si hi ha files nul·les i no nul·les llavors, les files nul·les estan per davall de les no nul·les, i
2. Si ha ha més d'una fila no nul·la, el primer element no nul (per l'esquerra) de cada fila, a partir de la segona, es troba més a la dreta que el primer element no nul de la fila anterior (en altres paraules, per davall del primer element no nul de cada fila només hi ha zeros). Aquest primer element no nul és un *element principal o pivot* de la matriu.

Una matriu és *esglaonada reduïda* si és esglaonada i, a més,

3. Tots els seus pivots són 1 (d'ací que també els anomenem *uns principals*).
4. Tots els elements situats per damunt dels pivots són zeros.

Exemple 6.1.

Les matrius següents són esglaonades, però només l'última és esglaonada reduïda:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

En les matrius esglaonades anomenem *columnes principals* (o *columnes pivot*) les que contenen un element principal. Si la matriu és esglaonada reduïda, totes les entrades de les columnes principals, tret de l'u principal, són zeros.

☞ L'objectiu de l'algorisme de Gauss-Jordan és transformar una matriu qualsevol en una que siga esglaonada reduïda mitjançant les transformacions que s'anomenen operacions elementals.

DEFINICIONS 6.2.

Una *operació elemental* és una transformació matricial d'un qualsevol d'aquests tres tipus:

Permutació de dues files: Intercanviar l'ordre entre dues files.

Escalat d'una fila: Multiplicació d'una fila per un nombre no nul.

Operació de reducció: Sumar a una fila un múltiple adequat d'una altra fila. O, més ben dit, substitució d'una fila pel resultat de sumar-hi un múltiple d'una altra fila.

☞ Només hi ha aquests tres tipus d'operacions elementals. Molt sovint es pot esglaonar un sistema fent servir altres transformacions, semblants a aquestes, però que no són estrictament operacions elementals; nosaltres utilitzarem només operacions elementals.

☞ En particular, cal remarcar que les operacions més importants —les de reducció— consisteixen en canviar una fila de la matriu pel resultat de sumar a aquesta fila un múltiple d'una altra: per exemple, podem canviar la primera fila, f_1, per $f_1 - (1/2)f_2$ (la primera menys la meitat de la segona), però no pel doble de la primera menys la segona: *canviar f_1 per $2f_1 - f_2$ no és una operació elemental.*[1]

DEFINICIONS 6.3.

(a) Dues matrius A i B són *equivalents per files* si podem transformar A en B mitjançant un nombre finit d'operacions elementals.

(b) Si la matriu esglaonada S és equivalent a A direm que S és *una forma esglaonada* de A.

(c) Si la matriu esglaonada reduïda R és equivalent a A direm que R és *la forma esglaonada reduïda* de A.

Una matriu té moltes formes esglaonades, però la forma esglaonada reduïda és única, és a dir, que *per a qualsevol matriu A hi ha una sola matriu esglaonada reduïda que és equivalent per files a A.* Si us interessa, trobareu la prova a l'apèndix 8.7 de la lliçó 8.

[1] En tot cas, en serien dues: canviar f_1 per $f_1 - (1/2)f_2$ i, després, multiplicar-la per 2.

El fet més important sobre les operacions elementals és que aquestes operacions es poden interpretar com multiplicacions matricials:

☞ Cada operació elemental sobre la matriu A és el producte d'una matriu especial per la matriu A.

Aquestes matrius especials les anomenarem *matrius elementals*.

6.2. Matrius elementals

En els exemples d'aquest apartat treballarem amb matrius elementals 4×4 (les matrius elementals són sempre quadrades) i amb una matriu A amb quatre files.

Definició 6.4. (Matriu elemental)

Una matriu és *elemental* si es pot obtenir fent una única operació elemental sobre la matriu identitat.

Com que hi ha tres tipus d'operacions elementals, també n'hi haurà tres, de tipus de matrius elementals. Per exemple, les matrius

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

són exemples de cadascun dels tres tipus (permutant les files segona i tercera de la matriu identitat obtenim la primera matriu, multiplicant-hi per 2 la tercera fila trobem la segona i la tercera és el resultat de sumar el doble de la tercera fila a la quarta.

6.2.1. Matrius elementals del tipus permutació

Definició 6.5.

La *matriu elemental del tipus permutació* $E_{i,j}$ és la matriu que resulta d'intercanviar les files i i j de la matriu identitat.

Per exemple,

$$E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vegem què passa quan multipliquem una matriu elemental del tipus permutació (per exemple, la matriu $\mathsf{E}_{2,3}$) per una altra matriu:

$$E_{2,3}\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ 0\mathsf{A}_1 + 0\mathsf{A}_2 + 1\mathsf{A}_3 + 0\mathsf{A}_4 \\ 0\mathsf{A}_1 + 1\mathsf{A}_2 + 0\mathsf{A}_3 + 0\mathsf{A}_4 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix}$$

La matriu $\mathsf{E}_{i,j}\mathsf{A}$ és la que s'obté permutant les files i i j de la matriu A. En altres paraules,

☞ Multiplicar una matriu elemental del tipus permutació per A és el mateix que aplicar (a A) una operació elemental del tipus permutació:

$$\mathsf{E}_{i,j}\mathsf{A} \text{ permuta les files } i \text{ i } j \text{ de } \mathsf{A}.$$

6.2.2. Matrius elementals del tipus escalat

Definició 6.6.

La *matriu elemental del tipus escalat* $\mathsf{E}_i(\alpha)$ és la matriu que resulta de multiplicar la fila i de la matriu identitat pel nombre α (o, més simplement, el resultat de substituir en la matriu identitat l'element diagonal que es troba en la posició (i,i) per α).

Per exemple,

$$\mathsf{E}_2(3/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{E}_4(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Si multipliquem, per exemple, $\mathsf{E}_1(\alpha)$ per la matriu A obtenim

$$E_1(\alpha)\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\mathsf{A}_1 + 0\mathsf{A}_2 + 0\mathsf{A}_3 + 0\mathsf{A}_4 \\ \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix}$$

☞ Multiplicar la matriu $\mathsf{E}_i(\alpha)$ per una matriu A és equivalent a multiplicar la fila i de A per α.

$$\mathsf{E}_i(\alpha)\mathsf{A} \text{ multiplica la fila } i \text{ de } \mathsf{A} \text{ pel nombre } \alpha.$$

6.2.3. Matrius elementals del tipus reducció

Definició 6.7.

La *matriu elemental del tipus reducció* $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ és la matriu que resulta de sumar a la fila i de la matriu identitat la fila j multiplicada pel nombre α (o, més simplement, el resultat de substituir en la matriu identitat l'element que es troba en la posició (i,j) pel nombre α).

Per exemple,

$$\mathsf{E}_{2,1}(3/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{E}_{3,4}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En multiplicar una matriu d'aquest tipus per la matriu A trobem

$$E_{1,3}(2)\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\mathsf{A}_1 + 0\mathsf{A}_2 + 2\mathsf{A}_3 + 0\mathsf{A}_4 \\ \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 + 2\mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_4 \end{bmatrix}$$

☞ Multiplicar la matriu $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ per una matriu A és equivalent a sumar a la fila i de A la fila j multiplicada per α.

$\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)\mathsf{A}$ suma la fila j de A multiplicada pel nombre α a la fila i.

6.3. Els algorismes de Gauss i de Gauss-Jordan

L'algorisme de Gauss és la primera fase del de Gauss-Jordan. Aquest algorisme computa una forma esglaonada de qualsevol matriu. La idea bàsica és la mateixa que hem fet servir en els exemples de la lliçó anterior, però en comptes d'eliminar cada incògnita de totes les equacions excepte una, ara només l'eliminarem en les equacions que es troben *per davall* de l'element principal. Naturalment, no treballarem amb equacions sinó amb matrius.

Direm que la matriu A és *esglaonada fins la columna* r si la submatriu $\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_r \end{bmatrix}$ és esglaonada i $\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{r+1} \end{bmatrix}$ no ho és. També direm que *les files de* A *que contenen els pivots d'aquesta submatriu esglaonada són pivotades* i que $\vec{a}_{r+1}$ és la *primera columna no esglaonada.*

Per exemple, la matriu

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

és esglaonada fins la cinquena columna i les dues primeres files són pivotades (perquè contenen els pivots 3 i 1). La primera columna no esglaonada és la sisena.

Algorisme de Gauss

Aquest algorisme calcula una forma esglaonada de la matriu A

Partim de la matriu A i la transformarem fins que siga esglaonada

Repetiu...

Elecció del pivot: Entre totes les files no pivotades de la matriu elegiu la que tinga un element no nul en la primera columna no esglaonada (si n'hi ha més d'una, elegiu-ne una qualsevol). Aquesta és la *fila pivot* i el seu primer element no nul és el *pivot*.

Si la fila pivot no és la primera entre les no pivotades, feu una permutació de dues files perquè ho siga.

Esglaonament: Feu iguals a zero tots els elements davall el pivot, sumant a cada fila per sota de la fila pivot un múltiple adequat d'aquesta fila.

... fins que la matriu siga esglaonada.

En qualsevol moment del procés podeu fer una operació elemental del tipus escalat.

☞ Notem que totes les transformacions que fem en aplicar aquest algorisme són operacions elementals, de manera que la matriu esglaonada es pot obtenir multiplicant unes quantes matrius elementals per la matriu A.

Exemple 6.2.

Apliqueu l'algorisme de Gauss per a trobar una forma esglaonada de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 12 \\ 2 & 4 & -12 & 19 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Justifiqueu cada operació elemental com un producte de matrius.

Podem elegir qualsevol fila com a pivot, excepte la primera; per exemple, la segona. Així que permutem les files primera i segona (ço és, hi multipliquem la matriu elemental del tipus permutació $\mathsf{E}_{1,2}$):

$$\mathsf{E}_{1,2}\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -12 & 19 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Ara fem zeros per davall de a_{11}; restem la primera fila a la tercera i a la quarta (és a dir, premultipliquem, successivament, les matrius $E_{3,1}(-1)$ i $E_{4,1}(-1)$):

$$E_{4,1}(-1)E_{3,1}(-1)E_{1,2}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{bmatrix}$$

La matriu ja és esglaonada fins la segona columna. Ara la fila pivot pot ser la segona, la tercera o la quarta. Ens quedem amb la segona i tornem a fer zeros per davall del pivot: restem la segona fila a la tercera i la sumem (la segona), multiplicada per $5/2$, a la quarta.

$$E_{4,2}(5/2)E_{3,2}(-1)E_{4,1}(-1)E_{3,1}(-1)E_{1,2}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ara la matriu és esglaonada fins la tercera columna; com a fila pivot hem d'escollir la quarta, així que intercanviem les files tercera i quarta.

$$E_{3,4}E_{4,2}(5/2)E_{3,2}(-1)E_{4,1}(-1)E_{3,1}(-1)E_{1,2}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

Aquesta matriu S és una forma esglaonada de la matriu A. □

☞ Per agilitar l'escriptura, farem servir la notació

$$A \xrightarrow{E\cdot} B$$

per simbolitzar que la matriu B s'obté aplicant a les files de A l'operació corresponent a la matriu E (*pre*multiplicant la matriu A per E), és a dir, que $EA = B$.

D'aquesta manera, el darrer exemple el podem esquematitzar així:

$$A \xrightarrow{E_{1,2}\cdot} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)\cdot} \xrightarrow{E_{4,1}(-1)\cdot} \xrightarrow{E_{3,2}(-1)\cdot} \xrightarrow{E_{4,2}(5/2)\cdot} \xrightarrow{E_{3,4}\cdot} S$$

o bé,

$$A \xrightarrow{E_{3,4}E_{4,2}(5/2)E_{3,2}(-1)E_{4,1}(-1)E_{3,1}(-1)E_{1,2}\cdot} S$$

☞ Atenció a l'ordre en què es fan les multiplicacions!

La diferència entre els algorismes de Gauss i de Gauss-Jordan és que aquest últim calcula la forma esglaonada reduïda de la matriu, en comptes d'una forma simplement esglaonada. Com veurem de seguida, per discutir si un sistema lineal és consistent és suficient conéixer-ne una forma esglaonada, de manera que bastarà que hi apliquem l'algorisme de Gauss.

Ara bé, la forma esglaonada reduïda té uns avantatges evidents sobre una forma esglaonada qualsevol: en primer lloc, com que té més zeros, qualsevol càlcul que s'hi faça és més econòmic (en termes de nombre d'operacions).[2] Per altra banda, si fem servir aquesta matriu per a resoldre un sistema d'equacions, la solució és immediata sense haver de fer cap càlcul addicional, perquè en cada equació només apareix una incògnita principal. Finalment, les formes esglaonades tenen moltes altres aplicacions, al marge de la resolució de sistemes, i per això, com més simples siguen, millor hi treballarem.[3]

Algorisme de Gauss-Jordan

Aquest algorisme calcula la forma esglaonada reduïda de la matriu A

Partim de la matriu A i la transformarem fins que siga esglaonada reduïda

Pas 1 (esglaonament): Apliqueu l'algorisme de Gauss per a transformar la matriu en una d'esglaonada.

Pas 2 (reducció): Començant pel darrer pivot (el que hi ha més a la dreta), feu zeros per damunt de tots els pivots (de dreta a esquerra).

Pas 3 (normalització): Dividiu cada fila no nul·la pel seu pivot (per fer uns els elements principals).

Exemple 6.3.

Apliqueu l'algorisme de Gauss-Jordan per a trobar la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada del sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad &= 3 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Hem de trobar la forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

[2] Aquest argument és una mica fal·laç, perquè trobar la forma esglaonada reduïda és més costós que trobar-ne una d'esglaonada.

[3] I són úniques, la qual cosa, als matemàtics, sempre ens fa goig.

Primer pas: algorisme de Gauss

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-2)\mathsf{E}_{2,1}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)\mathsf{E}_{4,2}(1)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aquesta matriu és esglaonada.

Segon pas: reducció Només hi ha dos pivots. De fet, l'únic que hem de fer en aquest pas és anul·lar un element de la matriu.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(2/3)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tercer pas: normalització Finalment, hem de dividir la segona fila entre -3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(-1/3)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\mathsf{R} \mid \vec{c}\right]$$

Aquesta darrera matriu és la forma esglaonada reduïda que cercàvem. A més a més, R és la forma esglaonada reduïda de la matriu A.

6.4. Discussió i resolució dels sistemes lineals

Suposem que volem estudiar la compatibilitat d'un sistema lineal qualsevol i, en cas que siga consistent, resoldre'l. Podem treballar d'aquesta manera:

- Primer de tot apliquem l'algorisme de Gauss per a obtenir una forma esglaonada de la matriu ampliada del sistema.
- Aleshores anomenarem *incògnites principals* (o *variables principals*) les incògnites que en alguna equació apareixen multiplicades per un element principal.

  Llavors,

  - Si la columna dels termes independents té algun pivot, aleshores el sistema és inconsistent, perquè la fila corresponent a aquest pivot representa l'equació

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$$

- En cas contrari el sistema és consistent i la solució es pot obtenir completant l'algorisme de Gauss-Jordan, aïllant en cada equació el seu element principal, i substituint les incògnites no principals per paràmetres. Per tant,
  - Si totes les incògnites són principals, el sistema és determinat.
  - Si hi ha alguna incògnita no principal, el sistema és indeterminat, i té un conjunt infinit de solucions que es pot expressar amb tants paràmetres com incògnites no principals té.

Podem formalitzar aquest raonament introduint el concepte de rang d'una matriu.

Definició 6.8.

El *rang* de la matriu A, $\operatorname{rang}\mathsf{A}$, és el nombre d'uns principals de la seua forma esglaonada reduïda (o, equivalentment, el nombre de files no nul·les de qualsevol de les seues formes esglaonades).[4]

Amb aquesta definició, el teorema següent és immediat.

Teorema 6.1. (Teorema de Rouché)

Considerem el sistema lineal amb n incògnites $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

– *El sistema és consistent si i només si* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = \operatorname{rang}\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right]$

– *Si el sistema és consistent, aleshores*

  - *El nombre d'incògnites principals és* $\operatorname{rang}\mathsf{A}$.
  - *El nombre de paràmetres necessaris per expressar la solució general és* $n - \operatorname{rang}\mathsf{A}$.
  - *El sistema és determinat si i només si* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$.

Demostració: La prova es basa en el raonament anterior: el sistema és consistent si i només si en la darrera columna de la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada no hi ha cap pivot, és a dir, si i només si el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada coincideixen. D'altra banda, el nombre de variables no principals és clarament $n - \operatorname{rang}\mathsf{A}$. □

Com que el rang d'una matriu es pot determinar si se'n coneix una forma esglaonada (encara que no siga reduïda), aquest teorema ens permet decidir el caràcter de qualsevol sistema lineal sense més que trobar-ne una forma esglaonada i el procés per discutir i resoldre el sistema serà aquest:

[4] O, també, el nombre de pivots o de columnes pivot.

Discussió i resolució d'un sistema lineal amb n incògnites

1. Apliqueu l'algorisme de Gauss a la matriu ampliada $\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \vec{b} \end{bmatrix}$ per obtenir-ne una forma esglaonada.
   - Si $\operatorname{rang} \mathsf{A} \neq \operatorname{rang} \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \vec{b} \end{bmatrix}$, llavors el sistema és inconsistent. En cas contrari,
   - Si $\operatorname{rang} \mathsf{A} = n$, llavors el sistema és determinat; si no, indeterminat.

   En cas que siga consistent, per trobar les solucions,
2. Completeu l'algorisme de Gauss-Jordan per obtenir la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada.
3. En el nou sistema lineal, aïlleu en cada equació la incògnita principal.
4. Substituïu les incògnites no principals per paràmetres.

Exemple 6.4.

Discussió i càlcul de les solucions del sistema

$$\begin{cases} - 2x_3 + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

En forma matricial, el sistema és $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ amb

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 28 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de manera que la matriu ampliada del sistema és

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Aplicant l'algorisme de Gauss obtenim una forma esglaonada d'aquesta matriu:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

D'ací deduïm que els rangs de la matriu de coeficients i de la matriu ampliada són iguals a 3, així que el sistema és indeterminat (amb dos paràmetres, atés que el nombre d'incògnites és 5).

Ara continuem l'algorisme de Gauss-Jordan i trobem que la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada és

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

En conseqüència, el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és equivalent a aquest altre:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 & = & 7 \\ x_3 & = & 1 \\ x_5 & = & 2 \end{array}$$

Així que, aïllant els elements principals, obtindrem

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

i la solució general s'obté canviant les dues variables x_2 i x_4 per paràmetres, $x_2 = \alpha_1$, $x_4 = \alpha_2$,

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 - 2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ x_2 &= \alpha_1 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= \alpha_2 \\ x_5 &= 2 \end{aligned} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.4.1. L'algorisme de substitució regressiva

Si hem esglaonat la matriu ampliada d'un sistema lineal i aquest sistema és consistent, en comptes d'aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan per trobar-ne la forma esglaonada reduïda, podem trobar la solució fent servir el mètode de substitució regressiva.

Algorisme de substitució regressiva

Aquest algorisme resol el sistema lineal (consistent) $\mathsf{S}\mathsf{x} = \vec{b}$ ***quan*** S ***és una matriu esglaonada***

Pas 1: Aïlleu la incògnita principal en cada equació.

Pas 2: Substituïu cada equació en totes les anteriors.

Pas 3: Substituïu les incògnites no principals per paràmetres.

☞ En l'algorisme de Gauss-Jordan totes les operacions es fan a nivell matricial, mentre que la substitució regressiva funciona a nivell de les equacions; en aquest sentit, l'algorisme de Gauss-Jordan és preferible a la substitució.[5]

Exemple 6.5.

Resoleu, fent servir l'algorisme de substitució regressiva, del sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Aquest sistema ja és esglaonat, i les incògnites principals són x_1, x_2 i x_4.

Pas 1: Aïllem la incògnita principal de cada equació:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 &= 2 + 2x_3 + x_4 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Pas 2: Substituïm cada equació en totes les anteriors:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 &= 2 + 2x_3 + x_4 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x_4=2} \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 - x_3 - 3 \cdot 2 \\ x_2 &= 2 + 2x_3 + 2 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= -5 + x_2 - x_3 \\ x_2 &= 4 + 2x_3 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{x_2=4+2x_3} \left.\begin{aligned} x_1 &= -5 + (4 + 2x_3) - x_3 \\ x_2 &= 4 + 2x_3 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= -1 + x_3 \\ x_2 &= 4 + 2x_3 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Pas 3: Substituïm l'incògnita x_3 per un paràmetre:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \alpha \\ x_2 &= 4 + 2\alpha \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

[5] A més a més, en la pràctica, quan resolem un sistema lineal *a mà* és més probable que cometem algun error si utilitzem l'estratègia de substitució regressiva.

6.5. Resum

Matrius esglaonades
Una matriu és *esglaonada* si

1. les files nul·les estan per davall de les no nul·les i
2. el primer element no nul (per l'esquerra) de cada fila, a partir de la segona, es troba més a la dreta que el primer element no nul de la fila anterior.

☞ Si la matriu és esglaonada, els primers elements no nuls de cada fila són els *pivots* o *elements principals*.

Una matriu és *esglaonada reduïda* si és esglaonada i, a més,

3. tots els pivots són 1 i
4. tots els elements situats per damunt dels pivots són zeros.

Operacions elementals
Una *operació elemental* (per files) és qualsevol de les transformacions següents:

Permutació: Intercanvi de dues files.

Escalat: Multiplicació d'una fila per un nombre distint de zero.

Reducció (o eliminació): Suma d'un múltiple d'una fila a una altra fila.

Matrius elementals Una *matriu elemental* és una matriu d'algun dels tipus següents:

Matriu elemental del tipus *permutació*

$$\mathsf{E}_{i,j} = \begin{array}{c@{}l}
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & \dots & {\color{blue}0} & \dots & {\color{blue}1} & \dots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & \dots & {\color{blue}1} & \dots & {\color{blue}0} & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \longleftarrow \text{fila } i \\ \\ \longleftarrow \text{fila } j \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{col. } i & & \text{col. } j & &
\end{array} &
\end{array}$$

(⋯)

(⋯)

Matriu elemental del tipus *escalat*

$$\mathsf{E}_i(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \\ \text{col. } i \end{matrix} & \end{array}$$

Matriu elemental del tipus *reducció (o eliminació)*

$$\mathsf{E}_{i,j}(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \leftarrow \text{fila } j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \\ \text{col. } j \end{matrix} & \end{array}$$

Operacions elementals i matrius elementals

☞ Les matrius elementals s'obtenen fent l'operació elemental corresponent sobre la matriu identitat:

- $\mathsf{E}_{i,j}$ s'obté permutant les files i i j de la matriu identitat.
- $\mathsf{E}_i(\alpha)$ s'obté multiplicant la fila i de la matriu identitat per α.
- $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ s'obté sumant la fila j de la identitat, multiplicada per α, a la fila i.

☞ Una operació elemental sobre la matriu A és equivalent al producte de la matriu elemental corresponent per A:

- $\mathsf{E}_{i,j}\mathsf{A}$ permuta les files i i j de la matriu A.
- $\mathsf{E}_i(\alpha)\mathsf{A}$ multiplica la fila i de la matriu A per α.
- $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)\mathsf{A}$ suma la fila j de la matriu A, multiplicada per α, a la fila i.

(⋯)

(⋯)

Algorisme de Gauss

Repetiu els següents passos fins que la matriu siga esglaonada:

Elecció del pivot: Entre totes les files no pivotades elegiu la que tinga un element no nul en la primera columna no pivotada (si n'hi ha més d'una, elegiu-ne una qualsevol). Aquesta és la *fila pivot* i el seu primer element no nul és el *pivot*.

Si la fila pivot no és la primera entre les no pivotades, feu una permutació de dues files perquè ho siga.

Esglaonament: Feu iguals a zero tots els elements davall el pivot, sumant a cada fila per sota de la fila pivot un múltiple adequat d'aquesta fila.

☞ En qualsevol moment del procés podeu fer una operació elemental del tipus escalat

Algorisme de Gauss-Jordan

Esglaonament: Apliqueu l'algorisme de Gauss per a transformar la matriu en esglaonada.

Reducció: Començant pel darrer pivot, feu zeros per damunt de tots els pivots.

Normalització: Dividiu cada fila no nul·la pel seu pivot.

☞ El *rang* de la matriu A ($\operatorname{rang}\mathsf{A}$) és el nombre de pivots que té
la forma esglaonada reduïda aquesta matriu
(o el nombre de pivots que té qualsevol forma esglaonada de A,
o el nombre de files no nul·les que té qualsevol forma esglaonada de A).

Teorema de Rouché

Considerem el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ on A és una matriu $m \times n$.

1. El sistema és consistent si i només si $\operatorname{rang}\mathsf{A} = \operatorname{rang}\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right]$.
2. Si és consistent, llavors és determinat si i només si $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$.

(⋯)

$(\cdots)$

Discussió i resolució de sistemes lineals

Discussió

1. Apliqueu l'algorisme de Gauss per calcular una forma esglaonada de la matriu ampliada.
2. Compareu els rangs de A i $\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right]$.
   - Si no són iguals, *el sistema és inconsistent.*
   - En cas contrari, el sistema és...
     - *determinat*, si $\operatorname{rang} A = n$;
     - *indeterminat*, si $\operatorname{rang} A < n$.

Resolució

1. Completeu l'algorisme de Gauss-Jordan.
2. Aïlleu les variables principals.
3. Canvieu les variables no principals per paràmetres.

Algorisme de substitució regressiva

Aquest algorisme resol el sistema lineal (consistent) $\mathsf{Sx} = \vec{b}$ quan S és una matriu esglaonada:

Pas 1: Aïlleu la incògnita principal en cada equació.

Pas 2: Substituïu cada equació en totes les anteriors.

Pas 3: Substituïu les incògnites no principals per paràmetres.

6.6. Exercicis

Exercici 6.1. Determineu si cada una d'aquestes matrius és esglaonada, esglaonada reduïda o si no és esglaonada.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 526)

Exercici 6.2. Determineu quines són les matrius elementals E_1, E_2, E_3 que, en multiplicar-les per $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ens proporcionen els resultats següents:

(a) $E_1 A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $E_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 526)

Exercici 6.3. En cada apartat, expliqueu quin és l'efecte de la multiplicació indicada.

(a) $E_4(-2)A$ (b) $E_{2,4}(3)A$ (c) $E_{4,1}A$ (d) $E_{2,1}(3)E_{3,1}(1)E_{4,1}(-1/2)A$

(solució: pàg. 526)

Exercici 6.4. Calculeu la forma esglaonada reduïda de la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

seguint els passos indicats (en cada pas feu les operacions elementals corresponents a les matrius que hi ha al damunt de la fletxa).

$$A \xrightarrow{E_{1,2}\cdot} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)\cdot} \xrightarrow{E_1(1/2)\cdot} \xrightarrow{E_{3,2}(5/2)E_{1,2}(-5/2)\cdot} \xrightarrow{E_2(-1/2)\cdot} \xrightarrow{E_{2,3}(7)E_{1,3}(23)\cdot} \xrightarrow{E_3(2)\cdot} R$$

(solució: pàg. 527)

Exercici 6.5. Calculeu una forma esglaonada de la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

fent servir l'algorisme de Gauss.

(solució: pàg. 527)

Exercici 6.6. Discutiu i resoleu el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(solució: pàg. 528)

Exercici 6.7. Discutiu i resoleu pel mètode de Gauss-Jordan els sistemes lineals

(a) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=1 \\ 6x_1-x_2+x_3=6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ -2x_1+5x_2+2x_3=0 \\ -7x_1+7x_2+x_3=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=-2 \\ -x_1+2x_2-4x_3+x_4=1 \\ 3x_1-3x_4=-4 \end{cases}$

(solució: pàg. 529)

Exercici 6.8. Discutiu segons els valors dels paràmetres (i resoleu, si és possible) els següents sistemes lineals:

(a) $\begin{cases} 2x_1+x_2=a \\ 6x_1+3x_2=b \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ 2x_1+x_2+2x_3=b \\ 3x_2+x_3=c \end{cases}$

(c) $\begin{cases} mx_1+x_2+2x_3+x_4=m \\ 2mx_1+3x_2-x_3-x_4=1 \\ 3mx_1+4x_2+x_3=m+1 \end{cases}$

(solució: pàg. 530)

Exercici 6.9. (Una matriu inversa) Si $\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ i $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$,

(a) Resoleu el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x}=\vec{u}$.

(b) Trobeu la matriu quadrada B per a la qual la solució és $\vec{x}=\mathsf{B}\vec{u}$ i calculeu AB i BA.

(solució: pàg. 532)

Exercici 6.10. (a) Feu servir el teorema de Rouché per a justificar que un sistema lineal amb més incògnites que equacions no pot ser determinat. (b) Un sistema amb més equacions que incògnites pot ser determinat? Indeterminat? Inconsistent?

(solució: pàg. 532)

Lliçó 7. L'equació matricial $\mathsf{A}X = \mathsf{B}$ i els sistemes homogenis

It isn't that they can't see the solution.
It is that they can't see the problem
G. K. Chesterton

> Acabem el primer capítol observant que l'algorisme de Gauss-Jordan es pot fer servir per a resoldre equacions lineals matricials o diversos sistemes lineals simultàniament.
> A més a més, estudiem els sistemes lineals homogenis ($\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$), la qual cosa ens porta a definir l'espai nul de la matriu A, i observem la relació que hi ha entre les solucions d'un sistema lineal i el sistema homogeni corresponent.

7.1. La resolució d'un sistema lineal revisitada

Si ja hem reduït el sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ a $\mathsf{R}\vec{x} = \vec{c}$, on R és la forma esglaonada reduïda de A, i si aquest sistema és consistent, a la lliçó anterior hem vist que, per resoldre'l, hem d'aïllar les incògnites principals i substituir les no principals per paràmetres. El que ens interessa ara és observar que, això d'aïllar les incògnites principals, encara ho podem fer a nivell matricial.

Considerem, per exemple, el sistema (esglaonat reduït)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{R}} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Per tal d'aïllar les incògnites principals, escriurem la matriu R com la suma d'una *part principal*, i una altra no principal,

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a la primera matriu canviem per zeros les columnes de la matriu R que no són principals i, a la segona, fem el contrari). A la part principal els únics elements que no són iguals a zero són els uns principals. Aleshores, el sistema (7.1) es pot escriure com

$$\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&0&1&0&1\\0&0&0&-1&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\right)\vec{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\vec{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2&0&1&0&1\\0&0&0&-1&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\vec{x}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_3\\x_5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}-x_2\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}-x_4\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}-x_6\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Aquesta darrera igualtat conté, al costat esquerre, les incògnites principals i, al dret, les no principals, així que la solució s'obté canviant per paràmetres les incògnites no principals, $x_2 = \alpha_1$, $x_4 = \alpha_2$, $x_6 = \alpha_3$:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\\ x_2 &= \alpha_1\\ x_3 &= -1 + \alpha_2 - \alpha_3\\ x_4 &= \alpha_2\\ x_5 &= 2 - \alpha_3\\ x_6 &= \alpha_3 \quad \square\end{aligned}$$

Aquesta idea (aïllar les incògnites descomponent la matriu R en suma de dues matrius) serà útil en la propera secció.

7.2. L'equació matricial $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$

L'algorisme de Gauss-Jordan podem fer-lo servir per a resoldre l'equació matricial $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$, on B és una matriu (no únicament un vector). En aquest cas, la incògnita X també serà una matriu. A serà una matriu $m \times n$, X una $n \times p$ i, B, una matriu $m \times p$.

Per resoldre l'equació, construirem la matriu ampliada $\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right]$, i hi trobarem la forma esglaonada reduïda $\left[\mathsf{R} \mid \mathsf{C}\right]$. Això ens permet calcular els rangs de A i $\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right]$. Llavors, si $\operatorname{rang}\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right] = \operatorname{rang}\mathsf{A}$ l'equació serà consistent, i si, a més, aquest rang coincideix amb el nombre de columnes de A, llavors hi haurà una sola solució.

Tot això ho podem resumir en una versió matricial del teorema de Rouché:

Teorema 7.1. (Teorema de Rouché per a equacions matricials)

Si A *i* B *dues matrius* $m \times n$ *i* $m \times p$*, respectivament, llavors*

1. *L'equació matricial* $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$ *és consistent si i només si* $\operatorname{rang}\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right] = \operatorname{rang}\mathsf{A}$.

2. *L'equació matricial* $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$ *és determinada si i només si* $\operatorname{rang}\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right] = \operatorname{rang}\mathsf{A} = n.$ □

Exemple 7.1.

Resoleu l'equació

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Primer de tot, apliquem l'algorisme de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & -6 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ara ja podem assegurar que l'equació és consistent i indeterminada. A més a més, aquesta equació és equivalent a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathsf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{X} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalment, la solució s'obté assignant valors paramètrics a les incògnites no principals $\begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\alpha_1 & -2\alpha_2 & -2\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad \square$$

L'aplicació més interessant de la resolució d'una equació matricial és el càlcul de la matriu inversa. D'això ens ocuparem a la lliçó 9.

7.2.1. Resolució simultània de sistemes lineals

Suposem que hem de resoldre diversos sistemes lineals que comparteixen la matriu de coeficients (és a dir, que només difereixen en els termes independents),

$$\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}_1 \qquad \mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}_2 \qquad \dots \qquad \mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}_p$$

El conjunt de tots aquests sistemes és equivalent a l'equació matricial

$$\mathsf{AX} = \mathsf{B}$$

on $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix}$, així que, l'única cosa que hem de fer és construir la matriu (super)ampliada $\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right]$ i aplicar-hi l'algorisme de Gauss-Jordan.

Exemple 7.2.

Discussió i resolució simultània dels sistemes lineals.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= -5 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 9 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Construïm la matriu ampliada

$$\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \vec{b}_3\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -5 & 9 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Aplicant-hi l'algorisme de Gauss-Jordan, obtenim la forma esglaonada reduïda

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Els tres sistemes són determinats. I les solucions són, respectivament, aquestes:

$$\vec{x} = (1, -1, 2) \qquad \vec{x} = (2, 1, 0) \qquad \vec{x} = (0, 0, 0)$$

Exemple 7.3.

Calculeu les solucions generals dels sistemes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aplicant l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu ampliada

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

obtenim la forma esglaonada reduïda

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolem l'equació matricial

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{X} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{X} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{X} \\
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Substituïm les incògnites X_2 per paràmetres ($\mathsf{X}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$),

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} &= \qquad\qquad \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathsf{X} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En conseqüència, les solucions dels tres sistemes originals són, respectivament,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

☞ i es veu clarament que la part *paramètrica* de les tres solucions és exactament la mateixa.

Això passa sempre amb els sistemes que comparteixen la matriu de coeficients, com veurem a l'apartat següent.

7.3. Sistemes homogenis

Un sistema lineal és *homogeni* quan tots els termes independents són zeros. Per exemple, el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és homogeni.

Els sistemes homogenis sempre són consistents, atés que el vector $\vec{x} = \vec{0}$ és evidentment una solució ($\mathsf{A}\vec{0} = \vec{0}$). De fet, el que diu el teorema de Rouché, aplicat a sistemes homogenis, es pot enunciar així:

Corol·lari 7.2. (Teorema de Rouché per a sistemes homogenis)

Qualsevol sistema lineal homogeni $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ *és consistent.*
A més a més, aquest sistema és determinat si i només si el rang de A *coincideix amb el nombre de columnes d'aquesta matriu (ço és, amb el nombre d'incògnites del sistema).* □

El conjunt de les solucions del sistema homogeni $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ l'anomenem *espai nul* de la matriu A.

Definició 7.1. (Espai nul d'una matriu)

L'*espai nul* de la matriu A, $\operatorname{Nul}\mathsf{A}$, és el conjunt de totes les solucions del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$.

Propietat 7.3. (Solució general = Solució particular + Espai nul)

Si el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ *és consistent i* $\vec{x}_0$ *n'és una solució particular, llavors la solució general d'aquest sistema és*

$$\underbrace{\vec{x}}_{\substack{\text{sol. general}\\ \text{de } \mathsf{A}\vec{x}=\vec{b}}} = \underbrace{\vec{x}_0}_{\substack{\text{sol. particular}\\ \text{de } \mathsf{A}\vec{x}=\vec{b}}} + \underbrace{\operatorname{Nul}\mathsf{A}}_{\substack{\text{sol. general}\\ \text{de } \mathsf{A}\vec{x}=\vec{0}}}$$

Demostració: Si $\vec{x}$ és solució de $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, llavors $\mathsf{A}(\vec{x}_0 - \vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}_0 - \mathsf{A}\vec{x} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$, així que $\vec{x}_0 - \vec{x} \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}$ i, per tant, $\vec{x} = \vec{x}_0 + (\vec{x} - \vec{x}_0) \in \vec{x}_0 + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.

Recíprocament, si $\vec{x} \in \vec{x}_0 + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$, és a dir, si hi ha un vector $\vec{x}_1 \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}$ de manera que $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$ llavors, $\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}(\vec{x}_0 + \vec{x}_1) = \mathsf{A}\vec{x}_0 + \mathsf{A}\vec{x}_1 = \vec{b} - \vec{0} = \vec{b}$, així que $\vec{x}$ és una solució de $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$. □

☞ Això justifica l'observació que féiem a la fi de l'apartat anterior: les solucions dels tres sistemes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \qquad & x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \qquad & x_1 + x_2 - x_3 &= 0\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 & x_1 + x_2 + x_3 &= 2 & x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

tenen la mateixa *part paramètrica*; l'espai nul de la matriu de coeficients és

$$\operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \{\alpha(-1, 1, 0) : \alpha \in \mathbb{K}\}$$

i les solucions dels tres sistemes són

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2\\ 0\\ 1 \end{bmatrix} + \operatorname{Nul}\mathsf{A} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 2\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{Nul}\mathsf{A} \qquad \vec{x} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}$$

7.4. Resum

Equacions matricials L'algorisme de Gauss-Jordan permet resoldre equacions matricials del tipus $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$

- Apliqueu l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right]$:

$$\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right] \to \left[\mathsf{R} \mid \mathsf{C}\right]$$

- Separeu les parts principal i no principal de R: $\mathsf{R} = \mathsf{R}_p + \mathsf{R}_l$.
  El sistema $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$ és equivalent a $\mathsf{R}_p\mathsf{X} = \mathsf{C} - \mathsf{R}_l\mathsf{X}$.
- Canvieu les incògnites no principals per paràmetres.

Teorema de Rouché

- L'equació $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$ és compatible si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{A} = \operatorname{rang} \left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right]$.
- La solució és única si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{A} = \operatorname{rang} \left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right]$ coincideix amb el nombre de columnes de A.

Sistemes homogenis. L'espai nul

- Un sistema lineal és *homogeni* si té la forma $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ (tots els termes independents són zeros).
- Els sistemes homogenis són sempre compatibles (el vector $\vec{0}$ sempre n'és solució).
- L'*espai nul* de la matriu A és el conjunt de totes les solucions del sistema homogeni $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

solució general = solució particular + espai nul

☞ Si $\vec{x}_0$ és una solució particular del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, llavors la solució general d'aquest sistema és

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \operatorname{Nul} \mathsf{A}$$

7.5. Exercicis

Equacions matricials

Exercici 7.1. Resoleu l'equació

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 534)

Exercici 7.2. (Una matriu inversa)

(a) Resoleu l'equació

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Siguen $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$ les dues columnes de la solució de l'apartat anterior. Proveu que el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

és consistent determinat i que la solució és $\vec{x} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2$.

(c) Resoleu els sistemes lineals següents:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 534)

Sistemes homogenis i espais nuls

Exercici 7.3. Trobeu els espais nuls de les matrius següents

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 535)

Exercici 7.4. (a) Resoleu el sistema lineal homogeni

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Trobeu l'espai nul de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Trobeu el conjunt de tots els vectors que són ortogonals als dos vectors del conjunt

$$S = \{(1, 2, -1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

(d) Si $\vec{b}$ és el vector $\vec{b} = (2, 2)$, comproveu que $\vec{x}_p = (1, 0, 0, 1)$ és una solució particular del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

(e) Sense fer cap més càlcul, determineu la solució general del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

(solució: pàg. 536)

Cadenes de Màrkov

Exercici 7.5. (Matrius estocàstiques i vectors estacionaris) Un vector $\vec{u}$ és *estocàstic* si totes les seues coordenades són reals no negatives i sumen 1; per exemple, $\vec{u}_0 = (0{,}20, 0{,}45, 0{,}35)$ és estocàstic. Una matriu quadrada $n \times n$, A, és *estocàstica* si totes columnes són vectors estocàstics; per exemple, la matriu

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}73 \end{bmatrix}$$

és estocàstica.
(a) Proveu que el vector producte d'una matriu estocàstica per un vector estocàstic també és estocàstic.
Un vector $\vec{u}$ és *estacionari* per a la matriu A si $\mathsf{A}\vec{u} = \vec{u}$. (b) Proveu que, si la matriu A és estocàstica, llavors hi ha vectors estacionaris distints del vector zero. (c) Trobeu tots els vectors estacionaris de la matriu M. (d) Trobeu un vector estacionari estocàstic de la matriu M.

La matriu M d'aquest exercici és la matriu de transició de la cadena de Màrkov que vam introduir a la lliçó 0 (a l'apartat 0.2). El vector que heu obtingut al darrer apartat representa la distribució de la població a llarg termini en aquell problema.

(solució: pàg. 538)

Capítol 2

Matrius

Lliçó 8. El rang d'una matriu **131**
8.1. Interpretació matricial dels algorismes d'esglaonament 131
8.2. (In)dependència lineal 132
8.3. Relacions de dependència i combinacions lineals . 134
8.4. El rang 135
8.4.1. Dependència lineal entre les columnes d'una matriu 135
8.4.2. Dependència lineal entre les files d'una matriu 137
8.5. Resum 138
8.6. Exercicis 139
8.7. Apèndix: Prova de la unicitat de la forma esglaonada reduïda 142
Lliçó 9. La matriu inversa **143**
9.1. Definició i càlcul de les matrius inverses 143
9.2. Multiplicació de matrius invertibles 146
9.3. Inverses de les matrius elementals 147
9.4. Teorema de caracterització de les matrius invertibles 148
9.5. El determinant d'una matriu 2×2. Càlcul ràpid de la inversa 149
9.6. Resum 151
9.7. Exercicis 152
Lliçó 10. Transposició i conjugació. Matrius hermítiques i matrius unitàries **154**
10.1. La matriu transposada. Matrius simètriques i matrius ortogonals 154
10.1.1. Matrius simètriques i matrius antisimètriques 155
10.1.2. La matriu $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ i el producte escalar real 156
10.1.3. Matrius ortogonals 157
10.2. La matriu adjunta 158
10.2.1. Matrius hermítiques i matrius antihermítiques 159
10.2.2. La matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i el producte escalar . . . 160

10.2.3. Matrius unitàries 160
10.3. Resum 161
10.4. Exercicis 163
Lliçó 11. Matrius triangulars. Factoritzacions LU **165**
11.1. Matrius diagonals i matrius triangulars 165
11.2. La factorització LU 167
11.2.1. Aplicació de la factorització LU a la resolució de sistemes lineals 170
11.3. Operacions elementals per columnes 172
11.4. Càlcul simultani de les matrius U i L 173
11.5. Pivotatge parcial 175
11.6. Resum 178
11.7. Exercicis 179

Lliçó 8. El rang d'una matriu

Intentaré probar que, al igual que Teruel o Soria,
la teoría de matrices también existe

Juan Miguel Gracia

Abans de tractar les matrius invertibles estudiarem la dependència lineal i trobarem la relació que hi ha entre la dependència lineal i el rang d'una matriu.
D'aquesta manera recuperem la definició clàssica del rang d'una matriu com el nombre de columnes (o files) linealment independents que té aquesta matriu.

8.1. Interpretació matricial dels algorismes d'esglaonament

L'algorisme de Gauss-Jordan (i, en general, tots els algorismes que consisteixen en l'aplicació successiva de diverses operacions elementals) és equivalent a la multiplicació de dues matrius: si la matriu B s'obté a partir de A premultiplicant-hi les matrius elementals E_1, E_2, …, E_p, és a dir, si

$$\mathsf{E}_p \cdots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

llavors, anomenant T el producte $\mathsf{E}_p \cdots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1$, és clar que $\mathsf{TA} = \mathsf{B}$. Aquesta matriu T podem calcular-la simultàniament amb B si fem sobre la matriu identitat les mateixes operacions que hem fet sobre A, perquè

$$\mathsf{E}_p \cdots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathrm{I} = \mathsf{E}_p \cdots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1 = \mathsf{T}$$

així que si construïm la matriu ampliada $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$ i hi apliquem les operacions elementals que transformen A en B obtindrem B i T simultàniament:

$$\mathsf{E}_p \ldots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1 \left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] = \left[\mathsf{E}_p \cdots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathsf{A} \mid \mathsf{E}_p \cdots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathrm{I}\right] = \left[\mathsf{B} \mid \mathsf{T}\right]$$

Exemple 8.1.

Calculeu la forma esglaonada reduïda, R, de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ i la matriu T tal que $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$.

El que hem de fer és aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$:

$$\begin{aligned}
\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\mathsf{E}_{2,1}(-2)\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] \\
\mathsf{E}_{1,2}(1/2)\mathsf{E}_{2,1}(-2)\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -4 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] \\
\mathsf{E}_{2}(-1/4)\mathsf{E}_{1,2}(1/2)\mathsf{E}_{2,1}(-2)\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -5/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right] = \left[\mathsf{R} \mid \mathsf{T}\right]
\end{aligned}$$

així que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}}_{\mathsf{T}=\mathsf{E}_2(-1/4)\mathsf{E}_{1,2}(1/2)\mathsf{E}_{2,1}(-2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/4 \end{bmatrix}}_{\mathsf{R}=\mathsf{E}_2(-1/4)\mathsf{E}_{1,2}(1/2)\mathsf{E}_{2,1}(-2)\mathsf{A}} \qquad \square$$

Una conseqüència interessant del fet que la forma esglaonada reduïda R de la matriu A és el producte d'una altra matriu T per A és aquesta: *les files de* R *(o de qualsevol altra matriu que s'haja obtingut de* A *fent-hi operacions elementals) són combinacions lineals de les files de* A. A més a més, les files de T contenen els pesos d'aquestes combinacions lineals.[1]

En el cas de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}
0\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5/4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8.2. (In)dependència lineal

La idea de dependència o independència lineal (d'un conjunt de vectors $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$) està relacionada amb l'equació

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_p\vec{u}_p = \vec{0}$$

Aquesta equació té una solució evident: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_p = 0$, perquè

$$0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_p = \vec{0}$$

Ara bé, en alguns casos, aquesta és l'única solució i, en altres casos, n'hi ha d'altres. En el primer cas direm que els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ són linealment independents.

[1] Recordem que les files d'un producte de dues matrius són combinacions lineals de les files de la segona matriu.

DEFINICIÓ 8.1.

El conjunt de vectors $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ és *linealment independent* (o *lliure*) si l'única solució de l'equació

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_p\vec{u}_p = \vec{0} \tag{8.1}$$

és $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$. En cas contrari, el conjunt és *linealment dependent* (o *lligat*).

Vegem-ne alguns exemples.

EXEMPLE 8.2.

Estudieu si el conjunt

$$S = \{(1,2,0,1), (0,1,0,0), (-1,0,1,0)\}$$

és linealment dependent o independent.

L'equació vectorial

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

és equivalent al sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I, com que el rang de la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és 3, aquest sistema és determinat i té només la solució nul·la. En conseqüència, el conjunt S és linealment independent. □

EXEMPLE 8.3.

Estudieu si el conjunt de vectors

$$S = \{(1,0,-1), (2,1,0), (5,2,-1)\}$$

és linealment dependent o independent.

L'equació que cal investigar ara és

$$x_1(1,0,-1) + x_2(2,1,0) + x_3(5,2,-1) = (0,0,0) \tag{8.2}$$

O bé

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esglaonem la matriu ampliada del darrer sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(1)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Així que el rang de la matriu és 2 i el sistema lineal és indeterminat. En conseqüència, el conjunt S és linealment dependent. Per tal de confirmar-ho, acabem d'aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solució és $x_1 = -\alpha, x_2 = -2\alpha, x_3 = \alpha$, així que, elegint $\alpha = 1$,

$$-(1,0,-1) - 2(2,1,0) + (5,2,-1) = \vec{0}$$

la qual cosa ens proporciona una solució no nul·la de l'equació (8.2). □

☞ Aquests exemples posen de manifest la relació fonamental entre el rang d'una matriu i la independència lineal: Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ és un conjunt finit de vectors, representarem com M_S la matriu que té aquests vectors com a columnes, $\mathsf{M}_S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \end{bmatrix}$. Llavors,

> S és linealment independent si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = p$ (el nombre de vectors de S).

La resta d'aquesta lliçó la dedicarem a concretar millor aquest fet.

8.3. Relacions de dependència i combinacions lineals

Quan un conjunt de vectors S és linealment dependent, cada solució no nul·la de l'equació (8.1) ens proporciona una *relació de dependència entre els vectors del conjunt S*. Així, al darrer exemple hem trobat que la forma esglaonada reduïda de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ és $\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i que la solució general del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ és $\vec{x} = \alpha(-1,-2,1)$; en conseqüència, hi ha la *relació de dependència* següent:

$$-(1,0,-1) - 2(2,1,0) + 1(5,2,-1) = (0,0,0)$$

En aquesta relació podem aïllar qualsevol dels vectors per a escriure'l com a combinació lineal dels altres dos. Per exemple,

$$(5, 2, -1) = (1, 0, -1) + 2(2, 1, 0)$$

En general, sempre que un conjunt de vectors siga linealment dependent hi podrem escriure algun d'aquests vectors com a combinació lineal dels altres. Aquesta és una de les propietats més importants de la dependència lineal i, de fet, en justifica el nom: que un conjunt de vectors siga linealment dependent significa que algun vector *depén* dels altres.

PROPIETAT 8.1.

El conjunt S és linealment dependent si i només si algun dels vectors d'aquest conjunt és combinació lineal dels altres. □

Per acabar aquest apartat enunciarem algunes altres propietats de la dependència lineal.

PROPIETATS 8.2.

Siga S un conjunt de vectors.

1. *Si el vector nul $\vec{0}$ és un element de S, llavors S és linealment dependent.*
2. *El conjunt format per un sol vector no nul és linealment independent.*
3. *Si $\mathcal{T}$ és un subconjunt de S i $\mathcal{T}$ és linealment dependent, llavors S també és dependent.*

   Aquesta propietat es pot formular, de manera equivalent, així:

   Si $\mathcal{T}$ és un subconjunt de S i S és linealment independent, llavors $\mathcal{T}$ també és independent.

Totes aquestes propietats es poden provar fàcilment. □

8.4. EL RANG

Al capítol primer, hem definit el rang d'una matriu com el nombre d'uns principals de la seua forma esglaonada reduïda. Ara interpretarem aquest concepte en termes de la independència lineal entre les files o les columnes de la matriu.

8.4.1. DEPENDÈNCIA LINEAL ENTRE LES COLUMNES D'UNA MATRIU

Suposem que $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ són les columnes d'una matriu $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Per a estudiar si aquestes columnes són linealment independents haurem de discutir l'equació

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{8.3}$$

o, de manera equivalent, el sistema lineal

$$\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$$

Per tant, com ja hem dit adés, *la condició necessària i suficient perquè les columnes de* A *siguen linealment independents és que* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$.

D'altra banda, com que les operacions elementals no canvien les solucions dels sistemes lineals, si la matriu B s'ha obtingut fent operacions elementals sobre A i si $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ són les columnes de B, l'equació (8.3) és equivalent a aquesta altra

$$x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_n\vec{b}_n = \vec{0}$$

☞ Això significa que les operacions elementals no canvien les relacions de dependència entre les columnes de les matrius.

Aquest fet ens permet trobar les relacions de dependència mitjançant l'algorisme de Gauss-Jordan, perquè en una matriu esglaonada reduïda aquestes relacions de dependència són immediates.

Exemple 8.4.

Trobeu les relacions de dependència entre les columnes de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 & 0 & 17 \\ -2 & 1 & -5 & -7 & -9 & 0 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -5 & -7 & -9 & 1 & -41 \\ -1 & 1 & -3 & -4 & -4 & 1 & -24 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com que la matriu R és esglaonada reduïda, podem identificar immediatament que les columnes principals són la 1, la 2, la 4 i la 6; a més a més, s'hi veuen clarament les relacions de dependència següents:

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 &= 2\vec{r}_1 + (-1)\vec{r}_2 \\ \vec{r}_5 &= (-1)\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2 + 2\vec{r}_4 \\ \vec{r}_7 &= 2\vec{r}_1 + 1\vec{r}_2 + 5\vec{r}_4 + (-3)\vec{r}_6 \end{aligned}$$

☞ Les columnes no principals en una matriu esglaonada reduïda són combinacions lineals de les columnes principals *anteriors* a elles i, a més a més, els pesos d'aquestes combinacions lineals són, precisament, les entrades d'aquestes columnes.

Així doncs, com que les relacions de dependència entre les columnes de A són les mateixes que les que hi ha entre les columnes de R,

$$\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + (-1)\vec{a}_2$$

(com que la tercera columna de R és $(2, -1, 0, 0)$, la tercera columna de A és 2 vegades la primera columna més -1 vegada la segona!) i, anàlogament,

$$\begin{aligned}\vec{a}_5 &= (-1)\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_4\\ \vec{a}_7 &= 2\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2 + 5\vec{a}_4 + (-3)\vec{a}_6 \quad \square\end{aligned}$$

A més a més, resulta que el nombre màxim de columnes linealment independents de qualsevol matriu A és igual al nombre d'uns principals que té la seua forma esglaonada reduïda, és a dir,

☞ El rang d'una matriu qualsevol coincideix amb el nombre màxim de columnes linealment independents que té aquesta matriu.

8.4.2. Dependència lineal entre les files d'una matriu

El problema de buscar relacions de dependència entre les files d'una matriu A ja l'hem resolt anteriorment; com que les files de qualsevol forma esglaonada S de A són combinacions lineals de les files de A, si el rang de A és menor que el nombre de files que té aquesta matriu, llavors les files nul·les de S ens proporcionen relacions de dependència entre les files de A.

Exemple 8.5.

Trobeu alguna relació de dependència entre les files de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Cercarem una forma esglaonada, S, de A i la matriu T tal que $\mathsf{TA} = \mathsf{S}$, fent operacions elementals sobre la matriu ampliada $\begin{bmatrix}\mathsf{A} & \mathsf{I}\end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(3)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

La matriu $\mathsf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és una forma esglaonada de A i podem obtenir-la premultiplicant A per la matriu $\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Per tant, la tercera fila del producte

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En definitiva,

$$-2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

És fàcil veure que si la forma esglaonada reduïda de A no té cap fila de zeros, aleshores no hi ha relacions de dependència entre les files de A, així que

☞ El rang d'una matriu qualsevol coincideix amb el nombre de files linealment independents que té aquesta matriu.

En conclusió, el nombre de files independents i el nombre de columnes independents en una matriu qualsevol són iguals, i aquest nombre és, precisament, el rang de la matriu.

Teorema 8.3. (El rang d'una matriu)

En qualsevol matriu, el nombre de columnes que són linealment és el mateix que el de files independents. A més a més, aquest nombre coincideix amb el rang de la matriu. $\square$

8.5. Resum

Interpretació matricial dels algorismes d'esglaonament

Si A es transforma en B fent-hi operacions elementals, llavors existeix una matriu T de manera que $\mathsf{TA} = \mathsf{B}$.

— T és el producte de les matrius elementals que fem servir per transformar A en B.

— T s'obté fent sobre I les mateixes operacions que es fan sobre A:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A} \mid \mathrm{I} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{T}=\mathsf{E}_p\ldots\mathsf{E}_2\mathsf{E}_1} \begin{bmatrix} \mathsf{B} \mid \mathsf{T} \end{bmatrix}$$

$(\cdots)$

$(\cdots)$

(In)dependència lineal

El conjunt de vectors $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ és *linealment independent* si l'equació

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_p\vec{u}_p = \vec{0} \tag{8.4}$$

només té la solució $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$.
Si hi ha altres solucions, el conjunt és *linealment dependent*.

— Si $\mathsf{M}_S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \end{bmatrix}$ llavors S és linealment independent si i només si rang $\mathsf{M}_S = p$.

— Si S és linealment dependent, cada solució no nul·la de l'equació (8.4) és una *relació de dependència* entre els vectors de S.

☞ S és linealment dependent si i només si algun vector és combinació lineal dels altres.

El rang d'una matriu

El *rang* de la matriu A és el nombre de columnes principals de la forma esglaonada reduïda de A,

— o el nombre de pivots,

— o el nombre de files no nul·les de qualsevol forma esglaonada.

☞ El rang de A és igual al nombre de columnes linealment independents de A.

☞ El rang de A és igual al nombre de files linealment independents de A.

— Les operacions elementals per files no canvien les relacions de dependència entre les columnes.

— Les columnes no principals de la forma esglaonada reduïda determinen les relacions de dependència entre les columnes.

— Les files nul·les de la forma esglaonada reduïda determinen les relacions de dependència entre les files.

8.6. Exercicis

Interpretació matricial dels algorismes d'esglaonament

Exercici 8.1. Donada la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, si R és la forma esglaonada reduïda de A calculeu una matriu T de manera que $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$.

(solució: pàg. 540)

Independència lineal i relacions de dependència

Exercici 8.2. Estudieu si els conjunts següents són linealment dependents o independents.

(a) $A = \{(1,2,0),(1,-1,1),(1,5,-1)\}$

(b) $B = \{(1,2,0,1),(1,-1,1,1),(1,5,-1,0)\}$

(solució: pàg. 540)

Exercici 8.3. (a) Calculeu la forma esglaonada reduïda, R, de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

i trobeu la matriu T per a la qual $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$.

(b) Quin és el rang de la matriu A?

(c) Trobeu alguna relació de dependència entre les columnes de la matriu A.

(d) Trobeu alguna relació de dependència entre les files de la matriu A.

(solució: pàg. 541)

Exercici 8.4. Proveu que qualsevol subconjunt de $\mathbb{K}^3$ amb quatre vectors és necessàriament linealment dependent.

(solució: pàg. 542)

Exercici 8.5. Determineu alguna relació de dependència entre les columnes de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

i calculeu el rang de A.

(solució: pàg. 542)

Exercici 8.6. Extraieu un subconjunt linealment independent del conjunt

$$A = \{(1,2,1,0),(1,1,0,1),(0,1,1,-1),(1,1,1,1)\}$$

que tinga el màxim nombre possible d'elements.

(solució: pàg. 543)

Exercici 8.7. Proveu que si el conjunt $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent llavors, $B = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_1 + \vec{u}_3\}$ també és independent.

Què podem dir quant a la independència lineal d'aquest altre conjunt: $C = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_1 - \vec{u}_3\}$?

(solució: pàg. 543)

Exercici 8.8. Proveu que, si $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $\mathsf{B} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ llavors, $\operatorname{rang} \mathsf{AB} \leq \operatorname{rang} \mathsf{A}$ i $\operatorname{rang} \mathsf{AB} \leq \operatorname{rang} \mathsf{B}$.

(solució: pàg. 544)

Exercici 8.9. Proveu que qualsevol matriu $m \times n$ de rang 1 es pot escriure com $\sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^*$, on σ_1 és un nombre positiu i $\vec{u}_1$ i $\vec{v}_1$ són vectors unitaris.

(solució: pàg. 545)

8.7. Apèndix: Prova de la unicitat de la forma esglaonada reduïda

Ara ja podem provar fàcilment que una matriu A té una única forma esglaonada reduïda. Com que l'algorisme de Gauss-Jordan sempre ens en proporciona una, podem afirmar que tota matriu té una forma esglaonada reduïda, així que provarem que, si n'hi ha dues, R i S, llavors, $\mathsf{R} = \mathsf{S}$.[2]

L'argument es basa en el fet (que hem vist en aquesta lliçó) que les relacions de dependència entre les columnes de les matrius equivalents per files són iguals; en el nostre cas, A, R i S tenen les mateixes relacions de dependència.

Demostrarem en primer lloc que les columnes principals de R i S són les mateixes (i iguals) i, després, que les columnes no principals també coincideixen.

Les columnes principals de R i S són iguals La primera columna principal de la matriu A és la primera que té alguna entrada distinta de zero. Aleshores, les columnes corresponents de R i de S són iguals a $(1, 0, \dots, 0)$. Aquesta és la primera columna principal (en A, R i S).

En general, una columna de A és principal si no és combinació lineal de les columnes principals anteriors a ella. Això és una propietat de la matriu A; però com que les relacions de dependència entre les columnes són les mateixes en totes tres matrius, les columnes principals de R i S són també iguals (i es troben en les mateixes posicions).

Les columnes no principals de R i S són iguals Si la columna $\vec{a}_j$ és no principal, en cas que siga una columna de zeros, és obvi que les columnes $\vec{r}_j$ i $\vec{s}_j$ també són columnes de zeros. En cas contrari, $\vec{a}_j$ és una combinació lineal de les columnes principals anteriors a ella, així que les columnes $\vec{r}_j$ i $\vec{s}_j$ són combinació lineal de les columnes principals anteriors amb els mateixos pesos; però, com que les columnes principals anteriors són iguals, això vol dir que $\vec{r}_j = \vec{s}_j$.

[2]La demostració que fem ací és, bàsicament, la que podeu trobar a *«Linear Algebra and Its Applications», Second Edition. David C. Lay. Addison-Wesley, 1997.*

Lliçó 9. La matriu inversa

Here is the whole Gauss-Jordan process on one line
for any invertible matrix A*:*
Multiply $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$ *by* A^{-1} *to get* $\left[\mathrm{I} \mid \mathsf{A}^{-1}\right]$

Gilbert Strang

> Aquesta és la lliçó més important del curs. Determinar si una matriu és invertible i, en cas que ho siga, calcular-ne la inversa és una de les qüestions centrals de l'àlgebra lineal.
> Al mateix temps, és la lliçó més simple! Amb tot el que sabem sobre les matrius i els sistemes lineals, tant el problema de decidir si una matriu és invertible com el càlcul efectiu de la inversa són trivials.

Per què *funcionen* els algorismes de Gauss i de Gauss-Jordan, per discutir i resoldre els sistemes lineals? És a dir, perquè estem segurs que, si E és una matriu elemental llavors, les solucions del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ són *exactament* les mateixes que les del sistema lineal $\mathsf{E}\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{E}\vec{b}$? Perquè les operacions elementals són reversibles; o, més ben dit, perquè les matrius elementals són invertibles.

9.1. Definició i càlcul de les matrius inverses

Definició 9.1.

Direm que la matriu quadrada $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ és *invertible* si existeix una altra matriu B tal que

$$\mathsf{AB} = \mathrm{I} \tag{9.1}$$

Segons aquesta definició, que la matriu A siga invertible vol dir que l'equació $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$ siga compatible. Vegem algun exemple de matrius que són invertibles i de matrius que no ho són.

Exemple 9.1.

Estudieu si la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és invertible

Es tracta de discutir i resoldre l'equació matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Així que l'únic que hem de fer és calcular la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$. Això ho podem fer simplement restant a la primera fila el doble de la segona:

$$\mathsf{E}_{1,2}(-2)\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Llavors, l'equació és determinada i la solució és

$$\mathsf{X}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

En conseqüència, la matriu A és invertible. □

EXEMPLE 9.2.

Estudieu si la matriu $\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$ és invertible

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1)\cdot}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)\cdot}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

Aquesta matriu és esglaonada, així que ja podem observar que el rang de A és 2, mentre que el rang de la matriu ampliada $\left[\mathsf{A}\mid\mathrm{I}\right]$ és 3, així que l'equació matricial és incompatible. En conseqüència, la matriu A no és invertible. □

És clar que la matriu del primer exemple és invertible perquè és una matriu 2×2 i el seu rang és igual a 2. I que la segona matriu no ho és, perquè el rang no és 3. En general,

PROPIETATS 9.1.

1. *Una matriu $n\times n$ A és invertible si i només si* $\operatorname{rang}\mathsf{A}=n$.
2. *Si la matriu A és invertible llavors l'equació $\mathsf{AX}=\mathrm{I}$ té una solució única.*

Demostració:

1. Com que el rang de la matriu I d'ordre n és n, és evident que $\left[\mathsf{A}\mid\mathrm{I}\right]$ també té rang n (té n columnes linealment independents i només té n files). Llavors, el teorema de Rouché garanteix que el sistema $\mathsf{AX}=\mathrm{I}$ és compatible si i només si $\operatorname{rang}\mathsf{A}=n$.

2. Això també és conseqüència del teorema de Rouché, perquè, per la propietat anterior, si A és una matriu $n\times n$ invertible, aleshores el rang de A és n i, llavors, la solució del sistema lineal $\mathsf{AX}=\mathrm{I}$ és única. □

DEFINICIÓ 9.2.

Si la matriu A és invertible, llavors la *matriu inversa* de A és l'única matriu A^{-1} que verifica la igualtat

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathrm{I}$$

☞ A l'exemple 9.1 hem provat que la inversa de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. I, a l'exemple 9.2, hem vist que la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ no en té, d'inversa. De fet, aquests dos exemples, i la propietat 9.1.1 ens mostren el que hem de fer per decidir si la matriu $n \times n$ A és invertible i, en cas que ho siga, calcular-ne la inversa:

Estudi de la invertibilitat i càlcul de la inversa

1. Apliqueu l'algorisme de Gauss a la matriu $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$.
2. Si el rang de A és n, aleshores A és invertible. En cas contrari, no ho és. En cas que ho siga,

   2.1 acabeu d'aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$.

   2.2 El resultat que heu obtingut és $\left[\mathrm{I} \mid \mathsf{A}^{-1}\right]$.

EXEMPLE 9.3.

Estudieu si la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és invertible i, en cas afirmatiu, calculeu-ne la inversa.

Apliquem l'algorisme de Gauss a la matriu $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$:

$$\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(1)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I, com que aquesta forma esglaonada de la matriu A té tres pivots no nuls, podem assegurar que el rang de la matriu A és tres i la matriu és invertible.

Ara acabem d'aplicar-hi l'algorisme de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}(1)\mathsf{E}_{1,3}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1}(-1)\mathsf{E}_{2}(1/2)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Llavors, la matriu inversa és

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encara ens falta provar una altra propietat important de les matrius invertibles: segons la definició de la matriu inversa de A, $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathrm{I}$; però resulta que el producte $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}$ també és igual a la identitat.[1]

Propietat 9.2.

Donades les matrius quadrades d'ordre n, A i B, si $\mathsf{AB} = \mathrm{I}$ aleshores $\mathsf{BA} = \mathrm{I}$

Demostració: Si $\mathsf{AB} = \mathrm{I}$ aleshores $\mathsf{B} = \mathsf{A}^{-1}$ i $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$; per tant, la forma esglaonada reduïda de A és I i es pot obtenir fent operacions elementals sobre A. Si fem aquestes operacions elementals sobre la matriu ampliada $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$ obtindrem

$$\mathsf{E}_p \ldots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1 \left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] = \left[\mathrm{I} \mid \mathsf{B}\right]$$

Això vol dir que

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_p \ldots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathsf{A} &= \mathrm{I} \\ \mathsf{E}_p \ldots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1 &= \mathsf{B} \end{aligned}$$

així que substituint la segona equació en la primera obtenim $\mathsf{BA} = \mathrm{I}$. □

9.2. Multiplicació de matrius invertibles

El producte de matrius invertibles també ho és.

Propietat 9.3.

Siguen A_1 i A_2 dues matrius $n \times n$. Aleshores A_1 i A_2 són invertibles si i només si el producte $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$ és invertible.
En aquest cas,

$$(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)^{-1} = \mathsf{A}_2^{-1}\mathsf{A}_1^{-1}$$

[1] De fet, la definició habitual de la matriu inversa exigeix les dues igualtats, $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathrm{I}$.

Demostració: Suposem que les dues matrius A_1 i A_2 són invertibles. Llavors, si multipliquem $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$ per $\mathsf{A}_2^{-1}\mathsf{A}_1^{-1}$ tindrem

$$\mathsf{A}_1 \underbrace{\mathsf{A}_2\mathsf{A}_2^{-1}}_{\mathrm{I}} \mathsf{A}_1^{-1} = \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1^{-1} = \mathrm{I}$$

així que la inversa de $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$ és $\mathsf{A}_2^{-1}\mathsf{A}_1^{-1}$.

Si ara suposem que $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$ és invertible, multiplicant A_1 per la matriu $\mathsf{A}_2\,(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)^{-1}$ tindrem

$$\mathsf{A}_1\Big(\mathsf{A}_2\,(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)^{-1}\Big) = (\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)\,(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)^{-1} = \mathrm{I}$$

així que A_1 és invertible i la seua inversa és $\mathsf{A}_2\,(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)^{-1}$. Finalment, com que $\mathsf{A}_2 = \mathsf{A}_1^{-1}(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)$, A_2 també és invertible. □

COROL·LARI 9.4.

El producte $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\ldots\mathsf{A}_p$ és invertible si i només si ho són totes les matrius $\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2,\ldots,\mathsf{A}_p$. En aquest cas,

$$\Big(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\ldots\mathsf{A}_p\Big)^{-1} = \mathsf{A}_p^{-1}\ldots\mathsf{A}_2^{-1}\mathsf{A}_1^{-1} \quad \square$$

☞ Pareu atenció al fet que la inversa del producte és el producte de les inverses *en l'ordre contrari.*

9.3. INVERSES DE LES MATRIUS ELEMENTALS

Com que les matrius elementals tenen sempre rang màxim, podem assegurar que totes les matrius elementals són invertibles. A més a més, és molt fàcil calcular les inverses d'aquestes matrius.

PROPIETAT 9.5.

Totes les matrius elementals són invertibles. A més a més, la inversa d'una matriu elemental és també elemental (i del mateix tipus). En concret,

1. *La inversa d'una matriu elemental del tipus permutació és la mateixa matriu:* $\mathsf{E}_{i,j}^{-1} = \mathsf{E}_{i,j}$.
2. *La inversa d'una matriu elemental del tipus escalat amb factor d'escala* α *és la matriu del tipus escalat amb factor d'escala* $1/\alpha$: $\mathsf{E}_i(\alpha)^{-1} = \mathsf{E}_i(1/\alpha)$.
3. *La inversa d'una matriu elemental del tipus reducció amb paràmetre* α *és la matriu del tipus reducció amb paràmetre* $-\alpha$: $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)^{-1} = \mathsf{E}_{i,j}(-\alpha)$.

Totes aquestes propietats es comproven sense més que fer les multiplicacions corresponents. Per exemple,

$$\mathsf{E}_{2,3}(\alpha)^{-1}\mathsf{E}_{2,3}(-\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

☞ Però el més interessant d'aquesta propietat és que la matriu inversa d'una matriu elemental és la matriu elemental que desfà l'operació elemental que feia la primera: l'operació inversa de sumar a una fila el doble d'una altra és restar a una fila el doble de l'altra; el contrari de multiplicar una fila per 2 és dividir-la per 2; i per neutralitzar la permutació de dues files cal tornar-les a permutar.

☞ Notem que l'algorisme de Gauss-Jordan és admissible, com a mètode per resoldre un sistema d'equacions lineals, precisament perquè les matrius elementals són invertibles.

Del fet que les inverses de les matrius elementals són també matrius elementals podem deduir una nova caracterització de les matrius invertibles.

Propietat 9.6.

La matriu quadrada A és invertible si i només si A és un producte de matrius elementals.

Demostració: Si A és un producte de matrius elementals, llavors A és invertible perquè les matrius elementals ho són. Recíprocament, hem vist adés que si B és la inversa de A, llavors B es pot obtenir com a producte de les matrius elementals que transformen A en la identitat: $\mathsf{B} = \mathsf{E}_p \dots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1$. Llavors,

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}^{-1} = \mathsf{E}_1^{-1}\mathsf{E}_2^{-1} \dots \mathsf{E}_p^{-1}$$

que és un producte de matrius elementals. $\square$

9.4. Teorema de caracterització de les matrius invertibles

Les propietats que una matriu quadrada és invertible si i només si té rang màxim o si i només si és un producte de matrius elementals podem reformular-les de moltes maneres interessants:

Teorema 9.7.

Siga A *una matriu quadrada* $n \times n$. *Totes les afirmacions següents són equivalents:*

1. A *és invertible.*
2. *L'equació matricial* $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$ *és compatible.*
3. *El rang de* A *és* n.
4. *Les files de* A *són linealment independents.*
5. *Les columnes de* A *són linealment independents.*
6. *La forma esglaonada reduïda de* A *és la matriu identitat.*
7. *Per a qualsevol vector* $\vec{b}$ *el sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ *és compatible.*
8. *Per a qualsevol vector* $\vec{b}$ *el sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ *és determinat.*
9. *El sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ *és determinat.*
10. *L'espai nul de* A *és* $\operatorname{Nul}\mathsf{A} = \{\vec{0}\}$.
11. A *és un producte de matrius elementals.* □

De fet, la invertibilitat és tan important en àlgebra lineal que gairebé en totes les lliçons d'aquest curs trobarem noves equivalències del fet que una matriu siga invertible (vegeu-ne una llarga llista a la pàgina 482).

9.5. El determinant d'una matriu 2×2. Càlcul ràpid de la inversa

Si A és una matriu 2×2, hi ha una estratègia molt simple per decidir si aquesta matriu és invertible i, si ho és, per calcular-ne la matriu inversa: si multipliquem les matrius $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ obtindrem

$$\begin{aligned} \mathsf{AB} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El nombre $\det \mathsf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ s'anomena *determinant* de la matriu A. Doncs bé, si suposem que aquest determinant no és igual a zero, tindrem que

$$\mathsf{A}\left(\frac{1}{\det \mathsf{A}}\mathsf{B}\right) = \mathrm{I}$$

així que la matriu A serà invertible i la seua inversa és

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \mathsf{B} = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

En canvi, si el determinant és zero es pot comprovar fàcilment que llavors la matriu A no és invertible. Per tant,

Propietat 9.8.

La matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *és invertible si i només si el seu determinant és no nul. En aquest cas, la inversa de* A *és*

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad \square$$

Així que, per estudiar la invertibilitat i, en cas que siga possible, invertir la matriu A, podem fer el següent:

(a) Calculem el determinant: $\det \mathsf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(b) Si aquest determinant és zero llavors, la matriu no és invertible. En cas contrari, la inversa es calcula intercanviant els dos elements de la diagonal de A, multiplicant per -1 els altres dos elements de la matriu i, finalment, dividint pel determinant.

Exemple 9.4.

Estudieu si la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ és invertible i, si ho és, calculeu la matriu inversa A^{-1}.

El determinant de A és $\det \mathsf{A} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$, així que A és invertible. La matriu inversa és aquesta: $\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. $\square$

9.6. Resum

Matrius invertibles

- Una matriu quadrada A és *invertible* si i només si existeix una matriu B amb $\mathsf{AB} = \mathrm{I}$.

☞ La matriu, $n \times n$, A és *invertible* si i només rang $\mathsf{A} = n$.

- Si A és invertible llavors, la *inversa* de A és l'única matriu A^{-1} per a la qual $\mathsf{AA}^{-1} = \mathrm{I}$.

Càlcul de la inversa

$$\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\mathrm{I} \mid \mathsf{A}^{-1}\right]$$

Propietats Si A és invertible llavors,

- $\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathrm{I}$
- $\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathsf{A}$
- A i A^{-1} són productes de matrius elementals.

Inversa del producte

- $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$ és invertible si i només si A_1 i A_2 són invertibles i $(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)^{-1} = \mathsf{A}_2^{-1}\mathsf{A}_1^{-1}$.
- Si $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_p$ són invertibles llavors $\left(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 \ldots \mathsf{A}_p\right)^{-1} = \mathsf{A}_p^{-1} \ldots \mathsf{A}_2^{-1}\mathsf{A}_1^{-1}$.

Inverses de les matrius elementals

$$\mathsf{E}_{i,j}^{-1} = \mathsf{E}_{i,j} \quad \mathsf{E}_i(\alpha)^{-1} = \mathsf{E}_i(1/\alpha) \quad \mathsf{E}_{i,j}(\alpha)^{-1} = \mathsf{E}_{i,j}(-\alpha)$$

Caracteritzacions
Si A és una matriu quadrada $n \times n$, totes les afirmacions següents són equivalents:

1. A és invertible.
2. $\boxed{\operatorname{rang} \mathsf{A} = n}$
3. La forma esglaonada reduïda de A és la matriu identitat.
4. Existeix B amb $\mathsf{AB} = \mathrm{I}$.
5. Existeix B amb $\mathsf{BA} = \mathrm{I}$.
6. A és producte de matrius elementals.
7. Les files de A són linealment independents.
8. Les columnes de A són linealment independents.
9. L'equació matricial $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$ és compatible.
10. Per a qualsevol vector $\vec{b}$ el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és determinat.
11. El sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ és determinat.
12. $\operatorname{Nul} \mathsf{A} = \{\vec{0}\}$.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

El determinant d'una matriu 2×2

- El determinant de la matriu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ és el nombre $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- A és invertible $\iff \det A \neq 0$. A més a més, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

9.7. Exercicis

Exercici 9.1. Determineu si les matrius següents són invertibles i, en cas que ho siguen, calculeu la inversa i escriviu les matrius com a producte de matrius elementals.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(j) $M = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ (k) $N = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$ (l) $P = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 546)

Exercici 9.2. Calculeu la inversa, si existeix, de la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 549)

Exercici 9.3. Sense fer cap càlcul digueu quina és la matriu inversa de la matriu
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(solució: pàg. 550)

Exercici 9.4. Sabent que les matrius A i B són invertibles, aïlleu la matriu X en l'expressió
$$BA^2XB = C - 2I$$

(solució: pàg. 550)

EXERCICI 9.5. Proveu que si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ aleshores $\mathsf{A}^3 - 8\mathsf{A} - 32\mathrm{I} = \mathrm{O}$ i utilitzeu aquest resultat per a calcular la matriu inversa A^{-1}.

(solució: pàg. 550)

EXERCICI 9.6. Proveu que si el determinant d'una matriu 2×2 és igual a zero llavors, aquesta matriu no és invertible.

(solució: pàg. 551)

EXERCICI 9.7. (Càlcul ràpid de la inversa d'una matriu 2×2) Feu servir el determinant per calcular inverses, si existeixen, de les matrius 2×2 de l'exercici 9.1.

(solució: pàg. 551)

EXERCICI 9.8. (Inverses laterals) Si A és una matriu $m \times n$ i B és una matriu $n \times m$ direm que B és una *inversa dreta* de A si $\mathsf{AB} = \mathrm{I}$. De la mateixa manera, direm que B és una *inversa esquerra* de A si $\mathsf{BA} = \mathrm{I}$.

(a) Quina condició s'ha de complir perquè la matriu A tinga alguna inversa dreta?

(b) Quina condició s'ha de complir perquè la inversa dreta de la matriu A siga única?

(c) Quina condició s'ha de complir perquè la matriu A tinga alguna inversa esquerra?

(d) Quina condició s'ha de complir perquè la inversa esquerra de la matriu A siga única?

(e) Quines condicions s'han de complir perquè la matriu A tinga inverses pels dos costats?

(solució: pàg. 552)

EXERCICI 9.9. Calculeu totes les matrius inverses esquerres i/o dretes, en cas que existisquen, de les matrius següents:

$$\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 552)

Lliçó 10. Transposició i conjugació. Matrius hermítiques i matrius unitàries

It's always good to take an orthogonal view of something.
It develops ideas
Ken Thompson

En aquesta lliçó introduïm dues operacions amb matrius: la transposició i la conjugació (en el sentit de la conjugació de nombres complexos). Aquestes operacions són importants per la seua relació amb el producte escalar. Per això, les matrius hermítiques i les matrius unitàries, que es defineixen a partir d'aquestes operacions, tenen molta importància en tots els problemes relacionats amb la geometria de $\mathbb{K}^n$.

Les matrius unitàries, és a dir les matrius quadrades les columnes de les quals són ortonormals, representen les transformacions lineals que conserven angles i distàncies.
Les matrius simètriques i hermítiques també tenen molta importància, perquè apareixen en força aplicacions pràctiques (i també associades amb les matrius unitàries quan es diagonalitzen).
Al llarg del curs, trobarem les aplicacions d'aquests tipus de matrius a la solució dels problemes de mínims quadrats, la diagonalització de les matrius normals i la factorització en valors i vectors singulars.

10.1. La matriu transposada. Matrius simètriques i matrius ortogonals

Transposar una matriu és canviar les seues files per columnes: construir una nova matriu les files de la qual són les columnes de la primera. La transposada de la matriu A la representem com A^T.

Per exemple, la matriu transposada de $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ és $\mathsf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

És evident que si A és una matriu $m \times n$, aleshores A^T serà una matriu $n \times m$. En particular, la matriu transposada d'un vector és una matriu fila, i la matriu transposada d'una matriu quadrada també és quadrada.

El rang de la matriu transposada coincideix amb el de la matriu original:

Propietat 10.1.

Per a qualsevol matriu A, $\operatorname{rang} \mathsf{A}^\mathsf{T} = \operatorname{rang} \mathsf{A}$.

Demostració: L'únic que hem de fer, per demostrar-ho, és recordar que el rang es pot interpretar, bé com el nombre de files linealment independents que té la matriu, bé com el de columnes linealment independents. Però com que les files de A^T són les columnes de A, és clar que:

$$\begin{aligned}\operatorname{rang}\mathsf{A}^\mathsf{T} &= \text{nombre de files independents de } \mathsf{A}^\mathsf{T}\\ &= \text{nombre de columnes independents de } \mathsf{A} = \operatorname{rang}\mathsf{A} \quad \square\end{aligned}$$

L'*operació* de transposar commuta amb la de sumar o multiplicar per un escalar (és a dir, que la suma de les transposades és la transposada de la suma i la transposada del producte d'un escalar per una matriu és el producte de l'escalar per la transposada de la matriu). En canvi, amb el producte *s'inverteix l'ordre*. Tot això es pot provar molt fàcilment.

PROPIETATS 10.2.

1. *La transposada de la suma és la suma de les transposades:* $(\mathsf{A}+\mathsf{B})^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T} + \mathsf{B}^\mathsf{T}$.
2. *La transposada del producte per un escalar és el producte de la transposada per l'escalar:* $(\alpha\mathsf{A})^\mathsf{T} = \alpha\mathsf{A}^\mathsf{T}$.
3. *La transposada del producte és el producte de les transposades en l'ordre contrari:*
$(\mathsf{AB})^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T} \quad \square$.

Finalment, l'*operació* d'invertir una matriu també commuta amb la transposició.

PROPIETAT 10.3.

Si A *és una matriu invertible, llavors la seua transposada també és invertible i la inversa de la transposada és la transposada de la inversa:* $\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}$.

Demostració: Per a provar-ho, multipliquem A^T per $\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}$ i recordem que la transposada del producte és igual al producte de les transposades en ordre contrari:

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T} = \left(\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}\right)^\mathsf{T} = \mathrm{I}^\mathsf{T} = \mathrm{I} \quad \square$$

10.1.1. MATRIUS SIMÈTRIQUES I MATRIUS ANTISIMÈTRIQUES

Una matriu A és *simètrica* si $\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}$. Per exemple, les matrius

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \mathrm{e}^3 \\ 2 & 0 & -1 \\ \mathrm{e}^3 & -1 & \pi \end{bmatrix}$$

són simètriques. S'anomenen d'aquesta manera perquè s'hi observa una simetria respecte a la diagonal principal (tècnicament, $a_{ij} = a_{ji}$, per a tots els índexs i i j).

☞ Les matrius simètriques són sempre matrius quadrades.

Propietats 10.4.

1. *Si* A *i* B *són simètriques, llavors* $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ *també és simètrica.*
2. *Si* A *és simètrica i* α *és un escalar, llavors* $\alpha\mathsf{A}$ *també és simètrica.*
3. *Si* A *i* B *són simètriques, llavors* AB *és simètrica si i només si* A *i* B *commuten entre elles (és a dir, si* $\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$*) .*
4. *Si* A *és una matriu invertible i simètrica, llavors la seua inversa també és simètrica.* □

☞ Fixeu-vos bé en el cas del producte: perquè el producte de dues matrius simètriques siga una matriu simètrica cal que aquestes dues matrius commuten.

Una matriu A és *antisimètrica* si $\mathsf{A}^\mathsf{T} = -\mathsf{A}$. Per exemple, les matrius

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -\mathrm{e}^3 \\ -2 & 0 & 1 \\ \mathrm{e}^3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

són antisimètriques. Element a element, la condició perquè la matriu A siga antisimètrica és que $a_{ij} = -a_{ji}$, per a tots els índexs i i j. Observem que la diagonal de les matrius antisimètriques és sempre nul·la, perquè $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$.

10.1.2. La matriu $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ i el producte escalar real

Fent servir la transposició de matrius, podem reinterpretar el producte escalar de dos vectors reals $\vec{u}$ i $\vec{v}$ com un producte de dues matrius, perquè

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix} = \vec{u}^\mathsf{T} \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \vec{u}^\mathsf{T} \vec{v}}$$

De manera més general, si A és una matriu real, quan multipliquem A^T per A estem fent els productes escalars de les files de A^T per les columnes de A; però les files de A^T són les columnes de A, així que la multiplicació $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ conté tots els productes escalars entre les columnes de A,

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^\mathsf{T} \\ \vec{a}_2^\mathsf{T} \\ \cdots \\ \vec{a}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n \\ \cdots & & & \\ \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

per aquest motiu, en tots els problemes amb vectors i matrius reals que tenen relació amb el producte escalar (ortogonalitat, projeccions, distàncies, angles, valors singulars...) sempre cal treballar amb aquesta matriu.

Més endavant estudiarem les propietats de la matriu $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$. De moment, observarem que és una matriu simètrica, perquè

$$\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$$

i la farem servir per definir les matrius ortogonals.

10.1.3. Matrius ortogonals

Una matriu quadrada real Q és *ortogonal* si $\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q} = \mathrm{I}$, és a dir, si és invertible i la inversa de Q és la transposada Q^T. Per exemple, la matriu identitat és ortogonal, perquè $\mathrm{I}^\mathsf{T}\mathrm{I} = \mathrm{I}\,\mathrm{I} = \mathrm{I}$, i la matriu

$$\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

també és ortogonal, perquè

$$\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquestes matrius s'anomenen *ortogonals*, perquè el conjunt de les seues columnes és ortonormal:[1] com que $\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q}$ conté tots els productes escalars entre les columnes de Q, si aquest producte és la identitat,

$$\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1\cdot\vec{q}_1 & \vec{q}_1\cdot\vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_1\cdot\vec{q}_n \\ \vec{q}_2\cdot\vec{q}_1 & \vec{q}_2\cdot\vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_2\cdot\vec{q}_n \\ \cdots & & & \\ \vec{q}_n\cdot\vec{q}_1 & \vec{q}_n\cdot\vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_n\cdot\vec{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

llavors la diagonal d'uns indica que totes les columnes són vectors unitaris i la resta d'entrades (zeros) que són mútuament ortogonals.

Propietat 10.5.

Una matriu quadrada real és ortogonal si i només si les seues columnes formen un conjunt ortonormal de vectors. □

D'altra banda, la multiplicació $\mathsf{Q}\mathsf{Q}^\mathsf{T}$ conté els productes escalars entre les files de Q, així que les files de les matrius ortogonals també són ortonormals.

[1] Recordeu que un conjunt de vectors és ortonormal si tots són unitaris i cadascun dels vectors és ortogonal a tots els altres.

Les matrius ortogonals són interessants per molts motius, especialment per les seues aplicacions geomètriques. Vegem-ne algunes.

Primer de tot, podem observar que, si la matriu Q és ortogonal, llavors la resolució del sistema d'equacions lineals $\mathsf{Q}\vec{x} = \vec{b}$ es redueix a una multiplicació:

$$\mathsf{Q}\vec{x} = \vec{b} \iff \mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q}\vec{x} = \mathsf{Q}^\mathsf{T}\vec{b} \iff \vec{x} = \mathsf{Q}^\mathsf{T}\vec{b}$$

Si multipliquem una matriu ortogonal pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, llavors el producte escalar dels nous vectors és el mateix que el dels vectors originals, perquè

$$\mathsf{Q}\vec{u} \cdot \mathsf{Q}\vec{v} = (\mathsf{Q}\vec{u})^\mathsf{T}(\mathsf{Q}\vec{v}) = \vec{u}^{\,t}\mathsf{Q}^t\mathsf{Q}\vec{v} = \vec{u}^{\,t}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Aquesta propietat s'expressa dient que *les matrius ortogonals conserven els productes escalars.* Com a conseqüència d'això, es pot provar fàcilment que aquestes matrius també conserven els angles, les longituds i les distàncies.

10.2. La matriu adjunta

Com que el producte escalar dels vectors complexos $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n = \begin{bmatrix} \overline{u_1} & \overline{u_2} & \cdots & \overline{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

el paper que fa la matriu transposada en el cas real, quan treballem amb matrius complexes el fa la matriu transposada conjugada: la *matriu conjugada* de la matriu A, $\overline{\mathsf{A}}$, és el resultat de canviar cada entrada de la matriu pel complex conjugat corresponent, per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2\mathsf{i} & 3 \\ 4 & 5 - \mathsf{i} & 6 \end{bmatrix}$, la seua matriu conjugada és $\overline{\mathsf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2\mathsf{i} & 3 \\ 4 & 5 + \mathsf{i} & 6 \end{bmatrix}$. Aleshores, la matriu *adjunta* o *transposada conjugada* de A és la matriu $\mathsf{A}^* = \overline{\mathsf{A}^\mathsf{T}}$, que s'obté transposant A i canviant tots els elements pels seus complexos conjugats.

Per exemple, la matriu adjunta de $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2\mathsf{i} & 3 \\ 4 & 5 - \mathsf{i} & 6 \end{bmatrix}$ és $\mathsf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2\mathsf{i} & 5 + \mathsf{i} \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Si A és una matriu $m \times n$, aleshores A^* és una matriu $n \times m$. En particular, la matriu adjunta d'un vector és una matriu fila, i la matriu adjunta d'una matriu quadrada també és quadrada.

PROPIETATS 10.6.

1. *Per a qualsevol matriu* A*,* $\operatorname{rang}\mathsf{A}^* = \operatorname{rang}\mathsf{A}$*.*
2. *L'adjunta de la suma és la suma de les adjuntes:* $(\mathsf{A}+\mathsf{B})^* = \mathsf{A}^* + \mathsf{B}^*$*.*
3. *L'adjunta del producte per un escalar és el producte de la transposada pel conjugat de l'escalar:* $(\alpha\mathsf{A})^* = \overline{\alpha}\mathsf{A}^*$*.*
4. *L'adjunta del producte és el producte de les adjuntes en l'ordre contrari:* $(\mathsf{AB})^* = \mathsf{B}^*\mathsf{A}^*$*.*
5. *Si* A *és una matriu invertible, llavors la seua adjunta també és invertible i la inversa de l'adjunta és l'adjunta de la inversa:* $(\mathsf{A}^*)^{-1} = (\mathsf{A}^{-1})^*$*.*

Demostració: D'aquestes propietats, l'única que no és del tot trivial és la primera. Per demostrar-la, serà suficient que provem que els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p$ són linealment independents si i només si, ho són els conjugats $\overline{\vec{u}_1}, \overline{\vec{u}_2}, \dots \overline{\vec{u}_p}$.

Observem que

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_u\vec{u}_p = \vec{0} \tag{10.1}$$

és equivalent a

$$\begin{aligned}\overline{x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_u\vec{u}_p} &= \overline{\vec{0}}\\ \overline{x_1}\,\overline{\vec{u}_1} + \overline{x_2}\,\overline{\vec{u}_2} + \cdots + \overline{x_u}\,\overline{\vec{u}_p} &= \vec{0}\end{aligned} \tag{10.2}$$

Així que l'equació (10.1) té només la solució nul·la si i només si passa el mateix amb l'equació (10.2).

En conseqüència, el nombre de files linealment independents de la matriu A és el mateix que el nombre de columnes linealment independents de A^*. $\square$

10.2.1. MATRIUS HERMÍTIQUES I MATRIUS ANTIHERMÍTIQUES

Una matriu A és *hermítica* (o *autoadjunta*) si $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$. Per exemple, la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$ és hermítica, perquè $\mathsf{A}^* = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1-\mathrm{i}} \\ \overline{1+\mathrm{i}} & \overline{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix} = \mathsf{A}$.

☞ Les matrius hermítiques són quadrades.

PROPIETATS 10.7.

1. *Si* A *i* B *són hermítiques, llavors* $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ *també és hermítica.*
2. *Si* A *i* B *són hermítiques, llavors* AB *és hermítiques si i només si* A *i* B *commuten entre elles (és a dir, si* $\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$*).*

(...)

(...)

3. *Si* A *és una matriu invertible i hermítica, llavors la seua inversa també és hermítica.*

4. *Una matriu real* A *és hermítica si i només si és simètrica.* □

☞ El producte d'un escalar per una matriu hermítica no té perquè ser una matriu hermítica, perquè, si A és hermítica, $(\alpha \mathsf{A})^* = \overline{\alpha}\mathsf{A}^* = \overline{\alpha}\mathsf{A}$.

Una matriu A és *antihermítica* si $\mathsf{A}^* = -\mathsf{A}$. Per exemple, $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{bmatrix}$ és antihermítica.

10.2.2. La matriu A*A i el producte escalar

Com hem dit en començar aquesta lliçó, en el cas complex, la matriu adjunta generalitza la matriu transposada d'una matriu real, perquè si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors, llavors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{u_1}v_1 \overline{+u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n = \begin{bmatrix} \overline{u_1} & \overline{u_2} & \ldots & \overline{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix} = \vec{u}^*\vec{v}$$

Per això, el producte A*A conté tots els productes escalars entre les columnes de la matriu A:

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^* \\ \vec{a}_2^* \\ \cdots \\ \vec{a}_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_n \\ \cdots & & & \\ \vec{a}_n\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_n \end{bmatrix}$$

☞ La matriu A*A és hermítica, perquè $\left(\mathsf{A}^*\mathsf{A}\right)^* = \mathsf{A}^*\left(\mathsf{A}^*\right)^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$.

10.2.3. Matrius unitàries

Una matriu quadrada U és *unitària* si $\mathsf{U}^*\mathsf{U} = \mathrm{I}$, és a dir, si és invertible i la inversa de U és l'adjunta U^*. En altres paraules, una matriu quadrada és unitària si el conjunt de les seues columnes és ortonormal.

Per exemple, la matriu $\mathsf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}$ és unitària, perquè

$$\mathsf{U}^*\mathsf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

☞ Evidentment, les matrius reals són unitàries quan són ortogonals.

PROPIETATS 10.8.

Les matrius unitàries conserven els productes escalars i les longituds dels vectors, és a dir, que si la matriu U *és unitària, aleshores,*

1. *per a qualsevol parell de vectors* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$, $\mathsf{U}\vec{u} \cdot \mathsf{U}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$;
2. *per a qualsevol vector* $\vec{u}$, $\|\mathsf{U}\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.

Demostració: L'únic que cal provar és que, si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors qualsevulla, llavors $\mathsf{U}\vec{u} \cdot \mathsf{U}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\mathsf{U}\vec{u} \cdot \mathsf{U}\vec{v} = (\mathsf{U}\vec{u})^*(\mathsf{U}\vec{v}) = \vec{u}^* \underbrace{\mathsf{U}^*\mathsf{U}}_{\mathrm{I}} \vec{v} = \vec{u}^*\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \square$$

☞ En conseqüència, les matrius unitàries també conserven les distàncies i els angles.

10.3. RESUM

La matriu transposada
La *matriu transposada de* A, A^T, és la que té per columnes les files de A.

- Els rangs d'una matriu i la seua de la transposada són iguals: $\operatorname{rang} \mathsf{A}^\mathsf{T} = \operatorname{rang} \mathsf{A}$.
- La transposada de la suma és la suma de les transposades: $(\mathsf{A}+\mathsf{B})^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T} + \mathsf{B}^\mathsf{T}$.
- La transposada del producte d'un escalar per una matriu és el producte de l'escalar per la transposada de la matriu: $(\alpha\mathsf{A})^\mathsf{T} = \alpha\mathsf{A}^\mathsf{T}$.
- ☞ La transposada del producte és el producte de les transposades en ordre contrari: $(\mathsf{AB})^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}$.
- Si A és invertible, la inversa de la transposada és la transposada de la inversa: $(\mathsf{A}^{-1})^\mathsf{T} = (\mathsf{A}^\mathsf{T})^{-1}$.

La matriu adjunta
La matriu adjunta A^* és la transposada conjugada de A (el resultat de transposar i canviar totes les entrades pels complexos conjugats): $\mathsf{A}^* = \overline{\mathsf{A}^\mathsf{T}}$

- Els rangs d'una matriu i la de la seua adjunta són iguals: $\operatorname{rang} \mathsf{A}^* = \operatorname{rang} \mathsf{A}$.
- L'adjunta de la suma és la suma de les adjuntes: $(\mathsf{A}+\mathsf{B})^* = \mathsf{A}^* + \mathsf{B}^*$.
- L'adjunta del producte d'un escalar per una matriu és el producte del conjugat de l'escalar per l'adjunta de la matriu: $(\alpha\mathsf{A})^\mathsf{T} = \alpha\mathsf{A}^\mathsf{T}$.
- ☞ L'adjunta del producte és el producte de les adjuntes en ordre contrari: $(\mathsf{AB})^* = \mathsf{B}^*\mathsf{A}^*$.
- Si A és invertible, la inversa de l'adjunta és l'adjunta de la inversa: $(\mathsf{A}^{-1})^* = (\mathsf{A}^*)^{-1}$.

(...)

(...)

Matrius simètriques i antisimètriques

Una matriu A és *simètrica* si $\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}$.

Una matriu A és *antisimètrica* si $\mathsf{A}^\mathsf{T} = -\mathsf{A}$.

- Les matrius simètriques o antisimètriques són quadrades.
- La suma, el producte per un escalar i la inversa de les matrius simètriques també són simètriques.

☞ El producte de matrius simètriques A i B és una matriu simètrica si i només si les matrius commuten.

La matriu $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ (si A és una matriu real)

☞ El producte escalar real és igual a un producte de matrius: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^\mathsf{T}\vec{v}$.

- Si A és una matriu real, les entrades de la matriu $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ són els productes escalars de les columnes de A:

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n \\ \cdots & & & \\ \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

Matrius ortogonals

Una matriu quadrada **real** Q és *ortogonal* si $\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q} = \mathrm{I}$

- Una matriu quadrada Q **real** és ortogonal si i només si la seua inversa és la transposada Q^T.
- Una matriu quadrada Q **real** és ortogonal si i només si les seues columnes són ortonormals.

☞ Les matrius ortogonals conserven normes, angles i distàncies.

Matrius hermítiques i antihermítiques

Una matriu A és *hermítica* si $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$.

Una matriu A és *antihermítica* si $\mathsf{A}^* = -\mathsf{A}$.

- Les matrius hermítiques o antihermítiques són quadrades.
- La suma i la inversa de les matrius hermítiques també són hermítiques (el producte d'un escalar per una matriu hermítica no sempre és una matriu hermítica).

☞ El producte de matrius hermítiques A i B és una matriu hermítica si i només si les matrius commuten.

La matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$

☞ El producte escalar és igual a un producte de matrius: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^*\vec{v}$.

- Les entrades de la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ són els productes escalars de les columnes de A:

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n \\ \cdots & & & \\ \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

Matrius unitàries

Una matriu quadrada U és *unitària* si $\mathsf{U}^*\mathsf{U} = \mathrm{I}$

- Una matriu quadrada U és unitària si i només si la seua inversa és l'adjunta Q^*.
- Una matriu quadrada U és unitària si i només si les seues columnes són ortonormals.

☞ Les matrius unitàries conserven normes i distàncies.

10.4. Exercicis

La matriu transposada i les matrius simètriques i antisimètriques

Exercici 10.1. Proveu que, si A i B són matrius quadrades del mateix ordre i A és simètrica llavors, la matriu $B^T AB + A$ també és simètrica.

(solució: pàg. 554)

Exercici 10.2. Si la matriu A i B, del mateix ordre, són respectivament, simètrica i antisimètrica, què podem dir de $AB + BA$ i de $AB - BA$?

(solució: pàg. 554)

Exercici 10.3. (a) Proveu que la matriu AA^T és una matriu simètrica (per a qualsevol matriu A, no necessàriament quadrada).

(b) Donada la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ calculeu AA^T i $A^T A$ i comproveu que són matrius simètriques distintes.

(c) Si A és una matriu quadrada, és cert que $AA^T = A^T A$?

(solució: pàg. 554)

Exercici 10.4. (a) Proveu que, si A és una matriu quadrada, llavors la matriu $A + A^T$ és una matriu simètrica i que la matriu $A - A^T$ és una matriu antisimètrica.

(b) Proveu que, per a qualsevol matriu A, $A = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2}$.

(en conseqüència, qualsevol matriu quadrada és la suma d'una matriu simètrica i una matriu antisimètrica).

(solució: pàg. 555)

Matrius ortogonals

Exercici 10.5. Proveu que les matrius següents són ortogonals:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 555)

Exercici 10.6. Resoleu el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= -6 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

aprofitant el fet que la matriu B de l'exercici anterior és ortogonal.

(solució: pàg. 556)

Exercici 10.7. Proveu que les matrius de la forma $\mathsf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha+\pi/2) \\ \sin\alpha & \sin(\alpha+\pi/2) \end{bmatrix}$ són ortogonals i interpreteu aquest fet geomètricament.

(solució: pàg. 556)

Exercici 10.8. Una matriu permutació és la matriu que resulta de reordenar arbitràriament les files de la matriu identitat. Per exemple, les matrius

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

són matrius permutació.
(a) Quantes matrius permutació d'ordre n hi ha?
(b) Totes les matrius permutació són elementals?
(c) Proveu que les matrius permutació són ortogonals.

(solució: pàg. 557)

Exercici 10.9. Proveu que si Q és una matriu ortogonal, llavors,
(a) la norma del vector $\mathsf{Q}\vec{u}$ coincideix amb la norma de $\vec{u}$,
(b) l'angle entre els vectors $\mathsf{Q}\vec{u}$ i $\mathsf{Q}\vec{v}$ és el mateix que el que hi ha entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$,
(c) la distància entre els vectors $\mathsf{Q}\vec{u}$ i $\mathsf{Q}\vec{v}$ és igual a la distància entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

(solució: pàg. 557)

Matrius hermítiques, matrius antihermítiques i matrius unitàries

Exercici 10.10. Proveu que la matriu $\mathsf{U} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix}$ és simètrica, antihermítica i unitària.

(solució: pàg. 558)

Exercici 10.11. Suposem que B i C són les parts real i imaginària de A, respectivament (és a dir, B i C són reals i $\mathsf{A} = \mathsf{B} + \mathrm{i}\mathsf{C}$). Proveu les propietats següents:
(a) Si la matriu A és hermítica llavors, B és simètrica i C és antisimètrica.
(b) Si la matriu A és hermítica llavors, la diagonal de A és real.
(c) Si la matriu A és antihermítica si i només si $\mathrm{i}\mathsf{A}$ és hermítica.
(d) Si A és antihermítica llavors, els elements de la diagonal de A són imaginaris purs.
(e) Si A és antihermítica llavors, B és antisimètrica i C és simètrica.

(solució: pàg. 558)

Exercici 10.12. Proveu que el producte de dues matrius unitàries també és una matriu unitària.

(solució: pàg. 559)

Lliçó 11. Matrius triangulars. Factoritzacions LU

A number of the methods for the solution of equations and, more particularly, for the inversion of matrices, depend on the resolution of a matrix into the product of two triangular matrices

Alan Turing

En aquesta unitat dediquem una mica d'atenció a la factorització LU, que és la interpretació matricial de l'algorisme de Gauss i la base d'algun dels mètodes directes més habituals en l'àlgebra lineal numèrica.

11.1. Matrius diagonals i matrius triangulars

Les matrius diagonals són les més senzilles, almenys des del punt de vista de la facilitat amb què es treballa: normalment, qualsevol propietat és immediata i qualsevol problema es resol sense cap dificultat, si treballem amb una matriu diagonal.

La *diagonal principal* d'una matriu $m \times n$ és la formada pels elements a_{11}, a_{22}, …

Definició 11.1.

Una matriu quadrada A és *diagonal* si tots els elements que no es troben a la diagonal principal són nuls.

És a dir, que la matriu A és diagonal si té aquesta forma:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Per exemple, les matrius següents són diagonals:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com dèiem abans, tots els problemes amb matrius són trivials, si la matriu és diagonal: per exemple, el rang d'una matriu diagonal és el nombre d'entrades no nul·les a la seua diagonal, i la inversa de la matriu diagonal A existeix si no hi ha cap zero a la diagonal i, llavors,

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

D'altra banda, la suma i el producte de dues matrius diagonals i la multiplicació d'una matriu diagonal per un escalar són matrius diagonals. Si la matriu d'un sistema d'equacions lineals és diagonal, llavors el podem resoldre molt fàcilment, perquè cada equació conté, com a molt, una incògnita:

$$\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{b} \iff \begin{array}{c} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \\ \cdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Si la matriu A és triangular, les coses ja no són trivials, però continuen sent bastant simples.

Definició 11.2.

Una matriu quadrada és *triangular superior* si tots els elements que es troben davall la diagonal principal són nuls.

És a dir, que la matriu A és triangular superior si té aquesta forma:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Totes les matrius diagonals són triangulars superiors; però és clar que n'hi ha, de triangulars superiors, que no són diagonals. Com ara, aquestes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

És fàcil veure que una matriu triangular superior serà invertible si no té cap zero a la diagonal; però ara el càlcul de la inversa requereix una mica de treball.

Exemple 11.1.

Calculeu la matriu inversa de

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Per tal de calcular la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada, $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$, només hem de fer els passos finals de l'algorisme de Gauss-Jordan, perquè la matriu ja és esglaonada:

$$\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}(2/3)\mathsf{E}_{2,3}(-1/3)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(1/2)\mathsf{E}_{3}(-1/3)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right]$$

així que, $\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$. □

☞ La inversió d'una matriu invertible i triangular superior es redueix a la fase final de l'algorisme de Gauss-Jordan, perquè la matriu ja és, d'antuvi, esglaonada.

De la mateixa manera, si la matriu d'un sistema d'equacions lineals és triangular superior, normalment podrem resoldre'l fent servir únicament l'algorisme de substitució regressiva.

Definició 11.3.

Una matriu quadrada és *triangular inferior* si tots els elements que es troben per damunt de la diagonal principal són nuls.

És a dir, que la matriu A és triangular inferior si té aquesta forma:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

I les propietats d'aquestes matrius són anàlogues a les de les matrius triangulars superiors.

11.2. La factorització LU

Gairebé tots els problemes de l'àlgebra lineal que es tracten amb matrius poden interpretar-se en termes de *factoritzacions* de matrius. Ja hem vist que l'esglaonament i tot allò que s'hi relaciona, com ara, els algorismes del tipus Gauss-Jordan, es poden interpretar com un producte de dues matrius. La factorització LU n'és un cas particular.

DEFINICIÓ 11.4.

Una *factorització* LU *estricta* de la matriu quadrada A és la descomposició d'aquesta matriu com un producte $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ on

(a) L és una matriu triangular inferior.

(b) Totes les entrades de la diagonal principal de L són iguals a 1.

(c) U és una matriu triangular superior.

Per exemple,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

és una factorització LU estricta.[1]

Hi ha matrius quadrades que no admeten una factorització LU estricta (és a dir, que no es poden escriure com a producte d'una matriu triangular inferior per una de triangular superior). Per exemple, la matriu $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ no té cap factorització LU estricta, perquè, si en tinguera,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}$$

i, llavors tindríem $u_{11} = 0$ i $1 = l_{21}u_{11} = 0$.

Per tal de determinar si existeix la factorització, i calcular-la, notem que, si existeix, la matriu L és sempre invertible, (perquè és triangular inferior i no té zeros a la diagonal); en conseqüència, si la matriu A admet una factorització LU, llavors L és un producte de matrius elementals. En altres paraules,

☞ La factorització LU estricta, si existeix, es pot obtenir fent servir l'algorisme de Gauss.

EXEMPLE 11.2.

Trobeu, si és possible, una factorització LU estricta de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

[1] El nom «LU» fa referència al fet que L és una matriu triangular inferior (***L**ower triangular matrix*) i U és triangular superior (***U**pper triangular matrix*).

Apliquem-hi l'algorisme de Gauss:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-2)\mathsf{E}_{2,1}(1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Si anomenem U aquesta matriu darrera tindrem

$$\mathsf{E}_{3,2}(-1)\mathsf{E}_{3,1}(-2)\mathsf{E}_{2,1}(1)\mathsf{A} = \mathsf{U}$$

o bé,

$$\mathsf{A} = \mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{E}_{3,1}(2)\mathsf{E}_{3,2}(1)\mathsf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}} \qquad \square$$

Aquest exemple ha funcionat correctament perquè només hem fet operacions elementals del tipus reducció, $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ amb $j > i$ (a una fila li sumem un múltiple d'una fila *anterior* a ella); com que aquestes matrius són totes triangulars inferiors amb només uns a la diagonal, el seu producte també té aquestes característiques. De fet, aquesta és la clau perquè puguem trobar una factorització LU estricta:

☞ La condició que s'ha de complir perquè la matriu A admeta una factorització LU estricta és que siga possible transformar la matriu A en triangular superior aplicant-hi l'algorisme de Gauss i fent únicament operacions elementals del tipus reducció $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ amb $j > i$ (sumar a una fila un múltiple d'una altra fila *anterior*).

L'exemple següent confirmarà aquesta condició.

EXEMPLE 11.3.

Trobeu, si és possible, una factorització LU estricta de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Com en l'exemple anterior, aplicarem l'algorisme de Gauss. En primer lloc, fem zeros en la primera columna:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-2)\mathsf{E}_{2,1}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

i ja no podem continuar esglaonant si no és que permutem les files segona i tercera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$

D'aquesta manera hem aconseguit trobar una matriu U triangular superior que és equivalent per files a A, i no hi ha cap dificultat per a trobar la matriu L que transforma A en U: Com que $\mathsf{E}_{2,3}\mathsf{E}_{3,1}(-2)\mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{A} = \mathsf{U}$, $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$, on

$$\mathsf{L} = \mathsf{E}_{2,1}(1)\mathsf{E}_{3,1}(2)\mathsf{E}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

però *aquesta matriu* L *no és triangular inferior* (perquè la matriu $\mathsf{E}_{2,3}$ no ho és; en realitat, L és el resultat de permutar les files d'una matriu triangular inferior). En conseqüència, la matriu A no admet una factorització LU estricta. Tot i això, als efectes pràctics, aquesta factorització és igualment útil.

Definició 11.5.

Una *factorització* LU (no estricta) de la matriu quadrada A és la descomposició d'aquesta matriu com un producte $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ on

(a) L és una permutació de les files d'una matriu triangular inferior que té totes les entrades de la diagonal principal iguals a 1.

(b) U és una matriu triangular superior.

☞ En aquest sentit més ampli, qualsevol matriu quadrada admet una factorització LU; que en aquesta factorització la matriu L siga o no triangular depén del fet que es puga o no aplicar el mètode de Gauss sense permutar files.[2]

11.2.1. Aplicació de la factorització LU a la resolució de sistemes lineals

Si hem de resoldre el sistema de n equacions lineals amb n incògnites $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ i coneixem una factorització LU de A, podrem escriure el sistema en la forma $\mathsf{LU}\vec{x} = \vec{b}$ o, com que L és invertible, $\mathsf{U}\vec{x} = \mathsf{L}^{-1}\vec{b}$. Llavors, fent el canvi $\mathsf{L}^{-1}\vec{b} = \vec{y}$ ($\vec{b} = \mathsf{L}\vec{y}$) i el sistema es transforma en $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$:

$$\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b} \iff \mathsf{LU}\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{cases} \mathsf{L}\vec{y} = \vec{b} \\ \mathsf{U}\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

així que podem procedir de la manera següent:

Resolució del sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ a partir de $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$

1. Resoleu el sistema $\mathsf{L}\vec{y} = \vec{b}$.
2. Substituïu la solució que hem obtingut en $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$ i resolem aquest nou sistema d'equacions.

[2] Els autors més estrictes només admeten, lògicament, la factorització LU estricta.

Exemple 11.4.

Feu servir la factorització LU per a resoldre el sistema d'equacios lineals

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

En l'exemple 11.2 hem calculat aquesta factorització LU de la matriu del sistema:

$$\mathsf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}}$$

de manera que resoldrem successivament els sistemes $\mathsf{L}\vec{y} = (0, 1, 4)$ i $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 1 + y_1 \\ y_3 &= 4 - 2y_1 - y_2 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 1 \\ y_3 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - x_3 \\ 2x_2 &= 1 + x_3 \\ -3x_3 &= 3 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned} \right\} \qquad \square$$

Notem que el fet que les dues matrius L i U siguen triangulars permet resoldre els dos sistemes amb molt poc esforç (simplement hi apliquem un algorisme de substitució *progressiva* i un altre de substitució regressiva).

Exemple 11.5.

Feu servir la factorització LU per a resoldre el sistema d'equacions lineals

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aquesta matriu és la de l'exemple 11.3, que no admet una factorització LU estricta. La factorització que hem trobat és aquesta:

$$\mathsf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}}$$

Fent servir la mateixa tècnica, començarem per resoldre el sistema $\mathsf{L}\vec{y} = (1,1,0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & & = 1 \\ y_1 & + y_3 & = 1 \\ 2y_1 + y_2 & & = 0 \end{array} \right\}$$

Aquest sistema no és pròpiament triangular; però, com que la matriu L és una permutació d'una matriu triangular inferior, podem reordenar les equacions perquè ho siga:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & & = 1 \\ 2y_1 + y_2 & & = 0 \\ y_1 & + y_3 & = 1 \end{array}$$

i el podem resoldre també per substitució progressiva:

$$\left. \begin{array}{rcl} y_1 & & = 1 \\ 2y_1 + y_2 & & = 0 \\ y_1 & + y_3 & = 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -2y_1 \\ y_3 = 1 - y_1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Finalment, resolem el sistema $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_2 = -2 + 4x_3 \\ -4x_3 = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \square$$

11.3. Operacions elementals per columnes

Fins aquest moment, únicament hem fet operacions elementals sobre les files de les matrius. Però és clar que també podem fer-les amb les columnes.[3] Doncs bé, les operacions elementals per columnes són equivalents a multiplicacions per matrius elementals (per la dreta).

Propietats 11.1. (Operacions elementals per columnes)

1. *Multiplicar una matriu* A *per la matriu elemental* $\mathsf{E}_{i,j}$ *és equivalent a intercanviar les columnes* i *i* j *de* A.
2. *Multiplicar una matriu* A *per la matriu elemental* $\mathsf{E}_i(\alpha)$ *és equivalent a multiplicar la columna* i *de* A *per* α.
3. *Multiplicar una matriu* A *per la matriu elemental* $\mathsf{E}_{j,i}(\alpha)$ *és equivalent a sumar a la columna* i *de* A α *vegades la columna* j. $\square$

[3]En moltes aplicacions, com ara, el càlcul del rang d'una matriu, el càlcul del determinant, les factoritzacions QR o, com farem de seguida, en el càlcul de les factoritzacions LU, es poden fer servir les operacions elementals per columnes.

☞ La matriu que suma a la columna i de A α vegades la columna j *no és* $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ *sinó* $\mathsf{E}_{j,i}(\alpha)$. Aquesta és l'única diferència amb el cas de les operacions elementals per files.

11.4. Càlcul simultani de les matrius U i L

Com ja sabem, sempre que transformem una matriu A en una altra matriu B fent-hi operacions elementals per files, hi ha una matriu invertible T de manera que $\mathsf{TA} = \mathsf{B}$; aquesta matriu és el producte de les matrius elementals que fem servir en passar de A a B, i la manera més senzilla de trobar-la consisteix a fer sobre la identitat les mateixes operacions elementals que fem sobre A.

En el cas de la factorització LU, transformem A en U, així que existeix una matriu T de manera que $\mathsf{TA} = \mathsf{U}$, però el que ens interessa en realitat és la matriu inversa $\mathsf{L} = \mathsf{T}^{-1}$. Això vol dir que el càlcul de U i L requereix aquests dos processos d'esglaonament:

(a) Càlcul de les matrius U i T, aplicant a la identitat les mateixes operacions elementals que a A. Esquemàticament,

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathsf{U} & \mathsf{T} \end{bmatrix}$$

(b) Inversió de T. La manera més eficient és aquesta:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{T} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathsf{L} \end{bmatrix}$$

El que farem ací serà veure com calcular simultàniament les matrius U i L, sense passar per la matriu T. Observem que, si l'algorisme de Gauss transforma A en U premultiplicant-hi les matrius elementals E_1, E_2, …, E_p, és a dir, si $\mathsf{E}_p \cdots \mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathsf{A} = \mathsf{U}$ llavors, $\mathsf{L} = \mathsf{E}_1^{-1}\mathsf{E}_2^{-1} \cdots \mathsf{E}_p^{-1}$ o, també, $\mathsf{L} = \mathrm{I}\mathsf{E}_1^{-1}\mathsf{E}_2^{-1} \cdots \mathsf{E}_p^{-1}$.

Això vol dir que la matriu L es pot obtenir partint de la identitat i multiplicant a la dreta les matrius elementals inverses de les que multipliquem per A a l'esquerra.

$$\mathsf{A} \xrightarrow{\mathsf{E}_1\cdot} \xrightarrow{\mathsf{E}_2\cdot} \cdots \xrightarrow{\mathsf{E}_p\cdot} \mathsf{U}$$

$$\mathrm{I} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_1^{-1}} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_2^{-1}} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_p^{-1}} \mathsf{L}$$

És a dir, fent amb les columnes de la identitat les operacions inverses de les que fem amb les files de A. De manera més general: si la matriu B s'obté a partir de A fent-hi operacions elementals per files, aleshores $\mathsf{A} = \mathsf{LB}$, on la matriu L és el resultat de fer sobre les columnes de la identitat les operacions inverses de les que fem amb les files de A.

Factorització LU. Càlcul pràctic
Aquest algorisme calcula una factorització LU de la matriu $n \times n$ A

Apliqueu l'algorisme de Gauss a la matriu A per convertir-la en triangular superior, fent simultàniament les operacions elementals per columnes següents sobre la matriu I:

- Cada vegada que a la fila i de la primera matriu li sumeu α per la fila j, resteu a la columna j de la segona matriu α per la columna i.
- Cada vegada que multipliqueu la fila i de la primera matriu per α, heu de dividir per α la columna i de la segona.
- Si intercanvieu les files i i j de la primera matriu, llavors cal que intercanvieu les columnes i i j de la segona.

☞ Un algorisme anàleg es pot fer servir, amb una matriu A qualsevol, per obtenir una factorització $\mathsf{A} = \mathsf{LR}$, on R és la forma esglaonada reduïda de A.

EXEMPLE 11.6.

Trobeu una factorització LU de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Apliquem l'algorisme de Gauss per a transformar A en triangular superior, fent simultàniament les operacions inverses sobre les columnes de la identitat:

☞ Restem la primera fila de la matriu A a la segona:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

☞ Sumem la segona columna de la matriu A a la primera:

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☞ Restem la primera fila a la tercera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

☞ Sumem la tercera columna a la primera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{3,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☞ Permutem les files segona i tercera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

☞ Permutem les columnes segona i tercera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{2,3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En conseqüència, si $\mathsf{U} = \mathsf{E}_{2,3}\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
i $\mathsf{L} = \mathsf{E}_{2,1}(1)\mathsf{E}_{3,1}(1)\mathsf{E}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ llavors, $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$, perquè

$$\mathsf{LU} = \mathsf{E}_{2,1}(1)\mathsf{E}_{3,1}(1)\mathsf{E}_{2,3}\mathsf{E}_{2,3}\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{A} = \mathsf{A} \quad \square$$

11.5. Pivotatge parcial

En teoria, la combinació de l'algorisme de Gauss amb el de substitució regressiva ens proporciona la solució exacta de qualsevol sistema lineal. Tot i això, quan el sistema es resol amb l'ajut d'un ordinador (que és l'única manera raonable de resoldre'l, si no és que es tracta d'un sistema amb molt poques equacions i incògnites) es poden produir alguns errors d'arrodoniment en els càlculs o en l'emmagatzematge de les variables; aquests errors es transmeten als càlculs posteriors i de vegades un petit error en un càlcul intermedi pot acabar produint un error inadmissible en el resultat final.

Per exemple, considerem el sistema lineal

$$\begin{aligned} 0{,}0001x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

La matriu dels coeficents d'aquest sistema és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i podem obtenir-ne una factorització LU fent-hi una sola operació elemental:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-10\,000)\cdot} \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 \\ 0 & -9\,999 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$
$$\mathsf{L} = \mathsf{E}_{2,1}(10\,000) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10\,000 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolem el sistema $\mathsf{L}\vec{y} = (1,2)$ per substitució progressiva,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ 10\,000y_1 + y_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 2 - 10\,000y_1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= -9\,998 \end{aligned}$$

i el sistema $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$ per substitució regressiva,

$$\left.\begin{aligned} 0{,}0001x_1 + x_2 &= 1 \\ -9\,999x_2 &= -9\,998 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 10\,000(1 - x_2) \\ x_2 &= 9\,998/9\,999 \end{aligned}\right\}$$

és a dir, $x_1 = 1,\overset{\frown}{0001}$, $x_2 = 0,\overset{\frown}{9998}$, i hem obtingut la solució exacta sense cap dificultat.

Ara bé, si fem servir una màquina que només pot treballar amb tres xifres significatives i arrodoneix els resultats, en resoldre el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 10\,000(1 - x_2) \\ x_2 &= 9\,998/9\,999 \end{aligned}$$

en comptes de $x_2 = 1,\overparen{0001}$ obtindrem $x_2 = 1$ i, en calcular x_1 tindrem $x_1 = 10\,000(1 - x_2) = 0$, de manera que l'error d'arrodoniment en x_2 es multiplica per 10 000 en un sol pas.

Evidentment, aquest problema deriva del fet que les magnituds dels coeficients del sistema són d'ordres molt distints, i que hem multiplicat x_2 per un nombre molt gran; llavors, com que l'error en x_2 era $\epsilon = 1 - x_2 \approx 0{,}0001$, en calcular x_1,

$$x_1 = 10\,000(1 - x_2) = 10\,000(1 - (1 - \epsilon)) = 10\,000\epsilon \approx 1$$

Per minimitzar els efectes de la transmissió de l'error, és convenient de fer servir l'algorisme de Gauss amb l'estratègia del *pivotatge parcial*, que consisteix a elegir en cada pas el pivot més gran (en valor absolut) entre tots els possibles. Els sistemes informàtics de càlcul numèric matricial fan servir normalment aquesta estratègia sempre que fan operacions d'esglaonament.

En el nostre exemple, a l'hora d'obtenir la descomposició LU, elegiríem la segona fila com a fila pivot:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}0001 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-0{,}0001)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0{,}9999 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$

$$\mathsf{L} = \mathsf{E}_{2,1}\mathsf{E}_{2,1}(0{,}0001) = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Però la nostra màquina només aprecia tres xifres significatives, així que obtindrà

$$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{L} = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

En resoldre el sistema $\mathsf{L}\vec{y} = (1, 2)$ obtindrem $y_1 = 2, y_2 = 1 - 0{,}0002 \approx 1$, que substituïts en $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$ ens donen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i obtindrem la solució aproximada $x_1 = 1,\ x_2 = 1$. Ara l'error d'arrodoniment no s'ha incrementat i hem obtingut un resultat bastant més admissible.

Com hem dit adés, els programes de càlcul numèric matricial avançats apliquen la tècnica del pivotatge parcial sempre que han de fer servir l'algorisme de Gauss. Per això, quan aquests programes calculen una factorització LU, elegeixen sistemàticament els pivots més adequats, de manera que les matrius L que obtenen gairebé mai no són triangulars. Per exemple, en el cas de la matriu A de l'exemple 11.2, el procés seria el següent:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}\cdot} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(intercanviem les files 1a i 3a, per tal de fer servir el millor pivot)

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1/2)\mathsf{E}_{2,1}(1/2)\cdot} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ara no cal intercanviar files, perquè el pivot és l'adequat)

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1/3)\cdot} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$

Per tal d'obtenir la matriu L, fem les operacions inverses (per columnes) sobre la matriu identitat:

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{1,3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{2,1}(-1/2)\mathsf{E}_{3,1}(1/2)} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{3,2}(-1/3)} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/3 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{L}$$

11.6. Resum

Matrius diagonals i matrius triangulars

Una matriu quadrada $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ és

- *diagonal* si tots els elements a fora de la diagonal principal són zeros:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *triangular superior* si tots els elements davall la diagonal principal són zeros:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *triangular inferior* si tots els elements damunt la diagonal principal són zeros:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Factoritzacions LU

Una *factorització* LU *estricta* de la matriu quadrada A és la descomposició $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ on

1. L és una matriu triangular inferior.
2. Totes les entrades de la diagonal principal de L són iguals a 1.
3. U és una matriu triangular superior.

☞ No sempre hi ha una factorització LU estricta

Una *factorització* LU *no estricta* de la matriu quadrada A és la descomposició $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ on

1. L és una permutació de les files d'una matriu triangular inferior.
2. El primer element no nul de cada fila de L és igual a 1.
3. U és una matriu triangular superior.

☞ Sempre hi ha alguna factorització LU no estricta.

Propietats

- La matriu U s'obté aplicant l'algorisme de Gauss.

  ☞ Si la factorització LU és estricta, U s'obté aplicant només operacions elementals del tipus *a una fila sumar-li un múltiple d'una fila **anterior**.*

- La matriu L és invertible.

(···)

(···)

Aplicació a la resolució del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$

☞ Resoleu successivament els sistemes $\mathsf{L}\vec{y} = \vec{b}$ i $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$.

Operacions elementals per columnes

Permutació: Intercanvi de les columnes i i j. Equival al producte $\mathsf{AE}_{i,j}$.

Escalat: Multiplicació de la columna per $\alpha \neq 0$. Equival a $\mathsf{AE}_i(\alpha)$.

Reducció: Suma de α per la columna j a la columna i. Equival a $\mathsf{AE}_{j,i}(\alpha)$.

Càlcul simultani de les matrius L i U

Apliqueu l'algorisme de Gauss a la matriu A, fent simultàniament operacions elementals sobre les columnes de la matriu I:

- Si a la fila i de la primera matriu li sumeu α per la fila j, resteu a la columna j de la segona matriu α per la columna i.
- Si multipliqueu la fila i de la primera matriu per α, dividiu per α la columna i de la segona.
- Si intercanvieu les files i i j de la primera matriu, intercanvieu les columnes i i j de la segona.

Pivotatge parcial

☞ Apliqueu l'algorisme de Gauss elegint sempre el pivot més gros en valor absolut.

11.7. Exercicis

Matrius triangulars

Exercici 11.1. Calculeu la matriu inversa, si existeix, de les matrius següents (els nombres a, b, c i d són tots no nuls):

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ (d) $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 560)

Exercici 11.2. (Substitució progressiva) Resoleu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 560)

Operacions elementals per files i columnes

Exercici 11.3. La matriu N l'hem obtinguda fent les operacions elementals següents sobre la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$:

(a) Hem sumat la columna primera a la tercera; (b) Hem restat la columna segona a la tercera; (c) Hem intercanviat les dues files; (d) A la primera fila li hem sumat el doble de la segona. Calculeu la matriu N i trobeu dues matrius invertibles B i C de manera que $\mathsf{N} = \mathsf{BAC}$.

(solució: pàg. 561)

FACTORITZACIONS LU

EXERCICI 11.4. Donada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (a) Trobeu, si és possible, una factorització LU estricta de A. (b) Trobeu una factorització LU de A fent servir l'algorisme de Gauss amb pivotatge parcial.

(solució: pàg. 561)

EXERCICI 11.5. Donada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (a) Proveu que no és possible trobar una factorització LU estricta de A. (b) Trobeu una factorització LU de A (òbviament, no estricta).

(solució: pàg. 562)

EXERCICI 11.6. Trobeu una factorització LU de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ i feu servir aquesta factorització per resoldre el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = (0, -6, -2)$.

(solució: pàg. 563)

EXERCICI 11.7. Trobeu una forma esglaonada, R, de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

fent servir l'algorisme de Gauss amb pivotatge parcial. Trobeu també una matriu L tal que $\mathsf{A} = \mathsf{LR}$.

(solució: pàg. 564)

Llibre segon. $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$

L'àlgebra lineal és la part de les matemàtiques que estudia els espais vectorials i les aplicacions lineals.

Els vectors que hem estudiat a la primera part del curs habiten els espais vectorials $\mathbb{K}^n$; si fem una combinació lineal amb vectors d'un d'aquests espais obtenim un altre vector del mateix espai.

D'altra banda, el producte escalar és l'eina que ens permet estudiar les propietats geomètriques en els espais $\mathbb{K}^n$. A partir del producte escalar, podem parlar de vectors i conjunts ortogonals i ortonormals, de distàncies, angles… de subespais ortogonals i d'aproximacions òptimes. Tot això està relacionat amb el problema de mínims quadrats, que ens proporciona allò més pròxim a una *solució* quan el nostre sistema lineal és inconsistent.

De forma més general, qualsevol altre conjunt on tinguem les operacions adequades per fer-hi combinacions lineals és un espai vectorial, en el qual podrem fer combinacions lineals, cercar bases i coordenades… Si, a més, hi definim un producte escalar (una operació amb les propietats bàsiques del producte escalar), hi podrem parlar de vectors i conjunts ortogonals i ortonormals, de distàncies, angles… de subespais ortogonals i d'aproximacions òptimes.

Finalment, si hi multipliquem una matriu $m \times n$ *transformem linealment* un vector de l'espai $\mathbb{K}^n$ en un de $\mathbb{K}^m$, així que la multiplicació matriu-vector defineix una aplicació entre els espais $\mathbb{K}^n$ i $\mathbb{K}^m$. Aquestes *transformacions lineals* conserven les combinacions lineals, en el sentit que la imatge d'una combinació lineal és igual a la combinació lineal de les imatges.

De manera general, una aplicació entre dos espais vectorials és *lineal* si conserva les transformacions lineals.

Potser l'àlgebra lineal és *la part de les matemàtiques que estudia les factoritzacions de les matrius com a producte d'altres matrius que tenen una estructura determinada* (de fet, la factorització LU, que hem conegut al llibre primer, i la QR que veurem ara, en són exemples). Però això ho estudiarem més endavant.

Capítol 3

Els espais $\mathbb{K}^n$

Lliçó 12. Els espais $\mathbb{K}^n$ **185**
12.1. Bases i dimensió dels espais $\mathbb{K}^n$ 185
12.2. Coordenades 187
12.3. La matriu de canvi de base 190
12.4. Bases ortogonals i ortonormals 190
12.5. Resum 192
12.6. Exercicis 193
Lliçó 13. Subespais de $\mathbb{K}^n$ **195**
13.1. Subespais de $\mathbb{K}^n$ 195
13.1.1. Subespais de $\mathbb{R}^2$ 195
13.1.2. Subespais de $\mathbb{R}^3$ 198
13.2. Dimensió i bases dels subespais de $\mathbb{K}^n$ 198
13.3. Extracció i compleció de bases 201
13.4. Resum 201
13.5. Exercicis 203
Lliçó 14. Els quatre subespais deduïts d'una matriu **205**
14.1. L'espai columna i l'espai nul 205
14.1.1. Dimensions de l'espai columna i de l'espai nul 207
14.2. L'espai fila i l'espai nul esquerre 208
14.3. Subespais ortogonals 210
14.3.1. Ortogonalitat dels quatre subespais . . . 211
14.4. Subespais i matrius. Les equacions d'un subespai 214
14.5. Resum 216
14.6. Exercicis 217
Lliçó 15. Intersecció i suma de subespais. Suma directa **220**
15.1. Intersecció de dos subespais 220
15.2. Suma de dos subespais 223
15.3. Ortogonals dels espais suma i intersecció 226
15.4. La dimensió de la suma i la intersecció 227
15.4.1. La dimensió de la suma 227
15.4.2. La dimensió de la intersecció 227
15.4.3. La fórmula de Grassmann 228

15.5. Suma directa 229
15.5.1. Suma directa de diversos subespais . . . 231
15.6. Resum 233
15.7. Exercicis 234

Lliçó 12. Els espais $\mathbb{K}^n$

Hem d'admetre amb humilitat que, mentre el nombre
és purament un producte de la nostra ment,
l'espai té una realitat fora de la nostra ment,
de manera que no podem prescriure completament
les seues propietats a priori
Karl Friedrich Gauß

En aquesta lliçó comencem a parlar d'*espais* i expliquem perquè l'espai $\mathbb{K}^3$ és de dimensió 3. Per a fer això, explicarem què és una base i veurem que totes les bases de $\mathbb{K}^n$ tenen exactament n vectors.
Tot seguit estudiarem els problemes de trobar les coordenades i canviar de base.

Només podem sumar dos vectors si tenen les mateixes dimensions: podem fer la suma de dos vectors de $\mathbb{K}^3$ o de $\mathbb{K}^4$, però no podem sumar-ne un de $\mathbb{K}^3$ amb un altre de $\mathbb{K}^4$. Per això, els conjunts $\mathbb{K}^n$ són espais vectorials. Un *espai vectorial* és un conjunt en el qual es poden fer combinacions lineals; més endavant, en trobarem d'altres, però, ara per ara, un *espai* és $\mathbb{K}^n$ (o un subespai de $\mathbb{K}^n$).

12.1. Bases i dimensió dels espais $\mathbb{K}^n$

$\mathbb{K}^3$ és un espai *de dimensió* 3. Això vol dir que si elegim tres vectors linealment independents llavors qualsevol altre vector d'aquest espai és combinació lineal d'aquests tres vectors.

Aquesta propietat és òbvia si elegim els vectors $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ i $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, perquè qualsevol vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ el podem escriure com

$$\vec{u} = u_1(1,0,0) + u_2(0,1,0) + u_3(0,0,1)$$

Però també és certa si elegim qualsevol altre conjunt de tres vectors, sempre que siguen linealment independents: si el conjunt $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent, llavors el rang de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix}$$

és 3 i, en conseqüència, el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{u}$ té solució (única) per a qualsevol vector $\vec{u}$; en altres paraules, qualsevol vector de $\mathbb{K}^3$ és combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}$.

Definició 12.1.

El conjunt $\mathcal{B}$ és una *base* de l'espai $\mathbb{K}^n$ si es compleixen les dues condicions següents:

(a) El conjunt $\mathcal{B}$ és linealment independent.

(b) Si $\vec{u}$ és un vector de $\mathbb{K}^n$, llavors $\vec{u}$ és una combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}$.

Quan un conjunt de vectors S compleix la segona condició d'aquesta definició, és a dir, quan qualsevol vector de $\mathbb{K}^n$ és combinació lineal dels vectors de S, diem que S *genera* $\mathbb{K}^n$ (o, que S *és generador* de $\mathbb{K}^n$). Un conjunt de vectors pot ser generador però no linealment independent, o ser linealment independent però no generador. Perquè siga una base cal que es complisquen totes dues condicions.

Ara discutirem *quants* vectors pot tenir el conjunt $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$, si és linealment independent i/o si és generador; d'alguna manera, *molts* vectors no poden ser independents i *pocs* vectors no poden generar l'espai.

Al conjunt S li associem la matriu $n \times p$

$$\mathsf{M}_S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \end{bmatrix}$$

Aleshores, S és linealment independent si i només si el sistema $\mathsf{M}_S\vec{x} = \vec{0}$ és determinat; per tant, la condició necessària i suficient perquè S siga efectivament linealment independent és que el rang de M_S siga exactament p:

☞ Si el conjunt S té exactament p vectors, llavors S és linealment independent si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = p$.

D'altra banda, S genera $\mathbb{K}^n$ si l'equació $\mathsf{M}_S\vec{x} = \vec{b}$ és compatible per a qualsevol vector $\vec{b}$. En particular, si S és generador, totes les equacions

$$\mathsf{M}_S\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{M}_S\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathsf{M}_S\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

seran compatibles. Dit d'una altra manera, l'equació matricial $\mathsf{M}_S\mathsf{X} = \mathrm{I}$ és compatible, la qual cosa implica que el rang de M_S és n.

☞ El conjunt S és generador si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = n$.

El teorema següent resumeix les condicions que han de complir els conjunts que són independents, generadors o bases:

Teorema 12.1.

Siga $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{K}^n$.

(a) S és linealment independent si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = p$.

(b) S genera l'espai $\mathbb{K}^n$ si i només $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = n$.

En conseqüència,

(c) S és una base de $\mathbb{K}^n$ si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = n = p$. □

☞ Ben llegida, la condició (c) d'aquest teorema diu que S és una base de $\mathbb{K}^n$ si i només si la matriu M_S és invertible.[1]

Aquest teorema té moltes conseqüències importants:

(a) Un conjunt linealment independent no pot tenir més de n vectors.

(b) Un conjunt que siga generador de $\mathbb{K}^n$ no pot tenir menys de n vectors.

(c) Totes les bases de $\mathbb{K}^n$ tenen exactament n vectors (és a dir, que les bases de $\mathbb{K}^2$ tenen dos elements, les de $\mathbb{K}^3$ en tenen tres i les de $\mathbb{K}^7$ en tenen 7).

☞ Com que totes les bases de l'espai $\mathbb{K}^n$ tenen n elements, diem que *la dimensió de $\mathbb{K}^n$ és n.*

Definició 12.2. (Base canònica de $\mathbb{K}^n$)

La *base canònica (o estàndard)* de $\mathbb{K}^n$ és el conjunt

$$C(\mathbb{K}^n) = \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$$

És clar que es tracta d'una base, perquè la matriu $\mathsf{M}_{C(\mathbb{K}^n)}$ és la identitat (i perquè és clar que aquest conjunt és linealment independent i generador).

12.2. Coordenades

Per què imposem la condició que els vectors siguen independents, quan definim les bases? Si el conjunt S genera l'espai, llavors qualsevol vector es pot construir fent combinacions lineals amb els vectors de S, siga o no, aquest conjunt, linealment independent. Per exemple, els conjunts

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\} \qquad S = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1-1,1)\}$$

són, tots dos, generadors de $\mathbb{K}^3$, perquè $\operatorname{rang} M_{\mathcal{B}} = \operatorname{rang} M_S = 3$. Aleshores, quin avantatge té $\mathcal{B}$ sobre S? Ho veurem clar quan expressem un vector qualsevol com a combinació lineal dels elements de $\mathcal{B}$ i de S i comparem els resultats.

[1] La qual cosa afegeix una nova equivalència al teorema de caracterització de les matrius invertibles.

Exemple 12.1.

Expresseu el vector $(3, 2, 1)$ com a combinació lineal dels elements de

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

i com a combinació lineals dels de

$$S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1 - 1, 1)\}$$

Simplement hem de resoldre els dos sistemes lineals les matrius ampliades dels quals són, respectivament,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si calculem les formes esglaonades reduïdes obtindrem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

així que la solució del primer sistema és $\vec{x} = (0, 2, 1)$ i

$$(3, 2, 1) = 0(1, 1, 1) + 2(1, 1, 0) + 1(1, 0, 1)$$

la solució del segon sistema és $\vec{x} = (-1, -2, 4, 0) + \alpha(-2, 0, 1, 1)$, de manera que

$$(3, 2, 1) = (-1 - 2\alpha)(1, 0, 1) - 2(0, 1, 1) + (4 + \alpha)(1, 1, 1) + \alpha(1, -1, 1) \quad \square$$

El fet que S no siga linealment independent fa que la solució del problema no siga única! El vector es pot escriure de moltes maneres diferents com a combinació lineal dels vectors de S. El que passa, en realitat, és que, *en S, hi sobren vectors*; podem generar tots els vectors de $\mathbb{K}^3$ amb, només, els tres primers vectors de S.

En definitiva, la independència lineal assegura que els vectors de l'espai es componen com a combinacions lineals dels elements de la base *de forma única*.

Propietat 12.2.

Si $\mathcal{B}$ és una base de $\mathbb{K}^n$, llavors qualsevol vector de $\mathbb{K}^n$ s'expressa de forma única com a combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}$. $\square$

DEFINICIÓ 12.3. (COORDENADES D'UN VECTOR)

Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ és una base de $\mathbb{K}^n$ i el vector $\vec{u}$ es pot escriure com

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_n$$

llavors, els pesos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ d'aquesta combinació lineal són les *coordenades del vector $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}$*, la qual cosa s'expressa escrivint

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

☞ La relació $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_n$ significa que $\vec{u} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}\vec{u}_{\mathcal{B}}$.

Al darrer exemple, hem vist que el conjunt $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)\}$ és una base de $\mathbb{K}^3$ i que el vector $\vec{u} = (3,2,1)$ es pot expressar d'aquesta manera:

$$(3,2,1) = 0(1,1,1) + 2(1,1,0) + 1(1,0,1)$$

Així, doncs, les coordenades de $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}$ són 0, 2 i 1, és a dir, $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (0,2,1)$.

EXEMPLE 12.2.

Quines són les coordenades del vector $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ respecte a la base canònica $C(\mathbb{K}^n)$?

Com que

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1(1,0,\ldots,0) + u_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + u_n(0,0,\ldots,1)$$

les coordenades respecte a la base canònica són els components del vector:

$$\vec{u}_{C(\mathbb{K}^n)} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \square$$

EXEMPLE 12.3.

Proveu que el conjunt $\mathcal{B} = \{(1,2), (2,-1)\}$ és una base de $\mathbb{K}^2$ i calculeu les coordenades del vector $\vec{u} = (0,5)$ respecte aquesta base.

Aquest conjunt és base de $\mathbb{K}^2$ perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{\mathcal{B}} = 2$. Les coordenades del vector $\vec{u}$ les podem obtenir resolent el sistema lineal $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}\vec{x} = \vec{u}$. La matriu ampliada d'aquest sistema és $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; aplicant-hi l'algorisme de Gauss-Jordan obtenim la forma esglaonada reduïda $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, així que $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (2,-1)$ (és a dir, $\vec{u} = 2(1,2) - 1(2,-1)$). $\square$

12.3. La matriu de canvi de base

Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ són bases de $\mathbb{K}^n$ i $\vec{u}$ és un vector qualsevol, quina relació hi ha entre les coordenades de $\vec{u}$ respecte a cadascuna d'aquestes bases? En altres paraules, si $\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ i $\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, quina relació hi ha entre unes i altres coordenades?

La resposta és òbvia: el que sabem és que

$$\vec{u} = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$

és a dir, $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$. Per tant, $\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \left(\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$.

Definició 12.4.

Si $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són dues bases de $\mathbb{K}^n$, la *matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$* és la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \left(\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$.

☞ Observeu que, quan la base $\mathcal{B}_2$ és la canònica, llavors la matriu de canvi de base coincideix amb la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$ ($\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1 C(\mathbb{K}^n)} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$), perquè la matriu associada a la base canònica és la identitat.

Exemple 12.4.

Trobeu la matriu de canvi de la base de $\mathbb{K}^2$ $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(1,-1)\}$ a la base $\mathcal{B}_2 = \{((0,1),(2,3)\}$ i les coordenades respecte a la base $\mathcal{B}_2$ del vector $\vec{u}$ sabent que $\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = (1,1)$.

La manera més eficient de calcular la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ consisteix a aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right]$, perquè $\left(\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right] = \left[\mathrm{I} \,\middle|\, \left(\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right]$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La matriu de canvi de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$ és $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. I les coordenades de $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}_2$,

$$\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

12.4. Bases ortogonals i ortonormals

Si el conjunt $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$, a més de ser base de $\mathbb{K}^n$, és ortogonal, llavors el càlcul de les coordenades d'un vector respecte aquesta base se simplifica notablement: en comptes de resoldre un sistema lineal, únicament haurem de fer uns pocs productes escalars. Per veure-ho, suposem que $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, és a dir, que $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$, llavors els productes escalars de $\vec{u}$ pels elements de $\mathcal{B}$ són

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 \cdot \vec{u} &= \alpha_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}_{0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_n}_{0} = \alpha_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 \\
\vec{u}_2 \cdot \vec{u} &= \alpha_1 \underbrace{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1}_{0} + \alpha_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n \underbrace{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_n}_{0} = \alpha_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \\
&\dots \\
\vec{u}_n \cdot \vec{u} &= \alpha_1 \underbrace{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_1}_{0} + \alpha_2 \underbrace{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_2}_{0} + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n = \alpha_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n
\end{aligned}$$

En conseqüència,

$$\alpha_1 = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{u}}{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n}$$

☞ El vector de coordenades de $\vec{u}$ respecte la base $\mathcal{B}$ és

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = \left(\frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}, \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}, \dots, \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{u}}{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n} \right)$$

Exemple 12.5.

Calculeu les coordenades del vector $\vec{u} = (0, 5)$ respecte la base $\mathcal{B} = \{(1, 2), (2, -1)\}$.

Es tracta de la mateixa base (i el mateix vector $\vec{u}$) de l'exemple 12.3, però ara observem que la base $\mathcal{B}$ és ortogonal (perquè $(1, 2) \cdot (2, -1) = 0$), així que

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = \left(\frac{(1, 2) \cdot (0, 5)}{(1, 2) \cdot (1, 2)}, \frac{(2, -1) \cdot (0, 5)}{(2, -1) \cdot (2, -1)} \right) = \left(\frac{10}{5}, \frac{-5}{5} \right) = (2, -1) \quad \square$$

☞ Si la base $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$ és ortonormal, llavors tots els vectors seus són unitaris i el càlcul de les coordenades encara se simplifica una mica més:

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 \cdot \vec{u} \\ \vec{q}_2 \cdot \vec{u} \\ \cdots \\ \vec{q}_n \cdot \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1^*\vec{u} \\ \vec{q}_2^*\vec{u} \\ \cdots \\ \vec{q}_n^*\vec{u} \end{bmatrix} = \mathsf{Q}^*\vec{u}$$

(on $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_n \end{bmatrix}$).

Al marge de la simplicitat en el càlcul de les coordenades, les bases ortonormals tenen el valor afegit de respectar les propietats geomètriques dels vectors: si $\mathcal{B}$ és una base ortonormal i $\vec{u}$, i $\vec{v}$ són dos vectors qualssevol, llavors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}_{\mathcal{B}} \cdot \vec{v}_{\mathcal{B}}$, perquè

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathsf{Q}^*\vec{u}_{\mathcal{B}} \cdot \mathsf{Q}^*\vec{v}_{\mathcal{B}} = \vec{u}_{\mathcal{B}}^*\mathsf{Q}\mathsf{Q}^*\vec{v}_{\mathcal{B}} = \vec{u}_{\mathcal{B}}^*\vec{v}_{\mathcal{B}} = \vec{u}_{\mathcal{B}} \cdot \vec{v}_{\mathcal{B}}$$

($\mathsf{QQ}^* = \mathrm{I}$ perquè la matriu Q és unitària) i d'ací es dedueix que, si $\mathcal{B}$ és una base ortonormal, llavors podem calcular longituds, angles i distàncies fent servir el vector de coordenades respecte a la base $\mathcal{B}$.

12.5. Resum

Bases i dimensió dels espais $\mathbb{K}^n$

- Un conjunt S *genera* $\mathbb{K}^n$ si tots els vectors de $\mathbb{K}^n$ són combinacions lineals dels vectors de S.
- Un conjunt $\mathcal{B}$ és *base* de $\mathbb{R}^n$ si és linealment independent i genera $\mathbb{R}^n$.

La *base canònica* de $\mathbb{K}^n$ és $C(\mathbb{K}^n) = \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$.

La matriu associada a un conjunt de vectors
La matriu associada al conjunt $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ és $\mathsf{M}_S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \end{bmatrix}$.

- S és linealment independent si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = p$.
- S genera $\mathbb{R}^n$ si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = n$.
- S és base de $\mathbb{K}^n$ si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = p = n$ (és a dir, si M_S és invertible).

Nombre d'elements dels conjunts linealment independents, generadors i bases

- Si S és linealment independent llavors, S no té més de n elements.
- Si S és generador llavors, S no té menys de n elements.
- Si S és base de $\mathbb{K}^n$ llavors, S té exactament n elements.

Coordenades respecte a una base
Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ és base de $\mathbb{K}^n$, tot vector es combinació lineal *única* dels vectors de $\mathcal{B}$.

- Si $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$, el *vector de coordenades* de $\vec{u}$ respecte a $\mathcal{B}$ és $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

☞ $\vec{u} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}\vec{u}_{\mathcal{B}}$

- Si $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$ és una base ortonormal llavors, les coordenades d'un vector $\vec{u}$ respecte a $\mathcal{B}$ són

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\vec{q}_1 \cdot \vec{u}, \vec{q}_2 \cdot \vec{u}, \dots, \vec{q}_n \cdot \vec{u}) = \mathsf{Q}^*\vec{u}$$

Canvi de base
Siguen $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ dues bases de $\mathbb{K}^n$.

- La *matriu de canvi de base de B_1 a B_2* és la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \left(\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$.
- Canvi de coordenades: $\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$.

☞ Estratègia de càlcul:

$$\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} \;\middle|\; \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\mathrm{I} \;\middle|\; \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\right]$$

12.6. Exercicis

Exercici 12.1. Feu servir la definició de base per a determinar si els conjunts següents són o no bases de l'espai $\mathbb{K}^2$.

(a) $\mathcal{B}_1 = \{(0,-4),(1,0)\}$ (b) $\mathcal{B}_2 = \{(1,-1),(-2,2)\}$
(c) $\mathcal{B}_3 = \{(1,-1),(2,1),(1,1)\}$

(solució: pàg. 566)

Exercici 12.2. Justifiqueu si els conjunts següents són o no linealment independents, generadors o bases de $\mathbb{K}^3$.

(a) $S_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$
(b) $S_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(2,5,5)\}$
(c) $S_3 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1),(2,5,5)\}$
(d) $S_4 = \{(1,1,1),(2,5,5)\}$

(solució: pàg. 566)

Exercici 12.3. Vertader o fals (justifiqueu la resposta):
(a) Si S és un conjunt de tres vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és linealment independent.
(b) Si S és un conjunt de cinc vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és linealment dependent.
(c) Si S és un conjunt de tres vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S no és generador.
(d) Si S és un conjunt de cinc vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és generador.
(e) Si S és un conjunt de quatre vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és base.
(f) Si S és un conjunt linealment independent de quatre vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és base.
(g) Si S és un conjunt de quatre vectors en $\mathbb{K}^4$ i S genera $\mathbb{K}^4$, llavors S és base.

(solució: pàg. 566)

Exercici 12.4. (a) Proveu que els conjunts $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(-1,2)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ són bases de $\mathbb{K}^2$. (b) Calculeu els vectors de coordenades ($\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$ i $\vec{u}_{\mathcal{B}_2}$) del vector $\vec{u} = (1,7)$ respecte a cadascuna d'aquestes bases. (c) Trobeu el vector $\vec{v}$ sabent que les coordenades d'aquest vector respecte a la base $\mathcal{B}_1$ són $\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = (2,2)$.

(solució: pàg. 567)

Exercici 12.5. Trobeu les matrius de canvi de base $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ i $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ on $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són les bases de $\mathbb{K}^2$ de l'exercici anterior.

(solució: pàg. 568)

Exercici 12.6. Calculeu les coordenades del vector $\vec{u} = (1, 2, -1, -2)$ respecte a la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \right\}$$

(solució: pàg. 568)

Exercici 12.7. Proveu que si les bases de $\mathbb{K}^n$ $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són ortonormals, llavors la matriu de canvi de base $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ és unitària.

(solució: pàg. 569)

Lliçó 13. Subespais de $\mathbb{K}^n$

My God, it's full of stars!
David Bowman

Un subespai de $\mathbb{K}^n$ és un conjunt F, de vectors n-dimensionals, que *és tancat* respecte a les dues operacions de $\mathbb{K}^n$, la suma i el producte escalar-vector, és a dir, que si fem combinacions lineals amb els elements de F el resultat és també un vector de F. En aquesta lliçó estudiarem quins són, aquests subespais.

13.1. Subespais de $\mathbb{K}^n$

Definició 13.1.

Un *subespai* de $\mathbb{K}^n$ és un conjunt F, de vectors n-dimensionals, que té aquestes dues propietats:

(a) El vector $\vec{0}$ és un element de F: $\vec{0} \in F$.

(b) Si fem qualsevol combinació lineal amb dos elements de F el vector que en resulta també és un element de F:

$$\text{Si } u_1, u_2 \in F \text{ llavors } \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \in F$$

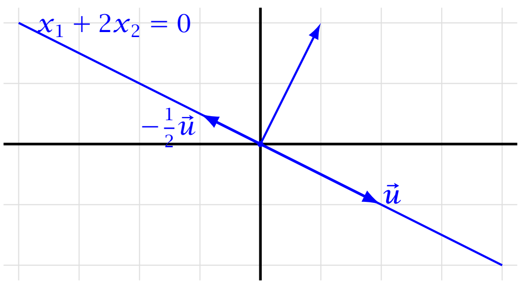
(per a dos escalars α_1 i α_2 qualssevol).

Primer de tot estudiarem quins conjunts són subespais de $\mathbb{R}^2$ i de $\mathbb{R}^3$ i quins no ho són.

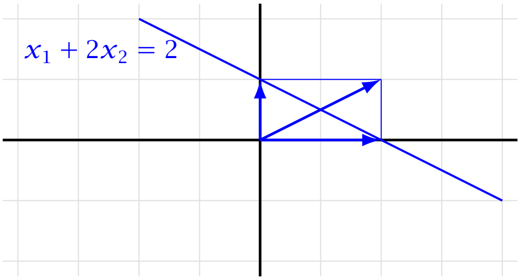
13.1.1. Subespais de $\mathbb{R}^2$

Comencem amb un exemple senzill: el conjunt $F = \{\alpha(2,-1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ és un subespai de $\mathbb{R}^2$. Des del punt de vista geomètric, aquest conjunt F és la recta d'equació $x_1 + 2x_2 = 0$ o, amb més precisió, $F = \{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 = 0\}$.

F és subespai de $\mathbb{R}^2$ perquè qualsevol combinació lineal de dos vectors d'aquesta recta es troba sobre la mateixa recta. Com que tots els vectors de F són múltiples del vector $\vec{u} = (2,-1)$ diem que aquest vector *genera* el subespai F. Observeu que tots els vectors de F són ortogonals al vector $(1,2)$.



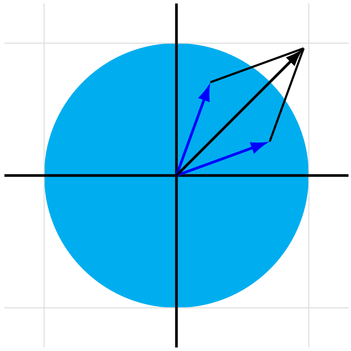
En canvi, el conjunt $G = \{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 = 2\}$ no és un subespai, perquè el vector zero no és solució de l'equació (la recta no conté l'origen de coordenades) i, també perquè aquest conjunt no compleix la segona condició per a ser subespai: per exemple, els vectors $(2, 0)$ i $(0, 1)$ són solucions de l'equació, però la suma, $(2, 0) + (0, 1) = (2, 1)$, no ho és.



Un altre subconjunt de $\mathbb{R}^2$ que tampoc no és subespai és el cercle

$$G = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

Aquest cercle sí que conté el vector zero, però no totes les combinacions lineals.



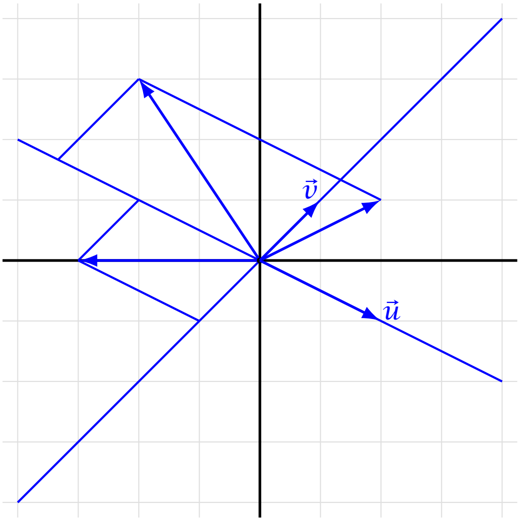
☞ El subespai més menut és el subconjunt que conté únicament el vector zero: $\{\vec{0}\}$ (és un subconjunt perquè qualsevol combinació lineal que hi fem serà nul·la: $\alpha_1\vec{0} + \alpha_2\vec{0} = \vec{0}$).

Per contra, el subespai *més gran* és l'espai total, $\mathbb{R}^2$.

Per a determinar *tots* els subespais de $\mathbb{R}^2$ només ens hem de fixar en aquest detall: si F conté algun vector $\vec{u}$ no nul, llavors qualsevol vector que siga múltiple de $\vec{u}$, $\alpha\vec{u}$, també ha de ser un element de F, de manera que si F no es redueix al vector zero, llavors F conté, almenys, la recta definida per $\vec{u}$:

$$\vec{u} \in F \Rightarrow \{\alpha\vec{u} : \alpha \in \mathbb{R}\} \subset F$$

Si tots els vectors de F són múltiples de $\vec{u}$, llavors, F és aquesta recta. En cas contrari, és a dir, si hi ha algun altre vector en F, $\vec{v}$, que no és múltiple de $\vec{u}$, aleshores qualsevol vector que siga combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$, $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v}$, serà també un element de F. En aquest cas, F coincideix amb $\mathbb{R}^2$, perquè la matriu $\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix}$ té rang 2 i, en conseqüència, qualsevol vector és combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



En resum,

Els únics subespais vectorials de $\mathbb{R}^2$ són aquests:

- El subespai zero, $\{\vec{0}\}$
- Si F no és nul i no conté dos vectors linealment independents, llavors, F és una recta que passa per l'origen. Si $\vec{u} = (a, b)$ és un vector no nul d'aquest subespai F, llavors

  $$F = \{\alpha(a, b) \colon \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (a, b) \rangle$$

  L'equació d'aquesta recta és $-bx_1 + ax_2 = 0$, així que també podem escriure el subespai F com

  $$F = \{(x_1, x_2) \colon -bx_1 + ax_2 = 0\}$$

  i, finalment, hem d'observar que F és el conjunt dels vectors ortogonals al vector $(-b, a)$.
- Si F conté dos vectors linealment independents, llavors F coincideix amb $\mathbb{R}^2$.

☞ La recta d'equació $ax_1 + bx_2 + c = 0$ només és un subespai si passa per l'origen, és a dir, si $c = 0$.

13.1.2. Subespais de $\mathbb{R}^3$

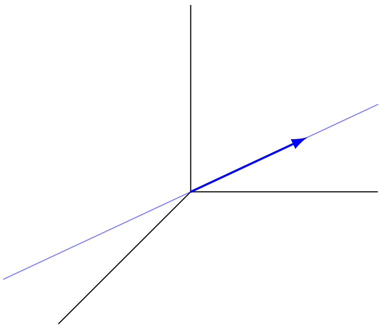
En $\mathbb{R}^3$, a banda dels subespais obvis, $\{\vec{0}\}$ i el mateix $\mathbb{R}^3$, hi són subespais les rectes i els plans que contenen el zero. Com en el cas bidimensional, si el subespai F no es redueix al vector zero i no hi ha cap parell de vectors linealment independents, llavors elegint-hi un vector no nul $\vec{u}$ deduirem que els únics vectors de F són els múltiples d'aquest vector, i F és una recta que conté l'origen: $F = \{\alpha\vec{u} : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Per exemple, $F_1 = \{\alpha(1,2,1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ és un subespai de $\mathbb{R}^3$.

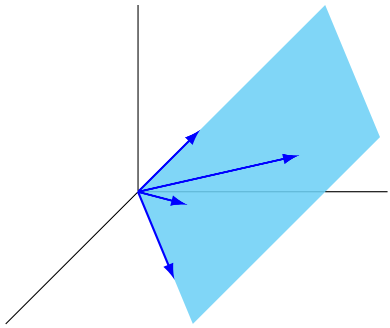
En canvi, si en F podem trobar dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ linealment independents (però no tres), llavors tots els vectors de F seran combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$, $F = \{\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.

Per exemple, $F_2 = \{\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(0,1,2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ és un subespai de $\mathbb{R}^3$.

Finalment, si F conté tres vectors independents, llavors $F = \mathbb{R}^3$.



Un únic vector independent: una recta



Dos vectors independents: un pla

13.2. Dimensió i bases dels subespais de $\mathbb{K}^n$

La definició de base es pot estendre a qualsevol subespai de $\mathbb{K}^n$. Per tal de fer-ho, és convenient que introduïm un concepte nou: l'embolcall lineal d'un conjunt de vectors.

L'*embolcall lineal* d'un conjunt de vectors S és el conjunt $\langle S\rangle$ de totes les combinacions lineals que es poden formar amb els elements de S. Per exemple, l'embolcall lineal del conjunt $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ és el conjunt de tots els vectors que es poden escriure en la forma $\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0)$, és a dir, el conjunt de tots els vectors de la forma $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$.

☞ Es pot provar molt fàcilment que l'embolcall lineal de qualsevol conjunt de vectors de $\mathbb{K}^n$ és un subespai.

En realitat, $\langle S\rangle$ és el subespai més petit que conté a S.

DEFINICIÓ 13.2. (BASE D'UN SUBESPAI)

Siga F un subespai de $\mathbb{K}^n$. El conjunt $\mathcal{B}$ és una *base* de F si es compleixen les dues condicions següents:

(a) El conjunt $\mathcal{B}$ és linealment independent.

(b) L'embolcall lineal de $\mathcal{B}$ és F.

Ara ja estem en condicions de descriure tots els subespais de $\mathbb{K}^n$; només hem de fer dues o tres precisions prèvies.

PROPIETATS 13.1.

Siga F un subespai de $\mathbb{K}^n$. Es compleixen les propietats següents:

(a) Si F no és el subespai nul, aleshores existeix alguna base de F.

(b) El nombre d'elements d'una base de F no és més gran que n.

Demostració: Si F no és el subespai nul, hi existirà algun vector, $\vec{u}_1$ distint del vector zero; si aquest vector per si sol no és base de F llavors hi ha algun altre vector de F, $\vec{u}_2$ que no és combinació lineal de $\vec{u}_1$, de manera que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ és linealment independent; si aquest conjunt de dos vectors tampoc no és base, hi podríem afegir-ne un altre, i considerar el conjunt linealment independent $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Aquest procés ha d'acabar necessàriament en un màxim de n passos, perquè si arribem a construir un conjunt de n vectors linealment independents, aquests vectors generen l'espai complet $\mathbb{K}^n$. ▫

☞ El subespai nul *no té cap base*, perquè no té subconjunts linealment independents.

La propietat més important és que totes les bases de F tenen el mateix nombre d'elements:

PROPIETAT 13.2.

Si F és un subespai no nul de $\mathbb{K}^n$, llavors totes les bases de F tenen el mateix nombre d'elements.

Demostració: Suposem que $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ són bases de F. El que volem provar és que $p = q$.

Per ser $\mathcal{B}_1$ una base, tots els vectors de $\mathcal{B}_2$ són combinacions lineals dels de $\mathcal{B}_1$, de manera que l'equació $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\mathsf{X} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}$ és compatible. Per tant,

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1} = p$$

Però com que $\mathcal{B}_2$ també és base, els vectors de $\mathcal{B}_1$ són combinacions lineals dels de $\mathcal{B}_2$, l'equació $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\mathsf{X} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$ és compatible i

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} = q$$

així que $p = q$. □

Definició 13.3. (Dimensió d'un subespai)

Si F és el subespai nul, *la dimensió* de F és zero. En cas contrari, el nombre d'elements d'una base qualsevol de F és *la dimensió* d'aquest subespai, $\dim F$.

Tenint en compte aquestes propietats és clar que els subespais de $\mathbb{K}^n$ es poden classificar atenent a la dimensió de la manera següent: si F és un subespai de $\mathbb{K}^n$ llavors, F és, o bé el subespai nul, o bé un subespai de dimensió 1, o un de dimensió 2…, o un de dimensió $n-1$, o l'espai total $\mathbb{K}^n$. Els subespais de dimensió 1 s'anomenen *rectes*, els de dimensió 2, *plans*, i els de dimensió $n-1$, *hiperplans*.

☞ L'equació $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ representa un *hiperplà* en l'espai n-dimensional. Però aquest hiperplà només és un subespai si passa per l'origen, és a dir, si $b = 0$.

Per exemple, en $\mathbb{R}^4$ hi ha subespais de dimensió 1 (rectes), 2 (plans), i 3 (hiperplans), a banda dels subespais trivials $\{\vec{0}\}$ i $\mathbb{R}^4$.

Definició 13.4. (Coordenades en un subespai)

Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ és una base del subespai F i el vector $\vec{u}$ es pot escriure com

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p$$

llavors, els pesos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ d'aquesta combinació lineal són les *coordenades del vector $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}$*, la qual cosa s'expressa escrivint

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$$

☞ El vector $\vec{u}$ té n components (perquè és un element de $\mathbb{K}^n$) però p coordenades respecte a la base $\mathcal{B}$, perquè la dimensió del subespai F és p.

☞ La relació $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p$ significa que $\vec{u} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}\vec{u}_{\mathcal{B}}$.

Exemple 13.1.

Comproveu que el conjunt $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,-1)\}$ és una base del subespai de $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x_1, x_2, x_3) \colon\ x_2 + x_3 = 0\}$ i calculeu les coordenades respecte a aquesta base del vector $\vec{w} = (2,-3,3)$.

Anomenem $\vec{u} = (1,0,0)$ i $\vec{v} = (0,1,-1)$ els vectors de $\mathcal{B}$. Hem de comprovar tres coses:

(a) $\mathcal{B}$ és un subconjunt de F, perquè $u_2 + u_3 = 0 + 0 = 0$ i $v_2 + v_3 = 1 - 1 = 0$.

(b) Qualsevol vector de F és combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}$:

$$\text{Si } y + z = 0 \text{ llavors } (x,y,z) = (x,y,-y) = x(1,0,0) + y(0,1,-1)$$

(c) El conjunt $\mathcal{B}$ és linealment independent: Si $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} = \vec{v}$ llavors $\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,-1) = (0,0,0)$ així que $(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2) = (0,0,0)$ i $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Les coordenades respecte a aquesta base del vector $\vec{w}$ són 2 i -3, perquè

$$\vec{w} = (2,-3,3) = 2(1,0,0) - 3(0,1,-1)$$

Simbòlicament, $\vec{w}_{\mathcal{B}} = (2,-3)$.

☞ El vector $\vec{w}$ d'aquest exemple és tridimensional, però el vector de coordenades $\vec{w}_{\mathcal{B}}$ només té dos components, perquè estem en un subespai de dimensió 2.

13.3. Extracció i compleció de bases

Si tenim un conjunt generador S d'un subespai no nul, F, de $\mathbb{K}^n$, finit, que no és linealment independent, llavors en podem *extraure una base* de la manera següent: com que S no és independent, algun vector seu és combinació lineal dels altres, així que podem suprimir-lo per obtenir un conjunt més petit, S_1, que genera el mateix espai. Si aquest conjunt és linealment independent, ja tenim una base; si no és així, hi suprimim un altre vector... Repetint aquest procediment tant com calga, acabarem trobant un conjunt independent, perquè el conjunt inicial era finit. De fet, el procés acabarà quan el conjunt generador tinga exactament un nombre de vectors igual a la dimensió de F.

De manera anàloga si tenim un conjunt linealment independent de vectors del subespai F, S, que no és generador, podem *completar una base* afegint-hi vectors: com que S no és generador, hi ha algun vector $\vec{u}_1$ que no és combinació lineal dels vectors de S; llavors considerem el conjunt $S_1 = S \cup \{\vec{u}_1\}$, que també és linealment independent. Si aquest conjunt és generador, ja hem obtingut la base; en cas contrari, n'hi podem afegir un altre... Aquest procés acabarà quan el conjunt tinga exactament un nombre de vectors igual a la dimensió de F.

13.4. Resum

Subespais

- Un subconjunt $F \subset \mathbb{R}^n$ és un *subespai* si
  1. $\vec{0} \in F$.
  2. $u_1, u_2 \in F, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \in F$.

☞ L'*embolcall lineal* del conjunt S és el conjunt $\langle S \rangle$ de totes les combinacions lineals d'elements de S.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

Base d'un subespai Una *base* del subespai F és un conjunt $\mathcal{B}$ que és linealment independent i $\langle\mathcal{B}\rangle = F$.

☞ Tots els subespais, tret de O, tenen base.

☞ Totes les bases de F tenen el mateix nombre d'elements.

☞ La *dimensió* de F és el nombre d'elements de qualsevol base de F.

Classificació dels subespais de $\mathbb{R}^2$

- El subespai zero.
- Subespais de dimensió 1 (les rectes que passen per l'origen).
- $\mathbb{R}^2$.

Classificació dels subespais de $\mathbb{R}^3$

- El subespai zero.
- Subespais de dimensió 1 (les rectes que passen per l'origen).
- Subespais de dimensió 2 (els plans que contenen l'origen).
- $\mathbb{R}^3$.

Classificació dels subespais de $\mathbb{R}^n$

- El subespai zero.
- Subespais de dimensió 1 (les rectes que passen per l'origen).
- Subespais de dimensió 2 (els plans que contenen l'origen).
- Subespais de dimensió 3.
- ...
- Subespais de dimensió $n-1$ (hiperplans que contenen l'origen).
- $\mathbb{R}^n$.

☞ Els subespais *trivials* són $\{\vec{0}\}$ i $\mathbb{R}^n$.

Coordenades respecte a una base
Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ és una base de F i $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p$ llavors, el *vector de coordenades* de $\vec{u}$ respecte a $\mathcal{B}$ és $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$

Extracció i completació de bases

- D'un conjunt generador finit podem extraure una base, eliminant-ne vectors que siguen combinació lineal dels altres.
- Un conjunt linealment independent pot completar-se a una base, afegint-hi vectors linealment independents.

13.5. Exercicis

Subespais

Exercici 13.1. Estudieu si els conjunts de vectors següents són subespais de l'espai $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ o si no ho són. Descriviu geomètricament aquests conjunts.
(a) $F_1 = \{(a, 0) \colon a \in \mathbb{R}\}$
(b) $F_2 = \{(a - b, 2a + b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$
(c) $F_3 = \{(a - b, b - c, c - a) \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$
(d) $F_4 = \{(a + 1, a, 0) \colon a \in \mathbb{R}\}$
(e) $F_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 = 1\}$
(f) $F_6 = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}, a \le b\}$
(g) $F_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$
(h) $F_8 = \{(1, 2, 0), (0, -1, 1)\}$

(solució: pàg. 570)

Exercici 13.2. Proveu que el conjunt $F = \{(2a, 3a) \colon a \in \mathbb{R}\}$ és un subespai de $\mathbb{R}^2$, representeu-lo gràficament i descriviu-lo (1) com el conjunt de totes les combinacions lineals d'un vector, (2) com la solució general d'una equació lineal, i (3) com el conjunt de tots els vectors ortogonals a un vector.

(solució: pàg. 571)

Exercici 13.3. Proveu que els conjunts següents són subespais de $\mathbb{R}^3$ i descriviu-los (a) com el conjunt de totes les combinacions lineals d'un conjunt de vectors, (b) com la solució general d'un sistema d'equacions lineals, i (c) com el conjunt de tots els vectors ortogonals a un conjunt de vectors.

$$F_1 = \{(a, 2a, 3a) \colon a \in \mathbb{R}\} \qquad F_2 = \{(a, a + b, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$$

(solució: pàg. 571)

Bases i coordenades

Exercici 13.4. Trobeu una base de cadascun dels subespais de $\mathbb{R}^4$ següents

(a) $F = \{(a - b, b - c, c - d, d - a) \colon a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
(b) $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 = 0; x_3 + x_4 = 0\}$

(solució: pàg. 572)

Embolcalls lineals

Exercici 13.5. Trobeu bases dels subespais següents:

(a) $F = \langle (1, 1, 0), (2, -1, 1), (3, 0, 1) \rangle$ (b) $G = \langle (1, 1, 0), (2, -1, 1), (3, 0, 0) \rangle$

(solució: pàg. 572)

Exercici 13.6. Siga S un subconjunt no buit de $\mathbb{K}^n$. Proveu que

(a) $\langle S\rangle$ és un subespai de $\mathbb{K}^n$.

(b) Si F és un subespai de $\mathbb{K}^n$ i $S\subset F$, llavors $\langle S\rangle\subset F$.

(solució: pàg. 573)

Exercici 13.7. És clar que, si el vector $\vec{u}$ no pertany a S, llavors $\langle S\rangle\subset\langle S\cup\{\vec{u}\}\rangle$. Poden ser iguals, $\langle S\rangle$ i $\langle S\cup\{\vec{u}\}\rangle$? En cas afirmatiu, quina condició s'ha de complir perquè no ho siguen?

(solució: pàg. 573)

Exercici 13.8. (Canvi de base en un subespai)
(a) Proveu que els conjunts $\mathcal{B}_1=\{(1,1,1),(1,-1,0)\}$ i $\mathcal{B}_2=\{(2,0,1),(0,2,1)\}$ són bases del subespai de $\mathbb{K}^3$ $F=\{(x+y,x-y,x):\ x,y\in\mathbb{K}\}$. (b) Comproveu que el vector $\vec{u}=(3,1,2)$ és un element de F i calculeu les coordenades de $\vec{u}$ respecte a cadascuna d'aquestes bases. (c) Trobeu una matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ de manera que, per a qualsevol vector $\vec{v}\in F$, $\vec{v}_{\mathcal{B}_2}=\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{v}_{\mathcal{B}_1}$. d) Comproveu amb el vector $\vec{u}$ el resultat que heu obtingut.

(solució: pàg. 574)

Lliçó 14. Els quatre subespais deduïts d'una matriu

L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite,
la géométrie n'est qu'une algèbre figurée
Sophie Germain

Qualsevol matriu $m \times n$ A defineix quatre subespais importants, dos de $\mathbb{K}^n$ i altres dos de $\mathbb{K}^m$. En el cas real, aquests quatre subespais són els formats per les combinacions lineals de les columnes de A (l'espai columna), per les de les files (l'espai fila), i per les solucions dels sistemes lineals $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ (l'espai nul) i $\mathsf{A}^\mathsf{T}\vec{x} = \vec{0}$ (l'espai nul esquerre).
Per mostrar l'interès dels quatre subespais, demostrarem que qualsevol subespai de $\mathbb{K}^n$ és l'espai columna d'una matriu i, també, l'espai nul d'una altra matriu. En altres paraules, qualsevol subespai es pot interpretar com un dels quatre subespais, si s'elegeix la matriu adequada.

14.1. L'espai columna i l'espai nul

Fins ara, hem estudiat els sistemes del tipus $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ considerant $\vec{b}$ com un vector donat i mirant de decidir si el sistema té alguna solució i, en aquest cas, de trobar aquesta solució. Ara ens ho mirarem des del costat de la matriu A i ens demanarem quins són els vectors $\vec{b}$ per als quals el sistema té alguna solució.

☞ Si A és una matriu $m \times n$, quins són els vectors $\vec{b}$ per als quals el sistema d'equacions lineals $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és compatible?

Amb tot el que ja sabem sobre les matrius i els sistemes lineals, la resposta és immediata, especialment si interpretem el producte $\mathsf{A}\vec{x}$ de la manera correcta: com que la pregunta és si existeix $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de manera que $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$, podem afirmar que el sistema té solució si i només si *el vector $\vec{b}$ és combinació lineal de les columnes de* A.

Definició 14.1.

Anomenem *espai columna* de la matriu $m \times n$ A, $\operatorname{Col}\mathsf{A}$, el conjunt de totes les combinacions lineals de les columnes de A:

$$\operatorname{Col}\mathsf{A} = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$$

☞ L'espai columna és l'embolcall lineal de les columnes de la matriu i, també, el conjunt de vectors per als quals el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és compatible.

L'espai columna és un subconjunt de $\mathbb{K}^m$ (noteu que les columnes de la matriu A tenen m components); o, més ben dit, un subespai de $\mathbb{K}^m$, perquè és l'embolcall lineal d'un conjunt de vectors.

☞ Per tal de trobar una base de l'espai columna, com que les columnes de la matriu generen aquest espai, haurem d'*eliminar* les columnes que calga fins que en quede un subconjunt independent. Això es pot fer fàcilment a partir de la forma esglaonada reduïda (o qualsevol forma esglaonada) de la matriu: si S és una forma esglaonada de la matriu A, llavors les columnes de A que corresponen a les columnes principals de S formen una base de l'espai columna.

L'espai nul de A també és un subespai vectorial (en aquest cas, de $\mathbb{K}^n$). Recordem la definició d'aquest conjunt.

Definició 14.2.

Anomenem *espai nul* de la matriu A el conjunt de totes les solucions del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$

Per tal de comprovar que l'espai nul és un subespai, notem que el vector zero hi és, perquè $\mathsf{A}\vec{0} = \vec{0}$, i que, a més a més, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors de l'espai nul, per a qualsevol combinació lineal $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$,

$$\mathsf{A}(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1\mathsf{A}\vec{u}_1 + \alpha_2\mathsf{A}\vec{u}_2 = 0$$

així que $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ també es troba a l'espai nul. □

Exemple 14.1.

Trobeu bases de l'espai columna i de l'espai nul de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com que les columnes principals de la la matriu R són la primera, la tercera i la cinquena, les columnes corresponents de la matriu A són una base de l'espai columna de A:

$$B_{\mathrm{Col}\,A} = \{(1, -1, 1, 4), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

☞ Observeu que les columnes segona i quarta de R indiquen que la segona columna de A és -2 vegades la primera ($\vec{a}_2 = -2\vec{a}_1$) i que la quarta columna de A és la tercera menys la primera ($\vec{a}_4 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_3$). Per això, aquestes columnes són innecessàries.

Per trobar una base de l'espai nul, com que el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ és equivalent a $\mathsf{R}\vec{x} = \vec{0}$, resoldrem aquest sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 \\ x_3 &= -x_4 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{x_2=\alpha_1, x_4=\alpha_2} \begin{cases} x_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ x_2 = \alpha_1 \\ x_3 = -\alpha_2 \\ x_4 = \alpha_2 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Aleshores, la solució es pot expressar com

$$\vec{x} = \alpha_1(2, 1, 0, 0, 0) + \alpha_2(1, 0, -1, 1, 0)$$

I, com que els vectors $(2, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 1, 0)$ són linealment independents, podem escollir aquesta base:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}} = \{(2, 1, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 1, 0)\} \quad \square$$

14.1.1. Dimensions de l'espai columna i de l'espai nul

En l'exemple que acabem de veure, les dimensions de l'espai columna i el nul són 3 i 2: com que la matriu és 4×5 i el rang 3, hi ha tres columnes independents (així que la dimensió de l'espai columna és 3) i, en resoldre el sistema lineal, la solució depèn de $5 - 3 = 2$ paràmetres, és a dir, és l'embolcall lineal de dos vectors. En general,

Propietat 14.1.

Si A *és una matriu* $m \times n$ *i el seu rang és* r*, llavors,* $\dim \mathrm{Col}\,\mathsf{A} = r$ *i* $\dim \mathrm{Nul}\,\mathsf{A} = n - r$.

Demostració: La dimensió de l'espai columna és igual al rang de A, perquè el rang és precisament el nombre de columnes linealment independents que té la matriu.

Per a trobar la dimensió de l'espai nul, haurem de fer una mica de treball: suposant que la dimensió de l'espai nul és p, el que volem provar és que $p = n - r$.[1]

Si $p = n$ o $p = 0$, el resultat és evident. En cas contrari, suposem que $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ és una base de l'espai nul de A.

Per fer-ho, completem una base, $\mathcal{B}$, de $\mathbb{K}^n$, afegint a la base de $\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}$ $n - p$ vectors que siguen linealment independents amb els de $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}}$:

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{w}_{p+1}, \dots, \vec{w}_n\}$$

Com que els vectors de $\mathrm{Col}\,\mathsf{A}$ són els de la forma $\mathsf{A}\vec{x}$, amb $\vec{x}$ en $\mathbb{K}^n$, resulta que

$$\mathrm{Col}\,\mathsf{A} = \left\langle \mathsf{A}\vec{u}_1, \mathsf{A}\vec{u}_2, \dots, \mathsf{A}\vec{u}_p, \mathsf{A}\vec{w}_{p+1}, \dots, \mathsf{A}\vec{w}_n \right\rangle$$

Però els vectors $\vec{u}_i$ són a l'espai nul, així que $\mathsf{A}\vec{u}_i = 0$, i, per tant,

$$\mathrm{Col}\,\mathsf{A} = \left\langle \mathsf{A}\vec{w}_{p+1}, \dots, \mathsf{A}\vec{w}_n \right\rangle$$

Vegem que els vectors $\mathsf{A}\vec{w}_{p+1}, \dots, \mathsf{A}\vec{w}_n$ són linealment independents: si $\alpha_{p+1}\mathsf{A}\vec{w}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\mathsf{A}\vec{w}_n = \vec{0}$, tindrem que $\mathsf{A}\left(\alpha_{p+1}\vec{w}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{w}_n\right) = \vec{0}$. Això vol dir que $\alpha_{p+1}\vec{w}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{w}_n$ és a l'espai nul, de manera que és combinació lineal dels vectors de la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}}$:

$$\alpha_{p+1}\vec{w}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{w}_n = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_p\vec{u}_p$$
$$-\beta_1\vec{u}_1 - \beta_2\vec{u}_2 - \cdots - \beta_p\vec{u}_p + \alpha_{p+1}\vec{w}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{w}_n = 0$$

Però aquests n vectors són linealment independents, així que tots els pesos (els alfes i els betes) són iguals a zero.

Això vol dir que el conjunt $\mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{A}} = \{\mathsf{A}\vec{w}_{p+1}, \dots, \mathsf{A}\vec{w}_n\}$ és una base de $\mathrm{Col}\,\mathsf{A}$. I, com que, la dimensió de l'espai columna és r, tindrem que $n - p = r$, és a dir, $p = n - r$ (que és el que havíem de provar). □

14.2. L'espai fila i l'espai nul esquerre

Els altres dos subespais que obtindrem a partir de la matriu A són l'espai fila i l'espai nul esquerre.

Definicions 14.3.

L'*espai fila* de la matriu $m \times n$ A, $\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}$, és l'espai columna de la matriu adjunta A^*: $\mathrm{Fil}\,\mathsf{A} = \mathrm{Col}\,\mathsf{A}^*$.

L'*espai nul esquerre* de la matriu $m \times n$ A és l'espai nul de la matriu adjunta A^*, és a dir, l'espai $\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^*$.

[1] No és suficient el fet que la solució del sistema lineal depén de $n - r$ vectors, perquè caldria justificar que aquests vectors són linealment independents.

Com que A^* és una matriu $n \times m$ i té el mateix rang que la matriu A, la propietat següent és immediata:

Propietat 14.2.

Si A *és una matriu* $m \times n$ *i el seu rang és* r*, llavors,* $\dim \operatorname{Fil} \mathsf{A} = r$ *i* $\dim \operatorname{Nul} \mathsf{A}^* = m - r$. □

Per què aquests espais els anomenem *fila* i *nul esquerre*? Si la matriu A és real, aleshores A^* és la transposada de A; per això, les columnes de la matriu A^* són les files de A, així que,

☞ Si la matriu A és real, l'espai fila és l'embolcall lineal de les files de A.

D'altra banda, l'espai nul esquerre, $\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*$, és la solució del sistema lineal $\mathsf{A}^*\vec{x} = \vec{0}$. Aquest sistema el podem reescriure d'aquesta manera:

$$\mathsf{A}^*\vec{x} = \vec{0} \iff (\mathsf{A}^*\vec{x})^* = \vec{0}^* \iff \vec{x}^*\mathsf{A} = \mathsf{O}$$

això, en el cas real, és equivalent a $\vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \mathsf{O}$, així que

☞ Si la matriu A és real, l'espai nul esquerre és el conjunt dels vectors que anul·len la matriu *per l'esquerra*.

Exemple 14.2.

Trobeu bases dels espais fila i nul esquerre de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Com que la matriu A és real, l'espai fila és l'embolcall lineal de les files de A. D'aquesta matriu ja en coneixem la forma esglaonada reduïda,

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

així que, com a base de l'espai fila, podem elegir el conjunt

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Fil} \mathsf{A}} = \{(1, -2, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

La forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\mathsf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

així que la incògnita no principal és la tercera. Les solucions del sistema $\mathsf{A}^*\vec{x} = \vec{0}$ són

$$x_1 = -3\alpha, \quad x_2 = -2\alpha, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = 0$$

o bé

$$\vec{x} = \alpha(-3, -2, 1, 0)$$

i la base que busquem és aquesta:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^*} = \{(-3, -2, 1, 0)\}$$

que té, com calia esperar, $4 - \operatorname{rang}\mathsf{A} = 4 - 3 = 1$ vector. ▫

14.3. Subespais ortogonals

El que sabem, ara per ara, dels quatre subespais és açò:

Si A és una matriu $m \times n$ de rang r, llavors

(a) Els espais nul i fila són subespais de $\mathbb{K}^n$, de dimensions $n - r$ i r, respectivament.

(b) Els espais nul esquerre i columna són subespais de $\mathbb{K}^m$, de dimensions $m - r$ i r, respectivament.

Però encara ens queda una propietat molt important: entre aquests subespais hi ha una relació d'ortogonalitat. Vegem què entenem per subespais ortogonals.

Direm que dos conjunts de vectors de $\mathbb{K}^n$, A i B, són *ortogonals* si tots els vectors de A són ortogonals a tots els de B, i anomenarem *espai ortogonal de* A, $A^\perp$, el conjunt de tots els vectors que són ortogonals a A. El nom d'*espai* ortogonal està justificat per la propietat següent:

Propietat 14.3.

Si A és un conjunt qualsevol de vectors de $\mathbb{K}^n$ llavors, el conjunt $A^\perp$ és un subespai de $\mathbb{K}^n$.

Demostració: Com que el vector zero és ortogonal a qualsevol altre vector, tenim que $\vec{0} \in A^\perp$. L'altra condició que s'ha de complir és que si elegim dos vectors qualssevol en $A^\perp$, $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ i dos escalars α_1 i α_2, llavors la combinació lineal $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ també es troba en $A^\perp$; ara bé, que $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ siguen elements de $A^\perp$ vol dir que, per a qualsevol $\vec{a} \in A$, $\vec{u}_1 \cdot \vec{a} = 0$ i $\vec{u}_2 \cdot \vec{a} = 0$. En conseqüència,

$$(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) \cdot \vec{a} = \alpha_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{a}) + \alpha_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{a}) = 0$$

així que $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \in A^\perp$, $\forall \vec{a} \in A$ □

14.3.1. Ortogonalitat dels quatre subespais

Els espais columna i nul esquerre són mútuament ortogonals. Més ben dit, són l'ortogonal l'un de l'altre.

Propietat 14.4.

Per a qualsevol matriu A, $(\operatorname{Col}\mathsf{A})^\perp = \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$.

Demostració: En primer lloc, provarem que $(\operatorname{Col}\mathsf{A})^\perp = \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$: Un vector $\vec{x}$ és ortogonal a l'espai columna de A si i només si és ortogonal a totes les columnes de A, és a dir,

$$\vec{x} \in (\operatorname{Col}\mathsf{A})^\perp \iff \begin{Bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} = \vec{0} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{x} = \vec{0} \\ \cdots \\ \vec{a}_m \cdot \vec{x} = \vec{0} \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} \vec{a}_1^*\vec{x} = \vec{0} \\ \vec{a}_2^*\vec{x} = \vec{0} \\ \cdots \\ \vec{a}_m^*\vec{x} = \vec{0} \end{Bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \vec{a}_1^* \\ \vec{a}_2^* \\ \cdots \\ \vec{a}_m^* \end{bmatrix} \vec{x} = \mathsf{O}$$
$$\iff \mathsf{A}^*\vec{x} = \mathsf{O} \iff \vec{x} \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}^* \quad \square$$

Sabem que la suma de les dimensions dels espais columna i nul esquerre és igual a la dimensió de $\mathbb{K}^n$. Això ens suggeriex que, si unim una base de l'espai columna i una de l'espai nul esquerre, obtindrem una base de l'espai $\mathbb{K}^m$.[2] Això és el que diu la propietat següent.

Propietat 14.5.

Si $\mathcal{B}_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}$ *i* $\mathcal{B}_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*}$ *són bases de l'espai columna i de l'espai nul esquerre de* A, *aleshores el conjunt unió,* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\operatorname{Col}\mathsf{A}} \cup \mathcal{B}_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*}$, *és una base de* $\mathbb{K}^m$.

Demostració: Com que les dimensions dels espais columna i nul esquerre són r i $m - r$, momés hem de provar que el conjunt $\mathcal{B}$ és linealment independent. Així que suposem que $\mathcal{B}_{\operatorname{Col}\mathsf{A}} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ i $\mathcal{B}_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*} = \{\vec{w}_{r+1}, \vec{w}_{r+2}, \ldots, \vec{w}_m\}$ i que una combinació lineal de tots aquests vectors és nul·la:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r + \beta_{r+1}\vec{w}_{r+1} + \cdots + \beta_n\vec{w}_m = 0$$
$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r = -\beta_{r+1}\vec{w}_{r+1} - \cdots - \beta_n\vec{w}_m$$

[2] Això vol dir que $\mathbb{K}^n$ és la suma directa dels espais columna i nul esquerre, com veurem més endavant.

Aquesta igualtat indica que el vector $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r$ es troba, simultàniament, en $\operatorname{Col} \mathsf{A}$ i en $\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*$. Per tant, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, així que $\vec{u} = \vec{0}$.

Aleshores, de les igualtats

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r &= 0 \\ -\beta_{r+1}\vec{w}_{r+1} - \cdots - \beta_n\vec{w}_m &= 0 \end{aligned}$$

es dedueix que tots els escalars són iguals a zero. $\square$

Adés hem provat que l'ortogonal de l'espai columna és l'espai nul esquerre. Ara veurem que, recíprocament, l'ortogonal de l'espai nul esquerre és l'espai columna.

PROPIETAT 14.6.

Per a qualsevol matriu A, $(\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*)^\perp = \operatorname{Col} \mathsf{A}$.

Demostració: Provarem que $\operatorname{Col} \mathsf{A} \subset (\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*)^\perp$ i $(\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*)^\perp \subset \operatorname{Col} \mathsf{A}$.

Si $\vec{u} \in \operatorname{Col} \mathsf{A}$, per la propietat 14.4, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ per a qualsevol vector de $\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*$, així que $\operatorname{Col} \mathsf{A} \subset (\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*)^\perp$.

D'altra banda, de la propietat 14.5 es dedueix que qualsevol vector de $\mathbb{K}^m$ és igual a la suma d'un vector de l'espai columna i un altre de l'espai nul esquerre. En conseqüència, si $\vec{u}$ és un vector de $(\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*)^\perp$, el podrem escriure com $\vec{u} = \vec{u}_c + \vec{u}_n$, on $\vec{u}_c$ és a l'espai columna i $\vec{u}_n$ a l'espai nul esquerre. Aleshores, $\vec{u} \cdot \vec{u}_n = \vec{u}_c \cdot \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{u}_n = 0$, perquè $\vec{u}_n$ és ortogonal a $\vec{u}$. Però $\vec{u}_c \cdot \vec{u}_n$ també és zero, així que $\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n = 0$ i, per tant, $\vec{u}_n = \vec{0}$. En definitiva, $\vec{u} = \vec{u}_c$ és a l'espai columna i $(\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*)^\perp \subset \operatorname{Col} \mathsf{A}$. $\square$

Canviant els papers de les matrius A i A^*, podem trobar propietats anàlogues (a les propietats 14.4-14.6) sobre els espais fila i nul:

PROPIETATS 14.7.

(a) Si $\mathcal{B}_{\operatorname{Fil} \mathsf{A}}$ *i* $\mathcal{B}_{\operatorname{Nul} \mathsf{A}}$ *són bases de l'espai fila i de l'espai nul de* A*, aleshores la unió* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\operatorname{Fil} \mathsf{A}} \cup \mathcal{B}_{\operatorname{Nul} \mathsf{A}}$ *és una base de* $\mathbb{K}^n$*.*

(b) Per a qualsevol matriu A, $(\operatorname{Fil} \mathsf{A})^\perp = \operatorname{Nul} \mathsf{A}$ *i* $(\operatorname{Nul} \mathsf{A})^\perp = \operatorname{Fil} \mathsf{A}$. $\square$

El teorema següent resumeix tot el que sabem (ara per ara) sobre els quatre subespais. Aquest teorema és tan important que alguns l'anomenen *el teorema fonamental de l'àlgebra lineal.*

Teorema 14.8.

Suposem que A *és una matriu* $m \times n$ *de rang* r*. Aleshores,*

1. $\operatorname{Col}\mathsf{A}$ *i* $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$ *són subespais de* $\mathbb{K}^m$ *i*

   – $\dim \operatorname{Col}\mathsf{A} = r$.

   – $\dim \operatorname{Nul}\mathsf{A}^* = m - r$.

   – *La unió d'una base de l'espai columna i una de l'espai nul esquerre és una base de* $\mathbb{K}^m$.

   – *Aquests dos subespais són cadascun l'ortogonal de l'altre.*

2. $\operatorname{Fil}\mathsf{A}$ *i* $\operatorname{Nul}\mathsf{A}$ *són subespais de* $\mathbb{K}^n$ *i*

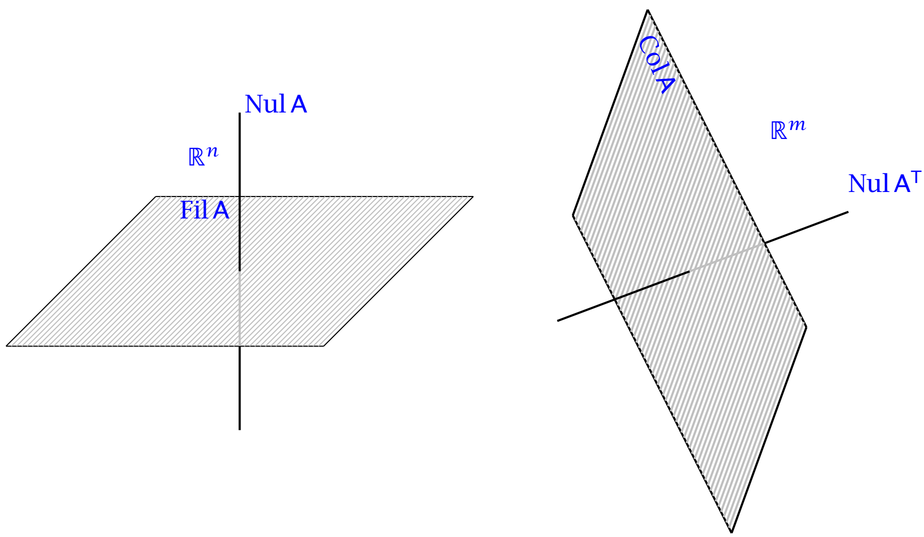
   – $\dim \operatorname{Fil}\mathsf{A} = r$.

   – $\dim \operatorname{Nul}\mathsf{A} = n - r$.

   – *La unió d'una base de l'espai fila i una de l'espai nul és una base de* $\mathbb{K}^n$.

   – *Aquests dos subespais són cadascun l'ortogonal de l'altre.* □

El gràfic següent mostra totes aquestes propietats (l'espai nul *esquerre* és el que queda més a la dreta!).

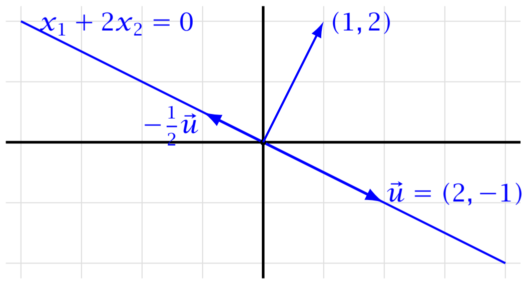


Els quatre subespais d'una matriu real 3×3 de rang 2

14.4. Subespais i matrius. Les equacions d'un subespai

Hi ha dues maneres típiques de presentar un subespai: mostrant-ne una base (o un conjunt generador) o bé un sistema d'equacions la solució del qual és el subespai. Això es pot fer perquè *qualsevol subespai de $\mathbb{K}^n$ és igual a l'espai fila (o columna) d'una matriu i l'espai nul (o nul esquerre) d'una altra.* Per exemple, el subespai (de $\mathbb{R}^2$) $F = \{\alpha(2,-1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ és

- l'espai fila de $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$,
- l'espai columna de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,
- l'espai nul de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$
- i l'espai nul esquerre de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.



En conseqüència,

- El conjunt $\mathcal{B}_F = \{2,-1\}$ és una base de F i
- F és el conjunt de solucions de l'equació $x_1+2x_2 = 0$ (o el conjunt ortogonal al vector $(1,2)$).

Vegem com podem trobar aquestes matrius:

- El més senzill és representar un subespai com l'espai fila o columna d'una matriu: si $\mathcal{B}$ és una base de F llavors, F és l'espai columna de la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}$ o, equivalentment, l'espai fila de $\mathsf{A}_1 = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}^*$.
- D'altra banda, tenint en compte les relacions d'ortogonalitat entre els subespais fila i nul, tindrem que $F = \operatorname{Fil}\mathsf{A}_1 = (\operatorname{Nul}\mathsf{A}_1)^{\perp}$.

  Per tant, resolent el sistema lineal $\mathsf{A}_1\vec{x} = 0$, obtindrem una base de $\operatorname{Nul}\mathsf{A}_1$, $\mathcal{B}'$. Llavors, si $\mathsf{A}_2 = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'}$, l'ortogonal de F és l'espai $F^{\perp} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}_1 = \operatorname{Col}\mathsf{A}_2$, així que
$$F = (\operatorname{Col}\mathsf{A}_2)^{\perp} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}_2^*$$

Exemple 14.3.

Trobeu una base del subespai
$$F = \{(a+b, a-b, a) : a, b \in \mathbb{K}\}$$
i expresseu F com l'espai fila d'una matriu i l'espai nul d'una altra matriu.

Primer de tot, trobarem una base de F. Si observem que
$$F = \{a(1,1,1) + b(1,-1,0) : a, b \in \mathbb{K}\}$$

com que els vectors $(1,1,1)$ i $(1,-1,0)$ són linealment independents, el conjunt

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,-1,0)\}$$

és base de F. En conseqüència,

$$F = \operatorname{Fil}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tot seguit trobarem una base de $F^{\perp} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, resolent el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solució general d'aquest sistema és $\vec{x} = \alpha(-1/2,-1/2,1)$, així que

$$F = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Que un subespai coincidisca amb l'espai nul d'una matriu vol dir que podem expressar aquest subespai com el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals.

Així, com que el subespai F del darrer exemple és l'espai nul de la matriu $\mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$, tindrem que

$$F = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{K}^3 : -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0\right\}$$

☞ Direm que $-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0$ és *l'equació* del subespai F.

Obtenció de les equacions d'un subespai de $\mathbb{K}^n$

1. Expresseu el subespai F com l'espai fila d'una matriu: $F = \operatorname{Fil}\mathsf{A}_1$.
2. Resoleu el sistema lineal $\mathsf{A}_1\vec{x} = \vec{0}$.

   Això ens proporciona una base de l'ortogonal de F, $F^{\perp} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}_1$.
3. Construïu la matriu A_2 les columnes de la qual són els elements d'aquesta base. Llavors, $\mathsf{F}^{\perp} = \operatorname{Col}\mathsf{A}_2$.
4. Per tant, $F = \operatorname{Nul}\mathsf{A}_2^*$.

☞ Les equacions de F són $\mathsf{A}_2^*\vec{x} = \vec{0}$.

EXEMPLE 14.4.

Trobeu les equacions del subespai de $\mathbb{R}^3$ $F = \langle(1,1,1)\rangle$.

(a) $F = \operatorname{Fil}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

(b) Per tant, $F^\perp = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Resolent el sistema lineal $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\vec{x} = \vec{0}$ obtenim que $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ és una base de $F^\perp$.

(c) Llavors, $F^\perp = \operatorname{Col}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

(d) Per tant, $F = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Així que les equacions de F són

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 \quad\quad &= 0\\ -x_1 \quad\quad + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \square$$

14.5. RESUM

Els quatre subespais

- L'*espai columna* de la matriu $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{Col}\mathsf{A}$, és el conjunt de totes les combinacions lineals de les columnes de A.
  - ☞ L'espai columna és el conjunt de vectors $\vec{b}$ per als quals el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és compatible.
- L'*espai fila* de la matriu A és el conjunt $\operatorname{Fil}\mathsf{A} = \operatorname{Col}\mathsf{A}^*$.
- L'*espai nul* de la matriu A, $\operatorname{Nul}\mathsf{A}$, és el conjunt de totes les solucions del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$.
- L'*espai nul esquerre* de la matriu és l'espai nul de la matriu adjunta, $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$.

L'ortogonal d'un subespai

☞ Dos conjunts A i B són *ortogonals* si tots els vectors de A són ortogonals a tots els de B.

☞ L'ortogonal del subespai F és el subespai $F^\perp$ format per tots els vectors ortogonals a F.

$(\cdots)$

(⋯)

Propietats dels quatre subespais[a]

- L'espai columna i l'espai nul esquerre són subespais de $\mathbb{K}^m$.
- L'espai fila i l'espai nul són subespais de $\mathbb{K}^n$.
- Si $\operatorname{rang} \mathsf{A} = r$ llavors,
  - $\dim \operatorname{Col} \mathsf{A} = \dim \operatorname{Fil} \mathsf{A} = r$.
  - $\dim \operatorname{Nul} \mathsf{A} = n - r$.
  - $\dim \operatorname{Nul} \mathsf{A}^* = m - r$.
- $\operatorname{Fil} \mathsf{A}^\perp = \operatorname{Nul} \mathsf{A}, \qquad \operatorname{Col} \mathsf{A}^\perp = \operatorname{Nul} \mathsf{A}^*$

Subespais i matrius. Equacions d'un subespai

Qualsevol subespai F de $\mathbb{K}^n$ és un dels quatre subespais d'una matriu adequada:

- Si $F = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$ i $\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ llavors, $F = \operatorname{Col} \mathsf{A}_1$.
- $F = \operatorname{Col} \mathsf{A}_1 = (\operatorname{Nul} \mathsf{A}_1^*)^\perp$.

  Per tant, si $\mathcal{B}_2 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ és una base de $\operatorname{Nul} \mathsf{A}_1^*$ i $\mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$, $F = \operatorname{Nul} \mathsf{A}_2^*$, és a dir, el subespai F és el conjunt de solucions del sistema d'equacions $\mathsf{A}_2^* \vec{x} = \vec{0}$.

[a] vegeu el resum de la lliçó 16, a la pàgina 243

14.6. Exercicis

Els quatre subespais

Exercici 14.1. Trobeu (si és possible) bases dels quatre subespais associats a les matrius següents:

(a) $\mathsf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathsf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\mathsf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 576)

Exercici 14.2. La matriu A té 7 files i 5 columnes i el seu rang és 4. Quines són les dimensions dels quatre subespais associats a aquesta matriu?

(solució: pàg. 578)

Exercici 14.3. (a) Quina condició ha de complir la matriu $m \times n$ A perquè l'espai columna de A siga $\mathbb{K}^m$?

(b) I perquè l'espai nul siga $\{\vec{0}\}$?
(c) Si A és una matriu $n \times n$ invertible, quins són els quatre subespais associats a A?

(solució: pàg. 578)

Exercici 14.4. Donada la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Calculeu la forma esglaonada reduïda R de la matriu A, la matriu T tal que $\mathsf{R} = \mathsf{TA}$ i la matriu inversa $\mathsf{L} = \mathsf{T}^{-1}$ (tot això requereix únicament una operació elemental).

(b) Trobeu els quatre subespais deduïts de A.

(c) Quina relació hi ha entre l'espai columna de A i les columnes de L? Per què?

(d) Quina relació hi ha entre l'espai nul de A^* i les files de T? Per què?

(e) Sabent que

$$\mathsf{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{R}}$$

determineu bases dels quatre subespais associats a B sense calcular explícitament la matriu B.

(solució: pàg. 578)

Exercici 14.5. Trobeu els valors del paràmetre λ per als quals l'espai nul de la matriu $\mathsf{A}_\lambda = \left[\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{smallmatrix}\right]$ *no és* el subespai $\{\vec{0}\}$.

(solució: pàg. 581)

Ortogonalitat i sistemes lineals

Exercici 14.6. Trobeu l'ortogonal del conjunt $S = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$. Quina relació hi ha entre S i $(S^\perp)^\perp$?

(solució: pàg. 581)

Exercici 14.7. Suposem que S és un subconjunt de $\mathbb{K}^n$. Quina condició s'ha de complir perquè $S = (S^\perp)^\perp$?

(solució: pàg. 581)

Exercici 14.8. Si S i T són dos subconjunts de $\mathbb{K}^n$ i $S \subset T$, quina relació hi ha entre $S^\perp$ i $T^\perp$?

(solució: pàg. 582)

Exercici 14.9. Proveu que, si S és un subconjunt de $\mathbb{K}^n$, llavors, $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$.
(solució: pàg. 582)

Exercici 14.10. Quina relació hi ha entre els conjunts S i T, si $S^\perp = T^\perp$?
(solució: pàg. 582)

Subespais i matrius

Exercici 14.11. Expresseu cadascun dels subespais següents com l'espai fila d'una matriu i com l'espai nul d'una altra matriu.

(a) $F_1 = \langle (1, -1, 2) \rangle$
(b) $F_2 = \langle (1, 1, 0), (-2, 0, 1) \rangle$
(c) $F_3 = \{(a, a+b, a+2b, -a) : a, b \in \mathbb{K}\}$
(d) $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0, x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$

(solució: pàg. 583)

Exercici 14.12. Trobeu una base i les equacions de cadascun dels subespais de l'exercici anterior.
(solució: pàg. 584)

Exercici 14.13. Trobeu les equacions del subespai $F = \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$ i una base del subespai $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$.
(solució: pàg. 584)

LLIÇÓ 15. INTERSECCIÓ I SUMA DE SUBESPAIS. SUMA DIRECTA

Els símbols algèbrics es fan servir
quan no saps de què estàs parlant
Philippe Schnoebelen

> La intersecció de dos (o més de dos) subespais també és un subespai. En canvi, la unió no sempre ho és. Per això introduïm el concepte de *suma* de subespais (el mínim subespai que conté la unió).

15.1. INTERSECCIÓ DE DOS SUBESPAIS

La intersecció de dos subespais també és un subespai.[1] Per comprovar-ho, serà suficient que observem que si elegim les matrius A_1 i A_2 de manera que $F = \operatorname{Nul} \mathsf{A}_1$ i $G = \operatorname{Nul} \mathsf{A}_2$, llavors les condicions que s'han de complir perquè el vector $\vec{u}$ es trobe a la intersecció $F \cap G$ són aquestes:

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \mathsf{A}_1 \vec{u} = \vec{0}, \qquad \mathsf{A}_2 \vec{u} = \vec{0}$$

Però aquestes dues condicions es poden expressar com una de sola, si fem servir la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \end{bmatrix}$:

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \end{bmatrix} \vec{u} = \vec{0}$$

I això vol dir que $\vec{u} \in F \cap G \iff \vec{u} \in \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \end{bmatrix}$. En altres paraules, $F \cap G$ és l'espai nul de la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \end{bmatrix}$, així que, efectivament, és un subespai. $\square$

☞ A banda de demostrar que la intersecció de dos subespais també és un subespai, hem trobat un algorisme senzill per calcular la intersecció de dos subespais:

> **Càlcul de la intersecció de dos subespais F i G (a partir de les equacions)**
>
> – Expresseu F i G com a espais nuls: $F = \operatorname{Nul} \mathsf{A}_1$, $G = \operatorname{Nul} \mathsf{A}_2$.
>
> - La intersecció és $F \cap G = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \end{bmatrix}$.

[1] La intersecció de més de dos subespais (encara en el cas d'infinits subespais) també és un subespai.

Exemple 15.1.

Trobeu el subespai intersecció dels subespais

$$F = \langle (1,1,0,1), (1,2,1,1) \rangle$$
$$G = \langle (1,1,1,1), (1,3,3,1) \rangle$$

(Primera solució) Primer de tot expressarem els dos subespais com a espais nuls. Com que F és l'espai fila de la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, l'ortogonal de F és

$$F^{\perp} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,-1,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$$

així que $F = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

De manera anàloga es prova que $G = \text{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Per tant, la intersecció és

$$F \cap G = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,1,1,0) \rangle \qquad \square$$

(Solució alternativa) Com que, en aquest exemple, coneixíem una base de cada subespai, hem hagut de trobar els subespais ortogonals per tal de poder expressar F i G com a espais nuls. Si volem evitar aquests càlculs, podem raonar de la següent manera: Si el vector $\vec{u}$ es troba a la intersecció $F \cap G$, llavors,

- per una banda, $\vec{u} \in F$, així que existeixen dos escalars x_1 i x_2 de manera que

$$\vec{u} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \text{on } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- per una altra, per ser $\vec{u}$ un vector de G,

$$\vec{u} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{a}, \qquad \text{on } a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Reunint aquestes dues condicions, tindrem que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{a}$$

Aquesta igualtat la podem interpretar com un sistema d'equacions lineals en el qual les incògnites són les x i es tracta de trobar com han de ser els paràmetres a perquè el sistema siga compatible. Restant a la segona i a la quarta equacions d'aquest sistema la primera tindrem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{a}$$

i, restant la segona de la tercera,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \vec{x} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \vec{a} = \left[\begin{array}{c} a_1 + a_2 \\ 2a_2 \\ \hline a_1 + a_2 \\ 0 \end{array}\right]$$

D'aquesta manera, la matriu del costat esquerre és esglaonada i el sistema serà compatible si $a_1 + a_2 = 0$ (o $a_1 = -a_2$). Per tant,

$$\vec{u} = -a_2(1,1,1,1) + a_2(1,3,3,1) = a_2(0,2,2,0)$$

En definitiva, $F \cap G = \langle (0,1,1,0) \rangle$. □

Aquest segon mètode és el més eficient si es vol trobar una base de la intersecció de dos subespais F i G dels quals es coneixen les bases $\mathcal{B}_F = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ i $\mathcal{B}_G = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$: com que

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Col}\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p \end{bmatrix} = \mathrm{Col}\,\mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} \\ G &= \mathrm{Col}\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_q \end{bmatrix} = \mathrm{Col}\,\mathsf{M}_{\mathcal{B}_G} \end{aligned}$$

un vector $\vec{u}$ que es trobe en el subespai intersecció serà combinació lineal dels vectors d'una base i també dels de l'altra:

$$\vec{u} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_F}\vec{x} \qquad \vec{u} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\vec{a}$$

així que hem de trobar els valors dels paràmetres $\vec{a}$ perquè el sistema

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}_F}\vec{x} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\vec{a} \tag{15.1}$$

siga compatible.

Com que el rang de $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_F}$ és p (el nombre de columnes que té, perquè són linealment independents), la forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és $\begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{O} \end{bmatrix}$ (I és la identitat $p \times p$ i O és la matriu zero $(n-p) \times p$). En conseqüència, fent operacions elementals el sistema (15.1) queda d'aquesta manera:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{O} \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} \mathsf{V}_1 \\ \mathsf{V}_2 \end{bmatrix} \vec{a}$$

Finalment, perquè aquest sistema siga compatible caldrà que

$$\mathsf{V}_2\vec{a} = \vec{0}$$

☞ La solució general d'aquest darrer sistema lineal ens proporciona les condicions que han de complir els paràmetres $\vec{a}$.

Esquemàticament,

Càlcul de la intersecció de dos subespais F i G (a partir de les bases de F i G)

1. Elegiu dues bases $\mathcal{B}_F$ (base de F) i $\mathcal{B}_G$ (base de G).
2. Feu les operacions elementals convenients per transformar

$$\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{U} & \mathsf{V}_1 \\ \mathsf{O} & \mathsf{V}_2 \end{array}\right]$$

   on U és invertible.

3. Resoleu el sistema homogeni

$$\mathsf{V}_2\vec{a} = \vec{0}$$

   – La intersecció és el conjunt de tots els vectors de la forma

$$\vec{u} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\vec{a}$$

   on $\vec{a}$ són les solucions del sistema que acabem de resoldre.

15.2. Suma de dos subespais

Al contrari que la intersecció, la unió $F \cup G$ dels subespais F i G no és sempre un subespai.

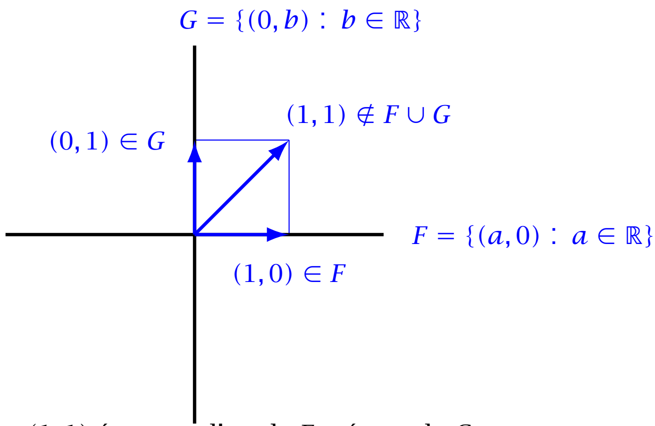
Exemple 15.2.

Siguen F i G els subespais de $\mathbb{R}^2$ definits com

$$F = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$$
$$G = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

(F i G són les dues rectes coordenades). Proveu que $F \cup G$ no és un subespai de $\mathbb{R}^2$.

Si sumem els vectors $(1,0)$ (que és de F) i $(0,1)$ (de G) obtenim $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ que no és de F ni de G! ▫



El vector $(1,1)$ és suma d'un de F més un de G
però no es troba a F ni a G

Com que, en general, la unió no arriba a ser subespai, hi afegirem els vectors que calga fins a aconseguir un subespai.

DEFINICIÓ 15.1.

La *suma* dels subespais F i G és el conjunt de totes les sumes d'un element de F més un de G. Aquest conjunt el representarem com $F + G$:

$$F + G = \{\vec{u} + \vec{v} : \vec{u} \in F,\ \vec{v} \in G\}$$

EXEMPLE 15.3.

La suma dels subespais $F = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ i $G = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$ és l'espai $\mathbb{R}^2$.

Això és evident, perquè qualsevol vector de $\mathbb{R}^2$ el podem escriure com

$$\vec{x} = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) \quad \square$$

Per trobar un mètode de càlcul de la suma, notem que, si el conjunt $\mathcal{B}_F$ és base de F i $\mathcal{B}_G$ ho és de G, llavors la unió $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ genera $F + G$. En altres paraules,

$$\text{si } \mathcal{B}_F \text{ és base de } F \text{ i } \mathcal{B}_G \text{ ho és de } G \text{ llavors, } F + G = \operatorname{Col}\begin{bmatrix} \mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G} \end{bmatrix}.$$

Aquesta expressió implica que la suma $F + G$ també és un subespai (de fet és el subespai *més petit* que conté a $F \cup G$, perquè un subespai que continga els vectors de F i els de G també haurà de contenir les sumes d'aquests vectors) i ens proporciona l'algorisme que cercàvem:

Càlcul de la suma de dos subespais F i G

– Trobeu una base, $\mathcal{B}_F$, de F i una de G, $\mathcal{B}_G$.

- La suma és $F + G = \mathrm{Col}\begin{bmatrix} \mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G} \end{bmatrix}$.

EXEMPLE 15.4.

Trobeu el subespai suma dels subespais

$$F = \langle (1,1,0,1), (0,1,1,0) \rangle$$
$$G = \langle (1,1,1,1), (1,3,3,0) \rangle$$

Els conjunts $\mathcal{B}_F = \{(1,1,0,1), (0,1,1,0)\}$ i $\mathcal{B}_G\{(1,1,1,1), (1,3,3,0)\}$ són bases de F i G, respectivament. Per tant,

$$F + G = \mathrm{Col}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com que la forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

els quatre vectors són linealment independents i la dimensió de $F + G$ és 4, de manera que $F + G = \mathbb{K}^4$. □

EXEMPLE 15.5.

Trobeu el subespai suma dels subespais

$$F = \langle (1,1,0,1), (1,2,1,1) \rangle$$
$$G = \langle (1,1,1,1), (1,3,3,1) \rangle$$

Elegint les bases $\{(1,1,0,1), (1,2,1,1)\}$ i $\{(1,1,1,1), (1,3,3,1)\}$ tindrem

$$F + G = \mathrm{Col}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

així que els tres primers vectors formen una base de l'espai suma:

$$\boxed{\mathcal{B}_{F+G} = \{(1,1,0,1),(1,2,1,1),(1,1,1,1)\}} \quad \square$$

Entre aquests dos exemples hi ha una diferència important: en el primer cas, la suma de dos subespais de dimensió dos és un subespai de dimensió quatre. En canvi, en el segon exemple, la suma *només* té dimensió tres. En els propers apartats estudiarem les dimensions de la suma i la intersecció i justificarem aquesta diferència.

15.3. Ortogonals dels espais suma i intersecció

Propietats 15.1.

(a) L'ortogonal de l'espai suma és la intersecció dels ortogonals dels dos subespais: $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) L'ortogonal de l'espai intersecció és la suma dels ortogonals dels dos subespais: $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Demostració: Si $F = \operatorname{Col} \mathsf{A}_1$ i $G = \operatorname{Col} \mathsf{A}_2$, com que en la lliçó anterior vam veure que l'ortogonal de l'espai columna és l'espai nul esquerre, tindrem que $F^\perp = \operatorname{Nul} \mathsf{A}_1^*$ i $G^\perp = \operatorname{Nul} \mathsf{A}_2^*$ així que

$$F^\perp \cap G^\perp = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1^* \\ \mathsf{A}_2^* \end{bmatrix}$$

D'altra banda, com que la suma és l'espai columna de la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 \end{bmatrix}$, l'ortogonal de l'espai suma serà

$$(F+G)^\perp = \left(\operatorname{Col} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 \end{bmatrix}\right)^\perp = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 \end{bmatrix}^* = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1^* \\ \mathsf{A}_2^* \end{bmatrix}$$

de manera que, efectivament, els subespais $(F+G)^\perp$ i $F^\perp \cap G^\perp$ són iguals.

La segona propietat es justifica de manera anàloga: Elegint les matrius B_1 i B_2 perquè F i G siguen els espais nuls de B_1^* i B_2^*, l'ortogonal de $F \cap G = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} \mathsf{B}_1^* \\ \mathsf{B}_2^* \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 \end{bmatrix}^*$ és $(F \cap G)^\perp = \operatorname{Col} \begin{bmatrix} \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 \end{bmatrix}$. I la suma de $F^\perp = \operatorname{Col} \mathsf{B}_1$ i $G^\perp = \operatorname{Col} \mathsf{B}_2$ és $F^\perp + G^\perp = \operatorname{Col} \begin{bmatrix} \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 \end{bmatrix}$. $\square$

15.4. La dimensió de la suma i la intersecció

Notem que tant la suma com la intersecció de dos subespais F i G es poden calcular a partir de la matriu que resulta de concatenar les matrius associades a una base de cada subespai, $\mathsf{M} = \begin{bmatrix}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\end{bmatrix}$, en un cas, calculant-ne l'espai columna i en l'altre a partir de l'espai nul d'una matriu deduïda d'aquesta. Per tant, és clar que les dimensions d'aquests dos espais han d'estar relacionades d'alguna manera, entre elles, i amb aquesta matriu.

15.4.1. La dimensió de la suma

El més senzill és calcular la dimensió de l'espai suma: Si $\mathcal{B}_F$ i $\mathcal{B}_G$ són bases de F i G, respectivament, com que $F + G$ és l'espai columna de la matriu M, és clar que la dimensió de $F + G$ és

$$\boxed{\dim(F + G) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\end{bmatrix}} \tag{15.2}$$

15.4.2. La dimensió de la intersecció

Recordem el que hem de fer per a calcular la intersecció $F \cap G$:

- Transformem, per mitjà d'operacions elementals, la matriu $\begin{bmatrix}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\end{bmatrix}$ a una de la forma
$$\begin{bmatrix}\mathsf{U} & \mathsf{V}_1 \\ \mathrm{O} & \mathsf{V}_2\end{bmatrix}$$
on U és invertible.
- Resolem el sistema homogeni
$$\mathsf{V}_2\vec{a} = \vec{0}$$
- Multiplicant $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}$ per les solucions d'aquest sistema obtenim tots els vectors de la intersecció.

Per tant, la dimensió de l'espai intersecció serà el nombre d'incògnites no principals que tinga el sistema homogeni $\mathsf{V}_2\vec{a} = \vec{0}$, és a dir,

$$\dim(F \cap G) = \dim(\operatorname{Nul}\mathsf{V}_2)$$

Per acabar de calcular aquesta dimensió ens hem de fixar en les dimensions de les matrius que hi intervenen. En la matriu

$$\begin{bmatrix}\mathsf{U} & \mathsf{V}_1 \\ \mathrm{O} & \mathsf{V}_2\end{bmatrix}$$

tenim aquestes dimensions (suposem que p i q són, respectivament, les dimensions de F i G):

(a) U és una matriu $p \times p$ (perquè p és la dimensió de F).

(b) O és la matriu zero $(n-p) \times p$ (perquè estem en $\mathbb{K}^n$).

(c) V_1 és una matriu $p \times q$ (perquè q és la dimensió de G).

$$n\left\{\overbrace{\left[\begin{array}{c|c} p \times p & p \times q \\ \hline (n-p) \times p & (n-p) \times q \end{array}\right]}^{p+q}\right.$$

(d) En conseqüència, V_2 és una matriu $(n-p) \times q$ i, per tant,

$$\dim(F \cap G) = \dim(\operatorname{Nul} \mathsf{V}_2) = q - \operatorname{rang} \mathsf{V}_2$$

(perquè la dimensió de l'espai nul és el nombre de columnes menys el rang de la matriu).

D'altra banda, el rang de V_2 és la diferència entre el rang de la matriu gran, M, i el rang del primer bloc, que és p, així que

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= q - \operatorname{rang} \mathsf{V}_2 \\ &= q - (\operatorname{rang} \mathsf{M} - p) \\ &= p + q - \operatorname{rang} \mathsf{M} \end{aligned}$$

És a dir,

$$\boxed{\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G} \end{bmatrix}} \quad \square \tag{15.3}$$

15.4.3. La fórmula de Grassmann

Comparant les fórmules (15.2) i (15.3) obtenim el resultat següent:

Teorema 15.2. (Fórmula de Grassmann)

Si F i G són dos subespais de $\mathbb{K}^n$, llavors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \quad \square \tag{15.4}$$

Exemple 15.6.

Comproveu la fórmula de Grassmann en el cas dels subespais

$$\begin{aligned} F &= \langle (1,1,0,1), (1,2,1,1) \rangle \\ G &= \langle (1,1,1,1), (1,3,3,1) \rangle \end{aligned}$$

(a) Les dimensions de F i G són aquestes: $\dim F = 2$ i $\dim G = 2$.

(b) D'altra banda, en l'exemple 15.1 hem trobat que $F \cap G = \langle (0,1,1,0) \rangle$, així que $\dim(F \cap G) = 1$.

(c) i, en l'exemple 15.5, que $\{(1,1,0,1),(0,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ és una base de $F+G$; per tant, $\dim(F+G)=3$.

Llavors,

$$\dim F + \dim G - \dim(F\cap G) = 2+2-1 = 3 = \dim(F+G) \qquad \square$$

15.5. Suma directa

Quan $F\cap G=\{\vec{0}\}$ la fórmula de Grassmann es redueix a

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G$$

i es pot construir una base de la suma fent la unió d'una base de F i una altra de G. En aquest cas, es diu que la suma $F+G$ és directa.

Definició 15.2.

La suma dels subespais F i G és *directa* si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ (o, equivalentment, quan $F\cap G = \{\vec{0}\}$).

☞ Quan es vol remarcar que la suma és directa s'escriu $F\oplus G$ (en comptes de $F+G$).

La propietat següent mostra que el fet que la suma dels subespais siga directa vol dir que aquests dos subespais són independents, d'una manera anàloga a la independència lineal de dos vectors.

Propietat 15.3.

Si F i G són dos subespais de $\mathbb{K}^n$, llavors les afirmacions següents són equivalents:

(a) La suma dels subespais F i G és directa.

(b) Si $\vec{u}_F$ i $\vec{u}_G$ són, respectivament, vectors de F i de G i si $\vec{u}_F+\vec{u}_G=\vec{0}$, llavors $\vec{u}_F=\vec{u}_G=\vec{0}$.

(c) Si $\vec{u}$ és un vector de la suma $F+G$, llavors existeix un únic *vector $\vec{u}_F$ i un únic vector $\vec{u}_G$ de manera que $\vec{u}=\vec{u}_F+\vec{u}_G$.* $\square$

☞ La clau d'aquesta propietat és la *unicitat*: encara que la suma no siga directa, qualsevol vector de $F+G$ és la suma d'un de F i un altre de G, però si la suma no és directa podem trobar diverses parelles de vectors amb aquesta propietat. El que fa especial la suma directa és que no hi pot haver dues parelles de vectors en F i en G amb aquesta propietat.

Exemple 15.7.

Comproveu que el vector $\vec{u} = (2,3,2,2)$ és un element de la suma $F+G$ dels dos subespais

$$F = \langle (1,1,0,1), (1,2,1,1) \rangle$$
$$G = \langle (1,1,1,1), (1,3,3,1) \rangle$$

És directa, la suma $F+G$?

Hem de comprovar que el vector $\vec{u}$ es troba en l'espai columna de la matriu

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

és a dir, que el sistema $\mathsf{M}\vec{x} = \vec{u}$ és compatible.

Esglaonant la matriu ampliada $\begin{bmatrix} \mathsf{M} & \vec{u} \end{bmatrix}$ obtenim la forma esglaonada reduïda següent:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

així que el sistema és compatible i, en conseqüència, el vector $\vec{u}$ es troba en la suma $F+G$. Per a expressar-lo com a combinació lineal de les columnes de M hem de trobar la solució del sistema:

$$x_1 = 2\alpha,\ x_2 = 1 - 2\alpha,\ x_3 = 1 - \alpha,\ x_4 = \alpha$$

Per tant,

$$\vec{u} = \underbrace{2\alpha(1,1,0,1) + (1-2\alpha)(1,2,1,1)}_{\in F} + \underbrace{(1-\alpha)(1,1,1,1) + \alpha(1,3,3,1)}_{\in G} \tag{15.5}$$

on α és qualsevol nombre. Per tant, la suma no és directa. ▫

Entendrem correctament perquè hi ha més d'una solució, quan la suma no és directa, reordenant adequadament la combinació lineal (15.5):

$$\begin{aligned} \vec{u} =& 2\alpha(1,1,0,1) + (1-2\alpha)(1,2,1,1) + (1-\alpha)(1,1,1,1) + \alpha(1,3,3,1) \\ =& (1,2,1,1) + 2\alpha(1,1,0,1) - 2\alpha(1,2,1,1) + (1,1,1,1) - \alpha(1,1,1,1) \\ & \qquad + \alpha(1,3,3,1) \\ =& \underbrace{(1,2,1,1)}_{\in F} - \underbrace{2\alpha(0,1,1,0)}_{\in F\cap G} + \underbrace{(1,1,1,1)}_{\in G} + \underbrace{2\alpha(0,1,1,0)}_{\in F\cap G} \end{aligned}$$

Com que el vector $2\alpha(0,1,1,0)$ es troba a tots dos subespais, podem sumar-lo i restar-lo a un vector de F i a un altre de G, de manera que obtindrem una nova combinació lineal que produeix el mateix resultat.

Exemple 15.8.

Comproveu que el vector $\vec{u} = (2, 3, 2, 2)$ és un element de la suma $F + G$ dels dos subespais

$$F = \langle (1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$$
$$G = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 3, 3, 0) \rangle$$

És directa, la suma $F + G$?

Hem de comprovar que el vector $\vec{u}$ es troba en l'espai columna de la matriu

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és a dir, que el sistema $\mathsf{M}\vec{x} = \vec{u}$ és compatible.

Esglaonant la matriu ampliada $\begin{bmatrix} \mathsf{M} & \vec{u} \end{bmatrix}$ obtenim la forma esglaonada reduïda següent:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

així que el sistema és compatible determinat i, en conseqüència, el vector $\vec{u}$ es troba en la suma $F + G$. Per a expressar-lo com a combinació lineal de les columnes de M hem de trobar la solució del sistema:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (1, 1, 0, 1) + (0, 1, 1, 0) + (1, 1, 1, 1) + 0(1, 3, 3, 1) \\ &= \underbrace{(1, 2, 1, 1)}_{\in F} + \underbrace{(1, 1, 1, 1)}_{\in G} \end{aligned}$$

i la suma és directa. □

15.5.1. Suma directa de diversos subespais

Les definicions de suma i suma directa es poden generalitzar a més de dos subespais.

Definició 15.3.

(a) La *suma* dels subespais F_1, F_2, …, F_r és el conjunt de totes les sumes d'un element de cadascun dels subespais:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_r = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r : \vec{u}_1 \in F_1, \vec{u}_2 \in F_2, \ldots, \vec{u}_r \in F_r\}$$

(b) Diem que la suma és *directa* si $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_r) = \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_r$.

☞ Quan es vol remarcar que la suma és directa s'escriu $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$.

Les propietats 15.3 continuen sent vàlides:

Propietat 15.4.

Si F_1, F_2, …, F_r són subespais de $\mathbb{K}^n$, llavors les afirmacions següents són equivalents:

(a) La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ és directa.

(b) Si $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_r$ són, respectivament, vectors de F_1, F_2, …, F_r i si $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r = \vec{0}$, llavors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \cdots = \vec{u}_r = \vec{0}$.

(c) Si $\vec{u}$ és un vector de la suma, llavors existeix un únic *vector en cadascun dels subespais, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_r$ de manera que*

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r \quad \square$$

☞ El fet que la intersecció de tots els subespais siga nul·la *no assegura* que la suma siga directa.

Exemple 15.9.

La intersecció dels tres subespais de $\mathbb{K}^3$

$$F_1 = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle, F_2 = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle, F_3 = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$$

és nul·la, però la suma no és directa, perquè $F_1 + F_2 + F_3 = \mathbb{K}^3$ i $\dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 = 6$. $\square$

15.6. Resum

Suma i intersecció

– La *suma* dels subespais F i G, $F+G$, és l'embolcall lineal $\langle F \cup G\rangle$ o, equivalentment, el conjunt
$$F + G = \{\vec{u} + \vec{v} :\ \vec{u} \in F, \vec{v} \in G\}$$

– La suma i la intersecció de subespais són subespais.

– Per trobar una base de la suma, extraieu una base de la unió de les bases respectives.

– Per trobar una base de la intersecció,

  - A partir de les equacions dels dos subespais:
    - ⋆ Feu un únic sistema amb les equacions dels dos subespais i trobeu una base del conjunt de solucions.
  - A partir de les bases dels dos subespais:
    - ⋆ Elegiu dues bases $\mathcal{B}_F$ i $\mathcal{B}_G$
    - ⋆ Aplicant operacions elementals transformeu $\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_F} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{U} & \mathsf{V}_1 \\ \mathsf{O} & \mathsf{V}_2 \end{array}\right]$ (U invertible).
    - ⋆ Resoleu el sistema homogeni $\mathsf{V}_2\vec{a} = \vec{0}$.
    - ⋆ $F \cap G$ és el conjunt dels vectors $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_G}\vec{a}$, on $\vec{a}$ són les solucions del pas anterior.

– La suma és el subespai més petit que conté els dos subespais.

– La intersecció és el subespai més gran que és contingut als dos subespais.

– L'ortogonal de la suma és la intersecció dels ortogonals: $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

– L'ortogonal de la intersecció és la suma dels ortogonals: $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Fórmula de Grassman

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Suma directa

– La suma $F + G$ és *directa* si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

☞ S'escriu $F \bigoplus G$.

– Afirmacions equivalents:

1. La suma és directa.
2. $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
3. $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.
4. Si B_F i B_G són bases de F i G llavors $B_F \cup B_G$ és base de $F + G$.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

4. $\vec{u} \in F + G \Longrightarrow \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ *de forma única.*
5. $\vec{u}_F + \vec{u}_G = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u}_F = \vec{u}_G = \vec{0}$

Suma de diversos subespais

- La *suma* dels subespais F_1, F_2, …, F_r és el conjunt

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_r = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r : \vec{u}_1 \in F_1, \vec{u}_2 \in F_2, \ldots, \vec{u}_r \in F_r\}$$

- La suma és *directa* si $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_r) = \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_r$.
- Afirmacions equivalents:

1. La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ és directa.
2. Si $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_r$ són vectors de F_1, F_2, …, F_r i si $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r = \vec{0}$, llavors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \cdots = \vec{u}_r = \vec{0}$.
3. Si $\vec{u}$ és un vector de la suma, llavors existeix *un únic* vector en cadascun dels subespais,
$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_r$ de manera que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r$ □

15.7. Exercicis

Suma i intersecció de subespais

Exercici 15.1. En cada apartat, trobeu una base del subespai intersecció dels dos subespais F i G donats.

(a) $F = \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle$, $G = \langle (0,1,1), (1,1,1) \rangle$

(b) $F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = 0\}$, $G = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0\}$

(solució: pàg. 586)

Exercici 15.2. En cada apartat, trobeu una base del subespai suma dels dos subespais F i G donats.

(a) $F = \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle$, $G = \langle (0,1,1), (1,1,1) \rangle$

(b) $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$,
$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$

(solució: pàg. 586)

Exercici 15.3. Trobeu bases dels subespais suma i intersecció dels dos subespais $F = \langle (1,1,0,0), (2,1,1,1) \rangle$ i $G = \langle (1,0,1,1), (1,1,1,1) \rangle$.

(solució: pàg. 587)

Exercici 15.4. Proveu que la unió dels subespais F i G només és subespai quan $F \subset G$ o $G \subset F$.

(solució: pàg. 588)

Exercici 15.5.

(a) Trobeu les equacions del subespai $F = \langle (1,2,0,1),(2,3,0,3),(3,2,1,2)\rangle$.

(b) Trobeu una base de $G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{K}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

(c) Proveu que $F + G = \mathbb{K}^4$.

(d) Determineu la dimensió de $F \cap G$.

(e) Trobeu una base de $F \cap G$.

(solució: pàg. 588)

La suma directa

Exercici 15.6. Determineu si la suma dels subespais de $\mathbb{K}^3$

$$F = \langle \{(1,1,0),(1,0,1),(1,2,-1)\}\rangle, \qquad G = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

és directa.

(solució: pàg. 589)

Exercici 15.7. Considerem els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\} \\ G &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\} \\ H &= \langle (1,-1,0,0),(1,0,-1,0)\rangle \end{aligned}$$

(a) Trobeu bases de F, G i $F + G$. (b) La suma $F + G$ és directa? Quina és la dimensió de $F \cap G$? (c) Calculeu les equacions de H. (d) Trobeu les equacions i una base del subespai $H^\perp$. (e) Estudieu si la suma $F + H$ és directa.

(solució: pàg. 590)

Exercici 15.8. Proveu que si E i F són dos subespais de $\mathbb{K}^n$ i E i F són ortogonals entre ells, llavors la suma $E + F$ és directa.

(solució: pàg. 591)

Capítol 4

Ortogonalitat i mínims quadrats

Lliçó 16. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals **238**
16.1. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals . 238
16.2. Càlcul de la projecció ortogonal 239
16.2.1. Projecció ortogonal sobre una recta . . . 242
16.3. Resum 243
16.4. Exercicis 244
Lliçó 17. Aproximació per mínims quadrats **245**
17.1. Propietats de la matriu A^*A 245
17.2. Teorema de l'aproximació òptima 247
17.3. Sistemes incompatibles i mínims quadrats 249
17.4. Resum 253
17.5. Exercicis 254
Lliçó 18. El mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt i la factorització QR **256**
18.1. Obtenció de bases ortonormals. Mètode de Gram-Schmidt i factorització QR 256
18.1.1. Algorisme de Gram-Schmidt amb dos i tres vectors 256
18.1.2. La factorització QR amb tres vectors . . 260
18.1.3. El cas general 262
18.2. Aplicacions de la factorització QR 264
18.2.1. Projecció ortogonal 264
18.2.2. Mínims quadrats 264
18.3. Resum 265
18.4. Exercicis 266

Lliçó 16. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals

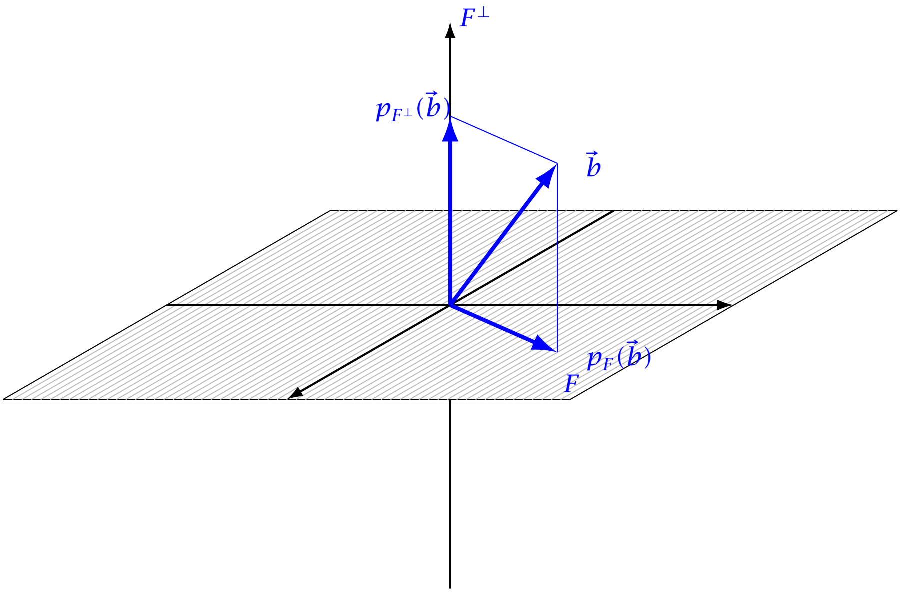
La géométrie est l'art du raisonnement correct
à partir de figures mal dessinées
Henri Poincaré

> Si F és un subespai de $\mathbb{K}^n$, llavors $\mathbb{K}^n$ és la suma directa de F i $F^\perp$. En altres paraules, qualsevol vector $\vec{b}$ (de l'espai $\mathbb{K}^n$) es descompon en la suma d'un vector de F, $\vec{b}_F$, i un altre de $F^\perp$, $\vec{b}_{F^\perp}$. Aquesta descomposició és única.

16.1. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals

El teorema que demostrem tot seguit mostra que la suma d'un subespai qualsevol i el seu ortogonal sempre és directa i, a més a més, aquesta suma *ompli* tot l'espai.

Això vol dir que qualsevol vector, $\vec{b}$, de $\mathbb{K}^n$ es pot descompondre com una suma (única) d'un vector de F i un altre de $F^\perp$. Aquests vectors són les *projeccions ortogonals*, $p_F(\vec{b})$ i $p_{F^\perp}(\vec{b})$ de $\vec{b}$ sobre els subespais F i $F^\perp$.



TEOREMA 16.1.

Si F és un subespai qualsevol de $\mathbb{K}^n$, llavors $\mathbb{K}^n = F \oplus F^\perp$.
Per tant, qualsevol vector $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ es pot escriure, de forma única com a suma d'un vector de F, $\vec{b}_F$, i un altre, $\vec{b}_{F^\perp}$, de $F^\perp$: $\vec{b} = \vec{b}_F + \vec{b}_{F^\perp} \qquad \forall b \in \mathbb{K}^n$.

Demostració: La suma $F + F^\perp$ és directa, perquè $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$. A més a més, a la lliçó 14 hem provat (propietat 14.7) que la unió d'una base de l'espai fila i una altra de l'espai nul és una base de $\mathbb{K}^n$, així que si triem la matriu A perquè F siga l'espai fila de A tindrem: $\dim F + \dim F^\perp = \dim \operatorname{Fil} \mathsf{A} + \dim \operatorname{Nul} \mathsf{A} = n$. □

☞ Les *projeccions ortogonals* del vector $\vec{b}$ sobre F i $F^\perp$ són, respectivament, $p_F(\vec{b}) = \vec{b}_F$ i $p_{F^\perp}(\vec{b}) = \vec{b}_{F^\perp}$.

Com a casos particulars, obtenim que els espais $\mathbb{K}^m$ i $\mathbb{K}^n$ són la suma directa ortogonal dels quatre espais deduïts d'una matriu $m \times n$:

☞ Si A és una matriu real $m \times n$, llavors

$$\mathbb{K}^m = \operatorname{Col} \mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul} \mathsf{A}^* \quad i \quad \mathbb{K}^n = \operatorname{Fil} \mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul} \mathsf{A} \quad \square$$

Aquestes propietats completen el teorema 14.8:

TEOREMA 16.2.

Suposem que A és una matriu $m \times n$ de rang r. Aleshores,

1. $\operatorname{Col} \mathsf{A}$ *i* $\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*$ *són subespais de* $\mathbb{K}^m$ *i*
   - $\dim \operatorname{Col} \mathsf{A} = r$
   - $\dim \operatorname{Nul} \mathsf{A}^* = m - r$
   - *Aquests dos subespais són cadascun l'ortogonal de l'altre.*
   - $\mathbb{K}^m = \operatorname{Col} \mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul} \mathsf{A}^*$
2. $\operatorname{Fil} \mathsf{A}$ *i* $\operatorname{Nul} \mathsf{A}$ *són subespais de* $\mathbb{K}^n$ *i*
   - $\dim \operatorname{Fil} \mathsf{A} = r$
   - $\dim \operatorname{Nul} \mathsf{A} = n - r$
   - *Aquests dos subespais són cadascun l'ortogonal de l'altre.*
   - $\mathbb{K}^n = \operatorname{Fil} \mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul} \mathsf{A}$ □

16.2. CÀLCUL DE LA PROJECCIÓ ORTOGONAL

En primer lloc, veurem un exemple en el qual calcularem la projecció sobre un subespai F cercant bases de F i $F^\perp$. Però, a continuació, explicarem un mètode més interessant, que fa servir el que sabem sobre les projeccions i els subespais ortogonals.

EXEMPLE 16.1.

Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{b} = (2, 3, 2)$ sobre el pla

$$F = \langle (1, 1, 0), (2, 3, 1) \rangle$$

En primer lloc cercarem l'ortogonal de F:

$$F^{\perp} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

El següent pas consisteix a expressar el vector $\vec{b}$ com a combinació lineal dels vectors de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (2, 3, 1), (1, -1, 1)\}$. Això vol dir que hem de resoldre el sistema lineal $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}\vec{x} = \vec{b}$, així que esglaonem la matriu ampliada,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right]$$

de manera que obtenim la solució $\vec{x} = (-5/3, 5/3, 1/3)$. En conseqüència,

$$\vec{b} = \underbrace{-\frac{5}{3}(1, 1, 0) + \frac{5}{3}(2, 3, 1)}_{p_F(\vec{b})} + \underbrace{\frac{1}{3}(1, -1, 1)}_{p_{F^{\perp}}(\vec{b})}$$

i la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre F és el vector

$$\vec{p}_F(\vec{b}) = -\frac{5}{3}(1, 1, 0) + \frac{5}{3}(2, 3, 1) = \frac{5}{3}(1, 2, 1) \quad \square$$

En aquest exemple hem hagut de trobar una base de l'ortogonal de F i unir-la a la base de F per a construir una base de l'espai complet. Hi ha, però, un mètode alternatiu, que ens permet trobar les projeccions ortogonals, explotant l'ortogonalitat i sense necessitat de calcular cap base. El mètode es basa en aquests fets:

(a) Si $F = \operatorname{Col}\mathsf{A}$, llavors $p_F(\vec{b}) \in \operatorname{Col}\mathsf{A}$, així que $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x}$ per a algun vector $\vec{x}$.

(b) La projecció de $\vec{b}$ sobre $F^{\perp}$ és $p_{F^{\perp}}(\vec{b}) = \vec{b} - p_F(\vec{b}) = \vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}$, és a dir, $\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x} \in (\operatorname{Col}\mathsf{A})^{\perp}$.

(c) L'ortogonal de l'espai columna és l'espai nul esquerre: $(\operatorname{Col}\mathsf{A})^{\perp} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$.

Així doncs, per a trobar la projecció ortogonal $p_F(\vec{b})$ podem cercar en primer lloc un vector $\vec{x}$ de manera que $\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x} \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$ i, tot seguit, calcular $p_F(\vec{b})$ fent el producte $\mathsf{A}\vec{x}$. La condició clau és que el vector $\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}$ ha de ser a l'espai nul de A^*. És a dir, $\mathsf{A}^*(\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}) = \vec{0}$ o, millor,

$$\boxed{\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}} \tag{16.1}$$

L'expressió (16.1) és un sistema d'equacions lineals; comprovem que, si $\vec{u}$ és una solució d'aquest sistema llavors, la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre F és el vector $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{u}$.

Propietat 16.3.

Suposem que F és l'espai columna de la matriu $m \times n$ A i $\vec{b}$ un vector qualsevol de $\mathbb{K}^n$. Si $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{u} = \mathsf{A}^*\vec{b}$, llavors, la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre F és el vector $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{u}$.

Demostració: El vector $\vec{b}$ el podem escriure com $\vec{b} = \mathsf{A}\vec{u} + (\vec{b} - \mathsf{A}\vec{u})$, on $\mathsf{A}\vec{u}$ és un element de l'espai columna, $\operatorname{Col} A = F$. I, com que $\mathsf{A}^*(\vec{b} - \mathsf{A}\vec{u}) = \mathsf{A}^*\vec{b} - \mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{u} = 0$, $\vec{b} - \mathsf{A}\vec{u} \in \operatorname{Nul} \mathsf{A}^* = F^\perp$. Per tant, el vector $\mathsf{A}\vec{u}$ és la projecció de $\vec{b}$ sobre F. □

☞ Les *equacions normals* en el problema de la projecció ortogonal són les equacions (16.1).

Càlcul de la projecció ortogonal

Expresseu el subespai F com l'espai columna d'una matriu A. llavors,

1. Calculeu els productes $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i $\mathsf{A}^*\vec{b}$.
2. Resoleu el sistema de les equacions normals $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$.
3. Si $\vec{u}$ és la solució obtinguda al pas anterior, calculeu el vector $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{u}$.

Ara apliquem aquestes idees per a tornar a calcular la projecció ortogonal de l'exemple 16.1.

Exemple 16.2.

Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{b} = (2, 3, 2)$ sobre el pla

$$F = \langle (1, 1, 0), (2, 3, 1) \rangle$$

El subespai F és l'espai columna de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calculem els productes $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i $\mathsf{A}^*\vec{b}$:

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}^*\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(b) Resolem el sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -5/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

(c) Calculem el vector $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x}$:

$$p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Aquest algorisme se simplifica molt si fem servir bases ortonormals:

- Si $B = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_p\}$ és una base ortonormal de F i $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_p \end{bmatrix}$, llavors F és l'espai columna de Q.

  Així que les equacions normals són $\mathsf{Q}^*\mathsf{Q}\vec{x} = \mathsf{Q}^*\vec{b}$, però $\mathsf{Q}^*\mathsf{Q}$ és la matriu identitat, perquè les seues entrades són els productes escalars de les columnes de Q.

  Per tant, les equacions normals es redueixen a $\vec{x} = \mathsf{Q}^*\vec{b}$ i no hi ha res a resoldre: la projecció ortogonal és $p_F(\vec{b}) = \mathsf{Q}\mathsf{Q}^*\vec{b}$.

☞ Si F és l'espai columna de la matriu Q i les columnes de Q són ortonormals, llavors la projecció ortogonal del vector $\vec{b}$ sobre F és

$$\begin{aligned} p_F(\vec{b}) &= \mathsf{Q}\mathsf{Q}^*\vec{b} && (16.2) \\ &= \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_1^* \\ \vec{q}_2^* \\ \cdots \\ \vec{q}_p^* \end{bmatrix} \vec{b} \\ &= (\vec{q}_1^*\vec{b})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2^*\vec{b})\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_p^*\vec{b})\vec{q}_p && (16.3) \end{aligned}$$

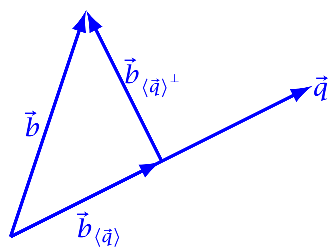
Noteu que $\vec{q}_1^*\vec{b}$, $\vec{q}_2^*\vec{b}$, $\dots\vec{q}_p^*\vec{b}$, són els productes escalars de $\vec{b}$ pels vectors de la base ortonormal, així que aquesta fórmula podem reescriure-la com

$$p_F(\vec{b}) = \left(\vec{q}_1 \cdot \vec{b}\right)\vec{q}_1 + \left(\vec{q}_2 \cdot \vec{b}\right)\vec{q}_2 + \cdots + \left(\vec{q}_p \cdot \vec{b}\right)\vec{q}_p \qquad (16.4)$$

16.2.1. Projecció ortogonal sobre una recta

Si el subespai F és una recta, i $\vec{q}$ un vector unitari en la direcció de la recta llavors, $F = \langle\vec{q}\rangle$ i podem aplicar la fórmula (16.4): la projecció ortogonal del vector $\vec{b}$ sobre la recta F és

$$p_F(\vec{b}) = \left(\vec{q} \cdot \vec{b}\right)\vec{q}$$



EXEMPLE 16.3.

Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{b} = (1,3)$ sobre la recta generada pel vector $\vec{u} = (4,2)$.

El vector $\vec{u}$ no és unitari, així que el dividim per la seua norma:
si $\vec{q} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{20}}(4,2)$ llavors

$$p_{\langle\vec{u}\rangle}(\vec{b}) = \left(\frac{1}{\sqrt{20}}(4,2)\cdot(1,3)\right)\frac{1}{\sqrt{20}}(4,2) = \frac{1}{20}10(4,2) = (2,1) \quad \square$$

16.3. RESUM

Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals

- Si F és un subespai de $\mathbb{K}^n$, llavors $\mathbb{K}^n = F \oplus F^\perp$.
- Si A és una matriu $m \times n$, llavors

$$\mathbb{K}^m = \operatorname{Col}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul}\mathsf{A}^* \qquad \mathbb{K}^n = \operatorname{Fil}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul}\mathsf{A}$$

☞ Si $\vec{b} = \vec{b}_F + \vec{b}_{F^\perp}$ ($\vec{b}_F \in F, \vec{b}_{F^\perp} \in F^\perp$, la *projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre F és $\vec{b}_F$*.

Propietats dels quatre subespais

- L'espai columna i l'espai nul esquerre són subespais de $\mathbb{K}^m$.
- L'espai fila i l'espai nul són subespais de $\mathbb{K}^n$.
- Si $\operatorname{rang}\mathsf{A} = r$ llavors,
    - $\dim\operatorname{Col}\mathsf{A} = \dim\operatorname{Fil}\mathsf{A} = r$
    - $\dim\operatorname{Nul}\mathsf{A} = n - r$
    - $\dim\operatorname{Nul}\mathsf{A}^* = m - r$
- $\operatorname{Fil}\mathsf{A}^\perp = \operatorname{Nul}\mathsf{A}$
  $\operatorname{Col}\mathsf{A}^\perp = \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$
- $\mathbb{K}^m = \operatorname{Col}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$
  $\mathbb{K}^n = \operatorname{Fil}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul}\mathsf{A}$

Càlcul de la projecció ortogonal del vector $\vec{b}$ sobre el subespai F
Elegiu A perquè $F = \operatorname{Col}\mathsf{A}$

- Calculeu els productes $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i $\mathsf{A}^*\vec{b}$.
- Resoleu el sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$.
- La projecció ortogonal és el vector $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x}$.

$(\cdots)$

(...)

☞ **Amb bases ortonormals:** si $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_p\}$ és una base ortonormal de F i $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_p \end{bmatrix}$,

$$p_F(\vec{b}) = \mathsf{QQ}^*\vec{b} = (\vec{q}_1 \cdot \vec{b})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2 \cdot \vec{b})\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_p \cdot \vec{b})\vec{q}_p$$

16.4. Exercicis

Exercici 16.1. Calculeu l'espai ortogonal de $F = \langle\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}\rangle$ i calculeu les projeccions ortogonals del vector $\vec{v} = (2,1,2,1)$ sobre F i sobre $F^\perp$.

(solució: pàg. 592)

Exercici 16.2. Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{v} = (1,1,1,1)$ sobre el pla

$$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; x_2 + x_3 = 0\}$$

(solució: pàg. 592)

Exercici 16.3. Calculeu les projeccions ortogonals del vector $\vec{v} = (2,1,-3)$ sobre el subespai $F = \langle(1,1,1),(2,1,-1),(1,0,-2)\rangle$ i sobre $F^\perp$.

(solució: pàg. 594)

Exercici 16.4. Comproveu que el conjunt $S = \{\frac{1}{15}(-5,14,-2), \frac{1}{15}(10,5,10)\}$ és ortonormal i calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{v} = (-3,2,-1)$ sobre $F = \langle S\rangle$.

(solució: pàg. 594)

Exercici 16.5. Siga $F = \operatorname{Col}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$. Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{u} = (1,1,1,1)$ sobre $F^\perp$.

(solució: pàg. 595)

Exercici 16.6. Siga F la recta generada pel vector $\vec{u} = (1,2,3)$.

(a) Calculeu les projeccions sobre F i sobre $F^\perp$ del vector $\vec{b} = (3,2,1)$.

(b) La funció $f(\alpha) = d((3,2,1), \alpha(1,2,3))$ mesura la distància del vector $(3,2,1)$ a cada punt de la recta F. Calculeu el mínim d'aquesta funció.

(c) Compareu els resultats dels dos apartats anteriors i interpreteu-los geomètricament.

(solució: pàg. 595)

Lliçó 17. Aproximació per mínims quadrats

Atesa la nostra impossibilitat de satisfer exactament
les onze equacions proposades,
és a dir, de fer nuls tots els segons membres,
cercarem de fer els seus quadrats tan petits com siga possible
Karl Friedrich Gauß

> De vegades un sistema lineal és incompatible, però ens pot interessar trobar el vector que està més a prop de ser-ne la solució. Per exemple, perquè el sistema deriva d'un problema físic que ha de tenir solució i, si no en té, és perquè les dades procedeixen de mesuraments que no són exactes.
> En aquests casos es pot fer servir la tècnica dels mínims quadrats.

17.1. Propietats de la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$

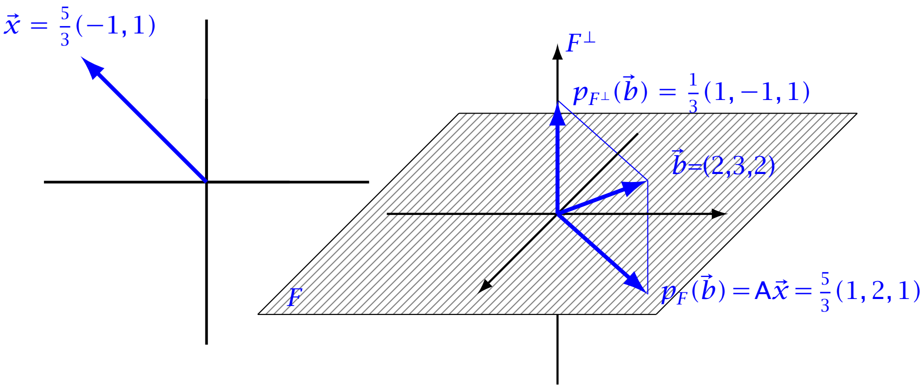
En el càlcul de la projecció ortogonal fa un paper fonamental la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ (cosa que no ens ha d'estranyar, tenint en compte que estem tractant un problema d'ortogonalitat, i les entrades d'aquesta matriu són els productes escalars de les columnes de A). I hi intervenen quatre vectors:

- el vector $\vec{b}$, que volem projectar sobre $F = \operatorname{Col}\mathsf{A}$,
- el vector $p_F(\vec{b})$, projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre F,
- el vector $p_{F^\perp}(\vec{b}) = \vec{b} - p_F(\vec{b})$, projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre $F^\perp$ i
- el vector $\vec{x}$, solució del sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$, per al qual $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x}$.

Tots aquests vectors són importants; molt particularment, el vector $\vec{x}$; en els problemes d'aproximació òptima el que ens interessarà, en realitat, és $\vec{x}$, en comptes de $p_F(\vec{b})$.

La figura següent mostra aquests quatre vectors en el cas de l'exemple 16.2: la projecció ortogonal del vector $\vec{b} = (2,3,2)$ sobre el subespai $F = \langle(1,1,0),(2,3,1)\rangle$ és $p_F(\vec{b}) = (5/3)(1,2,1)$; la projecció sobre $F^\perp$ és $p_{F^\perp}(\vec{b}) = (1/3)(1,-1,1)$ i el vector $\vec{x}$ és $(5/3)(-1,1)$.[1]

[1] Aquest exemple ens mostra una nova manera de veure les matrius: la matriu A *transforma* l'espai $\mathbb{R}^2$ en un subespai de $\mathbb{R}^3$ (l'espai columna de A). En la lliçó 22 desenvoluparem aquesta idea, estudiant les matrius com a transformacions lineals.



PROPIETATS 17.1.

Suposem que A *és una matriu* $m \times n$*.*

1. $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ *és una matriu hermítica* $n \times n$*.*
2. *L'espai nul de* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ *és el mateix que el de* A*.*
3. *L'espai fila de* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ *és el mateix que el de* A*.*
4. *El rang de* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ *és el mateix que el de* A*.*
5. $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ *és una matriu invertible si i només si* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$ *(és a dir, si les columnes de* A *són linealment independents).*

Demostració:

1. $(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^* = \mathsf{A}^*(\mathsf{A}^*)^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$.
2. Provarem que $\operatorname{Nul}\mathsf{A} \subset \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*\mathsf{A} \subset \operatorname{Nul}\mathsf{A}$:
   (a) Si $\vec{b} \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}$, llavors $\mathsf{A}\vec{b} = \vec{0}$, així que $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{b} = \mathsf{A}^*(\mathsf{A}\vec{b}) = \mathsf{A}^*\vec{0} = \vec{0}$. Per tant, $\operatorname{Nul}\mathsf{A} \subset \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.
   (b) Si $\vec{b} \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*\mathsf{A}$, llavors $\mathsf{A}^*(\mathsf{A}\vec{b}) = \vec{0}$, així que $\mathsf{A}\vec{b}$ es troba en $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$ i també en $\operatorname{Col}\mathsf{A}$. Però $\operatorname{Col}\mathsf{A} \cap \operatorname{Nul}\mathsf{A}^* = \{\vec{0}\}$, així que $\mathsf{A}\vec{b} = \vec{0}$ i $\vec{b} \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}$. Per tant, $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*\mathsf{A} \subset \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.
3. $\operatorname{Fil}\mathsf{A} = (\operatorname{Nul}\mathsf{A})^\perp = (\operatorname{Nul}(\mathsf{A}^*\mathsf{A}))^\perp = \operatorname{Fil}\mathsf{A}^*\mathsf{A}$
4. Això és obvi, perquè els rangs són les dimensions dels espais fila.
5. $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ és invertible quan té rang màxim, és a dir, quan $\operatorname{rang}\mathsf{A}^*\mathsf{A} = n$. Tenint en compte l'apartat anterior, perquè passe això, el rang de A ha de ser n.
   □

☞ El sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$ és compatible sempre, però només és determinat quan les columnes de la matriu A són independents (perquè acabem de veure que aquesta és la condició perquè $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ siga invertible).

☞ En el cas que la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ és invertible podem trobar una fórmula explícita per a la projecció ortogonal: la solució del sistema $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$ és $\vec{x} = (\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^*\vec{b}$, de manera que la projecció ortogonal, $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x}$, serà

$$\boxed{p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\,(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\,\mathsf{A}^*\vec{b}} \tag{17.1}$$

Per aquest motiu, diem que *la matriu de la projecció ortogonal sobre el subespai* Col A *és* $\mathsf{A}\,(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\,\mathsf{A}^*$.

17.2. Teorema de l'aproximació òptima

Aquest teorema té una gran importància, entre altres motius, perquè és la base teòrica del mètode d'aproximació per mínims quadrats.

Teorema 17.2. (Teorema de l'aproximació òptima)

El vector del subespai F més pròxim al vector $\vec{b}$ és la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre F.

Demostració: Si $\vec{v}$ és un vector de F, el vector $\vec{b} - \vec{v}$ el podem escriure com

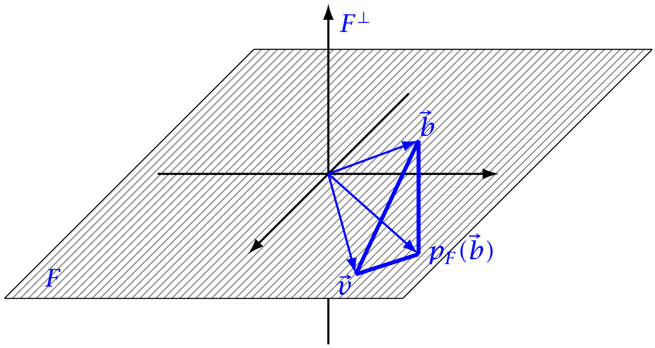
$$\vec{b} - \vec{v} = (\vec{b} - p_F(\vec{b})) + (p_F(\vec{b}) - \vec{v}) = p_{F^\perp}(\vec{b}) + (p_F(\vec{b}) - \vec{v})$$

on els vectors $p_{F^\perp}(\vec{b})$ i $p_F(\vec{b}) - \vec{v}$ són ortogonals perquè el primer es troba en $F^\perp$ i el segon en F. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{b} - \vec{v}\right\|^2 &= (\vec{b} - \vec{v}) \cdot (\vec{b} - \vec{v}) \\
&= \Big((p_{F^\perp}(\vec{b}) + (p_F(\vec{b}) - \vec{v})\Big) \cdot \Big(p_{F^\perp}(\vec{b}) + (p_F(\vec{b}) - \vec{v})\Big) \\
&= \underbrace{p_{F^\perp}(\vec{b}) \cdot p_{F^\perp}(\vec{b})}_{\left\|p_{F^\perp}(\vec{b})\right\|^2} + 2\underbrace{p_{F^\perp}(\vec{b}) \cdot (p_F(\vec{b}) - \vec{v})}_{0} + \underbrace{(p_F(\vec{b}) - \vec{v}) \cdot (p_F(\vec{b}) - \vec{v})}_{\left\|p_F(\vec{b}) - \vec{v}\right\|^2} \\
\left\|\vec{b} - \vec{v}\right\| &= \sqrt{\left\|p_{F^\perp}(\vec{b})\right\|^2 + \left\|p_F(\vec{b}) - \vec{v}\right\|^2}
\end{aligned}$$

I aquesta norma és mínima quan $\left\|p_F(\vec{b}) - \vec{v}\right\| = 0$, és a dir, quan $\vec{v} = p_F(\vec{b})$. □

Des del punt de vista geomètric (en $\mathbb{R}^k$), el vector $\vec{b}$, la projecció ortogonal $p_F(\vec{b})$ i qualsevol altre vector de F, $\vec{v}$, determinen un triangle rectangle, així que la distància $\left\|\vec{b} - \vec{v}\right\|$ (la hipotenusa del triangle) és més gran que $\left\|\vec{b} - p_F(\vec{b})\right\|$ (un catet).



Aquest teorema justifica la importància de la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre $F^{\perp}$: aquest vector mesura la distància entre el vector $\vec{b}$ i el subespai F:

$$d(\vec{b}, F) = \min\{d(u, v) : v \in F\} = \left\|\vec{b} - p_F(\vec{b})\right\| = \left\|p_{F^{\perp}}(\vec{b})\right\|$$

Exemple 17.1.

Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{b} = (3, 2, 3)$ sobre el subespai $F = \operatorname{Col} \mathsf{A}$, on

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i la distància del vector $\vec{b}$ al subespai F.

Aquesta matriu té rang 2, perquè la tercera fila és la suma de les altres dues. En conseqüència, el sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$ no serà determinat. Calculem la projecció, seguint els passos habituals:

(a) Ja sabem que $F = \operatorname{Col} \mathsf{A} = \operatorname{Col} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Calculem els productes $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i $\mathsf{A}^*\vec{b}$:

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}^*\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(c) Resolem el sistema $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$ esglaonant la matriu ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Com esperàvem, aquest sistema és indeterminat. La solució general és

$$\vec{x} = \left(1 + \alpha, \frac{4}{3} - \alpha, \alpha\right)$$

i la projecció de $\vec{b}$ sobre F serà

$$p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

La part paramètrica es fa zero, en multiplicar-la per A *perquè* $\operatorname{Nul} \mathsf{A}^*\mathsf{A} = \operatorname{Nul} \mathsf{A}$*!* i qualsevol solució del sistema ens dona el mateix vector projecció.

La distància de $\vec{b}$ a F és

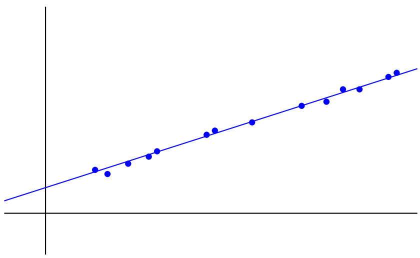
$$d(\vec{b}, F) = \left\| \vec{b} - p_F(\vec{b}) \right\| = \left\| (3, 2, 3) - \frac{1}{3}(7, 4, 11) \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \square$$

17.3. Sistemes incompatibles i mínims quadrats

En molts problemes pràctics es disposa de dades experimentals i es vol trobar una funció que aproxime aquestes dades. El cas més simple és el de la *recta de regressió*.

Suposem que estudiant un determinat fenomen es prenen diversos mesuraments i les dades obtingudes es reflecteixen en aquesta taula

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)\} \tag{17.2}$$



Si en representar-les en un diagrama cartesià obtenim alguna cosa pareguda a la figura adjunta, és raonable deduir que aquestes dades es troben aproximadament sobre una recta $y = a + bx$.

Fins i tot, podríem pensar que les dades reals s'ajusten exactament a una recta, però que les dades experimentals contenen petits errors. En qualsevol cas, el problema seria el següent: quina és la recta que s'ajusta més a aquests valors?

Si les dades estigueren realment sobre la recta $y = a + bx$ tindríem

$$\begin{aligned} a + bx_1 &= y_1 \\ a + bx_2 &= y_2 \\ &\dots \\ a + bx_p &= y_p \end{aligned} \tag{17.3}$$

però, excepte en el cas que només tinguem un parell de punts, allò normal és que aquest sistema siga incompatible.[2]

Si escrivim el sistema (17.3) com $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ i es tracta d'un sistema incompatible, podem entendre que una solució *aproximada* d'aquest sistema és un vector $\vec{x}$ que minimitza la distància entre $\mathsf{A}\vec{x}$ i $\vec{b}$), ço és, la norma $\left\|\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}\right\|$. Si $\vec{x} = (a, b)$ és aquest vector, aleshores $y = a + bx$ és la *recta de regressió*.

Definició 17.1.

La *recta de regressió* corresponent a la taula de valors (17.2) és la recta d'equació $y = a + bx$ on $\vec{x} = (a, b)$ és el vector que minimitza la norma $e = \left\|\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}\right\|$.

Aquest problema es pot generalitzar substituint el sistema lineal (17.3) per qualsevol altre sistema d'equacions lineals.

Definició 17.2.

El problema de mínims quadrats aplicat al sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ consisteix a trobar el vector $\vec{x}$ que minimitza la norma $e = \left\|\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}\right\|$. Aquesta norma és l'*error de mínims quadrats* del problema.

Naturalment, si el sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és compatible, les solucions del problema de mínims quadrats són les solucions del sistema lineal. En cas contrari, la solució ens la proporciona el teorema de l'aproximació òptima: com que el vector de $F = \operatorname{Col}\mathsf{A}$ més pròxim a $\vec{b}$ és la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre F, la solució del problema de mínims quadrats és un vector $\vec{x}$ tal que $\mathsf{A}\vec{x}$ és $p_F(\vec{b})$; és a dir, qualsevol solució del sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$.

Propietats 17.3. (Solucions del problema de mínims quadrats)

Suposem que A *és una matriu* $m \times n$*.*

1. *Les solucions del problema de mínims quadrats aplicat al sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ *són les solucions del sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = p_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}(\vec{b})$*.*
2. *Les solucions del problema de mínims quadrats aplicat al sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ *són les solucions del sistema lineal* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$*.*
3. *Si* $\vec{x}_0$ *és una solució del problema de mínims quadrats aplicat al sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$*, la solució general (el conjunt de totes les solucions) per mínims quadrats és* $\vec{x}_0 + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$*.*

$(\cdots)$

[2] En el tipus de problemes que estem estudiant, és normal que els sistemes lineals que resulten siguen incompatibles, perquè generalment es tracta de sistemes amb moltes equacions i poques incògnites, i com que es basen en valors experimentals, allò sorprenent seria que els sistemes foren compatibles.

(···)

5. *Si el rang de la matriu* A *és* n*, llavors la solució del problema de mínims quadrats aplicat al sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ *és* $\vec{x} = (\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^*\vec{b}$.

6. *Si el sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ *és compatible, aleshores té les mateixes solucions que el sistema* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$*, és a dir, que les solucions del problema de mínims quadrats són les solucions ordinàries.* □

EXEMPLE 17.2.

Trobeu la recta de regressió que ajusta la taula de valors.

x	3,9	4,5	5,2	5,4	6
y	2,1	2,8	2,4	2,8	3,1

i calculeu-ne l'error de mínims quadrats.

Les equacions (17.3), en el nostre cas són aquestes:

$$\begin{aligned} a + 3{,}9b &= 2{,}1 \\ a + 4{,}5b &= 2{,}8 \\ a + 5{,}2b &= 2{,}4 \\ a + 5{,}4b &= 2{,}8 \\ a + 6b &= 3{,}1 \end{aligned}$$

Per tant, es tracta de trobar els nombres a i b que minimitzen $\left\|\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}\right\|$ on

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3{,}9 \\ 1 & 4{,}5 \\ 1 & 5{,}2 \\ 1 & 5{,}4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 2{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2{,}8 \\ 3{,}1 \end{bmatrix}$$

Ací, les equacions normals $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$, són

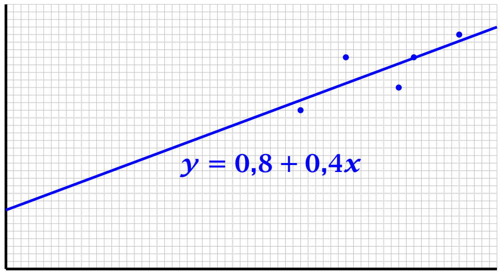
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3{,}9 & 4{,}5 & 5{,}2 & 5{,}4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3{,}9 \\ 1 & 4{,}5 \\ 1 & 5{,}2 \\ 1 & 5{,}4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3{,}9 & 4{,}5 & 5{,}2 & 5{,}4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 2{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2{,}8 \\ 3{,}1 \end{bmatrix}$$

o bé,

$$\begin{bmatrix} 5 & 25 \\ 25 & 127{,}66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13{,}2 \\ 66{,}99 \end{bmatrix}$$

que és un sistema compatible determinat, la solució del qual, arrodonida a una xifra decimal, és $a = 0{,}8$, $b = 0{,}4$, de manera que la recta de regressió és

$$y = 0{,}8 + 0{,}4x$$



L'error de mínims quadrats és

$$\left\|\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}\right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 2{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2{,}8 \\ 3{,}1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3{,}9 \\ 1 & 4{,}5 \\ 1 & 5{,}2 \\ 1 & 5{,}4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} \right\| \approx 0{,}6$$

Exemple 17.3.

Comproveu que el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

és incompatible i calculeu-ne la solució per mínims quadrats.

El sistema és incompatible, perquè la tercera fila de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ és combinació lineal de les dues primeres: $(1/4)(4,0)+(1/2)(0,2) = (1,1)$ i aquesta relació no es dona en el vector $\vec{b} = (15,7,7)$: $(1/4)15 + (1/2)7 = 7{,}25 \neq 7$. Per a trobar la solució per mínims quadrats,

(a) Calculem els productes $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i $\mathsf{A}\vec{b}$:

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}^*\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ 21 \end{bmatrix}$$

(b) Resolem el sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}\vec{b}$. La forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} 17 & 1 & 67 \\ 1 & 5 & 21 \end{array}\right]$ és $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3{,}74 \\ 0 & 1 & 3{,}45 \end{array}\right]$, així que la solució és $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3{,}74 \\ 3{,}45 \end{bmatrix}$.

La projecció del vector $\vec{b}$ sobre l'espai columna de A és

$$p_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 14{,}96 \\ 6{,}9 \\ 7{,}19 \end{bmatrix}$$

que sembla un vector bastant pròxim al desitjat $(15, 7, 7)$ El vector error és

$$\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}1 \\ -0{,}19 \end{bmatrix}$$

i l'error de mínims quadrats,

$$\left\|\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}\right\| = 0{,}048 \qquad \square$$

17.4. Resum

La matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ (A és una matriu $m \times n$)

- Les entrades d'aquesta matriu són els productes escalars de les columnes de A .
- És hermítica.
- $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}$
- $\operatorname{rang}\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \operatorname{rang}\mathsf{A}$
- És invertible si i només si $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$.

Teorema de l'aproximació òptima
El vector del subespai F més pròxim al vector $\vec{b}$ és $P_F(\vec{b})$.

El problema dels mínims quadrats

- *Resoldre per mínims quadrats* el sistema lineal (compatible o incompatible) $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és trobar el vector $\vec{x}$ que minimitza la norma $\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\|$.
- La solució del problema de mínims quadrats és la solució del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = p_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}(\vec{b})$.
- La solució del problema de mínims quadrats és la solució del sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$.
- Si $\vec{x}_0$ és una solució del problema de mínims quadrats, el conjunt de totes les solucions és $\vec{x}_0 + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.
- Si $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$ llavors, la solució del problema de mínims quadrats és $\vec{x} = (\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^*\vec{b}$.
- L'*error de mínims quadrats* és $\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\|$ (on $\vec{x}$ és una solució per mínims quadrats).

$(\cdots)$

$(\cdots)$

La recta de regressió

- La recta de regressió associada a una taula de valors $\{(x_i, y_i) : 1 \le i \le p\}$ és la recta $y = a + bx$ que millor s'ajusta, en el sentit dels mínims quadrats a aquesta taula de valors.
- La recta de regressió és la recta $y = ax + b$ on (a, b) és la solució per mínims quadrats del sistema

$$\left.\begin{matrix} a + x_1 b = y_1 \\ a + x_2 b = y_1 \\ \cdots \\ a + x_p b = y_p \end{matrix}\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdots & \\ 1 & x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

17.5. Exercicis

Propietats de la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$. Aproximació òptima

Exercici 17.1. Trobeu la matriu de la projecció ortogonal sobre el subespai $F = \langle(1,1,0,0),(0,1,1,0)\rangle$ i el vector de F més pròxim a $\vec{v} = (2,1,2,1)$. Quina és la distància del vector $\vec{v}$ al subespai F?

(solució: pàg. 597)

Exercici 17.2. Calculeu la distància del vector $\vec{v} = (2,1,-3)$ al subespai $F = \operatorname{Col}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 597)

Sistemes incompatibles i mínims quadrats

Exercici 17.3. Calculeu la solució per mínims quadrats del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, on

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quin és l'error de mínims quadrats?

(solució: pàg. 598)

Exercici 17.4. De la funció $y = f(x)$ coneixem la taula de valors següent:

x	0	1	2	3	4
y	-1	1	-1	-7	-17

Busqueu els polinomis $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ de graus 1, 2 i 3 que aproximen millor, en el sentit dels mínims quadrats, aquesta funció. Calculeu en cada cas els errors de mínims quadrats i analitzeu els resultats.

(solució: pàg. 598)

Exercici 17.5. Un conductor vol estudiar el consum de benzina en funció de la velocitat. Per això, observa els consums del seu trajecte habitual per l'autovia, recorrent-lo a diferents velocitats. Aquests són els resultats que obté:

velocitat mitjana (km/h)	90	105	117	120
consum (litres per km)	6	6,5	7,5	8,2

Calculeu l'equació $y = a + bx$ de la recta que aproxima, en el sentit dels mínims quadrats, aquesta taula (x representa la velocitat mitjana i y el consum). Quin consum es pot esperar a una velocitat mitjana de 130 km/h?

(solució: pàg. 600)

Exercici 17.6. Un professor decideix que el mètode habitual de qualificació, la mitjana aritmètica de les notes dels exàmens, no és bastant justa. Ell pensa que cada alumne té la seua nota *natural*, la que mereix tenint en compte el seu esforç i els seus coneixements i que les notes de cada examen es desvien d'aquesta nota per diversos motius, de manera que la nota *natural* de l'alumne ha de ser el nombre més pròxim a totes les notes parcials, en el sentit dels mínims quadrats, així que aplica aquest mètode.

Un estudiant té aquestes notes en les cinc proves que s'han fet al llarg del curs: $7, 7, 3, 5, 9$. Quina és la mitjana aritmètica d'aquestes notes? Quina nota li correspon si fem servir el criteri dels mínims quadrats?

(solució: pàg. 600)

Projeccions (no necessàriament ortogonals) i matrius de projecció

Exercici 17.7. Una matriu $n \times n$ P és *idempotent* (o *matriu de projecció*) si $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$.

(a) Proveu que la matriu P és idempotent si i només si $\mathbb{K}^n = \operatorname{Col}\mathsf{P} \oplus \operatorname{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$.

(b) Proveu que, si la matriu P és idempotent i hermítica llavors, $\operatorname{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$ és l'ortogonal de $\operatorname{Col}\mathsf{P}$.

(c) Proveu que, si el rang de la matriu $m \times n$ A és n, llavors la matriu de la projecció ortogonal sobre $\operatorname{Col}\mathsf{A}$, $\mathsf{P} = \mathsf{A}\left(\mathsf{A}^*\mathsf{A}\right)^{-1}\mathsf{A}^*$, és idempotent i hermítica.

(solució: pàg. 601)

Lliçó 18. El mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt i la factorització QR

If people do not believe
that mathematics is simple,
it is only because they do not realize
how complicated life is

John von Neumann

A la primera part d'aquest curs, per resoldre un sistema lineal, hem fet servir l'estratègia de l'esglaonament, els dos casos més interessants de la qual han estat els algorismes de Gauss i Gauss-Jordan, que sempre es poden interpretar com a factoritzacions de la matriu de coeficients. La factorització LU n'és un cas particular.
En aquesta lliçó fem alguna cosa semblant per resoldre els problemes de projeccions ortogonals i mínims quadrats. Cercarem una base ortonormal de l'espai columna de la matriu implicada i observarem que això és equivalent a una factorització A = QR on les columnes de la matriu Q són ortonormals i R és una matriu triangular superior.

18.1. Obtenció de bases ortonormals. Mètode de Gram-Schmidt i factorització QR

L'algorisme de Gram-Schmidt transforma una base $\mathcal{B}_1$ d'un subespai F de $\mathbb{K}^n$ en una base ortonormal $\mathcal{B}_2$. El procés consisteix a construir iterativament una nova base, substituint cada vector per la seua projecció sobre l'ortogonal a l'embolcall lineal dels vectors anteriors.

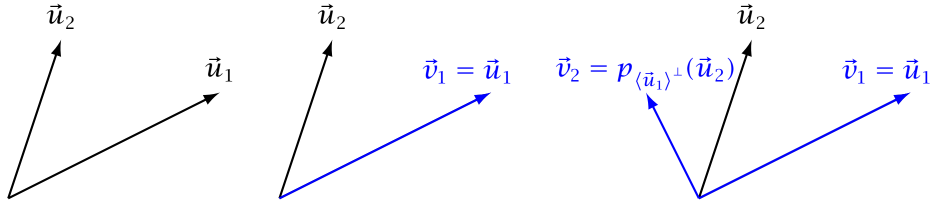
18.1.1. Algorisme de Gram-Schmidt amb dos i tres vectors

Començarem amb un subespai F de dimensió dos. Si el conjunt $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ és una base del subespai F, com que el vector $\vec{u}_2$ és la suma de les seues projeccions ortogonals sobre la recta generada per $\vec{u}_1$ i l'ortogonal d'aquesta recta, $\vec{u}_2 = p_{\langle \vec{u}_1 \rangle}(\vec{u}_2) + p_{\langle \vec{u}_1 \rangle^\perp}(\vec{u}_2)$,

$$p_{\langle \vec{u}_1 \rangle^\perp}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 - p_{\langle \vec{u}_1 \rangle}(\vec{u}_2)$$

és un vector ortogonal a $\vec{u}_1$ i $\{\vec{u}_1, p_{\langle \vec{u}_1 \rangle^\perp}(\vec{u}_2)\}$ és una base ortogonal de F. Anomenarem $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ aquesta nova base,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 &= p_{\langle \vec{v}_1 \rangle^\perp}(\vec{u}_2) \end{aligned}$$



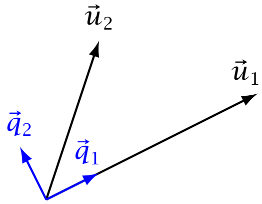
Ara, com que $p_{\langle \vec{u}_1 \rangle}(\vec{u}_2) = \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1$,

$$p_{\langle \vec{u}_1 \rangle^\perp}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 - p_{\langle \vec{u}_1 \rangle}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1$$

Per simplificar, escriurem $\alpha_{1,2} = \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}$ i tindrem

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1$$

La base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ és ortogonal, així que, perquè siga ortonormal, hem de dividir cada vector per la seua norma: si $\vec{q}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1$ i $\vec{q}_2 = \dfrac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2$, llavors $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ és una base ortonormal del subespai F.



En resum, per transformar la base de F $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ en una base ortonormal, $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$, apliquem l'algorisme següent:

Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt (amb dos vectors)

Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ és una base del subespai F,
aquest algorisme construeix una base ortonormal de F, $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$.

1. Obtenció d'una base ortogonal (projecteu $\vec{u}_2$ sobre l'ortogonal de $\vec{u}_1$):

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1 \qquad \left(\alpha_{1,2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\right)$$

2. Normalització (dividiu cada vector per la seua norma):

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1, \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2$$

EXEMPLE 18.1.

Apliqueu el mètode de Gram-Schmidt per a obtenir una base ortonormal del subespai $F = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, on $\vec{u}_1 = (-2, -2, -1)$ i $\vec{u}_2 = (1, 4, -1)$.

Obtenim una base ortogonal:

- El primer vector no l'hem de modificar: $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (-2, -2, -1)$.
- Calculem $\alpha_{1,2}$ i la norma de $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (-2, -2, -1) \cdot (-2, -2, -1) = 9 \qquad \|\vec{v}_1\| = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = 3$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 = (-2, -2, -1) \cdot (1, 4, -1) = -9 \qquad \alpha_{1,2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = -1$$

- Càlcul del vector $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1 = (-1, 2, -2)$$

- Calculem la norma de $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = (-1, 2, -2) \cdot (-1, 2, -2) = 9 \qquad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} = 3$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ és una base ortogonal de F.

Normalització: Per convertir els vectors en unitaris hem de dividir-los per les seues normes:

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{3}(-2, -2, -1)$$
$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)$$

$\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ és una base ortonormal de F. □

Suposem ara que el subespai F és tridimensional; partirem d'una base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ i, com en el cas anterior, construirem en primer lloc una base ortogonal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ i, després, una altra, $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$, ortonormal.

Per trobar la base ortogonal, els dos vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ els construïm de la mateixa manera:

1. El vector $\vec{v}_1$ serà el mateix $\vec{u}_1$:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$$

2. Com a $\vec{v}_2$ prendrem la projecció de $\vec{u}_2$ sobre l'ortogonal de la recta generada per $\vec{v}_1$:
$$\vec{v}_2 = p_{\langle \vec{v}_1 \rangle^\perp}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1, \qquad \alpha_{1,2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}$$

3. Per acabar d'obtenir una base de F, hi haurem d'afegir un tercer vector $\vec{v}_3$, que es trobe en F i siga ortogonal a $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$. Això ho podem aconseguir projectant ortogonalment el vector $\vec{u}_3$ sobre l'ortogonal de $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$.
$$\vec{v}_3 = p_{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle^\perp}(\vec{u}_2) = \vec{u}_3 - \alpha_{1,3}\vec{v}_1 - \alpha_{2,3}\vec{v}_2, \qquad \alpha_{1,3} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}, \quad \alpha_{2,3} = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}$$

Llavors, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ és una base ortogonal de F, així que, per convertir-la en ortonormal, dividim cada vector per la seua norma:
$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 \qquad \vec{q}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3$$

El conjunt $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ és una base ortonormal de F.

Exemple 18.2.

Apliqueu el mètode de Gram-Schmidt per a obtenir una base ortonormal del subespai $F = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$, on $\vec{u}_1 = (1,2,0,2)$, $\vec{u}_2 = (0,9,6,0)$ i $\vec{u}_3 = (0,0,6,9)$.

Obtenim una base ortogonal:

- El primer vector no l'hem de modificar: $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1,2,0,2)$.
- Calculem $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ i la norma de $\vec{v}_1$:

$$\begin{aligned} &\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (1,2,0,2) \cdot (1,2,0,2) = 9 && \|\vec{v}_1\| = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = 3 \\ &\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 = (1,2,0,2) \cdot (0,9,6,0) = 18 && \alpha_{1,2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = 2 \\ &\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3 = (1,2,0,2) \cdot (0,0,6,9) = 18 && \alpha_{1,3} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = 2 \end{aligned}$$

- Càlcul del vector $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1 = (-2,5,6,-4)$$

- Calculem $\alpha_{2,3}$ i la norma de $\vec{v}_2$:

$$\begin{aligned} &\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = (-2,5,6,-4) \cdot (-2,5,6,-4) = 81 && \|\vec{v}_2\| = \sqrt{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} = 9 \\ &\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3 = (-2,5,6,-4) \cdot (0,0,6,9) = 0 && \alpha_{2,3} = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} = 0 \end{aligned}$$

– Càlcul del vector $\vec{v}_3$:

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \alpha_{1,3}\vec{v}_1 - \alpha_{2,3}\vec{v}_2 = (-2,-4,6,5)$$

– Calculem la norma de $\vec{v}_3$:

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = (-2,-4,6,5)\cdot(-2,-4,6,5) = 81 \qquad \|\vec{v}_3\| = \sqrt{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3} = 9$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ és una base ortogonal de F.

Normalització: Per convertir els vectors en unitaris hem de dividir-los per les seues normes:

$$\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{3}(1,2,0,2)\\
\vec{q}_2 &= \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{9}(-2,5,6,-4)\\
\vec{q}_3 &= \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \frac{1}{9}(-2,-4,6,5)
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ és una base ortonormal de F. □

En general,

mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt (amb tres vectors)

Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és una base del subespai F,
aquest algorisme construeix una base ortonormal de F, $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$.

1. Obtenció d'una base ortogonal (projecteu $\vec{u}_2$ sobre l'ortogonal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$ sobre l'ortogonal de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$):

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1\\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1 && \left(\alpha_{1,2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\right)\\
\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \alpha_{1,3}\vec{v}_1 - \alpha_{2,3}\vec{v}_2 && \left(\alpha_{1,3} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\right), \quad \left(\alpha_{2,3} = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\right)
\end{aligned}$$

2. Normalització (dividiu cada vector per la seua norma):

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 \qquad \vec{q}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3$$

18.1.2. La factorització QR amb tres vectors

Les transformacions que hem fet al darrer exemple es poden interpretar com una sèrie d'operacions elementals:

- Al vector $\vec{u}_2$, li hem restat un múltiple de $\vec{v}_1$.
- Al vector $\vec{u}_3$, li hem restat un múltiple de $\vec{v}_1$. i, tot seguit, un múltiple de $\vec{v}_2$
- Hem dividit cada vector per la seua norma.

Si A és la matriu associada a la base $\mathcal{B}_1$, és a dir, $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\end{bmatrix}$, llavors l'algorisme de Gram-Schmidth consisteix a fer unes quantes operacions elementals sobre les columnes d'aquesta matriu. En aquest sentit, aquest algorisme és anàleg al de Gauss (però, en comptes de fer operacions elementals amb les files, les fem amb les columnes i, en comptes de cercar zeros i uns, cerquem vectors ortogonals i unitaris).

En l'exemple 18.2, la matriu seria $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ i el procés, esquemàticament, és el següent:

Obtenció d'una base ortogonal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \mathsf{E}_{1,2}(-\alpha_{1,2})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \mathsf{E}_{1,3}(-\alpha_{1,3})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \mathsf{E}_{2,3}(-\alpha_{2,3})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Normalització:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \mathsf{E}_1\left(\frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\right)\mathsf{E}_2\left(\frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\right)\mathsf{E}_3\left(\frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\right)} \begin{bmatrix} 1/3 & -2/9 & -2/9 \\ 2/3 & 5/9 & -4/9 \\ 0 & 6/9 & 6/9 \\ 2/3 & -4/9 & 5/9 \end{bmatrix} = \mathsf{Q}$$

Ací, la matriu Q té les columnes ortonormals. I, com que aquesta matriu ha estat obtinguda fent operacions elementals sobre les columnes de A, resulta que

$$\mathsf{A} = \mathsf{QR}$$

on R és el producte de les operacions elementals inverses de les que hem aplicat per trobar Q.

Aquesta matriu R és invertible (perquè és un producte de matrius elementals) i triangular superior (perquè totes les matrius elementals que hi hem multiplicat ho són). Per a calcular-la, com que

$$\begin{aligned} \mathsf{Q} &= \mathsf{A}\mathsf{E}_{1,2}(-\alpha_{1,2})\mathsf{E}_{1,3}(-\alpha_{1,3})\mathsf{E}_{2,3}(-\alpha_{2,3})\mathsf{E}_1\left(\frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\right)\mathsf{E}_2\left(\frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\right)\mathsf{E}_3\left(\frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\right) \\ &= \mathsf{A}\,\underbrace{\mathsf{E}_{1,2}(-2)\mathsf{E}_{1,3}(-2)\mathsf{E}_{2,3}(0)\mathsf{E}_1\left(\frac{1}{3}\right)\mathsf{E}_2\left(\frac{1}{9}\right)\mathsf{E}_3\left(\frac{1}{9}\right)}_{\mathsf{R}^{-1}} \end{aligned}$$

tindrem

$$\begin{aligned}\mathsf{R} &= \mathsf{E}_3\left(\|\vec{v}_3\|\right)\mathsf{E}_2\left(\|\vec{v}_2\|\right)\mathsf{E}_1\left(\|\vec{v}_1\|\right)\mathsf{E}_{2,3}(\alpha_{2,3})\mathsf{E}_{1,3}(\alpha_{1,3})\mathsf{E}_{1,2}(\alpha_{1,2})\\ &= \mathsf{E}_3\,(9)\,\mathsf{E}_2\,(9)\,\mathsf{E}_1\,(3)\,\mathsf{E}_{2,3}(0)\mathsf{E}_{1,3}(2)\mathsf{E}_{1,2}(2)\end{aligned}$$

Així que, aplicant a les files de la identitat les operacions elementals inverses de les que apliquem a A, obtenim

$$\mathtt{I} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(2)\cdot} \begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}(2)\cdot} \begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}(0)\cdot} \begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_3(9)\mathsf{E}_2(9)\mathsf{E}_1(3)\cdot} \begin{bmatrix}3&6&6\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix} = \mathsf{R}$$

i hem factoritzat la matriu A d'aquesta manera:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&9&0\\0&6&6\\2&0&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3&-2/9&-2/9\\2/3&5/9&-4/9\\0&6/9&6/9\\2/3&-4/9&5/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&6&6\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

☞ En general, si els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ són linealment independents llavors, la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\end{bmatrix}$ es pot factoritzar com

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \vec{q}_3\end{bmatrix}}_{\mathsf{Q}}\underbrace{\begin{bmatrix}\|v_1\| & \alpha_{1,2}\,\|v_1\| & \alpha_{1,3}\,\|v_1\|\\ 0 & \|v_2\| & \alpha_{2,3}\,\|v_2\|\\ 0 & 0 & \|v_3\|\end{bmatrix}}_{\mathsf{R}}$$

Aquest o qualsevol altre producte $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$ on Q té les columnes ortonormals i R és triangular superior i invertible és una *factorització QR de la matriu* A.

18.1.3. El cas general

Definició 18.1.

Qualsevol factorització de la matriu A com a producte d'una matriu amb les columnes ortonormals i una altra de triangular superior invertible és una *descomposició* (o *factorització*) QR de A.

Els dos exemples anteriors són suficients per a convèncer-nos que, si $\mathcal{B}_1$ és una base d'un subespai F de $\mathbb{K}^n$, l'algorisme següent ens proporciona una base ortonormal de F, i una factorització QR de la matriu $\mathsf{A} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$.

Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt

Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ ***és una base del subespai*** F ***llavors, aquest algorisme construeix una base ortonormal de*** F**,** $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_p\}$**.**

1. Obtenció d'una base ortogonal (projecteu cada vector sobre l'ortogonal dels anteriors):

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1 \qquad \left(\alpha_{1,2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\right)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \alpha_{1,3}\vec{v}_1 - \alpha_{2,3}\vec{v}_2 \qquad \left(\alpha_{i,3} = \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{u}_3}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}, 1 \leq i \leq 2\right)$$

$$\dots$$

$$\vec{v}_p = \vec{u}_p - \alpha_{1,p}\vec{v}_1 - \alpha_{2,p}\vec{v}_2 - \cdots - \alpha_{p-1,p}\vec{v}_{p-1} \qquad \left(\alpha_{i,p} = \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{u}_p}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}, 1 \leq i \leq p-1\right)$$

2. Normalització (dividiu cada vector per la seua norma):

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 \qquad \dots \qquad \vec{q}_p = \frac{1}{\left\|\vec{v}_p\right\|}\vec{v}_p$$

Factorització QR deduïda de l'algorisme d'ortonormalització de Gram-Schmidt

Si les columnes de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p \end{bmatrix}$ són linealment independents, i els vectors $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, …, $\vec{q}_p$ es calculen com abans, aleshores

$$\mathsf{A} = \mathsf{QR}$$

on

$$\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_p \end{bmatrix}$$

és una matriu que té les columnes ortonormals i

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} \|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,2}\|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,3}\|\vec{v}_1\| & \cdots & \alpha_{1,p}\|\vec{v}_1\| \\ 0 & \|\vec{v}_2\| & \alpha_{2,3}\|\vec{v}_2\| & \cdots & \alpha_{2,p}\|\vec{v}_2\| \\ 0 & 0 & \|\vec{v}_3\| & \cdots & \alpha_{3,p}\|\vec{v}_3\| \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left\|\vec{v}_p\right\| \end{bmatrix}$$

és una matriu triangular superior invertible.

☞ El procés anterior funciona perquè les columnes de la matriu A són la base d'un subespai, és a dir, que les columnes de la matriu A són linealment independents.

☞ Si A és una matriu $m \times p$, llavors Q és també $m \times p$ i té les columnes ortonormals i la matriu R és triangular superior, $p \times p$, i invertible.

☞ La matriu Q té les columnes ortonormals, així per $\mathsf{Q}^*\mathsf{Q} = \mathrm{I}$, però (si Q no és quadrada) QQ^* no és igual a la matriu identitat.

☞ El mètode de Gram-Schmidt és anàleg a l'algorisme de Gauss, en el sentit que es pot interpretar com una sèrie d'operacions elementals.

I, de la mateixa manera que l'algorisme de Gauss ens proporciona la factorització LU, el de Gram-Schmidt ens dona una factorització QR.

Cal tenir en compte que la descomposició QR no és única, i que el mètode de Gram-Schmidt no és l'única estratègia que ens permet trobar una factorització QR (de fet, en la pràctica, els sistemes de càlcul científic no fan servir aquest algorisme sinó d'altres que són numèricament més estables).

18.2. Aplicacions de la factorització QR

Acabarem la lliçó veient com se simplifica la resolució dels problemes bàsics quan coneixem una factorització QR de la matriu implicada. Suposem que la matriu $\mathsf{A} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}$ és la matriu associada a una base $\mathcal{B}$ del subespai F i que $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$ és una factorització QR de la matriu A.

18.2.1. Projecció ortogonal

La projecció ortogonal del vector $\vec{b}$ sobre el subespai F depén únicament de F; per tant, aquesta projecció és independent de la base de F que escollim. Com que les columnes de Q són una base ortonormal de F, podem aplicar la fórmula (16.3) (o (16.4)) (pàgina 242):

$$P_F(\vec{b}) = \mathsf{QQ}^*\vec{b} = (\vec{q}_1^*\vec{b})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2^*\vec{b})\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_p^*\vec{b})\vec{q}_p$$

18.2.2. Mínims quadrats

Per trobar la solució per mínims quadrats del sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ hem de resoldre el sistema $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$. Ara bé, $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{R}^*\mathsf{Q}^*\mathsf{QR} = \mathsf{R}^*\mathsf{R}$ (perquè $\mathsf{Q}^*\mathsf{Q} = \mathrm{I}$) de manera que $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$ és el mateix que $\mathsf{R}^*\mathsf{R}\vec{x} = \mathsf{R}^*\mathsf{Q}^*\vec{b}$, o bé, com que R^* és invertible,

$$\mathsf{R}\vec{x} = \mathsf{Q}^*\vec{b}$$

i l'únic que hem de fer és resoldre un sistema triangular. D'altra banda, l'error de mínims quadrats és $e = \left\|\vec{b} - \mathsf{A}\vec{x}\right\|$, és a dir, $e = \left\|\vec{b} - \underbrace{\mathsf{QR}}_{\mathsf{A}}\underbrace{\mathsf{R}^{-1}\mathsf{Q}^*\vec{b}}_{\vec{x}}\right\| = \left\|\vec{b} - \mathsf{QQ}^*\vec{b}\right\|$.

18.3. Resum

Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt

☞ L'algorisme de Gram-Schmidt transforma una base del subespai F, $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$, en una una base ortonormal, $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_p\}$.

Aquest algorisme consta de dues fases:

1. Obtenció d'una base ortogonal (projecteu cada vector sobre l'ortogonal dels anteriors):

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1 = \vec{u}_1 \\
&\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1 && \left(\alpha_{1,2} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\right) \\
&\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \alpha_{1,3}\vec{v}_1 - \alpha_{2,3}\vec{v}_2 && \left(\alpha_{i,3} = \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{u}_3}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}, 1 \le i \le 2\right) \\
&\dots \\
&\vec{v}_p = \vec{u}_p - \alpha_{1,p}\vec{v}_1 - \alpha_{2,p}\vec{v}_2 - \cdots - \alpha_{p-1,p}\vec{v}_{p-1} && \left(\alpha_{i,p} = \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{u}_p}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}, 1 \le i \le p-1\right)
\end{aligned}$$

2. Normalització (dividiu cada vector per la seua norma):

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1, \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2, \qquad \dots \qquad \vec{q}_p = \frac{1}{\left\|\vec{v}_p\right\|}\vec{v}_p$$

Factorització QR

☞ L'algorisme de Gram-Schmidt és equivalent a una factorització $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$, on Q té les columnes ortonormals i R és triangular superior invertible:
Si les columnes de $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_p\end{bmatrix}$ són linealment independents,

$$\mathsf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}\vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_p\end{bmatrix}}_{\mathsf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix}
\|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,2}\|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,3}\|\vec{v}_1\| & \cdots & \alpha_{1,p}\|\vec{v}_1\| \\
0 & \|\vec{v}_2\| & \alpha_{2,3}\|\vec{v}_2\| & \cdots & \alpha_{2,p}\|\vec{v}_2\| \\
0 & 0 & \|\vec{v}_3\| & \cdots & \alpha_{3,p}\|\vec{v}_3\| \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \left\|\vec{v}_p\right\|
\end{bmatrix}}_{\mathsf{R}}$$

Aplicacions

Si $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$ és una factorització QR,

- Si $F = \operatorname{Col}\mathsf{A}$, $p_F(\vec{b}) = \mathsf{Q}^*\mathsf{Q}\vec{b}$
- La solució del problema de mínims quadrats $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és la solució del sistema lineal (triangular) $\mathsf{R}\vec{x} = \mathsf{Q}^*\vec{b}$.

18.4. Exercicis

Exercici 18.1. Apliqueu l'algorisme de Gram-Schmidt i trobeu una factorització QR de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 603)

Exercici 18.2. Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{b} = (3, 5, 7, -3)$ sobre l'espai columna de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 604)

Exercici 18.3. Resoleu el problema de mínims quadrats $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$, fent servir la descomposició QR de l'exercici 18.1. Determineu també l'error de mínims quadrats en aquest problema.

(solució: pàg. 604)

Exercici 18.4. Trobeu una factorització QR de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 & -3 \\ -3 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 605)

Exercici 18.5. (Una versió alternativa de la factorització QR) Suposem que $\mathsf{A} = \mathsf{Q}_1\mathsf{R}_1$ és una factorització QR de la matriu $m \times n$ A. Demostreu que $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$, on Q és una matriu unitària $m \times m$ i $\mathsf{R} = \begin{bmatrix} \mathsf{R}_1 \\ \mathsf{O} \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 606)

Exercici 18.6. Factoritzeu la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ com $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$, on Q és una matriu ortogonal i $\mathsf{R} = \begin{bmatrix} \mathsf{R}_1 \\ \mathsf{O} \end{bmatrix}$ amb R_1 triangular superior invertible.

(solució: pàg. 606)

CAPÍTOL 5

ESPAIS VECTORIALS I APLICACIONS LINEALS

Lliçó 19. Espais vectorials **269**

19.1. Espais vectorials 269

19.1.1. Exemples 271

19.2. Subespais d'un espai vectorial 272

19.2.1. Exemples 272

19.3. Dependència lineal 273

19.4. Resum 275

19.5. Exercicis 277

Lliçó 20. Base d'un espai vectorial **279**

20.1. Embolcall lineal d'un conjunt de vectors i conjunts generadors 279

20.2. Bases 280

20.2.1. Bases canòniques 281

20.3. Espais de dimensió finita 282

20.3.1. Coordenades d'un vector respecte a una base 282

20.3.2. La dimensió d'un espai vectorial 284

20.4. Interpolació polinomial 287

20.4.1. La matriu de Vandermonde 288

20.5. Resum 290

20.6. Exercicis 292

Lliçó 21. Espais vectorials euclidians **294**

21.1. Productes escalars. Espais vectorials euclidians . . 294

21.2. Exemples 295

21.2.1. Productes escalars definits per una matriu 295

21.2.2. Un producte escalar en un espai de funcions contínues 296

21.2.3. Un producte escalar en l'espai dels polinomis 296

21.2.4. Un producte escalar en un espai de successions 296

21.2.5. Un producte escalar en l'espai de les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ 297

21.3. Norma, distància i angle. Ortogonalitat 297

21.3.1. Expressió matricial del producte escalar. La matriu de Gram 298

21.3.2. Bases ortonormals 300

21.4. El complement ortogonal. Projeccions ortogonals 302

21.4.1. Aproximació a les sèries de Fourier . . . 304

21.5. Resum 308

21.6. Exercicis 310

21.6.1. Productes escalars 310

21.6.2. Expressió matricial del producte escalar. Bases ortonormals 311

21.6.3. Sèries de Fourier 312

Lliçó 22. Aplicacions lineals **313**

22.1. Aplicacions lineals 313

22.1.1. Nucli i imatge 315

22.2. Transformacions lineals de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ 317

22.3. Interpretació geomètrica 318

22.3.1. Transformacions lineals especials 319

22.3.2. Propietats algèbriques i geomètriques . 324

22.4. Resum 326

22.5. Exercicis 327

Lliçó 23. Canvis de base **329**

23.1. Canvi de base en un espai vectorial 329

23.1.1. La matriu del canvi de base 329

23.1.2. Fórmula del canvi de base en un espai vectorial 330

23.2. Canvi de base en una aplicació lineal 332

23.2.1. La matriu associada a una aplicació lineal respecte a dues bases 333

23.2.2. Fórmula del canvi de bases en una aplicació lineal 334

23.2.3. Matrius associades a una aplicació lineal en diverses bases 336

23.3. Resum 338

23.4. Exercicis 339

LLIÇÓ 19. ESPAIS VECTORIALS

Esistono dei sistemi di enti sui quali sono date le seguenti definizioni:
1. È definita l'eguaglianza di due enti [...]
2. È definita la somma di due enti [...]
*3 [...] L'ente m***a** *[...] si dirà prodotto*
del numero (reale) m per l'ente **a** *[...]*

Giuseppe Peano

> En aquesta lliçó introduïm la teoria dels espais vectorials. Fins ara només coneixem els espais $\mathbb{K}^n$; ara generalitzarem les idees que hem estat estudiant i trobarem que molts conjunts que ja coneixem tenen l'estructura d'espais vectorials.

19.1. ESPAIS VECTORIALS

L'eina fonamental en tot el treball amb sistemes d'equacions, matrius i subespais de $\mathbb{K}^n$ han estat les combinacions lineals. Per això, ara que pretenem generalitzar les idees a altres conjunts, treballarem amb objectes que ens permeten fer *combinacions lineals*; en altres paraules, hem de fer servir conjunts en els quals puguem fer sumes i multiplicacions per escalars. Entre els conjunts que ens ho permeten hi ha les matrius, els polinomis, les successions, les funcions...

Les dues definicions importants són aquestes:

DEFINICIÓ 19.1.

Un *espai vectorial* és un conjunt E, els elements del qual s'anomenen *vectors*, en el qual hi ha definides dues operacions: la *suma* de vectors i el producte d'un escalar per un vector, que tenen les propietats següents:

Propietats de la suma (la suma de dos vectors és un vector)

Commutativa $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_1$

Associativa $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \vec{u}_3 = \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3)$

Element neutre Existeix un vector *zero*, $\vec{0}$ amb la propietat que
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in E$

Elements oposats (o simètrics) Cada vector $\vec{u}$ té un *vector oposat*, $-\vec{u}$, de manera que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

$(\cdots)$

$(\cdots)$

Propietats del producte escalar-vector (el producte d'un escalar per un vector és un vector)

Associativa $(\alpha_1\alpha_2)\vec{u} = \alpha_1(\alpha_2\vec{u})$

Distributiva respecte a la suma d'escalars $(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{u} = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{u}$

Distributiva respecte a la suma de vectors $\alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \alpha\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2$

Element neutre $1\vec{u} = \vec{u}$

DEFINICIÓ 19.2.

Un vector $\vec{u}$ és *combinació lineal* dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_p$ si existeixen escalars α_1, α_2,..., α_p de manera que

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots \alpha_p\vec{u}_p$$

Segons que treballem amb escalars reals o complexos parlarem d'espais vectorials reals o d'espais vectorials complexos i, quan no siga necessari especificar quin és el conjunt d'escalars, parlarem d'espais vectorials *sobre* $\mathbb{K}$.

A partir de la definició es poden deduir totes les propietats del càlcul amb vectors. La més interessant fa referència al vector zero i a l'escalar zero: el producte d'un escalar per un vector és zero, només, quan un dels dos és zero.

PROPIETATS 19.1.

Suposem que $\vec{u}$ és un vector i que α és un escalar. Llavors,

1. $0\vec{u} = \vec{0}$
2. $\alpha\vec{0} = \vec{0}$
3. *Si* $\alpha\vec{u} = \vec{0}$*, llavors* $\alpha = 0$ *o* $\vec{u} = \vec{0}$

Demostració:

(a) Per la propietat distributiva respecte a la suma d'escalars, $0\vec{u} = (0+0)\vec{u} = 0\vec{u} + 0\vec{u}$. Si ara hi sumem l'element oposat de $0\vec{u}$, tindrem

$$0\vec{u} + (-0\vec{u}) = (0\vec{u} + 0\vec{u}) + (-0\vec{u}) = 0\vec{u} + (0\vec{u} + (-0\vec{u}))$$

(per la propietat associativa). Però $0\vec{u} + (-0\vec{u}) = \vec{0}$, per la propietat de l'element oposat, així que $\vec{0} = 0\vec{u} + \vec{0} = 0\vec{u}$ (perquè $\vec{0}$ és neutre).

(b) La prova és anàloga a la de l'apartat anterior: $\alpha\vec{0} = \alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha\vec{0} + \alpha\vec{0}$, així que $\alpha\vec{0} + (-\alpha\vec{0}) = (\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0}) + (-\alpha\vec{0}) = \alpha\vec{0} + (\alpha\vec{0} + (-\alpha\vec{0}))$, és a dir, $\vec{0} = \alpha\vec{0}$.

(c) Si $\alpha = 0$, no hi ha res a provar. Suposem, doncs, que $\alpha \neq 0$ i $\alpha\vec{u} = \vec{0}$. Com que α és un nombre real o complex no nul, podem multiplicar per α^{-1}:

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(\alpha\vec{u}) &= \alpha^{-1}\vec{0} && \\
(\alpha^{-1}\alpha)\vec{u} &= \alpha^{-1}\vec{0} && \text{(propietat associativa)} \\
1\vec{u} &= \alpha^{-1}\vec{0} && \\
\vec{u} &= \alpha^{-1}\vec{0} && \text{(neutre del producte escalar-vector)} \\
\vec{u} &= \vec{0} && \text{(per l'apartat anterior)} \quad \square
\end{aligned}$$

19.1.1. Exemples

Evidentment, $\mathbb{K}^n$ és un espai vectorial. Però hi ha molts altres exemples interessants. Vegem-ne alguns.

L'espai zero El conjunt $O = \{\vec{0}\}$ (format per un sol vector) és un espai vectorial. Evidentment, l'única manera de definir-hi les operacions és aquesta:

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$
$$\alpha\vec{0} = \vec{0}$$

i totes les propietats de la definició es compleixen, perquè el resultat de qualsevol operació és $\vec{0}$.

Les matrius $m \times n$ En el conjunt $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ hi ha definides les dues operacions, suma de matrius i producte d'un escalar per una matriu, i es compleixen totes les propietats de la definició (vegeu les propietats 3.7 a la lliçó 3). En conseqüència, aquest conjunt és un espai vectorial.[1]

Els polinomis de la indeterminada x Representem com $\mathbb{K}[x]$ el conjunt de tots els polinomis de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

(on els coeficients són elements de $\mathbb{K}$). En aquest conjunt també tenim les operacions convenients:

$$\begin{aligned}
(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) &= \\
(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + \cdots + (a_n + b_n)\,x_n& \\
\alpha\,(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \cdots + \alpha a_nx^n&
\end{aligned}$$

i es poden comprovar fàcilment les vuit propietats de la definició. Per tant, $\mathbb{K}[x]$ és un espai vectorial.

[1] El conjunt de totes les matrius *no és* un espai vectorial, perquè les matrius de dimensions diferents no poden sumar-se. El que tenim ací són diversos espais: el de les matrius 2×2, el de les matrius 4×5, etc.

El conjunt de totes les successions de nombres reals En aquest espai, les operacions són

$$\{a_n : n = 1, 2, \dots\} + \{b_n : n = 1, 2, \dots\} = \{a_n + b_n : n = 1, 2, \dots\}$$
$$\alpha \{a_n : n = 1, 2, \dots\} = \{\alpha a_n : n = 1, 2, \dots\}$$

Les funcions contínues en un interval El conjunt $C_0(I)$ format per totes les funcions (reals o complexes) contínues en l'interval real I també és un espai vectorial (recordem que la suma de dues funcions contínues i el producte d'un nombre per una funció contínua també són funcions contínues).

19.2. Subespais d'un espai vectorial

Els subespais d'un espai vectorial E es defineixen de la mateixa manera que els subespais de $\mathbb{K}^n$.

Definició 19.3.

Un *subespai* de l'espai vectorial E és un subconjunt $F \subset E$ que té aquestes dues propietats:

(a) El vector $\vec{0}$ és un element de F: $\vec{0} \in F$.

(b) Si fem qualsevol combinació lineal amb dos elements de F el vector que en resulta també és un element de F:

$$\text{Si } u_1, u_2 \in F \text{ llavors } \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 \in F$$

(per a dos escalars α_1 i α_2 qualssevol).

En realitat, els subespais són també espais vectorials. De fet, normalment es defineix el subespai com un subconjunt de E que, amb les mateixes operacions definides en E, és també un espai vectorial.

19.2.1. Exemples

L'espai E i el conjunt $\{\vec{0}\}$ són, evidentment, subespais de E. D'aquests subespais en direm *impropis*.

Ací veurem alguns exemples interessants de subespais dels espais que hem definit a la secció anterior.

Subespais de matrius En l'espai de les matrius quadrades $n \times n$, els conjunts de les matrius diagonals, de les triangulars superiors, de les triangulars inferiors i el de les matrius simètriques són subespais.

EXEMPLE 19.1.

Proveu que el conjunt S_n de les matrius simètriques $n \times n$ és un subespai de l'espai $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

És clar que $S_n \subset \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. A més a més,

(a) La matriu O és un element de S_n, perquè és una matriu simètrica.

(b) Si A_1 i A_2 són matrius simètriques $n \times n$, llavors

$$(\alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2)^\mathsf{T} = \alpha_1\mathsf{A}_1^\mathsf{T} + \alpha_2\mathsf{A}_2^\mathsf{T} = \alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2$$

així que $\alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2$ també és una matriu simètrica. $\square$

SUBESPAIS DE POLINOMIS Representem com $\mathbb{K}_n[x]$ el conjunt dels polinomis de grau, com a molt, n. Aquest conjunt és un subespai de $\mathbb{K}[x]$, perquè la suma de dos polinomis i el producte d'un escalar per un polinomi no augmenten el grau dels polinomis.

Un polinomi és *parell* si només conté potències parelles de la indeterminada (per exemple, el polinomi $p(x) = 1 - x^2 + x^4$ és parell). El conjunt de tots els polinomis parells és un subespai de $\mathbb{K}[x]$.

SUBESPAIS DE SUCCESSIONS El conjunt de les successions convergents és un subespai del de totes les successions (recordem que la suma de dues successions convergents és convergent, i que també ho és el producte d'un nombre per una successió convergent).

També són subespais els conjunts de les successions que convergeixen a zero i el de les succesions $\{a_n\}$ per a les quals la sèrie $\sum a_n$ és convergent.

SUBESPAIS DE FUNCIONS Representem com $C_1(I)$ el conjunt de les funcions reals o complexes que són derivables en l'interval real I amb derivada contínua; $C_2(I)$ és el conjunt de les funcions derivables dues vegades en I amb derivada segona contínua (i anàlogament es defineixen els conjunts $C_3(I)$, $C_4(I)$... $C_\infty(I)$ és el conjunt de les funcions derivables infinites vegades).

Tots aquests conjunts són subespais de $C_0(I)$.

19.3. DEPENDÈNCIA LINEAL

Una *relació de dependència* entre els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ és una igualtat de la forma

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p = \vec{0}$$

on $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ són escalars. És clar que, elegint tots els escalars iguals a zero, obtenim la relació de dependència

$$0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \cdots + 0\vec{u}_p = \vec{0}$$

Aquesta és la relació de dependència *trivial*.

Definició 19.4.

Un conjunt de vectors S és *linealment dependent* si existeix alguna relació de dependència no trivial entre vectors de S. En cas contrari, diem que S és *linealment independent*.

- ☞ Un conjunt que continga el vector zero sempre serà linealment dependent.
- ☞ Si S és un conjunt que només conté un element, i aquest element no és el zero, llavors S és linealment independent.

Exemple 19.2.

Estudieu si el conjunt de polinomis $S = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ és linealment dependent o independent.

Suposem que

$$\alpha_1 + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x-1)^2 = 0$$

Derivant aquesta igualtat obtenim

$$\alpha_2 + 2\alpha_3(x-1) = 0$$

i, tornant a derivar,

$$2\alpha_3 = 0$$

D'aquestes tres igualtats es dedueix que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, de manera que S és linealment independent. □

Exemple 19.3.

Estudieu si el conjunt de matrius 2×2

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

és linealment dependent o independent.

Com que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el conjunt S és linealment dependent. □

Exemple 19.4.

Estudieu si el conjunt de totes les matrius simètriques 2×2 és linealment independent.

És evident que no. Per exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és una relació de dependència no trivial entre matrius simètriques. □

PROPIETAT 19.2.

Suposem que S és un conjunt que conté, almenys, dos elements. Aleshores, S és linealment dependent si i només si existeix algun vector en S que és combinació lineal dels altres. □

En l'exemple 19.3, la tercera matriu és la suma de les altres dues; per això S és linealment dependent.

19.4. RESUM

Espais vectorials

☞ Un *espai* vectorial és un conjunt E, els elements del qual s'anomenen *vectors*, en el qual hi ha definides dues operacions: la *suma de vectors* i el *producte d'un escalar per un vector*, que tenen les propietats següents:

Propietats de la suma

Commutativa $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_1$

Associativa $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \vec{u}_3 = \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3)$

Element neutre Existeix un vector *zero*, $\vec{0}$ amb la propietat que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ $\forall \vec{u} \in E$

Elements oposats (o simètrics) Cada vector $\vec{u}$ té un *vector oposat*, $-\vec{u}$, de manera que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Propietats del producte escalar-vector

Associativa $(\alpha_1\alpha_2)\vec{u} = \alpha_1(\alpha_2\vec{u})$

Distributiva respecte a la suma d'escalars $(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{u} = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{u}$

Distributiva respecte a la suma de vectors $\alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \alpha\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2$

Element neutre L'escalar 1 és el neutre del producte: $1\vec{u} = \vec{u}$

☞ En un espai vectorial, $\alpha\vec{u} = \vec{0} \iff \alpha = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples

- L'espai nul $O = \{\vec{0}\}$.
- L'espai $\mathbb{K}^n$.
- El conjunt de les matrius $m \times n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

- Els polinomis d'una indeterminada x, $\mathbb{K}[x]$.
- El conjunt de les successions de nombres reals (o les de nombres complexos).
- Les funcions contínues en un interval, $C_0(I)$.
- ...

Combinacions lineals

☞ Un vector $\vec{u}$ és *combinació lineal* dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_p$ si existeixen escalars α_1, α_2,..., α_p tals que $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \ldots \alpha_p\vec{u}_p$.

Subespais vectorials

☞ Un *subespai* de l'espai vectorial E és un subconjunt $F \subset E$ que té aquestes dues propietats:

(a) El vector $\vec{0}$ és un element de F: $\vec{0} \in F$.

(b) Si fem qualsevol combinació lineal amb dos elements de F el vector que en resulta també és un element de F: Si $u_1, u_2 \in F$ llavors $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \in F$ (per a dos escalars α_1 i α_2 qualssevol).

Exemples

- Les matrius simètriques, diagonals, triangulars superiors...
- Els polinomis de grau menor o igual que n, $\mathbb{K}_n[x]$.
- Les successions convergents.
- Les funcions derivables amb derivada contínua en un interval, $C_1(I)$; les dues vegades derivables amb derivada segona contínua, $C_2(I)$...; les funcions infinitament derivables, $C_\infty(I)$.
- ...

Dependència lineal

- Una *relació de dependència* entre els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p$ és una igualtat de la forma

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p = \vec{0}$$

  on $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ són escalars.
- Un conjunt de vectors S és *linealment dependent* si existeix alguna relació de dependència no trivial entre vectors de S.

  En cas contrari, diem que S és *linealment independent*.

☞ Un conjunt que continga el vector zero sempre serà linealment dependent.

☞ Si S és un conjunt que només conté un element, i aquest element no és el zero, llavors S és linealment independent.

☞ Si S és un conjunt que només conté més d'un element, llavors S és linealment dependent, si i només si algun element de S és combinació lineal dels altres.

19.5. Exercicis

Exercici 19.1. Estudieu si els conjunts F següents són o no subespais dels espais vectorials E que s'indiquen en cada cas.

(a) F és el conjunt de les matrius quadrades 2×2 A per a les quals $a_{11} = a_{22}$ i $a_{12} = 2a_{21}$. $E = \mathcal{M}_{2\times 2}$.

(b) F és el conjunt de les matrius quadrades 2×2 A per a les quals $a_{11} = a_{22} = 0$ i $a_{12} = a_{21} = 2$. $E = \mathcal{M}_{2\times 2}$.

(c) F és el conjunt dels polinomis de grau parell. $E = \mathbb{R}[x]$.

(d) F és el conjunt dels polinomis de la forma $p(x) = ax + bx^2$ on a i b són constants qualssevol. $E = \mathbb{R}_1[x]$.

(e) F és el conjunt dels polinomis de la forma $p(x) = 2 + 2ax$ on a és una constant qualsevol. $E = \mathbb{R}_1[x]$.

(solució: pàg. 608)

Exercici 19.2. Una funció f és una solució de l'*equació diferencial* $y'' + y = 0$ en $\mathbb{R}$ si, per a tot $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$.
(a) Comproveu que les funcions $\cos x$ i $\sin x$ són solucions d'aquesta equació diferencial.
(b) Proveu que el conjunt S de totes les funcions que són solucions d'aquesta equació diferencial és un subespai vectorial de l'espai $C_\infty(\mathbb{R})$.
(c) Deduïu que totes les funcions de la forma $f(x) = \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x$ també en són solució.

(solució: pàg. 609)

Exercici 19.3. Estudieu si les successions

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\} \\
\{b_n\} &= \{1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots\} \\
\{c_n\} &= \{1, 3, 9, \dots, 3^n, \dots\}
\end{aligned}$$

són linealment independents.

(solució: pàg. 609)

Exercici 19.4. Estudieu si els conjunts de polinomis

$$\mathcal{P}_1 = \{x, 1 + 2x, 1 - 3x, 1 - 4x^2\}, \qquad \mathcal{P}_2 = \{1 + x, 1 + 2x, x - x^2\}$$

són linealment independents. En cas que no ho siguen, trobeu alguna relació de dependència no trivial entre els seus elements.

(solució: pàg. 610)

Exercici 19.5. Estudieu si el conjunt de matrius 2×2,

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

és linealment independent. És possible *ampliar* aquest conjunt, afegint una matriu A, de manera que el nou conjunt continue essent linealment independent?

(solució: pàg. 611)

Exercici 19.6. Estudieu si el conjunt de funcions $\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ és linealment independent.

(solució: pàg. 611)

Lliçó 20. Base d'un espai vectorial

We share a philosophy about linear algebra:
we think basis-free, we write basis-free,
but when the chips are down we close the office door
and compute with matrices like fury

Irving Kaplansky

Ara traslladarem el concepte de base als espais vectorials arbitraris

20.1. Embolcall lineal d'un conjunt de vectors i conjunts generadors

Si S és un conjunt de vectors, l'*embolcall lineal* de S és el conjunt $\langle S \rangle$ de totes les combinacions lineals dels elements de S.

Per exemple, l'embolcall lineal de

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

és el conjunt de les matrius triangulars superiors 2×2, perquè

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☞ L'embolcall lineal $\langle S \rangle$ és el subespai més petit que conté a S.

Definició 20.1.

Un conjunt S és *generador* de l'espai E si $\langle S \rangle = E$.

☞ També es diu que S *genera* l'espai E.

Exemple 20.1.

Estudieu si el conjunt $S = \{1, 1+x, 1-x, x-x^2\}$ és generador de $\mathbb{K}_2[x]$.

Es tracta de veure si qualsevol polinomi de grau, com a molt, 2 és combinació lineal dels vectors de S, és a dir, si, per a qualsevol polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, existeixen escalars α_1, α_2, α_3, α_4, de manera que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \alpha_1 + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1-x) + \alpha_4(x - x^2)$$

o, equivalentment,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)x - \alpha_4x^2$$

Igualant els coeficients, tindrem

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad &= a_0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 &= a_1 \\ -\alpha_4 &= a_2 \end{aligned}$$

Sistema d'equacions lineals que podem escriure en forma matricial com

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Aquest sistema és compatible i, en conseqüència, S és generador de $\mathbb{K}_2[x]$. ▫

20.2. Bases

Definició 20.2.

Una *base* de l'espai vectorial E és un conjunt de vectors $\mathcal{B}$ que és linealment independent i generador de E.

☞ L'espai zero no té cap base, perquè no té subconjunts linealment independents.

Exemple 20.2.

Estudieu si el conjunt $S = \{1, 1 + x, 1 - x, x - x^2\}$ és base de $\mathbb{K}_2[x]$.

En un exemple anterior hem provat que aquest conjunt és generador de $\mathbb{K}_2[x]$. Però no és linealment independent, perquè

$$-1 + \frac{1}{2}(1 + x) + \frac{1}{2}(1 - x) = 0$$

Per tant, no és una base. ▫

Exemple 20.3.

Estudieu si el conjunt $S = \{1 + x, 1 - x, x - x^2\}$ és base de $\mathbb{K}_2[x]$.

Es tracta d'estudiar si aquest conjunt és independent i generador. Perquè siga generador, qualsevol vector n'ha de ser combinació lineal:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 - x) + \alpha_3(x - x^2)$$

Reordenant segons les potències de x,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)x - \alpha_3x^2$$

Igualem coeficents,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \qquad &= a_0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= a_1 \\ -\alpha_3 &= a_2 \end{aligned}$$

En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

El rang de la matriu d'aquest sistema lineal és 3. Per tant, el sistema és compatible i el conjunt S és generador.

Per decidir si es tracta d'un conjunt linealment independent hem d'estudiar l'equació

$$\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 - x) + \alpha_3(x - x^2) = 0$$

Que és equivalent al sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I, com que aquest sistema és determinat, l'única solució que té és $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, de manera que S és independent. En definitiva, S és una base de $\mathbb{K}_2[x]$. □

20.2.1. Bases canòniques

Als espais vectorials més usuals anomenem *bases canòniques* (o *estàndard*) les més òbvies (que no tenen per què ser sempre les més adequades per a tractar un problema determinat, amb aquests espais).

Concretament, a les unitats anteriors, hem estudiat a bastament les bases dels espais $\mathbb{K}^n$: qualsevol conjunt format per n vectors independents és una base, però la base canònica de $\mathbb{K}^n$ és

$$C(\mathbb{K}^n) = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$$

De manera anàloga, la base canònica de l'espai $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és aquesta:

$$C(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(notem que aquesta base té mn elements).

Per al conjunt dels polinomis, $\mathbb{K}[x]$, la base canònica és

$$C(\mathbb{K}[x]) = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

(infinits elements).

20.3. Espais de dimensió finita

Definició 20.3.

Un espai vectorial E és *de dimensió finita* (o *generat finitament*) si hi ha un conjunt generador finit.

Exemples 20.4.

Els espais $\mathbb{K}^n$ són de dimensió finita, perquè ja en coneixem diversos conjunts generadors finits (per exemple, la base canònica, o qualsevol altra base).

L'espai $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ també és generat finitament, perquè

$$\left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$$

L'espai $\mathbb{K}_3[x]$ és generat finitament, perquè

$$\langle \{1, x, x^2, x^3\} \rangle = \mathbb{K}_3[x]. \quad \square$$

En canvi, no és generat finitament l'espai $\mathbb{K}[x]$, perquè si ho fora, tindríem un conjunt finit de polinomis

$$S = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_r(x)\}$$

que generaria l'espai. Ara bé, si n és el grau màxim dels polinomis de S, llavors és evident que cap polinomi de grau $n+1$ en serà combinació lineal. En conseqüència, no és possible que S siga generador.

20.3.1. Coordenades d'un vector respecte a una base

Com en el cas de $\mathbb{K}^n$, la diferència entre un conjunt generador qualsevol i una base és que només hi ha una manera d'expressar un vector com a combinació lineal dels vectors de la base.

Propietat 20.1.

El conjunt $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ és una base de l'espai E, si i només si, qualsevol vector de E s'expressa com a combinació lineal dels elements de $\mathcal{B}$ de forma única.

Demostració: Suposem que $\mathcal{B}$ és una base de l'espai E. Si hi ha dues combinacions lineals iguals al vector $\vec{u}$, és a dir, si

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$
$$\vec{u} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_n\vec{u}_n$$

(on els vectors $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ són elements de $\mathcal{B}$), restant aquestes dues igualtats, obtenim $\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{u}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{u}_n$. I, com que el conjunt $\mathcal{B}$ és linealment independent, $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_1 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Recíprocament, si qualsevol vector s'expressa de forma única com a combinació lineal dels de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ genera l'espai i, a més, com que el vector zero es pot expressar com $\vec{0} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$ de forma única, ha de ser $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, la qual cosa vol dir que $\mathcal{B}$ és linealment independent. □

Aquesta propietat ens permet definir les coordenades d'un vector respecte a una base.

Definició 20.4. (Coordenades d'un vector respecte a una base)

Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ és una base de l'espai generat finitament E i el vector $\vec{u}$ s'expressa com

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$

llavors els escalars d'aquesta combinació lineal són les *coordenades* de $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}$.

☞ Una *base ordenada* de l'espai E és una base en la qual tenim en compte l'ordenació dels seus vectors.

Per exemple, en $\mathbb{K}^3$, les bases ordenades $\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ i $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *no són* la mateixa.

Definició 20.5. (Vector de coordenades)

Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ és una base ordenada de l'espai generat finitament E i el vector $\vec{u}$ s'expressa com

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$

llavors el *vector de coordenades* de $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}$ és

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Exemple 20.5.

Calculeu les coordenades del polinomi $p(x) = 3 + x - x^2$ respecte a la base ordenada (de $\mathbb{K}_2[x]$) $B = \{1 + x, 1 - x, x - x^2\}$.

En l'exemple 20.3 ja hem vist que el conjunt $\mathcal{B}$ és una base de $\mathbb{K}_2[x]$. Ara hem de cercar els escalars α_1, α_2 i α_3 perquè

$$\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 - x) + \alpha_3(x - x^2) = 3 + x - x^2$$

Reordenem el polinomi del costat esquerre,

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)x - \alpha_3 x^2 = 3 + x - x^2$$

i igualem els coeficients:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \qquad &= 3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ -\alpha_3 &= -1 \end{aligned}$$

Aquest sistema lineal és determinat i la solució és aquesta: $\alpha_1 = 3/2$, $\alpha_2 = 3/2$, $\alpha_3 = 1$. Per tant, $p(x) = (3/2)(1+x) + (3/2)(1-x) + 1(x - x^2)$ i el vector de coordenades és

$$p(x)_{\mathcal{B}} = (3/2, 3/2, 1) \quad \square$$

Linealitat de les coordenades Si $\vec{u}_{1_{\mathcal{B}}}$ i $\vec{u}_{2_{\mathcal{B}}}$ són els vectors de coordenades dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ respecte a la base ordenada $\mathcal{B}$, llavors el vector de coordenades d'una combinació lineal $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ és la combinació lineal $\vec{u}_{\mathcal{B}} = \alpha_1\vec{u}_{1_{\mathcal{B}}} + \alpha_2\vec{u}_{2_{\mathcal{B}}}$, perquè si $\vec{u}_1 = \alpha_{11}\vec{u}_1 + \alpha_{21}\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_{n1}\vec{u}_n$ i $\vec{u}_2 = \alpha_{12}\vec{u}_1 + \alpha_{22}\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_{n2}\vec{u}_n$,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \alpha_1 \left(\alpha_{11}\vec{u}_1 + \alpha_{21}\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_{n1}\vec{u}_n\right) + \alpha_2 \left(\alpha_{12}\vec{u}_1 + \alpha_{22}\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_{n2}\vec{u}_n\right) \\ &= (\alpha_1\alpha_{11} + \alpha_2\alpha_{12})\vec{u}_1 + (\alpha_1\alpha_{21} + \alpha_2\alpha_{22})\vec{u}_2 + \cdots + (\alpha_1\alpha_{n1} + \alpha_2\alpha_{n2})\vec{u}_n \end{aligned}$$

així que

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1\alpha_{11} + \alpha_2\alpha_{12}, \alpha_1\alpha_{21} + \alpha_2\alpha_{22}, \ldots, \alpha_1\alpha_{n1} + \alpha_2\alpha_{n2}) = \alpha_1(\vec{u}_{1_{\mathcal{B}}}) + \alpha_2(\vec{u}_{2_{\mathcal{B}}})$$

De manera més general,

Propietat 20.2. (Linealitat de les coordenades)

Si $\vec{u}_{1_{\mathcal{B}}}$, $\vec{u}_{2_{\mathcal{B}}}$, ...$\vec{u}_{p_{\mathcal{B}}}$ són els vectors de coordenades dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_p$ respecte a la base ordenada $\mathcal{B}$, llavors el vector de coordenades d'una combinació lineal $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p$ és la combinació lineal $\vec{u}_{\mathcal{B}} = \alpha_1\vec{u}_{1_{\mathcal{B}}} + \alpha_2\vec{u}_{2_{\mathcal{B}}} + \cdots + \alpha_2\vec{u}_{p_{\mathcal{B}}}$. $\square$

20.3.2. La dimensió d'un espai vectorial

En aquest apartat provarem que, excepte en el cas de l'espai zero, si l'espai E és de dimensió finita, sempre hi ha alguna base de E, i que totes les bases d'aquest espai tenen el mateix nombre d'elements. Com que l'espai zero no té cap base, sempre suposarem que E no és l'espai zero.

Primer de tot, veurem que qualsevol conjunt generador (finit) conté una base. La idea és que si un conjunt és generador però no base, és perquè *hi sobren elements.*

Propietat 20.3. (Extracció d'una base)

Si el conjunt finit S genera l'espai E, llavors S conté una base de E.

Demostració: Suposem que el conjunt finit S genera l'espai E. Si S és linealment independent, llavors, no hi ha res a demostrar, perquè S és una base de E. En cas contrari, S és linealment dependent, i hi haurà algun vector de S que és combinació lineal dels altres. Anomenem S_1 el conjunt que resulta de suprimir aquest vector en el conjunt S. Aquest subconjunt genera l'espai, perquè hem eliminat un vector que és combinació lineal dels de S_1.

Si S_1 és linealment independent, ja hem acabat; en cas contrari, repetim el procés d'eliminar un vector que siga combinació lineal dels altres.

Repetint-lo, les vegades que calga, aquest procés acabarà en algun moment, perquè S és finit (en el cas més desfavorable, quan només hi quede un element). □

La demostració d'aquesta propietat mostra com es pot *extraure* una base a partir d'un conjunt generador: aneu eliminant vectors que són combinacions lineals dels altres fins que el conjunt resultant siga independent.

Si el que tenim és un conjunt linealment independent, el que farem per obtenir una base és *afegir-hi* vectors:

PROPIETAT 20.4. (COMPLECIÓ D'UNA BASE)

Si l'espai E és generat finitament i el conjunt finit S és linealment independent, llavors S està contingut en una base de E.

Demostració: Suposem que el conjunt finit S és linealment independent, però no és base. Elegim un conjunt generador finit qualsevol, T.

Com que S no és generador de l'espai, hi haurà algun vector de T que no en serà combinació lineal. Aquest vector l'afegim a S per formar un nou conjunt linealment independent. En cas que aquest nou conjunt no siga base, repetim el procés d'afegir-hi un vector de T que no en siga combinació lineal. Com que el conjunt T és finit, aquest procés finalitza en algun pas, perquè, si no és així, podríem afegir tot el conjunt T a S i el resultat seria linealment independent i generador. □

Aquestes dues propietats semblen indicar que els conjunts generadors són *més grans* que no els linealment independents, perquè, dels conjunts generadors, se'n poden extraure d'independents, mentre que els independents es poden completar a generadors.

Això és el que provarem tot seguit.

PROPIETAT 20.5.

Si $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ és un conjunt (de p vectors) linealment independent i $S_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q\}$ és un conjunt generador (amb q vectors), llavors $p \leq q$.

Demostració: Ho provarem per reducció a l'absurd, així que suposarem que $q < p$.

Si S_1 és un conjunt linealment independent i S_2 és generador llavors, $\vec{v}_1$ és combinació lineal de S_2, $\vec{v}_1 = \alpha_{11}\vec{u}_1 + \alpha_{12}\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_{1q}\vec{u}_q$. I, com que el vector $\vec{v}_1$ no és nul, algun dels pesos serà distint de zero; suposem, per exemple, que $\alpha_{11} \neq 0$. Aleshores, és fàcil comprovar que $\{\vec{v}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q\}$ també genera E.

Aleshores, el vector $\vec{v}_2$ es pot expressar com a combinació lineal d'aquest conjunt, $\vec{v}_2 = \alpha_{21}\vec{v}_1 + \alpha_{22}\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_{2q}\vec{u}_q$, i no pot ser que tots els pesos a partir del segon $(\alpha_{22}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2p})$ siguen iguals a zero, perquè si fos així, $\vec{v}_2 = \alpha_{21}\vec{v}_1$ i els vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ serien linealment dependents! Si suposem (per exemple) que $\alpha_{22} \neq 0$, obtindrem el nou conjunt generador $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_q\}$.

Si repetim aquest raonament fins a q vegades, obtindrem un nou conjunt generador, on haurem substituït els q vectors de S_2 pels primers q vectors de S_1. Això vol dir que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\}$ és generador i, per tant, $\vec{v}_p$ n'és combinació lineal. Però això és impossible, perquè S_1 és linealment independent. □

TEOREMA 20.6. (TEOREMA DE LA DIMENSIÓ)

Si E és un espai vectorial generat finitament llavors, totes les bases de E tenen el mateix nombre d'elements.

Demostració: Primer de tot, observem que totes les bases de E són conjunts finits, perquè, com que existeix un conjunt generador finit, S_1, si hi hagués una base infinita, podríem extraure d'aquesta base un subconjunt linealment independent finit que contindria més elements que no S_1.

Si tenim dues bases, $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, com que $\mathcal{B}_1$ és linealment independent i $\mathcal{B}_2$ generador, llavors $\mathcal{B}_1$ no pot tenir més elements que $\mathcal{B}_2$; però canviant-hi els papers de $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, tampoc no és possible que $\mathcal{B}_2$ tinga més elements que $\mathcal{B}_1$. □

El teorema de la dimensió assegura que totes les bases tenen el mateix nombre d'elements. Això justifica la definició següent:

DEFINICIÓ 20.6. (DIMENSIÓ D'UN ESPAI VECTORIAL)

Siga E un espai vectorial qualsevol.

- Si E és de dimensió finita, llavors la *dimensió* de E és el nombre d'elements d'una base qualsevol.
- Si E és l'espai nul, la dimensió de E és 0.
- En altre cas, la dimensió de E és ∞.

Per exemple, $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$, $\dim \mathbb{K}[x] = \infty$.

EXEMPLE 20.6.

Trobeu una base i la dimensió del subespai de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$

$$F = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

El conjunt

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

genera F. Però, si no és linealment independent, no és una base. És evident que les relacions de dependència entre aquestes matrius són les mateixes que les que hi ha entre els vectors

$$(1,1,-1,0),(-2,1,2,0),(0,3,0,0),(-1,5,1,0)$$

i aquestes relacions les podem obtenir esglaonant la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Això vol dir que les matrius tercera i quarta són combinacions lineals de les dues primeres:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

En conseqüència,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

és una base de F i $\dim F = 2$. □

☞ Aquest exemple confirma la primera propietat: un conjunt generador en un espai de dimensió finita sempre conté una base (que podem obtenir eliminant els vectors que són combinacions lineals dels altres).

20.4. Interpolació polinomial

Un problema pràctic que es presenta molt sovint és el de trobar una funció de la qual es coneixen uns quants valors. Evidentment, la solució no és única, perquè hi ha infinites funcions que coincideixen en uns punts determinats, així que el que es fa és buscar que aquesta funció siga d'una classe especial. Per exemple, un polinomi.

El problema de la *interpolació polinomial* consisteix a *trobar un polinomi* $p(z)$ *que passe pels punts* $(z_0,w_0),(z_1,w_1),\dots,(z_n,w_n)$. Com que aquest problema encara té infinites solucions, cercarem el polinomi de grau mínim que passe per aquests punts. En aquest apartat, provarem que sempre podem trobar aquest polinomi, i que el seu grau és, com a molt, n. Això vol dir que té la forma

$$p(z) = p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n$$

(on a_n podria ser igual a zero), és a dir, que $p(z) \in \mathbb{K}_n(z)$.

☞ Cerquem un polinomi $p(z)$, de grau mínim, tal que $p(z_0) = w_0$, $p(z_1) = w_1$, …, $p(z_n) = w_n$.

És a dir, que

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_{n-1} z_0^{n-1} + a_n z_0^n &= w_0 \\
a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_{n-1} z_1^{n-1} + a_n z_1^n &= w_1 \\
&\cdots \\
a_0 + a_1 z_n + \cdots + a_{n-1} z_n^{n-1} + a_n z_n^n &= w_n
\end{aligned}
$$

o bé

$$
\begin{bmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{20.1}
$$

Aquest sistema lineal tindrà una solució única si provem que la matriu de coeficients és invertible. Així que calcularem el rang d'aquesta matriu.

20.4.1. La matriu de Vandermonde

La matriu

$$
V(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \begin{bmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{bmatrix}
$$

és la *matriu de Vandermonde* de paràmetres $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Per veure si és invertible, calcularem rang d'aquesta matriu, suposant que tots els paràmetres són distints:[1]

$$
\operatorname{rang} V(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{bmatrix}
$$

Restem a cada columna la columna anterior multiplicada per z_0:

$$
\operatorname{rang} V(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_1 - z_0 & z_1^2 - z_1 z_0 & \cdots & z_1^n - z_1^{n-1} z_0 \\ 1 & z_2 - z_0 & z_2^2 - z_2 z_0 & \cdots & z_2^n - z_2^{n-1} z_0 \\ \cdots & & & & \\ 1 & z_n - z_0 & z_n^2 - z_n z_0 & \cdots & z_n^n - z_n^{n-1} z_0 \end{bmatrix}
$$

[1]Evidentment, si hi ha dos paràmetres iguals, la matriu té dues files iguals i no és invertible.

Ara restem la primera fila a totes les altres:

$$\operatorname{rang} V(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 - z_0 & z_1^2 - z_1 z_0 & \cdots & z_1^n - z_1^{n-1} z_0 \\ 0 & z_2 - z_0 & z_2^2 - z_2 z_0 & \cdots & z_2^n - z_2^{n-1} z_0 \\ \cdots \\ 0 & z_n - z_0 & z_n^2 - z_n z_0 & \cdots & z_n^n - z_n^{n-1} z_0 \end{bmatrix}$$

Finalment, dividim la segonaa fila per $z_1 - z_0$, la terceraa per $z_2 - z_0$...

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} V(z_0, z_1, \ldots, z_n) &= \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 0 & 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \cdots \\ 0 & 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= 1 + \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \cdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La darrera també és una matriu de Vandermonde (amb un paràmetre menys), així que

$$\operatorname{rang} V(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 1 + \operatorname{rang} V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

Reiterant aquesta fórmula tindrem

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} V(z_0, z_1, \ldots, z_n) &= 1 + \operatorname{rang} V(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ &= 2 + \operatorname{rang} V(z_2, z_2, \ldots, z_n) \\ &\ \ \cdots \\ &= n - 1 + \operatorname{rang} V(z_{n-1}, z_n) = n + 1 \end{aligned}$$

perquè

$$\operatorname{rang} V(z_{n-1}, z_n) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & z_{n-1} \\ 1 & z_n \end{bmatrix} = 2 \quad \square$$

☞ Si tots els paràmetres són distints, llavors el rang de $V(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ és igual a $n + 1$, així que aquesta matriu és invertible.

En conseqüència, si tots els nombres z_0, z_1, ...z_n són distints, els conjunts

$$\left\{(1, 1, \ldots, 1), (z_0, z_1, \ldots, z_n), (z_0^2, z_1^2, \ldots, z_n^2), \ldots, (z_0^n, z_1^n, \ldots, z_n^n)\right\}$$
$$\left\{(1, z_0, z_0^2, \ldots, z_0^n), (1, z_1, z_1^2 \ldots, z_1^n), \ldots, (1, z_n, z_n^2, \ldots, z_n^n)\right\}$$

són bases de l'espai $\mathbb{K}^{n+1}$.

Tornant al problema de la interpolació, que la matriu de Vandermonde siga invertible vol dir que, si tots els paràmetres són distints, el sistema lineal (20.1) té una solució única, és a dir,

☞ Si els nombres $z_0, z_1, \dots, z_n$ són tots distints, llavors existeix un únic polinomi $p(z) \in \mathbb{K}_{[n]}(z)$ que compleix les condicions $p(z_0) = w_0$, $p(z_1) = w_1$, …, $p(z_n) = w_n$.

Exemple 20.7.

Trobeu el polinimi de grau mínim $p(x)$ que passa pels punts $(1, -1)$, $(2, -1)$ i $(3, 1)$.

El polinomi serà de grau menor o igual a 2, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, i ha de complir les condicions $p(1) = -1$, $p(2) = -1$, $p(3) = 1$, és a dir,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= -1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= -1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 &= 1 \end{aligned}$$

Com que la solució (única) d'aquest sistema lineal és $\vec{a} = (1, -3, 1)$, el polinomi és $p(x) = 1 - 3x + x^2$. ▫

20.5. Resum

Embolcall lineal

- L'*embolcall lineal* del conjunt de vectors S és el conjunt $\langle s \rangle$ de les combinacions lineals dels vectors de S.
- S *genera* (o és generador de) l'espai E si $\langle S \rangle = E$.
- E és de *dimensió finita* (o *generat finitament*) si té un conjunt generador finit.

Base d'un espai vectorial

- El conjunt B és base de l'espai E si B és linealment independent i $\langle B \rangle = E$.
- Si B és una base de l'espai E, llavors qualsevol vector de E s'expressa com a combinació lineal dels elements de B *de forma única.*
- Si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ és una base ordenada de E i el vector $\vec{u}$ s'expressa com $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n$ llavors, els escalars d'aquesta combinació lineal són les *coordenades de $\vec{u}$ respecte a* B.
- El *vector de coordenades* de $\vec{u}$ respecte a $\mathcal{B}$ és $\vec{u}_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

Bases canòniques

- $C(\mathbb{K}^n) = \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$
- $C(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $C(\mathbb{K}[x]) = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$

El teorema de la dimensió

Si E és un espai vectorial de dimensió finita,

- Si el conjunt finit S genera l'espai E llavors, S conté una base de E.
- Si el conjunt S és linealment independent llavors, S està contingut en una base de E

☞ *Teorema de la dimensió*: Totes les bases de E tenen el mateix nombre d'elements.

☞ La *dimensió* de l'espai E és el nombre d'elements de les bases de E.
La dimensió de l'espai zero és 0.
Si E no és generat finitament llavors, la dimensió de E és infinita.

La matriu de Vandermonde

- La matriu de Vandermonde és $V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{bmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{bmatrix}$

☞ La matriu de Vandermonde és invertible si i només si tots els paràmetres són distints.

- Si tots els nombres z_0, z_1, $\dots z_n$ són distints, els conjunts

$$\{(1,1,\dots,1),(z_0,z_1,\dots,z_n),(z_0^2,z_1^2,\dots,z_n^2),\dots,(z_0^n,z_1^n,\dots,z_n^n)\}$$
$$\{(1,z_0,z_0^2,\dots,z_0^n),(1,z_1,z_1^2\dots,z_1^n),\dots,(1,z_n,z_n^2,\dots,z_n^n)\}$$

són bases de l'espai $\mathbb{K}^{n+1}$.

Interpolació polinomial

☞ Si els nombres $x_0, x_1, \dots, x_n$ són distints dos a dos, llavors existeix un únic polinomi de grau, com a molt, n, que passa pels punts $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

- Aquest polinomi és $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$,
on $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ és la solució del sistema lineal

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n)\vec{a} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

20.6. Exercicis

Exercici 20.1. Trobeu una base de cadascun dels espais següents.

(a) F és el conjunt de les matrius quadrades 2×2, A, per a les quals $a_{11} = a_{22}$ i $a_{12} = 2a_{21}$.
(b) F és el conjunt de les matrius simètriques 2×2.
(c) F és el conjunt de les matrius antisimètriques 2×2.
(d) F és el conjunt dels polinomis de grau parell.
(e) F és el conjunt dels polinomis de la forma $p(x) = a + 2ax$ on a és una constant qualsevol.

(solució: pàg. 613)

Exercici 20.2. Trobeu una base del subespai $\langle 1 + x, 1 - x^2, x + x^2, 2 + x - x^2 \rangle$.
(solució: pàg. 613)

Exercici 20.3. Proveu que el conjunt $S = \{1 + x^2, 1 - x^2\}$ és linealment independent i completeu-lo a una base de $\mathbb{K}_3[x]$ (és a dir, trobeu una base de $\mathbb{K}_3[x]$, $\mathcal{B}$, tal que $S \subset \mathbb{K}_3[x]$).
(solució: pàg. 613)

Exercici 20.4. Calculeu les coordenades respecte a la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
(solució: pàg. 614)

Exercici 20.5. Proveu que el conjunt

$$\mathcal{B} = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$$

és una base de $\mathbb{R}_3[x]$ i calculeu les coordenades respecte a aquesta base del polinomi $p(x) = x^3 - x + 1$.
(solució: pàg. 614)

Exercici 20.6. Proveu que el conjunt

$$\mathcal{B} = \{1, x - a, (x - a)^2, (x - a)^3, \dots, (x - a)^n, \dots\}$$

(on a és un nombre real qualsevol) és una base de $\mathbb{R}[x]$ i calculeu les coordenades respecte aquesta base d'un polinomi arbitrari $p(x)$.
(solució: pàg. 615)

Exercici 20.7. (a) Proveu que el conjunt S de les successions que són solució de la recurrència

$$a_{n+2} - 4a_n = 0$$

és un subespai vectorial de l'espai de totes les successions.

(b) Proveu que aquest subespai és de dimensió 2.

(c) Comproveu que les successions $a_n = 2^n$ i $b_n = (-2)^n$ són solucions de la recurrència linealment independents i deduïu que qualsevol solució de la recurrència n'és combinació lineal.

(d) Resoleu la recurrència pels mètodes típics de l'Anàlisi Matemàtica i compareu els resultats.

(solució: pàg. 616)

Lliçó 21. Espais vectorials euclidians

The early study of Euclid made me a hater of geometry
James Joseph Sylvester

Encara hi ha una diferència important, entre els espais $\mathbb{K}^n$ i els espais vectorials generals: a més de fer-ne combinacions lineals, amb els vectors de $\mathbb{K}^n$ podem fer una altra operació important, el producte escalar.
En aquesta lliçó estudiem els *espais vectorials euclidians*, és a dir, els espais vectorials en els quals hem definit (una generalització d)el producte escalar.

21.1. Productes escalars. Espais vectorials euclidians

El fet que en un espai vectorial no hi haja un procdute escalar fa que no hi puguem *fer* geometria: la longitud d'un vector i la distància o l'angle entre vectors (i, per tant, l'ortogonalitat entre vectors) no tenen sentit, perquè són conceptes que hem definit a partir del producte escalar. Per això, en aquesta lliçó afegirem a alguns espais vectorials una nova operació, un producte escalar, que tinga propietats semblants a les del producte escalar en $\mathbb{K}^n$.

Definició 21.1.

Si E és un espai vectorial sobre $\mathbf{K}$, una operació $(\vec{u}|\vec{v})$, que als vectors $\vec{u}, \vec{v}$ els associa un escalar, és un *producte escalar* si compleix les propietats següents:

1. $(\vec{u}|\vec{v}) = \overline{(\vec{v}|\vec{u})}$ (el producte escalar és *hermític*)
2. $(\vec{u}|\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}|\vec{v}_1) + (\vec{u}|\vec{v}_2)$
3. $\alpha\,(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{u}|\alpha\vec{v})$
4. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, llavors $(\vec{u}|\vec{u}) > 0$ (el producte escalar és *definit positiu*)

☞ Aquestes són les propietats bàsiques del producte escalar que ja coneixem en $\mathbb{R}^n$ i en $\mathbb{C}^n$.

- Si treballem amb un espai vectorial real, la primera condició es pot escriure com $(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u})$, així que el producte escalar real és *simètric* (o commutatiu).
- Les condicions segona i tercera indiquen que el producte escalar és lineal respecte al segon argument;[1] en el cas real, també ho és respecte al primer,

[1] En alguns textos, es defineix el producte escalar com a lineal respecte al primer argument, en comptes del segon.

perquè

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2|\vec{v}) = (\vec{u}_1|\vec{v}) + (\vec{u}_2|\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u}_1) + (\vec{v}|\vec{u}_2)$$
$$\alpha\,(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{u}|\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{v}|\vec{u})$$

Per això, es diu que el producte escalar real és *bilineal*.

- En el cas complex, també és cert que $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2|\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u}_1) + (\vec{v}|\vec{u}_2)$, però $\alpha\,(\vec{u}|\vec{v}) = (\overline{\alpha}\vec{v}|\vec{u})$.

Definició 21.2.

Un *espai vectorial euclidià E* és un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ en el qual hi ha definit un producte escalar.[2]

21.2. Exemples

Per descomptat, el producte escalar *estàndard*, $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$ és un producte escalar en el sentit que acabem de definir. Però n'hi d'altres:

21.2.1. Productes escalars definits per una matriu

L'expressió $(\vec{u}|\vec{v}) = 5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 5u_2v_2$ defineix un producte escalar en $\mathbb{R}^2$.

Per demostrar-ho, hem de comprovar que es compleixen les quatre condicions:

1. $$\begin{aligned}(\vec{u}|\vec{v}) &= 5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 5u_2v_2\\ &= 5v_1u_1 - v_1u_2 - v_2u_1 + 5v_2u_2\\ &= (\vec{v}|\vec{u})\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(\vec{u}|\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= 5u_1(v_{11} + v_{21}) - u_1(v_{12} + v_{22}) - u_2(v_{11} + v_{21})\\ &\qquad + 5u_2(v_{12} + v_{22})\\ &= 5u_1v_{11} - u_1v_{12} - u_2v_{11} + 5u_2v_{12}\\ &\qquad + 5u_1v_{21} - u_1v_{22} - u_2v_{21} + 5u_2v_{22}\\ &= (\vec{u}|\vec{v}_1) + (\vec{u}|\vec{v}_2)\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\alpha\,(\vec{u}|\vec{v}) &= \alpha(5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 5u_2v_2)\\ &= 5u_1\alpha v_1 - u_1\alpha v_2 - u_2\alpha v_1 + 5u_2\alpha v_2 = (\vec{u}|\alpha\vec{v})\end{aligned}$$

[2] Alguns autors anomenen espai vectorial *unitari* els espais vectorials amb producte escalar complexos, i reserven el nom d'*euclidià* per als espais reals. També és freqüent reservar el nom d'euclidià per als espais de dimensió finita.

4. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, llavors

$$\begin{aligned}(\vec{u}|\vec{u}) &= 5u_1^2 - 2u_1u_2 + 5u_2^2 \\ &= 4u_1^2 + 4u_2^2 + u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 \\ &= 4u_1^2 + 4u_2^2 + (u_1 - u_2)^2 > 0 \quad \square\end{aligned}$$

De manera anàloga es pot comprovar que l'expressió $(\vec{u}|\vec{v}) = 5\overline{u_1}v_1 - \mathrm{i}\overline{u_1}v_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}v_1 + 5\overline{u_2}v_2$ defineix un producte escalar, ara en l'espai vectorial $\mathbb{C}^2$ $\square$

Els productes escalars d'aquests dos exemples es poden reescriure com a productes matricials:

$$5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 5u_2v_2 = \vec{u}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \vec{v}$$

$$5\overline{u_1}v_1 - \mathrm{i}\overline{u_1}v_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}v_1 + 5\overline{u_2}v_2 = \vec{u}^* \begin{bmatrix} 5 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 5 \end{bmatrix} \vec{v}$$

Això sembla indicar que una expressió del tipus $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v}$ és un producte escalar. Però, en realitat, això només és cert per a algunes matrius *especials*. Més endavant veurem quines són aquestes matrius especials.

21.2.2. Un producte escalar en un espai de funcions contínues

En l'espai vectorial $C_0([a,b])$ de les funcions reals contínues en l'interval $[a,b]$ l'expressió $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ és un producte escalar (totes les condicions es dedueixen fàcilment a partir de les propietats de les integrals). $\square$

☞ Aquest producte escalar es pot estendre a l'espai $L_2([a,b])$ de les funcions *de quadrat integrable* en $[a,b]$, és a dir, les funcions f per a les quals f^2 és integrable.

21.2.3. Un producte escalar en l'espai dels polinomis

Les funcions polinòmiques de variable real són un subespai de l'espai $C_0([a,b])$ (perquè són funcions contínues en $[a,b]$). Per tant, $(p(x)|q(x)) = \displaystyle\int_a^b p(t)q(t)\,\mathrm{d}t$ també és un producte escalar en $\mathbb{R}[x]$. $\square$

21.2.4. Un producte escalar en un espai de successions

S'anomena $l_2(\mathbb{K})$ l'espai vectorial de les successions *de quadrat sumable*, és a dir, les successions $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ tals que la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ és convergent. En aquest espai, $(\{a_n\}|\{b_n\}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}b_n$ és un producte escalar.

21.2.5. Un producte escalar en l'espai de les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

La *traça* d'una matriu quadrada $n \times n$ és la suma dels elements de la diagonal principal, és a dir, $\mathrm{tr}(\mathsf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Fent servir la traça es pot definir un producte escalar en l'espai $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathsf{A}^*\mathsf{B})$.

Amb aquests exemples, ja tenim una bona mostra d'espais vectorials euclidians.[3]

21.3. Norma, distància i angle. Ortogonalitat

Si E és un espai vectorial euclidià,

- la *norma* (o *longitud*) del vector $\vec{u}$ es defineix com $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})}$ (recordeu que $(\vec{u}|\vec{u})$ és un nombre no negatiu).
- la *distància* entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és la norma de la diferència, $\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
- Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són *ortogonals* si $(\vec{u}|\vec{v}) = 0$ (o, de manera equivalent, si $(\vec{v}|\vec{u}) = 0$). Per indicar que el vector $\vec{u}$ és ortogonal a $\vec{v}$, escriurem $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propietat 21.1. (Teorema de Pitàgores)

Si els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals llavors, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Demostració: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}|\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u}|\vec{u}) + (\vec{u}|\vec{v}) + (\vec{v}|\vec{u}) + (\vec{v}|\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ □

Propietat 21.2. (Desigualtat de Cauchy-Schwarz)

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors qualssevol en un espai vectorial euclidià,

$$|(\vec{u}|\vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

Demostració: Si α i β són escalars, i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ vectors, $(\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}|\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) \geq 0$. Així que,

$$\begin{aligned}
(\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}|\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) &\geq 0 \\
\overline{\alpha}\alpha\,(\vec{u}|\vec{u}) - \overline{\alpha}\beta\,(\vec{u}|\vec{v}) - \alpha\overline{\beta}\,(\vec{v}|\vec{u}) + \overline{\beta}\beta\,(\vec{v}|\vec{v}) &\geq 0 \\
|\alpha|^2\,\|\vec{u}\|^2 - \overline{\alpha}\beta\,(\vec{u}|\vec{v}) - \alpha\overline{\beta}\,\overline{(\vec{u}|\vec{v})} + |\beta|^2\,\|\vec{v}\|^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

[3] Ben mirat, aquests espais euclidians no són gaire diferents, els uns dels altres.

Aquesta desigualtat és vàlida per a qualsevol valor dels escalars α i β. En particular, per a $\alpha = (\vec{u}|\vec{v})$ i $\beta = \|\vec{u}\|^2$:

$$\begin{aligned} |(\vec{u}|\vec{v})|^2 \|\vec{u}\|^2 - 2\,|(\vec{u}|\vec{v})|^2 \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^4 \|\vec{v}\|^2 &\geq 0 \\ -\,|(\vec{u}|\vec{v})|^2 + \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 &\geq 0 \\ \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 &\geq |(\vec{u}|\vec{v})|^2 \quad \square \end{aligned}$$

Si treballem amb un espai vectorial euclidià real i els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ no són zero, la desigualtat de Cauchy-Schwarz és

$$|(\vec{u}|\vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \iff -1 \leq \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \leq 1$$

la qual cosa ens permet definir l'angle:

- En un espai vectorial euclidià real, i $\vec{u} \neq 0$ i $\vec{v} \neq 0$, l'*angle* α entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és $\alpha = \arccos \dfrac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$.

21.3.1. Expressió matricial del producte escalar. La matriu de Gram

Si l'espai vectorial euclidià és de dimensió finita, el producte escalar es pot calcular com un producte de matrius: suposem que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ és una base ordenada. Llavors, per les propietats 2 i 3 de la definició del producte escalar, si $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$ i $\vec{v} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_n\vec{u}_n$,

$$\begin{aligned} (\vec{u}|\vec{v}) &= (\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n | \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \cdots + \beta_n\vec{u}_n) \\ &= \overline{\alpha_1}\beta_1\,(\vec{u}_1|\vec{u}_1) + \overline{\alpha_1}\beta_2\,(\vec{u}_1|\vec{u}_2) + \cdots + \overline{\alpha_1}\beta_v\,(\vec{u}_1|\vec{u}_n) + \\ &\quad \overline{\alpha_2}\beta_1\,(\vec{u}_2|\vec{u}_1) + \overline{\alpha_2}\beta_2\,(\vec{u}_2|\vec{u}_2) + \cdots + \overline{\alpha_2}\beta_v\,(\vec{u}_2|\vec{u}_n) + \\ &\quad \cdots + \\ &\quad \overline{\alpha_n}\beta_1\,(\vec{u}_n|\vec{u}_1) + \overline{\alpha_n}\beta_2\,(\vec{u}_n|\vec{u}_2) + \cdots + \overline{\alpha_n}\beta_v\,(\vec{u}_n|\vec{u}_n) \\ &= \begin{bmatrix} \overline{\alpha_1} & \overline{\alpha_2} & \cdots & \overline{\alpha_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{u}_1|\vec{u}_1) & (\vec{u}_1|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_1|\vec{u}_n) \\ (\vec{u}_2|\vec{u}_1) & (\vec{u}_2|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_2|\vec{u}_n) \\ \cdots & & \\ (\vec{u}_n|\vec{u}_1) & (\vec{u}_n|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_n|\vec{u}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}_{\mathcal{B}} \mathsf{G}_{\mathcal{B}} \vec{v}_{\mathcal{B}}$$

☞ La matriu $\mathsf{G}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (\vec{u}_1|\vec{u}_1) & (\vec{u}_1|\vec{u}_2) & \cdots & (\vec{u}_1|\vec{u}_n) \\ (\vec{u}_2|\vec{u}_1) & (\vec{u}_2|\vec{u}_2) & \cdots & (\vec{u}_2|\vec{u}_n) \\ \cdots & & & \\ (\vec{u}_n|\vec{u}_1) & (\vec{u}_n|\vec{u}_2) & \cdots & (\vec{u}_n|\vec{u}_n) \end{bmatrix}$ és la *matriu de Gram* del producte escalar respecte a la base $\mathcal{B}$.

☞ La matriu de Gram és hermítica (simètrica, en el cas real), perquè

$$\begin{aligned}
\mathsf{G}_{\mathcal{B}}^{*} &= \begin{bmatrix} (\vec{u}_1|\vec{u}_1) & (\vec{u}_1|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_1|\vec{u}_n) \\ (\vec{u}_2|\vec{u}_1) & (\vec{u}_2|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_2|\vec{u}_n) \\ \cdots & & \\ (\vec{u}_n|\vec{u}_1) & (\vec{u}_n|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_n|\vec{u}_n) \end{bmatrix}^{*} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{(\vec{u}_1|\vec{u}_1)} & \overline{(\vec{u}_2|\vec{u}_1)} & \cdots \overline{(\vec{u}_n|\vec{u}_1)} \\ \overline{(\vec{u}_1|\vec{u}_2)} & \overline{(\vec{u}_2|\vec{u}_2)} & \cdots \overline{(\vec{u}_n|\vec{u}_2)} \\ \cdots & & \\ \overline{(\vec{u}_1|\vec{u}_n)} & \overline{(\vec{u}_2|\vec{u}_n)} & \cdots \overline{(\vec{u}_n|\vec{u}_n)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\vec{u}_1|\vec{u}_1) & (\vec{u}_1|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_1|\vec{u}_n) \\ (\vec{u}_2|\vec{u}_1) & (\vec{u}_2|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_2|\vec{u}_n) \\ \cdots & & \\ (\vec{u}_n|\vec{u}_1) & (\vec{u}_n|\vec{u}_2) & \cdots (\vec{u}_n|\vec{u}_n) \end{bmatrix} = \mathsf{G}_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

☞ Com que $\vec{u}_{\mathcal{B}}^{*}\mathsf{G}_{\mathcal{B}}\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\vec{u}|\vec{u})$, resulta que $\vec{u}_{\mathcal{B}}^{*}\mathsf{G}_{\mathcal{B}}\vec{u}_{\mathcal{B}} > 0$ sempre que $\vec{u} \neq 0$. Per abreujar, direm que la matriu de Gram $\mathsf{G}_{\mathcal{B}}$ és definida positiva.

DEFINICIONS 21.3. (MATRIUS DEFINIDES, SEMIDEFINIDES I INDEFINIDES)

Una matriu quadrada A és

(a) *definida positiva* si, per a tot vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}^{*}\mathsf{A}\vec{u} > 0$;

(b) *semidefinida positiva* si, per a tot vector $\vec{u}$, $\vec{u}^{*}\mathsf{A}\vec{u} \geq 0$;

(c) *definida negativa* si, per a tot vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}^{*}\mathsf{A}\vec{u} < 0$;

(d) *semidefinida negativa* si, per a tot vector $\vec{u}$, $\vec{u}^{*}\mathsf{A}\vec{u} \leq 0$;

(e) *indefinida* si no és semidefinida positiva ni semidefinida negativa.

☞ Les matrius definides positives poden interpretar-se com la generalització a les matrius dels nombres positius, perquè, si z és un nombre complex i x un nombre positiu llavors $\bar{z}xz > 0$.[4]

Si l'espai vectorial és $\mathbb{K}^n$ i elegim la base canònica, és fàcil provar que $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^{*}\mathsf{A}\vec{v}$ és un producte escalar si i només si la matriu A és hermítica definida positiva. Això resol la qüestió que ens havia quedat pendent a l'apartat 21.2.1.

EXEMPLE 21.1.

Trobeu la matriu de Gram respecte a la base canònica del producte escalar (en $\mathbb{R}^2$) $(\vec{u}|\vec{v}) = 5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 5u_2v_2$.

[4] Així que les matrius semidefinides positives serien l'equivalent dels nombres no negatius.

Si $\vec{e}_1 = (1,0)$ i $\vec{e}_2 = (0,1)$,

$$\mathsf{G}_{C(\mathbb{R}^2)} = \begin{bmatrix} (\vec{e}_1|\vec{e}_1) & (\vec{e}_1|\vec{e}_2) \\ (\vec{e}_2|\vec{e}_1) & (\vec{e}_2|\vec{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \square$$

EXEMPLE 21.2.

Trobeu la matriu de Gram respecte a la base canònica del producte escalar (en $\mathbb{C}^2$) $(\vec{u}|\vec{v}) = 5\overline{u_1}v_1 - \mathrm{i}\overline{u_1}v_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}v_1 + 5\overline{u_2}v_2$

Si $\vec{e}_1 = (1,0)$ i $\vec{e}_2 = (0,1)$,

$$\mathsf{G}_{C(\mathbb{C}^2)} = \begin{bmatrix} (\vec{e}_1|\vec{e}_1) & (\vec{e}_1|\vec{e}_2) \\ (\vec{e}_2|\vec{e}_1) & (\vec{e}_2|\vec{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 5 \end{bmatrix} \quad \square$$

21.3.2. BASES ORTONORMALS

Un conjunt de vectors en un espai vectorial euclidià és *ortogonal* si els seus elements són mútuament ortogonals. Si, a més a més, són tots vectors de norma igual a 1, diem que el conjunt és *ortonormal*.

Els conjunts ortonormals són linealment independents, perquè si el conjunt $S = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_r\}$ és ortonormal i $\alpha_1\vec{q}_1 + \alpha_2\vec{q}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{q}_r = 0$, multiplicant-hi el vector $\vec{q}_1$ tindrem

$$\begin{gathered}(\vec{q}_1|\alpha_1\vec{q}_1 + \alpha_2\vec{q}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{q}_r) = 0 \\ \alpha_1 \underbrace{(\vec{q}_1|\vec{q}_1)}_{1} + \alpha_2 \underbrace{(\vec{q}_1|\vec{q}_2)}_{0} + \dots \alpha_r \underbrace{(\vec{q}_1|\vec{q}_r)}_{0} = 0\end{gathered}$$

així que $\alpha_1 = 0$. I, de manera anàloga, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$.

☞ Una *base ortonormal* en un espai vectorial euclidià és un conjunt ortonormal que és base de l'espai.

☞ Si $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$ és una base ortonormal, les coordenades són els productes escalars dels vectors de la base per $\vec{u}$.

Per provar-ho, observem que, si $\vec{u} = \alpha_1\vec{q}_1 + \alpha_2\vec{q}_2 + \cdots + \alpha_r\vec{q}_n$ llavors,

$$\begin{aligned}(\vec{q}_i|\vec{u}) &= (\vec{q}_i|\alpha_1\vec{q}_1 + \alpha_2\vec{q}_2 + \cdots + +\alpha_i\vec{q}_i + \cdots + \alpha_r\vec{q}_n) \\ &= \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \cdots + \alpha_i 1 + \cdots + \alpha_r 0 = \alpha_i \quad \square\end{aligned}$$

☞ És a dir, que $\vec{u}_{\mathcal{B}} = ((\vec{q}_1|\vec{u}), (\vec{q}_2|\vec{u}), \dots, (\vec{q}_n|\vec{u}))$.

Qualsevol espai vectorial euclidià de dimensió finita té bases ortonormals. Per provar això, aplicarem el mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt, que es basa en la propietat següent:

PROPIETAT 21.3.

Si F és un subespai de l'espai vectorial euclidià i si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ és una base de F llavors, els vectors

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{(\vec{v}_1|\vec{u}_2)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \frac{(\vec{v}_1|\vec{u}_3)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 - \frac{(\vec{v}_2|\vec{u}_3)}{(\vec{v}_2|\vec{v}_2)}\vec{v}_2 \\
&\dots \\
\vec{v}_p &= \vec{u}_p - \frac{\left(\vec{v}_1\middle|\vec{u}_p\right)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 - \frac{\left(\vec{v}_2\middle|\vec{u}_p\right)}{(\vec{v}_2|\vec{v}_2)}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\left(\vec{v}_{p-1}\middle|\vec{u}_p\right)}{\left(\vec{v}_{p-1}\middle|\vec{v}_{p-1}\right)}\vec{v}_{p-1}
\end{aligned}$$

són mútuament ortogonals.

Demostració: Per simplificar, demostrarem només que $\vec{v}_1$ és ortogonal a $\vec{v}_2$:

$$(\vec{v}_1|\vec{v}_2) = \left(\vec{v}_1\middle|\vec{u}_2 - \frac{(\vec{v}_1|\vec{u}_2)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1\right) = (\vec{v}_1|\vec{u}_2) - \frac{(\vec{v}_1|\vec{u}_2)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}(\vec{v}_1|\vec{v}_1) = 0 \quad \square$$

Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt

Aquest algorisme transforma una base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ del subespai F (de l'espai euclidià E) en una base ortonormal

1. Ortogonalització Calculeu els vectors

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{(\vec{v}_1|\vec{u}_2)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \frac{(\vec{v}_1|\vec{u}_3)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 - \frac{(\vec{v}_2|\vec{u}_3)}{(\vec{v}_2|\vec{v}_2)}\vec{v}_2 \\
&\dots \\
\vec{v}_p &= \vec{u}_p - \frac{\left(\vec{v}_1\middle|\vec{u}_p\right)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 - \frac{\left(\vec{v}_2\middle|\vec{u}_p\right)}{(\vec{v}_2|\vec{v}_2)}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\left(\vec{v}_{p-1}\middle|\vec{u}_p\right)}{\left(\vec{v}_{p-1}\middle|\vec{v}_{p-1}\right)}\vec{v}_{p-1}
\end{aligned}$$

2. Normalització Calculeu els vectors

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 \qquad \dots \qquad \vec{q}_p = \frac{1}{\left\|\vec{v}_p\right\|}\vec{v}_p$$

El conjunt $\mathcal{B}_2 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_p\}$ és una base ortonormal de F.

EXEMPLE 21.3.

> Trobeu una base ortonormal de l'espai euclidià $\mathbb{R}^2$ amb el producte escalar $(\vec{u}|\vec{v}) = 5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 5u_2v_2$.

Apliquem el mètode de Gram-Schmidt a la base canònica de $\mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$:

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 = (1,0)$$
$$\vec{v}_2 = \vec{e}_2 - \frac{(\vec{v}_1|\vec{e}_2)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 = (0,1) - \frac{((1,0)|(0,1))}{((1,0)|(1,0))}(1,0) = (0,1) - \frac{-1}{5}(1,0) = \left(\frac{1}{5},1\right)$$

Les normes de $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ són

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)} = \sqrt{5}, \qquad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{(\vec{v}_2|\vec{v}_2)} = \sqrt{5\frac{1}{25} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + 5} = \sqrt{\frac{24}{5}}$$

així que $\vec{q}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0)$ i $\vec{q}_2 = \sqrt{\dfrac{5}{24}}\left(\dfrac{1}{5},1\right)$ fan una base ortonormal. □

21.4. EL COMPLEMENT ORTOGONAL. PROJECCIONS ORTOGONALS

L'*ortogonal* d'un conjunt de vectors S és el conjunt $S^\perp$ format pels vectors que són ortogonals a tots els de S.

Notem que l'ortogonal $S^\perp$ és un subespai (independentment del fet que S ho siga o no), perquè és clar que el vector zero es troba en $S^\perp$ i, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són ortogonals a S, per a qualsevol $\vec{v} \in S$ tindrem

$$(\vec{v}|\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1(\vec{v}|\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) + \alpha_2(\vec{v}|\alpha_1\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0 \quad □$$

DEFINICIONS 21.4.

> Si F és un subespai de l'espai vectorial euclidià E, el *complement ortogonal* de F és $F^\perp$ (el subespai format per tots els vectors ortogonals a F).
> Si $\vec{u}$ és un vector de E i $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ és una base ortogonal del subespai de dimensió finita F, la *projecció ortogonal* del vector $\vec{u}$ sobre el subespai F és el vector
>
> $$p_F(\vec{u}) = \frac{(\vec{u}_1|\vec{u})}{(\vec{u}_1|\vec{u}_1)}\vec{u}_1 + \frac{(\vec{u}_2|\vec{u})}{(\vec{u}_2|\vec{u}_2)}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{(\vec{u}_r|\vec{u})}{(\vec{u}_r|\vec{u}_r)}\vec{u}_r$$

☞ Si la base $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_r\}$ és ortonormal, la projecció ortogonal serà

$$p_F(\vec{u}) = (\vec{q}_1|\vec{u})\,\vec{q}_1 + (\vec{q}_2|\vec{u})\,\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_r|\vec{u})\,\vec{q}_r$$

☞ Les propietats importants són que l'espai E és la suma directa dels subespais F i $F^\perp$ i que la projecció ortogonal és el vector de F més proper a $\vec{u}$. Ara justificarem aquestes dues propietats.

La suma i la suma directa de subespais es defineix de la mateixa manera que en els espais $\mathbb{K}^n$: la *suma* dels subespais f i G és l'embolcall lineal de la unió $F \cup G$. I la suma és *directa* quan $F \cap G = \emptyset$.

PROPIETAT 21.4. (SUMA DIRECTA ORTOGONAL)

Si E és un espai vectorial euclidià i F és un subespai de dimensió finita de E, $E = F \oplus F^\perp$.

Demostració: La intersecció $F \cap F^\perp$ és zero, perquè, si $\vec{u} \in F \cap F^\perp$, tindrem $(\vec{u}|\vec{u}) = 0$ i, per tant, $\vec{u} = \vec{0}$.

Per demostrar que $E = F + F^\perp$, escollim una base ortonormal de F, $\mathcal{B}_F = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_r\}$ i un vector $\vec{u} \in E$. Aleshores, $\vec{u} = p_F(\vec{u}) + (\vec{u} - p_F(\vec{u}))$; com que $p_F(\vec{u})$ és un element de F, només ens cal provar que $\vec{u} - p_F(\vec{u})$ és a l'ortogonal $F^\perp$, així que en fem el producte escalar amb els vectors $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_r$:

$$\begin{aligned}(\vec{q}_i|\vec{u} - p_F(\vec{u})) &= (\vec{q}_i|\vec{u}) - (\vec{q}_i|p_F(\vec{u}))\\ &= (\vec{q}_i|\vec{u}) - \left(\vec{q}_i \middle| (\vec{q}_1|\vec{u})\,\vec{q}_1 + (\vec{q}_2|\vec{u})\,\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_r|\vec{u})\,\vec{q}_r\right)\\ &= (\vec{q}_i|\vec{u}) - (\vec{q}_i|\vec{u}) = 0\end{aligned}$$

El vector $\vec{u} - p_F(\vec{u})$, com que és ortogonal a tots els de la base de F, és ortogonal a F □

☞ La suma $F \oplus F^\perp$ sempre és directa; si, a més a més, F és de dimensió finita, aquesta suma omple tot l'espai.

EXEMPLE 21.4.

En l'espai vectorial euclidià $\mathbb{R}^2$ amb el producte escalar $(\vec{u}|\vec{v}) = 5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 5u_2v_2$, calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{u} = (1,1)$ sobre el subespai $F = \langle(1,0)\rangle$.

Ja sabem que la matriu de Gram d'aquest espai respecte a la base canònica és $\mathsf{G} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. A més, si $\vec{u}_1 = (1/\sqrt{5})(1,0)$, $\{\vec{u}_1\}$ és una base ortonormal del subespai F. Per tant,

$$\begin{aligned}p_F(\vec{u}) = \frac{(\vec{u}_1|\vec{u})}{(\vec{u}_1|\vec{u}_1)}\vec{u}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0)\middle|(1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0)\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$ □

Teorema 21.5. (Teorema de l'aproximació òptima)

En un espai vectorial euclidià, el vector del subespai F més pròxim al vector $\vec{u}$ és la projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre F, en el sentit que, si $\vec{v}$ és un vector de F,

$$d(\vec{u}, p_F(\vec{u})) \leq d(\vec{u}, \vec{v})$$

Demostració: Si $\vec{v}$ és un vector de F, el vector $\vec{u} - \vec{v}$ el podem escriure com

$$\vec{u} - \vec{v} = (\vec{u} - p_F(\vec{u})) + (p_F(\vec{u}) - \vec{v}) = p_{F^\perp}(\vec{u}) + (p_F(\vec{u}) - \vec{v})$$

on els vectors $p_{F^\perp}(\vec{u})$ i $p_F(\vec{u}) - \vec{v}$ són ortogonals perquè el primer es troba en $F^\perp$ i el segon en F. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= ((\vec{u} - \vec{v})|(\vec{u} - \vec{v})) \\
&= (((p_{F^\perp}(\vec{u}) + (p_F(\vec{u}) - \vec{v}))|\,(p_{F^\perp}(\vec{u}) + (p_F(\vec{u}) - \vec{v}))) \\
&= \underbrace{(p_{F^\perp}(\vec{u})|p_{F^\perp}(\vec{u}))}_{\|p_{F^\perp}(\vec{u})\|^2} + \underbrace{(p_{F^\perp}(\vec{u})|(p_F(\vec{u}) - \vec{v}))\ ((p_F(\vec{u}) - \vec{v})|p_{F^\perp}(\vec{u}))}_{0} \\
&\qquad + \underbrace{((p_F(\vec{u}) - \vec{v})|(p_F(\vec{u}) - \vec{v}))}_{\|p_F(\vec{u}) - \vec{v}\|^2} \\
&= \|p_{F^\perp}(\vec{u})\|^2 + \|p_F(\vec{u}) - \vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\|p_{F^\perp}(\vec{u})\|^2 + \|p_F(\vec{u}) - \vec{v}\|^2} \geq \|p_F(\vec{u}) - \vec{v}\|^2 \qquad \square$$

21.4.1. Aproximació a les sèries de Fourier

Segons Fourier, tota funció periòdica pot expressar-se com una sèrie de funcions trigonomètriques.[5] Ací aplicarem les propietats dels espais vectorials euclidians per entendre el que vol dir això.

Suposem que treballem amb funcions periòdiques reals (per simplificar, suposarem que el període és igual a 2π) i considerem el producte escalar $(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$, sobre l'espai de funcions de quadrat integrable $L_2([-\pi, \pi])$.

Amb aquest producte escalar, el conjunt (infinit)

$$T = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

[5] Aquesta afirmació, que és certa sota certes restriccions sobre la funció, és l'origen d'una part important de les matemàtiques, l'*anàlisi harmònica*.

és ortogonal, perquè (si n i m són enters positius),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \mathrm{d}t = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nt)(\sin mt)\mathrm{d}t = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nt)(\cos mt)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nt)(\sin mt)\mathrm{d}t = 0 \text{ (si } n \neq m)$$

A més a més,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \mathrm{d}t = \pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt \mathrm{d}t = \pi$$

En conseqüència, si treballem amb el subespai

$$F_n = \langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \rangle$$

i f és una funció de $L_2([-\pi,\pi])$, segons el teorema de l'aproximació òptima, el vector de F_n més pròxim a f és la projecció ortogonal

$$p_{F_n}(f) = a + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_1 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

on els pesos a, a_k, b_k són

$$a = \frac{1}{\|1\|^2}(1|f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$$
$$a_k = \frac{1}{\|\cos kx\|^2}(\cos kx|f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, \dots, n$$
$$b_k = \frac{1}{\|\cos kx\|^2}(\sin kx|f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

EXEMPLE 21.5.

Trobeu la millor aproximació a la funció *ona quadrada*, periòdica amb període 2π definida per

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{si } \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

sobre el subespai $F_7 = \langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos 7x, \sin 7x \rangle$.

La millor aproximació és la projecció ortogonal $p_{F_7}(f)$. Així que calculem els pesos,

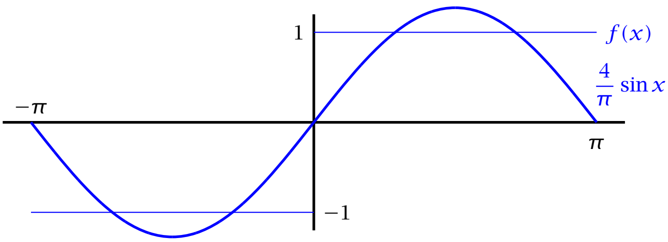
$$a = \frac{1}{\|1\|^2}(1|f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\right) = 0$$

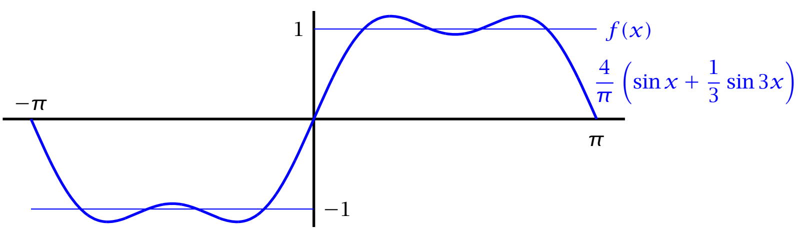
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\|\cos kx\|^2}(\cos kx|f) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\cos kt\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}\cos kt\mathrm{d}t\right) = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\|\cos kx\|^2}(\sin kx|f) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\sin kt\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}\sin kt\mathrm{d}t\right) = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) \end{aligned}$$

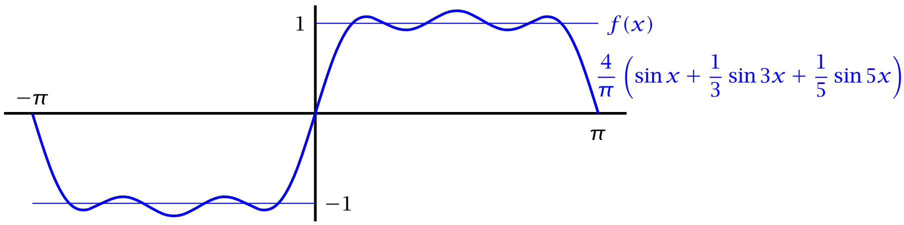
És a dir, que tots els pesos $a, a_1, \dots, a_n$ són iguals a zero. I, com que $1-(-1)^k$ és 0 si k és parell i 2, si és senar,

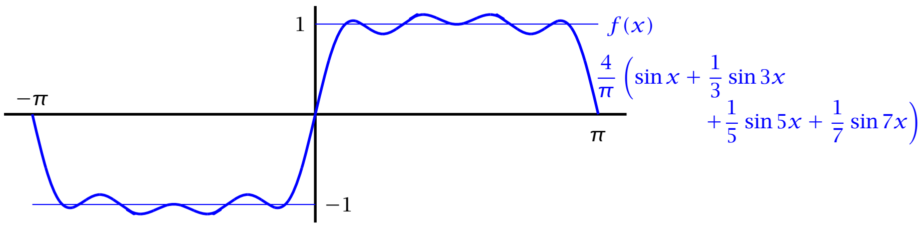
$$p_{F_7}(f) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x\right) \quad \square$$

Les gràfiques següents mostren com, en aquest exemple, les sumes parcials de la funció $p_{F_7}(f)$ van aproximant-se la funció f. Com que en els punts $-\pi$ 0 i π hi ha una discontinuïtat, aquí la funció no pot coincidir amb l'aproximació, però en la resta de punts, l'ona va aproximant-se a la funció f.









És clar que si triàvem el subespai

$$F_k = \langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx \rangle$$

l'aproximació que trobaríem seria

$$p_{F_k}(f) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots + \frac{1}{k}\sin kx\right)$$

I resulta molt temptador escriure

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$$

En general, si f és una funció periòdica amb període igual a $2T$,

☞ La sèrie de Fourier de la funció de període $2T$ $f(x)$ és

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}x + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}x\right)$$

on

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \dots$$

(hem fet el canvi $a = a_0/2$ perquè la fórmula per a a_n siga també vàlida quan $n = 0$).

☞ Es pot provar que si la funció periòdica f, amb període $2T$, té un nombre finit de discontinuïtats de salt i un nombre finit de màxims i mínims aïllats a l'interval $[-T, T]$, la sèrie de Fourier és convergent, a $f(x)$ en els punts on la funció és contínua, i a la mitjana entre els dos límits laterals en els punts de discontinuïtat.

Així que, en el nostre exemple, podem assegurar que

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ és un múltiple de } \pi \\ f(x) & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases} \quad \square$$

Efectivament, aquesta sèrie convergeix a $f(x)$, excepte en els punts $x = k\pi$, en els quals f és discontínua.

Aquest és el desenvolupament en *sèrie de Fourier* de la funció f. Una conseqüència interessant del fet que aquesta sèrie convergisca a f és que ens proporciona una aproximació del nombre π: posant-hi $x = \pi/2$, com que $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$, obtenim $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$.

21.5. Resum

Productes escalars i espais euclidians

Un producte escalar és una operació $(\vec{u}|\vec{v})$, que als vectors $\vec{u}, \vec{v}$ els associa un escalar, tal que

1. $(\vec{u}|\vec{v}) = \overline{(\vec{v}|\vec{u})}$
2. $(\vec{u}|\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}|\vec{v}_1) + (\vec{u}|\vec{v}_2)$
3. $\alpha(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{u}|\alpha\vec{v})$
4. $\left(\vec{0}\middle|\vec{v}\right) = 0$
5. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, llavors $(\vec{u}|\vec{u}) > 0$

☞ Un espai vectorial euclidià és un espai vectorial amb un producte escalar

Exemples

- En $\mathbb{K}^n$, $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v}$, si A és hermítica i definida positiva ($\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} > 0$, si $\vec{u} \neq 0$).
- En $C_0([a,b])$, $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
- En $\mathbb{R}[x]$, $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
- En $l_2(\mathbb{K})$ (l'espai de les successions de quadrat sumable), $(\{a_n\}|\{b_n\}) = \sum_0^{\infty} a_n b_n$.
- En $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ $(\{a_n\}|\{b_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}b_n$ és un producte escalar.

$(\cdots)$

(···)

Norma, distància i angle

- la *norma* del vector $\vec{u}$ és $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})}$.
- la *distància* entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és $\mathrm{d}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|$.
- En un espai real, l'angle entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és $\alpha = \arccos \dfrac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$.

Ortogonalitat

- El vector $\vec{u}$ és *ortogonal* a $\vec{v}$ si $(\vec{u}|\vec{v}) = 0$ (equivalentment, si $(\vec{v}|\vec{u}) = 0$).
- Teorema de Pitàgores: si$\vec{u} \perp \vec{v}$ llavors, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
- Desigualtat de Cauchy-Schwarz: $|(\vec{u}|\vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|, \qquad \forall \vec{u},\vec{v}$.

Matrius definides, semidefinides i indefinides Una matriu quadrada A és

- *definida positiva* si, per a tot vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} > 0$;
- *semidefinida positiva* si, per a tot vector $\vec{u}$, $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} \geq 0$;
- *definida negativa* si, per a tot vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} < 0$;
- *semidefinida negativa* si, per a tot vector $\vec{u}$, $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} \leq 0$;
- *indefinida* si no és semidefinida positiva ni semidefinida negativa.

Expressió matricial del producte escalar

Si l'espai és de dimensió finita i $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n\}$ és una base, $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}_{\mathcal{B}}\mathsf{G}_{\mathcal{B}}\vec{v}_{\mathcal{B}}$, on $\mathsf{G}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (\vec{u}_1|\vec{u}_1) & (\vec{u}_1|\vec{u}_2) & \cdots & (\vec{u}_1|\vec{u}_n) \\ (\vec{u}_2|\vec{u}_1) & (\vec{u}_2|\vec{u}_2) & \cdots & (\vec{u}_2|\vec{u}_n) \\ \cdots & & & \\ (\vec{u}_n|\vec{u}_1) & (\vec{u}_n|\vec{u}_2) & \cdots & (\vec{u}_n|\vec{u}_n) \end{bmatrix}$ és la *matriu de Gram*.

- La matriu de Gram és hermítica definida positiva.

Bases ortonormals

Una base és ortonormal si tots els vectors són ortogonals i de norma igual a 1.

- Si $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1,\vec{q}_2,\dots,\vec{q}_n\}$ és una base ortonormal, $\vec{u}_{\mathcal{B}} = ((\vec{q}_1|\vec{u}),(\vec{q}_2|\vec{u}),\dots,(\vec{q}_n|\vec{u}))$
- Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p\}$ és una base del subespai F, el mètode de Gram-Schmidt,

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{(\vec{v}_1|\vec{u}_2)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 \\
&\cdots \\
\vec{v}_p &= \vec{u}_p - \frac{(\vec{v}_1|\vec{u}_p)}{(\vec{v}_1|\vec{v}_1)}\vec{v}_1 - \frac{(\vec{v}_2|\vec{u}_p)}{(\vec{v}_2|\vec{v}_2)}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{(\vec{v}_{p-1}|\vec{u}_p)}{(\vec{v}_{p-1}|\vec{v}_{p-1})}\vec{v}_{p-1}
\end{aligned}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1, \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2, \dots, \vec{q}_p = \frac{1}{\|\vec{v}_p\|}\vec{v}_p$$

proporciona una base ortonormal de F, $\{\vec{q}_1\vec{q}_2,\dots,\vec{q}_p\}$.

(···)

$(\cdots)$

El complement ortogonal

- El *complement ortogonal* del subespai F, $F^{\perp}$, és el conjunt dels vectors ortogonals a tots els de F.
- $E = F \oplus F^{\perp}$.
- Si $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_{F^{\perp}}$, la *projecció ortogonal* del vector $\vec{u}$ sobre el subespai F és $p_F(\vec{u}) = u_F$.
- Si $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_r\}$ és una base ortonormal de F, $p_F(\vec{u}) = (\vec{q}_1|\vec{u})\,\vec{q}_1 + (\vec{q}_2|\vec{u})\,\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_r|\vec{u})\,\vec{q}_r$.
- **Aproximació òptima:** El vector del subespai F més pròxim a $\vec{u}$ és $p_F(\vec{u})$.

Sèries de Fourier

Si la funció periòdica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, amb període $2T$, té un nombre finit de discontinuïtats de salt i un nombre finit de màxims i mínims aïllats a l'interval $[-T, T]$,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} x \right) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

on

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, \dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \dots$$

($f(x^-)$ i $f(x^+)$ representen els límits laterals).
Per tant, en els punts de continuïtat,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} x \right) = f(x)$$

21.6. Exercicis

21.6.1. Productes escalars

Exercici 21.1. Proveu, fent servir la definició, que l'expressió $(\vec{u}|\vec{v}) = 5\overline{u_1}v_1 - \mathrm{i}\overline{u_1}v_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}v_1 + 5\overline{u_2}v_2$ defineix un producte escalar en l'espai vectorial $\mathbb{C}^2$.

(solució: pàg. 619)

Exercici 21.2. Proveu que, en l'espai vectorial de les funcions reals contínues en l'interval $[a, b]$, $C_0([a, b])$, l'operació $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ és un producte escalar.

(solució: pàg. 619)

Exercici 21.3. Si $l_2(\mathbb{K})$ és l'espai vectorial de les successions $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ tals que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ és convergent proveu que, en aquest espai, $(\{a_n\}|\{b_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n$ és un producte escalar.

(solució: pàg. 620)

Exercici 21.4. Proveu que l'expressió $(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \operatorname{tr}(\mathsf{A}^*\mathsf{B})$ defineix un producte escalar en l'espai $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(solució: pàg. 620)

21.6.2. Expressió matricial del producte escalar. Bases ortonormals

Exercici 21.5. Proveu que l'expressió $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v}$ és un producte escalar en l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$ si i només si la matriu A és hermítica definida positiva.

(solució: pàg. 620)

Exercici 21.6. En cada apartat, estudieu si l'operació $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^\mathsf{T}\mathsf{A}\vec{v}$ és un producte escalar en l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$. En cas que ho siga, trobeu-ne una base ortonormal.

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 621)

Exercici 21.7. En l'espai $\mathbb{R}_[x]$, amb el producte escalar $(p(x)|q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$, trobeu l'ortogonal del subespai $F = \langle x \rangle$.

(solució: pàg. 622)

Exercici 21.8. (a) Trobeu la matriu de Gram del producte escalar $(p(x)|q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$ en l'espai $\mathbb{R}_2[x]$, respecte a la base canònica de $\mathbb{R}_2[x]$. (b) En aquest espai vectorial euclidià, trobeu una base ortonormal del subespai $F = \langle 1, x \rangle$ i el complement ortogonal $F^\perp$. (c) Trobeu una base ortonormal de l'espai euclidià $\mathbb{R}_2[x]$ amb aquest producte escalar.

(solució: pàg. 623)

Geometria euclidiana

Exercici 21.9. Proveu que, si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ són tres vectors en un espai vectorial euclidià real llavors,

$$\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\|^2 = \|\vec{u}_1\|^2 + \|\vec{u}_2\|^2 + \|\vec{u}_3\|^2 + 2(\vec{u}_1|\vec{u}_2) + 2(\vec{u}_1|\vec{u}_3) + 2(\vec{u}_2|\vec{u}_3)$$

Quina fórmula obtenim en el cas que l'espai vectorial euclidià siga complex?

(solució: pàg. 624)

Exercici 21.10. Proveu la *llei del paral·lelogram*: en un espai vectorial euclidià, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors, $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|^2 + \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2 = 2\,\|\vec{u}_1\|^2 + 2\,\|\vec{u}_2\|^2$.

Expliqueu el significat geomètric d'aquesta propietat, en termes dels costats d'un paral·lelogram.

(solució: pàg. 625)

Exercici 21.11. Proveu que en un espai vectorial euclidià real, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors, $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|^2 - \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2 = 4\,(\vec{u}_1|\vec{u}_2)$.

(solució: pàg. 625)

Exercici 21.12. En un espai vectorial euclidià real, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors unitaris que fan un angle de 60 graus, calculeu la norma del vector $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.

(solució: pàg. 626)

Exercici 21.13. Proveu que la desigualtat de Cauchy-Schwarz és una igualtat únicament si els dos vectors són linealment dependents.

(solució: pàg. 626)

21.6.3. Sèries de Fourier

Exercici 21.14. Expresseu com una sèrie de Fourier la funció real de variable real f, periòdica amb període igual a 2π, que, en l'interval $[-\pi, \pi]$ és igual al valor absolut, $|x|$.

(solució: pàg. 626)

Lliçó 22. Aplicacions lineals

So far our attention has focused on vector spaces.
No one gets excited about vector spaces.
The interesting part of linear algebra is the subject
to which we now turn—linear maps
Sheldon Axler

Per acabar d'entendre la importància de les matrius en els problemes de caràcter lineal ens falta encara fer un últim pas: interpretar la multiplicació matriu-vector com un *operador* que *transforma* l'espai. Si A és una matriu $m \times n$ i $\vec{x}$ un vector $n \times 1$, aleshores $A\vec{x}$ és un vector $m \times 1$, de manera que podem entendre que la multiplicació *transforma* els vectors de $\mathbb{K}^n$ en vectors de $\mathbb{K}^m$.
Aquest és l'exemple més simple d'aplicació lineal.

22.1. Aplicacions lineals

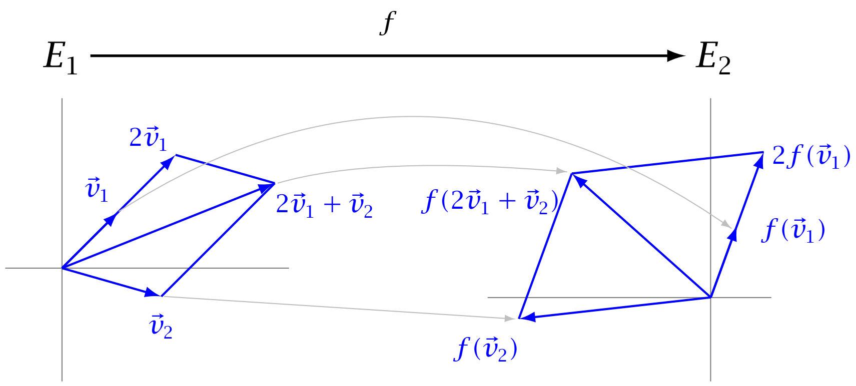
Un aplicació f entre dos espais vectorials sobre $\mathbb{K}$ és lineal si conserva les combinacions lineals: la imatge d'una combinació lineal és la combinació lineal de les imatges.

Definició 22.1.

Donats dos espais vectorials sobre $\mathbb{K}$, E_1i E_2, una aplicació $f : E_1 \longrightarrow E_2$, és *lineal* si

$$f(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) = \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \alpha_2 f(\vec{x}_2), \qquad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$$

El gràfic següent mostra el significat de la linealitat: si l'aplicació f és lineal llavors, la combinació lineal $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ es transforma en la combinació lineal de les imatges: $f(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 2f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$.



Exemple 22.1.

Si A és una matriu $m \times n$, llavors l'aplicació

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ \vec{x} &\rightsquigarrow f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x} \end{aligned}$$

és lineal.

Aquesta aplicació és lineal perquè

$$f(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) = \mathsf{A}(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) = \alpha_1\mathsf{A}\vec{x}_1 + \alpha_2\mathsf{A}\vec{x}_2 = \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \alpha_2 f(\vec{x}_2) \quad \square$$

Exemple 22.2.

La transposició de matrius,

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \\ \mathsf{A} &\rightsquigarrow f(\mathsf{A}) = \mathsf{A}^\mathsf{T} \end{aligned}$$

és lineal.

La prova és immediata:

$$f(\alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2) = (\alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2)^\mathsf{T} = \alpha_1\mathsf{A}_1^\mathsf{T} + \alpha_2\mathsf{A}_2^\mathsf{T} = \alpha_1 f(\mathsf{A}_1) + \alpha_2 f(\mathsf{A}_2) \quad \square$$

La derivada també és lineal:

Exemple 22.3.

L'aplicació

$$\begin{aligned} D\colon \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ p(x) &\rightsquigarrow D(p(x)) = p'(x) \end{aligned}$$

és lineal.

$$\begin{aligned} D(\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)) &= (\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x))' \\ &= \alpha_1 p_1'(x) + \alpha_2 p_2'(x) = \alpha_1 D(p(x)) + \alpha_2 D(p(x)) \quad \square \end{aligned}$$

I la integral:

Exemple 22.4.

L'aplicació

$$\begin{aligned} F\colon C_0([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightsquigarrow F(f) = \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

és lineal.

$$\int_a^b \Big(\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\Big)dt = \alpha_1 \int_a^b f_1(t)dt + \alpha_2 \int_a^b f_2(t)dt \quad \square$$

22.1.1. Nucli i imatge

Definicions 22.2.

Si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ és una aplicació lineal, el *nucli* de f ($\operatorname{Nuc} f$ o $\ker f$) és el conjunt de totes les antiimatges del vector $\vec{0}$.
La *imatge* de f ($\operatorname{Im} f$ o $f(E_1)$) és el conjunt de les imatges de tots els vectors de E_1.

Exemple 22.5.

L'aplicació

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ (v_1, v_2, v_3) &\rightsquigarrow f((v_1, v_2, v_3)) = v_2 + (v_1 + v_3)x \end{aligned}$$

és lineal. Trobeu-ne el nucli i la imatge.

La imatge és $\mathbb{R}_1[x]$, perquè és clar que totes les imatges són polinomis de grau 0 o 1 i que qualsevol polinomi de la forma $a + bx$ té l'antiimatge $(b, a, 0)$.

Un vector (v_1, v_2, v_3) és al nucli si i només si

$$f(v_1, v_2, v_3) = 0 \Leftrightarrow u_2 + (u_1 + u_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_2 = 0 \\ v_1 + v_3 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_2 = 0 \\ v_1 = -v_3 \end{bmatrix}$$

així que el nucli és $\operatorname{Nuc} f = \langle(-1, 0, 1)\rangle$. □

Exemple 22.6.

L'aplicació

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ \mathsf{A} &\rightsquigarrow f(\mathsf{A}) = \mathsf{A} - \mathsf{A}^\mathsf{T} \end{aligned}$$

és lineal. Proveu que el nucli i la imatge són, respectivament, el conjunt de les matrius $n \times n$ simètriques i el de les antisimètriques.

Una matriu A és al nucli si $\mathsf{A} - \mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{O}$, és a dir, si $\mathsf{A} = \mathsf{A}^\mathsf{T}$. Per tant, el nucli de f és el conjunt de les matrius simètriques $n \times n$.

D'altra banda, la matriu B és a la imatge si hi ha una matriu A per a la qual $\mathsf{A} - \mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{B}$. En aquest cas, $\mathsf{B}^\mathsf{T} = (\mathsf{A} - \mathsf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T} - \mathsf{A} = -\mathsf{B}$. Això vol dir que totes les imatges són matrius antisimètriques. Per altra banda, si B és una matriu antisimètrica, llavors $f(\frac{1}{2}\mathsf{B}) = \frac{1}{2}(\mathsf{B} - \mathsf{B}^\mathsf{T}) = \frac{1}{2}(\mathsf{B} + \mathsf{B}) = \mathsf{B}$, així que totes les matrius antisimètriques són a la imatge. La imatge de f és el conjunt de les matrius antisimètriques $n \times n$. □

Propietats 22.1. (Propietats del nucli i la imatge)

Siga f una aplicació lineal entre els espais E_1 i E_2.

1. $f(\vec{0}) = \vec{0}$
2. *El nucli de f és un subespai de E_1.*
3. *La imatge* $\operatorname{Im} f$ *és un subespai de E_2.*
4. *L'aplicació f és injectiva si i només si* $\operatorname{Nuc} f = \{\vec{0}\}$.
5. *Fórmula de les dimensions. Si E_1 és de dimensió finita, llavors*

$$\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E_1$$

Demostració: La imatge del vector zero de E_1 és el vector zero de E_2, perquè $f(\vec{0}) = f(0\vec{0}) = 0f(\vec{0}) = 0$. Que el nucli i la imatge són subespais es comprova també ben fàcilment, així que ens centrarem en la prova de les dues propietats més interessants.

Per provar la propietat 4, observem que, si el vector $\vec{v}$ és al nucli, llavors $f(\vec{v}) = \vec{0}$; així que, com que $f(\vec{0}) = \vec{0}$, $f(\vec{v}) = f(\vec{0})$. Per tant, si f és injectiva, $\vec{v} = \vec{0}$ i $\operatorname{Nuc} f = \{\vec{0}\}$.

Recíprocament, si $f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) - f(\vec{v}_2) = \vec{0}$, així que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ és al nucli de f. Per tant, si el nucli és $\{\vec{0}\}$, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$, és a dir, que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ i f és injectiva.

Per demostrar la fórmula de les dimensions, hem de distingir dos casos, segons que l'aplicació f siga injectiva o no:

Si f és injectiva ja sabem que la dimensió del nucli és zero, així que el que hem de provar és que $\dim \operatorname{Im} f = \dim E_1$. Així que escollirem una base qualsevol de E_1, $\mathcal{B}_{E_1} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ i comprovarem que el conjunt de les imatges dels vectors d'aquesta base, $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ és una base del conjunt imatge.

Aquest conjunt genera la imatge de f, perquè si $\vec{u}$ és a la imatge, ha d'haver-hi alguna antiimatge, $\vec{v}$, tal que $f(\vec{v}) = \vec{u}$; com que $\vec{v}$ és una combinació lineal de la base $\mathcal{B}_{E_1}$, $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$, resulta que

$$\vec{u} = f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n) = \alpha_1 f(\vec{v}_1)\alpha_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$$

així que $\vec{u}$ és combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$.

Ens resta provar que $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ és linealment independent, així que considerem una relació de dependència $\alpha_1 f(\vec{v}_1)\alpha_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n) = 0$. Com que f és lineal, això és equivalent a $f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n) = 0$, així que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ és al nucli de f; per tant, $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = 0$.

Si f no és injectiva, elegim una base del nucli, $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}\,f} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ i la completem fins a una base de E_1, $\mathcal{B}_{E_1} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_n\}$. Si demostrem que les imatges dels vectors *afegits* ($\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,f} = \{\vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_n\}$) fan una base del conjunt imatge tindrem que
$\dim E_1 = n = p + (n-p) = \dim \mathrm{Nuc}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$. Vegem-ho:

Qualsevol vector de la imatge és una combinació lineal

$$\begin{aligned}\vec{v} &= f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p + \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n) \\ &= \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_p f(\vec{v}_p) + \alpha_{p+1} f(\vec{v}_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n)\end{aligned}$$

Però, com que els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ són al nucli de f,

$$\alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_p f(\vec{v}_p) = 0$$

i la igualtat anterior es redueix a

$$\vec{v} = \alpha_{p+1} f(\vec{v}_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$$

així que el conjunt $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,f}$ genera la imatge.

Finalment, el conjunt $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,f}$ és linealment independent, perquè, si en tenim una relació de dependència, $\alpha_{p+1} f(\vec{v}_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}$, com que aquesta relació és equivalent a $f(\alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n) = \vec{0}$, obtenim que el vector $\alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ és al nucli de f; per tant, una combinació lineal dels vectors de la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}\,f}$:

$$\begin{gathered}\alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p \\ -\alpha_1\vec{v}_1 - \alpha_2\vec{v}_2 - \cdots - \alpha_p\vec{v}_p - \alpha_{p+1}\vec{v}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}\end{gathered}$$

Aquesta darrera expressió és una relació de dependència entre els vectors d'una base de E_1, així que tots els pesos són nuls; en particular,
$\alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ i $\vec{v} = \alpha_{p+1} f(\vec{v}_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}$. □

22.2. Transformacions lineals de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$

Com hem vist adés, si A és una matriu $m \times n$, llavors $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ és una aplicació lineal que va de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$. Per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ és un vector tridimensional qualsevol, el producte $\mathsf{A}\vec{x}$ és el vector bidimensional

$$\mathsf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

☞ Notem que les tres columnes de la matriu A són les imatges dels vectors de la base canònica $C(\mathbb{K}^3) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$:

$$f(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$f(0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

així que

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \end{bmatrix}$$

En realitat, qualsevol transformació lineal entre els espais $\mathbb{K}^n$ i $\mathbb{K}^m$ és d'aquest tipus, com es veu a la propietat següent:

Propietat 22.2.

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és una aplicació lineal llavors $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, on A és la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$$

Demostració: Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és un vector qualsevol de $\mathbb{K}^n$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, així que

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) &= x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) \\ &= \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix} \vec{x} \quad \square \end{aligned}$$

☞ Aquesta matriu A és la *matriu canònica* de f.

22.3. Interpretació geomètrica

Una manera interessant d'entendre les transformacions lineals és interpretar-les com a transformacions geomètriques. En aquest apartat farem això amb diverses aplicacions lineals entre $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^2$.

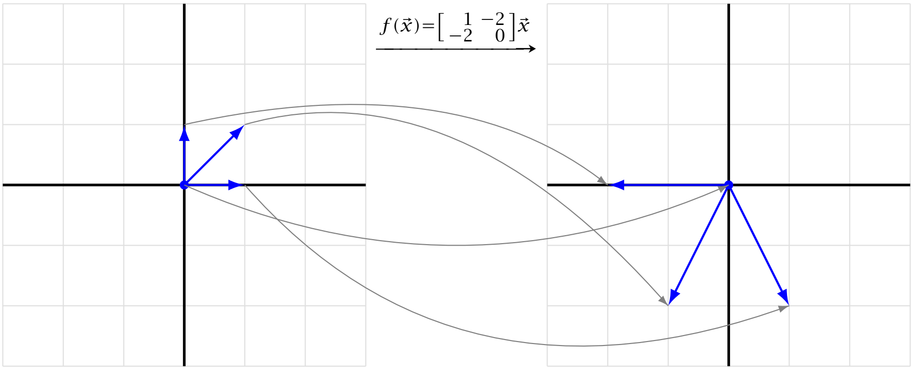
Considerem, per exemple, la transformació lineal

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

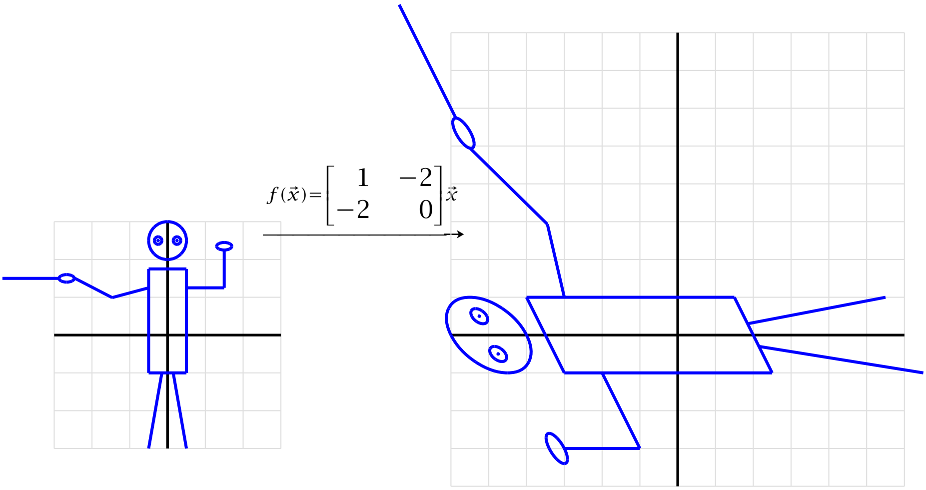
Podem calcular les imatges d'uns quants vectors,

$$f(0,0) = (0,0) \quad f(1,0) = (1,-2) \quad f(1,1) = (-1,-2) \quad f(0,1) = (-2,0)$$

i representar-les gràficament.



Aquest gràfic no ens proporciona gaire informació. Per fer més evident l'efecte geomètric, en comptes de representar uns quants punts aïllats, veurem com es transforma tot un gràfic.



Observem que la figura es deforma, es fa més gran i gira. Fins i tot, una observació més acurada ens fa notar que aquesta imatge s'ha *reorientat* (al dibuix original, el subjecte és dretà; però l'aplicació f l'ha transformat en esquerrà!). Tot i això, la imatge *s'assembla molt* al dibuix original, perquè els segments de recta es transformen en segments de recta i les el·lipses en el·lipses; això no seria així si la transformació no fos lineal.

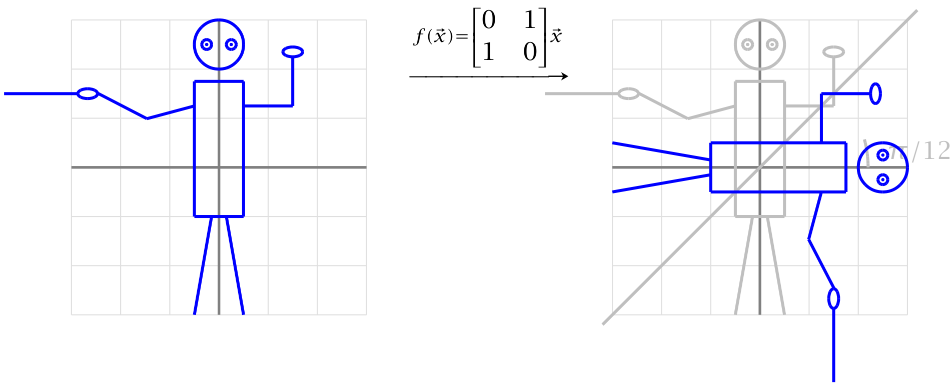
22.3.1. Transformacions lineals especials

Anem a estudiar ara l'efecte geomètric de les transformacions lineals associades a alguns tipus especials de matrius.

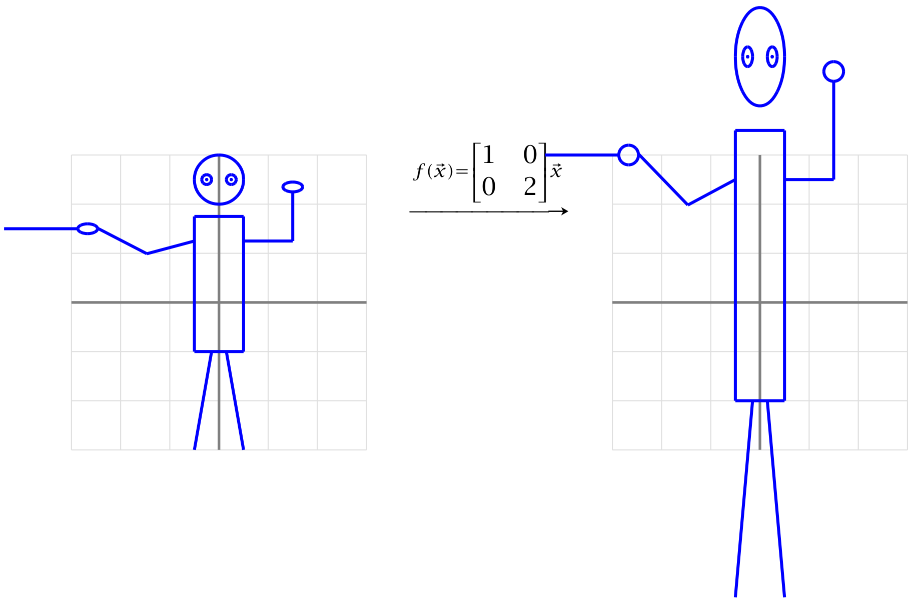
Matrius elementals En cadascun dels gràfics que segueixen es visualitza l'efecte de la transformació lineal associada a una matriu elemental.

(a) Començarem amb la transformació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{E}_{1,2}\vec{x}$, és a dir, amb una matriu elemental del tipus permutació. Aquesta aplicació f transforma l'eix horitzontal en el vertical, i el vertical en l'horitzontal.

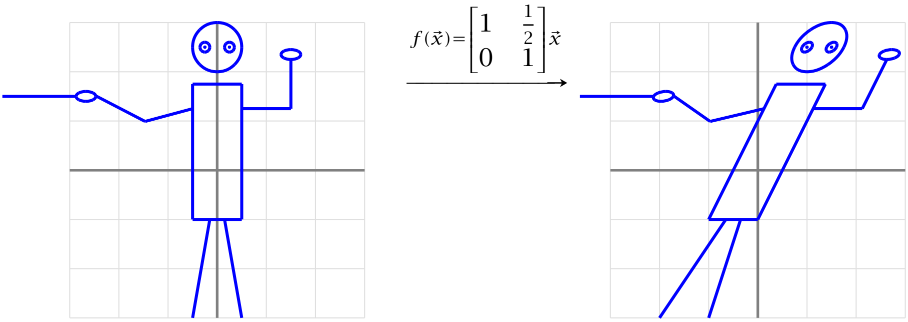
La imatge és el resultat d'aplicar la simetria respecte a la recta $x_1 = x_2$.



(b) Si fem la transformació del tipus escalat $f(\vec{x}) = \mathsf{E}_2(2)\vec{x}$, llavors es produeix una dilatació en la direcció vertical (l'alçària de les imatges es duplica).



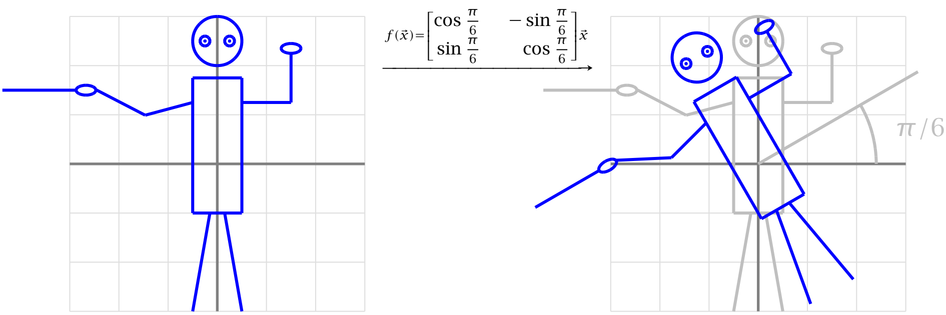
(c) Finalment, la transformació $f(\vec{x}) = \mathsf{E}_{1,2}(1/2)\vec{x}$ transforma el vector (x_1, x_2) en $(x_1 + (1/2)x_2, x_2)$, així que la figura *s'inclina* cap a la dreta.



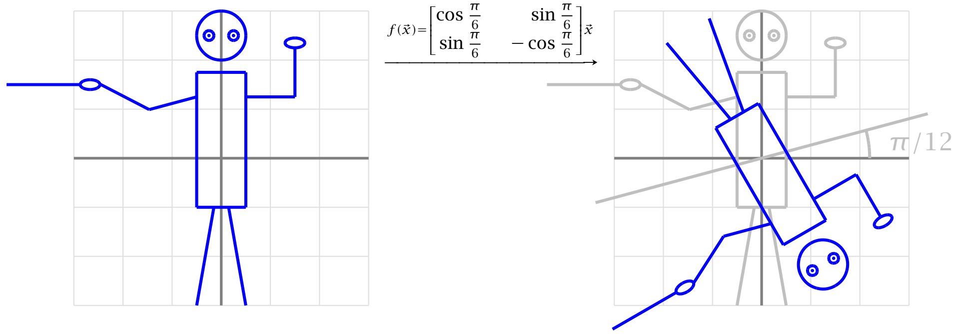
Matrius ortogonals Quan la matriu canònica de la transformació lineal f és ortogonal es diu que f és una *isometria*, perquè la transformació lineal f conserva els angles i les distàncies, de manera que *no deformen les figures*.

En el cas de les matrius 2×2, perquè les dues columnes siguen ortonormals, la matriu només pot ser de la forma $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$ o bé $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{bmatrix}$. Això ens proporciona dos tipus d'isometries: les rotacions i les simetries.

(a) La transformació $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\vec{x}$ *gira* la imatge un angle ϕ en el sentit contrari al de les agulles del rellotge.

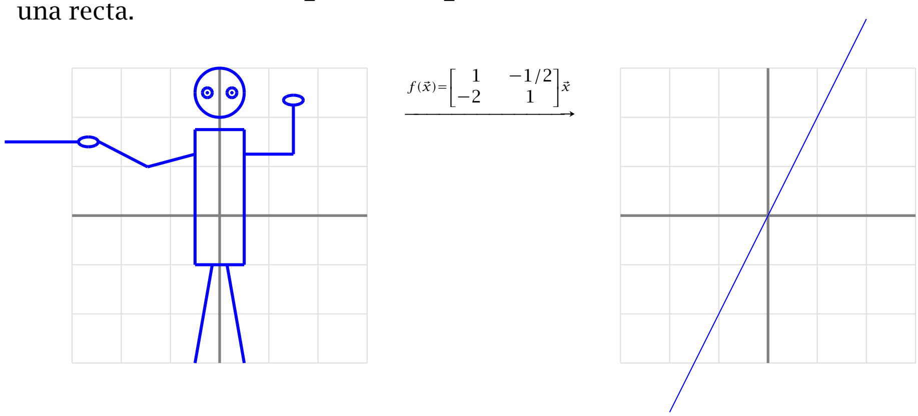


(b) La transformació $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix} \vec{x}$ produeix una simetria respecte a la recta que passa per l'origen i té un pendent de $\phi/2$.



Matrius quadrades no invertibles Quan la matriu quadrada A no és invertible, llavors l'aplicació f no és injectiva (perquè el sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ és indeterminat, de manera que el vector zero té infinites antiimatges). El fet que distints punts tinguen la mateixa imatge fa que al conjunt imatge no es distingeixen tots els trets de l'original.

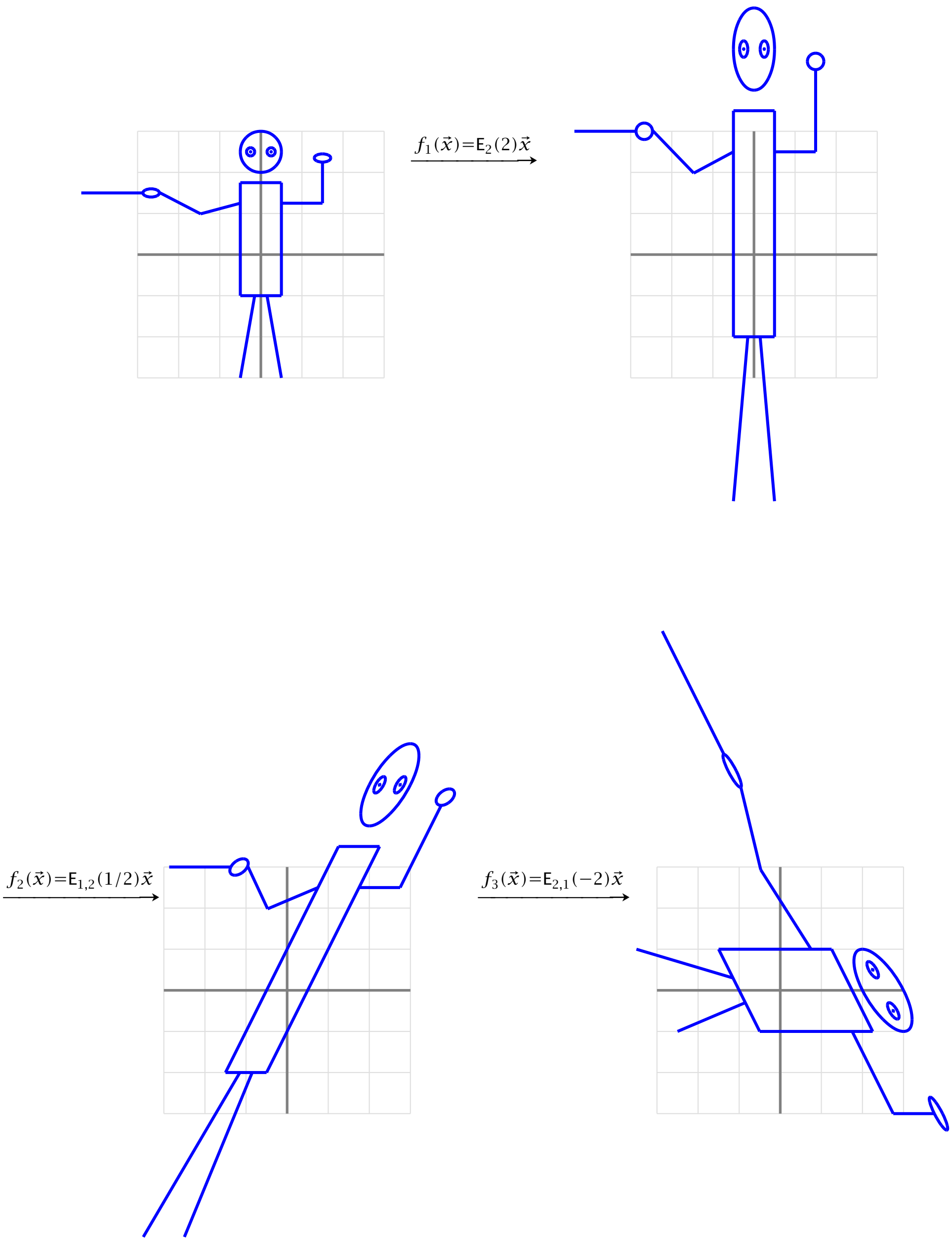
Per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, llavors totes les imatges es troben sobre una recta.



Producte de transformacions elementals Com que qualsevol matriu invertible és un producte de matrius elementals, la transformació lineal associada a una matriu invertible és la composició de diverses transformacions elementals. Per exemple, la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ es pot escriure com

$$\mathsf{A} = \mathsf{E}_{2,1}(-2)\mathsf{E}_{1,2}(1/2)\mathsf{E}_2(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si f és la transformació lineal associada a A i f_3, f_2 i f_1 són, respectivament les transformacions corresponents a $\mathsf{E}_{2,1}(-2)$, $\mathsf{E}_{1,2}(1/2)$ i $\mathsf{E}_2(2)$, llavors $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, de manera que l'efecte geomètric de f es pot reconstruir aplicant successivament tres transformacions elementals.



22.3.2. Propietats algèbriques i geomètriques

El nucli i la imatge de l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ són dos dels subespais deduïts de la matriu A. Com que $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, $f(\vec{x}) = \vec{0}$ és equivalent a $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ i resulta que

☞ el nucli de f coincideix amb l'espai nul de la matriu A.

Exemple 22.7.

Calculeu el nucli de l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$.

$$\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nul} \mathsf{A} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \left\langle \left(-1, \frac{1}{2}, 1 \right) \right\rangle \quad \square$$

D'altra banda, per a calcular la imatge de la transformació f haurem de trobar els vectors $\vec{b}$ per als quals hi ha algun $\vec{x}$ de manera que $f(\vec{x}) = \vec{b}$, és a dir, que $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$. En altres paraules, el vector $\vec{b}$ és a la imatge si el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és compatible. Per tant,

☞ la imatge $\operatorname{Im} f$ coincideix amb l'espai columna $\operatorname{Col} \mathsf{A}$.

Exemple 22.8.

Calculeu el conjunt imatge de l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$.

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Col} \mathsf{A} = \operatorname{Col} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{K}^2 \quad \square$$

Això, combinat amb el que sabem sobre les dimensions dels espais nul i columna, $\dim \operatorname{Nul} \mathsf{A} + \dim \operatorname{Col} \mathsf{A} = n$, ens proporciona una nova justificació, per a les transformacions lineals entre $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, de la fórmula de les dimensions:

Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és una aplicació lineal llavors, $\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

Ara, si el nucli de f és l'espai nul de A i la imatge de f n'és l'espai columna, *quin paper hi representen l'espai fila i l'espai nul esquerre?* Recordem que $\mathbb{K}^n$ és la suma directa ortogonal de l'espai fila i l'espai nul,

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Fil} \mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul} \mathsf{A}$$

i $\mathbb{K}^m$ és la suma directa ortogonal de l'espai columna i l'espai nul esquerre,

$$\mathbb{K}^m = \operatorname{Col} \mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul} \mathsf{A}^*$$

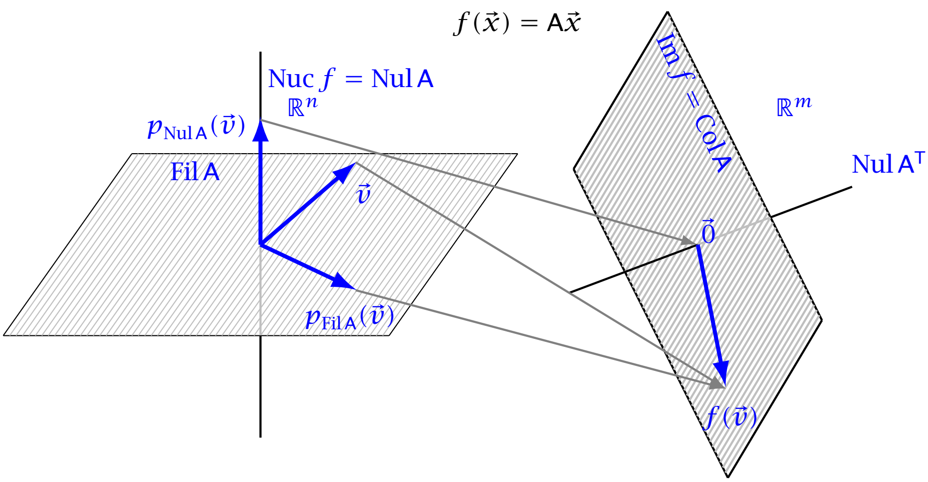
Així doncs, si $\vec{v}$ és un vector de $\mathbb{K}^n$, llavors el podem descompondre com a suma de les projeccions ortogonals sobre l'espai fila i l'espai nul: $\vec{v} = p_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}}(\vec{v}) + p_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}}(\vec{v})$. Aleshores,

$$f(\vec{v}) = f(p_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}}(\vec{v})) + \underbrace{f(p_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}}(\vec{v}))}_{0} = f(p_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}}(\vec{v}))$$

Això vol dir que la imatge de qualsevol vector coincideix amb la de la projecció d'aquest vector sobre l'espai fila de A. En conseqüència, *la imatge de l'espai fila és l'espai columna.*

Si A és la matriu canònica de l'aplicació lineal $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ llavors,

- L'espai fila de la matriu A es transforma en l'espai columna (és a dir, en el conjunt de les imatges).
- L'espai nul va al vector zero.
- L'espai nul esquerre és l'ortogonal del conjunt de les imatges.



Els quatre subespais de la matriu A i la transformació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$

Així que per a conèixer l'aplicació f, només necessitem saber quins vectors de l'espai columna són les imatges dels vectors de l'espai fila. A més a més, la transformació de l'espai fila en l'espai columna és bijectiva:

PROPIETAT 22.3.

L'aplicació f, restringida als espais fila i columna,

$$\begin{aligned} f\colon \operatorname{Fil}\mathsf{A} &\longrightarrow \operatorname{Col}\mathsf{A} \\ \vec{x} &\rightsquigarrow f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x} \end{aligned}$$

és bijectiva.

Demostració: Si $\vec{x}$ i $\vec{y}$ són dos vectors de l'espai fila i $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$, llavors $f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$, de manera que $\vec{x} - \vec{y}$ es troba en $\operatorname{Fil}\mathsf{A}$ i en $\operatorname{Nul}\mathsf{A}$; com que la intersecció d'aquests dos subespais és nul·la, $\vec{x} = \vec{y}$. Això demostra que l'aplicació és injectiva. Com que ja sabíem que la imatge de l'espai fila és l'espai columna, aquesta aplicació també és suprajectiva. □

Això ens proporciona una nova justificació del fet que els espais fila i columna tenen la mateixa dimensió (o del fet que els rangs per files i columnes són iguals).

☞ Recordeu aquesta propietat, perquè la farem servir al final del curs per trobar alguns resultats molt importants: l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, entre els espais fila i columna, és bijectiva.

☞ Un *isomorfisme* és una aplicació lineal bijectiva. Així que aquesta propietat es pot enunciar dient que l'aplicació f, restringida als espais fila i columna, és un isomorfisme.

22.4. RESUM

Aplicacions lineals

☞ Una aplicació f entre dos espais vectorials sobre $\mathbb{K}$, E_1 i E_2, és *lineal* si

$$f(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) = \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \alpha_2 f(\vec{x}_2), \qquad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E_1, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$$

Nucli i imatge

- El *nucli* de f, $\operatorname{Nuc} f$ (o $\ker f$), és el conjunt de totes les antiimatges de $\vec{0}$.
- La *imatge* de f, $\operatorname{Im} f$, és el conjunt de les imatges de tots els elements de E_1.
- Propietats:
  - $\operatorname{Nuc} f$ és un subespai de E_1.
  - $\operatorname{Im} f$ és un subespai de E_2.
  - f és injectiva si i només si $\operatorname{Nuc} f = \{\vec{0}\}$.
  - *Fórmula de les dimensions*: Si E_1 és de dimensió finita llavors, $\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E_1$.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

Aplicacions lineals entre $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$

- Una aplicació f entre $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ és lineal si i només si existeix una matriu A tal que $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$.
- A és la *matriu canònica* de f.
- Si $C(\mathbb{K}^n) = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ és la base canònica llavors, $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$.

Relació amb els quatre subespais

- $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nul} \mathsf{A}$
- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Col} \mathsf{A}$
- La imatge de l'espai fila és l'espai columna.
- L'espai fila és l'ortogonal del nucli.
- L'espai nul esquerre és l'ortogonal de la imatge.

  ☞ Restringida als espais fila i columna, f és bijectiva.

22.5. Exercicis

Exercici 22.1. Estudieu si les aplicacions següents són lineals

(a) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ p(x) &\rightsquigarrow f(p(x)) = p(0) \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} f\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ \mathsf{A} &\rightsquigarrow f(\mathsf{A}) = (a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}) \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} f\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathsf{A} &\rightsquigarrow f(\mathsf{A}) = a_{11} + a_{22} \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}_2[x] \\ a &\rightsquigarrow f(a) = a + 2ax - ax^2 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}_2[x] \\ a &\rightsquigarrow f(a) = a + 2ax - x^2 \end{aligned}$

(solució: pàg. 628)

Exercici 22.2. Trobeu bases del nucli i la imatge de l'aplicació lineal $f\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ definida per

$$f\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{12} - a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} - a_{12} + a_{21} + a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 628)

Exercici 22.3. Proveu que l'aplicació de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A} + \mathsf{A}^*$ és una transformació lineal i calculeu-ne el nucli i la imatge.

(solució: pàg. 630)

Exercici 22.4. Proveu que l'aplicació de $\mathbb{K}^3$ en $\mathbb{K}^2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

és una transformació lineal i calculeu una base del nucli i una de la imatge de f.

(solució: pàg. 630)

Exercici 22.5. Siga $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida com

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3)$$

(a) Trobeu la matriu canònica de f.

(b) Trobeu bases del nucli i la imatge de f.

(c) Justifiqueu si f és injectiva, suprajectiva i/o bijectiva.

(d) Proveu que el vector $\vec{y} = (3, 1, 5)$ es troba a la imatge de f i calculeu el conjunt de totes les antiimatges de $\vec{y}$.

(solució: pàg. 631)

Exercici 22.6. Demostreu que si les aplicacions $f : E_1 \longrightarrow E_2$ i $g : E_2 \longrightarrow E_3$ són lineals llavors, la composició, $g \circ f$, també és lineal.

(solució: pàg. 631)

Exercici 22.7. Demostreu que si l'aplicació lineal $f : E_1 \longrightarrow E_2$ és bijectiva llavors, la inversa, f^{-1}, també és lineal.

(solució: pàg. 632)

Exercici 22.8. Suposem que $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^5$ és l'aplicació lineal definida com $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ i que el rang de la matriu A és 3.

(a) Aquesta aplicació és injectiva, suprajectiva i/o bijectiva?

(b) És possible que la composició, $g \circ f$, de dues aplicacions lineals, $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^5$ i $g : \mathbb{K}^5 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ siga bijectiva?

(c) És possible que la composició, $f \circ g$, de dues aplicacions lineals, $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^5$ i $g : \mathbb{K}^5 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ siga bijectiva?

(solució: pàg. 632)

Lliçó 23. Canvis de base

I don't think that everyone should
become a mathematician,
but I do believe that many students don't
give mathematics a real chance

Maryam Mirzakhani

En aquesta lliçó estudiem com canvien les coordenades quan es canvia de base: Si $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són dues bases del mateix espai E de dimensió finita i $\vec{u}$ és un vector, quina relació hi ha entre les coordenades $\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$ i $\vec{u}_{\mathcal{B}_2}$? Si tenim una aplicació lineal f entre dos espais de dimensió finita E i E', i bases respectives, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, quina relació hi ha entre les coordenades d'un vector, $\vec{u}_{\mathcal{B}}$, i les de la seua imatge, $f(\vec{u})_{\mathcal{B}'}$? I, què passa amb les coordenades de $f(\vec{u})$ si canviem les bases de E i de E'?
En tots els casos, la resposta s'obté multiplicant per algunes matrius especials: la matriu de canvi de base en un espai vectorial i les matrius associades a una aplicació lineal.

23.1. Canvi de base en un espai vectorial

Suposem que $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són dues bases ordenades de l'espai vectorial E. Això vol dir que un vector qualsevol $\vec{u}$ es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}_1$ i també com a combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}_2$. És a dir, que podem trobar els vectors de coordenades $\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$ i $\vec{u}_{\mathcal{B}_2}$. El que farem ací és trobar la relació que hi ha entre aquests dos vectors.

23.1.1. La matriu del canvi de base

Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ són dues bases ordenades de l'espai E, llavors, cada vector de $\mathcal{B}_1$ és combinació lineals dels vectors de $\mathcal{B}_2$, així que podem trobar el vector de coordenades de cada element de $\mathcal{B}_1$ respecte a la base $\mathcal{B}_2$, ${\vec{u}_1}_{\mathcal{B}_2}$, ${\vec{u}_2}_{\mathcal{B}_2}$, …, ${\vec{u}_n}_{\mathcal{B}_2}$.

Amb tots aquests vectors de coordenades construïm la *matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$*:

Definició 23.1.

Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ són dues bases ordenades de l'espai de dimensió finita E, i ${\vec{u}_1}_{\mathcal{B}_2}$, ${\vec{u}_2}_{\mathcal{B}_2}$, …, ${\vec{u}_n}_{\mathcal{B}_2}$ són els vectors de coordenades dels vectors de $\mathcal{B}_1$ respecte a $\mathcal{B}_2$ llavors, la *matriu de canvi de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$* és la matriu

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} {\vec{u}_1}_{\mathcal{B}_2} & {\vec{u}_2}_{\mathcal{B}_2} & \cdots & {\vec{u}_n}_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix}$$

☞ A la primera columna hi ha les coordenades de $\vec{u}_1$ respecte a la base $\mathcal{B}_2$, a la segona, les de $\vec{u}_2$, etcètera.

Exemple 23.1.

Trobeu la matriu de canvi de la base de $\mathbb{K}^4$ $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$, on

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}\\ \mathcal{B}_2 &= \{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}\end{aligned}$$

Calculeu també la matriu de canvi de la base $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$.

Hem de trobar les coordenades de cada vector de $\mathcal{B}_1$ respecte a $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{aligned}(1,0,0,0) &= 0(0,0,0,1)+0(0,0,1,1)-1(0,1,1,1)+1(1,1,1,1)\\ (1,1,0,0) &= 0(0,0,0,1)-1(0,0,1,1)+0(0,1,1,1)+1(1,1,1,1)\\ (1,1,1,0) &= -1(0,0,0,1)+0(0,0,1,1)+0(0,1,1,1)+1(1,1,1,1)\\ (1,1,1,1) &= 0(0,0,0,1)+0(0,0,1,1)+0(0,1,1,1)+1(1,1,1,1)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned}(1,0,0,0)_{\mathcal{B}_2} &= (0,0,-1,1)\\ (1,1,0,0)_{\mathcal{B}_2} &= (0,-1,0,1)\\ (1,1,1,0)_{\mathcal{B}_2} &= (-1,0,0,1)\\ (1,1,1,1)_{\mathcal{B}_2} &= (0,0,0,1)\end{aligned}$$

La matriu de canvi de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$ és aquesta:

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Treballant de la mateixa manera obtindríem que la matriu de canvi de la base $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$ és

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Curiosament, en aquest cas, $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ i $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ són la mateixa matriu! □

23.1.2. Fórmula del canvi de base en un espai vectorial

Si $\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ és el vector de coordenades d'un vector $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}_1$, llavors tindrem $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$. Així que, tenint en compte la linealitat de les coordenades, les coordenades de $\vec{u}$ respecte a $\mathcal{B}_2$ seran

$$\begin{aligned}\vec{u}_{\mathcal{B}_2} &= \alpha_1 \vec{u}_{1_{\mathcal{B}_2}} + \alpha_2 \vec{u}_{2_{\mathcal{B}_2}} + \cdots + \alpha_n \vec{u}_{n_{\mathcal{B}_2}} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{u}_{1_{\mathcal{B}_2}} & \vec{u}_{2_{\mathcal{B}_2}} & \cdots & \vec{u}_{n_{\mathcal{B}_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\ &= \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \vec{u}_{\mathcal{B}_1}\end{aligned}$$

és a dir, que la matriu de canvi de base transforma les coordenades respecte a la base $\mathcal{B}_1$ en les coordenades respecte a $\mathcal{B}_2$:

Propietat 23.1. (Fórmula del canvi de base en un espai vectorial)

Les coordenades del vector $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}_2$ s'obtenen multiplicant la matriu de canvi de base $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ per les coordenades de $\vec{u}$ respecte a la base $\mathcal{B}_1$:

$$\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \vec{u}_{\mathcal{B}_1} \quad \square$$

Exemple 23.2.

Calculeu les coordenades del vector $\vec{u} = (4,3,2,1)$ respecte a les dues bases de $\mathbb{K}^4$ de l'exemple 23.1.

És clar que $(4,3,2,1) = (1,0,0,0) + (1,1,0,0) + (1,1,1,0) + (1,1,1,1)$, així que $\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = (1,1,1,1)$. Per a calcular les coordenades d'aquest vector respecte a la base $\mathcal{B}_2$, fem servir la fórmula del canvi de base:

$$\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \vec{u}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \square$$

Exemple 23.3.

$\mathcal{B}_1 = \{1/2 + x/2, -1/2 + x/2\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x\}$ són bases de $\mathbb{K}_1[x]$. Quina és la matriu de canvi de base $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$? Quines són les coordenades respecte a $\mathcal{B}_2$ del polinomi $p(x)$, si $p(x)_{\mathcal{B}_1} = (1,1)$?

Per trobar la matriu del canvi de base, hem de trobar les coordenades dels polinomis de $\mathcal{B}_1$ respecte a la base $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x &= 0 \cdot 1 + \frac{1}{2}(1+x) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x &= -1 \cdot 1 + \frac{1}{2}(1+x) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)_{\mathcal{B}_2} &= \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)_{\mathcal{B}_2} &= \left(-1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

En conseqüència,

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

I les coordenades $p(x)_{\mathcal{B}_2}$ són

$$p(x)_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} p(x)_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aquest polinomi és $p(x) = x$, perquè $1\,(1/2 + x/2) + 1\,(-1/2 + x/2) = x$ (o, també, perquè $-1 \cdot 1 + 1(1 + x) = x$). $\square$

Per acabar, comprovarem que les matrius $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ i $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ són inverses l'una de l'altra.

Propietat 23.2.

Si B_1 i $\mathcal{B}_2$ són dues bases ordenades de l'espai de dimensió finita E, llavors $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$.

Demostració: Observem que, per a qualsevol vector $\vec{u}$,

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_{\mathcal{B}_2} &= \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{u}_{\mathcal{B}_1} \\ \vec{u}_{\mathcal{B}_1} &= \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\vec{u}_{\mathcal{B}_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{u}_{\mathcal{B}_1} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$$

Llavors, si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, com que

$$\vec{u}_{1_{\mathcal{B}_1}} = (1,0,\ldots,0) \quad \vec{u}_{2_{\mathcal{B}_1}} = (0,1,\ldots,0) \quad \ldots \quad \vec{u}_{n_{\mathcal{B}_1}} = (0,0,\ldots,1)$$

tenim

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_{1_{\mathcal{B}_1}} & \vec{u}_{2_{\mathcal{B}_1}} & \cdots & \vec{u}_{n_{\mathcal{B}_1}} \end{bmatrix} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} \vec{u}_{1_{\mathcal{B}_1}} & \vec{u}_{2_{\mathcal{B}_1}} & \cdots & \vec{u}_{n_{\mathcal{B}_1}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

així que $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \mathrm{I}$. $\square$

23.2. Canvi de base en una aplicació lineal

Si $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ són bases ordenades dels espais E i E' i f és una aplicació lineal de E en E' llavors, les coordenades de la imatge d'un vector, $\vec{v}$, de E (respecte a la base $\mathcal{B}'$) es poden obtenir multiplicant una matriu especial per les coordenades de $\vec{v}$ (respecte a la base $\mathcal{B}$). Aquesta és la *matriu de f* respecte a les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$.

En aquest apartat explicarem com es pot obtenir aquesta matriu i com canvia la matriu quan es canvien les bases.

23.2.1. La matriu associada a una aplicació lineal respecte a dues bases

El fet que les aplicacions lineals entre espais $\mathbb{K}^n$ tenen la forma $f(x) = \mathsf{A}\vec{x}$ es pot generalitzar fàcilment a qualsevol aplicació lineal entre espais vectorials de dimensió finita, la qual cosa ens permetrà convertir el càlcul de les imatges a un producte matriu-vector.

Si definim la matriu de f respecte a un parell de bases d'aquesta manera,

> Suposem que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ són bases dels espais de dimensió finita E i E' i que $f : E \longrightarrow E'$ és una aplicació lineal. *La matriu de f respecte a les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$* és aquesta:
>
> $$\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} f(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}'} & f(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}'} & \cdots & f(\vec{v}_n)_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$$
>
> (les columnes d'aquesta matriu contenen les coordenades de les imatges de $\mathcal{B}$ respecte a $\mathcal{B}'$).

llavors, les coordenades respecte a $\mathcal{B}'$ de la imatge d'un vector $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ seran

$$\begin{aligned} f(\vec{v})_{\mathcal{B}'} &= f\left(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n\right)_{\mathcal{B}'} \\ &= \alpha_1 f(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}'} + \alpha_2 f(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}'} + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n)_{\mathcal{B}'} \\ &= \begin{bmatrix} f(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}'} & f(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}'} & \cdots & f(\vec{v}_n)_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'}\vec{v}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Propietat 23.3. (Coordenades de la imatge)

> *Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ són bases ordenades dels espais de dimensió finita E i E' i $f : E \longrightarrow E'$ és una aplicació lineal llavors, les coordenades de la imatge del vector $\vec{v}$ respecte a la base $\mathcal{B}'$ s'obtenen multiplicant la matriu $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ per les coordenades de $\vec{v}$ respecte a la base $\mathcal{B}$:*
>
> $$f(\vec{v})_{\mathcal{B}'} = \mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'}\vec{v}_{\mathcal{B}} \quad \square$$

Exemple 23.4.

> Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida com
>
> $$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2x + (a_1 - a_0)x^2 + 2(a_0 - a_1)x^3$$
>
> Trobeu la matriu de f respecte a les bases canòniques $C(\mathbb{K}_2[x]) = \{1, x, x^2\}$ i $C(\mathbb{K}_3[x]) = \{1, x, x^2, x^3\}$ i feu-la servir per calcular la imatge del polinomi $p(x) = 1 + x + x^2$. Trobeu també el nucli i la imatge de f.

Calculem les imatges de cada vector de $C(\mathbb{K}_2[x])$ i les escrivim com a combinació lineal dels vectors de la base $C(\mathbb{K}_3[x])$:

$$\begin{aligned} f(1) &= -x^2 + 2x_3 & \qquad f(1)_{C(\mathbb{K}_3[x])} &= (0,0,-1,2)\\ f(x) &= x^2 - 2x^3 & f(x)_{C(\mathbb{K}_3[x])} &= (0,0,1,-2)\\ f(x^2) &= x & f(x^2)_{C(\mathbb{K}_3[x])} &= (0,1,0,0) \end{aligned}$$

La matriu és aquesta:

$$\mathsf{M}_{fC(\mathbb{K}_2[x])C(\mathbb{K}_3[x])} = \begin{bmatrix} f(1)_{C(\mathbb{K}_3[x])} & f(x)_{C(\mathbb{K}_3[x])} & f(x^2)_{C(\mathbb{K}_3[x])} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de coordenades de $p(x) = 1 + x + x^2$ respecte a $C(\mathbb{K}_2[x])$ és $p(x)_{C(\mathbb{K}_2[x])} = (1,1,1)$. Per tant,

$$f(p(x))_{C(\mathbb{K}_3[x])} = \mathsf{M}_{fC(\mathbb{K}_2[x])C(\mathbb{K}_3[x])}p(x)_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

Així que $f(p(x)) = x$.

La matriu $\mathsf{M}_{fC(\mathbb{K}_2[x])C(\mathbb{K}_3[x])}$ té rang 2 (la segona columna és proporcional a la primera). Per tant, els polinomis corresponents a les columnes primera i tercera són una base de la imatge: $\operatorname{Im} f = \langle -x^2 + 2x^3, x\rangle$.

El nucli el podem calcular resolent el sistema lineal $\mathsf{M}_{fC(\mathbb{K}_2[x])C(\mathbb{K}_3[x])}\vec{x} = \vec{0}$. Com que la forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la solució és $a_1 = a_0$, $a_2 = 0$. Per tant, el nucli és el conjunt dels polinomis de la forma $a_0 + a_0x$, és a dir, que $\operatorname{Nuc} f = \langle 1 + x\rangle$. □

23.2.2. Fórmula del canvi de bases en una aplicació lineal

Suposem que $\mathsf{A} = \mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1}$ és la matriu associada a l'aplicació f entre els espais E i E' i respecte a les bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}'_1$. Si canviem les bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}'_1$ per unes altres, $\mathcal{B}_2$ i $\mathcal{B}'_2$ llavors, obtindrem una altra matriu associada a l'aplicació f, $\mathsf{B} = \mathsf{M}_{f\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}$.

Per tal de trobar la relació que hi ha entre les matrius A i B, notem que, si $\vec{v}$ és un vector qualsevol de l'espai E,

$$f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_1} = \mathsf{A}\vec{v}_{\mathcal{B}_1} \qquad f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_2} = \mathsf{B}\vec{v}_{\mathcal{B}_2}$$

A més a més, entre les dues bases de E hi ha la matriu de canvi de base $\mathsf{P} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ i, entre les de E', $\mathsf{Q} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'_2\mathcal{B}'_1}$, així que

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = \mathsf{P}\vec{v}_{\mathcal{B}_2} \qquad f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_1} = \mathsf{Q}f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_2}$$

Substituint aquestes expressions en les anteriors,

$$\begin{aligned} f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_2} &= \mathsf{B}\vec{v}_{\mathcal{B}_2} \\ \mathsf{Q}^{-1}f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_1} &= \mathsf{B}\mathsf{P}^{-1}\vec{v}_{\mathcal{B}_1} \\ f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_1} &= \mathsf{Q}\mathsf{B}\mathsf{P}^{-1}\vec{v}_{\mathcal{B}_1} \\ \mathsf{A}\vec{v}_{\mathcal{B}_1} &= \mathsf{Q}\mathsf{B}\mathsf{P}^{-1}\vec{v}_{\mathcal{B}_1} \end{aligned}$$

Com que aquesta expressió és vàlida per a qualsevol vector $\vec{v}$, deduïm que

$$\mathsf{A} = \mathsf{Q}\mathsf{B}\mathsf{P}^{-1}$$

(és a dir, $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'_2\mathcal{B}'_1}\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}\mathsf{M}^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$).

En resum,

Fórmula del canvi de bases per a aplicacions lineals

Si $\mathsf{A} = \mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1}$, $\mathsf{B} = \mathsf{M}_{f\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}$, $\mathsf{P} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ i $\mathsf{Q} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'_2\mathcal{B}'_1}$ llavors,

$$\mathsf{A} = \mathsf{Q}\mathsf{B}\mathsf{P}^{-1} \tag{23.1}$$

☞ L'esquema següent justifica l'expressió (23.1): Calcular la imatge $f(\vec{v})$ fent servir les bases $\mathcal{B}_2$ i $\mathcal{B}'_2$ és equivalent al procés següent: en primer lloc canviem de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, tot seguit calculem la imatge fent servir la matriu de f respecte a les bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}'_1$ i, finalment, canviem de $\mathcal{B}'_1$ a $\mathcal{B}'_2$.

$$\begin{tikzcd} \vec{v}_{\mathcal{B}_1} \arrow[r, "\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\cdot"] \arrow[rrr, bend right, "\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1}"'] & \vec{v}_{\mathcal{B}_2} \arrow[r, "\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}\cdot"] & f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_2} \arrow[r, "\mathsf{M}_{\mathcal{B}'_2\mathcal{B}'_1}\cdot"] & f(\vec{v})_{\mathcal{B}'_1} \end{tikzcd}$$

EXEMPLE 23.5.

Trobeu la matriu de l'aplicació lineal $f : \mathbb{K}_2[x] \longrightarrow \mathbb{K}_3[x]$ definida com $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2x + (a_1 - a_0)x^2 + 2(a_0 - a_1)x^3$ respecte a les bases $\mathcal{B} = \{1, x^2, 1 + x\}$ i $\mathcal{B}' = \{x^2 - 2x^3, x, x^2, 1\}$.
A l'exemple 23.4 hem calculat la matriu d'aquesta aplicació lineal respecte a les bases canòniques. Comproveu que s'hi verifica la relació (23.1).

Si expressem les imatges dels vectors de la base $\mathcal{B}$ respecte a la base $\mathcal{B}'$,

$$\begin{aligned} f(1) &= -x^2 + 2x^3 & \qquad f(1)_{\mathcal{B}'} &= (-1, 0, 0, 0) \\ f(x^2) &= x & f(x)_{\mathcal{B}'} &= (0, 1, 0, 0) \\ f(1 + x) &= 0 & f(x^2)_{\mathcal{B}'} &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

trobem

$$\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrius de canvi de base $M_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}_2[x])}$ i $M_{\mathcal{B}'C(\mathbb{K}_3[x])}$ són

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}_2[x])} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{M}_{\mathcal{B}'C(\mathbb{K}_3[x])} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En aquell exemple vam trobar que la matriu de f respecte a les bases $C(\mathbb{K}_2[x])$ i $C(\mathbb{K}_3[x])$ és

$$\mathsf{M}_{fC(\mathbb{K}_2[x])C(\mathbb{K}_3[x])} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Llavors,

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'C(\mathbb{K}_3[x])}\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}_2[x])} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aquesta matriu coincideix amb la matriu $\mathsf{M}_{fC(\mathbb{K}_2[x])C(\mathbb{K}_3[x])}$ que hem calculat a l'exemple 23.4, així que es verifica la relació (23.1). ◻

23.2.3. Matrius associades a una aplicació lineal en diverses bases

Suposem que $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és una aplicació lineal. Si A és la matriu canònica de f llavors, $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$. D'altra banda, si elegim unes altres bases, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, hi haurà una altra matriu per treballar amb f, $\mathsf{B} = \mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

A cada parell de bases li correspon una matriu associada a f. Llavors, la qüestió lògica és aquesta: quina és la *matriu més adequada* per descriure el comportament de l'aplicació lineal f? O bé, quines són les bases més convenients per treballar amb f?

La matriu més *senzilla* és fàcil de trobar. Tenint en compte que la restricció de f als espais fila i columna de A és bijectiva, i els ortogonals dels espais fila i columna són els espais nul i nul esquerre, si elegim una base $\mathcal{B}$, de $\mathbb{K}^n$, que siga la unió d'una base de l'espai fila, $\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$, i una de l'espai nul, $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}} = \{\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \dots, \vec{v}_n\}$, i una base de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}'$, unió d'una base de l'espai columna, $\mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{A}} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$, i una de l'espai nul esquerre, $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^*} = \{\vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+2}, \dots, \vec{u}_m\}$, la matriu de f respecte aquestes noves bases serà de la forma $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \mathsf{B}_{11} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$, on B_{11} és una matriu invertible $r \times r$ (i r és el rang de A, perquè la dimensió dels espais fila i columna és aquest rang).[1]

La matriu més senzilla possible seria aquella on B_{11} fos la matriu identitat. Això ho podem aconseguir de la manera següent: si $\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ és una base de l'espai fila, llavors les imatges $\vec{u}_1 = f(\vec{v}_1), \vec{u}_2 = f(\vec{v}_2), \dots, \vec{u}_r = f(\vec{v}_r)$, són una base de l'espai columna i, en conseqüència, B_{11} és la matriu identitat, així que la matriu associada a f en aquestes bases té la forma

$$\mathsf{B} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$$

EXEMPLE 23.6.

Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, trobeu bases de $\mathbb{K}^4$ i $\mathbb{K}^3$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, de manera que la matriu associada a l'aplicació lineal $f = \mathsf{A}\vec{x}$ siga de la forma $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$.

La forma esglaonada reduïda de la matriu A és

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Així que el rang de A és 2 i $\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}} = \{(1,0,1/2,1), (0,1,0,0)\}$ és una base de l'espai fila de A. D'altra banda, resolent el sistema lineal $\mathsf{R}\vec{x} = \vec{0}$, obtenim que $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}} = \{(-1/2,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ és una base de l'espai $\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}$. Així que

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1/2,1), (0,1,0,0), (-1/2,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$$

és una base de $\mathbb{K}^4$.

Les imatges dels vectors de la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}}$ són

$$f\left(1,0,\frac{1}{2},1\right) = \left(-\frac{9}{2},-9,9\right)$$
$$f(0,1,0,0) = (-2,-1,-2)$$

[1] Algun dels blocs pot ser buit. Per exemple, si f és bijectiva, $m = n = r$ i $\mathsf{B} = \mathsf{B}_{11}$.

així que $\mathcal{B}_{\mathrm{Col\,A}} = \{(-9/2, -9, 9), (-2, -1, -2)\}$ és una base de l'espai columna. Calculant-ne l'ortogonal, obtenim que $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul\,A}^*} = \{(-2, 2, 1)\}$ és base de l'espai nul esquerre. En definitiva,

$$\mathcal{B}' = \left\{\left(-\frac{9}{2}, -9, 9\right), (-2, -1, -2), (-2, 2, 1)\right\}$$

és una base de $\mathbb{K}^3$.

La matriu de f respecte a les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ és $\mathsf{B} = \mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A més a més,

$$\mathsf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -9/2 & -2 & -2 \\ -9 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{B}=\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{-1}}$$

Factorització en valors singulars, diagonalització i formes reduïdes de Schur i de Jordan

Elegir la matriu $\mathsf{B}_{11} = \mathrm{I}$ ens proporciona la solució més senzilla, però no la més interessant. En comptes de la matriu més simple, convé trobar la matriu i les bases que descriuen l'aplicació f de la millor manera. Aquesta matriu és la dels valors singulars i aquestes bases les dels vectors singulars.

En moltes aplicacions, però, quan els dos espais $\mathbb{K}^n$ i $\mathbb{K}^m$ són iguals (és a dir, quan $n = m$), convé més fer servir les mateixes bases als espais inicial i final; en aquest cas, la matriu més convenient serà la diagonal dels valors propis o, si aquesta *diagonalització* no és possible, les factoritzacions de Schur i de Jordan.

Això és el que estudiarem a la part final d'aquest curs.

23.3. Resum

Matriu del canvi de base en un espai vectorial

- Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ són bases de l'espai E i E', la *matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$* és

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{1_{\mathcal{B}_2}} & \vec{u}_{2_{\mathcal{B}_2}} & \cdots & \vec{u}_{n_{\mathcal{B}_2}} \end{bmatrix}$$

Fórmula del canvi de bases en un espai vectorial

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$$

$(\cdots)$

(...)

Matrius associades a una aplicació lineal

- Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ són bases de E i E' i $f\colon E \longrightarrow E'$ és una aplicació lineal,

  la *matriu de f respecte a les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$* és

$$\mathsf{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} f(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}'} & f(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}'} & \cdots & f(\vec{v}_n)_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$$

- Les coordenades de la imatge del vector $\vec{v}$ respecte a la base $\mathcal{B}'$ són

$$f(\vec{v})_{\mathcal{B}'} = \mathsf{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'}\vec{v}_{\mathcal{B}}$$

Fórmula del canvi de bases per a aplicacions lineals

$$\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1'} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2'\mathcal{B}_1'}\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2'}\mathsf{M}^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$$

En forma breu, $\mathsf{A} = \mathsf{QBP}^{-1}$.

23.4. Exercicis

Exercici 23.1. Trobeu les matrius de canvi de base $\mathsf{M}_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}^3)}$ i $\mathsf{M}_{C(\mathbb{K}^3)\mathcal{B}}$, on $C(\mathbb{K}^3)$ és la base canònica de $\mathbb{K}^3$ i $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,0,3)\}$.

(solució: pàg. 634)

Exercici 23.2. Trobeu les matrius de canvi entre la base canònica de $\mathbb{K}_2[x]$ i la base $\mathcal{B} = \{1,(x-a),(x-a)^2\}$ (a és un nombre real o complex qualsevol). Feu servir el resultat obtingut per a justificar la fórmula de Taylor d'un polinomi qualsevol de grau 2 (centrada en a).

(solució: pàg. 634)

Exercici 23.3. (a) Justifiqueu que els conjunts

$$\mathcal{B}_1 = \{(-3,2),(2,1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(-1,2),(2,-3)\}$$

són bases de $\mathbb{K}^2$.

(b) Trobeu les dues matrius de canvi de base entre aquestes bases.

(c) Del vector $\vec{v}$ sabem que $\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = (1,1)$.

(d) Quines són les coordenades de $\vec{v}$ respecte a la base $\mathcal{B}_2$?

(e) Quines són les coordenades respecte a la base canònica del vector $\vec{v}$?

(solució: pàg. 635)

Exercici 23.4. Si $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són dues bases de l'espai $\mathbb{K}^n$, quina relació hi ha entre les matrius $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$, $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}$ i $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$?

(solució: pàg. 636)

EXERCICI 23.5. De la transformació lineal f sabem que la matriu $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}}$, on $\mathcal{B}$ és la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$, és $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Quina és la matriu canònica de f?

(solució: pàg. 636)

EXERCICI 23.6. Trobeu la matriu M_{fBB} de l'aplicació lineal

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & p(x) & \rightsquigarrow & f(p(x)) = p'(x) - p(x) \end{array}$$

respecte a la base $B = \{1, x, x^2\}$ i proveu que f és bijectiva.

(solució: pàg. 636)

EXERCICI 23.7. Trobeu la matriu M_{fBB} de l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida com $f(\vec{x}) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$, respecte a la base $B = \{(1,-1),(1,1)\}$.

(solució: pàg. 637)

EXERCICI 23.8. (a) Trobeu la matriu $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ de l'aplicació lineal

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 & \rightsquigarrow & (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)x^2 \end{array}$$

respecte a les bases $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x + x^2, 1 + x^3\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{1, 1 + x, x + x^2\}$

(b) Calculeu les coordenades respecte a la base $\mathcal{B}_2$ de la imatge $f(2 + 2x + x^2 + x^3)$.

(c) Trobeu el nucli de f.

(solució: pàg. 637)

EXERCICI 23.9. Donada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$,

(a) Determineu les dimensions del nucli i la imatge de la transformació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$.

(b) Trobeu una base, $\mathcal{B}_1$, de $\mathbb{R}^3$ que siga la unió d'una base de l'espai fila i una de l'espai nul de A.

(c) Construïu també una base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_2$, de manera que la matriu de f respecte a aquestes bases siga $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 638)

LLIBRE TERCER. $\mathsf{A} = \mathsf{U\Sigma V^*}$

L'àlgebra lineal és la part de les matemàtiques que estudia les factoritzacions de les matrius com a producte d'altres matrius que tenen una estructura determinada.

Moltes propietats i molts mètodes de càlcul en àlgebra lineal es poden interpretar (o justificar) com estratègies de factorització de matrius: l'algorisme de Gauss, aplicat a una matriu quadrada, és equivalent a obtenir una factorització LU: $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ (triangular inferior per triangular superior); el mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt ens proporciona una factorització QR: $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$ (matriu amb columnes ortonormals per matriu triangular superior).

La fórmula del canvi de base en una aplicació lineal també és la factorització d'una matriu: si A i B són matrius que representen la mateixa aplicació lineal en bases diverses, llavors $\mathsf{A} = \mathsf{QBP}^{-1}$, on P i Q són matrius invertibles (les matrius de canvi de base en els espais inicial i final de l'aplicació). Tenint això en compte, sembla raonable preguntar-se per quines són les bases més adequades per treballar amb una aplicació lineal i quines són les que ens proporcionen la matriu de l'aplicació més senzilla o, millor, la més adequada per descriure l'aplicació.

Suposant que parlem d'aplicacions lineals entre $\mathbb{K}^n$ i $\mathbb{K}^m$, les *millors* bases són les ortonormals, perquè respecten la *geometria* dels problemes (distàncies, longituds, angles...); i les *millors* matrius són les diagonals, perquè fan molt fàcil l'*àlgebra* dels problemes. Així que obtindrem la solució ideal si trobem bases ortonormals per a les quals la matriu corresponent de l'aplicació lineal és diagonal (o, més ben dit, una matriu on tots els elements no diagonals són zeros, com ara, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, però també $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, perquè si les matrius no són quadrades no podem anomenar-les diagonals). En termes de matrius, si $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, aquesta solució ideal consisteix a trobar dues matrius unitàries, U i V, i una matriu amb tots els elements no diagonals iguals a zero, Σ, tals que $\mathsf{A} = \mathsf{U\Sigma V^*}$. Això és possible sempre i aquesta factorització és la *descomposició en valors singulars* de la matriu A.

Si $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ és una aplicació lineal entre $\mathbb{K}^n$ i $\mathbb{K}^n$ (el mateix espai d'eixida i d'arribada), encara serà més bona la solució si hi fem servir la mateixa base, és a dir, si trobem una base ortonormal (una matriu unitària, U) i una matriu diagonal, D, tals que $\mathsf{A} = \mathsf{UDU^*}$.

Malauradament, això només és possible amb algunes matrius especials (les matrius *normals*), així que, si rebaixem una mica les nostres exigències, i ens conformem amb trobar una base, encara que no siga ortonormal (és a dir una matriu invertible, P), i una matriu diagonal, D, tals que $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$ llavors trobarem moltes més matrius per a les quals això és possible; aquestes són les matrius *diagonalitzables.*

La part final del curs la dedicarem a justificar tot això i a mostrar els algorismes que ens permeten factoritzar qualsevol matriu en valors singulars o diagonalitzar-la (en cas que siga possible). Ho farem, però, en l'ordre contrari (estudiarem abans la diagonalització, perquè la manera pràctica de trobar la factorització en valors singulars (i la prova de la seua existència) requereix una diagonalització). Abans, però, dedicarem un parell de lliçons a l'estudi dels determinants de matrius quadrades (no només de les d'ordre 2), perquè, per a obtenir aquestes factoritzacions, farem servir els determinants.

Capítol 6

Determinants

Lliçó 24. Determinants **344**

24.1. El determinant d'una matriu 344

24.1.1. Determinants i operacions elementals per columnes 346

24.2. Els tres teoremes importants 348

24.2.1. Determinants i operacions elementals per files 349

24.3. Càlcul de determinants 349

24.3.1. Càlcul de determinants mitjançant operacions elementals 349

24.3.2. Desenvolupament per una columna o per una fila 351

24.3.3. L'estratègia òptima 355

24.4. El teorema que ho justifica tot 356

24.5. Resum 357

24.6. Exercicis 358

24.7. Apèndixs 361

24.7.1. Comparació entre el mètode de Gauss i el de desenvolupament per files o columnes 361

24.7.2. Demostració del teorema 24.9 362

24.7.3. Expressió explícita del valor del determinant 365

Lliçó 25. Aplicacions dels determinants **369**

25.1. Càlcul del rang d'una matriu 369

25.2. Resolució de sistemes lineals: la regla de Cramer . 370

25.3. Càlcul de la inversa d'una matriu 372

25.4. Resum 374

25.5. Exercicis 374

Lliçó 24. Determinants

J'ai trouvé une methode pour éliminer
les lettres inconnues d'équations.
Presque toute la force du calcul algébric y est contenue
Gottfried Wilhelm Leibniz

En aquesta lliçó introduïm els determinants. Probablement ja n'esteu familiaritzat i coneixeu la seua utilitat per a resoldre els problemes que hem anat estudiant al llarg del curs i també alguna tècnica per a calcular-los (si més no, quan treballem amb matrius 2×2 o 3×3). Si és així, a hores d'ara hauríeu d'estar convençut que l'ús de les operacions elementals és molt més pràctic que no el dels determinants.
En aquest curs en farem un estudi mínim. En veurem les propietats realment bàsiques i aprendrem a calcular-los, per tal de poder fer-los servir en el càlcul dels valors propis.

Tradicionalment s'ha donat molta importància als determinants en l'àlgebra lineal, perquè ens proporcionen diversos criteris interessants (per a determinar el rang d'una matriu, per a decidir si una matriu és invertible) i, encara millor, fórmules explícites (per a calcular, per exemple, les solucions d'un sistema d'equacions o la inversa d'una matriu invertible). De fet, els determinants són anteriors a les matrius (que varen ser introduïdes precisament per a *generar* determinants).[1]

En canvi, actualment els determinants tenen molts detractors, perquè el càlcul d'un determinant requereix una gran quantitat d'operacions (fins i tot quan treballem amb matrius de poques dimensions) i l'ús d'altres tècniques (com ara, les operacions elementals i els algorismes del tipus Gauss) permet resoldre els mateixos problemes amb molt menys esforç.
El que passa realment és que el determinant ha perdut la seua utilitat com a eina de càlcul, enfront d'aquestes tècniques força més eficients, però encara conserva un gran interès teòric, pel fet que proporciona fórmules explícites per expressar les solucions dels problemes; a més a més, en altres àrees —fora de l'àlgebra lineal— hi té força aplicacions.

D'altra banda, els valors propis (que seran l'objecte de les darreres lliçons d'aquest curs) són les arrels del polinomi característic, que és el determinant d'una matriu, així que a la part final del curs sí que ens seran útils els determinants.

24.1. El determinant d'una matriu

Hi ha diverses maneres equivalents de definir el determinant d'una matriu. Ací farem servir la que més fàcilment ens permet de calcular-lo i provar les propietats dels determinants, tot i que pot semblar una mica estranya, perquè definim el determinant a partir d'algunes propietats que té.

[1] D'ací el nom de *matriu*.

DEFINICIÓ 24.1. (EL DETERMINANT D'UNA MATRIU QUADRADA)

El *determinant* d'una matriu quadrada A, $\det \mathsf{A}$, és un nombre que verifica les propietats següents:

1. Si es permuten dues columnes de la matriu, aleshores el determinant es multiplica per -1:
$$\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}$$

2. Si una columna de la matriu A és una combinació lineal de dos vectors llavors el determinant és combinació lineal de dos determinants:
$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \alpha_1\vec{a}_i + \alpha_2\vec{b}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\\ &\quad = \alpha_1 \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} + \alpha_2 \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

3. El determinant d'una matriu triangular superior és el producte de les entrades diagonals:
$$\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

☞ De la tercera condició de la definició es dedueix que el determinant de la matriu identitat és igual a 1.

☞ El determinant *no és una aplicació lineal*: en general, el determinant de $\alpha_1\mathsf{A} + \alpha_2\mathsf{B}$ no és igual a $\alpha_1 \det \mathsf{A} + \alpha_2 \det \mathsf{B}$.
Noteu que la segona condició de la definició vol dir que el determinant és lineal *en cada columna de la matriu*. Per aquest motiu, es diu que el determinant és *multilineal*.

☞ El determinant de la matriu A es pot representar com $\det \mathsf{A}$ o bé com $|\mathsf{A}|$; per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, el determinant de A el podem escriure com $\det \mathsf{A}$, $|\mathsf{A}|$, $\det\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ o $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$.

Al final d'aquesta lliçó enunciarem un teorema que justifica que aquesta definició és correcta. Ara per ara, estudiarem les propietats més interessants dels determinants i, tot seguit, calcularem el determinant d'una matriu qualsevol.

Primer de tot, veurem com afecten el determinant les operacions elementals per columnes i trobarem els determinants de les matrius elementals.

24.1.1. Determinants i operacions elementals per columnes

La primera condició de la definició fa referència directament a una operació elemental del tipus permutació. Aquesta condició podem reescriure-la com $\det(\mathsf{A}\mathsf{E}_{i,j}) = -\det \mathsf{A}$.

☞ Una operació elemental del tipus permutació de dues columnes multiplica el determinant per -1.

Per tant, elegint $\mathsf{A} = \mathrm{I}$, obtenim $\det \mathsf{E}_{i,j} = -1$.

De la segona condició podem deduir el que passa amb el determinant quan hi fem una operació elemental del tipus escalat:

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \alpha\vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \alpha\vec{a}_i + 0\vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\\ &= \alpha\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\\ &\qquad + 0\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\\ &= \alpha\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

és a dir, $\det(\mathsf{A}\mathsf{E}_i(\alpha)) = \alpha \det \mathsf{A}$.

☞ Una operació elemental del tipus escalat d'una columna multiplica el determinant pel factor d'escala.

I, elegint $\mathsf{A} = \mathrm{I}$, resulta que $\det \mathsf{E}_i(\alpha) = \alpha$.

Per tal de determinar l'efecte d'una operació elemental del tipus reducció hem de provar abans una propietat senzilla.

Propietat 24.1.

Si una matriu té dues columnes iguals, aleshores el determinant d'aquesta matriu és zero.

Demostració: Si suposem que $\vec{a}_i = \vec{a}_j$,

$$\begin{aligned}\det \mathsf{A} &= \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\\ &= -\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} = -\det \mathsf{A}\end{aligned}$$

Però $\det \mathsf{A} = -\det \mathsf{A}$ només és possible si $\det \mathsf{A} = 0$. ▫

Ara ja podem estudiar l'efecte de l'operació de reducció:

$$\begin{aligned}\det&\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i + \alpha\vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\\ &= \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\\ &\qquad + \alpha\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}\\ &= \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} + \alpha 0\end{aligned}$$

és a dir, $\det(\mathsf{A}\mathsf{E}_{j,i}(\alpha)) = \det \mathsf{A}$.

☞ Una operació elemental del tipus reducció per columnes no canvia el valor del determinant.

I, elegint $\mathsf{A} = \mathrm{I}$, resulta que $\det \mathsf{E}_{i,j}(\alpha) = 1$.

En resum,

PROPIETATS 24.2. (DETERMINANTS I OPERACIONS ELEMENTALS PER COLUMNES)

1. *Si permutem dues columnes de la matriu, el determinant no canvia:*

$$\det \mathsf{A} = -\det(\mathsf{A}\mathsf{E}_{i,j})$$

2. *Si s'escala una columna de la matriu, el determinant es multiplica pel factor d'escala:*

$$\det \mathsf{A} = \frac{1}{\alpha}\det(\mathsf{A}\mathsf{E}_i(\alpha))$$

3. *Si a una columna se suma un múltiple d'una altra columna, el determinant no canvia*

$$\det \mathsf{A} = \det(\mathsf{A}\mathsf{E}_{j,i}(\alpha))$$

4. *Els determinants de les matrius elementals són*

$$\det \mathsf{E}_{ij} = -1 \qquad \det \mathsf{E}_i(\alpha) = \alpha \qquad \det \mathsf{E}_{ij}(\alpha) = 1 \quad \square$$

De tot això es dedueix que el determinant del producte d'una matriu A per una matriu elemental és igual al producte dels determinants de les dues matrius:

PROPIETATS 24.3.

1. *Si* E *és una matriu elemental llavors,* $\det(\mathsf{A}\mathsf{E}) = \det \mathsf{A} \det \mathsf{E}$.

2. *Si la matriu* B *s'obté a partir de la matriu* A *fent-hi diverses operacions elementals per columnes, és a dir, si* $\mathsf{B} = \mathsf{A}\mathsf{E}_1\mathsf{E}_2\cdots\mathsf{E}_p$ *llavors,*

$$\det \mathsf{B} = \det(\mathsf{A}\mathsf{E}_1\mathsf{E}_2\dots\mathsf{E}_p) = \det \mathsf{A}\det \mathsf{E}_1 \det \mathsf{E}_2 \dots \det \mathsf{E}_p$$

Demostració: La demostració es redueix a una simple comprovació. Per exemple,

$$\det\left(\mathsf{A}\mathsf{E}_{i,j}\right) = -1\det \mathsf{A} = \det \mathsf{E}_{i,j}\det \mathsf{A} \quad \square$$

El que passa, en realitat, és que el determinant d'un producte de matrius és igual al producte dels determinants d'aquestes matrius (encara que no siguen elementals). Això ho veurem en l'apartat següent.

24.2. Els tres teoremes importants

Primer de tot, provarem la propietat més important d'aquesta unitat: una matriu és invertible quan el seu determinant és diferent de zero.[2]

Teorema 24.4. (Caracterització de matrius invertibles)

La matriu A *és invertible si i només si* $\det \mathsf{A} \neq 0$.

Demostració: Si A és invertible, aleshores sabem que A és un producte de matrius elementals. Per tant, el determinant de A serà el producte dels determinants d'aquestes matrius elementals. Però com el determinant d'una matriu elemental no és zero, tampoc no ho serà el de A.

En cas contrari, és a dir, si A no és invertible, aplicant-hi operacions elementals per columnes podem transformar-la en una matriu triangular una columna de la qual només conté zeros. Per tant, el determinant de A és zero. □

Ara ja podem demostrar que el determinant del producte és el producte dels determinants.

Teorema 24.5. (teorema de Binet)

Per a qualsevol parell de matrius d'ordre n, A *i* B, $\det(\mathsf{AB}) = \det \mathsf{A} \det \mathsf{B}$.

Demostració:

Si B no és invertible, aleshores AB tampoc no és invertible, de manera que els dos determinants, $\det(\mathsf{AB})$ i $\det \mathsf{B}$ són iguals a zero i

$$\det \mathsf{A} \det \mathsf{B} = \det \mathsf{A} \cdot 0 = 0 = \det(\mathsf{AB})$$

D'altra part, si B és invertible, podem escriure-la com un producte de matrius elementals, $\mathsf{B} = \mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \dots \mathsf{E}_p$, de manera que

$$\det(\mathsf{AB}) = \det(\mathsf{AE}_1 \mathsf{E}_2 \dots \mathsf{E}_p) = \det \mathsf{A} \det \mathsf{E}_1 \det \mathsf{E}_2 \dots \det \mathsf{E}_p = \det \mathsf{A} \det \mathsf{B} \quad \square$$

Teorema 24.6.

El determinant d'una matriu A *i el de la seua matriu transposada* A^T *són iguals.*

Demostració: Si la matriu A no és invertible llavors la transposada A^T tampoc no ho és i els dos determinants són iguals a zero. I, en el cas que la matriu A siga invertible, la demostració també és òbvia, perquè les transposades de les matrius elementals són matrius elementals del mateix tipus

$$\mathsf{E}_{i,j}^\mathsf{T} = \mathsf{E}_{i,j} \qquad \mathsf{E}_i(\alpha)^\mathsf{T} = \mathsf{E}_i(\alpha) \qquad \mathsf{E}_{i,j}(\alpha)^\mathsf{T} = \mathsf{E}_{j,i}(\alpha)$$

i, per tant, com que A és un producte de matrius elementals, $\mathsf{A} = \mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \dots \mathsf{E}_p$,

$$\det \mathsf{A}^\mathsf{T} = \det \mathsf{E}_p^\mathsf{T} \dots \det \mathsf{E}_2^\mathsf{T} \det \mathsf{E}_1^\mathsf{T} = \det \mathsf{E}_p \dots \det \mathsf{E}_2 \det \mathsf{E}_1 = \det \mathsf{A} \quad \square$$

[2] Així que una de les coses que determina el determinant és la invertibilitat.

24.2.1. Determinants i operacions elementals per files

Del fet que el determinant d'una matriu coincideix amb el de la matriu transposada es dedueix que tot el que hem fet fins ara treballant amb les columnes de la matriu A es pot fer igualment treballant amb les files (perquè el determinant no varia si es transposa la matriu), així que

Propietats 24.7. (Operacions elementals per files i determinants)

1. *Si es permuten dues files de la matriu, aleshores el determinant canvia de signe.*
2. *Si una fila de la matriu A és combinació lineal de dues matrius fila, llavors, el determinant és la combinació lineal de dos determinants:*

$$\det \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \cdots \\ \alpha_1 \mathsf{A}_i + \alpha_2 \mathsf{B}_i \\ \cdots \\ \mathsf{A}_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \det \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \cdots \\ \mathsf{A}_i \\ \cdots \\ \mathsf{A}_n \end{bmatrix} + \alpha_2 \det \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_2 \\ \cdots \\ \mathsf{B}_i \\ \cdots \\ \mathsf{A}_n \end{bmatrix}$$

3. *El determinant d'una matriu triangular inferior és el producte de les entrades diagonals de la matriu.*
4. *Si una fila es multiplica per una constant llavors, el determinant també s'hi multiplica.*
5. *Si a una fila se li suma un múltiple d'una altra, el determinant no varia.* □

24.3. Càlcul de determinants

24.3.1. Càlcul de determinants mitjançant operacions elementals

Qualsevol determinant el podem calcular mitjançant l'algorisme de Gauss o qualsevol altra combinació d'operacions elementals per files i/o per columnes que transforme la matriu en una de triangular o en una que siga clarament no invertible. Com que sabem com es modifica el valor del determinant cada vegada que hi fem una operació elemental, al final del procés obtindrem el resultat calculant el determinant d'una matriu triangular superior (o comprovant que es tracta d'una matriu no invertible).

EXEMPLE 24.1.

Càlcul del determinant de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Mirarem de reduir la matriu a la forma triangular. Primer de tot, eliminem els dos elements que hi ha davall a_{11}. Hauríem de sumar o restar a les files segona i tercera $3/2$ per la primera. Per a evitar l'ús de les fraccions, però, començarem multiplicant aquestes dues files per 2. Ara bé, cada vegada que multipliquem una fila per 2 el determinant es multiplicarà per 2, així que

$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Ara ja podem eliminar més còmodament, sumant a la segona fila el triple de la primera i restant a la tercera el triple de la primera (això no canvia el determinant):

$$\det \mathsf{A} = \frac{1}{2^2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 17 & 17 \\ 0 & -5 & -17 \end{vmatrix}$$

Dividim la segona fila per 17:

$$\det \mathsf{A} = \frac{17}{2^2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -17 \end{vmatrix}$$

I tornem a eliminar, sumant 5 vegades la segona fila a la tercera:

$$\det \mathsf{A} = \frac{17}{2^2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

La matriu de la dreta ja és triangular, així que el seu determinant és el producte de la diagonal:

$$\det \mathsf{A} = \frac{17}{2^2} 2(-12) = -102 \quad \square$$

EXEMPLE 24.2.

Calculeu el determinant de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Apliquem l'algorisme de Gauss:

$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(perquè la darrera matriu té dues files iguals i, per tant, no és invertible). □

En els dos exemples anteriors hem aplicat l'algorisme de Gauss, però en general és més eficient fer-hi servir les operacions elementals per files i per columnes que resulten més convenients.

Exemple 24.3.

Calculeu el determinant de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Restant el doble de la primera columna a la segona columna obtenim

$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ara sumem la primera fila a la tercera,

$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

permutem les columnes segona i quarta,

$$\det \mathsf{A} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

i a la primera columna li sumem el doble de la segona

$$\det \mathsf{A} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \square$$

24.3.2. Desenvolupament per una columna o per una fila

A continuació deduirem una fórmula recursiva per al càlcul del determinant. Aquesta fórmula redueix el càlcul d'un determinant d'ordre n al càlcul d'uns quants (n) determinants d'ordre $n-1$.

Calcularem els determinants 1×1, 2×2, 3×3 i això ens portarà a aquesta fórmula general.

El determinant 1×1 Una matriu 1×1, $\mathsf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix}$, és triangular, així que $\det \mathsf{A} = a_{11}$.

El determinant 2×2 El determinant d'una matriu 2×2 ja l'havíem definit, a la lliçó 9 (apartat 9.5) com

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ara comprovarem que la *nova* definició ens dona el mateix valor per al determinant; aplicarem aquesta definició (i alguna propietat que n'hem deduït) a la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

La primera columna de A la podem escriure com una combinació lineal dels dos vectors de la base canònica: $(a_{11}, a_{21}) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1)$. Per tant,

$$\begin{aligned} \det \mathsf{A} &= \left| a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \right| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

i, permutant les dues files, ens quedarà

$$\begin{aligned} &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 1 & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \square \end{aligned}$$

El determinant 3×3 En el cas d'una matriu 3×3, A, la primera columna es pot escriure com $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$. Així que

$$\begin{aligned} \det \mathsf{A} &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(els signes davant a_{21} i a_{31} es justifiquen pel fet que en un cas hem fet una permutació de files i , en l'altre, dues). Ara, al primer determinant, restem a la segona columna la primera multiplicada per a_{12}, i a la tercera li restem la primera multiplicada per a_{13}.

$$\det \mathsf{A} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Si fem el mateix amb els altres dos determinants, quedarà

$$\begin{aligned}\det \mathsf{A} &= a_{11}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ &= a_{11}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathsf{A}_{11}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathsf{A}_{21}\end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathsf{A}_{31}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Fixem-nos que les operacions elementals que cal fer per transformar la matriu $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathsf{A}_{i1}\end{bmatrix}$ en triangular no modifiquen la primera columna ni la primera fila. Per tant, $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathsf{A}_{i1}\end{vmatrix} = \left|\mathsf{A}_{i1}\right|$. Això vol dir que

$$\det \mathsf{A} = a_{11}\left|\mathsf{A}_{11}\right| - a_{21}\left|\mathsf{A}_{21}\right| + a_{31}\left|\mathsf{A}_{31}\right| \tag{24.1}$$

El determinant n × n La fórmula 24.1 és molt interessant, perquè redueix el càlcul d'un determinant 3×3 al de tres determinants 2×2 i perquè exactament el mateix raonament que hi hem fet es pot utilitzar per a reduir l'ordre de qualsevol determinant $n \times n$:

$$\begin{aligned}\det \mathsf{A} &= a_{11}\begin{vmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \cdots + a_{n1}\begin{vmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & & & \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\\ &= a_{11}\begin{vmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix}1 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \cdots \pm a_{n1}\begin{vmatrix}1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & & \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

(els signes són alternats)

$$= a_{11}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \cdots \pm a_{n1}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & & \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n}\end{vmatrix}$$

$$\det \mathsf{A} = a_{11}\left|\mathsf{A}_{11}\right| - a_{21}\left|\mathsf{A}_{21}\right| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\left|\mathsf{A}_{n1}\right| \tag{24.2}$$

En aquesta expressió, les matrius A_{ij} són el resultat de suprimir les files i i j de la matriu A.

Definicions 24.2.

Si A és una matriu quadrada, el *menor complementari* corresponent a l'element a_{ij} és el determinant de la submatriu A_{ij}, obtingut eliminant la fila i i la columna j de la matriu A.
El nombre $c_{ij} = (-1)^{i+j}\left|\mathsf{A}_{ij}\right|$ s'anomena *cofactor* corresponent a l'element a_{ij}.

☞ El determinant $\det \mathsf{A}$ es pot calcular sumant els productes de cada element de la primera columna de A pels seus respectius cofactors, és a dir,

$$\det \mathsf{A} = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + \cdots + a_{n1}c_{n1}$$

de manera que reduïm el càlcul d'un determinant $n \times n$ al de n determinants $(n-1) \times (n-1)$ (i $2n-1$ operacions més, entre sumes i productes).

Aquest és el *desenvolupament del determinant per la primera columna.* Ara bé, fent servir la propietat que la permutació de dues columnes multiplica el determinant per -1, es veu fàcilment que la fórmula continua sent vàlida si en comptes de la primera columna n'escollim qualsevol altra, així que

☞ El determinant $\det \mathsf{A}$ es pot calcular sumant els productes de cada element d'una columna (arbitrària) de A pels seus respectius cofactors, és a dir per a qualsevol j,

$$\det \mathsf{A} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj} \quad \square \tag{24.3}$$

Finalment, com que el determinant de la matriu és el mateix que el de la transposada, si podem calcular-lo desenvolupant-lo per una columna, també ho podem fer amb una fila.

☞ El determinant $\det \mathsf{A}$ es pot calcular sumant els productes de cada element d'una fila (arbitrària) de A pels seus respectius cofactors, és a dir per a qualsevol i,

$$\det \mathsf{A} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} \quad \square \tag{24.4}$$

Aquestes són les fórmules recursives per calcular el determinant; per exemple, el determinant d'una matriu 5×5 el podem reduir a cinc determinants 4×4; cadascun d'aquests es redueixen a quatre determinants 3×3, i, aquests, a tres determinants 2×2.

El fet que un determinant es pot desenvolupar per una fila o per una columna es coneix com *el teorema de Laplace.*

Teorema 24.8. (Teorema de Laplace)

Si A és una matriu $n \times n$ llavors el determinant de A es pot desenvolupar per qualsevol columna o fila, és a dir,

$$\det \mathsf{A} = \begin{cases} a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj} & (\textit{per a qualsevol } j,\ 1 \le j \le n) \\ a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} & (\textit{per a qualsevol } i,\ 1 \le i \le n) \end{cases} \quad \square$$

Exemple 24.4.

Calculeu el determinant de la matriu $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Podem desenvolupar-lo per qualsevol fila o columna. Desenvolupant per la tercera columna obtenim:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4(1\cdot 1 - 2\cdot 0) - 1(2\cdot 1 + 2\cdot 1) + 2(2\cdot 0 - 1\cdot 1) \\ &= -2\end{aligned}$$

Si elegim la segona fila,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= -1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1(1\cdot 2 - 4\cdot 1) + 0 - 1(2\cdot 1 - 1\cdot(-2)) \\ &= -2\end{aligned}$$

Observeu que l'elecció d'una fila que conté un zero ens ha estalviat el càlcul d'un determinant.

24.3.3. L'ESTRATÈGIA ÒPTIMA

Qualsevol mètode per al càlcul de determinants és molt ineficient, perquè requereix moltes operacions. Ara, dels dos mètodes que hem vist ací, el de Gauss és molt millor que no el d'anar desenvolupant el determinant per files o columnes, com podeu veure a l'apèndix 24.7.1.

En qualsevol cas, si mai necessitem calcular un determinant, pot ser convenient una combinació dels dos mètodes i, en general, de les propietats conegudes dels determinants per tal de simplificar al màxim els càlculs.

EXEMPLE 24.5.

Calculeu el determinant de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Aquesta matriu té diverses files i columnes amb només dues entrades no nul·les. Farem una operació elemental per a aconseguir un nou zero en la primera columna: la segona fila a la tercera (això no canvia el valor del determinant):

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Ara, com que només hi ha una entrada no nul·la a la primera columna, desenvolupem el determinant per aquesta columna: $|\mathsf{A}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

A la tercera fila li restem la primera, $|\mathsf{A}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Desenvolupem per la tercera columna, $|\mathsf{A}| = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$,

i a la segona fila li sumem la primera $|\mathsf{A}| = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8$ □

24.4. El teorema que ho justifica tot

Hem començat amb una definició *estranya*, perquè no hem provat que hi ha una manera d'assignar a les matrius quadrades un *determinant* que complisca les propietats de la definició 24.1.

Però hem acabat trobant diverses fórmules recurrents per a *calcular* aquest determinant. Això vol dir que *si existeix* el determinant, el podrem calcular amb qualsevol fórmula d'aquestes. Tot i això, estem segurs que el nombre que calculem amb aquesta fórmula compleix les propietats que exigeix la definició? El teorema següent respon afirmativament.

Teorema 24.9.

L'aplicació det*, que associa un nombre,* $\det \mathsf{A}$*, a cada matriu quadrada* A*, definida recursivament com*

$$\det \mathsf{A} = \begin{cases} a_{11} & \text{si } \mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \text{ és una matriu } 1 \times 1 \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det \mathsf{A}_{1k} & \text{si } \mathsf{A} \text{ és una matriu } n \times n \ (n > 1) \end{cases}$$

compleix les propietats següents:

1. *Si es permuten dues columnes de la matriu, aleshores*

$$\det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

2. *Si una columna de la matriu* A *és una combinació lineal de dos vectors llavors*

$$\det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \alpha_1 \vec{a}_i + \alpha_2 \vec{b}_i & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} + \alpha_2 \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b}_i & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

(...)

(...)

3. *Si la matriu és triangular superior,*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

A més a més, aquesta és l'única aplicació que compleix aquestes propietats.

És a dir, que el determinant existeix, és únic, i sabem com calcular-lo. □

A l'apèndix 24.7.2 provarem aquest teorema. I també mostrarem, a l'apèndix 24.7.3, una fórmula explícita del valor del determinant.

24.5. Resum

El determinant

- El determinant d'una matriu quadrada A ($\det \mathsf{A}$ o $|\mathsf{A}|$) és un nombre que verifica les propietats següents:

  1. Si es permuten dues columnes de la matriu, aleshores el determinant es multiplica per -1.
  2. Si una columna de la matriu A és combinació lineal de dos vectors llavors,

$$\begin{aligned} \det \mathsf{A} &= \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \alpha_1\vec{a}_i + \alpha_2\vec{b}_i & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1 \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_i & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} + \alpha_2 \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{b}_i & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  3. El determinant d'una matriu triangular inferior és el producte de les entrades diagonals de la matriu.

Teoremes importants

Matrius invertibles: A és invertible $\iff \det \mathsf{A} \neq 0$

Teorema de Binet: $\det(\mathsf{AB}) = \det \mathsf{A} \det \mathsf{B}$

Matrius transposades: $\det \mathsf{A}^\mathsf{T} = \det \mathsf{A}$

Determinants i operacions elementals

1. Si es permuten dues columnes o dues files llavors, el determinant es multiplica per -1.
2. Si una columna o una fila es multiplica per una constant llavors, el determinant també s'hi multiplica.
3. Si a una columna o una fila se li suma un múltiple d'una altra, el determinant no varia.

(...)

(···)

Determinants de les matrius elementals

$$\det \mathsf{E}_{ij} = -1 \qquad \det \mathsf{E}_i(\alpha) = \alpha \qquad \det \mathsf{E}_{ij}(\alpha) = 1$$

Menors i cofactors

- Si A és una matriu quadrada, el *menor complementari* corresponent a l'element a_{ij} és el determinant de la submatriu A_{ij}, obtingut eliminant la fila i i la columna j de la matriu A.
- El nombre $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathsf{A}_{ij}$ s'anomena *cofactor* corresponent a l'element a_{ij}.

Desenvolupament per una columna

$$\det \mathsf{A} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}$$

Desenvolupament per una fila

$$\det \mathsf{A} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}$$

24.6. Exercicis

Exercici 24.1. Calculeu els determinants de les matrius següents:

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} x+1 & x-1 \\ x-1 & x+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(d)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 640)

Exercici 24.2. Estudieu la invertibilitat de les matrius

$$\text{(a)}\ \ \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ \ \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\ \ \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 640)

Exercici 24.3. Calculeu els determinants següents, cercant en cada cas el mètode més eficient que pugueu trobar (la matriu de l'apartat (b) té n files).

$$\text{(a)}\ \ \det \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ \ \det \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 641)

EXERCICI 24.4. Per a quins valors dels paràmetres són invertibles les matrius de l'exercici anterior?

(solució: pàg. 642)

EXERCICI 24.5. La matriu A l'hem obtinguda, a partir de la matriu identitat fent-hi les següents operacions elementals:

1. Hem permutat les files segona i quarta.
2. A la fila tercera li hem sumat quatre vegades la primera.
3. Hem multiplicat la columna segona per -2.
4. Hem multiplicat la fila primera per 3.
5. Hem permutat les files primera i tercera.

Quin és el deteminant de A?

(solució: pàg. 642)

EXERCICI 24.6. Sabent que el determinant de la matriu 3×3 A és igual a 7, calculeu els determinants següents:

(a) $\det \mathsf{A}^T$ (b) $\det(2\mathsf{A})$ (c) $\det(\mathsf{E}_{1,3}\mathsf{A})$ (d) $\det(\mathsf{E}_{1,3}(-5)\mathsf{A})$
(e) $\det \mathsf{A}^2$ (f) $\det \mathsf{A}^{-1}$ (g) $\det(\mathsf{E}_2(3)\mathsf{A}^{-1})$

(solució: pàg. 643)

EXERCICI 24.7. Demostreu que la matriu

$$\begin{bmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{bmatrix}$$

és invertible (independentment del valor del paràmetre x) i calculeu-ne la inversa.

(solució: pàg. 643)

EXERCICI 24.8. Calculeu el determinant de la matriu $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 643)

EXERCICI 24.9. Calculeu el determinant de la matriu $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 644)

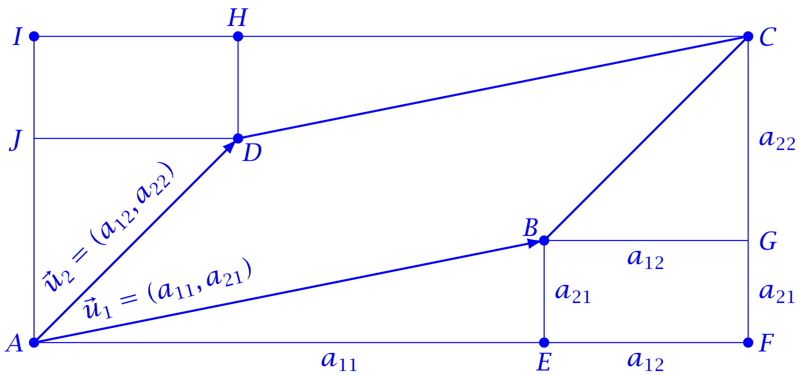
Exercici 24.10. (Determinant de Vandermonde) Calculeu el determinant de la matriu de Vandermonde,

$$\det V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}$$

(solució: pàg. 644)

Exercici 24.11. La figura representa el paral·lelogram $ABCD$ definit pels vectors $\vec{u}_1 = (a_{11}, a_{21})$ i $\vec{u}_2 = (a_{21}, a_{22})$. Calculeu la seua àrea (restant a l'àrea del rectangle *gran* $AFCI$ les dels polígons exteriors a $ABCD$).

Expresseu el resultat que obteniu com un determinant.



(solució: pàg. 646)

Exercici 24.12. Si $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ és una factorització LU de la matriu A, quina relació hi ha entre els determinants de les tres matrius A, L i U? (*No és suficient la resposta* $\det \mathsf{A} = \det \mathsf{L} \det \mathsf{U}$). Potser us convindrà distingir si la factorització és estricta o no ho és.

(solució: pàg. 647)

Exercici 24.13. (a) Quina relació hi ha entre el determinant de la matriu quadrada A i el de l'adjunta A^*? (b) Proveu que si la matriu A és unitària llavors el mòdul del determinant de A és igual a 1. Deduïu que si la matriu A és ortogonal llavors $\det \mathsf{A} = \pm 1$. (c) Proveu que si la matriu A és hermítica llavors el determinant de A és real.

(solució: pàg. 647)

24.7. Apèndixs

24.7.1. Comparació entre el mètode de Gauss i el de desenvolupament per files o columnes

En aquesta lliçó hem trobat dos mètodes per a calcular el determinant: el mètode de Gauss i l'aplicació recursiva d'alguna fórmula de desenvolupament per una fila o columna. En aquest apèndix esbrinarem quina estratègia resultarà més eficient. La millor manera de fer aquesta comparació consistirà en comptar el nombre d'operacions que cal realitzar en cada cas.

En primer lloc, calcularem el nombre d'operacions necessàries per a calcular un determinant pel mètode de Gauss: Observem que per a canviar per zeros tots els elements per sota a_{11} cal fer el següent càlcul: Canviar la fila A_i $(2 \le i \le n)$ per $\mathsf{A}_i - (a_{i1}/a_{11})\mathsf{A}_1$. Així, per cada fila de la segona a la n, haurem de

1. Calcular a_{i1}/a_{11}: una operació.
2. Canviar a_{i1} per zero: cap operació.
3. Canviar a_{ij}, $2 \le j \le n$ per $a_{ij} - (a_{i1}/a_{11})a_{1j}$: una suma i un producte per cada j: $2(n-1)$ operacions.

Això fa un total de $1 + 0 + 2(n-1)$ operacions per cada fila, és a dir,

$$(n-1)(1+2(n-1)) = (n-1) + 2(n-1)^2$$

operacions per a reduir la primera columna. És clar que per reduir la segona columna caldrà fer $(n-2) + 2(n-2)^2$ operacions i així successivament. En definitiva, per reduir A a la forma triangular les operacions que hem de fer són

$$\begin{aligned}\Big[(n-1) + 2(n-1)^2\Big] + \Big[(n-2) + 2(n-2)^2\Big] + \cdots + \Big[1 + 2(1)^2\Big] \\ = \Big[(n-1) + (n-2) + \cdots + 1\Big] \\ + 2\Big[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2\Big] \\ = \frac{(n-1)n}{2} + 2\frac{n(2n-1)(n-1)}{6} \\ = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}\end{aligned}$$

Finalment, cal multiplicar els n elements diagonals: $n-1$ productes. Així doncs,

☞ El nombre total d'operacions per calcular un determinant pel mètode de Gauss és

$$n - 1 + \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$$

Per a valors grans de n, això és aproximadament igual a $2n^3/3$.

Vegem ara quantes operacions caldria fer per tal de calcular un determinant d'ordre n aplicant successivament el mètode de desenvolupament per una fila fins a reduir-lo completament. A la fórmula

$$\det \mathsf{A} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}$$

s'hi sumen n termes, és a dir, cal fer-hi $n-1$ sumes. Cadascun dels termes que hi sumem és un producte. Per tant, cal fer n productes on un dels factors és un determinant d'ordre $n-1$; en total, $n-1$ sumes, n productes i n determinants d'ordre $n-1$. Així que, anomenant a_n el nombre d'operacions corresponent a un determinant d'ordre n, el nombre d'operacions serà aquest:

$$a_n = (n-1) + n + na_{n-1}$$

Aquesta és una recurrència no lineal, i no és gens fàcil d'obtenir el valor exacte de a_n; però podem fer-ne una estimació:

$$a_n = (n-1) + n + na_{n-1} = 2n + na_{n-1} - 1 > na_{n-1} > n(n-1)a_{n-2} > \cdots > n!$$

☞ Per calcular el determinant desenvolupant per files cal fer més de $n!$ operacions.

El mètode de Gauss és molt més ràpid que el del desenvolupament per una fila o columna, perquè $n!$ és molt i molt més gran que $2n^3/3$.

De fet, aquesta diferència de velocitats és espectacular, com es veu al quadre de la pàgina següent, que mostra el nombre exacte d'operacions que requereix cada mètode (en el cas més desfavorable per als dos mètodes, és a dir, que no ens trobem cap zero que ens estalvie operacions) per a calcular els determinants de matrius d'ordres $2, 3, \ldots, 25$.

24.7.2. Demostració del teorema 24.9

Provarem el teorema per inducció (sobre la grandària, n, de la matriu A):

Demostració de la condició primera

1. Per a $n = 1$ aquesta condició no té sentit (perquè no hi ha columnes que puguen permutar-se).

2. Per a $n = 2$, la podem provar amb un càlcul directe:

$$\det\begin{bmatrix}\vec{a}_2 & \vec{a}_1\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}a_{12} & a_{11}\\ a_{22} & a_{21}\end{bmatrix} = a_{12}\det\begin{bmatrix}a_{21}\end{bmatrix} - a_{11}\det\begin{bmatrix}a_{22}\end{bmatrix}$$
$$= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2\end{bmatrix}$$

3. Suposem que la propietat és certa per a les matrius $(n-1)\times(n-1)$ i mirem de provar-la per a les matrius $n \times n$. Hem de comparar els determinants de les matrius

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix}$$

n	Gauss	Desenvolupant per files	
2	4	3	
3	15	14	
4	37	63	
5	74	324	
6	130	1 955	
7	209	13 698	
8	315	109 599	
9	452	986 408	(1 milió)
10	624	9 864 099	(10 milions)
11	835	108 505 110	
12	1 089	1 302 061 343	
13	1 390	16 926 797 484	
14	1 742	236 975 164 803	
15	2 149	3 554 627 472 074	
16	2 615	56 874 039 553 215	
17	3 144	966 858 672 404 688	
18	3 740	17 403 456 103 284 419	
19	4 407	330 665 665 962 403 998	
20	5 149	6 613 313 319 248 079 999	
21	5 970	138 879 579 704 209 680 020	
22	6 874	3 055 350 753 492 612 960 483	
23	7 865	70 273 067 330 330 098 091 154	
24	8 947	1 686 553 615 927 922 354 187 743	
25	10 124	42 163 840 398 198 058 854 693 624	(42 quadrilions)

Nombre d'operacions en el càlcul de determinants fent servir
el mètode de Gauss i el de desenvolupament
per una fila o columna

$$
\begin{aligned}
\det \mathsf{B} = {}& b_{11}\det \mathsf{B}_{11} - b_{12}\det \mathsf{B}_{12} + \cdots + (-1)^{1+i} b_{1i}\det \mathsf{B}_{1i} \\
& + \cdots + (-1)^{1+j} b_{1j}\det \mathsf{B}_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n} b_{1n}\det \mathsf{B}_{1n}
\end{aligned}
\tag{24.5}
$$

En aquesta expressió, tots els termes que se sumen, excepte els corresponents a les columnes $k = i$ i $k = j$, són

$$(-1)^{1+k} b_{1k}\det \mathsf{B}_{1k} = -(-1)^{1+k} a_{1k}\det \mathsf{A}_{1k}$$

perquè $b_{1k} = a_{1k}$ i les matrius B_{1k} i A_{1k} són iguals, amb una permutació de les columnes i i j.

Els altres dos termes són especials: $b_{1i} = a_{1j}$ i B_{1i} i A_{1j} tenen les mateixes columnes, però en un ordre distint:

$$\mathsf{B}_{1i} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i+1} & \ldots & a_{2j-1} & a_{2i} & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \ldots & a_{nj-1} & a_{ni} & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}_{1j} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & a_{2i} & a_{2i+1} & \ldots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni} & a_{ni+1} & \ldots & a_{nj-1} & a_{2j+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Per transformar A_{1j} en B_{1i} cal fer $j - i - 1$ permutacions de columnes. Per tant

$$(-1)^{1+i} b_{1i} \det \mathsf{B}_{1i} = (-1)^{1+i} a_{1j} (-1)^{j-i-1} \det \mathsf{A}_{1j} = -(-1)^{1+j} a_{1j} \det \mathsf{A}_{1j}$$

De manera anàloga,

$$(-1)^{1+j} b_{1j} \det \mathsf{B}_{1j} = -(-1)^{1+i} a_{1i} \det \mathsf{A}_{1i}$$

Així que, substituint en l'expressió 24.5,

$$\begin{aligned} \det \mathsf{B} = & -a_{11} \det \mathsf{A}_{11} + a_{12} \det \mathsf{A}_{12} + \cdots - (-1)^{1+j} a_{1j} \det \mathsf{A}_{1j} \\ & + \cdots - (-1)^{1+i} a_{1i} \det \mathsf{A}_{1i} + \cdots - (-1)^{1+n} a_{1n} \det \mathsf{A}_{1n} = -\det \mathsf{A} \end{aligned}$$

Demostració de la condició segona

1. Si $n = 1$, $\det \left[\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} \right] = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \alpha_1 \det \left[\vec{a} \right] + \alpha_2 \det \left[\vec{b} \right]$

2. Suposem que la propietat és certa per a les matrius $(n-1) \times (n-1)$ i mirem de provar-la per a les matrius $n \times n$. Considerem les matrius

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \alpha_1 a_{2i} + \alpha_2 b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha_1 a_{ni} + \alpha_2 b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Volem provar que $\det \mathsf{C} = \alpha_1 \det \mathsf{A} + \alpha_2 \det \mathsf{B}$:

$$\det \mathsf{C} = c_{11} \det \mathsf{C}_{11} + \cdots + (-1)^{1+i} c_{1i} \det \mathsf{C}_{1i} + \cdots + (-1)^{1+n} c_{1n} \det \mathsf{C}_{1n}$$

Ací,

- tots els nombres c_{1k} són iguals a a_{1k}, excepte un: $c_{1i} = \alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 b_{1i}$.

- i tots els nombres $\det \mathsf{C}_{1k}$ són iguals a $\alpha_1 \det \mathsf{A}_{1k} + \alpha_2 \det \mathsf{B}_{1k}$, excepte un: $\det \mathsf{C}_{1i} = \det \mathsf{A}_{1i}$.

Per tant,

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{C} =& a_{11}\,(\alpha_1 \det \mathsf{A}_{11} + \alpha_2 \det \mathsf{B}_{11}) - a_{12}\,(\alpha_1 \det \mathsf{A}_{12} + \alpha_2 \det \mathsf{B}_{12}) + \dots \\
& + (-1)^{1+i}(\alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 b_{1i}) \det \mathsf{A}_{1i} \\
& \qquad\qquad + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}\,(\alpha_1 \det \mathsf{A}_{1n} + \alpha_2 \det \mathsf{B}_{1n}) \\
=& \alpha_1 \Big(a_{11} \det \mathsf{A}_{11} - a_{12} \det \mathsf{A}_{12} + \dots \\
& \qquad + (-1)^{1+i} a_{1i} \det \mathsf{A}_{1i} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \mathsf{A}_{1n} \Big) \\
& + \alpha_2 \Big(a_{11} \det \mathsf{B}_{11} - a_{12} \det \mathsf{B}_{12} + \dots \\
& \qquad + (-1)^{1+i} b_{1i} \det \mathsf{A}_{1i} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \mathsf{B}_{1n} \Big)
\end{aligned}$$

Però , si $k \neq i$, $a_{1k} = b_{1k}$ i, a més, $\mathsf{A}_{1i} = \mathsf{B}_{1i}$, així que

$$\det \mathsf{C} = \alpha_1 \det \mathsf{A} + \alpha_2 \det \mathsf{B}$$

Demostració de la condició tercera

1. Si $n = 1$, $\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$ és (evidentment) el producte de la diagonal de la matriu.
2. Si la propietat és certa per a les matrius $(n-1) \times (n-1)$ i A és una matriu $n \times n$,

$$\det \mathsf{A} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \dots$$
$$+ (-1)^{1+n} a_{1n} \det \begin{bmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn-1} \end{bmatrix}$$

Per tant,

$$\det \mathsf{A} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} + 0 + \dots + 0$$

Aquesta aplicació és l'única que compleix les tres propietats, perquè en aquesta lliçó hem provat que, si existeix, aleshores es pot calcular fent servir la fórmula 24.4. □

24.7.3. Expressió explícita del valor del determinant

Finalment obtindrem una fórmula (no recursiva) que ens proporciona explícitament el valor del determinant d'una matriu. Aquesta fórmula pot tenir interès teòric, però, a la pràctica, no és útil, perquè els mètodes de càlcul que hem anat veient a la lliçó són molt més eficients.

La deduirem en el cas de les matrius 3×3, però el procés és perfectament extrapolable a una matriu $n \times n$ qualsevol.

Es tracta de calcular el determinant de la matriu A. Com que el determinant és multilineal i la primera fila de A és

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \end{bmatrix}$$

el determinant és

$$\begin{aligned} \det \mathsf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Si ara apliquem la linealitat a les segones files d'aquests tres determinants ens quedarà

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \\ &\qquad + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\qquad\qquad + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\qquad + a_{12}a_{21}a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\qquad\qquad + a_{13}a_{21}a_{32} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Cadascun dels sis determinants d'aquesta darrera expressió és igual a 1 o -1, perquè es tracta de matrius permutació (permutacions de les files de la matriu identitat). Com que aquestes matrius es poden obtenir com a productes de matrius elementals del tipus permutació, si cal un nombre parell de permutacions per transformar-les en la identitat, el determinant serà igual a 1; en el cas que en calga un nombre senar, el determinant serà -1.

Per acabar de trobar la fórmula que cerquem, anomenarem P_{ijk} la matriu permutació que té els uns en $(1,i)$, $(2,j)$ i $(3,k)$. Llavors, el determinant és

$$\begin{aligned}\det \mathsf{A} = a_{11}a_{22}a_{33}\det \mathsf{P}_{123} + a_{11}a_{23}a_{32}\det \mathsf{P}_{132} \\ + a_{12}a_{21}a_{33}\det \mathsf{P}_{213} + a_{12}a_{23}a_{31}\det \mathsf{P}_{231} \\ + a_{13}a_{21}a_{32}\det \mathsf{P}_{312} + a_{13}a_{22}a_{31}\det \mathsf{P}_{321}\end{aligned}$$

Podeu comprovar fàcilment que això és igual a

$$\det \mathsf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}$$

però el que ens interessa és generalitzar aquesta fórmula a matrius de qualsevol dimensió. Per a fer això necessitem escriure adequadament les permutacions.

Una permutació de n elements (per exemple, $1, 2, 3, \dots, n$) és una reordenació d'aquests elements, és a dir, una aplicació bijectiva del conjunt $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ en ell mateix. Per exemple, la permutació 1342 és l'aplicació

$$\sigma(1) = 1 \qquad \sigma(2) = 3 \qquad \sigma(3) = 4 \qquad \sigma(4) = 2$$

El *signe* (o *signatura*) de la permutació és 1 si el nombre de transposicions (intercanvi de dos elements) necessàries per a transformar-la en la permutació identitat és parell i -1 en cas contrari. Per exemple, si σ és la permutació 1342, el seu signe és 1 perquè fent un parell de transposicions la transformem en 1234:

$$1342 \to 1243 \to 1234$$

Naturalment, el signe de la permutació és igual al determinant de la matriu permutació corresponent. En el nostre exemple,

$$\operatorname{sg}(\sigma) = \begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix} = 1$$

Anomenem S_n el conjunt de totes les permutacions de $123\dots n$. Aquest conjunt té $n!$ elements[3] (hi ha dues permutacions de dos elements, sis permutacions de tres elements, 24 de quatre elements, etc.).

Doncs bé, si repetim amb una matriu $n \times n$, A, el que hem fet adés amb una matriu 3×3 obtindrem que

[3] Si coneixeu una mica la teoria de grups, sabreu que S_n és el grup simètric.

$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

és a dir, una suma de $n!$ termes: els productes de les entrades no nul·les d'aquestes matrius, amb els signes que corresponen a les permutacions corresponents: de la permutació

$$\det \mathsf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \quad \square \tag{24.6}$$

☞ En el cas d'una matriu 2×2, aquesta fórmula és la que ja coneixíem:

$$\begin{aligned} \det \mathsf{A} &= \operatorname{sg}(12) a_{11} a_{22} + \operatorname{sg}(21) a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

En molts textos es defineix el determinant amb la fórmula (24.6).

Lliçó 25. Aplicacions dels determinants

L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale.
Le nombre des équations & des inconnues étant n,
on trouvera le valeur de chaque inconnue en formant n fractions
dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a
de divers arrangements de n_choses différents
Gabriel Cramer

En aquesta lliçó (opcional) mostrem les aplicacions clàssiques dels determinants dins l'àlgebra lineal: els càlculs del rang i de la matriu inversa i la regla de Cramer.

25.1. Càlcul del rang d'una matriu

En aquest apartat, A és una matriu $m \times n$ (no necessàriament quadrada). Ja sabem que el rang de A és igual al nombre de files linealment independents i, al mateix temps, igual al nombre de columnes linealment independents. Per tant, si $\operatorname{rang} \mathsf{A} = r$, hi ha exactament r files linealment independents; si B és la submatriu de A que formen aquestes r files llavors,

$$\operatorname{rang} \mathsf{A} = \operatorname{rang} \mathsf{B} = r$$

D'altra banda, B té exactament r columnes linealment independents, així que si C és la submatriu que queda quan ens quedem només amb aquestes columnes,

$$\operatorname{rang} \mathsf{A} = \operatorname{rang} \mathsf{B} = \operatorname{rang} \mathsf{C} = r$$

Aquesta matriu C és quadrada, $r \times r$, i de rang r, de manera que C és invertible i $\det \mathsf{C} \neq 0$.

El que hem provat és que si el rang de A és r llavors, A té una submatriu quadrada $r \times r$ el determinant de la qual és no nul. I, evidentment, no hi pot haver cap altra matriu quadrada més gran que també tinga el determinant no nul, perquè llavors hi hauria almenys $r + 1$ files linealment independents.

Tot això vol dir que podem identificar el rang d'una matriu amb l'ordre de la matriu quadrada més gran que tinga el determinant no nul:

Propietat 25.1. (El rang d'una matriu)

El rang d'una matriu $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ coincideix amb l'ordre de la submatriu de A d'ordre màxim que té el determinant no nul.

EXEMPLE 25.1.

Calculeu el rang de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

El determinant d'aquesta matriu és

$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

De manera que el rang de A no pot ser 4. D'altra banda,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

així que el rang és 3. □

25.2. RESOLUCIÓ DE SISTEMES LINEALS: LA REGLA DE CRAMER

Quan un sistema lineal de n equacions i n incògnites és determinat es pot resoldre fent servir la *regla de Cramer*, que consisteix en una fórmula per a cada una de les incògnites. Aquestes fórmules comporten el càlcul de $n+1$ determinants d'ordre n, de manera que tenen poca utilitat pràctica (excepte en el cas de sistemes de dues o tres equacions, el nombre d'operacions que cal realitzar és grandíssim). Ara bé, les fórmules de Cramer són útils en algunes demostracions teòriques i, a més a més, permeten calcular alguna incògnita aïlladament (en algunes aplicacions, d'un determinat sistema només ens interessarà el valor d'alguna de les incògnites).

PROPIETAT 25.2. (REGLA DE CRAMER)

Si A és una matriu invertible i $\mathsf{A}(i)$ és la matriu que resulta de substituir la columna i de A pel vector $\vec{b}$, aleshores la solució del sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és

$$x_i = \frac{|\mathsf{A}(i)|}{|\mathsf{A}|}, \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{25.1}$$

Demostració: Si $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ aleshores,

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{a}_j$$

així que

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{A}(i) &= \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{i-1} & \vec{b} & \vec{a}_{i+1} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{i-1} & \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{a}_j & \vec{a}_{i+1} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} \\
&= \quad x_1 \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{i-1} & \vec{a}_1 & \vec{a}_{i+1} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} \\
&\quad + x_2 \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{i-1} & \vec{a}_2 & \vec{a}_{i+1} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} \\
&\quad \cdots \\
&\quad + x_i \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{i-1} & \vec{a}_i & \vec{a}_{i+1} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} \\
&\quad \cdots \\
&\quad + x_n \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{i-1} & \vec{a}_n & \vec{a}_{i+1} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} \\
&= x_1 0 + x_2 0 + \cdots \\
&\quad + x_i \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{i-1} & \vec{a}_i & \vec{a}_{i+1} & \cdots & \vec{a}_n\end{bmatrix} + \cdots + x_n 0 \\
&= x_i \det \mathsf{A}
\end{aligned}$$

De manera que

$$x_i = \frac{\det \mathsf{A}(i)}{\det \mathsf{A}} \quad \square$$

Exemple 25.2.

Resoleu el sistema lineal $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad \square$$

Si el sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és indeterminat i el rang A és k, encara podem resoldre'l fent servir la regla de Cramer: elegim una submatriu invertible de A d'ordre k, A_1. El sistema lineal que resulta de suprimir les files de $\begin{bmatrix}\mathsf{A} & \vec{b}\end{bmatrix}$ que no intervenen en A_1 té les mateixes solucions que $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ (perquè té el mateix nombre d'uns principals i la resta de files en són combinacions lineals). En aquest subsistema es poden elegir com a principals les incògnites corresponents a les columnes de A_1 i, passant les incògnites no principals al segon membre ens quedarà un sistema que es pot resoldre mitjançant la regla de Cramer.

EXEMPLE 25.3.

Resoleu el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + \ \ x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Com que els rangs de la matriu de coeficients i el de l'ampliada són els dos iguals a 2, el sistema és indeterminat. Elegim una submatriu de A que siga invertible i d'ordre 2. Per exemple, $\mathsf{A}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, que correspon a les dues primeres files i a les columnes primera i tercera de A. Per tant, suprimim la tercera equació

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

i aïllem les incògnites principals. El sistema que en resulta és:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 3 - x_2 \\ x_1 - x_3 &= 5 - x_2 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - x_2 \\ 5 - x_2 \end{bmatrix}$$

Resolent-lo per la regla de Cramer obtindrem:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 - x_2 & 1 \\ 5 - x_2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8 - 2x_2}{-2} = -4 - x_2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - x_2 \\ 1 & 5 - x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} = -1$$

així que la solució general és aquesta: $x_1 = -4 - \alpha, x_2 = \alpha, x_3 = -1.$ □

25.3. CÀLCUL DE LA INVERSA D'UNA MATRIU

DEFINICIÓ 25.1. (MATRIU DE COFACTORS) Si A és una matriu $n \times n$, la matriu *de cofactors* de A, que representarem com $\operatorname{cof} \mathsf{A}$, es defineix com la matriu formada substituint cada entrada de A pel seu cofactor, és a dir,

$$\operatorname{cof} \mathsf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots c_{2n} \\ \dots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots c_{nn} \end{bmatrix}$$

TEOREMA 25.3.

Si A *és una matriu invertible, llavors* $\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathsf{A}|}\left(\operatorname{cof}\mathsf{A}\right)^{\mathsf{T}}$

Demostració: Si $\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}\vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n\end{bmatrix}$ aleshores $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathrm{I}$, de manera que

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix}\vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n\end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

o, equivalentment,

$$\mathsf{A}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\dots\\0\end{bmatrix}, \quad \mathsf{A}\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\\dots\\0\end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathsf{A}\vec{x}_n = \begin{bmatrix}0\\0\\\dots\\1\end{bmatrix}$$

de manera que $\vec{x}_1$ és la solució del sistema $\mathsf{AX} = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{x}_2$ la del sistema $\mathsf{AX} = (0, 1, \dots, 0)$, etc. Aplicant-hi la regla de Cramer,

$$x_{11} = \frac{1}{\det\mathsf{A}}\begin{vmatrix}1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\dots & & & \\0 & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = \frac{1}{\det\mathsf{A}}\,|\mathsf{A}_{11}|$$

$$x_{21} = \frac{1}{\det\mathsf{A}}\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \dots & a_{1n}\\a_{21} & 1 & \dots & a_{2n}\\\dots & & & \\a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = -\frac{1}{\det\mathsf{A}}\,|\mathsf{A}_{12}|$$

i així successivament. □

EXEMPLE 25.4.

Justifiqueu que la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ és invertible i calculeu-ne la inversa.

La matriu A és invertible perquè $\det\mathsf{A} = -3$. La matriu inversa és

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathsf{A}}(\operatorname{cof}\mathsf{A})^{\mathsf{T}} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix} \quad \square$$

25.4. Resum

El rang d'una matriu

El rang d'una matriu $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ coincideix amb l'ordre de la submatriu de A d'ordre màxim que té el determinant no nul.

Regla de Cramer

Si A és una matriu invertible i $\mathsf{A}(i)$ és la matriu que resulta de substituir la columna i de A pel vector $\vec{b}$, aleshores la solució del sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és

$$x_i = \frac{|\mathsf{A}(i)|}{|\mathsf{A}|}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Càlcul de la matriu inversa

– La matriu de cofactors és $\operatorname{cof}\mathsf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$.

Si A és una matriu regular, llavors $\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathsf{A}|}(\operatorname{cof}\mathsf{A})^{\mathsf{T}}$.

25.5. Exercicis

Exercici 25.1. Calculeu el rang de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 648)

Exercici 25.2. Discutiu el sistema i, si és possible, apliqueu la regla de Cramer per a resoldre'l:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(solució: pàg. 648)

Exercici 25.3. Discutiu el sistema i, en els casos determinats, apliqueu la regla de Cramer per a resoldre'l:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 &= b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

(solució: pàg. 649)

Exercici 25.4. Fent servir els determinants, justifiqueu que la matriu següent, A, és invertible i calculeu la matriu inversa A^{-1}.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 650)

Exercici 25.5. **(Valors propis i vectors propis)** Trobeu els valors del paràmetre λ per als quals la matriu

$$\mathsf{A}_\lambda = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

no és invertible i calculeu l'espai nul de la matriu A_λ per a cadascun d'aquests valors.

(solució: pàg. 651)

Capítol 7

Diagonalització. Valors propis i vectors propis

Lliçó 26. Endomorfismes i matrius diagonalitzables **379**
26.1. Matrius diagonalitzables. Valors propis i vectors propis 379
26.1.1. Criteris de diagonalitzabilitat 384
26.2. Endomorfismes diagonalitzables 390
26.3. Resum 393
26.4. Exercicis 395
Lliçó 27. Diagonalització unitària. Matrius normals **398**
27.1. Reducció a una forma triangular 398
27.1.1. La factorització de Schur 400
27.2. Matrius diagonalitzables unitàriament 401
27.2.1. Diagonalització unitària de les matrius normals 402
27.2.2. Diagonalització ortogonal de les matrius simètriques reals 404
27.3. Resum 406
27.4. Exercicis 406
Lliçó 28. Aplicacions de la diagonalització **408**
28.1. Potències d'una matriu 408
28.2. Equacions en diferències (o recurrències) lineals . 409
28.2.1. Els nombres de Fibonacci 410
28.3. Resolució de sistemes lineals. Mètodes iteratius . 411
28.4. Equacions diferencials lineals 415
28.5. Formes quadràtiques 418
28.6. Reducció de còniques 419
28.7. Resum 422
28.8. Exercicis 423
Lliçó 29. La forma reduïda de Jordan **426**
29.1. Blocs de Jordan i cadenes de Jordan 426
29.2. Obtenció de la forma reduïda de Jordan 429
29.2.1. Exemples senzills 429

29.2.2. Suma directa dels subespais propis generalitzats 433
29.2.3. Nombre i longitud de les cadenes de Jordan 433
29.2.4. Càlcul de la base de Jordan 438
29.3. Resum 442
29.4. Exercicis 443
29.4.1. Polinomis anul·ladors 443
29.5. Apèndix: Demostració del teorema d'existència . . 445
29.5.1. Independència lineal de les cadenes de Jordan 445
29.5.2. Demostració de l'existència de la base de Jordan 446

LLIÇÓ 26. ENDOMORFISMES I MATRIUS DIAGONALITZABLES

Give me that eigenvalue.
That, particle factoring, and a spectral decomp
Tony Stark

Un *endomorfisme* de l'espai E és una aplicació lineal en la qual els espais inicial i el final són el mateix espai, E. Si E és de dimensió finita i f un endomorfisme de E llavors, la imatge d'un vector $\vec{v}$ respecte a la base $\mathcal{B}$ es pot calcular, com vàrem veure a la lliçó 23, com un producte matriu-vector, $f(\vec{v})_{\mathcal{B}} = \mathsf{A}\vec{v}_{\mathcal{B}}$ (A és la matriu $\mathsf{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$). Si canviem de base obtenim una expressió anàloga, amb una altra matriu, B, que representa l'endomorfisme referit a la nova base.
Al final d'aquella lliçó, ens preguntàvem per la *matriu més adequada* o per la *base més convenient* per representar l'endomorfisme.
En aquesta lliçó, comencem a respondre aquelles qüestions.

La qüestió que ens plantegem és aquesta: quina és la matriu *més adequada* (o la base *més convenient*) per representar un endomorfisme. El problema és que no hi ha una resposta única, a aquesta qüestió. Una resposta possible és aquesta: des del punt de vista de l'àlgebra, la matriu més adequada és una matriu diagonal, perquè tot és molt més fàcil, amb una matriu diagonal. Però, des del punt de vista de la geometria, segurament, la millor base és una base ortonormal.

En aquest capítol ens centrarem en la primera resposta: cercarem els endomorfismes que es poden representar amb una matriu diagonal. En altres paraules, si diem que dues matrius A i B són *semblants* quan representen el mateix endomorfisme, cercarem les matrius que són semblants a una matriu diagonal.

26.1. MATRIUS DIAGONALITZABLES. VALORS PROPIS I VECTORS PROPIS

☞ Diem que dues matrius quadrades A i B són *semblants* quan existeix una matriu invertible P tal que $\mathsf{B} = \mathsf{PAP}^{-1}$.

DEFINICIÓ 26.1.

Una matriu quadrada $n \times n$, A, és *diagonalitzable* si és semblant a una matriu diagonal, és a dir, si existeix una matriu invertible, P, i una matriu diagonal,
$\mathsf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, tals que $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$.

Si passa això, com que la matriu P és invertible, el conjunt de les seues columnes, $\mathcal{B} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n\}$ és una base de $\mathbb{K}^n$. A més a més, la relació $\mathsf{A} =$

PDP^{-1}, la podem escriure com $\mathsf{AP} = \mathsf{PD}$. Això, columna a columna, vol dir que

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

o bé $\mathsf{A}\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1, \quad \mathsf{A}\vec{p}_2 = \lambda_2\vec{p}_2, \quad \cdots, \quad \mathsf{A}\vec{p}_n = \lambda_n\vec{p}_n$.

Així que la matriu A és diagonalitzable quan hi ha una base formada per vectors que compleixen aquestes igualtats. Aquests vectors els anomenem *vectors propis* de la matriu A.

Definició 26.2. (Vectors propis i valors propis)

Siga A una matriu quadrada. El vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ és un *vector propi* de la matriu A, associat al *valor propi* λ, si $\mathsf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

☞ Per diagonalitzar una matriu necessitem trobar una base de l'espai $\mathbb{K}^n$ formada per vectors propis de la matriu.

☞ Tot i que $\mathsf{A}\vec{0} = \vec{0}$, el vector $\vec{0}$ no és un vector propi de A, perquè en la definició s'exigeix que $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Vegem com hem de fer per calcular els valors propis i els vectors propis. Perquè $\vec{x}$ siga un vector propi de la matriu $n \times n$ A, associat al valor propi λ, han de passar dues coses:

1. $\mathsf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$
2. $\vec{x} \neq 0$

La primera condició podem reescriure-la com $\mathsf{A}\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0$, o bé, $(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})\vec{x} = 0$, de manera que $\vec{x}$ és solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni, és a dir, $\vec{x}$ ha de ser un element de l'espai nul de la matriu $\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I}$.

Definició 26.3.

Si λ és un valor propi de la matriu A anomenem *espai propi* o (millor) *subespai propi* associat a λ l'espai nul de la matriu $\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I}$. El representarem com $E_\lambda(\mathsf{A})$:

$$E_\lambda(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}\,(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})$$

☞ Els vectors propis associats a λ són tots els vectors de $E_\lambda(\mathsf{A})$ tret del vector zero.

D'altra banda, perquè es complisca la segona condició, perquè el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ tinga alguna solució no nul·la, ha d'haver-hi algun vector distint de zero en l'espai $E_\lambda(\mathsf{A})$, és a dir, cal que la matriu $\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I}$ *no siga* invertible, la qual cosa significa que $\mathrm{rang}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I}) \leq n$ o que $\det(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I}) = 0$. Aquest determinant és un polinomi en λ de grau n (perquè restem λ a la diagonal de A). Per tant, els valors propis són les arrels d'una equació de grau n.

Definicions 26.4. (Polinomi característic i equació característica)

El *polinomi característic* de la matriu A és $\det(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})$. L'*equació característica* de la matriu A és $\det(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I}) = 0$.

☞ Els valors propis de la matriu A són les arrels de l'equació característica.

A més a més, si dues matrius són semblants, llavors tenen els valors propis, perquè

Propietat 26.1.

Si les matrius A i B són semblants, llavors les dues matrius tenen el mateix polinomi característic.

Demostració: Si les matrius són semblants, existeix una matriu invertible, P, tal que $\mathsf{A} = \mathsf{PBP}^{-1}$. Llavors, el polinomi característic de A és

$$\begin{aligned}\det(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I}) &= \det(\mathsf{PBP}^{-1}-\lambda\mathsf{PIP}^{-1}) = \det\left(\mathsf{P}(\mathsf{B}-\lambda\mathrm{I})\mathsf{P}^{-1}\right)\\ &= \det\mathsf{P}\det(\mathsf{B}-\lambda\mathrm{I})\det\mathsf{P}^{-1} = \det(\mathsf{B}-\lambda\mathrm{I}) \quad \square\end{aligned}$$

Exemple 26.1.

Calculeu els valors i els vectors propis i estudieu la diagonalitzabilitat de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix}$.

En aquest cas, l'equació característica,

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}-4-\lambda & 6\\ -3 & 5-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\ (-4-\lambda)(5-\lambda)-6(-3) &= 0\\ \lambda^2-\lambda-2 &= 0\end{aligned}$$

(una equació de segon grau).

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 2$. Ara calcularem els subespais propis corresponents:

- El subespai propi corresponent al valor propi λ_1 és l'espai $\mathrm{Nul}\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -3 & 6\end{bmatrix} = \langle(2,1)\rangle$.
- El subespai propi corresponent a $\lambda_2 = 2$ és $\mathrm{Nul}\begin{bmatrix}-6 & 6\\ -3 & 3\end{bmatrix} = \langle(1,1)\rangle$.

Com que els vectors $(2,1)$ i $(1,1)$ són linealment independents, el conjunt $\{(2,1),(1,1)\}$ és una base de $\mathbb{K}^2$ formada per vectors propis de la matriu A: *la matriu* A *és diagonalitzable*:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}} \qquad \square$$

En l'exemple següent veurem que el problema de la diagonalització és essencialment distint si treballem només amb matrius reals o si ho fem amb matrius complexes.

Exemple 26.2.

Calculeu els valors i els vectors propis i estudieu la diagonalitzabilitat de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) considerant-la com una matriu real o (b) considerant-la com una matriu complexa.

El polinomi característic d'aquesta matriu és

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

de manera que, si la considerem com una matriu real, A no és diagonalitzable, perquè no té cap valor propi. En canvi, com a matriu complexa té dos valors propis $(\mathrm{i}, -\mathrm{i})$, els subespais propis associats als quals són

$$\mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} = \langle(-\mathrm{i},1)\rangle \qquad \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{bmatrix} = \langle(\mathrm{i},1)\rangle$$

Per tant, com a matriu complexa, A és diagonalitzable i

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \square$$

El problema de la diagonalització és distint en els casos real i complex, perquè un polinomi (real o complex) sempre té arrels complexes, però les arrels d'un polinomi real poden no ser totes reals. Per tant, hi ha matrius reals amb algun valor propi no real.

☞ Una matriu amb entrades reals pot ser diagonalitzable com a matriu complexa, però no ser-ho com a matriu real, perquè algun valor propi no és real.

En els dos exemples següents, les matrius tenen tots els valors propis reals; però una és diagonalitzable i l'altra no.

EXEMPLE 26.3.

Calculeu els valors propis i els vectors propis de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ i estudieu si és diagonalitzable.

El polinomi característic de la matriu A és

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & -6 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & -6 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2+\lambda+\lambda^2)$$
$$= (1-\lambda)^2(-2-\lambda)$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$.

Els subespais propis són

$$E_{\lambda_1}(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,1,0), (-1,0,1) \rangle$$

$$E_{\lambda_2}(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}(\mathsf{A}+2\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-2,1,1) \rangle$$

Com que els tres vectors propis $(0,1,0)$, $(-1,0,1)$ i $(-2,1,1)$ són linealment independents, la matriu A és diagonalitzable i

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}} \qquad \square$$

EXEMPLE 26.4.

Calculeu els valors propis i els vectors propis de la matriu $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i estudieu si és diagonalitzable.

El polinomi característic de la matriu B és

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 3 & -2-\lambda & -6 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2)$$
$$= (1-\lambda)^2(-2-\lambda)$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$.

Els subespais propis són

$$E_{\lambda_1}(\mathsf{B}) = \mathrm{Nul}(\mathsf{B} - 1\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (2,0,1) \rangle$$

$$E_{\lambda_2}(\mathsf{B}) = \mathrm{Nul}(\mathsf{B} + 2\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,1,0) \rangle$$

Tots els valors propis d'aquesta matriu són múltiples de $(2,0,1)$ o de $(0,1,0)$, així que no és possible construir una base de $\mathbb{K}^3$ formada completament per vectors propis. La matriu no és diagonalitzable. $\square$

26.1.1. Criteris de diagonalitzabilitat

En els dos darrers exemples, el polinomi característic és el mateix, $(1-\lambda)^2(-2-\lambda)$, i, en conseqüència, els valors propis també són iguals; tot i això, una de les matrius és diagonalitzable i l'altra no ho és. El fet que el valor propi, $\lambda_1 = 1$, siga arrel doble del polinomi característic sembla exigir que el subespai propi E_{λ_1} tinga dimensió dos (com passa a l'exemple 26.3 però no al 26.4).

Definició 26.5. (Multiplicitat algèbrica i multiplicitat geomètrica)

Si λ és un valor propi de la matriu A,

- La *multiplicitat algèbrica* de λ, $\mathrm{malg}(\lambda, \mathsf{A})$, és la multiplicitat de λ com a arrel del polinomi característic.
- La *multiplicitat geomètrica* de λ, $\mathrm{mgeo}(\lambda, \mathsf{A})$, és la dimensió del subespai propi $E_\lambda(\mathsf{A})$.

Exemple 26.5.

Determineu les multiplicitats algèbriques i geomètriques dels valors propis als exemples 26.3 i 26.4.

En tots dos casos, el polinomi característic és $(1-\lambda)^2(-2-\lambda)$. Per tant, les multiplicitats algèbriques són aquestes:

$$\begin{aligned} \mathrm{malg}(1, \mathsf{A}) &= 2 & \mathrm{malg}(1, \mathsf{B}) &= 2 \\ \mathrm{malg}(-2, \mathsf{A}) &= 1 & \mathrm{malg}(-2, \mathsf{B}) &= 1 \end{aligned}$$

Les multiplicitats geomètriques són

$$\begin{aligned} \mathrm{mgeo}(1, \mathsf{A}) &= \dim E_1(\mathsf{A}) = 2 & \mathrm{mgeo}(1, \mathsf{B}) &= \dim E_1(\mathsf{B}) = 1 \\ \mathrm{mgeo}(-2, \mathsf{A}) &= \dim E_{-2}(\mathsf{A}) = 1 & \mathrm{mgeo}(-2, \mathsf{B}) &= \dim E_{-2}(\mathsf{B}) = 1 \end{aligned}$$ $\square$

Un altre fet clau de la diagonalització és que unint les bases dels subespais propis volem obtenir una base de $\mathbb{K}^n$, així que caldrà assegurar que aquestes bases són independents. Això és el que provarem tot seguit.

PROPIETAT 26.2.

La suma dels subespais propis de A *és directa.*

Demostració: Si λ_1, λ_2, ..., λ_r, són els valors propis distints de la matriu A, el que volem provar és que la suma $E_{\lambda_1}(\mathsf{A}) + E_{\lambda_2}(\mathsf{A}) + \cdots + E_{\lambda_r}(\mathsf{A})$ és directa, és a dir, que si $\vec{x}_1 \in E_{\lambda_1}(\mathsf{A})$, $\vec{x}_2 \in E_{\lambda_2}(\mathsf{A})$, ..., $\vec{x}_r \in E_{\lambda_r}(\mathsf{A})$, i $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r = \vec{0}$, llavors, $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \cdots = \vec{x}_r = \vec{0}$.

Per provar-ho, multipliquem l'expressió $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r = \vec{0}$ per A, A^2, ..., A^{r-1}:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r &= \vec{0} \\ \mathsf{A}\vec{x}_1 + \mathsf{A}\vec{x}_2 + \cdots + \mathsf{A}\vec{x}_r &= \vec{0} \\ \mathsf{A}^2\vec{x}_1 + \mathsf{A}^2\vec{x}_2 + \cdots + \mathsf{A}^2\vec{x}_r &= \vec{0} \\ &\cdots \\ \mathsf{A}^{r-1}\vec{x}_1 + \mathsf{A}^{r-1}\vec{x}_2 + \cdots + \mathsf{A}^{r-1}\vec{x}_r &= \vec{0} \end{aligned}$$

Però, com que els vectors són propis, això equival a

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_r &= \vec{0} \\ \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_r\vec{x}_r &= \vec{0} \\ \lambda_1^2\vec{x}_1 + \lambda_2^2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_r^2\vec{x}_r &= \vec{0} \\ &\cdots \\ \lambda_1^{r-1}\vec{x}_1 + \lambda_2^{r-1}\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_r^{r-1}\vec{x}_r &= \vec{0} \end{aligned}$$

Matricialment,

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_r \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \cdots & & & & \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix}}_{\Lambda} = \mathrm{O}$$

La matriu Λ és invertible, perquè és la matriu de Vandermonde amb paràmetres, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, distints. Així que

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_r \end{bmatrix} = \mathrm{O} \quad \square$$

☞ Com a conseqüència d'aquesta propietat,

$$\dim\left(E_{\lambda_1}(\mathsf{A}) + E_{\lambda_2}(\mathsf{A}) + \cdots + E_{\lambda_r}(\mathsf{A})\right) = \dim E_{\lambda_1}(\mathsf{A}) + \dim E_{\lambda_2}(\mathsf{A}) + \cdots + \dim E_{\lambda_r}(\mathsf{A})$$

i el que ha de passar, perquè la matriu A siga diagonalitzable, és que qualsevol vector siga combinació lineal dels vectors propis, és a dir, que aquesta suma directa òmpliga tot l'espai ($\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1}(\mathsf{A}) \oplus E_{\lambda_2}(\mathsf{A}) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(\mathsf{A})$). Per tant,

PROPIETAT 26.3. (PRIMERA CARACTERITZACIÓ DE LA DIAGONALITZABILITAT)

> *Una condició necessària i suficient perquè la matriu $n \times n$ A siga diagonalitzable (com a matriu complexa) és que la suma de les multiplicitats geomètriques de tots els valors propis siga n.*
> *Una condició necessària i suficient perquè la matriu real $n \times n$ A siga diagonalitzable (amb matrius reals) és que tots els valors propis siguen reals i la suma de totes les multiplicitats geomètriques siga n.* □

La matriu A de l'exemple 26.3 és diagonalitzable perquè $\mathrm{mgeo}(1, \mathsf{A}) + \mathrm{mgeo}(-2, \mathsf{A}) = 3$. En canvi, en el cas de la matriu B de l'exemple 26.4, $\mathrm{mgeo}(1, \mathsf{B}) + \mathrm{mgeo}(-2, \mathsf{B}) = 2$ i per això, B no és diagonalitzable.

D'altra banda, també es pot provar que les multiplicitats geomètriques mai no són més grans que les multiplicitats algèbriques:

PROPIETAT 26.4.

> *Si λ_1 és un valor propi de la matriu A llavors,* $1 \le \mathrm{mgeo}(\lambda_1) \le \mathrm{malg}(\lambda_1)$.

Demostració: Que les multiplicitats són majors que zero és obvi, perquè hi ha algun vector propi. D'altra banda, com que $E_{\lambda_1}(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})$ i $\mathbb{K}^n = \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I}) \oplus \mathrm{Fil}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})$, podem construir una base de $\mathbb{R}^n$ fent la unió d'una base de l'espai nul i una altra de l'espai fila. Si la multiplicitat geomètrica de λ_1 és m,

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m}_{\text{Base de } \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})} , \underbrace{\vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_n}_{\text{Base de } \mathrm{Fil}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})} \}$$

Aleshores, la matriu A és semblant a

$$\mathsf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \mathsf{B} & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right]$$

Així que el polinomi característic és

$$\det(\mathsf{A}' - \lambda \mathrm{I}) = \det \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 - \lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \mathsf{B} - \lambda \mathrm{I} & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right] = (\lambda_1 - \lambda)^m \det(\mathsf{B} - \lambda \mathrm{I})$$

i la multiplicitat algebraica de λ_1 és, almenys, igual a m. □

Definició 26.6.

Direm que un valor propi de la matriu A, λ, és *geomètricament complet* (o *semisimple*) si $\text{malg}(\lambda, \mathsf{A}) = \text{mgeo}(\lambda, \mathsf{A})$.
Els valors propis que no són geomètricament complets s'anomenen *defectius.*

Propietat 26.5.

Una condició necessària perquè la matriu $n \times n$ A siga diagonalitzable és que tots els valors propis de A siguen geomètricament complets. □

Aquesta condició també és suficient en el cas complex, perquè la suma de les multiplicitats algèbriques sempre és igual a l'ordre de la matriu. En el cas real, cal afegir també la condició que els valors propis siguen reals.

Teorema 26.6. (Segona caracterització de la diagonalitzabilitat)

- *La matriu quadrada complexa* A *és diagonalitzable si i només si tots els valors propis de* A *són geomètricament complets.*
- *La matriu quadrada real* A *és diagonalitzable (amb matrius reals) si i només si tots els valors propis de* A *són reals i geomètricament complets.*

Demostració: Segons el teorema fonamental de l'àlgebra, si $p(x)$ és un polinomi complex de grau n llavors, la suma de les multiplicitats de totes les arrels de $p(x)$ és igual a n; això, en el nostre context, significa que la suma de les multiplicitats algèbriques de tots els valors propis d'una matriu $n \times n$ és igual a n.

Així que, si tots els valors propis són geomètricament complets aleshores, la suma de les multiplicitats geomètriques també és igual a n i la suma directa dels subespais propis és tot l'espai $\mathbb{C}^n$. □

Segons aquesta propietat, per provar la diagonalitzabilitat hem de comprovar que tots els valors propis compleixen la igualtat $\text{mgeo}(\lambda, \mathsf{A}) = \text{malg}(\lambda, \mathsf{A})$; tot i això, quan la multiplicitat algèbrica d'un valor propi és igual a 1 aquesta propietat es compleix automàticament.

El quadre següent mostra el procediment pràctic per estudiar la diagonalitzabilitat.

Estudi de la diagonalitzabilitat d'una matriu A

1. Resoleu l'equació característica $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$.

   Les arrels d'aquesta equació són els valors propis.

   Les multiplicitats d'aquestes arrels són les multiplicitats algèbriques corresponents.

   ☞ En el cas real: si algun valor propi no és real llavors, la matriu A no és diagonalitzable.

   ☞ Si les multiplicitats algèbriques de tots els valors propis són iguals a 1 llavors, la matriu és diagonalitzable.

2. Calculeu les dimensions dels subespais propis $E_\lambda(\mathsf{A})$.

   ☞ Aquestes dimensions són les multiplicitats geomètriques dels valors propis.

3. Estudieu si cada valor propi amb multiplicitat algèbrica més gran que 1 és geomètricament complet, és a dir, si les multiplicitats algèbrica i geomètrica coincideixen.

   ☞ Si és així, la matriu és diagonalitzable; en cas contrari, no ho és.

Diagonalització d'una matriu A

En cas que la matriu siga diagonalitzable,

4. La matriu D és la diagonal dels valors propis,

$$\mathsf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

   (repetits tantes vegades com indique la seua multiplicitat).

5. Cerqueu una base de cada subespai propi.

6. Construïu la base $\mathcal{B}$ com a unió de les bases que heu obtingut, $\mathcal{B} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$, i la matriu $\mathsf{P} = \begin{bmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{bmatrix}$

   ☞ Pareu compte que l'ordenació dels vectors i els valors propis ha de ser coherent: cada $\vec{p}_i$ ha de ser un vector propi associat al valor propi λ_i.

Exemple 26.6.

Estudieu la diagonalitzabilitat amb matrius reals de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'equació característica és

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -\lambda(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -\lambda(-1-\lambda)\Big((1-\lambda)^2+4\Big) = 0$$

Així que els valors propis són $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ $\lambda_3 = 1 + 2\mathrm{i}$ i $\lambda_4 = 1 - 2\mathrm{i}$. Tots els valors propis tenen multiplicitat algèbrica 1.

Aquesta matriu no és diagonalitzable (amb matrius reals) perquè no tots els valors propis són reals. □

Exemple 26.7.

Estudieu la diagonalitzabilitat amb matrius complexes de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Com hem vist a l'exemple anterior, els valors propis són $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ $\lambda_3 = 1 + 2\mathrm{i}$ i $\lambda_4 = 1 - 2\mathrm{i}$ i totes les multiplicitats geomètriques són iguals a 1.

Així que aquesta matriu és diagonalitzable. Si volem diagonalitzar-la, hem de calcular una base de vectors propis. Els espais propis són

$$\begin{aligned} E_0(\mathsf{A}) &= \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 0\mathrm{I}) \\ &= \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,0,1,0) \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_{-2}(\mathsf{A}) &= \mathrm{Nul}(\mathsf{A}+1\mathrm{I}) \\
&= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,0,1,1)\rangle \\
E_{1+2\mathrm{i}}(\mathsf{A}) &= \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-(1+2\mathrm{i})\mathrm{I}) \\
&= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -2\mathrm{i} & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2\mathrm{i} \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \langle (-\mathrm{i},1,0,0)\rangle \\
E_{1-2\mathrm{i}}(\mathsf{A}) &= \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-(1-2\mathrm{i})\mathrm{I}) \\
&= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 2\mathrm{i} & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2+2\mathrm{i} \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (\mathrm{i},1,0,0)\rangle
\end{aligned}
$$

Podem construir una base formada per vectors propis elegint-ne un en cada espai propi. Per exemple, $\mathcal{B} = \{(0,0,1,0),(0,0,1,1),(-\mathrm{i},1,0,0),(\mathrm{i},1,0,0)\}$, i la matriu A es pot factoritzar d'aquesta manera:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mathrm{i} \end{bmatrix}}_{\mathsf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}} \qquad \square
$$

26.2. Endomorfismes diagonalitzables

Si E és un espai vectorial, un *endomorfisme* és una aplicació lineal $f\colon E \longrightarrow E$. Els valors propis i els vectors propis de l'endomorfisme f es defineixen de manera similar als valors propis i els vectors propis d'una matriu: el vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ és un *vector propi* de l'endomorfisme f, associat al *valor propi* λ, si $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Si E és de dimensió finita, els valors propis de f són els mateixos que el de les matrius associades a f.

DEFINICIÓ 26.7.

L'endomorfisme f és *diagonalitzable* si existeix una base de E formada per vectors propis de f.

Si E és un espai de dimensió finita i un endomorfisme de E, f, és diagonalitzable llavors, qualsevol de les matrius que el representen és també diagonalitzable; perquè, si $\mathcal{B}_1$ és una base de E i A la matriu de f respecte a la base $\mathcal{B}_1$ ($\mathsf{A} = \mathsf{M}_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$) llavors, si f és diagonalitzable, hi haurà una altra base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ tal que la matriu $\mathsf{D} = \mathsf{M}_{f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}$ serà diagonal, ja que

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{v}_1) = \lambda_1\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n \\ f(\vec{v}_2) = \lambda_2\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n \\ \qquad \cdots \\ f(\vec{v}_n) = \lambda_n\vec{v}_n = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n \end{array}\right] \Longrightarrow \mathsf{M}_{f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Llavors, si P és la matriu de canvi de base $\mathsf{P} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$, tindrem que $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$, la qual cosa significa que la matriu A és diagonalitzable.

De manera semblant es prova la propietat recíproca: si A és la matriu associada a l'endomorfisme f respecte a alguna base, i A és diagonalitzable llavors, l'endomorfisme f és diagonalitzable.

☞ Un endomorfisme en l'espai de dimensió finita E és diagonalitzable si i només si, donada una base qualsevol, $\mathcal{B}$, la matriu $\mathsf{A} = \mathsf{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ és diagonalitzable.

A més, els valors propis de la matriu A coincideixen els valors propis de l'endomorfisme f.

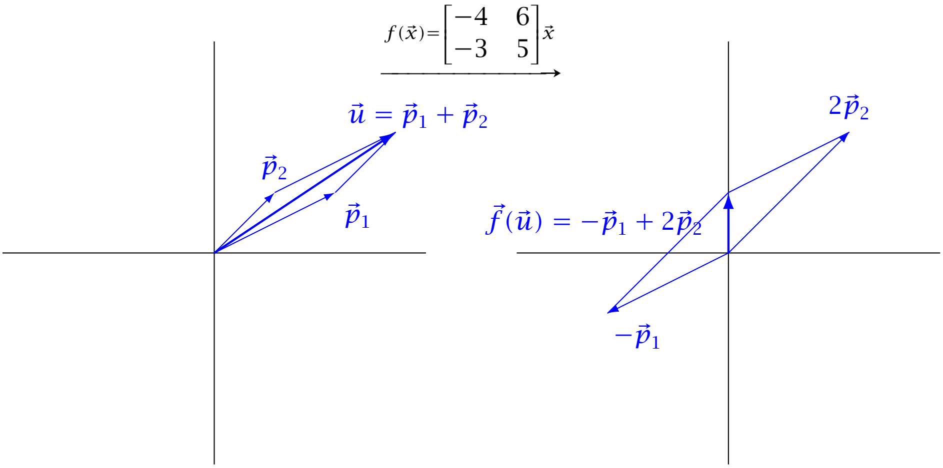
Si l'endomorfisme f, en l'espai de dimensió finita E, és diagonalitzable llavors, les imatges de qualsevol vector referit a una base de vectors propis es calculen simplement escalant cada vector propi en la mesura del valor propi corresponent:

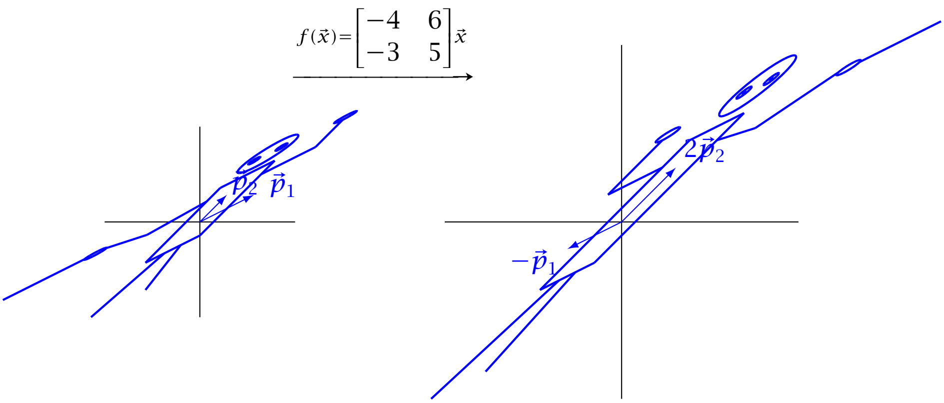
$$f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n) = \alpha_1\lambda_1\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\vec{v}_n$$

Així, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ (la matriu de l'exemple 26.1) i $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$), com que els valors propis són -1 i 2 i els subespais propis, $E_{-1} = \langle (2,1) \rangle$ i $E_2 = \langle (1,1) \rangle$,

$$f(\alpha_1(2,1) + \alpha_2(1,1)) = -1\alpha_1(2,1) + 2\alpha_2(1,1)$$

Geomètricament, l'orientació del vector $(2,1)$ s'inverteix i el vector $(1,1)$ es duplica, així que les imatges canvien de sentit en la direcció $(2,1)$ i es fan el doble de llargues en la direcció $(1,1)$.





Exemple 26.8.

Demostreu que l'endomorfisme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_1[x] \\ a+bx &\rightsquigarrow f(a+bx)=(5a-6b)+(3a-4b)x \end{aligned}$$

és diagonalitzable i trobeu una base $\mathcal{B}$ tal que $\mathsf{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ siga diagonal.

Primer de tot, cercarem la matriu de f respecte a la base canònica de $\mathbb{R}_1[x]$, $C(\mathbb{R}_1[x])=\{1,x\}$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 5+3x \\ f(x) &= -6-4x \end{aligned} \Longrightarrow \mathsf{A}=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$

L'endomorfisme f serà diagonalitzable si ho és la matriu A. L'equació característica d'aquesta matriu és

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

així que els valors propis són -1 i 2. Com que la multiplicitat algèbrica de tots dos és igual a 1, la matriu A (i l'endomorfisme f) és diagonalitzable.

Els espais propis de la matriu A són

$$E_{-1}(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 5+1 & -6 \\ 3 & -4+1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,1) \rangle$$

$$E_{2}(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 5-2 & -6 \\ 3 & -4-2 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (2,1) \rangle$$

Això vol dir que

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Però ara no ens interessa la diagonalització de la matriu A, sinó la de l'endomorfisme f. Que els vectors $(1,1)$ i $(2,1)$ siguen vectors propis de la matriu A, associats als valors propis -1 i 2, vol dir que els polinomis $p_1(x) = 1 + x$ i $p_2(x) = 2 + x$ són vectors propis de l'endomorfisme f, associats als valors propis -1 i 2. Per tant, $\mathcal{B} = \{1 + x, 2 + x\}$ és una base de $\mathbb{R}_1[x]$ tal que

$$f(1+x) = -1(1+x), \qquad f(2+x) = 2(2+x) \quad \square$$

26.3. Resum

Matrius diagonalitzables

- Les matrius A i B són *semblants* si hi ha una matriu invertible P tal que $\mathsf{A} = \mathsf{PBP}^{-1}$.
- Una matriu $n \times n$ A és *diagonalitzable* si és semblant a una matriu diagonal.

  ☞ A és *diagonalitzable* $\iff \mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$, $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Valors, vectors i subespais propis

- $\vec{x}$ és un *vector propi* de A associat al *valor propi* λ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ i $\mathsf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

  ☞ A és diagonalitzable si i només si hi ha una base de E formada per vectors propis de A.
- El *subespai propi* (o l'*espai propi*) de A associat a λ és $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})$.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

L'equació característica

- L'*equació característica* de A és $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$.

  ☞ Els valors propis són les arrels de l'equació característica

  .

- *Multiplicitat algèbrica* de λ: multiplicitat de λ com a arrel de l'equació característica.
- *Multiplicitat geomètrica* de λ: $\dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})$.
- Les multiplicitats algèbriques mai no són més petites que les geomètriques:

$$0 < \mathrm{mgeo}(\lambda) \leq \mathrm{malg}(\lambda), \ \forall \lambda \in \sigma(\mathsf{A})$$

- Un valor propi λ és *geomètricament complet* (o *semisimple*) si $\mathrm{mgeo}(\lambda) = \mathrm{malg}(\lambda)$.

Criteris de diagonalitzabilitat

Cas complex: A és diagonalitzable si i només si

— Tots els valors propis són geomètricament complets.

Cas real: A és diagonalitzable si i només si

— Tots els valors propis *són reals* i geomètricament complets.

Diagonalització

Estudi de la diagonalitzabilitat

1. Resoleu l'equació característica $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$.
   - Les arrels d'aquesta equació són els valors propis.
   - Les multiplicitats d'aquestes arrels són les multiplicitats algèbriques.

   ☞ **en el cas real**, si algun valor propi no és real llavors, la matriu A no és diagonalitzable. □
2. Si les multiplicitats algèbriques de tots els valors propis són iguals a 1 llavors, la matriu és diagonalitzable. □
3. Calculeu les multiplicitats geomètriques:

$$\mathrm{mgeo}\,\lambda_i, \mathsf{A}) = \dim E_{\lambda_i}(\mathsf{A}) = n - \mathrm{rang}(\mathsf{A} - \lambda_i \mathrm{I})$$

4. Si les multiplicitats algèbriques de tots els valors propis són iguals a les multiplicitats geomètriques la matriu és diagonalitzable;

   en cas contrari, la matriu no és diagonalitzable. □

$(\cdots)$

(···)

Diagonalització de la matriu
En cas que la matriu siga diagonalitzable,

5. La matriu D és la diagonal dels valors propis, $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
   (repetits tantes vegades com indique la seua multiplicitat).
6. Cerqueu una base de cada subespai propi.
7. Construïu la base $\mathcal{B}$ com a unió de les bases que heu obtingut, $\mathcal{B} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$,
   i la matriu $\mathsf{P} = \begin{bmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \cdots & \vec{p}_n \end{bmatrix}$.

   ☞ Ordeneu els vectors i els valors propis de forma coherent: cada $\vec{p}_i$ ha de ser un vector propi associat al valor propi λ_i.

Endomorfismes diagonalitzables

- $\vec{v}$ és un *vector propi* de f associat al *valor propi* λ si $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
- Un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ és *diagonalitzable* si hi ha una base de E formada per vectors propis de f.
- Si $\mathsf{A} = \mathsf{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ és la matriu de f respecte a una base $\mathcal{B}$,
  f és diagonalitzable si i només si A és diagonalitzable.

  ☞ Els valors propis de f són iguals als valors propis de A.

26.4. Exercicis

Matrius diagonalitzables

Exercici 26.1. Estudieu si són diagonalitzables les matrius

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -9 & -7 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

En cas que ho siguen, diagonalitzeu-les.

(solució: pàg. 652)

Exercici 26.2. Estudieu si les matrius

$$\text{(a)} \quad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)} \quad \mathsf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

són diagonalitzables. En cas que ho siguen, diagonalitzeu-les.

(solució: pàg. 652)

Exercici 26.3. Determineu per a quins valors del paràmetre a és diagonalitzable la matriu real

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & -a & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 654)

Exercici 26.4. Proveu que si la matriu complexa $n \times n$ A té n valors propis distints, llavors aquesta matriu és diagonalitzable.

(solució: pàg. 655)

Exercici 26.5. Determineu per a quins valors del paràmetre a és diagonalitzable la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

Diagonalitzeu-la en el cas $a = 0$.

(solució: pàg. 656)

Exercici 26.6. Proveu que els valors propis d'una matriu triangular són els elements de la diagonal principal d'aquesta matriu.

(solució: pàg. 657)

Exercici 26.7. Proveu que la matriu $n \times n$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

és diagonalitzable i trobeu dues matrius P, invertible, i D, diagonal, de manera que $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$ (podeu *inspirar-vos* en un exercici anterior).

(solució: pàg. 657)

Exercici 26.8. Una matriu *escalar* és una matriu diagonal amb totes les entrades diagonals iguals, és a dir, una matriu de la forma $a\mathrm{I}$.

Proveu que les úniques matrius diagonalitzables que tenen només un valor propi són les matrius escalars.

(solució: pàg. 658)

Endomorfismes diagonalitzables

Exercici 26.9. Estudieu si són diagonalitzables els endomorfismes de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ següents:

(a) $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -4x_1 + 2x_2)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1 + ax_2, ax_2)$ (segons els valors de $a \in \mathbb{R}$)

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3)$

(d) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 3x_2 - 9x_3, 5x_2 + 18x_3, -2x_2 - 7x_3)$

(e) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 5x_2 + 6x_3, -3x_2 + 2x_3, 5x_3)$

(f) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, 5x_3)$

(solució: pàg. 658)

Exercici 26.10. Estudieu si els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (-2x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) \\
g(x_1, x_2, x_3) &= (-2x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_3)
\end{aligned}
$$

són diagonalitzables. En cas que ho siguen, trobeu una base de vectors propis.
(solució: pàg. 661)

Exercici 26.11. Estudieu si l'endomorfisme de l'espai $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definit per $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A} + \mathsf{A}^\mathsf{T}$ és diagonalitzable. En cas que ho siga, trobeu una base de vectors propis.
(solució: pàg. 662)

Exercici 26.12. En aquest exercici trobem un endomorfisme diagonalitzable en un espai de dimensió infinita.

(a) Demostreu que l'endomorfisme de $\mathbb{K}_3[x]$ $f_3(p(x)) = p(x) + xp'(x) + p''(x)$ és diagonalitzable i trobeu una base de $\mathbb{K}_3[x]$ per a la qual la matriu de f és diagonal.

(b) Demostreu que l'endomorfisme de $\mathbb{K}_n[x]$ $f_n(p(x)) = p(x) + xp'(x) + p''(x)$ és diagonalitzable.

(c) Demostreu que l'endomorfisme de $\mathbb{K}[x]$ $f(p(x)) = p(x) + xp'(x) + p''(x)$ és diagonalitzable.

(solució: pàg. 662)

Lliçó 27. Diagonalització unitària. Matrius normals

Ἀγεωμέτρητος μηδείς εἰσίτω
(Que no hi entre ningú que no sàpiga geometria)
Frontispici de l'Acadèmia de Plató

En aquesta lliçó provarem que les matrius hermítiques, les antihermítiques i les unitàries són diagonalitzables unitàriament, és a dir, que qualsevol matriu d'aquests tipus, A, es pot factoritzar en la forma $A = UDU^*$, on D és una matriu diagonal i la matriu U és unitària. Dit d'una altra manera, existeix una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$ formada per vectors propis de A.
En particular, si la matriu A és real i simètrica, podrem escriure-la com $A = PDP^T$, amb D diagonal i P és ortogonal.
Les matrius que es poden diagonalitzar unitàriament són les matrius normals.

A la lliçó anterior hem vist que no totes les matrius són diagonalitzables. Ara començarem provant que el que sí que passa, amb qualsevol matriu, és que és semblant a una matriu triangular. De fet, qualsevol matriu es pot factoritzar en la forma $A = UTU^*$, on U és unitària i, T, triangular superior. Això és el que es coneix com *factorització de Schur*.

Si comparem les dues possibilitats, la diagonalització aporta l'avantatge de trobar una matriu diagonal semblant a A, mentre que la triangulació de Schur només ens garanteix una matriu semblant a A que és triangular; però, a la factorització de Schur la matriu de pas és unitària, així que l'endomorfisme $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ té una matriu triangular respecte a una base ortonormal.

☞ Si diagonalitzem la matriu A obtenim una base respecte a la qual la matriu de f és diagonal; si hi fem una factorització de Schur, la matriu no és tan *bona*, però la base a la qual correspon aquesta matriu és ortonormal.

Podríem dir que la diagonalització ens proporciona la millor solució des del punt de vista de l'àlgebra, però la factorització de Schur és millor des del punt de vista de la geometria.

Per això, la situació ideal serà aquella en què podem obtenir una diagonalització unitària, és a dir, quan la matriu A es pot diagonalitzar fent servir una matriu de canvi de base que siga unitària (ortogonal, en el cas real).

En aquesta lliçó, a més de trobar matrius triangulars semblants a una matriu donada, respondrem a la qüestió següent: podem factoritzar la matriu A en la forma $A = UDU^*$, on U és unitària i D diagonal? O, més ben dit, com ha de ser la matriu A perquè la puguem factoritzar d'aquesta manera?

27.1. Reducció a una forma triangular

La diagonalització no és sempre possible; el que sí que passa és que tota matriu és semblant a una matriu triangular complexa.

PROPIETAT 27.1.

Si A és una matriu quadrada, llavors, existeixen dues matrius complexes, P (invertible) i T (triangular superior), tals que $\mathsf{A} = \mathsf{P}\mathsf{T}\mathsf{P}^{-1}$. A més a més, les entrades diagonals de T són els valors propis de A.

Demostració: Primer de tot, calculem un valor propi, λ_1, i un vector propi associat a λ_1, $\vec{p}_1$, i completem una base de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}_1 = \{\vec{p}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_2\}$. Aleshores, tindrem que

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}\vec{p}_1 &= \lambda_1\vec{p}_1\\
\mathsf{A}\vec{v}_2 &= b_{12}\vec{p}_1 + b_{22}\vec{v}_2 + \cdots + b_{n2}\vec{v}_n\\
&\cdots\\
\mathsf{A}\vec{v}_n &= b_{1n}\vec{p}_1 + b_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + b_{nn}\vec{v}_n
\end{aligned}$$

és a dir,

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix}\vec{p}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{p}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \hline 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & & & \\ 0 & b_{n2} & \cdots & t_{nn}\end{array}\right]$$

$$\mathsf{A} = \mathsf{V}_1\left[\begin{array}{c|c}\lambda_1 & \vec{b}_1^*\\ \hline \vec{0} & \mathsf{A}_1\end{array}\right]\mathsf{V}_1^{-1}$$

Ací, V_1 és una matriu invertible i A_1 una matriu quadrada $(n-1)\times(n-1)$, així que, si A fora una matriu 2×2 ja hauríem acabat, perquè la matriu A_1 es reduiria a un nombre i $\left[\begin{array}{c|c}\lambda_1 & \vec{b}_1^*\\ \hline \vec{0} & \mathsf{A}_1\end{array}\right]$ seria triangular. Si no, ara podem repetir el mateix procés amb la matriu A_1, de manera que podrem expressar-la com

$$\mathsf{A}_1 = \mathsf{W}_2\left[\begin{array}{c|c}\lambda_2 & \vec{b}_2^*\\ \hline \vec{0} & \mathsf{A}_2\end{array}\right]\mathsf{W}_2^{-1}$$

Aleshores, tindrem que

$$\mathsf{A} = \mathsf{V}_1\left[\begin{array}{c|c}\lambda_1 & \vec{b}_1^*\\ \hline \vec{0} & \mathsf{A}_1\end{array}\right]\mathsf{V}_1^{-1} = \mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{V}_1\begin{bmatrix}1 & \vec{0}^*\\ \vec{0} & \mathsf{W}_2\end{bmatrix}}_{\mathsf{V}_2}\left[\begin{array}{c|c}\lambda_1 & \vec{b}_1^*\mathsf{W}_2^{-1}\\ \hline \vec{0} & \begin{array}{c|c}\lambda_2 & \vec{b}_2^*\\ \hline \vec{0} & \mathsf{A}_2\end{array}\end{array}\right]\underbrace{\begin{bmatrix}1 & \vec{0}^*\\ \vec{0} & \mathsf{W}_2\end{bmatrix}^{-1}\mathsf{V}_1^{-1}}_{\mathsf{V}_2^{-1}}$$

Després de $n-1$ passos, A_{n-1} serà una matriu 1×1 i haurem obtingut el que desitjàvem. □

EXEMPLE 27.1.

Reduïu la matriu $\mathsf{B} = \begin{bmatrix}3 & 0 & -4\\ 3 & -2 & -6\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ a una forma triangular.

Ja sabem, per l'exemple 26.4, que els valors propis d'aquesta matriu són $\lambda_1 = 1$

(amb multiplicitat algèbrica igual a 2) i $\lambda_2 = -2$ (amb multiplicitat algèbrica igual a 1) i que $\vec{p}_1 = (2,0,1)$ i $\vec{p}_2 = (0,1,0)$ són vectors propis ($\mathsf{B}(2,0,1) = (2,0,1)$ i $\mathsf{B}(0,1,0) = -2(0,1,0)$). Llavors, si $\vec{p}_3$ és qualsevol vector independent d'aquests dos, tindrem que $\mathsf{B}\vec{p}_3$ és combinació lineal de $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ i $\vec{p}_3$. Per exemple, si $\vec{p}_3 = (0,0,1)$,

$$\mathsf{B}\vec{p}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\vec{p}_2 - 6\vec{p}_2 + 1\vec{p}_3$$

I tenim que

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \square$$

27.1.1. La factorització de Schur

Al darrer exemple, el vector $\vec{p}_3$ l'hem escollit arbitràriament: qualsevol vector independent amb els dos vectors propis ens hauria proporcionat una triangulació de la matriu. De fet, hi ha diverses maneres de trobar una matriu triangular semblant a una matriu quadrada A. Com que les bases més interessants són les ortonormals, en aquest apartat mostrarem que podem triangular la matriu fent servir una matriu de canvi unitària. A més a més, fent servir la factorització QR, la demostració és molt senzilla.

Propietat 27.2. (Teorema de Schur)

> *Si* A *és una matriu* $n \times n$ *llavors, existeix una matriu triangular superior,* T*, i una matriu unitària,* U*, tals que* $\mathsf{A} = \mathsf{UTU}^*$*.*

Demostració: Si A és una matriu quadrada, ja sabem que podem trobar una matriu invertible, P, i una matriu triangular, T_1, tals que $\mathsf{A} = \mathsf{PT}_1\mathsf{P}^{-1}$. Aleshores, si $\mathsf{P} = \mathsf{QR}$ és una factorització QR de la matriu P, tindrem

$$\mathsf{A} = \mathsf{QRT}_1(\mathsf{QR})^{-1} = \mathsf{QRT}_1\mathsf{R}^{-1}\mathsf{Q}^*$$

Elegint $\mathsf{U} = \mathsf{Q}$ (matriu unitària) i $\mathsf{T} = \mathsf{RT}_1\mathsf{R}^{-1}$ (triangular superior, perquè és un producte de matrius triangulars superiors) tenim el que desitjàvem. $\square$

☞ Una factorització d'aquest tipus ($\mathsf{A} = \mathsf{UTU}^*$, amb T triangular superior i U unitària) és una *factorització de Schur de la matriu* A.

Exemple 27.2.

> Trobeu una factorització de Schur de la matriu $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

A l'exemple anterior hem factoritzat la matriu B en la forma $\mathsf{B} = \mathsf{PT}_1\mathsf{P}^{-1}$, on

$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. D'altra banda, aquesta és una factorització QR de la matriu P:

$$\mathsf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\mathsf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\mathsf{R}}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \mathsf{B} &= \mathsf{QRT_1R^{-1}Q^*} \\ &= \mathsf{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1}}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathsf{Q}^* \\ &= \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}^* \end{aligned}$$ □

27.2. Matrius diagonalitzables unitàriament

Una matriu quadrada A és *diagonalitzable unitàriament* si existeix una matriu unitària, U, i una matriu diagonal, D, tals que $\mathsf{A} = \mathsf{UDU}^*$, és a dir,

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vec{u}_2^* \\ \dots \\ \vec{u}_n^* \end{bmatrix}$$

la qual cosa es pot reescriure com

$$\mathsf{A} = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^* + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^* + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^*$$

així que A és una combinació lineal de matrius de rang 1, les columnes i les files de les quals són vectors propis i, els pesos, els valors propis de la matriu.

Per comprovar que no tota matriu diagonalitzable es pot diagonalitzar unitàriament, observem que, en cas que ho siga, la matriu adjunta de $\mathsf{A} = \mathsf{UDU}^*$ és

$$\mathsf{A}^* = (\mathsf{UDU}^*)^* = \mathsf{U}^{**}\mathsf{D}^*\mathsf{U}^* = \mathsf{U}\overline{\mathsf{D}}\mathsf{U}^*$$

Aleshores, $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{AA}^*$, perquè $\mathsf{AA}^* = \mathsf{UD}\overline{\mathsf{D}}\mathsf{U}^*$, $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{U}\overline{\mathsf{D}}\mathsf{DU}^*$ i $\mathsf{D}\overline{\mathsf{D}} = \overline{\mathsf{D}}\mathsf{D}$ pel fet que D és una matriu diagonal.

☞ Si A és diagonalitzable unitàriament llavors, $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^*$.

Com que és fàcil trobar matrius diagonalitzables que no compleixen aquesta condició, podem concloure que hi ha matrius diagonalitzables que no són diagonalitzables unitàriament.

27.2.1. Diagonalització unitària de les matrius normals

Una matriu quadrada A és *normal* si $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^*$. El que acabem de provar és que les matrius diagonalitzables unitàriament són normals. Ara demostrarem que aquesta condició també és suficient, és a dir, que totes les matrius normals són diagonalitzables unitàriament.

Propietat 27.3. (El Teorema espectral)

Una matriu quadrada complexa A és diagonalitzable unitàriament si i només si és normal.

Demostració: Ja hem provat que les matrius diagonalitzables unitàriament són normals. Per demostrar la propietat recíproca, que si A és normal llavors és diagonalitzable unitàriament, prendrem una factorització de Schur de A, $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^*$, i provarem que la matriu T és diagonal. Si A és normal, llavors, T també és normal, perquè

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^* \iff \mathsf{U}\mathsf{T}^*\mathsf{U}^*\mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^* = \mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^*\mathsf{U}\mathsf{T}^*\mathsf{U}^* \iff \mathsf{T}^*\mathsf{T} = \mathsf{T}\mathsf{T}^*$$

Vegem que això implica que la matriu triangular superior T és diagonal. Si $\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vec{t}_{12}^{\,*} \\ \mathsf{O} & \mathsf{T}_1 \end{bmatrix}$,

$$\mathsf{T}^*\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & \mathsf{O} \\ \vec{t}_{12} & \mathsf{T}_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vec{t}_{12}^{\,*} \\ \mathsf{O} & \mathsf{T}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & \overline{\lambda_1}\vec{t}_{12}^{\,*} \\ \lambda_1\vec{t}_{12} & \vec{t}_{12}\vec{t}_{12}^{\,*} + \mathsf{T}_1^*\mathsf{T}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{T}\mathsf{T}^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vec{t}_{12}^{\,*} \\ \mathsf{O} & \mathsf{T}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & \mathsf{O} \\ \vec{t}_{12} & \mathsf{T}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 + \left\|\vec{t}_{12}\right\| & \vec{t}_{12}^{\,*}\mathsf{T}_1^* \\ \mathsf{T}_1\vec{t}_{12} & \mathsf{T}_1\mathsf{T}_1^* \end{bmatrix}$$

I, com sabem que $\mathsf{T}^*\mathsf{T} = \mathsf{T}\mathsf{T}^*$, això vol dir que $|\lambda_1|^2 = |\lambda_1|^2 + \left\|\vec{t}_{12}\right\|$, així que $\vec{t}_{12} = \vec{0}$ i $\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{T}_1 \end{bmatrix}$.

Si la matriu T és 2×2, ja haurem provat que és una matriu diagonal; si no, repetim el mateix raonament amb la matriu T_1 obtindrem que $\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \mathsf{O} \\ 0 & \lambda_2 & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & 0 & \mathsf{T}_2 \end{bmatrix}$. Iterant successivament el procés, finalment obtindrem que la matriu T és diagonal. □

La classe de les matrius normals inclou algunes de les matrius més interessants que ja coneixem, com ara, les hermítiques i les unitàries:

☞ Evidentment, les matrius hermítiques són normals, perquè de $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$ es dedueix clarament que $\mathsf{A}\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$.

☞ També són normals les matrius antihermítiques ($\mathsf{A}\mathsf{A}^* = -\mathsf{A}\mathsf{A} = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$) i les unitàries ($\mathsf{A}\mathsf{A}^* = \mathrm{I} = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$); i, en el cas real, les matrius simètriques, les antisimètriques i les ortogonals.

Així que totes aquestes classes de matrius es poden diagonalitzar unitàriament.

Una altra propietat de les matrius normals és que $\mathbb{K}^n$ és la suma directa ortogonal dels subespais propis: del fet que la matriu és diagonalitzable se segueix que la suma directa és l'espai total; i, com que podem triar una base ortonormal, els subespais propis són ortogonals entre ells.

Gràcies a això, podem formular l'algorisme següent, per diagonalitzar unitàriament una matriu normal.

Diagonalització unitària d'una matriu normal A

1. Calculeu els valors propis $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.
2. Calculeu els subespais propis $E_{\lambda_1}(\mathsf{A})$, $E_{\lambda_2}(\mathsf{A})$, …, $E_{\lambda_r}(\mathsf{A})$.
3. Calculeu bases ortonormals B_1, B_2, …, B_r dels subespais propis (per exemple, aplicant a una base qualsevol del subespai propi el mètode de Gram-Schmidt).
4. $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$ és una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$ formada per vectors propis de A.

Exemple 27.3.

Diagonalitzeu unitàriament la matriu hermítica $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2\mathrm{i} \\ -2 & -1 & -4\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Els valors propis són les arrels de l'equació característica, $\lambda_1 = -6$ (amb multiplicitat algèbrica 1) i $\lambda_2 = 3$ (amb multiplicitat algèbrica 2). Curiosament, tot i tractar-se d'una matriu amb alguna entrada que no és real, tots els valors propis són reals.

(b) Els subespais propis són $E_{-6}(\mathsf{A}) = \langle (1, 2, -2\mathrm{i}) \rangle$ i $E_3(\mathsf{A}) = \langle (2, 1, 2\mathrm{i}), (-2, 2, \mathrm{i}) \rangle$.

(c) Per obtenir la diagonalització unitària, hem de canviar les bases $\{(1, 2, -2\mathrm{i})\}$ i $\{(2, 1, 2\mathrm{i}), (-2, 2, \mathrm{i})\}$ per altres que siguen ortonormals.

En realitat, ací no cal emprar el mètode de Gram-Schmidt, perquè els tres vectors ja són ortogonals, així que els normalitzem, dividint-los entre les seues normes, i obtenim

$$\mathcal{B}_1 = \{(1/3)\,(1,2,-2\mathrm{i})\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{(1/3)\,((2,1,2\mathrm{i}))\,,(1/3)\,((-2,2,\mathrm{i}))\}$$

(d) El conjunt $\mathcal{B} = \{(1/3)\,(1,2,-2\mathrm{i})\,,(1/3)\,((2,1,2\mathrm{i}))\,,(1/3)\,((-2,2,\mathrm{i}))\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ formada per vectors propis de la matriu A, així que aquesta matriu es pot factoritzar com

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2\mathrm{i} \\ -2 & -1 & -4\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix}^* \qquad \square$$

El fet que els valors propis de la matriu A d'aquest exemple siguen reals no és cap casualitat, perquè els valors propis de les matrius hermítiques sempre ho són: si la matriu A és hermítica i $\mathsf{A} = \mathsf{UDU}^*$ n'és una diagonalització unitària llavors, $\mathsf{A} = \mathsf{A}^* \iff \mathsf{UDU}^* = \mathsf{UD}^*\mathsf{U}^* \iff \mathsf{D} = \mathsf{D}^*$. Però, com que la matriu D és la diagonal dels valors propis, això vol dir que $\lambda_1 = \overline{\lambda_1}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$, …, $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$, és a dir que tots els valors propis són reals.

☞ Si la matriu A és hermítica llavors, els valors propis de A són reals.

A l'apartat proper, aprofitarem aquest fet per diagonalitzar ortogonalment les matrius reals simètriques.

27.2.2. Diagonalització ortogonal de les matrius simètriques reals

Les matrius reals simètriques són hermítiques, així que els podem aplicar tot el que acabem de veure.

En particular, els valors propis de les matrius reals simètriques són reals. D'altra banda, els subespais propis són els espais nuls $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})$, on A i λ són reals, així que existeixen també bases d'aquests espais formades per vectors reals. En conseqüència, la matriu es pot diagonalitzar fent servir únicament matrius reals. D'aquesta manera, el teorema espectral es tradueix en aquest:

Teorema 27.4. (El teorema espectral per a matrius reals simètriques)

Si A és una matriu real i simètrica aleshores, A és diagonalitzable ortogonalment, és a dir, $\mathsf{A} = \mathsf{QDQ}^{\mathsf{T}}$, on D és una matriu diagonal i Q és una matriu ortogonal. $\square$

Exemple 27.4.

Diagonalitzeu ortogonalment la matriu simètrica $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) L'equació característica és

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 1-\lambda & -8 \\ 4 & -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (9+\lambda)(9-\lambda)^2 = 0$$

així que els valors propis són $\lambda_1 = -9$ i $\lambda_2 = 9$, amb multiplicitats algebraiques 1 i 2.

(b) Els subespais propis són

$$E_{-9}(\mathsf{A}) = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & -8 \\ 4 & -8 & 10 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle(-1/2, 1, 1)\rangle$$

$$E_{9}(\mathsf{A}) = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & -8 \\ 4 & -8 & -8 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle(2, 1, 0), (2, 0, 1)\rangle$$

Llavors,

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1/2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

és una diagonalització de A.

(c) Per obtenir la diagonalització ortogonal, hem de canviar les bases $\{(-1/2, 1, 1)\}$ i $\{(2, 1, 0)(2, 0, 1)\}$ per altres que siguen ortonormals. Hi apliquem el mètode de Gram-Schmidt:

(c.1) La base del subespai E_{-9} només conté un vector, així que únicament cal normalitzar-lo: com que $\|(-1/2, 1, 1)\| = 3/2$, $\mathcal{B}_1 = \{(2/3)\,(-1/2, 1, 1)\}$ és una base ortonormal.

(c.2) En el cas de E_9, aplicant-hi el mètode de Gram-Schmidt obtenim la base $\mathcal{B}_2 = \{\left(1/\sqrt{5}\right)((2, 1, 0)), \left(1/(3\sqrt{5})\right)((2, -4, 5))\}$.

(d) Per tant,

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

27.3. Resum

Reducció a una forma triangular

- Si A és quadrada hi ha una matriu P, invertible, i una matriu T, triangular superior, tals que $A = PTP^{-1}$.
- Les entrades diagonals de T són els valors propis de A.

La factorització de Schur

- Si A és quadrada hi ha una matriu U, unitària, i una matriu T, triangular superior, tals que $A = UTU^{-1}$.

Diagonalització unitària

- Una matriu quadrada A és *normal* si $A^*A = AA^*$.

  ☞ Les matrius hermítiques, les antihermítiques i les unitàries són normals. Les matrius reals simètriques, les antisimètriques i les ortogonals són normals.

- Una matriu és diagonalitzable unitàriament si existeixen U, unitària, i D, diagonal, tals que $A = UDU^*$.
- **Teorema espectral:** una matriu quadrada és diagonalitzable unitàriament si i només si és normal.

Diagonalització ortogonal

- Una matriu real és diagonalitzable ortogonalment si existeixen Q, ortogonal, i D, diagonal, tals que $A = QDQ^T$.
- Les matrius simètriques són diagonalitzables ortogonalment.

27.4. Exercicis

Formes triangulars. La factorització de Schur

Exercici 27.1. Sabent que la matriu $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 5 \\ 2 & 17 & -7 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ té un únic valor propi, $\lambda_1 = 9$, trobeu-ne una factorització de Schur.

(solució: pàg. 665)

Exercici 27.2. És possible que una matriu siga diagonalitzable però que cap forma de Schur d'aquesta matriu no siga diagonal?

(solució: pàg. 666)

Diagonalització unitària. Matrius normals

Exercici 27.3. Proveu que la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{i} \\ -\mathsf{i} & 0 \end{bmatrix}$ és unitària i diagonalitzeu-la unitàriament.

(solució: pàg. 666)

Exercici 27.4. Diagonalitzeu ortogonalment les matrius simètriques següents

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 667)

Exercici 27.5. Diagonalitzeu ortogonalment la matriu simètrica $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 669)

Exercici 27.6. Expresseu la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ com una combinació lineal de matrius de rang un, $\mathsf{A} = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^{\mathsf{T}} + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^{\mathsf{T}} + \lambda_3 \vec{q}_3 \vec{q}_3^{\mathsf{T}}$, on λ_1, λ_3, λ_3 són els valors propis i $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ és una base ortonormal de vectors propis.

(solució: pàg. 670)

Exercici 27.7. Proveu que les úniques matrius reals que són diagonalitzables ortogonalment són les simètriques.

(solució: pàg. 671)

Exercici 27.8. Proveu que si A és una matriu real qualsevol, llavors tots els valors propis de la matriu $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}$ són reals no negatius.

(solució: pàg. 671)

Lliçó 28. Aplicacions de la diagonalització

La géométrie n'est pas vrai, elle est avantageuse
Henri Poincaré

> Vam començar el curs presentant alguns problemes que es resolen mitjançant tècniques de l'àlgebra lineal. Alguns d'aquells problemes (i molts altres) es poden resoldre fàcilment si s'hi pot aplicar la diagonalització de matrius.

28.1. Potències d'una matriu

El càlcul de la potència A^m, si el nombre m no és molt petit, requereix moltes operacions (tinguem en compte que només per multiplicar dues matrius 3×3 cal fer 45 operacions, entre sumes i productes. Ara bé, si la matriu A és diagonalitzable tindrem

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= \mathsf{PDP}^{-1} \\ \mathsf{A}^2 &= \mathsf{PDP}^{-1}\mathsf{PDP}^{-1} = \mathsf{PD}^2\mathsf{P}^{-1} \\ \mathsf{A}^3 &= \mathsf{PD}^2\mathsf{P}^{-1}\mathsf{PDP}^{-1} = \mathsf{PD}^3\mathsf{P}^{-1} \end{aligned}$$

i, en general,

$$\mathsf{A}^m = \mathsf{PD}^{m-1}\mathsf{P}^{-1}\mathsf{PDP}^{-1} = \mathsf{PD}^m\mathsf{P}^{-1}$$

Com que el càlcul de D^m només suposa calcular les potències dels elements diagonals, aquesta fórmula significa que trobar A^m es redueix, essencialment, a multiplicar tres matrius.

Exemple 28.1.

> Calculeu A^m, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Aquesta matriu és diagonalitzable,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathsf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}^m = \mathsf{P}\mathsf{D}^m\mathsf{P}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^m \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-3)^m \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\left(2^m \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + (-3)^m \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{2^m}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{(-3)^m}{5} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \square
\end{aligned}$$

Hi ha diversos problemes que requereixen el càlcul de les potències d'una matriu (com ara, la resolució d'equacions en diferències o de sistemes lineals mitjançant mètodes iteratius). En la resolució de totes aquestes qüestions, la diagonalització (o, si més no, l'estudi de les propietats dels valors propis i els vectors propis) sol ser un instrument força útil, com veurem en els apartats següents.

28.2. Equacions en diferències (o recurrències) lineals

Un dels exemples que presentàvem a la primera unitat és aquest:

Exemple 28.2.

La successió $\{a_m\}$ es defineix de manera recurrent com

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_m - 3a_{m-1} + 2a_{m-2} &= 0 \end{aligned}$$

Trobeu una expressió explícita (no recurrent) del terme general.

Aquest tipus de problemes es coneixen com *equacions en diferències.* La nostra equació en concret és d'ordre 2, perquè un terme qualsevol, a_m, es pot calcular si ja es coneixen els dos termes anteriors ($a_m = -2a_{m-2} + 3a_{m-1}$). Aquesta equació és equivalent a una altra recurrència, d'ordre 1 però vectorial: si definim la successió de vectors $\vec{a}_m = (a_m, a_{m+1})$ tindrem

$$\vec{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_m = \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_m \\ -2a_{m-1} + 3a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} = \mathsf{A}\vec{a}_{m-1}$$

La solució d'aquesta equació és, òbviament, $\vec{a}_m = \mathsf{A}^m\vec{a}_0$ i, si la matriu A és diagonalitzable serà molt fàcil calcular el terme general. L'equació característica és

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

els valors propis són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$ i els espais propis

$$E_1(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \langle (1,1) \rangle$$
$$E_2(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \langle (1,2) \rangle$$

de manera que, si

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

llavors $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$ i la igualtat $a_m = \mathsf{A}^m \vec{a}_0$ és equivalent a

$$\vec{a}_m = \mathsf{PD}^m\mathsf{P}^{-1}\vec{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2^m\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Per tant, el terme general de la successió original és $a_m = -1 + 2^m$. □

De forma més general, $a_{m+2} + \alpha_1 a_{m+1} + \alpha_0 a_m = 0$ (on α_0, α_1 són nombres coneguts) és una *equació en diferències lineal homogènia de segon ordre.* Fent el canvi $\vec{a}_m = (a_m, a_{m+1})$, aquesta equació és equivalent a l'equació matricial $\vec{a}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}\vec{a}_{m-1}$. En el cas que la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$ siga diagonalitzable ($\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$), la solució de l'equació matricial és

$$\vec{a}_m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m \vec{p}_1 & \lambda_2^m \vec{p}_2 \end{bmatrix}\left(\mathsf{P}^{-1}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}\right)$$

Com que $\vec{a}_m = (a_m, a_{m+1})$, això ens proporciona la solució de l'equació en diferències.

28.2.1. Els nombres de Fibonacci

La *successió de Fibonacci* es defineix mitjançant la recurrència

$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 1$$
$$f_m = f_{m-2} + f_{m-1}$$

així que podem trobar-ne el terme general seguint un procés semblant al de l'exemple anterior. Com que la successió comença al terme f_1, afegirem un primer terme $f_0 = 0$ (que no modifica la recurrència, perquè $f_2 = f_0 + f_1$ continua sent igual a 1). Definint la successió de vectors $\vec{f}_m = (f_m, f_{m+1})$ tindrem

$$\vec{f}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{f}_m = \begin{bmatrix} f_m \\ f_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_{m-1} + f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{m-1} \\ f_m \end{bmatrix} = \mathsf{A}\vec{f}_{m-1}$$

i, llavors, $\vec{f}_m = \mathsf{A}^m \vec{f}_0$. Diagonalitzem la matriu A: l'equació característica és

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

de manera que els valors propis són $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ i els espais propis

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1}(\mathsf{A}) &= \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} = \langle (1, \lambda_1) \rangle \\ E_{\lambda_2}(\mathsf{A}) &= \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} = \langle (1, \lambda_2) \rangle \end{aligned}$$

així que

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned} \vec{f}_m &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\lambda_1^m \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2^m \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_1^m & \lambda_2^m \\ \lambda_1^{m+1} & \lambda_2^{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ens quedem amb la primera fila.

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(-\lambda_1^m + \lambda_2^m \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \qquad \square \end{aligned}$$

28.3. Resolució de sistemes lineals. Mètodes iteratius

Tot i que els algorismes del tipus Gauss ens proporcionen, teòricament, la solució exacta de qualsevol sistema compatible $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, a la pràctica, quan la matriu és molt gran, aquests mètodes són molt costosos (quant al nombre d'operacions que requereixen) i poden presentar força problemes d'errors, pel fet que necessàriament haurem de fer servir una aritmètica no exacta. A més a més, si la matriu A és *buida* (és a dir, que té força zeros), la resolució del sistema hauria de requerir poques operacions, però els algorismes del tipus Gauss, quan esglaonen, produeixen matrius que ja no són buides.

Per això, la recerca d'estratègies alternatives als mètodes exactes és una de les qüestions bàsiques en l'àlgebra lineal numèrica.[1] Una d'aquestes estratègies consisteix a fer servir els mètodes iteratius.

Podem definir un mètode iteratiu com un algorisme que construeix una successió d'aproximacions successives a la solució d'un problema. En el nostre cas, si A és una matriu invertible i volem resoldre iterativament el sistema (determinat) $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, es tracta de construir una successió $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \dots$ que *convergisca* a la solució. Un mètode general per fer això consisteix a descompondre la matriu A en la forma $\mathsf{A} = \mathsf{M} - \mathsf{N}$, on M també és una matriu invertible; aleshores el sistema lineal el podem transformar en un altre d'equivalent,

$$\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b} \iff \mathsf{M}\vec{x} - \mathsf{N}\vec{x} = \vec{b} \iff \mathsf{M}\vec{x} = \mathsf{N}\vec{x} + \vec{b}$$

la solució del qual és $\vec{x} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\vec{x} + \mathsf{M}^{-1}\vec{b}$. Llavors es construeix la successió $\vec{x}_m$ de la manera següent:

(1) Elegiu un vector inicial arbitrari, $\vec{x}_0$.

(2) Per a $m = 1, 2, \dots$, resoleu el sistema lineal $\mathsf{M}\vec{x}_m = \mathsf{N}\vec{x}_{m-1} + \vec{b}$ (ací, $\vec{x}_{m-1}$ ja és un vector conegut, així que la incògnita és $\vec{x}_m$).

Si aquesta successió és convergent, és a dir, si existeix el límit $\vec{x} = \lim \vec{x}_m$, aleshores, $\vec{x}$ és la solució del sistema lineal, perquè

$$\lim \vec{x}_m = \vec{x} \implies \lim \mathsf{M}\vec{x}_m = \lim \mathsf{N}\vec{x}_{m-1} + \vec{b} \iff \mathsf{M}\vec{x} = \mathsf{N}\vec{x} + \vec{b}$$

(suposant que coneixem què és el límit d'una successió de vectors i que el límit es pot intercanviar amb el producte matriu-vector; però, ara per ara, no ens preocupem d'això).

El que sí que convé notar és que aquest algorisme consisteix a resoldre un sistema lineal en cada pas, així que, perquè resulte avantatjós, cal que aquest sistema lineal siga més senzill que no el sistema original $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Evidentment, el cas més favorable és quan M és una matriu diagonal: si la matriu A no conté cap zero a la diagonal i anomenem D la matriu diagonal $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ i si $\mathsf{N} = \mathsf{D} - \mathsf{A}$, el mètode iteratiu que en resulta és el que es coneix com *mètode de Jacobi*:

[1] Els mètodes numèrics no són l'objectiu d'aquest curs, però ací en fem un tast, per la utilitat que hi tenen els valors propis.

Algorisme de Jacobi

Donada la matriu invertible A (sense zeros a la diagonal),

$$\text{Siguen } \mathsf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ i } \mathsf{N} = \mathsf{D} - \mathsf{A}.$$

1. Elegiu un vector inicial arbitrari, $\vec{x}_0$.
2. Per a $m = 1, 2, \ldots$, resoleu el sistema lineal $\mathsf{D}\vec{x}_m = \mathsf{N}\vec{x}_{m-1} + \vec{b}$.

En els dos exemples següents, l'aplicació del mètode de Jacobi no té cap interès pràctic, perquè amb un sistema de dues equacions amb dues incògnites, la solució és immediata, però el fem servir per mostrar com s'hi aplica aquest algorisme i trobar les dificultats que presenta la seua convergència.

Exemple 28.3.

Apliqueu el mètode de Jacobi per a resoldre el sistema lineal $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Hem de prendre les matrius $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{N} = \mathsf{D} - \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i un vector inicial arbitrari, per exemple, $\vec{x}_0 = (0, 0)$. Llavors, construïm la successió $\{\vec{x}_m\}$:

Càlcul de $\vec{x}_1$: Resolem el sistema $\mathsf{D}\vec{x}_1 = \mathsf{N}\vec{x}_0 + \vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} 2x_1 &= 4 \\ 3x_2 &= 3 \end{aligned} \iff \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Càlcul de $\vec{x}_2$: Resolem el sistema $\mathsf{D}\vec{x}_2 = \mathsf{N}\vec{x}_1 + \vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} 2x_1 &= 5 \\ 3x_2 &= 5 \end{aligned} \iff \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

En passos successius, fent servir un paquet de càlcul matemàtic, obtenim

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 2{,}83333 \\ 1{,}83333 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 2{,}91667 \\ 1{,}94444 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \vec{x}_{10} = \begin{bmatrix} 2{,}99961 \\ 1{,}99974 \end{bmatrix} \quad \ldots$$

Així que la successió $\{\vec{x}_m\}$ sembla convergir a $\vec{x} = (3, 2)$ (que, efectivament, és la solució del sistema). □

EXEMPLE 28.4.

Apliqueu el mètode de Jacobi per a resoldre el sistema lineal $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Primer de tot, observem que la matriu de coeficients és el resultat de permutar les files de la matriu de l'exemple anterior, així que es tracta de sistemes equivalents i la solució és la mateixa: $\vec{x} = (3, 2)$. Tot i això, quan apliquem l'algorisme de Jacobi, trobarem que ara no és convergent.

Prenem les matrius $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{N} = \mathsf{D} - \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ i un vector inicial arbitrari, per exemple, $\vec{x}_0 = (0, 0)$. Llavors, construïm la successió $\{\vec{x}_m\}$:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -13 \\ -11 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -37 \\ -29 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} -91 \\ -77 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_5 = \begin{bmatrix} -235 \\ -185 \end{bmatrix} \quad \dots$$

Així que la successió $\{\vec{x}_m\}$ és divergent. □

Notem que la resolució successiva dels sistemes lineals que hi apareixen és immediata, pel fet que la matriu de coeficients és diagonal. Però la qüestió és aquesta: per què el mètode de Jacobi convergeix en el nostre primer exemple i divergeix en el segon, si, essencialment, es tracta del mateix sistema lineal?

Per respondre-hi, haurem de mirar de trobar condicions perquè els algorismes iteratius que estem estudiant convergisquen. Per fer això, ens fixem en el pas iteratiu, $\mathsf{M}\vec{x}_m = \mathsf{N}\vec{x}_{m-1} + \vec{b}$. Com que la matriu M és invertible, la solució d'aquest sistema lineal és $\vec{x}_m = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\vec{x}_{m-1} + \mathsf{M}^{-1}\vec{b}$. I, com que la solució del sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ també compleix la igualtat $\vec{x} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\vec{x} + \mathsf{M}^{-1}\vec{b}$, resulta que la diferència entre una aproximació i la solució és

$$\begin{aligned} \vec{x}_m - \vec{x} &= \mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\vec{x}_{m-1} + \mathsf{M}^{-1}\vec{b} - \mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\vec{x} - \mathsf{M}^{-1}\vec{b} \\ &= \mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\left(\vec{x}_{m-1} - \vec{x}\right) \\ &= \left(\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\right)^2 \left(\vec{x}_{m-2} - \vec{x}\right) \\ &\dots \\ &= \left(\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\right)^m \left(\vec{x}_0 - \vec{x}\right) \end{aligned}$$

Doncs bé, com que el que volem és que la diferència $\vec{x}_m - \vec{x}$ és faça més i més petita, el que necessitem és que les potències $\left(\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}\right)^m$ s'acosten a la matriu zero.

Suposem que la matriu $\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}$ és diagonalitzable,

$$\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N} = \mathsf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathsf{P}^{-1}$$

Llavors,

$$(\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N})^m = \mathsf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{bmatrix}\mathsf{P}^{-1}$$

Aleshores, perquè això convergisca a la matriu zero, el que ha de passar és que

$$\lim \lambda_1^m = 0 \quad \lim \lambda_2^m = 0 \quad \ldots \quad \lim \lambda_n^m = 0$$

així que,

☞ perquè la successió $(\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N})^m$ convergisca a la matriu zero, cal que tots els valors propis de $\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}$ siguen, en valor absolut, més petits que 1.

En l'exemple 28.3, els valors propis de la matriu $\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}$ són $\lambda_1 = \sqrt{1/6} \approx 0{,}41$ i $\lambda_2 = -\sqrt{1/6} \approx -0{,}41$. En canvi, en l'exemple 28.4, $\lambda_1 = -\sqrt{6} \approx 2{,}45$ i $\lambda_2 = -\sqrt{6} \approx -2{,}45$.

Es pot provar que la condició que tots els valors propis siguen, en valor absolut, menors que 1 assegura la convergència *també en el cas que la matriu* $\mathsf{M}^{-1}\mathsf{N}$ *no és diagonalitzable.*

28.4. Equacions diferencials lineals

L'*equació diferencial lineal general de primer ordre* és l'equació $y' = f(t)y + g(t)$, on $y\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ és una funció real o complexa desconeguda de la variable real t i on (per simplificar) suposarem que f i g són funcions contínues en $\mathbb{R}$. La solució general d'aquesta equació és

$$y = \left(C + \int g(t)\mathrm{e}^{-\int f(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{\int f(t)\,\mathrm{d}t} \tag{28.1}$$

En aquesta expressió, C és una constant arbitrària; donant-hi tots els valors possibles, s'obtenen totes les solucions de l'equació.[2]

Com a cas particular, si l'equació és homogènia i de coeficient constant, $y' = ay$, on a és una constant, la fórmula (28.1) es redueix simplement a $y = C\mathrm{e}^{at}$.

Ací ens interessen els sistemes d'equacions diferencials lineals (amb coeficients constants) de la forma

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

[2] Provar que les funcions de la forma fórmula (28.1) són solucions de l'equació és un exercici trivial (vegeu l'exercici 28.8.). Que totes les solucions són d'aquesta forma és un resultat conegut (pels que coneixen la teoria d'equacions diferencials).

(on $y_1, \dots, y_n$ són les funcions incògnites i els a_{ij} constants conegudes). En forma matricial,

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \vec{y}$$
$$\vec{y}' = \mathsf{A}\vec{y}$$

Si la matriu A és diagonalitzable, podrem escriure aquesta equació com

$$\vec{y}' = \mathsf{PDP}^{-1}\vec{y}$$
$$\mathsf{P}^{-1}\vec{y}' = \mathsf{DP}^{-1}\vec{y}$$

així que podem fer el canvi de funció $\vec{z} = \mathsf{P}^{-1}\vec{y}$ (o $\vec{y} = \mathsf{P}\vec{z}$) i obtindrem el sistema equivalent

$$\vec{z}' = \mathsf{D}\vec{z}$$

L'avantatge d'aquest sistema és que *és desacoblat*, en el sentit que cada equació conté únicament una funció incògnita:

$$\vec{z}' = \mathsf{D}\vec{z}$$
$$\vec{z}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \vec{z}$$

és a dir,

$$z_1' = \lambda_1 z_1, \qquad z_2' = \lambda_2 z_2, \qquad \dots, \quad z_n' = \lambda_n z_n$$

Les solucions generals de cadascuna d'aquestes equacions són, segons acabem de veure,

$$z_1 = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad z_n = C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}$$

Si ara desfem el canvi $\vec{y} = \mathsf{P}\vec{z}$ obtindrem la solució general del sistema original $\vec{y}' = \mathsf{A}\vec{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \mathsf{P}\vec{z} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \dots & \vec{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ço és,

$$\boxed{\vec{y} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \vec{p}_1 + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \vec{p}_2 + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \vec{p}_n}$$

Exemple 28.5.

Calculeu la solució general del sistema d'equacions diferencials lineals

$$\begin{aligned} y_1' &= -5y_1 \qquad - 6y_3 \\ y_2' &= \ \ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \\ y_3' &= \ \ 3y_1 \qquad + 4y_3 \end{aligned}$$

La matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ l'hem diagonalitzada a l'exemple 26.3 (pàgina 383),

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}}$$

Per tant, la solució general del nostre sistema és

$$\vec{y} = C_1 \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{aligned} y_1 &= \qquad\quad - C_2\mathrm{e}^t - 2C_3\mathrm{e}^{-2t} \\ y_2 &= C_1\mathrm{e}^t \qquad\qquad + \ \ C_3\mathrm{e}^{-2t} \\ y_3 &= \qquad\quad + C_2\mathrm{e}^t + \ \ C_3\mathrm{e}^{-2t} \end{aligned} \qquad \square$$

Quan la matriu A no és diagonalitzable, també podem fer servir una estratègia semblant per a resoldre el sistema, aprofitant el fet que sempre hi ha una matriu triangular que és semblant a A (per exemple, una forma de Schur): si $\mathsf{A} = \mathsf{PTP}^{-1}$, el canvi $\vec{y} = \mathsf{P}\vec{z}$ ens proporciona el sistema equivalent

$$\vec{z}\,' = \mathsf{T}\vec{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \dots & t_{1n-1} & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & t_{2n-1} & t_{2n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & t_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \vec{z}$$

que podem resoldre amb un procés de substitució regressiva: la solució de l'última equació, $z_n' = \lambda_n z_n$, és $z_n = C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}$; aleshores, l'equació $n-1$ és $z_{n-1}' = \lambda_{n-1} z_n + t_{n-1n} C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}$ i la podem resoldre fent servir la fórmula (28.1). I així successivament.

28.5. Formes quadràtiques

Una *forma quadràtica* és una aplicació $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en la qual la imatge $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ és un polinomi homogeni[3] de grau dos, per exemple, les funcions

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \qquad g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 - 6x_3^2 - 10x_1x_2 + 6x_2x_3$$

són formes quadràtiques.

Fins ara, només ens hem ocupat de les aplicacions lineals, perquè es poden calcular, fent servir matrius, com $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$. Les formes quadràtiques podem expressar-les en la forma $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\vec{x}$. Per exemple, les formes quadràtiques f i g es poden escriure com

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_2^2$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Aquesta representació matricial, però, no és única; per exemple, en el cas de l'aplicació g, també podem triar

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Això és perquè

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{23})x_2x_3 \end{aligned}$$

de manera que, en el cas de l'aplicació g, podem elegir lliurement els elements no diagonals sempre que ens assegurem que $a_{12} + a_{21} = -10$, $a_{13} + a_{31} = 0$ i $a_{23} + a_{32} = 6$. Com que el que ens interessarà és la diagonalització unitària de la matriu, els triarem de manera que ens assegurem que la matriu resulte simètrica.

☞ Qualsevol forma quadràtica $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es pot representar en la forma $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\vec{x}$, on A és una matriu simètrica.

Com que la matriu A és simètrica, podem diagonalitzar-la ortogonalment, així que, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ són els valors propis, hi ha una base ortonormal de vectors propis $B = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$ de manera que

$$\mathsf{A} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \dots & \vec{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_1^{\mathsf{T}} \\ \vec{q}_2^{\mathsf{T}} \\ \dots \\ \vec{q}_n^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}$$

[3]Un polinomi és homogeni si tots els monomis que en formen part són del mateix grau.

Llavors, si fem el canvi de variables $\vec{x} = \mathsf{Q}\vec{y}$,

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\vec{x} = \vec{x}^\mathsf{T}\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{Q}\vec{y} = \vec{y}^\mathsf{T}\mathsf{D}\vec{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$
$$f(\vec{x}) = \vec{x}_B^\mathsf{T}\mathsf{D}\vec{x}_B$$

El fet que D siga una matriu diagonal vol dir que qualsevol forma quadràtica es pot expressar sense termes mixtos (del tipus x_2x_3). Aquesta és la forma reduïda de la forma quadràtica.

Exemple 28.6.

Trobeu la forma reduïda de la forma quadràtica

$$\vec{x}^\mathsf{T}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}\vec{x} = 2x_1^2 - x_2^2 - 6x_3^2 - 10x_1x_2 + 6x_2x_3$$

Els valors propis de la matriu $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ són $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 6$ i $\lambda_3 = -8$ i, els subespais propis associats,

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \mathrm{Nul}\,(1,1,1) \\ E_6 &= \mathrm{Nul}\,(-5,4,1) \\ E_{-8} &= \mathrm{Nul}\,(-1/3,-2/3,1) \end{aligned}$$

Així que

$$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{42}}(-5,4,1), \frac{1}{\sqrt{14}}(-1/3,-2/3,1)\right\}$$

és una base ortonormal de vectors propis. L'expressió de la forma quadràtica referida a aquesta base és

$$\vec{y}^\mathsf{T}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}\vec{y} = -3y_1^2 + 6y_2^2 - 8y_3^3 \quad \square$$

28.6. Reducció de còniques

Una *cònica* és una corba plana definida per una equació polinòmica de segon grau amb coeficents reals, és a dir una expressió de la forma $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 = c$. Per exemple, les corbes següents són còniques:

- L'el·lipse $\dfrac{(x_1-h)^2}{a^2} + \dfrac{(x_2-k)^2}{b^2} = 1$.

- La hipèrbola $\dfrac{(x_1-h)^2}{a^2} - \dfrac{(x_2-k)^2}{b^2} = 1$.
- La paràbola $a(x_1-h) = (x_2-k)^2$.
- La recta $a(x_1-h) + b(x_2-k) = 0$.

En realitat, totes les còniques són el·lipses, hipèrboles, paràboles, rectes o parelles de rectes, és a dir, que es pot trobar una base ortonormal respecte a la qual l'equació de la cònica és d'un d'aquests quatre tipus (*reduir* la cònica és escriure-la d'aquesta manera).

Observem que, a l'equació de la cònica, hi ha una part quadràtica ($a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$), una de lineal, ($b_1x_1 + b_2x_2$) i una de constant ($c$) i que l'equació es pot escriure com

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c$$
$$\vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\vec{x} + \vec{b}^{\mathsf{T}}\vec{x} = c$$

La part important del procés de reducció de la cònica consisteix a eliminar el terme mixt x_1x_2; això s'aconsegueix diagonalitzant la matriu simètrica A (o la forma quadràtica $\vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\vec{x}$); si la diagonalitzem, obtindrem una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ i una matriu diagonal, $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, de manera que, fent el canvi de base $\vec{x} = \mathsf{Q}\vec{y}$ l'equació de la cònica, respecte a la nova base, serà $\vec{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{D}\vec{y} + d^{\mathsf{T}}\vec{y} = c$, és a dir,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d_1y_1 + d_2y_2 = c$$

A partir d'ací, per identificar la cònica, haurem de distingir diversos casos, segons com siguen els valors propis λ_1 i λ_2:

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ llavors, la cònica és $d_1y_1 + d_2y_2 = c$, és a dir, una recta.
- Si un valor propi, per exemple, λ_1 és zero i l'altre no, l'equació es redueix a $\lambda_2 y_2^2 + d_1y_1 + d_2y_2 = c$. Aleshores,
  - Si $d_1 = 0$, tenim l'equació $\lambda_2 y_2^2 + d_2y_2 = c$ que, completant el quadrat, es pot escriure com $\lambda_2(y_2-k)^2 = d$, que és l'equació d'un parell de rectes: $y_2 - k = \pm\sqrt{d/\lambda_2}$
    (però, si $d/\lambda_2 < 0$, l'equació és impossible amb nombres reals, així que diem que la cònica consisteix en dues *rectes imaginàries*).
  - Si $d_1 \neq 0$, també podem completar el quadrat i l'equació $\lambda_2 y_2^2 + d_1y_1 + d_2y_2 = c$ es pot escriure com $\lambda_2(y_2-k)^2 = a(x_1-h)$, així que es tracta d'una paràbola.
- Si els dos valors propis són no nuls, completem els dos quadrats, de manera que l'equació pren la forma $\lambda_1(y_1-h)^2 + \lambda_2(y_2-k)^2 = d$ i

- si $d \neq 0$, la corba és una el·lipse o una hipèrbola, segons que els signes dels dos valors propis siguen iguals o distints.

  Ací també hi ha un cas degenerat: si λ_1 i λ_2 són positius i d negatiu (o quan λ_1 i λ_2 són negatius i d positiu), la cònica seria una el·lipse, però, en realitat,[4] no conté cap punt; en aquest cas es diu que és una el·lipse *imaginària*.
- si $d = 0$ i $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\lambda_1(y_1-h)^2+\lambda_2(y_2-k)^2 = 0 \iff \pm\sqrt{|\lambda_1|}(y_1-h) = \sqrt{|\lambda_2|}(y_2-k)$ consisteix en un parell de rectes.
- si $d = 0$ i $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1(y_1-h)^2+\lambda_2(y_2-k)^2 = 0 \iff y_1 = h, y_2 = k$, i la cònica es redueix a un punt.

Exemple 28.7.

Reduïu la cònica $9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 10x_1 - 5x_2 = 1$

En forma matricial, la corba és

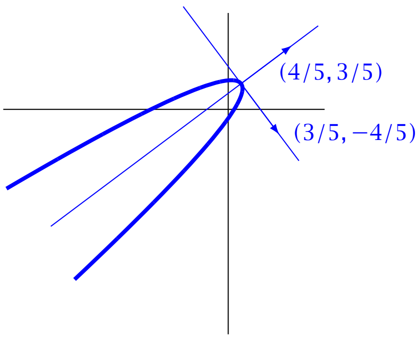
$$\vec{x}^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} 10 & -5 \end{bmatrix}\vec{x} = 1$$

$$\vec{x}^{\mathsf{T}}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} 10 & -5 \end{bmatrix}\vec{x} = 1$$

Fent el canvi $\vec{y} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\vec{x}$, quedarà $\vec{y}^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\vec{y} + \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}\vec{y} = 1$, és a dir,

$$25y_2^2 + 5y_1 + 10y_2 = 1$$
$$(5y_2 + 1)^2 + 5y_1 = 2$$

així que es tracta d'una paràbola. L'equació reduïda d'aquesta paràbola és $-\left(y_1 - \frac{2}{5}\right) = \left(y_2 + \frac{1}{5}\right)^2$. □



[4] Perquè estem parlant de nombres reals!

28.7. Resum

Potències d'una matriu

- Si $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$, $\mathsf{A}^m = \mathsf{PD}^m\mathsf{P}^{-1}$.

Equacions en diferències

- Per resoldre l'equació en diferències $a_{m+2} + \alpha_1 a_{m+1} + \alpha_0 a_m = 0$, feu el canvi $\vec{a}_m = (a_m, a_{m+1})$.

  Llavors obtindreu l'equació $\vec{a}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} \vec{a}_{m-1}$. Si A és diagonalitzable ($\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$), la solució serà $\vec{a}_m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m \vec{p}_1 & \lambda_2^m \vec{p}_2 \end{bmatrix} \left(\mathsf{P}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \right)$.

Mètodes iteratius

- Si A i M són invertibles i $\mathsf{A} = \mathsf{M} - \mathsf{N}$, el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és equivalent a $\mathsf{M}\vec{x} = \mathsf{N}\vec{x} + \vec{b}$.
- Si la successió $\mathsf{M}\vec{x}_m = \mathsf{N}\vec{x}_{m-1} + \vec{b}$ és convergent, el límit de la successió és la solució del sistema lineal.
- Això passa si i només si els valors absoluts de tots els valors propis de la matriu M–1 N són més petits que 1.

  ☞ Si A no té zeros a la diagonal i $\mathsf{M} = \mathsf{D}$ (la diagonal de A), s'obté el *mètode de Jacobi*: $\mathsf{D}\vec{x}_m = \mathsf{N}\vec{x}_{m-1} + \vec{b}$.

Sistemes d'equacions diferencials lineals

- Si la matriu A és diagonalitzable ($\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$), la solució del sistema d'equacions diferencials $\vec{y}' = \mathsf{A}\vec{y}$ és

$$\vec{y} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{p}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{p}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{p}_n$$

  (on λ_i són els valors propis (les entrades diagonals de D) i $\vec{p}_i$ les columnes de P).

Formes quadràtiques

- Una forma quadràtica és una aplicació $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ on $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és un polinomi homogeni de grau dos.
- Sempre es pot expressar com $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\mathsf{x}$, on la matriu A és simètrica.
- Diagonalitzant ortogonalment la matriu A, si $\mathcal{B}$ és una base de vectors propis ortonormal i D la diagonal dels valors propis, $f(\vec{x}) = \vec{x}_{\mathcal{B}}^T \mathsf{D} \vec{x}_{\mathcal{B}}$.

  Aquesta es la *forma reduïda* de f (perquè no conté termes mixts).

$(\cdots)$

(···)
Reducció de còniques

- Una cònica és una corba plana definida per l'equació

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \iff \underbrace{\vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\vec{x}}_{\text{forma quadràtica}} + \underbrace{\vec{b}^{\mathsf{T}}\vec{x}}_{\text{forma lineal}} = c$$

- Si $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ és una base ortonormal de vectors propis i $\mathsf{A} = \mathsf{QDQ}^{-1}$, si fem el canvi de base $\vec{x} = \mathsf{Q}\vec{y}$ l'equació de la cònica serà $\vec{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{D}\vec{y} + d^{\mathrm{T}}\vec{y} = c$, o bé,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d_1 y_1 + d_2 y_2 = c$$

28.8. Exercicis

Equacions en diferències

Exercici 28.1. Calculeu el terme general de la successió $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_n = -4a_{n-2} = 0$, si $n \geq 2$.

(solució: pàg. 672)

Exercici 28.2. Resoleu l'equació (matricial) en diferències $\vec{x}_n = \mathsf{A}\vec{x}_{n-1}$, on

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 672)

Exercici 28.3. Suposant que la matriu quadrada, $m \times m$, A és diagonalitzable ($\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$, amb D diagonal), trobeu el conjunt de totes les solucions de l'equació en diferències $\vec{a}_n = \mathsf{A}\vec{a}_{n-1}$.

(solució: pàg. 673)

Equacions i sistemes diferencials lineals

Exercici 28.4. Resoleu el sistema d'equacions diferencials lineals

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned}$$

i trobeu la solució particular que compleix les condicions inicials $y_1(0) = -1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 1$.

(solució: pàg. 673)

Exercici 28.5. Resoleu el sistema d'equacions diferencials lineals

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \vec{y}$$

(solució: pàg. 674)

Exercici 28.6. (a) Proveu que el conjunt de totes les solucions del sistema d'equacions diferencials lineals $\vec{y}\,' = \mathsf{A}\vec{y}$ és un subespai vectorial de l'espai $C_1(\mathbb{R})$. (b) Proveu que, si A és una matriu real i $\vec{z}$ és una funció complexa de variable real llavors, $\vec{z}$ és solució del sistema lineal $\vec{y}\,' = \mathsf{A}\vec{y}$, si i només si les parts real i imaginària de $\vec{z}$ en són solucions. (c) Proveu que, si A és una matriu real i $\vec{z}$ és una funció complexa de variable real, i si $\vec{z}$ és solució del sistema lineal $\vec{y}\,' = \mathsf{A}\vec{y}$ llavors, el conjugat $\overline{\vec{z}}$ també és solució del sistema.

(solució: pàg. 675)

Exercici 28.7. (a) Trobeu totes les solucions complexes del sistema d'equacions lineals $\begin{bmatrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{bmatrix}$. (b) Trobeu, també, totes les solucions reals.

(solució: pàg. 675)

Exercici 28.8. Proveu que les funcions $y = \left(C + \int g(t)\mathrm{e}^{-\int f(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{e}^{\int f(t)\,\mathrm{d}t}$, on C és una constant arbitrària i $f(t)$ i $g(t)$ funcions contínues en $\mathbb{K}$, són solucions de l'equació diferencial lineal $y' = f(t)y + g(t)$.

(solució: pàg. 676)

Exercici 28.9. Trobeu totes les solucions reals de les equacions lineals de segon ordre

(a) $y'' + y = 0$ (b) $y'' - y = 0$

fent servir el canvi $y_1 = y, y_2 = y'$.

(solució: pàg. 676)

Formes quadràtiques

Exercici 28.10. Una forma quadràtica $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\vec{x}$ és *definida positiva* si $f(\vec{x}) > 0$ per a tots els vectors no nuls. Proveu que això vol dir que tots els valors propis de la matriu A són positius. Si $f(\vec{x}) \geq 0$ per a tots els vectors, llavors la forma quadràtica és *semidefinida positiva*; i si la funció pren algun valor positiu i algun de negatiu, llavors es diu que la forma quadràtica és *indefinida* (la forma quadràtica f és definida positiva, semidefinida positiva o indefinida, quan ho és la matriu simètrica A).

(a) Caracteritzeu les formes semidefinides positives i les indefinides segons els signes dels valors propis.

(b) Estudieu si cadascuna de les matrius següents són definides positives, semidefinides positives o indefinides.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 677)

Reducció de còniques

Exercici 28.11. Reduïu la cònica $31x_1^2 + 10\sqrt{3}x_1x_2 + 21x_2^2 + x_1 + \sqrt{3}x_2 = 3/4$.
(solució: pàg. 678)

LLIÇÓ 29. LA FORMA REDUÏDA DE JORDAN

La forme canonique est l'invention simultanée
d'une forme de représentation et de procédés opératoires
qui montrent les étapes successives d'une pratique algébrique
de réduction indissociable d'un idéal de simplicité

Frédéric Brechenmacher

> A la lliçó 26 hem vist que no sempre és possible diagonalitzar una matriu quadrada A. En aquesta lliçó responem a la pregunta *i quan la matriu no és diagonalitzable...?* trobant una matriu J, semblant a la matriu A, que *quasi* és diagonal i conté el mínim nombre d'entrades no nul·les (la forma reduïda de Jordan).
> Ja sabem que sempre és possible trobar una matriu triangular superior (com ara la forma de Schur) semblant a la matriu A. Però, en general, la forma reduïda de Jordan conté molts més zeros: és una matriu *bidiagonal*, que a la diagonal principal conté els valors propis de A i a la diagonal situada a la dreta de la principal, alguns uns; tota la resta d'entrades són zeros.

La forma canònica de Jordan té més interès teòric que no pràctic, atés que numèricament és molt sensible a pertorbacions: un petit error en les entrades de la matriu pot conduir al càlcul d'una matriu de Jordan molt allunyada de la correcta. La forma de Schur és molt més estable.[1]

Per això, podeu considerar aquesta lliçó com opcional, o llegir-ne només els primers apartats, per entendre quina és l'estructura de la matriu de Jordan i aprendre a calcular-la en el cas de matrius de dimensions petites. Encara que la prova de l'existència que farem és ben interessant. En tot cas, hem provat de fer una presentació minimal: direm només el mínim imprescindible per descriure la matriu de Jordan i provar la seua existència.

29.1. BLOCS DE JORDAN I CADENES DE JORDAN

Començarem amb un exemple. La matriu següent té la forma de Jordan:

$$\mathrm{J} = \left[\begin{array}{ccc|c|cc|c|c}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7
\end{array}\right]$$

[1] De tota manera, el tema és ben interessant i ens proporciona una forma *canònica*, cosa que sempre ens fa feliços, als matemàtics.

Aquesta matriu és *diagonal per blocs* (els blocs no diagonals són tots matrius zero) i cada bloc de la diagonal és un *bloc de Jordan.*

Com que és una matriu triangular superior, sabem que els valors propis de la matriu J són

- $\lambda_1 = 2$ (amb multiplicitat algèbrica igual a 4),
- $\lambda_2 = -1$ (amb multiplicitat algèbrica 2),
- $\lambda_3 = 3$ (amb multiplicitat algèbrica 1) i
- $\lambda_4 = 7$ (amb multiplicitat algèbrica igual a 1).

Si calculeu el rang de la matriu $\mathsf{J} - 2\mathrm{I}$ comprovareu que la matriu J no és diagonalitzable, perquè $\mathrm{mgeo}(\lambda_1, \mathsf{J}) = 2$.

☞ Un *bloc de Jordan* d'ordre k és una matriu $k \times k$ de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Una matriu quadrada J *té la forma de Jordan* si $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} \mathsf{J}_1 & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathsf{J}_2 & \cdots & \mathrm{O} \\ \cdots \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \cdots & \mathsf{J}_n \end{bmatrix}$, on les matrius $\mathsf{J}_1, \mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_n$ són blocs de Jordan.

☞ Una matriu diagonal té la forma de Jordan (amb tots els blocs de Jordan d'ordre 1).

L'objectiu d'aquesta lliçó és provar que tota matriu quadrada complexa, A, és semblant a una matriu, J, que té la forma de Jordan, és a dir, que hi ha una matriu invertible, P, tal que $\mathsf{A} = \mathsf{PJP}^{-1}$ (o $\mathsf{AP} = \mathsf{PJ}$) (la matriu J és la *forma de Jordan* de la matriu A). Si passa això i el primer bloc de Jordan és d'ordre k, tindrem que

$$\mathsf{A}\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1 \quad \mathsf{A}\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \lambda_1\vec{p}_2 \quad \ldots \quad \mathsf{A}\vec{p}_k = \vec{p}_{k-1} + \lambda_1\vec{p}_k$$

És a dir,

$$(\mathsf{A} - \lambda_1\mathrm{I})\vec{p}_1 = \vec{0} \quad (\mathsf{A} - \lambda_1\mathrm{I})\vec{p}_2 = \vec{p}_1 \quad \ldots \quad (\mathsf{A} - \lambda_1\mathrm{I})\vec{p}_k = \vec{p}_{k-1}$$

Amb els altres blocs s'obtenen expressions anàlogues.

DEFINICIÓ 29.1.

Una *cadena de Jordan* de longitud k de la matriu A és un conjunt ordenat de vectors, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ tals que

$$\mathsf{A}\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1 \quad \mathsf{A}\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \lambda_1\vec{u}_2 \quad \ldots \quad \mathsf{A}\vec{u}_k = \vec{u}_{k-1} + \lambda_1\vec{u}_k$$

(on λ és un valor propi de la matriu).

En termes d'aplicacions lineals,

DEFINICIÓ 29.2.

Una *cadena de Jordan* de longitud k de l'endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ és un conjunt ordenat de vectors, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ tals que

$$f(\vec{u}_1) = \lambda_1\vec{u}_1 \quad f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \lambda_1\vec{u}_2 \quad \ldots \quad f(\vec{u}_k) = \vec{u}_{k-1} + \lambda_1\vec{u}_k$$

(on λ és un valor propi de l'endomorfisme).

En una cadena de Jordan, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$, el vector $\vec{u}_1$ és un vector propi, així que $\vec{u}_1 \in \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})$; el vector $\vec{u}_2$ és al nucli $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})^2$, perquè

$$(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})^2\vec{u}_2 = (\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})\vec{u}_1 = \vec{0}$$

Anàlogament, $\vec{u}_3 \in \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})^3$, …, $\vec{u}_k \in \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})^k$. Per això, els anomenem vectors propis generalitzats.

☞ Un *vector propi generalitzat* (associat al valor propi λ) és un vector no nul del nucli d'una potència de la matriu $\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I}$.

El *subespai propi generalitzat* (associat al valor propi λ) és el conjunt de tots els vectors propis generalitzats associats a λ.

DEFINICIÓ 29.3.

Una *base de Jordan* de l'espai E respecte a l'endomorfisme f (o respecte a la matriu A) és una base de l'espai formada per cadenes de Jordan de f (o de A).

Que tota matriu complexa A siga semblant a una matriu que té la forma de Jordan significa que, per a tot endomorfisme d'un espai vectorial complex de dimensió finita E, existeix una base de Jordan de E respecte a l'endomorfisme.

☞ El que provarem, més endavant, en aquesta lliçó és el teorema següent:

TEOREMA 29.1.

Si $f : E \longrightarrow E$ és un endomorfisme de l'espai vectorial complex de dimensió finita E llavors existeix una base de Jordan de E respecte a f.

També provarem que si diversos vectors propis són linealment independents llavors les cadenes de Jordan corresponents també són linealment independents.

Abans de fer la prova, però, en veurem algunes conseqüències i algun mètode per trobar la forma i la base de Jordan d'una matriu.

29.2. Obtenció de la forma reduïda de Jordan

Quan les dimensions de la matriu són grans, hi ha moltes possibilitats, pel que fa al nombre i les longituds de les cadenes de Jordan, però per a les matrius 2×2 o 3×3, trobar la factorització de Jordan no és massa complicat.

Començarem per ací.

29.2.1. Exemples senzills

Si A és una matriu 2×2, el problema és trivial: notem que, o bé la matriu és diagonalitzable (l la forma de Jordan és $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$), o bé hi ha un únic valor propi amb multiplicitat algèbrica igual a 1. En aquest cas, la forma de Jordan ha de ser $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ i per a trobar la matriu de canvi $\mathsf{P} = \begin{bmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 \end{bmatrix}$ hem de fer dues coses:

- trobar un vector propi $\vec{p}_1$, resolent el sistema lineal $(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})\vec{x} = \vec{0}$ i elegint qualsevol solució no nul·la i
- trobar el vector $\vec{p}_2$, resolent el sistema $(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})\vec{x} = \vec{p}_1$.

Exemple 29.1.

Trobeu la forma reduïda de Jordan, J, de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ i una matriu P tal que $\mathsf{A} = \mathsf{PJP}^{-1}$.

L'equació característica d'aquesta matriu és

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

Així que hi ha un valor propi, amb multiplicitat algèbrica igual a 2, $\lambda_1 = 4$.

Els vectors propis són les solucions del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 3-4 & -1 \\ 1 & 5-4 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

és a dir, els vectors de la forma $\vec{x} = (-1, 1)$. Per tant, la multiplicitat geomètrica de λ_1 és igual a 1 i la matriu A no és diagonalitzable. La forma reduïda de Jordan de la matriu A és $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Per a trobar la matriu P, hem de construir una base $\mathcal{B} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ tal que $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{bmatrix}\mathsf{A}$, és a dir, $(\mathsf{A} - 4\mathrm{I})\vec{p}_1 = 0$ i $(\mathsf{A} - 4\mathrm{I})\vec{p}_2 = \vec{p}_1$.

Les solucions de la primera d'aquestes equacions són els vectors propis; per exemple, $\vec{p}_1 = (-1, 1)$; i hem de trobar el vector $\vec{p}_2$ que complisca la segona equació:

$$(\mathsf{A} - 4\mathrm{I})\vec{p}_2 = (-1,1) \iff \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\vec{p}_2 = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\vec{p}_2 = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

La solució general d'aquest sistema és $\vec{p}_2 = (1, 0) + \beta(-1, 1)$. Així que podem elegir $\beta = 0$ i obtindrem la base de Jordan $\mathcal{B} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ ($\vec{p}_1 = (-1, 1)$, $\vec{p}_2 = (1, 0)$).

La matriu A es pot factoritzar d'aquesta manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 5\end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{\mathsf{P}}\underbrace{\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}}_{\mathsf{J}}\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}}$$

Aquesta és una factorització de Jordan de la matriu A. □

Si la matriu A és 3×3 llavors, les formes reduïdes de Jordan de A poden ser de tres tipus

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$$

Ací, els valors propis λ_1, λ_2 i λ_3 no tenen perquè ser distints. I encara és molt fàcil saber quina és la forma de la reduïda de Jordan de la nostra matriu: si la suma de les multiplicitats geomètriques és 3, llavors la matriu és diagonalitzable; si és 2, tindrem dos blocs de Jordan i, si és 1, n'hi haurà un de sol, amb longitud igual a 3.

Quan la matriu no és diagonalitzable, per als valors propis que tenen multiplicitat geomètrica igual a 1, no hi ha cap problema a l'hora de cercar una cadena de Jordan:

EXEMPLE 29.2.

> Trobeu la forma reduïda de Jordan de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ i la matriu de canvi de base, P, corresponent.

L'equació característica de la matriu A_1 és $\det(\mathsf{A}_1 - \lambda\mathrm{I}) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1 - \lambda)^3 = 0$. Així que hi ha un únic valor propi, $\lambda_1 = 1$, amb $\operatorname{malg}(\lambda_1) = 3$. La multiplicitat geomètrica és $3 - \operatorname{rang}(\mathsf{A}_1 - \mathrm{I}) = 3 - \operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$.

Així que la dimensió de l'espai propi és 1 i només hi ha una cadena de Jordan.

La matriu J_1 és $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per trobar la matriu P, resolem successivament els sistemes d'equacions $(\mathsf{A}_1 - \mathrm{I})\vec{x} = \vec{0}$, $(\mathsf{A}_1 - \mathrm{I})\vec{x} = \vec{p}_1$ (on $\vec{p}_1$ és una solució no nul·la del primer sistema) i $(\mathsf{A}_1 - \mathrm{I})\vec{x} = \vec{p}_2$ (on $\vec{p}_2$ és una solució del segon sistema).

$$(\mathsf{A}_1 - \mathrm{I})\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} = \alpha(1,1,0)$$

$$(\mathsf{A}_1 - \mathrm{I})\vec{x} = (1,1,0) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \vec{x} = (1,0,0) + \alpha(1,1,0)$$

$$(\mathsf{A}_1 - \mathrm{I})\vec{x} = (1,0,0) \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \vec{x} = (-1,1,0) + \alpha(1,1,0)$$

Així que podem elegir $\mathsf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \square$$

Ara bé, l'obtenció de la base de Jordan, quan algun valor propi té una multiplicitat geomètrica major que 1, ja no és tan trivial, perquè *no tots els vectors propis formen part de cadenes de Jordan de la longitud adequada.* Això ho veurem en l'exemple següent.

EXEMPLE 29.3.

> Trobeu la forma reduïda de Jordan de la matriu $\mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & 12 & 12 \end{bmatrix}$ i la matriu de canvi de base P_2.

En aquest cas, també hi ha un únic valor propi, $\lambda_1 = 8$; però ara la multiplicitat geomètrica és $3 - \text{rang}(\mathsf{A}_1 - 2\mathrm{I}) = 3 - \text{rang} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 4 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$, així que hi haurà dues cadenes de Jordan i la matriu J_2 és $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

L'espai propi és

$$\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 8\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 4 \end{bmatrix} = \langle (3,1,0), (1,0,1) \rangle$$

Això sembla indicar que hi haurà dues cadenes de Jordan, una de longitud 1 i l'altra de longitud 2, i que comencen amb els vectors $(3,1,0)$ i $(1,0,1)$, així que el que hem de fer és resoldre el sistema $(\mathsf{A} - 8\mathrm{I})\vec{x} = (3,1,0)$ o bé el sistema $(\mathsf{A} - 8\mathrm{I})\vec{x} = (1,0,1)$.

Provem amb el primer: esglaonem la matriu ampliada,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ -4 & 12 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

i deduïm que amb el vector $\vec{u}_1 = (3,1,0)$ no es pot construir una cadena de Jordan de longitud 2. Amb el segon vector, $\vec{u}_2 = (1,0,1)$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ -4 & 12 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

així que tampoc podem trobar-hi una cadena de Jordan amb dos vectors.

Això no significa que no n'hi hagen, de cadenes amb dos vectors. El que passa és que cap d'elles comença amb els dos vectors propis que hem trobat. L'alternativa és fer servir un vector propi qualsevol,

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 = (3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

és a dir, discutir el sistema lineal $(\mathsf{A} - 8\mathrm{I})\vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ i trobar els escalars α_1 i α_2 que el fan compatible.

Si esglaonem la matriu ampliada,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 & -3 & -1 & \alpha_1 \\ -4 & 12 & 4 & \alpha_2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

trobem que el sistema és compatible quan $4\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Per exemple, $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = -4$. En conseqüència, el vector $\vec{u} = \vec{u}_1 - 4\vec{u}_2 = (-1,1,-4)$.

Efectivament, elegint aquest vector, per construir una cadena de Jordan, haurem de resoldre el sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

que és indeterminat. Per exemple, podem elegir la solució $\vec{v} = (1,0,0)$: el parell de vectors $\vec{u} = (-1,1,-4)$, $v = (1,0,0)$ és una cadena de Jordan.

Si hi afegim un altre vector propi independent d'aquests, per exemple, $\vec{u}_1 = (3, 1, 0)$, obtindrem una base de Jordan: podem triar la matriu $\mathsf{P}_2 = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{u}_1 \end{bmatrix}$ i obtenim la factorització

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & 12 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \square$$

29.2.2. Suma directa dels subespais propis generalitzats

A la lliçó 26 vam veure que la suma dels subespais propis és directa i, en conseqüència, la matriu $n \times n$, A és diagonalitzable si aquesta suma omple l'espai:

$$\mathsf{A} \text{ és diagonalitzable } \iff \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I}) \oplus \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_2 \mathrm{I}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_r \mathrm{I}) = \mathbb{K}^n$$

Això no passa sempre; en canvi, la suma dels subespais propis *generalitzats* sí que omple l'espai, perquè si les multiplicitats algèbriques dels valors propis, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ són $m_1, m_2, \dots, m_r$, llavors els vectors propis generalitzats són els vectors no nuls dels subespais $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_1)^{m_1}$, $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_2)^{m_2}$, …, $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_r)^{m_r}$.

Per tant, el fet que tota matriu té una base de Jordan significa que la suma d'aquests espais nuls és directa i, a més, aquesta suma és igual a $\mathbb{C}^n$:

$$\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})^{m_1} \oplus \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_2 \mathrm{I})^{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_r \mathrm{I})^{m_r} = \mathbb{C}^n$$

Una base de Jordan és una unió de diverses bases, una de cadascun d'aquests subespais; i cada base d'aquestes és formada per una o diverses cadenes de Jordan. De fet, el nombre de cadenes de Jordan és igual a la multiplicitat geomètrica del valor propi.

- ☞ La multiplicitat algèbrica del valor propi λ indica el nombre de vectors de la base de Jordan que són vectors propis generalitzats associats a λ.

- ☞ La multiplicitat geomètrica indica el nombre de cadenes de Jordan de la base que aporta el valor propi λ.

29.2.3. Nombre i longitud de les cadenes de Jordan

Tot això ens dona pistes sobre l'estructura de la base de Jordan (i, per tant, de la matriu J), però no acaba de descriure aquesta estructura: el nombre de cadenes de Jordan associades a cada valor propi és igual a la multiplicitat geomètrica corresponent, però no sabem quines longituds tenen les cadenes de Jordan; amb matrius petites, com que hi ha poques alternatives, no sol ser difícil determinar-la. Ara per ara, però, no sabem quina és aquesta estructura en general. Una manera, si més no teòrica, de trobar-la consisteix a fer el raonament següent:

Si m és la multiplicitat algèbrica de valor propi λ i anomenem n_1 la dimensió del subespai $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})$, *$n_2$ la de* $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^2$*... com que*

$$\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I}) \subset \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^m$$

la base de Jordan contindrà n_1 vectors propis, altres $n_2 - n_1$ vectors (independents dels propis) procedents del segon nucli, n_3-n_2 del tercer, i així successivament fins a completar els m vectors necessaris.[2]

Suposem, per exemple, que $n_1 = \dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I}) = 3$, $n_2 = \dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^2 = 5$, $n_3 = \dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^3 = 7$, $n_4 = \dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^4 = 8$ i $\dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^5 = 8$. Això vol dir que a la base de Jordan hi ha:

- 3 vectors propis (de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})$).
- 5 vectors de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^2$ (els 3 propis i dos més).
- 7 vectors de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^3$ (els 5 anteriors i dos més).
- 8 vectors de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^4$ (els 7 anteriors i un més).

I això completa la base, perquè el fet que $n_5 = n_4 = 8$ implica que la multiplicitat algèbrica és 8 (això ho deixem com a exercici).

Per tant, tenim tres cadenes de Jordan i la més llarga és de longitud 4 (només una, perquè només hi ha un vector de la base que no és al subespai $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^3$):

$$\vec{u}_4, \quad \vec{u}_3 = (\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})\vec{u}_4, \quad \vec{u}_2 = (\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})\vec{u}_3, \quad \vec{u}_1 = (\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})\vec{u}_2$$

A més a més, el fet que a $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^3$ hi ha dos vectors més que a $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^2$ vol dir que hi ha dues cadenes de longitud més gran que 2 (és a dir, de longitud 3 o 4); ara, ja sabem que, de longitud 3 n'hi ha una; per tant, només hi ha una cadena de longitud 3:

$$\vec{v}_3, \quad \vec{v}_2 = (\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})\vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 = (\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})\vec{v}_2$$

De cadenes de longitud 2 no n'hi ha cap, perquè, com que hi ha dos vectors més a $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^2$ que no a $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})$, sabem que hi ha d'haver dues cadenes de longitud dos o més (i ja les tenim!).

Finalment, dels tres valors propis, dos són a les cadenes que ja coneixem, així que hi queda una tercera cadena, de longitud 1:

$$\vec{w}_1$$

La part de la base de Jordan corresponent al valor propi λ (i ordenada correctament) és

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^4} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{w}_1\}$$

[2] De fet, aquesta és la idea bàsica de la prova constructiva de l'existència de la base de Jordan que sol trobar-se habitualment als textos.

i la matriu J té aquesta estructura

$$\mathsf{J} = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c|c}
\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
\cline{1-8}
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \mathrm{O} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \\
\cline{1-8}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \\
\hline
\multicolumn{8}{c|}{\mathrm{O}} & \mathsf{J}_1
\end{array}\right]$$

(la matriu J_1 conté les cadenes de Jordan corresponents als altres valors propis).

L'esquema següent mostra la distribució dels vectors de la base a les cadenes de Jordan.

$\vec{u}_4$			vectors de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^4$ que no són a $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^3$
$\vec{u}_3$	$\vec{v}_3$		vectors de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^3$ que no són a $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^2$
$\vec{u}_2$	$\vec{v}_2$		vectors de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^2$ que no són a $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})$
$\vec{u}_1$	$\vec{v}_1$	$\vec{w}_1$	vectors de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})$

Aquest exemple ens dona les claus per determinar les longituds de les cadenes:

– Considerem la successió de les dimensions dels subespais nuls

$$n_0 = 0, n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \dots$$

  - $n_0 = 0$, perquè la matriu $(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^0 = \mathrm{I}$ és invertible).
  - Aquesta successió acaba quan dos termes consecutius són iguals.

– La diferència entre dos termes successius d'aquesta successió, $n_k - n_{k-1}$ és el nombre de *cadenes que tenen una llargada de n_k vectors o més.*

– La diferència, $(n_k - n_{k-1}) - (n_{k+1} - n_k)$ *és el nombre de cadenes de longitud exactament k*, perquè al nombre de cadenes de longitud almenys k li restem el de cadenes de longitud almenys $k+1$.

En conseqüència,

☞ Si $n_k = \dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^k$, el nombre de cadenes de Jordan de longitud k (respecte al valor propi λ) és $(n_k - n_{k-1}) - (n_{k+1} - n_k)$.

Però és més convenient expressar aquest nombre en funció dels rangs de les matrius: si la matriu A és $n \times n$ i r_k és el rang de la matriu $(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^k$, sabem que $n_k = n - r_k$. Per tant,

$$\begin{aligned}(n_k - n_{k-1}) - (n_{k+1} - n_k) &= (n - r_k - n + r_{k-1}) - (n - r_{k+1} - n + r_k) \\ &= (r_{k+1} - r_k) - (r_k - r_{k-1})\end{aligned}$$

☞ Si $r_k = \text{rang}(\mathsf{A}-\lambda \mathrm{I})^k$, el nombre de cadenes de Jordan de longitud k (respecte al valor propi λ) és $(r_{k+1} - r_k) - (r_k - r_{k-1})$.

Nombre i longituds de les cadenes de Jordan
Aquest algorisme determina la forma de Jordan de la matriu quadrada ($n \times n$) A

Per a cada valor propi λ,
Calculeu els rangs de les potències successives...

$$r_0 = \text{rang}(A - \lambda \mathrm{I})^0 = n, r_1 = \text{rang}(A - \lambda \mathrm{I})^1, r_2 = \text{rang}(A - \lambda \mathrm{I})^2 \ldots$$

fins que $\text{rang}(A - \lambda \mathrm{I})^k = \text{rang}(A - \lambda \mathrm{I})^{k+1}$

El nombre de cadenes de Jordan de longitud k és igual a

$$(r_{k+1} - r_k) - (r_k - r_{k-1})$$

Una forma còmoda de calcular aquestes longituds és fent servir l'esquema de diferències finites següent (els elements de les columnes segona i tercera es calculen restant els dos nombres adjacents a la columna anterior):

$$\begin{array}{lll}
r_0 & & \\
 & r_0 - r_1 & \\
r_1 & & (r_0 - r_1) - (r_1 - r_2) \text{ cadenes de longitud 1} \\
 & r_1 - r_2 & \\
r_2 & & (r_1 - r_2) - (r_2 - r_3) \text{ cadenes de longitud 2} \\
 & r_3 - r_2 & \\
r_3 & &
\end{array}$$

...

$$\begin{array}{lll}
r_{k-1} & & \\
 & r_{k-1} - r_k & \\
r_k & & (r_{k-1} - r_k) - (r_k - r_{k+1}) \text{ cadenes de long. } k \\
 & r_k - r_{k+1} & \\
r_{k+1} & &
\end{array}$$

...

Ací, $r_0 = \text{rang}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^0 = n$ i la successió $\{r_k\}$ acaba quan dos termes successius són iguals.

Exemple 29.4.

Trobeu la forma de Jordan, J, de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

L'equació característica és $(1-\lambda)^5(2-\lambda) = 0$. Per tant, hi ha dos valors propis, $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$, amb multiplicitats algèbriques 5 i 1, respectivament. El valor propi λ_2 no presenta cap problema. Pel que fa al valor propi 1, les potències successives de $\mathsf{A} - \mathrm{I}$ i els seus rangs són

$$(\mathsf{A}-\mathrm{I})^0 = \mathrm{I} \qquad \operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = 6$$

$$\mathsf{A}-\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = 3$$

$$(\mathsf{A}-\mathrm{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^2 = 2$$

$$(\mathsf{A}-\mathrm{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^3 = 1$$

$$(\mathsf{A}-\mathrm{I})^4 = (\mathsf{A}-\mathrm{I})^3 \qquad \operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^4 = 1$$

L'estructura de la matriu J la podem determinar fent servir l'esquema de diferències finites

6
3
3 2
1
2 0
1
1 1
0
1

Hi ha 2 cadenes de longitud 1 i 1 de longitud 3, associades al valor propi $\lambda_1 = 1$.

La forma de Jordan de la matriu A és

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \square$$

29.2.4. Càlcul de la base de Jordan

Ja hem justificat (a l'exemple 29.3) que partir dels valors propis per cercar les cadenes de Jordan no és una bona idea, perquè, *a priori*, no sabem quins vectors propis són els adequats. Per això, és més recomanable construir la base *en sentit invers*, és a dir, començant pels últims vectors de les cadenes.

La forma efectiva de fer-ho es basa en la idea següent: *si necessiteu una cadena de Jordan de longitud k, cerqueu vectors del subespai* $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^k$ *que no pertanguen al subespai anterior* $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k-1}$ *i que siguen independents de les cadenes que ja heu calculat.* Ho veurem amb un exemple.

Exemple 29.5.

Trobeu la base de Jordan de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A l'exemple anterior ja hem trobat la forma de Jordan, J, d'aquesta matriu: per al valor propi $\lambda_1 = 1$ hi ha una cadena de Jordan de longitud 3 i dues de longitud 1 i per a $\lambda_2 = 2$, una de longitud 1.

Començarem cercant la cadena de longitud 3; si $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ és una cadena de longitud 3, el vector $\vec{p}_3$ és al subespai nul de $(\mathsf{A} - \mathrm{I})^3$ però no al de $(\mathsf{A} - \mathrm{I})^2$. El subespai nul de $(\mathsf{A}-\mathrm{I})^3$ és

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^3 = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Dit d'una altra manera, les columnes de la matriu

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

són una base de l'espai propi generalitzat. Si ara multipliquem $(\mathsf{A}-\mathrm{I})^2$ per aquesta matriu,

$$(\mathsf{A}-\mathrm{I})^2\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

trobem que les columnes tercera i cinquena de B no són a l'espai $\operatorname{Nul}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^2$, així que qualsevol de les dues es pot elegir per construir la cadena de Jordan. Per exemple,

$$\begin{aligned} \vec{p}_3 &= \vec{b}_3 = (0,0,1,0,0,0) \\ \vec{p}_2 &= (\mathsf{A}-\mathrm{I})\vec{p}_3 = (2,1,4,0,-4,0) \\ \vec{p}_1 &= (\mathsf{A}-\mathrm{I})\vec{p}_2 = (1,0,2,0,-2,0) \end{aligned}$$

Les altres dues cadenes de Jordan corresponents al valor propi 1 són vectors propis, $\vec{p}_4$ i $\vec{p}_5$, linealment independents entre ells i amb $\vec{p}_3$. El subespai propi és

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \langle (1,0,0,0,0,0), (0,0,0,1,0,2), (0,0,-1,0,1,0) \rangle$$

i n'hem de traure dos vectors independents de p_3; per exemple, $p_4 = (1,0,0,0,0,0)$ i $p_4 = (0,0,0,1,0,2)$.

Tot això vol dir que el conjunt

$$\{(1,0,2,0,-2,0),(2,1,4,0,-4,0),(0,0,1,0,0,0),(1,0,0,0,0,0),(0,0,0,1,0,2)\}$$

és una base de Jordan del subespai propi associat al valor propi 1.

L'altre valor propi ens ha de proporcionar un vector independent: calculem el subespai propi, que és de dimensió 1,

$$E_2(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 2\mathrm{I}) = \langle(0,0,0,0,0,1)\rangle$$

El vector $(0,0,0,0,0,1)$ és una cadena de Jordan respecte a $\lambda_2 = 2$. Aquest serà el vector $\vec{u}_6$ que inclourem a la base de Jordan.

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{&(1,0,2,0,-2,0),(2,1,4,0,-4,0),(0,0,1,0,0,0),\\&(1,0,0,0,0,0),\\&(0,0,0,1,0,2),\\&(0,0,0,0,0,1)\}\end{aligned}$$

és una base de Jordan de $\mathbb{C}^6$ respecte a la matriu A. Aquesta matriu es pot factoritzar com

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad \square$$

El cas general és bastant més complex. El descrivim en l'algorisme següent:

Càlcul d'una base de Jordan

Aquest algorisme troba una base de Jordan de la matriu quadrada A

Suposem que ja es coneix la forma de Jordan de la matriu A.

Per a cada valor propi, ordeneu els blocs de Jordan corresponents per ordre de longitud, del més llarg al més curt. Calcularem successivament les cadenes de Jordan seguint aquest ordre.

Per a cada valor propi, λ_i,

Obtenció de la primera cadena: Si k és la longitud de la cadena més llarga,

- calculeu una base de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda_i \mathrm{I})^k$,
- cerqueu un vector d'aquesta base que no pertanga a $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda_i \mathrm{I})^{k-1}$ i
- construïu una cadena de Jordan acabada en aquest vector.

Obtenció de les cadenes successives: Si k és la longitud de la cadena que voleu construir,

- calculeu una base de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda_i \mathrm{I})^k$,
- calculeu una base de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda_i \mathrm{I})^{k-1}$,
- feu la unió d'aquesta segona base amb totes les cadenes que ja heu construït i
- elegiu un vector de la base de $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-\lambda_i \mathrm{I})^k$ que no siga combinació lineal d'aquesta unió.
- Construïu una cadena de Jordan acabada en aquest vector.

Aplicar aquest algorisme directament, *a mà*, és molt complicat. Però, si més no per a matrius no gaire grans, es pot aplicar fàcilment amb l'ajut d'algun programari matemàtic.

29.3. Resum

Blocs de Jordan i cadenes de Jordan

- Una *cadena de Jordan* de longitud k de la matriu A és un conjunt, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ tals que

$$\mathsf{A}\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1 \quad \mathsf{A}\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \lambda_1\vec{u}_2 \quad \dots, \quad \mathsf{A}\vec{u}_k = \vec{u}_{k-1} + \lambda_1\vec{u}_k$$

  (on λ és un valor propi de la matriu).
- Una *cadena de Jordan* de longitud k de l'endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ és un conjunt, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ tals que

$$f(\vec{u}_1) = \lambda_1\vec{u}_1 \quad f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \lambda_1\vec{u}_2 \quad \dots, \quad f(\vec{u}_k) = \vec{u}_{k-1} + \lambda_1\vec{u}_k$$

  (on λ és un valor propi de l'endomorfisme).
- Un *bloc de Jordan* és una matriu del tipus $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.
- Una matriu quadrada J *té la forma de Jordan* si $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} \mathsf{J}_1 & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathsf{J}_2 & \cdots & \mathrm{O} \\ \cdots & & & \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \cdots & \mathsf{J}_n \end{bmatrix}$, on les matrius $\mathsf{J}_1, \mathsf{J}_2, \dots, \mathsf{J}_n$ són blocs de Jordan.
- Una *base de Jordan* respecte a la matriu A (o respecte a l'endomorfisme f) és una base de l'espai formada per cadenes de Jordan de A (o de f).

La forma reduïda de Jordan

- Si A és una matriu quadrada complexa i els seus valors propis són λ_1, λ_2, ..., λ_r, amb multiplicitats algèbriques m_1, m_2, ..., m_r,

$$\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathrm{I})^{m_1} \oplus \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_2 \mathrm{I})^{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda_r \mathrm{I})^{m_r} = \mathbb{C}^n$$

- Si $f : E \longrightarrow E$ és un endomorfisme de l'espai vectorial complex de dimensió finita E llavors existeix una base de Jordan de E respecte a f.
- Si A és una matriu quadrada complexa, existeix una matriu J que té la forma de Jordan i una matriu invertible P tals que $\mathsf{A} = \mathsf{PJP}^{-1}$.

  ☞ Les entrades diagonals de J són els valors propis de A.
- El nombre de cadenes de Jordan associades al valor propi λ és $\mathrm{mgeo}(\lambda)$.
- Si λ és un valor propi i $r_k = \mathrm{rang}(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})^k$, el nombre de cadenes de Jordan de longitud k és $(r_{k+1} - r_k) - (r_k - r_{k-1})$.

29.4. Exercicis

Exercici 29.1. Trobeu les formes de Jordan de les matrius següents, una base de Jordan per a cadascuna d'elles i mostreu-ne una factorització de Jordan.

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(solució: pàg. 680)

Exercici 29.2. Trobeu la forma de Jordan J de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ i una matriu P tal que $\mathsf{A} = \mathsf{PJP}^{-1}$.

(solució: pàg. 682)

Exercici 29.3. Trobeu la forma de Jordan, J, de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ i una matriu P tal que $\mathsf{A} = \mathsf{PJP}^{-1}$.

(solució: pàg. 684)

Exercici 29.4. El polinomi característic de la matriu A és $\lambda^2(1-\lambda)^6(2-\lambda)$. A més a més, $\operatorname{rang}\mathsf{A} = 7$, $\operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = 6$, $\operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^2 = 4$ i $\operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^3 = 3$. Quina és la forma de Jordan de la matriu A?

(solució: pàg. 686)

Exercici 29.5. Proveu que, si λ és un valor propi de la matriu A i $\dim \operatorname{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^k = \dim(\operatorname{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^{k+1}$ llavors aquesta dimensió és igual a la multiplicitat algèbrica de λ.

(solució: pàg. 686)

29.4.1. Polinomis anul·ladors

Si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 z^0$ és un polinomi amb coeficients complexos i A és una matriu, podem substituir la indeterminada z per la matriu A:

$$p(\mathsf{A}) = a_n\mathsf{A}^n + a_{n-1}\mathsf{A}^{n-1} + \cdots + a_1\mathsf{A} + a_0\mathrm{I}$$

Per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $p(z) = x^3 - 2x + 1$,

$$p(\mathsf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^3 - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^3 - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

☞ Un polinomi *anul·lador* de la matriu A és un polinomi $p(z)$ tal que $p(\mathsf{A}) = \mathrm{O}$.

Exercici 29.6. (El teorema de Cayley-Hamilton) Demostreu que el polinomi característic de la matriu A n'és anul·lador.

(solució: pàg. 687)

Exercici 29.7. (El polinomi mínim) Si els valors propis de la matriu A són λ_1, λ_2,..., λ_r i l_1, l_2, ..., l_r són les longituds màximes de les cadenes de Jordan corresponents, el *polinomi mínim* de la matriu A és $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{l_r}$.

Demostreu que (a) el polinomi mínim de la matriu A n'és anul·lador, (b) el polinomi mínim és divisor de qualsevol altre polinomi anul·lador i (c) la matriu A és diagonalitzable si i només si $m(\lambda, \mathsf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_r)$.

(solució: pàg. 687)

El polinomi mínim no ens dona tota la informació per trobar la forma de Jordan, perquè només ens informa de la longitud màxima de les cadenes de Jordan, però no del nombre i les longituds de totes les cadenes.

Tot i això, amb matrius de dimensions menudes, sí que pot ser bastant útil.

Exercici 29.8. Trobeu el polinomi mínim i la forma de Jordan de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(solució: pàg. 688)

Exercici 29.9. Trobeu el polinomi mínim, la forma de Jordan i una base de Jordan de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(solució: pàg. 689)

Exercici 29.10. Què podem dir sobre el polinomi mínim i la forma de Jordan d'una matriu A si totes les multiplicitats geomètriques són iguals a 1?

(solució: pàg. 691)

Exercici 29.11. Resoleu el sistema d'equacions diferencials lineals $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \vec{y}$, fent servir la forma de Jordan de la matriu de coeficients.

(solució: pàg. 691)

29.5. Apèndix: Demostració del teorema d'existència

En aquest apèndix provarem el teorema 29.1.

29.5.1. Independència lineal de les cadenes de Jordan

Una cadena de Jordan $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ (de la matriu A amb el valor propi λ) sempre és linealment independent, perquè, si $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_k = \vec{0}$, multiplicant per $\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} \alpha_1(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})\vec{u}_1 + \alpha_2(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})\vec{u}_2 + \alpha_3(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})\vec{u}_3 + \cdots + \alpha_k(\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})\vec{u}_k &= \vec{0} \\ \alpha_2\vec{u}_1 + \alpha_3\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_{k-1} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Així que, si hi multipliquem reiteradament per $\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I}$, obtindrem

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_k &= \vec{0} \\ \alpha_2\vec{u}_1 + \alpha_3\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_{k-1} &= \vec{0} \\ \alpha_3\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{u}_{k-2} &= \vec{0} \\ &\cdots \\ \alpha_k\vec{u}_1 &= \vec{0} \end{aligned}$$

i d'aquí es dedueix que $\alpha_k = \alpha_{k-1} = \cdots = \alpha_1 = 0$. □

Diverses cadenes de Jordan, amb el mateix valor propi λ, i amb els vectors propis inicials linealment independents, també fan un conjujt linealment independent. Per simplificar la prova, ho farem només amb dues cadenes de longituds 3 i 2, respectivament: suposem que tenim les cadenes $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ i $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; si hi tenim una combinació lineal nul·la, $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, multiplicant-hi dues vegades per $\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I}$ tindrem

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 &= \vec{0} \\ \alpha_2\vec{u}_1 + \alpha_3\vec{u}_2 + \beta_2\vec{v}_1 &= \vec{0} \\ \alpha_3\vec{u}_1 &= \vec{0} \end{aligned}$$

De la tercera igualtat es dedueix que $\alpha_3 = 0$. Llavors, la segona igualtat es redueix a $\alpha_2\vec{u}_1 + \beta_2\vec{v}_1 = \vec{0}$ i, com que els vectors propis $\vec{u}_1$ i $\vec{v}_1$ són linealment independents, també $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. I, per la primera igualtat, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. □

Finalment, les cadenes de Jordan amb vectors propis distints també són independents. Novament, farem la prova només amb dues cadenes: si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ i $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ són cadenes de Jordan, amb els valors propis, distints, λ_1 i λ_2 i

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 + \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 = \vec{0} \tag{29.1}$$

multiplicant-hi dues vegades per $\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I}$, obtindrem

$$\alpha_2\vec{u}_1+\alpha_3\vec{u}_2+(\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I})(\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2)=\vec{0} \tag{29.2}$$

$$\alpha_3\vec{u}_1+(\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I})^2(\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2)=\vec{0} \tag{29.3}$$

Ara multipliquem per $\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I}$,

$$\alpha_3(\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I})\vec{u}_1+(\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I})(\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I})^2(\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2)=\vec{0}$$

$$\alpha_3(\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I})\vec{u}_1+(\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I})^2(\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I})(\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2)=\vec{0}$$

(perquè les matrius $\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I}$ i $\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I}$ commuten)

$$\alpha_3(\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I})\vec{u}_1+(\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I})^2(\beta_2\vec{v}_1)=\vec{0}$$

$$\alpha_3\,(\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I})\,\vec{u}_1+\beta_2\left(\mathsf{A}^2-2\lambda_1\mathsf{A}+\lambda_1^2\mathrm{I}\right)\vec{v}_1=\vec{0}$$

$$\alpha_3(\lambda_1-\lambda_2)\vec{u}_1+\beta_2(\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_1^2)\vec{v}_1=\vec{0}$$

$$\alpha_3(\lambda_1-\lambda_2)\vec{u}_1+\beta_2(\lambda_2-\lambda_1)^2\vec{v}_1=\vec{0}$$

Llavors, com que $\vec{u}_1$ i $\vec{v}_1$ són linealment independents i $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\alpha_3=\beta_2=0$. Per tant, l'expressió (29.3) es redueix a

$$(\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I})^2\beta_1\vec{v}_1=\vec{0}$$

$$(\lambda_2-\lambda_1)^2\beta_1\vec{v}_1=\vec{0}$$

I, per tant, $\beta_1=0$. Finalment, anant a (29.2), trobem que $\alpha_2=0$ i, en la combinació lineal original, (29.1), $\alpha_1=0$. □

☞ Un conjunt format per cadenes de Jordan de la matriu A (amb els vectors propis corresponents al mateix valor propi independents) és un conjunt linealment independent.

29.5.2. Demostració de l'existència de la base de Jordan

Abans de tot, observarem que si coneixem una factorització de Jordan de la matriu A, $\mathsf{A}=\mathsf{PJP}^{-1}$, i c és un nombre qualsevol, llavors

$$\mathsf{A}-c\mathrm{I}=\mathsf{PJP}^{-1}-c\mathsf{PIP}^{-1}=\mathsf{P}(\mathsf{J}-c\mathrm{I})\mathsf{P}^{-1}$$

així que la forma de Jordan de la matriu $\mathsf{B}=\mathsf{A}-c\mathrm{I}$ s'obté restant c a la diagonal de J (els valors propis de B són els λ_i-c i la base de Jordan de A també és una base de Jordan de A). Això ho utilitzarem en la demostració.

Teorema 29.1.

Si $f:E\longrightarrow E$ és un endomorfisme de l'espai vectorial complex de dimensió finita E llavors existeix una base de Jordan de E respecte a f.

Demostració: Ho provarem pel mètode d'inducció:[3]

Si la dimensió de l'espai E és igual a 1, no hi ha res a demostrar: qualsevol vector no nul és una base de Jordan. Així que suposarem que el teorema és cert per a qualsevol espai de dimensió menor que n i mirarem de provar-lo per a un espai E de dimensió n.

En distingirem dos casos:

Cas 1: $f\colon E \longrightarrow E$ no és bijectiva.

En aquest cas, el conjunt imatge, $\operatorname{Im} f$, és un subespai de E de dimensió $r < n$. I l'aplicació f, restringida a aquest subespai és un endomorfisme de $\operatorname{Im} f$. Per tant, per la hipòtesi d'inducció, hi podem trobar una base de Jordan $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r\}$.

Completarem aquesta base a una base de Jordan de tot l'espai E. Tenint en compte la fórmula de les dimensions,

$$\underbrace{\dim E}_{n} = \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{r} + \dim \operatorname{Nuc} f$$

resulta que $\dim \operatorname{Nuc} f = n - r$ i també són $n - r$ els vectors que ens falten per completar la base. Però *no és cert que una base del nucli complete la base de E*, perquè la suma de la imatge i el nucli no té perquè ser directa. En altres paraules, és possible que el subespai $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Nuc} f$ continga només el vector zero o que hi haja més vectors.

En qualsevol cas, si p és la dimensió del subespai $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Nuc} f$, com que el nucli de f és l'espai propi associat al valor propi zero, a la base $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ hi ha p cadenes de Jordan que comencen amb un vector propi en $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Nuc} f$. Cadascuna d'aquestes cadenes és de la forma $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$, amb

$$f(\vec{w}_1) = 0\vec{w}_1 \quad f(\vec{w}_2) = 0\vec{w}_2 + \vec{w}_1 \quad \ldots \quad f(\vec{w}_k) = 0\vec{w}_k + \vec{w}_{k-1}$$

Però $\vec{w}_k \in \operatorname{Im} f$, així que ha d'haver-hi un altre vector $\vec{w}_{k+1}$ amb $f(\vec{w}_{k+1}) = \vec{w}_k$, és a dir, $f(\vec{w}_{k+1}) = 0\vec{w}_{k+1} + \vec{w}_k$. I tenim (en E) la cadena de Jordan $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k, \vec{w}_{k+1}\}$.

☞ Cada cadena de Jordan de f associada al valor propi zero en $\operatorname{Im} f$ s'allarga en un vector per formar una cadena de Jordan de f en E.

Així que, a la base de $\operatorname{Im} f$, hi afegirem els vectors $\vec{w}_{k+1}$, que anomenarem $\vec{y}_{r+1}$, $\vec{y}_{r+2}$,..., $\vec{y}_{r+p}$.

Ara bé, com que la dimensió del nucli és $n - r$ i hi ha p vectors del nucli independents que són a la imatge $\operatorname{Im} f$, podem completar-hi una base del

[3] En aquest curs, hem evitat les proves per inducció, sovint camuflant-les amb algun «i així successivament» o quelcom semblant. Però la prova que presentem ací és més simple i entenedora que altres demostracions. I evitar la inducció, amb el mètode que farem servir, no és fàcil (ni segurament possible).

nucli afegint $n-r-p$ vectors nous, $\vec{z}_{r+p+1}, \vec{z}_{r+p+2}, \dots, \vec{z}_n$. Aquests vectors són vectors propis associats també al valor propi zero i ens proporcionen $n-r-p$ cadenes de Jordan de longitud 1.

El conjunt

$$\mathcal{B}_E = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r\} \cup \{\vec{y}_{r+1}, \vec{y}_{r+2}, \dots, \vec{y}_{r+p}\} \cup \{\vec{z}_{r+p+1}, \vec{z}_{r+p+2}, \dots, \vec{z}_n\}$$

és una base de Jordan de E associada a l'endomorfisme f, perquè ja hem vist que la unió de cadenes de Jordan amb vectors propis independents és independent.

Cas 2: $f : E \longrightarrow E$ és bijectiva.

Elegim un valor propi qualsevol, λ. Llavors l'endomorfisme $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda\vec{x}$ no és bijectiu i hi podem aplicar el cas anterior:

Existeix una base de Jordan de E respecte a l'endomorfisme g, $\mathcal{B}_E = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$.

Però, tenint en compte el comentari previ al teorema, aquesta també és una base de Jordan corresponent a l'endomorfisme f. $\square$

Capítol 8

Factorització en valors singulars. Valors singulars i vectors singulars

Lliçó 30. Vectors singulars i valors singulars **450**

30.1. Descomposició en valors singulars d'una aplicació lineal 450

30.2. Descomposició en valors singulars d'una matriu . 453

30.2.1. Construcció de la descomposició en valors singulars 453

30.2.2. Descomposició en valors singulars reduïda 459

30.3. El significat numèric de la descomposició en valors singulars 461

30.4. Resum 463

30.5. Exercicis 464

Lliçó 31. Aplicacions dels valors singulars. La pseudoinversa **466**

31.1. Sistemes d'equacions lineals 466

31.2. Mínims quadrats 467

31.3. Aproximacions de rang limitat 468

31.3.1. Aplicació a la compressió d'imatges . . . 470

31.4. La pseudoinversa 472

31.4.1. Interpretació com una inversa per mínims quadrats 474

31.5. Resum 474

31.6. Exercicis 475

Lliçó 30. Vectors singulars i valors singulars

Para responder a la pregunta ¿qué son los valores singulares?
podemos formular otra pregunta:
¿cuál es la imagen de la circunferencia unidad
(la de centro el origen de coordenadas y radio 1)
por una aplicación lineal?
Jon Zaballa

Acabarem el curs justificant que qualsevol aplicació lineal f entre $\mathbb{K}^n$ i $\mathbb{K}^m$, $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ és, essencialment, un isomorfisme entre els espais fila i columna de la matriu A: hi ha una base ortonormal de l'espai $\operatorname{Fil}\mathsf{A}$, $\mathcal{B}_{\operatorname{Fil}\mathsf{A}}$, i una altra de l'espai $\operatorname{Col}\mathsf{A}$, $\mathcal{B}_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}$, tals que les imatges dels vectors de $\mathcal{B}_{\operatorname{Fil}\mathsf{A}}$ són múltiples dels vectors de $\mathcal{B}_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}$.
Això, en termes matricials, és la descomposició en valors singulars: qualsevol matriu $m \times n$, A, es pot escriure en la forma $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$, on U i V són matrius unitàries; a més, les entrades no diagonals de la matriu Σ són totes nul·les; és a dir, que podem *diagonalitzar* qualsevol matriu, elegint bases diferents en els espais vectorials inicial i final.

30.1. Descomposició en valors singulars d'una aplicació lineal

Perquè la transformació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ siga bijectiva, el que ha de passar és que la matriu A siga invertible; en aquest cas, l'aplicació f^{-1} també és lineal i es pot calcular com $f^{-1}(\vec{y}) = \mathsf{A}^{-1}\vec{y}$. Si f no és bijectiva, no hi ha una aplicació inversa perquè algun vector de l'espai d'arribada no té cap antiimatge, o algun en té més d'una (o les dues coses a l'hora). Ara bé, al capítol 22 hem vist que la restricció als espais fila i columna

$$\begin{aligned} f\colon \operatorname{Fil}\mathsf{A} &\longrightarrow \operatorname{Col}\mathsf{A} \\ \vec{x} &\rightsquigarrow f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x} \end{aligned}$$

sí que és bijectiva. A més, aquesta aplicació restringida és suficient per conéixer la transformació f, perquè qualsevol vector $\vec{v}$ de l'espai original és la suma $\vec{v} = \vec{v}_{\operatorname{Fil}\mathsf{A}} + \vec{v}_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*}$, on $\vec{v}_{\operatorname{Fil}\mathsf{A}}$ és un vector de l'espai fila i $\vec{v}_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*} \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$, de manera que

$$f\left(\vec{v}\right) = f\left(\vec{v}_{\operatorname{Fil}\mathsf{A}}\right) + f\left(\vec{v}_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*}\right) = f\left(\vec{v}_{\operatorname{Fil}\mathsf{A}}\right)$$

En termes de coordenades, si $\mathcal{B}_{\operatorname{Fil}\mathsf{A}} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ és una base de $\operatorname{Fil}\mathsf{A}$ i $\mathcal{B}_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}} = \{\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \dots, \vec{v}_n\}$ és una base de $\operatorname{Nul}\mathsf{A}$, llavors $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ és una base de $\mathbb{K}^n$ i

$$f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + x_r f(\vec{v}_r) \tag{30.1}$$

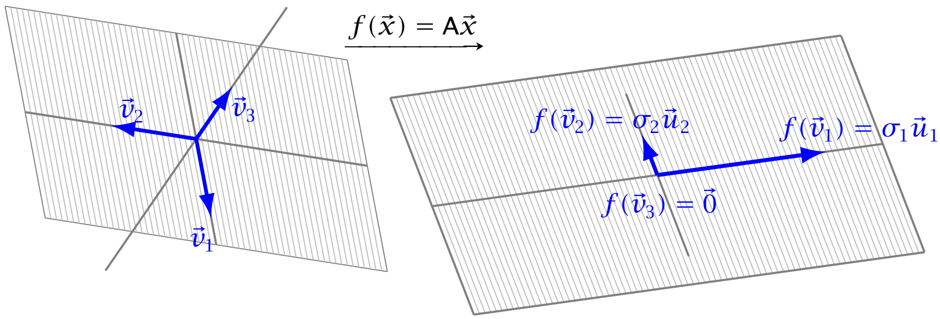
A més, el conjunt $\mathcal{B}_{\operatorname{Col}\mathsf{A}} = \{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_r)\}$ és una base de l'espai columna (perquè l'aplicació f entre els espais fila i columna és bijectiva).

El que veurem en aquesta lliçó és que podem elegir bases ortonormals dels quatre subespais,

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Fil\,A}} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\} \qquad \mathcal{B}_{\mathrm{Col\,A}} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$$
$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul\,A}} = \{\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \dots, \vec{v}_n\} \qquad \mathcal{B}_{\mathrm{Nul\,A^*}} = \{\vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+2}, \dots, \vec{u}_m\}$$

tals que les imatges dels vectors $\vec{v}_i$ són múltiples dels vectors $\vec{u}_i$:

$$f(\vec{v}_1) = \sigma_1\vec{u}_1, \quad f(\vec{v}_2) = \sigma_2\vec{u}_2, \quad \dots, \quad f(\vec{v}_r) = \sigma_r\vec{u}_r$$
$$f(\vec{v}_{r+1}) = f(\vec{v}_{r+2}) = \cdots = f(\vec{v}_n) = \vec{0}$$



☞ Els vectors $\vec{v}_i$ els anomenarem vectors singulars drets; els vectors $\vec{u}_i$, vectors singulars esquerres i els escalars σ_i, valors singulars (de la matriu A o de l'aplicació lineal f).

Si fem servir les bases $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n} = \mathcal{B}_{\mathrm{Fil\,A}} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{Nul\,A}}$ i $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^m} = \mathcal{B}_{\mathrm{Col\,A}} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{Nul\,A^*}}$, l'expressió (30.1) es pot escriure com

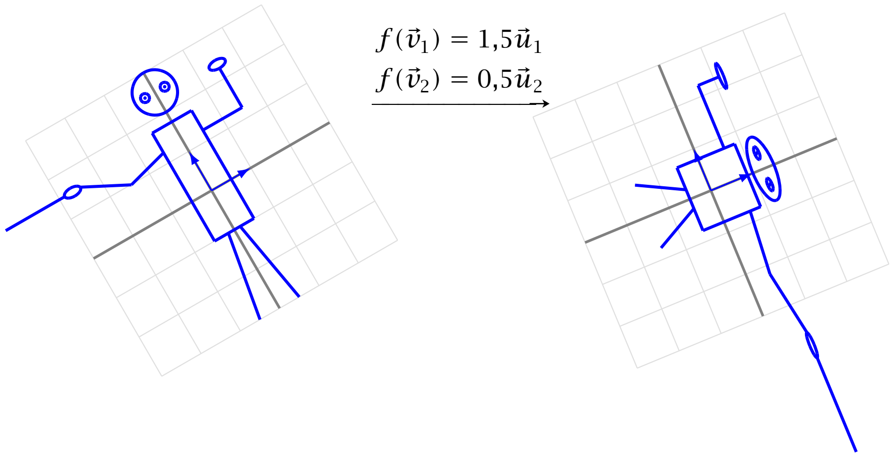
$$f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1\sigma_1\vec{u}_1 + x_2\sigma_2\vec{u}_2 + \cdots + x_r\sigma_r\vec{u}_r \tag{30.2}$$

Aquesta fórmula és la descomposició en valors singulars de l'aplicació lineal f.

Notem que la descomposició en valors singulars descriu perfectament l'aplicació lineal f: les imatges dels vectors singulars drets són múltiples dels vectors singulars esquerres i la imatge de qualsevol altre vector és una combinació lineal dels vectors singulars esquerres $\vec{u}_i$; els valors singulars mesuren el pes dels vectors singulars en la transformació.

☞ Qualsevol aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, es pot interpretar com un canvi d'escala en la direcció de cada vector singular dret, seguit per una aplicació que transforma els vectors singulars drets $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots, \vec{v}_r$ en els vectors singulars esquerres $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots, \vec{u}_r$.

Els factors d'escala són els valors singulars de la matriu A.



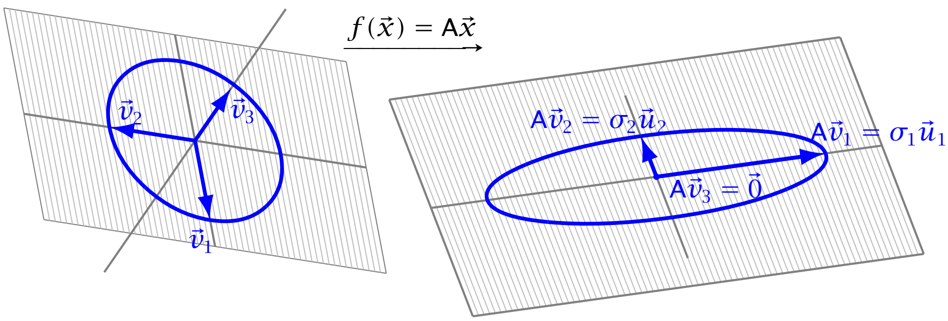
☞ La hiperesfera unitat en l'espai fila,

$$\left\{x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_r\vec{v}_r \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 = 1\right\}$$

es transforma en un hiperel·lipsoide de l'espai columna,

$$\left\{\sigma_1 x_1\vec{u}_1 + \sigma_2 x_2\vec{u}_2 + \cdots + \sigma_r x_r\vec{u}_r \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 = 1\right\}$$

Les longituds dels seimieixos d'aquest hiperel·lipsoide són els valors singulars, i les direccions dels semieixos, els vectors singulars esquerres.



D'altra banda, és fàcil comprovar que la hiperesfera unitat n-dimensional,

$$\left\{x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$

es transforma en la superfície limitada per un hiperel·lipsoide de semieixos els valors singulars,

$$\left\{\sigma_1 x_1\vec{u}_1 + \sigma_2 x_2\vec{u}_2 + \cdots + \sigma_r x_r\vec{u}_r \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 \le 1\right\}$$

30.2. Descomposició en valors singulars d'una matriu

Per tal de provar que l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ es pot descompondre en valors singulars, observem que la fórmula (30.2) serà certa si i només si, la matriu de f respecte a les bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ i $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ és

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

així que, si $\mathsf{V} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ i $\mathsf{U} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_m \end{bmatrix}$ llavors, $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$.

Ací, les matrius U i V són unitàries i Σ és una matriu $m \times n$ amb totes les entrades no diagonals iguals a zero; no podem dir que la matriu Σ és diagonal, perquè aquesta matriu només és quadrada quan ho és A; en realitat, $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} \end{bmatrix}$ on Σ_{11} és una matriu diagonal.

A més a més, encara que fins ara no ho hem necessitat, provarem que les entrades diagonals de la matriu Σ_{11}, són nombres reals positius, ordenats del més gran al més petit: $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots \sigma_r > 0$. Això és el que anomenem una *descomposició en valors singulars* de la matriu A.

Per exemple,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -5 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}_{\mathsf{U}} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\Sigma} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]}_{\mathsf{V}^*}$$

O bé, si f és l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$,

$$f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3) = 12\alpha_1\vec{u}_1 + 6\alpha_2 u_2\vec{u}_2$$

El nostre objectiu és provar que, efectivament, qualsevol matriu es pot factoritzar d'aquesta manera.

30.2.1. Construcció de la descomposició en valors singulars

Per aconseguir una descomposició en valors singulars de la matriu A, el que necessitem és

Trobar una base ortonormal de l'espai fila, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$, de manera que el conjunt $\{\mathsf{A}\vec{v}_1, \mathsf{A}\vec{v}_2, \dots, \mathsf{A}\vec{v}_r\}$ siga ortogonal.

és a dir, que $\mathsf{A}\vec{v}_i \cdot \mathsf{A}\vec{v}_j = \vec{v}_i^* \mathsf{A}^* \mathsf{A}\vec{v}_j = 0$. O que la matriu

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1^* \\ \vec{v}_2^* \\ \dots \\ \vec{v}_r^* \end{bmatrix} \mathsf{A}^*\mathsf{A} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_r \end{bmatrix}$$

siga diagonal; per tant, el que necessitem és diagonalitzar unitàriament la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$. Afortunadament, això ho podem fer, perquè aquesta matriu és hermítica: existeix una matriu unitària V, *les columnes de la qual són vectors propis de* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$, i una matriu diagonal D, *la diagonal dels valors propis de* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$, de manera que $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{D}\mathsf{V}^*$ o, equivalentment, $\mathsf{V}^*\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{V} = \mathsf{D}$.

Les entrades de D són els productes escalars $d_{ij} = \vec{v}_i^* \mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{v}_j = \mathsf{A}\vec{v}_i \cdot \mathsf{A}\vec{v}_j$, així que,

- si $i \neq j$ llavors, $\mathsf{A}\vec{v}_i \cdot \mathsf{A}\vec{v}_j = 0$ (el conjunt $\{\mathsf{A}\vec{v}_1, \mathsf{A}\vec{v}_2, \dots, \mathsf{A}\vec{v}_r\}$ és ortogonal)
- i si $i = j$ llavors, $\lambda_i = \mathsf{A}\vec{v}_i \cdot \mathsf{A}\vec{v}_i \geq 0$ (els valors propis són no negatius).

A més a més, com que $\operatorname{rang} \mathsf{A}^*\mathsf{A} = \operatorname{rang} \mathsf{A} = r$, hi ha exactament r valors propis que no són zero, així que podem ordenar els valors i els vectors propis de manera que tinguem $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0$ i

$$\left[\begin{array}{c} \vec{v}_1^* \\ \vec{v}_2^* \\ \cdots \\ \vec{v}_r^* \\ \hline \vec{v}_{r+1}^* \\ \cdots \\ \vec{v}_n^* \end{array}\right] \mathsf{A}^*\mathsf{A} \left[\begin{array}{cccc|ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_r & \vec{v}_{r+1} & \cdots & \vec{v}_n \end{array}\right] = \mathsf{D} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$$

($\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n$ són els vectors propis associats al valor propi zero).

Ja hem provat que el conjunt $\{\mathsf{A}\vec{v}_1, \mathsf{A}\vec{v}_2, \dots, \mathsf{A}\vec{v}_r\}$ és ortogonal. Com ens interessa trobar una base ortonormal de l'espai columna, dividirem aquests vectors per les seues normes. La norma de $\mathsf{A}\vec{v}_i$ és

$$\|\mathsf{A}\vec{v}_i\| = \sqrt{\mathsf{A}\vec{v}_i \cdot \mathsf{A}\vec{v}_i} = \sqrt{\lambda_i}$$

així que, si $\vec{u}_i = \left(1/\sqrt{\lambda_i}\right) \mathsf{A}\vec{v}_i$, el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ és una base ortonormal de l'espai columna de A i $\mathsf{A}\vec{v}_i = \sqrt{\lambda_i}\vec{u}_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

DEFINICIÓ 30.1.

> Els *valors singulars* de la matriu A són les arrels quadrades no negatives dels valors propis de la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.
> Els valors singulars es representen habitualment amb la lletra σ ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$) i es presenten ordenats del més gran al més menut.

El que tenim, doncs, és que $\mathsf{A}\vec{v}_i = \sigma_i \vec{u}_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

Per tant, construirem les bases $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n}$ i $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^m}$ de la manera següent:

(a) La base $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n}$ és la unió de

- (a1) una base ortonormal de $\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$, *formada per vectors propis de* $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ *associats als valors propis no nuls* i
- (a2) una base ortonormal de $\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}} = \{\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \dots, \vec{v}_n\}$.

(b) La base $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^m}$ és la unió de

- (b1) la base ortonormal de $\mathrm{Col}\,\mathsf{A}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{A}} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$, formada pels vectors $\vec{u}_i = (1/\sigma_i)\mathsf{A}\vec{v}_i$, i
- (b2) una base ortonormal de $\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^*$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^*} = \{\vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+2}, \dots, \vec{u}_m\}$.

Només ens queda construir la matriu Σ:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{AV} &= \begin{bmatrix} \mathsf{A}\vec{v}_1 & \mathsf{A}\vec{v}_2 & \cdots \mathsf{A}\vec{v}_r & \mathsf{A}\vec{v}_{r+1} & \cdots & \mathsf{A}\vec{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1\vec{u}_1 & \sigma_2\vec{u}_2 & \cdots \sigma_r\vec{u}_r & \vec{0} & \cdots & \vec{0} \end{bmatrix} \\
&= \mathsf{U} \left[\begin{array}{cccc|ccc}
\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\mathsf{A} = \mathsf{U} \left[\begin{array}{cccc|ccc}
\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right] \mathsf{V}^*
$$

D'aquesta manera, hem provat la propietat següent:

PROPIETAT 30.1. (TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓ EN VALORS SINGULARS)

Si A *és una matriu* $m \times n$ *de rang* r *llavors,* A *es pot factoritzar com* $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ *on*

(a) U *és una matriu unitària* $m \times m$*,*

(b) V *és una matriu unitària* $n \times n$*,*

(c) Σ *és una matriu* $m \times n$ *que té aquesta forma:*

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

A més a més, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ *són nombres reals no negatius.* □

Hem definit els valors singulars de la matriu A com els valors propis de la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$. Els vectors singulars es defineixen de manera anàloga:

DEFINICIONS 30.2.

Els *vectors singulars drets* de la matriu A són els vectors propis associats als valors propis de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.
Els *vectors singulars esquerres* de la matriu A són els vectors propis associats als valors propis de $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$.

☞ Si $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ és una descomposició en valors singulars, llavors, les entrades de la diagonal principal de Σ són els valors singulars de A, les columnes corresponents de U són vectors singulars esquerres i, les de V, vectors singulars drets.

A més a més, hem trobat un mètode per construir aquesta descomposició:

Descomposició en valors singulars de la matriu A

1. Calculeu els valors propis, λ_i, de la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i ordeneu-los del més gran al més petit.

   Les arrels quadrades no negatives, σ_i, d'aquests valors propis són els valors singulars de la matriu A. Quedeu-vos amb els no nuls.

   Això determina la matriu diagonal Σ_{11}.

2. Calculeu bases ortonormals dels subespais propis de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.

   Això defineix la base $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n}$ i la matriu V. Els vectors propis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$, corresponents als valors propis no nuls, són una base de l'espai fila, $\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}}$.

3. Calculeu els vectors $\vec{u}_i = (1/\sigma_i)\mathsf{A}\vec{v}_i$, $1 \leq i \leq r$.

   Això ens proporciona una base ortonormal de l'espai columna.

4. Afegiu-hi una base ortonormal de l'espai nul esquerre, per tal de completar la base $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n}$.

   Així obtenim la matriu U.

☞ Si la matriu A és real, llavors els vectors propis de $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ els podem elegir reals, així que hi ha una descomposició en valors singulars de la forma $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^\mathsf{T}$.

Exemple 30.1.

Trobeu una descomposició en valors singulars de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculant el producte $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ obtenim

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

Els valors propis d'aquesta matriu són $\lambda_1 = 25$ i $\lambda_2 = 0$, així que els valors singulars de A són $\sigma_1 = 5$ i $\sigma_2 = 0$. El subespai propi de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$, associat al valor propi λ_1, és

$$\mathrm{Nul}(\mathsf{A}^*\mathsf{A} - 25\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} = \langle (1,2) \rangle$$

Elegim el vector $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ perquè siga unitari. El conjunt $\{\vec{v}_1\}$ és una base ortonormal de l'espai fila. El subsepai propi associat al valor propi $\vec{0}$ és

$$\operatorname{Nul} \mathsf{A} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-2, 1) \rangle$$

Així que, si $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$, $\{\vec{v}_2\}$ és base de l'espai nul. D'aquesta manera, la matriu V serà aquesta: $\mathsf{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

Ara calcularem els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ i $\vec{u}_4$. El primer ha de ser

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} \mathsf{A} \vec{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I l'hem de completar amb una base ortonormal de l'espai nul esquerre; per exemple,

$$\operatorname{Nul} \mathsf{A}^* = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \right\rangle$$

Amb tot això ja podem armar la descomposició en valors singulars:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ \hline 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{array}\right] \qquad \square$$

EXEMPLE 30.2.

> Trobeu una descomposició en valors singulars de la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Com que aquesta matriu és l'adjunta de la de l'exemple anterior, podem trobar la descomposició sense cap càlcul addicional, perquè $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^* \Leftrightarrow \mathsf{A}^* = \mathsf{V}\Sigma^*\mathsf{U}^* = \mathsf{V}\Sigma\mathsf{U}^*$. És a dir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

☞ Aquest exemple mostra que els valors singulars de A^* són els mateixos que els de A.

30.2.2. Descomposició en valors singulars reduïda

A la factorització $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$, en realitat, no necessitem conéixer explícitament les bases dels espais nuls, perquè, si dividim les matrius U i V en blocs de la forma $\mathsf{U} = \begin{bmatrix}\mathsf{U}_1 & \mathsf{U}_2\end{bmatrix}$ i $\mathsf{V} = \begin{bmatrix}\mathsf{V}_1 & \mathsf{V}_2\end{bmatrix}$, on els blocs U_2 i V_2 corresponen a les bases dels dos espais nuls

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}\mathsf{U}_1 & \mathsf{U}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \mathsf{O}\\ \mathsf{O} & \mathsf{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathsf{V}_1^*\\ \mathsf{V}_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathsf{U}_1 & \mathsf{U}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_{11}\mathsf{V}_1^*\\ \mathsf{O}\end{bmatrix} = \mathsf{U}_1\Sigma_{11}\mathsf{V}_1^*$$

☞ La descomposició en valors singulars *reduïda* de la matriu A és l'expressió $\mathsf{A} = \mathsf{U}_1\Sigma_{11}\mathsf{V}_1^*$.

En aquesta factorització, la matriu Σ_{11} és diagonal, perquè ara sí que és quadrada; en canvi, les matrius U_1 i V_1 tenen les columnes ortonormals, però no tenen perquè ser quadrades.

Exemple 30.3.

Trobeu una descomposició en valors singulars reduïda de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

En l'exemple 30.1 hem trobat la descomposició en valors singulars

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 & 0\\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}5 & 0\\ \hline 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ \hline 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\end{array}\right]$$

així que aquesta seria una descomposició reduïda:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix} \quad \square$$

En aquest exemple no hem hagut de fer cap càlcul, perquè ja coneixíem una descomposició en valors singulars completa. En general, però, i tal com hem dit adés, en calcular la descomposició reduïda ens estalviarem el càlcul de les bases dels dos espais nuls.

Descomposició en valors sigulars reduïda de la matriu A

1. Calculeu els valors propis, λ_i, de la matriu A^*A i ordeneu-los del més gran al més petit.

   Les arrels quadrades no negatives, σ_i, d'aquests valors propis són els valors singulars de la matriu A. Quedeu-vos amb els no nuls. Això determina la matriu diagonal Σ_{11}.

2. Calculeu bases ortonormals dels subespais propis de A^*A corresponents als valors propis no nuls.

   Si $\mathcal{B}_1$ és la unió ordenada d'aquestes bases, la matriu V_1 és $M_{\mathcal{B}_1}$.

3. Calculeu els vectors $u_i = (1/\sigma_i)A\vec{v}_i$.

   Això ens proporciona la matriu U_1.

Exemple 30.4.

Trobeu una factorització en valors singulars reduïda de la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Els valors propis de la matriu $A^*A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ són 9 (doble), 4 i 0. Així que els valors singulars no nuls de A, ordenats del més gran al més petit, són $3, 3, 2$. La matriu Σ_{11} és $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Els espais propis de A^*A associats als valors propis no nuls són

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nul}(A^*A - 9I) &= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \left\langle (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \right\rangle \\
\mathrm{Nul}(A^*A - 4I) &= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \left\langle (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0, 0) \right\rangle
\end{aligned}$$

Els conjunts

$$\left\{(2/\sqrt{5}, 1\sqrt{5}, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\right\}, \left\{(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0, 0)\right\}$$

són bases ortonormals dels dos espais propis.

La matriu V_1 és aquesta:

$$\mathsf{V}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Per a trobar la matriu U_1 calculem

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{3}\mathsf{A}\vec{v}_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$
$$\vec{u}_2 = \frac{1}{3}\mathsf{A}\vec{v}_2 = \frac{1}{3}(0, 0, 3) = (0, 0, 1)$$
$$\vec{u}_3 = \frac{1}{2}\mathsf{A}\vec{v}_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

Així, hem obtingut la descomposició

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\Sigma_{11}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{V}_1^*} \qquad \square$$

30.3. El significat numèric de la descomposició en valors singulars

Els valors i els vectors singulars són importants, com ja hem dit, perquè la fórmula

$$f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1\sigma_1\vec{u}_1 + x_2\sigma_2\vec{u}_2 + \cdots + x_r\sigma_r\vec{u}_r$$

descriu de manera perfecta l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$. Però, a més a més, la versió matricial d'aquesta fórmula és molt important al camp de l'àlgebra lineal numèrica. Per trobar aquesta versió matricial, notem que la descomposició en valors singulars es pot reescriure de la manera següent: si el rang de A és r i $\mathsf{A} = \mathsf{U}_1\Sigma_{22}\mathsf{V}_1^*$, tenim

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1^* \\ \vec{v}_2^* \\ \cdots \\ \vec{v}_r^* \end{bmatrix}$$
$$\mathsf{A} = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^* \tag{30.3}$$

Les matrius $\vec{u}_i\vec{v}_i^*$ són de rang un, perquè les seues columnes són múltiples del vector singular $\vec{u}_i$, per tant,

☞ qualsevol matriu és una combinació lineal de matrius de rang un (productes dels vectors singulars), amb pesos iguals als valors singulars.

Sembla que totes les matrius $\vec{u}_i\vec{v}_i^*$ tenen la mateixa *grandària*, perquè són el producte d'un vector unitari per la matriu transposada d'un altre vector unitari. Si això és cert, quan expressem la matriu A com la combinació lineal (30.3), les primeres matrius de la suma són les més significatives, perquè estan multiplicades pels pesos més grans. Per a justificar això (que totes les matrius $\vec{u}_i\vec{v}_i^*$ són igual de grans), necessitem una mida de la *grandària* d'una matriu. I, com en el cas dels vectors, aquesta mida és el que anomenem la *norma* de la matriu.

Per trobar una definició adequada de norma (d'una matriu) hi tenim diverses opcions, entre les quals hi ha la norma de Frobenius i la norma espectral. Nosaltres farem servir la norma espectral, que mesura la dilatació màxima dels vectors quan s'hi multiplica la matriu A.[1]

DEFINICIÓ 30.3.

La *norma espectral* de la matriu A és el suprem del conjunt de totes les normes de $\mathsf{A}\vec{x}$ corresponents als vectors $\vec{x}$ de norma igual a 1:

$$\|\mathsf{A}\|_2 = \sup\{\|\mathsf{A}\vec{x}\| : \|\vec{x}\| = 1\}$$

Si recordem que, a l'aplicació $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, la imatge de la hiperesfera de radi un és la superfície limitada per un hiperel·lipsoide r-dimensional, els semieixos del qual són precisament els valors singulars, queda clar que la norma espectral mesura precisament la grandària d'aquest hiperel·lipsoide i, més exactament, que la norma espectral de A és igual al valor singular més gran.

PROPIETAT 30.2.

Si $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ *és una descomposició en valors singulars de la matriu* A *llavors,*

$$\|\mathsf{A}\|_2 = \sigma_1$$

Demostració: Siga $\vec{x}$ un vector qualsevol de $\mathbb{K}^n$, de norma un. Com que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$, aquest vector és una combinació lineal, $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ amb $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = 1$.

Llavors,

$$\begin{aligned}\|\mathsf{A}\vec{x}\|^2 &= \|\alpha_1\sigma_1\vec{u}_1 + \alpha_2\sigma_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\sigma_n\vec{u}_n\|^2 \\ &= |\alpha_1|^2\sigma_1^2 + |\alpha_2|^2\sigma_2^2 + \cdots + |\alpha_n|^2\sigma_n^2\end{aligned}$$

[1] La norma de Frobenius es defineix de la manera *natural*: $\|\mathsf{A}\|_F = \sqrt{\sum |a_{ij}|^2}$.

(perquè els vectors $\vec{u}_i$ són ortogonals i unitaris)

$$\begin{aligned} &\leq |\alpha_1|^2 \sigma_1^2 + |\alpha_2|^2 \sigma_1^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 \sigma_1^2 \\ &= \sigma_1^2 \end{aligned}$$

Així que $\|\mathsf{A}\|_2 \leq \sigma_1$. I, com que $\|\mathsf{A}\vec{v}_1\| = \|\sigma_1\vec{u}_1\| = \sigma_1$, posem assegurar que $\|\mathsf{A}\|_2 = \sigma_1$. □

☞ Com a cas especial, si $\mathsf{A} = \vec{u}\vec{v}^*$, on $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors unitaris, $\|\vec{u}\vec{v}^*\|_2 = 1$.

I això vol dir que, efectivament, tots els productes $\vec{u}\vec{v}^*$ són *igual de grans.* A la lliçó següent aplicarem aquests fets a l'aproximació numèrica de matrius.

30.4. Resum

Valors singulars i vectors singulars

- Els *valors singulars* d'una matriu $m \times n$, A, són les arrels quadrades, σ_i, no negatives dels valors propis, λ_i de la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.
- Els *vectors singulars drets* de la matriu A són els vectors propis associats als valors propis de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.
- Els *vectors singulars esquerres* de la matriu A són els vectors propis associats als valors propis de $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$.

Descomposició en valors singulars d'una aplicació lineal

- Si $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ és una aplicació lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$, existeixen bases ortonormals dels quatre subespais,

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\} && \mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{A}} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\} \\ &\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}} = \{\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \dots, \vec{v}_n\} && \mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^*} = \{\vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+2}, \dots, \vec{u}_m\} \end{aligned}$$

  tals que

$$\begin{aligned} &f(\vec{v}_1) = \sigma_1\vec{u}_1 \quad f(\vec{v}_2) = \sigma_2\vec{u}_2 \quad \dots \quad f(\vec{v}_r) = \sigma_r\vec{u}_r \\ &f(\vec{v}_{r+1}) = f(\vec{v}_{r+2}) = \cdots = f(\vec{v}_n) = \vec{0} \end{aligned}$$

  En conseqüència,

$$f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1\sigma_1\vec{u}_1 + x_2\sigma_2\vec{u}_2 + \cdots + x_r\sigma_r\vec{u}_r$$

- La imatge de la hiperesfera unitat de l'espai fila és un hiperel·lipsoide de l'espai columna, els semieixos del qual són els valors singulars, en les direccions dels vectors singulars esquerres.

$(\cdots)$

$(\cdots)$

Descomposició en valors singulars d'una matriu

- Si A és una matriu $m \times n$ existeixen dues matrius unitàries, U i V i una matriu Σ, de la forma

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right], \text{ tals que } \mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^* = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^*$$

☞ Els escalars $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ són els valors singulars no nuls, les columnes de V són vectors singulars drets i les de U, vectors singulars esquerres.

Descomposició en valors singulars reduïda

- Si A és una matriu $m \times n$ existeixen dues matrius, U_1 i V_1, amb les columnes ortonormals, i una matriu diagonal $\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}$, tals que $\mathsf{A} = \mathsf{U}_1\Sigma_{11}\mathsf{V}_1^*$.

Significat numèric

- La norma espectral de la matriu A és $\|\mathsf{A}\|_2 = \sup\{\|\mathsf{A}\vec{x}\| : \|\vec{x}\| = 1\}$.
- La norma espectral és igual al valor singular més gra.
- La norma espectral mesura la *grandària* de la matriu.

30.5. Exercicis

Exercici 30.1. Trobeu la descomposició en valors singulars de les matrius

$$\text{(a)} \quad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(solució: pàg. 692)

Exercici 30.2. Trobeu les descomposicions en valors singulars reduïdes de les matrius de l'exercici anterior.

(solució: pàg. 694)

Exercici 30.3. Trobeu la descomposició en valors singulars reduïda de la matriu

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(solució: pàg. 694)

Exercici 30.4. Expresseu la matriu B de l'exercici 30.1. com una combinació lineal de matrius de rang 1 amb pesos els valors singulars de B.

(solució: pàg. 695)

Exercici 30.5. Quins són els valors màxim i mínim de la funció $g(\vec{x}) = \|\mathsf{A}\vec{x}\|$, on $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, en la circumferència (de $\mathbb{R}^2$) $\{\vec{x} : \|\vec{x}\| = 1\}$?

(solució: pàg. 696)

Exercici 30.6. Proveu que, si $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ és una descomposició en valors singulars, llavors, les columnes de U són vectors singulars esquerres, les de V, vectors singulars drets, i les entrades no nul·les de Σ, els valors singulars de A.

(solució: pàg. 696)

Exercici 30.7. Proveu que, si la matriu real A és simètrica definida (o semidefinida) positiva, llavors, els valors propis no nuls de A són valors singulars. Què passa, en general, en el cas de les matrius simètriques? Quina relació hi ha entre els vectors propis i els vectors singulars, en una matriu simètrica?

(solució: pàg. 696)

LLIÇÓ 31. APLICACIONS DELS VALORS SINGULARS. LA PSEUDOINVERSA

A mathematician is a blind man in a dark room looking for a black cat which isn't there

Charles R. Darwin

En aquesta lliçó estudiem algunes aplicacions de la descomposició en valors singulars i generalitzem la idea de transformació inversa i de matriu inversa quan la transformació $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ no és bijectiva, és a dir, quan la matriu A no és invertible.

31.1. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Si A és una matriu $m \times n$ de rang r i $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ és una descomposició en valors singulars, llavors per discutir el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, podem escriure'l en la forma $\mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*\vec{x} = \vec{b}$ o, de manera equivalent, $\Sigma\mathsf{V}^*\vec{x} = \mathsf{U}^*\vec{b}$ i, fent els canvis $\vec{y} = \mathsf{V}^*\vec{x}$ i $\vec{c} = \mathsf{U}^*b$, obtindrem $\Sigma\vec{y} = \vec{c}$. La discussió d'aquest nou sistema és trivial:

$$\Sigma\vec{y} = \vec{c} \iff \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} \Sigma_{11}\vec{y}_1 &= \vec{c}_1 \\ \vec{0} &= \vec{c}_2 \end{aligned}$$

El sistema és compatible si i només si $\vec{c}_2 = \vec{0}$ i, en cas que ho siga, és determinat (com ja sabíem) si el rang de Σ_{11} és igual a n.

Quan el sistema és compatible, la solució és $\vec{y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, on $\vec{y}_1 = \Sigma_{11}^{-1}\vec{c}_1$ i $\vec{y}_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n)$ és un vector arbitrari (buit, si el rang és n), i la solució del sistema lineal original s'obté desfent el canvi $\vec{x} = \mathsf{V}\vec{y}$.

EXEMPLE 31.1.

Discutiu, i resoleu, si és compatible, el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, on

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 3 \\ 5/2 & 2 & 1 \\ 3/2 & 0 & 3 \\ 5/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } \vec{b} = (1,1,1,1).$$

La matriu A es pot factoritzar com

$$\mathsf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^*}_{\mathsf{V}^*}$$

Així que, si fem els canvis $\vec{y} = \mathsf{V}^*\vec{x}$, $\vec{c} = \mathsf{U}^*b = (2, 0, 0, 0)$, obtindrem el sistema lineal

$$\Sigma\vec{y} = \vec{c} \iff \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que és indeterminat. La solució és, clarament, $y_1 = 1/3$, $y_2 = 0$, $y_3 = \alpha$, i la solució del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x}$ l'obtenim desfent el canvi $\vec{x} = \mathsf{V}\vec{y}$:

$$\vec{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

31.2. Mínims quadrats

També podem trobar les solucions del problema de mínims quadrats fent servir la descomposició en valors singulars. Com que es tracta de minimitzar la norma $\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\|$, si $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ és una descomposició en valors singulars,

$$\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\| = \left\|\mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*\vec{x} - \vec{b}\right\| = \left\|\mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*\vec{x} - \mathsf{U}\mathsf{U}^*\vec{b}\right\| = \left\|\Sigma\mathsf{V}^*\vec{x} - \mathsf{U}^*\vec{b}\right\|$$

(aquesta darrera igualtat és certa, perquè U és una matriu unitària, així que conserva les normes). Fent els mateixos canvis de l'apartat anterior, $\vec{y} = \mathsf{V}^*\vec{x}$ i $\vec{c} = \mathsf{U}^*b$, trobem un nou problema de mínims quadrats,

$$\text{Minimitzeu la norma } \|\Sigma\vec{y} - \vec{c}\|$$

i, gràcies a l'estructura diagonal de la matriu Σ, aquest problema es resol immediatament:

$$\begin{aligned} \|\Sigma\vec{y} - \vec{c}\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_{11}\vec{y}_1 - \vec{c}_1 \\ -\vec{c}_2 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|\Sigma_{11}\vec{y}_1 - \vec{c}_1\|^2 + \|\vec{c}_2\|^2 \end{aligned}$$

Això és el que hem de minimitzar: el sistema lineal $\Sigma_{11}\vec{y}_1 = \vec{c}_1$ té solució: $\vec{y}_1 = \Sigma_{11}^{-1}\vec{c}_1$; elegint aquest vector $\vec{y}_1$, la norma $\|\Sigma_{11}\vec{y}_1 - \vec{c}_1\|$ és igual a zero i, en conseqüència, el mínim de $\|\Sigma\vec{y} - \vec{c}\|$ és la norma de $\vec{c}_2$. Finalment, basta desfer el canvi $\vec{x} = \mathsf{V}\vec{y}$, per trobar les solucions del problema de mínims quadrats original.

Exemple 31.2.

Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = (1,1)$, trobeu una solució per mínims quadrats del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

A l'exemple 30.2, hem trobat aquesta descomposició en valors singulars:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{V}^*}$$

Si hi fem els canvis $\vec{y} = \mathsf{V}^*\vec{x}$ i $\vec{c} = \mathsf{U}^*b = (1/\sqrt{5})(3,1)$, el problema és equivalent al de minimitzar

$$\begin{aligned} \|\Sigma\vec{y} - \vec{c}\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 5y_1 - \dfrac{3}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left(5y_1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

És clar que el mínim de la norma és $1/\sqrt{5}$ i que correspon al valor $y_1 = 3/(5\sqrt{5})$. Com que el valor de les coordenades y_2, y_3, y_4 no influeix en aquest resultat, tots els vectors $\vec{y} = (3/(5\sqrt{5}), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ són solucions del problema.

Desfent el canvi, les solucions del problema de mínims quadrats $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ són els vectors

$$\begin{aligned} \vec{x} = \mathsf{V}\vec{y} &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/(5\sqrt{5}) \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3}{25} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_1}{25} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \square \end{aligned}$$

31.3. Aproximacions de rang limitat

Si $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ és una descomposició en valors singulars de la matriu A, de rang igual a r, sabem que

$$\mathsf{A} = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^*$$

Aleshores, com que els pesos són decreixents, una manera d'aproximar el valor de la matriu A és *truncar* aquesta suma, és a dir, quedar-nos només amb els primers termes i considerar les sumes parcials

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_1 &= \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* \\ \mathsf{A}_2 &= \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^* \\ &\dots \\ \mathsf{A}_k &= \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_k\vec{u}_k\vec{v}_k^* \\ &\dots \\ \mathsf{A} = \mathsf{A}_r &= \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_k\vec{u}_k\vec{v}_k^* + \cdots + \sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^* \end{aligned} \tag{31.1}$$

com aproximacions a la matriu A, de rangs 1, 2, ..., k, ..., r.

Per justificar que aquestes aproximacions són adequades, farem com amb els vectors i definirem la *distància* entre dues matrius com la norma espectral de la diferència, $d(\mathsf{A},\mathsf{B}) = \|\mathsf{A}-\mathsf{B}\|_2$.

☞ Com que $\mathsf{A}-\mathsf{A}_k = \sigma_{k+1}\vec{u}_{k+1}\vec{v}_{k+1}^* + \sigma_{k+2}\vec{u}_{k+2}\vec{v}_{k+2}^* + \cdots + \sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^*$, la distància entre A i A_k, és σ_{k+1}, així que el quocient $\|\mathsf{A}-\mathsf{A}_k\| / \|\mathsf{A}\| = \sigma_{k+1}/\sigma_1$ mesura l'error relatiu que cometem en aproximar A amb A_k.

Per exemple, si els deu primers valors singulars d'una matriu A, són 10, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 0, 1 i 0,01, la distància entre la matriu A i l'aproximació de rang 9, A_9, és igual a una centèsima, és a dir, que si $\vec{x}$ és un vector unitari, la difèrencia entre $\mathsf{A}\vec{x}$ i $\mathsf{A}_9\vec{x}$ és, com a molt, igual a $0,01$.[1]

De fet, la matriu A_k és la millor aproximació de rang k a la matriu A. Això és el que diu la propietat següent.

Teorema 31.1. (Teorema d'Eckart–Young)

Si A *és una matriu* $m\times n$ *de rang* r *i* $\mathsf{A} = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^*$ *és una descomposició de la matriu* A *en valors singulars, per a* $k<r$*, siga*

$$\mathsf{A}_k = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^* + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_k\vec{u}_k\vec{v}_k^*$$

Per a qualsevol matriu $m\times n$*,* B*, tal que* $\operatorname{rang}\mathsf{B}\le k$*,*

$$\|\mathsf{A}-\mathsf{A}_k\|_2 \le \|\mathsf{A}-\mathsf{B}\|_2$$

Demostració: Com que ja sabem que $\|\mathsf{A}-\mathsf{A}_k\|^2 = \sigma_{k+1}$, el que hem de provar és que, si B és una matriu $m\times n$ amb $\operatorname{rang}\mathsf{B}\le k$ llavors, $\|\mathsf{A}-\mathsf{B}\|\ge\sigma_{k+1}$.

Si $\operatorname{rang}\mathsf{B}\le k$ llavors, $\dim\operatorname{Nul}\mathsf{B}\ge n-k$. D'altra banda, $\dim\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_{k+1}\rangle = k+1$, així que, com que $\operatorname{Nul}\mathsf{B}+\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_{k+1}\rangle$ és un subespai de $\mathbb{K}^n$,

$$\dim\left(\operatorname{Nul}\mathsf{B}+\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_{k+1}\rangle\right)\le n$$

[1] El cost computacional d'un producte matriu-vector, amb una matriu de dimensions molt elevades és força gran, mentre que el producte $\mathsf{A}_9\vec{x}$ és molt menys costós.

Llavors, per la fórmula de Grassmann,

$$\begin{aligned}\dim\left(\operatorname{Nul}\mathsf{B}\cap\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_{k+1}\rangle\right) &\geq \dim\operatorname{Nul}\mathsf{B}+\dim\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_{k+1}\rangle-n\\ &\geq (n-k)+(k+1)-n=1\end{aligned}$$

Així que existeix un vector no nul (que el podem elegir de norma 1), $\vec{w}\in\operatorname{Nul}\mathsf{B}\cap\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_{k+1}\rangle$.

Aleshores,

$$\|\mathsf{A}-\mathsf{B}\|_2\geq\|(\mathsf{A}-\mathsf{B})\vec{w}\|=\|\mathsf{A}\vec{w}-\mathsf{B}\vec{w}\|=\|\mathsf{A}\vec{w}\|$$

I, com que $\vec{w}\in\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_{k+1}\rangle$,

$$\vec{w}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_{k+1}\vec{v}_{k+1}\qquad(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_{k+1}^2=1)$$

$$\begin{aligned}\|\mathsf{A}-\mathsf{B}\|_2^2 &\geq \left\|\mathsf{A}\left(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_{k+1}\vec{v}_{k+1}\right)\right\|^2\\ &=\left\|\alpha_1\sigma_1\vec{u}_1+\alpha_2\sigma_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_{k+1}\sigma_{k+1}\vec{u}_{k+1}\right\|^2\\ &\geq|\alpha_1|^2\sigma_1^2+|\alpha_2|^2\sigma_2^2+\cdots+|\alpha_{k+1}|^2\sigma_{k+1}^2\\ &\geq\sigma_{k+1}^2\quad\square\end{aligned}$$

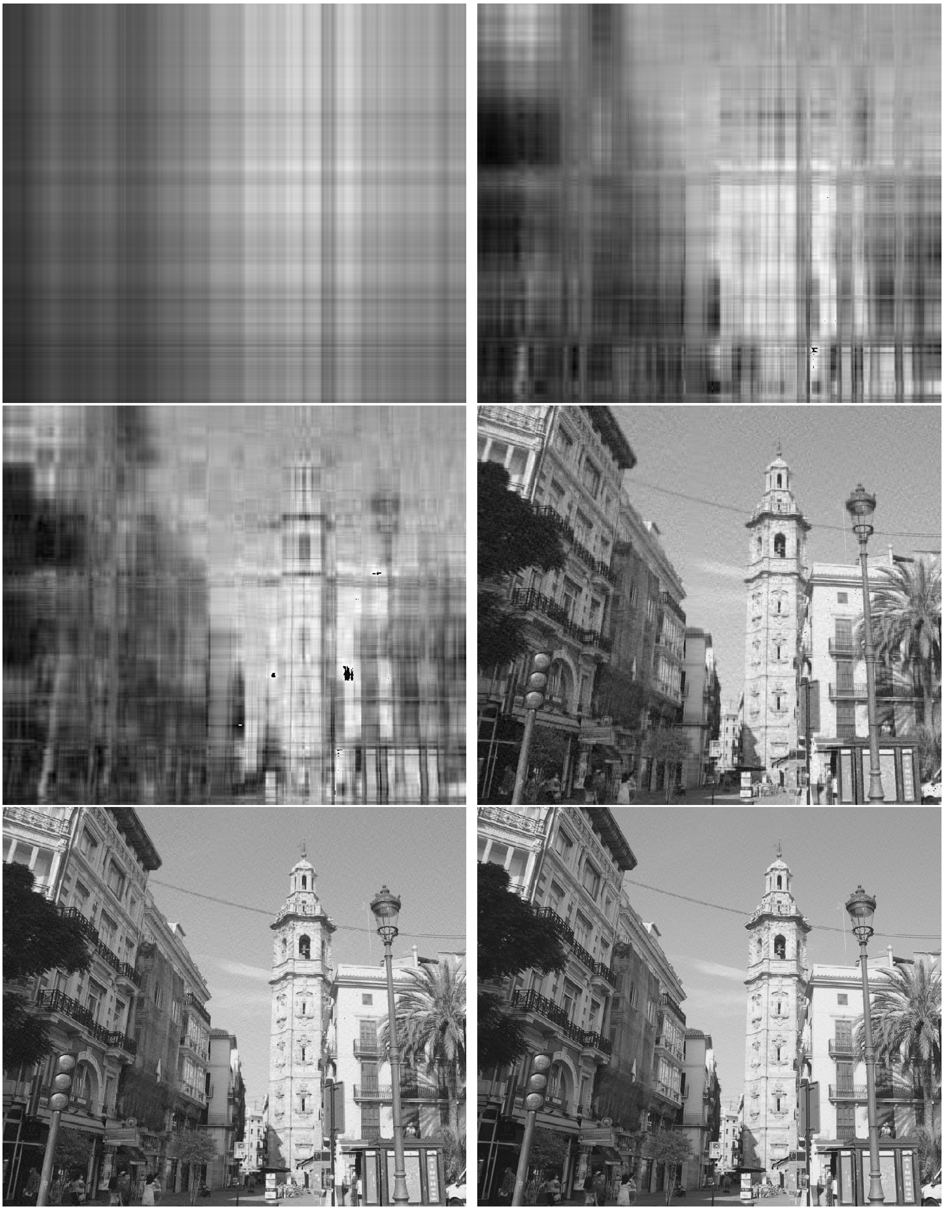
31.3.1. Aplicació a la compressió d'imatges

Una imatge gràfica, com ara, una fotografia, és una matriu de punts, cadascun dels quals té un color determinat. Per simplificar, suposarem que la imatge només conté tons de gris, de manera que el color de cada punt es pot representar com un nombre: per exemple, si fem servir nombres enters de 8 bits ($2^8=256$ nombres, de 0 a 255), el 255 representa un punt blanc, 0 si és negre, o un altre nombre, si el punt és d'un gris més o menys fosc (20 és un gris fosc, 240 és molt clar). Alternativament, es pot fer servir nombres reals entre 0 i 1 (0 per al color negre, 1 per al blanc, 0.8 per a un gris clar).

Llavors, una imatge de m punts d'amplada per n d'alçada es pot emmagatzemar en una matriu $m\times n$, A. Normalment, aquestes matrius tenen el rang màxim possible (és a dir, $r=\operatorname{rang}\mathsf{A}=\min(m,n)$, així que A és igual a la suma de r matrius de rang un, $\mathsf{A}=\sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^*+\sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^*+\cdots+\sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^*$.

Aleshores, podem aproximar aquesta matriu, com hem vist a l'apartat anterior mitjançant la suma truncada $\mathsf{A}_k=\sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^*+\sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^*+\cdots+\sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_k^*$.

Per mostrar un exemple, hem fet servir una imatge que conté 739 punts d'amplada per 637 d'alçada, de manera que la podem representar amb una matriu A d'aquestes dimensions (637×739), és a dir, per $739\cdot637=470743$ nombres. Fent servir un programari de càlcul matricial, hem calculat els valors i els vectors singulars i hem trobat que aquesta matriu té rang màxim ($\operatorname{rang}\mathsf{A}=637$). Les imatges següents mostren les aproximacions de rangs 1, 5, 10, 100, 200 i 300.



Notem que la informació que cal emmagatzemar per poder reconstruir la matriu

$$\mathsf{A}_k = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^* + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_k \vec{u}_k \vec{v}_k^*$$

consisteix en k valors singulars i $2k$ vectors singulars (k esquerres i k drets), és a dir, $k(1 + m + n)$ nombres. En el nostre exemple, A_{200} requereix $200(1 + 739 + 637) = 275400$ nombres (aproximadament, el 58,5% dels 470743 de la imatge original). D'altra banda, el valor singular màxim de la nostra matriu és $\sigma_1 \approx 410{,}62$ i el valor singular σ_{201} és, aproximadament, 2,40, així que l'error relatiu en l'aproximació A_{200} és de l'ordre de $2{,}40/410{,}62 \approx 0{,}006$.

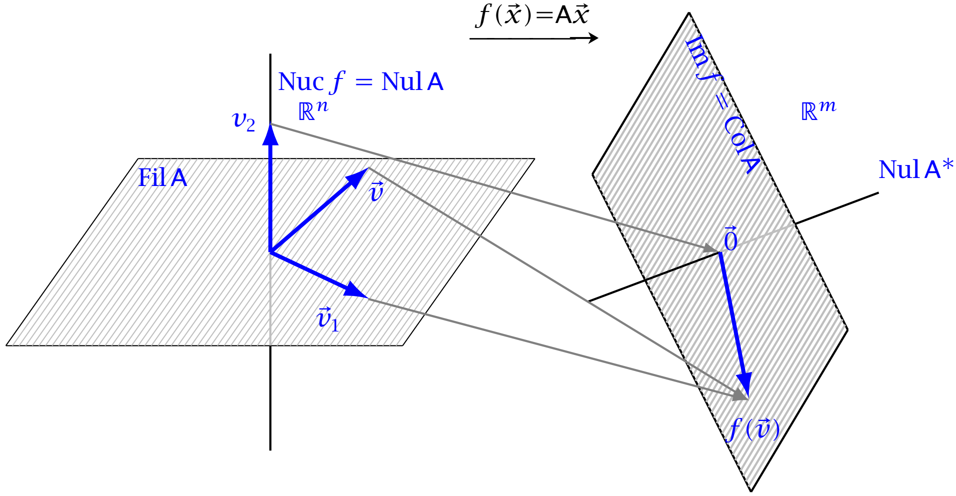
31.4. La pseudoinversa

Recordem que qualsevol transformació lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ \vec{x} &\rightsquigarrow f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x} \end{aligned}$$

és bijectiva quan la restringim als espais fila i columna de la matriu A, i aplica l'espai nul en el vector zero. Si $\vec{v}_1 = p_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}}(\vec{v})$ i $\vec{v}_2 = p_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}}(\vec{v})$, són les projeccions sobre els subespais fila i nul del vector $\vec{v}$ llavors,

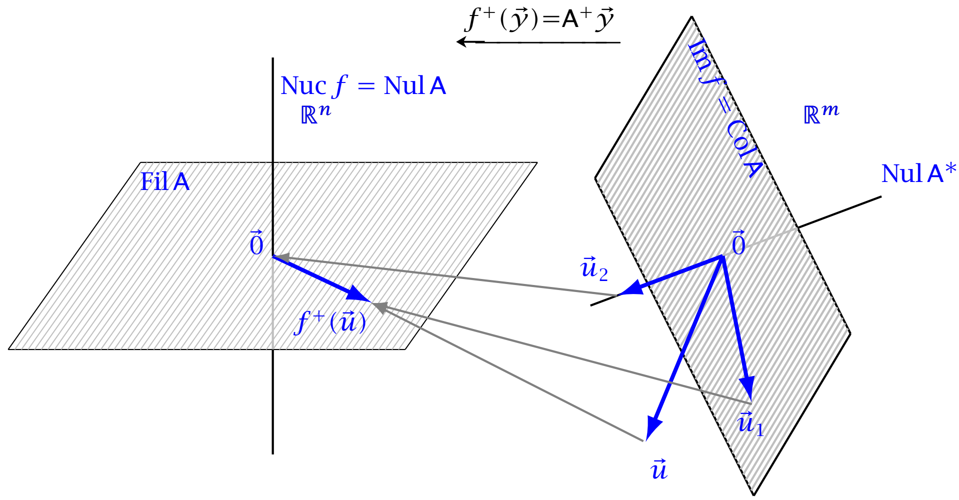
$$f(\vec{v}) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) = f(\vec{v}_1)$$



És raonable definir una *falsa inversa*, f^+, que actue de la manera recíproca: restringida als espais columna i fila, aquesta aplicació ha de ser la inversa de f i ha d'aplicar l'espai nul esquerre en el vector zero: Si $\vec{u}_1 = p_{\mathrm{Col}\,\mathsf{A}}(\vec{u})$ i $\vec{u}_2 = p_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^*}(\vec{u})$, són les projeccions sobre els subespais columna i nul esquerre del vector $\vec{u}$ llavors, a l'espai fila hi ha un vector únic $\vec{v}_1$, tal que $f(\vec{v}_1) = \vec{u}_1$ i

$$f^+(\vec{u}) = f^+(\vec{u}_1) + f^+(\vec{u}_2) = \vec{v}_1$$

☞ La matriu corresponent a l'aplicació f^+ és la *pseudoinversa* de la matriu A i es representa com A^+.



La descomposició en valors singulars ens permet determinar explícitament la matriu A^+: si $\mathsf{A} = \mathsf{U}_1\Sigma_{11}\mathsf{V}_1^*$ és una descomposició en valors singulars reduïda, sabem que les columnes de U_1 i les de V_1 són bases ortonormals dels subespais fila i columna de A (així que han de ser bases dels subespais columna i fila de A^+) i que $f(\vec{v}_i) = \sigma_i\vec{u}_i$ (i, per tant, $f^+(u_i) = (1/\sigma_i)\vec{v}_i$). En conseqüència,

$$\mathsf{A}^+ = \mathsf{V}_1\Sigma_{11}^{-1}\mathsf{U}_1^*$$

Definició 31.1.

Si $\mathsf{A} = \mathsf{U}_1\Sigma_{11}\mathsf{V}_1^*$ és una descomposició en valors singulars reduïda de la matriu A, llavors la matriu *pseudoinversa* (o *inversa Moore-Penrose*) de A és la matriu $\mathsf{A}^+ = \mathsf{V}_1\Sigma_{11}^{-1}\mathsf{U}_1^*$.

Exemple 31.3.

Calculeu la pseudoinversa de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En un exemple anterior hem obtingut aquesta descomposició en valors singulars:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La versió reduïda serà

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}}_{\Sigma_{11}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{V}_1^*}$$

i, per tant, la pseudoinversa és

$$\mathsf{A}^+ = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{V}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/5 \end{bmatrix}}_{\Sigma_{11}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}_1^*} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

31.4.1. Interpretació com una inversa per mínims quadrats

Podem interpretar la pseudoinversa com una generalització de la inversa en el sentit següent:

- La inversa (si existeix) és la solució única de l'equació lineal $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$.
- La pseudoinversa (que existeix sempre) és una solució per mínims quadrats de l'equació lineal $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$.

Per comprovar-ho, com que les solucions del problema de mínims quadrats són les solucions de l'equació $\mathsf{A}^*\mathsf{AX} = \mathsf{A}^*\mathrm{I} = \mathsf{A}^*$, substituint $\mathsf{X} = \mathsf{A}^+$ tenim

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{A}^+ = \mathsf{V}_1\Sigma_{11}\mathsf{U}_1^*\mathsf{U}_1\Sigma_{11}\mathsf{V}_1^*\mathsf{V}_1\Sigma_{11}^{-1}\mathsf{U}_1^* = \mathsf{V}_1\Sigma_{11}\mathsf{U}_1^* = \mathsf{A}^* \quad \square$$

Com a conseqüència d'això, $\mathsf{A}^+\vec{b}$ és una solució per mínims quadrats del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, perquè $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{A}^+\vec{b} = \mathsf{A}^*\vec{b}$.

Així que la solució general del problema de mínims quadrats és

$$\vec{x} = \mathsf{A}^+\vec{b} + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$$

31.5. Resum

Aplicacions dels vectors singulars

- **Sistemes d'equacions lineals**

  Si $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$, els canvis $\vec{y} = \mathsf{V}^*\vec{x}$, $\vec{c} = \mathsf{U}^*\vec{b}$ transformem el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ en $\Sigma\vec{y} = \vec{c}$, o

  $$\begin{bmatrix} \Sigma_{11}\vec{y}_1 = \vec{c}_1 \\ \vec{0} = \vec{c}_2 \end{bmatrix}$$

  Aquest sistema és compatible si i només si $\vec{c}_2 = \vec{0}$ i, en aquest cas, la solució és $\vec{x} = \mathsf{V}\vec{y}$, on $\vec{y} = (\Sigma_{11}^{-1}\vec{c}_1, \vec{y}_2)$ ($\vec{y}_2$ arbitrari).

- **Resolució per mínims quadrats**

  Si $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$, els canvis $\vec{y} = \mathsf{V}^*\vec{x}$, $\vec{c} = \mathsf{U}^*\vec{b}$ transformem el problema de mínims quadrats $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ en

  $$\text{Minimitzeu } \|\Sigma_{11}\vec{y}_1 - \vec{c}_1\|^2 + \|\vec{c}_2\|^2$$

  Aquest mínim és igual a $\|\vec{c}_2\|^2$ i s'aconsegueix quan $\vec{y}_1 = \Sigma_{11}^{-1}\vec{c}_1$.

$(\cdots)$

(···)

- **Aproximacions de rang limitat**

  Si $\mathsf{A} = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^* + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_r \vec{u}_r \vec{v}_r^*$ és una descomposició en valors singulars llavors, la matriu de rang com a molt k ($k < r$) més pròxima en norma espectral a A és $\mathsf{A}_k = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^* + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^* + \cdots + \sigma_k \vec{u}_k \vec{v}_k^*$.

  A més, $\|\mathsf{A} - \mathsf{A}_k\| = \sigma_{k+1}$.

La pseudoinversa

- Si $\mathsf{A} = \mathsf{U}_1 \Sigma_{11} \mathsf{V}_1^*$ és una descomposició en valors singulars reduïda, la *pseudoinversa* o la *inversa Moore-Penrose* de A és la matriu $\mathsf{A}^+ = \mathsf{V}_1 \Sigma_{11}^{-1} \mathsf{U}_1^*$.

  ☞ La pseudoinversa es la solució per mínims quadrats del problema $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$.

  ☞ El vector $\mathsf{A}^+ \vec{b}$ és una solució per mínims quadrats del problema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

  ☞ La solució general del problema de mínims quadrats és $\vec{x} = \mathsf{A}^+ \vec{b} + \operatorname{Nul} \mathsf{A}$.

31.6. Exercicis

Exercici 31.1. Feu servir la descomposició en valors singulars de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ per resoldre el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, essent $\vec{b} = (3, 3, 0, 4)$.

(solució: pàg. 698)

Exercici 31.2. Trobeu les matrius A_1 i A_2, de rang 1 i de rang 2, respectivament, més pròximes en norma espectral a la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Comproveu que la norma espectral de $\mathsf{A} - \mathsf{A}_2$ és igual al tercer valor singular de la matriu A.

(solució: pàg. 699)

Exercici 31.3. Trobeu la pseudoinversa de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(solució: pàg. 700)

Exercici 31.4. Trobeu la pseudoinversa de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i apliqueu el resultat per trobar la solució del problema de mínims quadrats $\mathsf{A}\vec{x} = (1, 1, 1, 2)$.

(solució: pàg. 700)

Exercici 31.5. Demostreu que $\mathsf{A}^+\vec{b}$ és la solució per mínims quadrats del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ que té la norma mínima.

(solució: pàg. 701)

Exercici 31.6. Siga A una matriu real $m \times n$. Proveu les següents propietats sobre la pseudoinversa:

(a) $\mathsf{AA}^+\mathsf{A} = \mathsf{A}$

(b) $\mathsf{A}^+\mathsf{AA}^+ = \mathsf{A}^+$

(c) AA^+ és hermítica

(d) $\mathsf{A}^+\mathsf{A}$ és hermítica

(solució: pàg. 701)

Les quatre propietats del l'exercici 31.6. caracteritzen la pseudoinversa. Això és el que provarem en l'exercici següent.

Exercici 31.7. Siga A una matriu real $m \times n$. Proveu que, si la matriu B compleix les següents propietats

(a) $\mathsf{ABA} = \mathsf{A}$

(b) $\mathsf{BAB} = \mathsf{B}$

(c) AB és hermítica

(d) BA és hermítica

llavors $\mathsf{B} = \mathsf{A}^+$.

(solució: pàg. 702)

Exercici 31.8. Quina condició s'ha de complir perquè la pseudoinversa de la matriu A siga una inversa esquerra? I perquè siga una inversa dreta?

(solució: pàg. 702)

Exercici 31.9. (La descomposició polar d'una matriu quadrada) Proveu que, si A és una matriu quadrada, llavors podem factoritzar-la com $\mathsf{A} = \mathsf{QP}$, on Q és unitària i P hermítica semidefinida positiva (*suggeriment:* si $\mathsf{A} = \mathsf{U\Sigma V}^*$ és la descomposició en valors singulars, preneu $\mathsf{Q} = \mathsf{UV}^*$ i $\mathsf{P} = \mathsf{V\Sigma V}^*$).

Com ha de ser A perquè P siga definida positiva? (solució: pàg. 703)

La factorització $\mathsf{A} = \mathsf{QP}$ *es coneix com la* descomposició polar *de la matriu* A*, atés que aquest producte és anàleg a la forma polar (o exponencial),* $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$*, del nombre complex* z *(les matrius semidefinides positives són anàlogues als nombres no negatius i les unitàries als nombres complexos unitaris).*

Epíleg. Què hem après?

El problema és $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$, així que la solució hauria de ser $\vec{x} = \mathsf{A}^{-1}\vec{b}$. Però resulta que, de vegades, no hi ha solució i de vegades n'hi ha moltes. I, a més, no sempre hi ha A^{-1}.

Com que no sempre té solució, cerquem allò més semblant a una solució: el problema és trobar el(s) $\vec{x}$ per als quals $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ o, si més no, els que fan la diferència $\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}$ el més menuda possible.

Les solucions són $\vec{x} = \mathsf{A}^{+}\vec{b} + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.

Però, potser, aquest resum és massa resumit, així que l'ampliarem una mica, revisant (esquemàticament) què és el més important que hem après en aquest curs.[2]

[2] De propina, hi hem afegit alguna cosa que no és al text.

Vectors i matrius

Un *vector*, en general, és un element d'un espai vectorial. En aquest sentit, un vector pot ser una aplicació, una successió, un polinomi...

Però els vectors als quals ens referim més sovint són els que definim tot seguit.

- Un *vector* n-dimensional és una llista (en columna) de n nombres: $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix}$. Per comoditat, també l'escrivim com $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.
- Una matriu $n \times m$ és un conjunt de nm nombres ordenats en m files i n columnes o (millor) una llista de n vectors m-dimensionals:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

Les operacions més importants amb vectors són aquestes:

- La suma de dos vectors n-dimensionals: si $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ llavors $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.
- El producte d'un escalar per un vector: si $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ llavors $\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$.
- El producte escalar de dos vectors n-dimensionals: si $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ llavors $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n)$.

Les operacions més importants amb matrius són:

- La suma de dos matrius: $m \times n$: si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ i $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$ llavors $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 + \vec{b}_1 & \vec{a}_2 + \vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_n + \vec{b}_n \end{bmatrix}$.
- El producte d'un escalar per una matriu: si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ llavors $\alpha\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha\vec{a}_1 & \alpha\vec{a}_2 & \cdots & \alpha\vec{a}_n \end{bmatrix}$.
- El producte matriu-vector: si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ i $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ llavors $\mathsf{A}\vec{u} = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + \cdots + u_n\vec{a}_n$
- El producte d'una matriu $m \times n$ per una matriu $n \times p$:

$$\mathsf{AB} = \mathsf{A}\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}\vec{b}_1 & \mathsf{A}\vec{b}_2 & \cdots & \mathsf{A}\vec{b}_p \end{bmatrix}$$

Productes escalars i ortogonalitat

- Un *producte escalar* és una aplicació $(\vec{u}|\vec{v})$, que a cada parell de vectors els associa un nombre, hermítica, lineal en el segon argument i definida positiva.
- El més usual és el producte escalar *estàndard* de dos vectors n-dimensionals, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n$.
  - Si els vectors són reals, $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)$.
- Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són *ortogonals* si $(\vec{u}|\vec{v}) = 0$.
- La *norma* del vector $\vec{u}$ és $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})}$.
- La *distància* entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
- Dos conjunts de vectors A i B són *ortogonals* si cada vector de A és ortogonal a tots els vectors de B.
  - L'*ortogonal* del conjunt A és el conjunt $A^\perp$ de tots els vectors de l'espai que són ortogonals a A.
    L'ortogonal de A és un subespai.

Sistemes d'equacions lineals

Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$, el *sistema d'equacions lineals*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

es pot escriure com

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b} \qquad \text{o bé} \qquad \mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

- El sistema lineal és *consistent* quan $\vec{b} \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$, és a dir, quan $\operatorname{rang} \mathsf{A} = \operatorname{rang} \left[\mathsf{A} \mid \vec{b} \right]$.

  I és *determinat* quan aquest rang és igual a n.
- Si R és la forma esglaonada reduïda de la matriu A i T la matriu invertible tal que $\mathsf{R} = \mathsf{TA}$, el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és equivalent a $\mathsf{R}\vec{x} = \mathsf{T}\vec{b}$.

– Si la matriu A és invertible, la solució (única) és $\vec{x} = \mathsf{A}^{-1}\vec{b}$.

– La solució general del sistema homogeni $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ és $\vec{x} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.

– El sistema lineal és consistent quan $\vec{b} \in \operatorname{Col}\mathsf{A}$.

  Si és compatible i $\vec{x}_0$ és una solució particular, la solució general és $\vec{x} = \vec{x}_0 + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.

– Si el sistema lineal és compatible, la solució general és $\vec{x} = \mathsf{A}^{+}\vec{b} + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.

Matrius elementals, esglaonades i triangulars

Matrius elementals Una matriu és *elemental* quan és el resultat d'aplicar una operació elemental a la matriu identitat, és a dir, una d'aquestes:

– La permutació de dues files en la matriu identitat.

– La multiplicació d'una fila de la matriu identitat per un nombre distint de zero.

– El resultat de sumar a una fila de la matriu identitat el producte d'un escalar per una altra fila.

– Si E és elemental,

  - el producte EA és equivalent a una operació elemental sobre les files de A i
  - el producte AE és equivalent a una operació elemental sobre les columnes de A.

Matrius esglaonades Una matriu és *esglaonada* si

1. les files nul·les estan per davall de les no nul·les i
2. el primer element no nul (per l'esquerra) de cada fila, a partir de la segona, es troba més a la dreta que el primer element no nul de la fila anterior.

Una matriu és *esglaonada reduïda* si és esglaonada i, a més,

3. tots els pivots són 1 i
4. tots els elements situats per damunt dels pivots són zeros.

Matrius diagonals i triangulars Una matriu quadrada és

– *diagonal* si totes les entrades fora de la diagonal són zeros,

– *triangular superior* si totes les entrades per sota de la diagonal són zeros i

– *triangular inferior* si totes les entrades per sobre de la diagonal són zeros.

- Els algorismes de Gauss i de Gauss-Jordan transformen una matriu en esglaonada, esglaonada reduïda o triangular superior fent servir únicament operacions elementals per files.
- L'algorisme de Gram-Schmidt transforma una matriu (de rang igual al nombre de columnes) en una matriu amb les columnes ortonormals fent servir únicament operacions elementals per columnes.

El rang d'una matriu

El *rang* d'una matriu és

- el nombre de columnes linealment independents,
- el nombre de files linealment independents,
- el nombre de files no nul·les d'una forma esglaonada qualsevol,
- el nombre d'uns principals de la forma esglaonada reduïda,
- la dimensió de l'espai columna i
- la dimensió de l'espai fila.

Una matriu quadrada $n \times n$ és invertible si i només si el seu rang és igual a n.

Matrius invertibles

Una matriu quadrada A és *invertible* si existeix una matriu B tal que $\mathsf{AB} = \mathrm{I}$.
Aquesta matriu B és única, s'anomena la inversa de A i es representa com A^{-1}.

- Si A i B són matrius $n \times n$, el producte AB és invertible si i només si les dues matrius ho són.
  - A més, $(\mathsf{AB})^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}$.
- Les inverses de les matrius elementals són matrius elementals del mateix tipus.
- Si A és invertible llavors l'algorisme de Gauss-Jordan la transforma en la matriu identitat.

  Les mateixes operacions elementals transformen la identitat en la inversa de A.

Si A és una matriu quadrada $n \times n$, totes les afirmacions següents són equivalents:

1. A és invertible.

2. L'equació matricial $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$ és compatible.
3. El rang de A és n.
4. Les files de A són linealment independents.
5. Les columnes de A són linealment independents.
6. La forma esglaonada reduïda de A és la matriu identitat.
7. Per a qualsevol vector $\vec{b}$ el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és compatible.
8. Per a qualsevol vector $\vec{b}$ el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és determinat.
9. El sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ és determinat.
10. L'espai nul de A és $\operatorname{Nul}\mathsf{A} = \{\vec{0}\}$.
11. Existeix una matriu B tal que $\mathsf{BA} = \mathrm{I}$.
12. A és un producte de matrius elementals.
13. el determinant de A no és zero.
14. L'espai columna de A és $\operatorname{Col}\mathsf{A} = \mathbb{K}^n$.
15. L'espai nul de la matriu transposada A^T és $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \{\vec{0}\}$.
16. L'espai nul de la matriu adjunta A^* és $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^* = \{\vec{0}\}$.
17. L'espai fila de A és $\operatorname{Fil}\mathsf{A} = \mathbb{K}^n$.
18. El nucli de l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ és $\operatorname{Nuc} f = \{\vec{0}\}$.
19. L'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ és injectiva.
20. L'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ és suprajectiva.
21. L'aplicació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ és bijectiva.
22. El nombre 0 no és valor propi de A.

Matrius hermítiques i unitàries

La matriu transposada i la matriu adjunta

- La matriu *transposada* de A, A^T, és la matriu que té per files les columnes de A.
- La matriu *adjunta* de A, A^*, és la conjugada de la matriu transposada (a més de transposar, les entrades es canvien pels seus conjugats complexos).

Matrius simètriques i antisimètriques. Matrius hermítiques i antihermítiques

- La matriu (quadrada) A és *simètrica* si $\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}$.
- La matriu (quadrada) A és *antisimètrica* si $\mathsf{A}^\mathsf{T} = -\mathsf{A}$.
- La matriu (quadrada) A és *hermítica* si $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$.
- La matriu (quadrada) A és *antihermítica* si $\mathsf{A}^* = -\mathsf{A}$.

Matrius ortogonals i unitàries

- La matriu real (quadrada) A és *ortogonal* si $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \mathrm{I}$ (la inversa és igual a la transposada).
- La matriu (quadrada) A és *unitària* si $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathrm{I}$ (la inversa és igual a l'adjunta).

Matrius normals La matriu (quadrada) A és *normal* si $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^*$.

- Una matriu és diagonalitzable unitàriament si i només si és normal.
- Una matriu real és diagonalitzable ortogonalment si i només si és simètrica.

Matrius definides, semidefinides i indefinides

Matrius definides

- La matriu (quadrada) A és *definida positiva* si $\vec{x}^*\mathsf{A}\vec{x} > 0$ sempre que $\vec{x} \neq \vec{0}$.
- La matriu (quadrada) A és *definida negativa* si $\vec{x}^*\mathsf{A}\vec{x} < 0$ sempre que $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Matrius semidefinides

- La matriu (quadrada) A és *semidefinida positiva* si $\vec{x}^*\mathsf{A}\vec{x} \geq 0$ per a tot vector $\vec{x}$.
- La matriu (quadrada) A és *semidefinida negativa* si $\vec{x}^*\mathsf{A}\vec{x} \leq 0$ per a tot vector $\vec{x}$.

Matrius indefinides

- La matriu (quadrada) A és *indefinida* si no és semidefinida positiva ni semidefinida negativa.

Mínims quadrats

Una *solució per mínims quadrats* del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és un vector $\vec{x}$ que fa mínima la norma $\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\|$. L'error de mínims quadrats és el mínim $\min\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\|$.

- Si el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és compatible, aleshores les solucions del problema de mínims quadrats són les solucions ordinàries.
- Les solucions del problema de mínims quadrats són les solucions del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = p_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}(\vec{b})$.
- Les solucions del problema de mínims quadrats són les solucions del sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$.
- Si $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$ és una factorització QR, les solucions del problema de mínims quadrats són les solucions del sistema lineal $\mathsf{R}\vec{x} = \mathsf{Q}^*\vec{b}$ i l'error de mínims quadrats és $\left\|\vec{b} - \mathsf{QQ}^*\vec{b}\right\|$.
- Si $\vec{x}_0$ és una solució del problema de mínims quadrats, la solució general (el conjunt de totes les solucions) per mínims quadrats és $\vec{x}_0 + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.
- La solució general del problema de mínims quadrats és $\vec{x} = \mathsf{A}^+\vec{b} + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.

Espais vectorials i aplicacions lineals

- Un *espai vectorial* és un conjunt (de *vectors*) en el qual es poden fer combinacions lineals (és a dir, on hi ha definides una suma de vectors i un producte escalar-vector).
- Un *subespai* F de l'espai vectorial E és un subconjunt que conté el vector zero i tal que si els vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són a F, la combinació lineal $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ també és a F.
- Un espai vectorial *euclidià* és un espai vectorial on hi ha definit un producte escalar.
- Una *aplicació lineal* $f : E_1 \longrightarrow E_2$ és una aplicació entre dos espais vectorials que conserva les combinacions lineals:
  $f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2)$.
  - El *nucli* d'una aplicació lineal f, $\operatorname{Nuc} f$, és l'antiimatge del vector zero. El nucli és un subespai de l'espai inicial.
  - La *imatge* d'una aplicació lineal f, $\operatorname{Im} f$, és el conjunt les imatges de tots els vectors de l'espai inicial.
    La imatge és un subespai de l'espai final.

  - Fórmula de les dimensions: Si E_1 és de dimensió finita llavors $\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E_1$.
  - f és injectiva si i només si $\operatorname{Nuc} f = \{\vec{0}\}$.

- Una aplicació $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és lineal si i només si existeix una matriu A tal que $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x})$.

  En aquest cas, $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nul} \mathsf{A}$ i $\operatorname{Im} f = \operatorname{Col} \mathsf{A}$.

- Un *endomorfisme* de l'espai E és una aplicació lineal $f : E \longrightarrow E$.

Bases i canvis de base

Una *base* de l'espai vectorial E és un conjunt $\mathcal{B}$ generador i linealment independent.

- Si $E \neq \{\vec{0}\}$ és de dimensió finita aleshores té alguna base.

  En aquest cas, totes les bases tenen el mateix nombre d'elements. Aquest nombre és la dimensió de E.

- Si $\mathcal{B}$ és una base llavors qualsevol vector s'expressa de forma única com a combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}$.

- Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ és una base ordenada de l'espai de dimensió finita E i si $\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$, el vector de coordenades de $\vec{u}$ respecte a $\mathcal{B}$ és $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

- Si $\vec{u}$ és un vector de $\mathbb{K}^n$ i $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ és una base ordenada llavors $\vec{u} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}\vec{u}_{\mathcal{B}}$.

  (si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ és un conjunt (ordenat) de vectors de $\mathbb{K}^n$ representem com M_S la matriu $\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \end{bmatrix}$)

Canvi de base en un espai E de dimensió n

- La matriu de canvi de la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ a la base $\mathcal{B}_2$ és $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{1_{\mathcal{B}_2}} & \vec{u}_{2_{\mathcal{B}_2}} & \cdots & \vec{u}_{n_{\mathcal{B}_2}} \end{bmatrix}$.

- Si l'espai és $\mathbb{K}^n$:

  - La matriu de canvi de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$ és $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$

- Fórmula del canvi de base: $\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$.

Canvi de base en una aplicació lineal

- Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ i $\mathcal{B}'$ són bases de E i E' i $f : E \longrightarrow E'$ és una aplicació lineal, la matriu de f respecte a les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ és
  $\mathsf{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} f(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}'} & f(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}'} & \cdots & f(\vec{v}_n)_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$.

- Les coordenades de la imatge del vector $\vec{v}$ respecte a la base $\mathcal{B}'$ són $f(\vec{v})_{\mathcal{B}'} = \mathsf{M}_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'}\vec{v}_{\mathcal{B}}$.
- Fórmula del canvi de bases en una aplicació lineal: $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}'_2\mathcal{B}'_1}\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_2\mathcal{B}'_2}\mathsf{M}^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$. Abreujadament, $\mathsf{A} = \mathsf{QBP}^{-1}$ (on A i B són les matrius associades a f i P i Q matrius de canvi de base).

Bases ortonormals

- Si E és un espai euclidià i $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$ una base ortonormal de E llavors les coordenades del vector $\vec{u}$ respecte a $\mathcal{B}$ són
  $\vec{u}_{\mathcal{B}} = ((\vec{q}_1|\vec{u}), (\vec{q}_2|\vec{u}), \dots, (\vec{q}_n|\vec{u}))$.
- Si F és un subespai de l'espai euclidià E i $\mathcal{B}_F = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_r\}$ una base ortonormal de F llavors la projecció del vector $\vec{u}$ sobre F és
  $p_F(\vec{u}) = (\vec{q}_1|\vec{u})\,\vec{q}_1 + (\vec{q}_2|\vec{u})\,\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_r|\vec{u})\,\vec{q}_r$.
- Si l'espai és $\mathbb{K}^n$, amb el producte escalar estàndard,
  - Si $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$ és una base ortonormal i $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \dots & \vec{q}_n \end{bmatrix}$ llavors les coordenades del vector $\vec{u}$ respecte a $\mathcal{B}$ són
    $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (\vec{q}_1 \cdot \vec{u}, \vec{q}_2 \cdot \vec{u}, \dots, \vec{q}_n \cdot \vec{u}) = \mathsf{Q}^*\vec{u}$.
  - Si $\mathcal{B} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_r\}$ és una base ortonormal del subespai F i $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \dots & \vec{q}_r \end{bmatrix}$ llavors la projecció del vector $\vec{u}$ sobre F és
    $p_F(\vec{u}) = (\vec{q}_1 \cdot \vec{u})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2 \cdot \vec{u})\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_r \cdot \vec{u})\vec{q}_r = \mathsf{QQ}^*\vec{u}$.

Intersecció, suma i suma directa

- La intersecció $F \cap G$ dels subespais F i G és un subespai.
- La *suma* de dos subespais F i G és el conjunt $F + G$ de totes les sumes d'elements de F amb elements de G.

  O, també, l'embolcall lineal $F + G = \langle F \cup G \rangle$.
  - La suma de subespais és un subespai.
- Fórmula de Grassmann: $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- La suma $F + G$ és *directa* quan $F \cap G = \{\vec{0}\}$. S'escriu $F \oplus G$.
- Si F és ortogonal a G llavors la suma és directa (en diem *suma directa ortogonal*).
  - Si F és un subespai de E llavors $E = F \oplus F^{\perp}$.

  - Si $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_{F^\perp}$, llavors $p_F(\vec{u}) = \vec{u}_F$ és la *projecció ortogonal* de $\vec{u}$ sobre F.

    $p_F(\vec{u})$ és el vector de F més pròxim a $\vec{u}$.

- Si A és una matriu $n \times m$, llavors
  - $\mathbb{K}^n$ és la suma directa ortogonal dels espais fila i nul de A i
  - $\mathbb{K}^m$ és la suma directa ortogonal dels espais columna i nul esquerre de A.

Els quatre subespais

Si A és una matriu $m \times n$ i el rang de A és r,

- L'*espai columna* de A, $\operatorname{Col}\mathsf{A}$, és el conjunt de totes les combinacions lineals de les columnes de A o, també, el conjunt de vectors $\vec{b}$ per als quals el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és compatible.

  És un subespai de $\mathbb{K}^m$, de dimensió r.

- L'*espai fila* de la matriu A és el conjunt $\operatorname{Fil}\mathsf{A} = \operatorname{Col}\mathsf{A}^*$.

  És un subespai de $\mathbb{K}^n$, de dimensió r.

- L'*espai nul* de la matriu A, $\operatorname{Nul}\mathsf{A}$, és el conjunt de totes les solucions del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$.

  És un subespai de $\mathbb{K}^n$, de dimensió $n - r$.

- L'*espai nul esquerre* de la matriu és l'espai nul de la matriu adjunta, $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$.

  És un subespai de $\mathbb{K}^m$, de dimensió $m - r$.

- Relacions d'ortogonalitat:
  - L'espai nul és l'ortogonal de l'espai fila.
  - L'espai nul esquerre és l'ortogonal de l'espai columna.

- Sumes directes ortogonals:

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Fil}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul}\mathsf{A} \qquad \mathbb{K}^m = \operatorname{Col}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$$

- Si $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ és l'aplicació lineal definida com $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$,
  - El *nucli* de f és l'espai nul de A: $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.
  - El conjunt *imatge* de f és l'espai columna de A: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Col}\mathsf{A}$.
  - La restricció de f als espais fila i columna és bijectiva.

Determinants

El determinant d'una matriu quadrada ($\det \mathsf{A}$ o $|\mathsf{A}|$) és un nombre que té les propietats següents: si es permuten dues files el determinant canvia de signe; és lineal en cada columna i, si la matriu és triangular superior, el determinant és el producte de la diagonal.

- La matriu A és invertible si i només si $\det \mathsf{A} \neq 0$.
- Teorema de Binet: $\det(\mathsf{AB}) = \det \mathsf{A} \det \mathsf{B}$.
- $\det \mathsf{A}^\mathsf{T} = \det \mathsf{A}$.
- Desenvolupament per una columna o per una fila:
  - El *menor complementari* de a_{ij} és el determinant de la matriu A_{ij} que s'obté eliminant la fila i i la columna j de la matriu A.
  - El *cofactor* de l'element a_{ij} és $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathsf{A}_{ij}$.
  - El determinant és igual a la suma dels productes dels elements d'una columna (o fila) pels cofactors corresponents.
- El rang d'una matriu és el màxim ordre de les submatrius amb determinant no igual a zero.

Factoritzacions de matrius

Factoritzacions LU

Normalment s'obtenen aplicant els algorismes de Gauss o de Gauss-Jordan.

- LU estricta: $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$
  - A és una matriu quadrada.
  - L és triangular inferior amb uns a la diagonal.
  - U és triangular superior.
  - No sempre existeix.
- LU no estricta: $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$
  - A és una matriu quadrada.
  - L és una permutació de les files d'una matriu triangular inferior amb uns a la diagonal.
  - U és triangular superior.
  - Sempre existeix.
- Forma esglaonada reduïda: $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$ (o $\mathsf{A} = \mathsf{LR}$)
  - A és una matriu qualsevol.
  - T és una matriu invertible.

  - L és la inversa de T.
  - R és la forma esglaonada reduïda de A.
  - Sempre existeix.
- LDU: $A = LDU$ (no inclosa al text)
  - A és una matriu quadrada.
  - L és triangular inferior amb uns a la diagonal.
  - D és una matriu diagonal.
  - U és triangular superior amb uns a la diagonal.
  - No sempre existeix.
- $PA = LU$ (no inclosa al text)
  - A és una matriu quadrada.
  - P és una matriu permutació (una permutació de les columnes de I).
  - L és triangular inferior amb uns a la diagonal.
  - U és triangular superior.
  - Sempre existeix.
- Cholesky: $A = LL^T$ (no inclosa al text)
  - A és una matriu real simètrica definida positiva.
  - L és triangular inferior.
  - Sempre existeix.

Factorització QR

- $A = QR$
  - A és una matriu $m \times n$ i $\operatorname{rang} A = n$.
  - Q és una matriu $m \times n$ amb $Q^*Q = I$ (ço és, les columnes de Q són ortonormals).
  - R és una matriu $n \times n$ triangular superior invertible.

  (nosaltres l'hem obtinguda aplicant l'algorisme de Gram-Schmidt, però hi ha mètodes més estables numèricament)
- $A = QR$ (versió alternativa, no inclosa al text)
  - A és una matriu $m \times n$ i $\operatorname{rang} A = n$.
  - Q és una matriu $m \times m$ ortogonal.
  - $R = \begin{bmatrix} R_1 \\ O \end{bmatrix}$, on R_1 és una matriu $n \times n$ triangular superior invertible i O és la matriu nul·la $(m-n) \times n$.

Factoritzacions en valors propis i en valors singulars

- Schur: $A = UTU^*$
  - A és una matriu quadrada.

  - U és una matriu unitària.
  - T és una matriu triangular superior, amb els valors propis de A a la diagonal.
  - Sempre existeix.
- Diagonalització: $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$
  - A és una matriu quadrada.
  - P és una matriu invertible (formada per vectors propis).
  - D és una matriu diagonal, amb els valors propis de A a la diagonal.
  - No sempre existeix. Perquè existisca,
    - El el cas complex, tots els valors propis han de ser geomètricament complets.
    - El el cas real, tots els valors propis han de ser reals i geomètricament complets.
- Diagonalització ortogonal: $\mathsf{A} = \mathsf{QDQ}^{\mathsf{T}}$
  - A és una matriu real simètrica.
  - Q és una matriu ortogonal (formada per vectors propis).
  - D és una matriu diagonal, amb els valors propis de A a la diagonal.
  - Sempre existeix (si A és real i simètrica).
- Diagonalització unitària: $\mathsf{A} = \mathsf{UDU}^*$
  - A és una matriu normal.
  - Q és una matriu unitària (formada per vectors propis).
  - D és una matriu diagonal, amb els valors propis de A a la diagonal.
  - Sempre existeix (si A és normal).
- Forma de Jordan: $\mathsf{A} = \mathsf{PJP}^{-1}$
- A és una matriu quadrada.
- P és una matriu invertible (formada per vectors propis generalitzats).
- D és una matriu triangular superior, formada per blocs de Jordan, amb els valors propis de A a la diagonal.
- Sempre existeix.
- Descomposició en valors singulars: $\mathsf{A} = \mathsf{U\Sigma V}^*$
  - A és una matriu $m \times n$ de rang r.
  - U és una matriu unitària $m \times m$.
  - Σ és la matriu $(m \times n)$ $\begin{bmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}$ on Σ_1 és una matriu $r \times r$ diagonal (la diagonal dels valors singulars).
  - V és una matriu unitària $n \times n$.
  - Sempre existeix.

- Descomposició en valors singulars reduïda: $\mathsf{A} = \mathsf{U}_1\Sigma_1\mathsf{V}_1^*$
  - A és una matriu $m \times n$ de rang r.
  - U és una matriu $m \times r$ amb les columnes ortonormals (les columnes són vectors singulars esquerres).
  - Σ_1 és una matriu $r \times r$ diagonal (la diagonal dels valors singulars).
  - V_1 és una matriu $r \times n$ amb les columnes ortonormals (les columnes són vectors singulars drets).
  - Sempre existeix.

Descomposició polar: $\mathsf{A} = \mathsf{QP}$

- A és una matriu quadrada.
- Q és una matriu unitària.
- P és una matriu hermítica semidefinida positiva.
- Sempre existeix.

La pseudoinversa

Si f és l'aplicació lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ definida per $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, la *pseudoinversa* $f^+ : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es defineix com $f^+(\vec{y}) = \vec{x}$, on $\vec{x}$ és l'únic vector de $\operatorname{Fil}\mathsf{A}$ tal que $f(\vec{x}) = p_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}\vec{y}$.

- Si $\mathsf{A}^+ = \mathsf{U}_1\Sigma_{11}\mathsf{V}_1^*$ és la descomposició en valors singulars reduïda de la matriu A, llavors la pseudoinversa de A és $\mathsf{A}^+ = \mathsf{V}_1\Sigma_{11}^{-1}\mathsf{U}_1^*$.
- La pseudoinversa és una solució per mínims quadrats de l'equació $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$.
- $\mathsf{A}^+\vec{b}$ és una solució per mínims quadrats del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.
- La solució general per mínims quadrats del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és
  $\vec{x} = \mathsf{A}^+\vec{b} + \operatorname{Nul}\mathsf{A}$.

Llibre quart. Solucions dels exercicis

L'àlgebra lineal és l'art de resoldre problemes lineals.

Ací he inclòs les solucions completes de tots els exercicis dels tres llibres anteriors. He mirat de ser prou exhaustiu perquè l'estudiant m'entenga sense caure en un excés de detalls i de repeticions que serien més avorrides que no informatives.

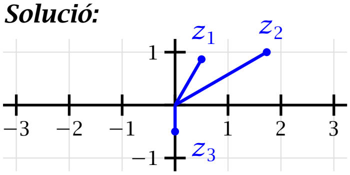
Molts (gairebé tots) els exercicis van destinats a fer que l'estudiant comprenga correctament la matèria; no solament les tècniques, però també les tècniques. Les matemàtiques no són només una col·lecció de martingales de càlcul, però és impossible entendre-les correctament si no es practica la resolució d'exercicis elementals. Tot i això alguns (potser massa pocs) dels exercicis van destinats a eixamplar allò que s'ha desenvolupat a la teoria i a mostrar alguns aspectes que no hi són.

Si estudieu amb aquest llibre, recordeu sempre que abans de mirar les solucions heu de resoldre o, si més no, intentar resoldre els problemes. Consulteu la solució per confirmar que ho heu fet correctament o bé per entendre perquè no hi heu reeixit.

Lliçó 1. Els nombres complexos

Exercici 1.1. (pàgina 32) *Representeu en un pla els nombres complexos* $z_1 = 1_{\pi/3}$, $z_2 = 2_{\pi/6}$ *i* $z_3 = (1/2)_{-\pi/2}$ *i calculeu el producte* $z_1 z_2 z_3$.

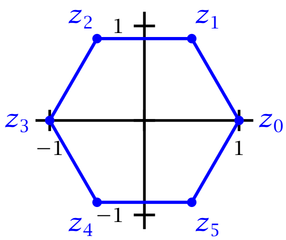
Solució:



$$z_1 z_2 z_3 = (1 \cdot 2 \cdot 1/2)_{\pi/3+\pi/6-\pi/2} = 1_0 = 1$$

Exercici 1.2. (pàgina 32) *Dibuixeu al pla complex un hexàgon regular inscrit en la circumferència de centre l'origen i radi igual a* 1 *i amb un vèrtex en el nombre* 1*. Quins són els nombres complexos,* z_0, z_1, …, z_5, *que representen els sis vèrtexs de l'hexàgon? Quan valen les potències sisenes d'aquests nombres?*

Solució:



$$z_0 = 1, z_1 = 1_{\pi/3}, z_2 = 1_{2\pi/3},$$
$$z_3 = 1_{\pi}, z_4 = 1_{4\pi/3}, z_5 = 1_{5\pi/3}$$

Tots aquests nombres són de la forma $z_k = 1_{k\pi/3}$, així que ${z_k}^6 = {1^6}_{6k\pi/3} = {1^6}_{2k\pi} = 1$. Els nombres z_k són arrels sisenes de 1.

Exercici 1.3. (pàgina 32) *Feu les operacions següents i expresseu els resultats en forma binòmica i en forma polar. (a)* $1/\mathrm{i}$, *(b)* $(1-\mathrm{i})/(1+\mathrm{i})$, *(c)* $2/(1-3\mathrm{i})$, *(d)* $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

Solució:

(a) $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i} = 1_{-\pi/2}$

(b) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}) = -\mathrm{i} = -\mathrm{i} = 1_{-\pi/2}$,

(c) $\dfrac{2}{1-3\mathrm{i}} = \dfrac{2(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} = \frac{2}{10}(1+3\mathrm{i}) = \frac{1}{5}(1+3\mathrm{i}) = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)_{\arctan 3}$

(d) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3 = 1 + 3\sqrt{3}\mathrm{i} + 3(\sqrt{3}\mathrm{i})^2 + (\sqrt{3}\mathrm{i})^3 = 1 + 3\sqrt{3}\mathrm{i} - 9 - 3\sqrt{3}\mathrm{i}$
$= -8 = 8_{-\pi}$

Exercici 1.4. (pàgina 33) *Donats els nombres complexos* $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1+\mathrm{i}$, $z_4 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$, $z_5 = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i})$, *(a) determineu-ne les parts reals i imaginàries, (b) calculeu-ne els mòduls i els arguments, (c) expresseu-los en forma polar i en forma exponencial, (d) calculeu-ne els conjugats i els inversos.*

Solució:

(a) $\operatorname{re} z_1 = 0, \operatorname{im} z_1 = 1, \quad \operatorname{re} z_2 = 1, \operatorname{im} z_2 = 0, \quad \operatorname{re} z_3 = 1, \operatorname{im} z_3 = 1$

$z_4 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 2 \Rightarrow \operatorname{re} z_4 = 2, \operatorname{im} z_4 = 0$

$z_5 = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i} \Rightarrow \operatorname{re} z_5 = 0, \operatorname{im} z_5 = 1$

(b) $|z_1| = |z_2| = |z_5| = 1$, $|z_3| = \sqrt{2}$, $|z_4| = 2$.

$\arg z_1 = \pi/2 + 2k\pi$, $\arg z_2 = 2k\pi$, $\arg z_3 = \pi/4 + 2k\pi$, $\arg z_4 = 2k\pi$, $\arg z_5 = \pi/2 + 2k\pi$ (k és un enter qualsevol).

(c) $z_1 = 1_{\pi/2}$, $z_2 = 1_0$, $z_3 = \sqrt{2}_{\pi/4}$, $z_4 = 2_0$, $z_5 = 1_{\pi/2}$.

$z_1 = 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, $z_2 = 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$, $z_3 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $z_4 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$, $z_5 = 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$.

(d) $\overline{z}_1 = -\mathrm{i}$, $\overline{z}_2 = 1$, $\overline{z}_3 = 1-\mathrm{i}$, $\overline{z}_4 = 2$, $\overline{z}_5 = -\mathrm{i}$.

$1/z_1 = -\mathrm{i}$, $1/z_2 = 1$, $1/z_3 = (1/2)(1-\mathrm{i})$, $1/z_4 = 1/2$, $1/z_5 = -\mathrm{i}$.

Exercici 1.5. (pàgina 33) *Calculeu les potències següents: (a)* $(1+\mathrm{i})^n$, *(b)* $(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^3$, *(c)* $(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^5$,
(d) $(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^6$, *(e)* i^{153}.

Solució:

(a) $(1+\mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}$

(b) $(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^3 = 2^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/3} = -8$

(c) $(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^5 = 2^5\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/3} = 32\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$

(d) $(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^3 = 2^6\mathrm{e}^{6i\pi/3} = 64$

(e) Les potències successives de i són $\mathrm{i}^0 = 1$, $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, i a partir d'aquí es repeteixen cíclicament.

Com que $153 = 4 \cdot 38 + 1$, $\mathrm{i}^{153} = (\mathrm{i})^{4\cdot 38+1} = (\mathrm{i}^4)^{38}\,\mathrm{i} = \mathrm{i}$.

Exercici 1.6. (pàgina 33) *Calculeu les arrels quadrades dels nombres* $-\mathrm{i}$, $3+4\mathrm{i}$ *i* $4-3\mathrm{i}$.

Solució:
Les arrels quadrades de $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$ són de la forma $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi/2+2k\pi)/2}$, és a dir, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$ i $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})$.
Ara cerquem els nombres $a+b\mathrm{i}$ tals que $(a+b\mathrm{i})^2 = 3+4\mathrm{i}$:

$$\begin{gathered}
(a+b\mathrm{i})^2 = 3+4\mathrm{i}\\
a^2-b^2+2ab\mathrm{i} = 3+4\mathrm{i}\\
a^2-b^2 = 3, \quad ab = 2\\
a^2-b^2 = 3, \quad b = 2/a\\
a^2-4/a^2 = 3, \quad b = 2/a\\
a^4-3a^2-4 = 0, \quad b = 2/a
\end{gathered}$$

L'equació $a^4-3a^2-4=0$ és biquadrada, així que podem resoldre-la per a a^2:

$$\begin{gathered}
a^2 = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2}, \quad b = 2/a\\
a^2 = \frac{3\pm 5}{2}, b = 2/a
\end{gathered}$$

Per tant, els valors posssibles per a a^2 són 4 i -1; però a ha de ser real, així que només és vàlid $a^2 = 4$, $a = \pm 2$, $b = \pm 2/a = \pm 1$.
Les dues arrels quadrades del nombre $3+4\mathrm{i}$ són $2+\mathrm{i}$ i $-2-\mathrm{i}$.

Les arrels quadrades del nombre $4-3\mathrm{i}$ les podríem calcular de la mateixa manera, però no és necessari, perquè $-\mathrm{i}(3+4\mathrm{i}) = 4-3\mathrm{i}$ i, com que ja sabem que $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right)^2 = -\mathrm{i}$ i que $(-(2+\mathrm{i}))^2 = 3+4\mathrm{i}$,

$$\begin{gathered}
-\mathrm{i}(3+4\mathrm{i}) = 4-3\mathrm{i}\\
\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right)^2(-(2+\mathrm{i}))^2 = 4-3\mathrm{i}\\
\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})\right)^2 = 4-3\mathrm{i}\\
(\pm(3-\mathrm{i}))^2 = 4-3\mathrm{i}
\end{gathered}$$

Les arrels quadrades de $4-3\mathrm{i}$ són $\frac{\sqrt{2}}{2}(3-\mathrm{i})$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}(-3+\mathrm{i})$.

Exercici 1.7. (pàgina 33) *Calculeu les arrels cinquenes de $z = 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.*

Solució:
El mòdul de z és $\sqrt{1+3} = 2$, així que $z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}$.

En conseqüència, les arrels cinquenes són $w_k = \sqrt[5]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(5\pi/6+2k\pi)/5} = \sqrt[5]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\mathrm{e}^{2k\pi/5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Exercici 1.8. (pàgina 33) *Proveu que les arrels enèsimes del nombre complex z estan en progressió geomètrica i deduïu-ne que la suma de totes les arrels enèsimes de z és igual a* 0.

Solució:
Les arrels de $z = re^{i\alpha}$ són $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\alpha+2k\pi)/n} = \sqrt[n]{r}e^{i\alpha/n}e^{i2k\pi/n}$. Per tant, $w_{k+1} = w_k e^{i2\pi/n}$ i les arrels fan una progressió geomètrica amb raó igual a $e^{i2\pi/n}$. La suma de totes les arrels és

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} = \frac{\sqrt[n]{r}e^{i(\alpha+2n\pi)/n} - \sqrt[n]{r}e^{i\alpha/n}}{\sqrt[n]{r}e^{i2\pi/n} - 1} = \sqrt[n]{r}e^{i\alpha/n}\frac{e^{i2n\pi/n} - 1}{\sqrt[n]{r}e^{i2\pi/n} - 1}$$

Però, $e^{i2n\pi/n} = e^{i2\pi} = 1$, així que la suma és igual a zero.

Exercici 1.9. (pàgina 33) *Feu servir la fórmula de De Moivre per provar les següents (ben conegudes) identitats trigonomètriques:*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

Solució:
Si $z = e^{i\alpha}$ i $w = e^{i\beta}$, llavors $zw = e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.
Així que

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$
$$(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

Separant les parts reals i imaginàries en la darrera expressió, hi trobem els resultats que cercàvem.

Exercici 1.10. (pàgina 33) *Proveu que* $\cos x = \dfrac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$ *i* $\sin x = \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$ *(per a qualsevol nombre real x).*

Solució:
L'únic que hem de fer és aplicar la definició de l'exponencial complexa:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} &= \frac{\cos x + i\sin x + \cos(-x) + i\sin(-x)}{2}\\
&= \frac{\cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x}{2} = \cos x\\
\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} &= \frac{\cos x + i\sin x - \cos(-x) - i\sin(-x)}{2i}\\
&= \frac{\cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x}{2i} = \sin x
\end{aligned}$$

Exercici 1.11. (pàgina 33) *Calculeu les sumes*

$$\cos 0 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha, \quad \sin 0 + \sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha$$

Solució:
Escrivint aquestes dues sumes com les parts real i imaginària d'un nombre complex,

$$s_n = (\cos 0 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha) \\ + \mathrm{i}\,(\sin 0 + \sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha)$$

tindrem

$$\begin{aligned} s_n &= \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} + \cdots + \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\alpha} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^0 + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^1 + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n \end{aligned}$$

(això és la suma dels termes d'una progressió geomètrica)

$$s_n = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1}$$

Ara ens convé observar que, com que $\sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1}{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin x$. Per tant,

$$s_n = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1} = \frac{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\alpha/2}\sin\big((n+1)\alpha/2\big)}{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\alpha/2} = \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\alpha/2}\frac{\sin\big((n+1)\alpha/2\big)}{\sin\alpha/2}$$

Les parts real i imaginària de s_n són les sumes que cercàvem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha &= \frac{\sin\big((n+1)\alpha/2\big)}{\sin\alpha/2}\cos\big(n\alpha/2\big) \\ \sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha &= \frac{\sin\big((n+1)\alpha/2\big)}{\sin\alpha/2}\big(\sin n\alpha/2\big) \end{aligned}$$

Lliçó 2. Polinomis reals i complexos. El teorema fonamental de l'àlgebra

---

Exercici 2.1. (pàgina 40) *Trobeu una factorització en polinomis irreductibles (complexos) de cadascun dels polinomis següents:*

(a) z^2+z+1 (b) z^4+z^2+1 (c) $7z^3-21$

(d) z^6+1 (e) z^3-z^2-z-2 (f) $5z^4-15z^3+15z^2-5z$

(g) $z^2+(3-\mathrm{i})z-3\mathrm{i}$

Solució:

(a)
$$z^2+z+1=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$=\left(z+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(alternativament, si apliqueu la fórmula de l'equació de segon grau, $z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$)

(b) Aquest és un polinomi *biquadrat*. De fet, canviant $w=z^2$ s'obté el polinomi de l'apartat anterior, així que les arrels són les arrels quadrades de $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, i les de $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculem-les:

- Arrels quadrades de $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$: $w_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ i $w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3}$
- Arrels quadrades de $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$: $w_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$ i $w_3=\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/3}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$

Així que $z^4+z^2+1=\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right)\left(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3}\right)\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\right)\left(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}\right)$

(c) Les arrels del polinomi $7z^3-21$ són les arrels cúbiques de $21/7=3$, és a dir, $w_0=\sqrt[3]{3}$, $w_1=\sqrt[3]{3}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$, $w_2=\sqrt[3]{3}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}$. Així que
$$7z^3-21=7(z^3-3)=7\left(z-\sqrt[3]{3}\right)\left(z-\sqrt[3]{3}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\right)\left(z-\sqrt[3]{3}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\right)$$

(d) Les arrels d'aquest polinomi són les arrels sisenes de -1: $w_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, $w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/6}=\mathrm{i}$, $w_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}$, $w_3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6}$, $w_4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}9\pi/6}=-\mathrm{i}$, $w_5=\mathrm{e}^{\mathrm{i}11\pi/6}$. Per tant, $z^6+1=(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})(z-\mathrm{i})(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6})(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6})(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi11/6})$.

(e) Com que z^3-z^2-z-2 és un polinomi amb coeficients enters, si té alguna arrel racional, serà un cocient entre un divisor del terme independent i un coeficient del terme de major grau, és a dir, un dels nombres $1,-1,2,-2$. Provant-los, trobem que $w_0=2$ és una arrel ($2^3-2^2-2+2=0$). Per tant, podem dividir el polinomi entre $z-2$ i obtindrem $z^3-z^2-z-2=(z^2+z+1)(z-2)$. I, recordant el resultat de l'apartat (a),
$$z^3-z^2-z-2=\left(z+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-2)$$

(f) $5z^4 - 15z^3 + 15z^2 - 5z = 5z(z^3 - 3z^2 + 3z - 1) = 5z(z-1)^3$

(g) $z^2 + (3-\mathrm{i})z - 3\mathrm{i} = z^2 + 3z - \mathrm{i}z - 3\mathrm{i} = (z+3)z - (z+3)\mathrm{i} = (z+3)(z-\mathrm{i})$

Exercici 2.2. (pàgina 40) *Trobeu una factorització en polinomis irreductibles reals de cadascun dels polinomis següents:*

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $x^4 + x^2 + 1$ (c) $7x^3 - 21$
(d) $x^6 + 1$ (e) $x^3 - x^2 - x - 2$ (f) $5x^4 - 15x^3 + 15x^2 - 5x$

Solució:
A l'exercici anterior hem factoritzat tots aquests polinomis considerant-los com a complexos.

(a) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

(b)
$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})\,(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3})\,(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})\,(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3}) \\ &= (x - \cos\pi/3 - \mathrm{i}\sin\pi/3)\,(x - \cos\pi/3 + \mathrm{i}\sin\pi/3) \\ &\quad (x - \cos 2\pi/3 - \mathrm{i}\sin 2\pi/3)\,(x - \cos 2\pi/3 + \mathrm{i}\sin 2\pi/3) \\ &= \left((x - \cos\pi/3)^2 + \sin^2\pi/3\right)\left((x - \cos 2\pi/3)^2 + \sin^2 2\pi/3\right) \\ &= \left((x - 1/2)^2 + 3/4\right)\left((x + 1/2)^2 + 3/4\right) \end{aligned}$$

(c) Sabem que $\sqrt[3]{3}$ és una arrel d'aquest polinomi, així que fent la divisió de $x^3 - 3$ entre $\sqrt[3]{3}$ obtenim

$$7x^3 - 21 = 7(x^3 - 21) = 7\left(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2}\right)\left(x - \sqrt[3]{3}\right)$$

(de l'exercici anterior sabem que les dues arrels restants no són reals).

(d)
$$\begin{aligned} x^6 + 1 &= (x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})(x - \mathrm{i})(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6})(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6})(x + \mathrm{i})(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 11/6}) \\ &= (x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})(x - \mathrm{i})(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6})(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6})(x + \mathrm{i})(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}) \\ &= (x^2 + 1)\left((x - \cos\frac{\pi}{6})^2 + \sin^2\frac{\pi}{6}\right)\left((x - \cos\frac{5}{\pi}6)^2 + \sin^2\frac{5}{\pi}6\right) \\ &= (x^2 + 1)\left((x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}\right)\left((x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

(e) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x^2 + x + 1)(x - 2)$

(f) $5x^4 - 15x^3 + 15x^2 - 5x = 5x(x-1)^3$

Exercici 2.3. (pàgina 40) *Trobeu una factorització en polinomis irreductibles racionals del polinomi* $7x^3 - 21$.

Solució:
$7x^3 - 21 = 7(x^3 - 3)$. El polinomi $x^3 - 3$ és irreductible, perquè si tingués algun divisor estricte, n'hi hauria d'haver un de grau igual a 1, $x - a$, la qual cosa implica que a ha de ser igual a $\sqrt{3}$, que no és un nombre racional.

Exercici 2.4. (pàgina 40) *Proveu que si a és una arrel del polinomi $p(z)$, amb multiplicitat m, llavors a és arrel de $p'(z)$ amb multiplicitat $m - 1$.*

Solució:
Si a és una arrel de $p(z)$, amb multiplicitat m, llavors $p(z) = q(a)(z - a)^m$, on $q(a) \neq 0$. Així que la derivada serà

$$p'(z) = q'(a)(z-a)^m + mq(a)(z-a)^{m-1} = (q'(a)(z - a) + mq(a))\,(z-a)^{m-1}$$

I, com que $q'(a)(a-a) + mq(a) \neq 0$, a és arrel de $p'(z)$ amb multiplicitat $m-1$.

Exercici 2.5. (pàgina 40) *Demostreu que la successió $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, on $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ (x_n i y_n reals) és convergent a $z = x + \mathrm{i}y$ si i només si $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$.*

Solució:
Com que $|x_n - x| \leq |z_n - z|$, si $\lim z_n = z$ llavors $\lim x_n = x$ (i, de la mateixa manera, $\lim y_n = y$).
Recíprocament, si $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$, donat $\epsilon > 0$, existeix n_0 tal que, si $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \epsilon/\sqrt{2}$ i $|y_n - y| < \epsilon/\sqrt{2}$. Aleshores,

$$|z_n - z| = \sqrt{|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2} < \sqrt{\epsilon^2/2 + \epsilon^2/2} = \epsilon$$

la qual cosa significa que $\lim z_n = z$.

LLIÇÓ 3. MATRIUS I VECTORS

EXERCICI 3.1. (pàgina 65) ***(Operacions amb vectors)*** *Considerem els vectors de* $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = (1, -1, 2), \vec{u}_2 = (0, 1, -3), \vec{u}_3 = (-1, 3, -8)$$

Calculeu (a) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$*, (b)* $3\vec{u}_3$ *i (c)* $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

Solució:

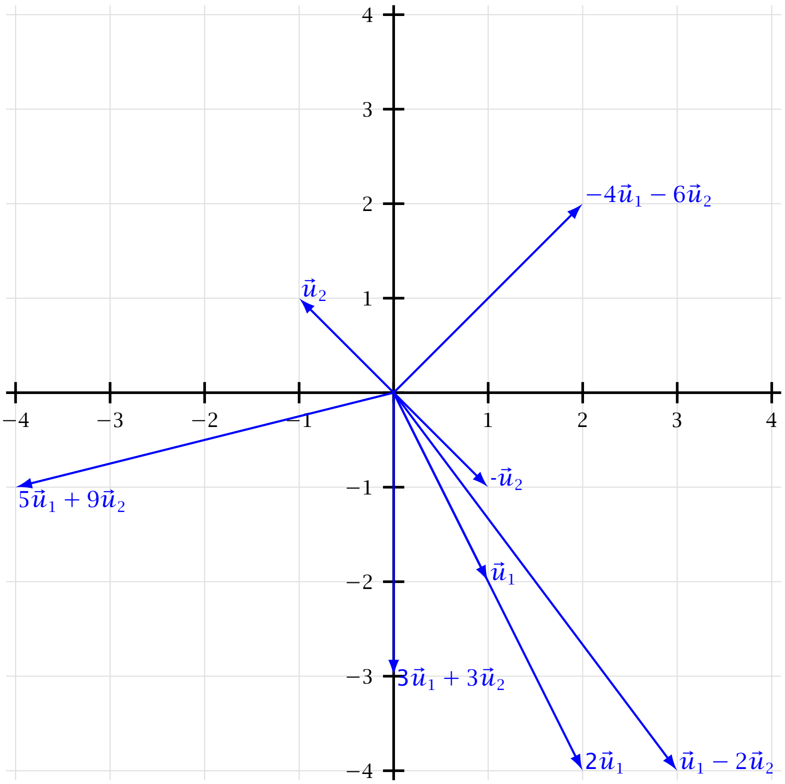
(a) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (1, -1, 2) + (0, 1, -3) = (1, 0, -1)$

(b) $3\vec{u}_3 = 3(-1, 3, -8) = (-3, 9, -24)$

(c) $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (1, -1, 2) - 2(0, 1, -3) + (-1, 3, -8) = (0, 0, 0)$

EXERCICI 3.2. (pàgina 66) ***(Representació gràfica dels vectors en*** $\mathbb{R}^2$***)***
Siguen $\vec{u}_1 = (1, -2)$ *i* $\vec{u}_2 = (-1, 1)$. *Representeu gràficament els vectors* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $2\vec{u}_1$, $-\vec{u}_2$, $3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$, $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $5\vec{u}_1 + 9\vec{u}_2$ *i* $-4\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2$.

Solució:



Exercici 3.3. (pàgina 66) ***(Combinacions lineals)*** *(a) Proveu que qualsevol vector de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u} = (a, b)$, és combinació lineal de $\vec{u}_1 = (1, 1)$ i $\vec{u}_2 = (1, -1)$. (b) És cert que qualsevol vector de $\mathbb{R}^3$ és combinació lineal de $(2, -1, -1)$, $(-1, 2, -1)$ i $(-1, -1, 2)$?*

Solució:

(a) $(a, b) = \dfrac{a+b}{2}(1, 1) + \dfrac{a-b}{2}(1, -1)$.

(b) Suposem que el vector (x, y, z) és combinació lineal d'aquests tres vectors,

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= x \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= y \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= z \end{aligned}$$

i, sumant aquestes tres igualtats,

$$0 = x + y + z$$

així que, si un vector (x, y, z) és combinació lineal d'aquests tres vectors, ha de complir l'equació $x + y + z = 0$. Llavors, no tots els vectors en són combinació. Per exemple, $(1, 1, 1)$ no ho és.

Exercici 3.4. (pàgina 66) ***(Norma d'un vector)*** *Calculeu les longituds dels vectors $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$, $\vec{u} = (3, 4)$ i $\vec{v} = (-1, 2)$.*

Solució:

$$\|\vec{e}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \qquad \|\vec{e}_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Exercici 3.5. (pàgina 66) ***(Angle entre dos vectors)*** *Calculeu l'angle entre les següents parelles de vectors:*

(a) $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *i* $\vec{v} = (0, 1)$

(b) $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *i* $\vec{v} = (2, 2)$

(c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ *i* $\vec{v} = (1, 2, 6)$ *(ací podeu fer servir la calculadora)*

(d) $\vec{u} = (1, 2, 1, 2)$ *i* $\vec{v} = (2, -1, -2, 1)$

Solució:

(a) Les normes dels dos vectors són $\|\vec{u}\| = \sqrt{3+1} = 2$ i $\|\vec{v}\| = \sqrt{0+1} = 1$ i el producte escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$ així que el cosinus de l'angle que formen aquests dos vectors és

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

així que l'angle és $\pi/3$ (o 60^{o}).

(b)

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2 + 1 \cdot 2}{\sqrt{3+1}\sqrt{4+4}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}$$

En aquesta expressió pot ser difícil reconèixer l'angle, però si ens fixem que l'angle que formen aquests dos vectors amb l'horitzontal és $\pi/6$ i $\pi/4$ (30^{o} i 45^{o}), aleshores és fàcil veure que $\gamma = \pi/12$ (15^{o}).

(c)

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{1+4+36}} = \frac{23}{\sqrt{574}} \Rightarrow \gamma = \arccos\frac{23}{\sqrt{574}}$$

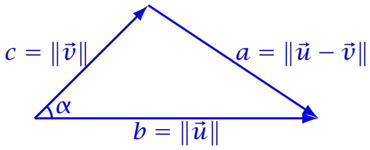
(d) En aquest cas $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ així que els dos vectors són ortogonals.

Exercici 3.6. (pàgina 66) ***(El teorema del cosinus)*** *Feu servir el producte escalar real per demostrar el teorema del cosinus: En qualsevol triangle de costats a, b i c, si α és l'angle oposat al costat a, llavors*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Solució:

Si α és l'angle entre els dos costats b i c, considerem els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ corresponents a aquests dos costats tal com es veu al dibuix. Llavors, les longituds d'aquests vectors són, respectivament, $b = \|\vec{u}\|$ i $c = \|\vec{v}\|$ i el vector $\vec{u} - \vec{v}$ completa el triangle, així que $a = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.



Aleshores,

$$\begin{aligned} a^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha + \|\vec{v}\|^2 \\ &= b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2 \end{aligned}$$

Exercici 3.7. (pàgina 66) *Digueu si els conjunts següents són ortogonals, ortonormals o cap de les dues coses.*

(a) $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,-1,0),(-1,-1,2)\}$

(b) $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{2}(-1,-1,1,1), \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)\right\}$

(c) $C = \{(-1,1,1),(1,-1,2),(1,-1,-1)\}$

Solució:

(a) Si anomenem $\vec{a}_1 = (1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,-1,0)$, $\vec{a}_3 = (-1,-1,2)$ els tres vectors del conjunt $\mathcal{A}$, llavors els productes escalars entre aquests vectors són:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0\\
\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0\\
\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 &= 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 0
\end{aligned}$$

Per tant, el conjunt $\mathcal{A}$ és ortogonal. No és ortonormal, perquè, per exemple, la norma del vector $\vec{a}_1$ és $\|a_1\| = \sqrt{2}$, així que aquest vector no és unitari.

(b) Posem $\vec{b}_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)$, $\vec{b}_3 = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)$. Aquests tres vectors són unitaris, perquè tots tenen com a norma $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$. A més a més, els productes escalars són

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 &= \frac{1}{4}\Big(1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1\Big) = 0\\
\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 &= \frac{1}{4}\Big(1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)\Big) = 0\\
\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 &= \frac{1}{4}\Big((-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)\Big) = 0
\end{aligned}$$

de manera que aquest conjunt és ortonormal.

(c) Siguen $\vec{c}_1 = (-1,1,1)$, $\vec{c}_2 = (1,-1,2)$, $\vec{c}_3 = (1,-1,-1)\}$. El vector $\vec{c}_2$ és ortogonal a $\vec{c}_1$ i a $\vec{c}_3$, però això no implica que el conjunt C siga ortogonal, perquè $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_3 = -3$. Per tant, el conjunt C no és ortogonal (i, en conseqüència, tampoc no és ortonormal).

Exercici 3.8. (pàgina 66) *Trobeu tots els vectors de* $\mathbb{R}^2$ *que són ortogonals a* $(1,2)$ *i interpreteu-los geomètricament.*

Solució:

Un vector (x,y) és ortogonal a $(1,2)$ si el producte escalar $(x,y) \cdot (1,2)$ és zero, és a dir, si $x + 2y = 0$ o, de manera equivalent, si $x = -2y$. Per tant, els vectors que són ortogonals a $(1,2)$ són tots els de la forma $\alpha(-2,1)$.

L'equació $x + 2y = 0$ representa la recta perpendicular al vector $(1,2)$ que passa per l'origen.

Exercici 3.9. (pàgina 67) ***(Producte escalar complex)*** *(a) Calculeu el producte escalar* $(1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})\cdot(2,\mathrm{i})$. *(b) Comproveu que els vectors* $\vec{u} = (-2+3\mathrm{i}, 1+5\mathrm{i})$ *i* $\vec{v} = (1-\mathrm{i}, \mathrm{i})$ *són ortogonals.*

Solució:

(a) $(1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})\cdot(2,\mathrm{i}) = \overline{(1+\mathrm{i})}2 + \overline{(1-\mathrm{i})}\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})2 + (1+\mathrm{i})\mathrm{i} = 2-2\mathrm{i}-1+\mathrm{i} = 1-\mathrm{i}$

(b) Hem de provar que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$:

$$\begin{aligned}
(-2+3\mathrm{i}, 1+5\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i},\mathrm{i}) &= \overline{(-2+3\mathrm{i})}(1-\mathrm{i}) + \overline{(1+5\mathrm{i})}\mathrm{i} \\
&= (-2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) + (1-5\mathrm{i})\mathrm{i} \\
&= -5-\mathrm{i}+5+\mathrm{i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercici 3.10. (pàgina 67) ***(Ortogonalitat entre vectors complexos)*** *(a) Siguen* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *dos vectors de* $\mathbb{C}^n$. *Proveu que si* $\vec{u}$ *és ortogonal a* $\vec{v}$, *llavors* $\vec{v}$ *és ortogonal a* $\vec{u}$. *(b) Trobeu tots els vectors de* $\mathbb{C}^2$ *que són ortogonals al vector* $(1,\mathrm{i})$.

Solució:

(a)
$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 &\iff \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n = 0 \\
&\iff \overline{\overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n} = 0 \\
&\iff \overline{v_1}u_1 + \overline{v_2}u_2 + \cdots + \overline{v_n}u_n = 0 \iff \vec{v}\cdot\vec{u} = 0
\end{aligned}$$

(b) $(x,y)\perp(1,\mathrm{i}) \iff \overline{x} + \overline{y}\mathrm{i} = 0 \iff \overline{\overline{x}+\overline{y}\mathrm{i}} = 0 \iff x - y\mathrm{i} = 0 \iff x = y\mathrm{i}$.
Els vectors ortogonals a $(1,\mathrm{i})$ són tots els de la forma $\alpha(i,1)$.

Exercici 3.11. (pàgina 67) ***(Angle entre dos vectors complexos)*** *Proveu que, si* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *són dos vectors complexos no nuls, i* γ *l'angle entre aquests dos vectors, llavors,*

$$\cos\gamma = \frac{\mathrm{re}(\vec{u}\cdot\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

(ací, $\mathrm{re}(z)$ *representa la part real del nombre complex* z*).*

Solució:

Si $a = \|\vec{u}-\vec{v}\|$, $b = \|\vec{v}\|$ i $c = \|\vec{u}\|$ són els costats del triangle, llavors,

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \\
\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\gamma \\
(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\gamma \\
\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\gamma \\
\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v} + \overline{\vec{u}\cdot\vec{v}}) &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\gamma \\
-2\,\mathrm{re}(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= \qquad\qquad\qquad - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\gamma \\
\mathrm{re}(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\gamma
\end{aligned}$$

Exercici 3.12. (pàgina 67) ***(Vectors unitaris)*** *Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors unitaris (de longitud 1), calculeu els productes escalars*

$$\vec{u}\cdot(-\vec{u}) \qquad (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \qquad (\vec{u}+2\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})$$

Solució:

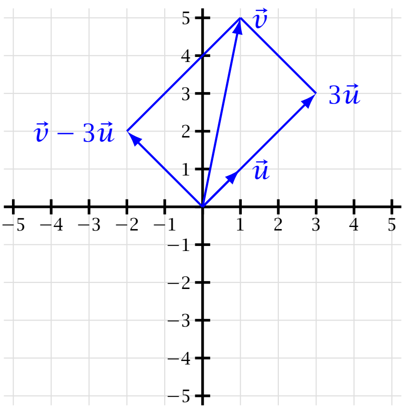
$$\begin{aligned}
&\vec{u}\cdot(-\vec{u}) = -\vec{u}\cdot\vec{u} = -1 \\
&(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = 2 \\
&(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 2\vec{v}\cdot\vec{u} + 4\vec{v}\cdot\vec{v} = 5
\end{aligned}$$

Exercici 3.13. (pàgina 67) ***(Projecció ortogonal)*** *Donats els vectors $\vec{u} = (1,1)$ i $\vec{v} = (1,5)$, trobeu el valor de α perquè el vector $\vec{v} - \alpha\vec{u}$ siga ortogonal a $\vec{u}$. Representeu sobre un diagrama cartesià els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v}-\alpha\vec{u}$ i $\alpha\vec{u}$.*

Solució:

$(\vec{v}-\alpha\vec{u}) \perp \vec{u} \Leftrightarrow (\vec{v}-\alpha\vec{u})\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u} - \alpha\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|u\|^2}$.

Així que, $\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|u\|^2} = \dfrac{(1,5)\cdot(1,1)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.



EXERCICI 3.14. (pàgina 67) ***(Operacions amb matrius)*** *Donades les matrius* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ *calculeu* $\mathsf{A}+\mathsf{B}$, $3\mathsf{A}$ *i* $\mathsf{A}-2\mathsf{B}$.

Solució:

$$\mathsf{A}+\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3\mathsf{A} = 3\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}-2\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCICI 3.15. (pàgina 67) ***(Combinacions lineals)*** *Expresseu, si és possible, les matrius* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *com a combinació lineal de les matrius* $\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $\mathsf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Solució:
En el cas de la matriu A, sí que és possible:

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3$$

Però la matriu B no és combinació lineal d'aquestes tres matrius, perquè, si ho fora,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+\alpha_3 & -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_2-\alpha_3 \end{bmatrix}$$

a la segona fila tenim les igualtats

$$\begin{aligned} \alpha_2+\alpha_3 &= 2 \\ \alpha_2-\alpha_3 &= 2 \end{aligned}$$

així que $\alpha_2 = 2$ i $\alpha_3 = 0$ i, substituint a la primera fila,

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_3 &= 2 \\ -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= 2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ -\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

(contradicció).

Exercici 3.16. (pàgina 67) *Si* I *és la matriu identitat* 2×2, O *la matriu zero* 2×3, $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *construïu la matriu per blocs* $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathsf{A} & 3\mathsf{B} \end{bmatrix}$.

Solució:

$$\mathsf{M} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

LLIÇÓ 4. MULTIPLICACIÓ DE MATRIUS

EXERCICI 4.1. (pàgina 77) ***(Un producte matriu-vector)*** *Calculeu el producte* $A\vec{b}$, *essent* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, *(a) element a element i (b) fent combinacions lineals de les columnes de* A.

Solució:

(a)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 5 - 5\cdot 2 \\ 0\cdot 5 + 6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

EXERCICI 4.2. (pàgina 77) *Siga* $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ *i* $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$. *Escriviu el vector* $\vec{b} = A\vec{x}$ *com a combinació lineal de les columnes de* A.

Solució:

$$\vec{b} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

EXERCICI 4.3. (pàgina 77) *Donades les matrius* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, *calculeu el producte* AB *de quatre maneres diferents: (a) fent productes de les files de* A *per les columnes de* B, *(b) fent combinacions lineals de les columnes de* A, *(c) fent combinacions lineals de les files de* B *i (d) fent productes de les columnes de* A *per les files de* B.

Solució:

(a) Fent productes de les files de A per les columnes de B:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 & 3\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0\cdot 0 + 2\cdot(-1) \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 2 & 1\cdot 0 - 1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Fent combinacions lineals de les columnes de A:

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) Fent combinacions lineals de les files de B:

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \\ -1\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) Fent productes de les columnes de A per les files de B:

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercici 4.4. (pàgina 77) *En cadascun dels casos següents, què podem dir de la matriu* AB*? Justifiqueu les respostes.*

(a) si la primera fila de A *és nul·la.*

(b) si la primera fila de A *és* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

(c) si la primera fila de A *és* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

(d) si la primera columna de B *és* $(0, 1, 0, \dots, 0)$.

(e) Si A *és la matriu identitat.*

(f) Si B *és la matriu identitat.*

Solució:

(a) La primera fila del producte també és nul·la, perquè és la combinació lineal de les files de B amb tots els pesos iguals a zero.

(b) La primera fila del producte és igual a la primera fila de B, perquè és la combinació lineal $1\text{fila}_1(\mathsf{B}) + 0\text{fila}_2(\mathsf{B}) + \cdots + 0\text{fila}_n(\mathsf{B})$

(c) La primera fila del producte és igual a la suma de totes les files de B.

(d) La primera columna del producte és igual a la segona columna de A.

(e) El producte és igual a la matriu B: $\mathsf{AB} = \mathsf{B}$.

(f) El producte és igual a la matriu A: $\mathsf{AB} = \mathsf{A}$.

Exercici 4.5. (pàgina 77) *Donades les matrius*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

calculeu tots els productes que siguen possibles.

Solució:
Els productes AA, AB, AC, BC, BD, CA, CB, CC, DA, DB i DD no existeixen. La resta de productes són

$$AD = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad BB = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad CD = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad DC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercici 4.6. (pàgina 78) *Calculeu totes les potències* A^n, $n \geq 1$ *de la matriu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solució:
Si calculem A^2 i A^3 obtenim

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Proveu-ho per inducció.

Exercici 4.7. (pàgina 78) *Trobeu totes les matrius* B *que commuten amb la matriu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solució:
Es tracta de trobar les matrius $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que compleixen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$$

Igualant element a element,

$$\left.\begin{array}{r} a + c = a \\ b + d = a + b \\ c = c \\ d = c + d \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} c = 0 \\ d = a \\ c = c \\ c = 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} c = 0 \\ d = a \end{array}\right]$$

Així que les matrius que commuten amb A són les que tenen la forma

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Exercici 4.8. (pàgina 78) ***(Producte de matrius i operacions elementals)***
Calculeu els productes següents fent combinacions lineals de les files de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{A} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{A} \qquad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{A}$$

Expliqueu com modifiquen aquestes multiplicacions la matriu A.

Solució:

(a)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} & 2a_{13} + a_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriu que hem obtingut en el primer apartat és el resultat de sumar-li, a la segona fila de A, el doble de la primera fila; en l'apartat segon, hem permutat les dues files de la matriu A; en el tercer, hem multiplicat per 2 la primera fila.

EXERCICI 4.9. (pàgina 78) ***(Matrius elementals)*** *Donada la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, *(a) Trobeu una matriu* 3×3, E, *de manera que, en multiplicar-la per* A *permute les dues primeres files de* A. *És a dir, que*

$$\mathsf{E}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{(fila 2a de } \mathsf{A}\textit{)} \\ \textit{(fila 1a de } \mathsf{A}\textit{)} \\ \end{array}$$

(b) Trobeu una matriu 3×3, E, *de manera que, en multiplicar-la per* A *dividisca entre* 2 *la segona fila de* A. *És a dir, que*

$$\mathsf{E}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \tfrac{1}{2}\textit{(fila 2a de } \mathsf{A}\textit{)} \\ \end{array}$$

(c) 3×3, E, *de manera que, en multiplicar-la per* A *reste* 2 *vegades la fila segona a la fila tercera, és a dir, que*

$$\mathsf{E}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \textit{(fila 3a de } \mathsf{A}\textit{)}-2\textit{(fila 2a de } \mathsf{A}\textit{)} \end{array}$$

Solució:

(a) Per a construir-la, recordem que les files del producte són combinacions lineals de les files de la segona matriu:

- La primera fila del producte

$$\mathsf{EA} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{11}(\text{fila 1 de } \mathsf{A}) + e_{12}(\text{fila 2 de } \mathsf{A}) + e_{13}(\text{fila 3 de } \mathsf{A})$$

així que, com que volem que el resultat siga la segona fila de A, convé posar

$$0(\text{fila 1 de } \mathsf{A}) + 1(\text{fila 2 de } \mathsf{A}) + 0(\text{fila 3 de } \mathsf{A})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

– La segona fila ha de ser

$$1(\text{fila 1 de A}) + 0(\text{fila 2 de A}) + 0(\text{fila 3 de A})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ & & & \end{bmatrix}$$

– Finalment, com que la tercera fila del producte volem que siga la mateixa que la tercera fila de A, hi posem

$$0(\text{fila 1 de A}) + 0(\text{fila 2 de A}) + 1(\text{fila 3 de A})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

La matriu que busquem és $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Aquesta és una *matriu elemental del tipus permutació*, que representarem com $\mathsf{E}_{1,2}$ (els subíndexs $1, 2$ fan referència a les files que es permuten en realitzar el producte $\mathsf{E}_{1,2}\mathsf{A}$).

Noteu que aquesta matriu és el resultat de permutar les files primera i segona de la matriu identitat.

(b) Perquè la primera fila del producte coincidisca amb la primera fila de A hem de posar-hi

$$1(\text{fila 1 de A}) + 0(\text{fila 2 de A}) + 0(\text{fila 3 de A})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

La segona fila ha de ser

$$0(\text{fila 1 de A}) + (1/2)(\text{fila 2 de A}) + 0(\text{fila 3 de A})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ & & & \end{bmatrix}$$

Finalment, com que la tercera fila del producte volem que siga la mateixa que la tercera fila de A, hi posem

$$0(\text{fila 1 de A}) + 0(\text{fila 2 de A}) + 1(\text{fila 3 de A})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -10 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

La matriu que cercàvem és aquesta: $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Es tracta d'una *matriu elemental del tipus escalat*, que representem com $\mathsf{E}_2(1/2)$ (el subíndex 2 i el nombre $1/2$ fan referència a la fila de la matriu A que canvia d'escala (la segona) i al factor d'escala).

Noteu que l'element $(2,2)$ d'aquesta matriu és precisament el factor d'escala $1/2$.

(c) Perquè la primera fila no canvie hem de posar-hi

$$1(\text{fila 1 de } \mathsf{A}) + 0(\text{fila 2 de } \mathsf{A}) + 0(\text{fila 3 de } \mathsf{A})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Per a la segona fila,

$$0(\text{fila 1 de } \mathsf{A}) + 1(\text{fila 2 de } \mathsf{A}) + 0(\text{fila 3 de } \mathsf{A})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ & & & \end{bmatrix}$$

Finalment, la tercera fila ha de ser

$$0(\text{fila 1 de } \mathsf{A}) - 2(\text{fila 2 de } \mathsf{A}) + 1(\text{fila 3 de } \mathsf{A})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Així que la matriu que busquem és $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. És una *matriu elemental del tipus escalat*, que representem com $\mathsf{E}_{2,3}(-2)$ (els subíndexs 3, 2 i el nombre -2 fan referència al fet que sumem a la fila 3 la fila 2 multiplicada per -2).

L'entrada $(3,2)$ d'aquesta matriu és el nombre -2.

Exercici 4.10. (pàgina 79) ***(Matrius inverses i determinants)*** *Calculeu el producte* AB *essent*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Solució:

$$\begin{aligned} \mathsf{AB} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El nombre $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ és el determinant de A.

Exercici 4.11. (pàgina 79) ***(Matrius transposades, matrius simètriques i matrius ortogonals)***

(a) La transposada de la matriu A *és la matriu* A^T *les files de la qual són les columnes de* A *(la primera fila de* A^T *és igual a la primera columna de* A*, la segona fila de* A^T *és igual a la segona columna de* A*, etc.).*

Quines són les matrius transposades de les matrius següents?

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

(b) Es diu que la matriu A *és simètrica si és igual a la seua matriu transposada.*

Quines de les matrius de l'apartat anterior són simètriques?

(c) Es diu que la matriu real quadrada A *és ortogonal si les seues columnes formen un conjunt de vectors ortonormal.*

Proveu que la matriu $\mathsf{A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *és ortogonal.*

(d) Si la matriu A *és ortogonal, què podem dir del producte* $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$*?*

Solució:

(a) $\mathsf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathsf{D}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \mathsf{D}.$

(b) Només és simètrica la matriu D.

(c) Si fem els productes escalars de les columnes d'aquesta matriu trobem

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = 1$$
$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 = 0$$

així que el conjunt $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ és ortonormal.

(d) Com que les entrades de la matriu producte són els productes de les files de A^T per les columnes de A i les files de A^T coincideixen amb les columnes de A, tindrem

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^\mathsf{T} \\ \vec{a}_2^\mathsf{T} \\ \cdots \\ \vec{a}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^\mathsf{T}\vec{a}_1 & \vec{a}_1^\mathsf{T}\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1^\mathsf{T}\vec{a}_n \\ \vec{a}_2^\mathsf{T}\vec{a}_1 & \vec{a}_2^\mathsf{T}\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2^\mathsf{T}\vec{a}_n \\ \cdots \\ \vec{a}_n^\mathsf{T}\vec{a}_1 & \vec{a}_n^\mathsf{T}\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n^\mathsf{T}\vec{a}_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n \\ \cdots \\ \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Així que la matriu $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ és igual a la identitat.

LLIÇÓ 5. EQUACIONS I SISTEMES LINEALS

EXERCICI 5.1. (pàgina 99) *Classifiqueu les equacions següents (és a dir, dieu si són consistents o inconsistents) i, en cas que siguen consistents, calculeu-ne totes les solucions. En tots els casos, les incògnites són* x_1*,* x_2 *i* x_3*.*

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (b) $x_2 + x_3 = 0$ (c) $x_1 - x_3 = -1$

(d) $x_2 = 0$ (e) $0x_3 = 0$ (f) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$

Solució:

(a) Consistent. La solució general és $\vec{x} = (1, 0, 0) + \alpha_1(-1, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 1)$.

(b) Consistent. La solució general és $\vec{x} = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, -1, 1)$.

(c) Consistent. La solució general és $\vec{x} = (-1, 0, 0) + \alpha_1(0, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, 1)$.

(d) Consistent. La solució general és $\vec{x} = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, 1)$.

(e) Consistent. La solució general és $\vec{x} = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1)$.

(f) Inconsistent.

EXERCICI 5.2. (pàgina 99) *Discutiu i resoleu, en cas que siguen compatibles, els sistemes lineals següents. Utilitzeu l'algorisme de Gauss-Jordan tal com ho hem fet als exemples d'aquesta unitat.*

(a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_3 = -2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Solució:

(a) La matriu ampliada del sistema és

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

En primer lloc, restem a la segona fila $2/3$ vegades la primera i a la tercera, $1/3$ de la primera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -8/3 \\ 0 & -2/3 & -4/3 & -16/3 \end{array}\right]$$

Ara restem a la tercera fila el doble de la segona:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Com que x_3 ha desaparegut de la tercera equació no podem eliminar aquesta incògnita de les dues primeres equacions. Eliminarem x_2 a la primera equació, sumant-hi la segona multiplicada per 6:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Per acabar, multipliquem la primera fila per $1/3$ i la segona per -3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

de manera que el sistema original és equivalent a aquest:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \ \ x_3 = -2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

i la solució general serà

$$\vec{x} = (-2, 8, 0) + \alpha(1, -2, 1)$$

(b) La matriu ampliada del sistema és

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

En primer lloc, restem a la segona fila $2/3$ de la primera i a la tercera, $1/3$ de la primera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -8/3 \\ 0 & -2/3 & -4/3 & -10/3 \end{array}\right]$$

Ara a la tercera, hi restem el doble de la segona:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

La tercera equació del sistema associat a aquesta matriu ampliada és $0 = 2$, així que el sistema lineal no té cap solució.

(c) La matriu ampliada del sistema és

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

En primer lloc, a la segona fila restem $2/3$ de la primera fila i a la tercera, $1/3$ de la primera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -8/3 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & -10/3 \end{array}\right]$$

Ara sumem a la tercera fila la segona:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

Sumem a la primera fila $1/2$ de la tercera; i, a la segona, hi restem $1/3$ de la tercera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

Sumem a la primera fila sis vegades la segona:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

Per acabar, multipliquem la primera fila per $1/3$, la segona per -3 i la tercera la dividim per $-1/2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

i la solució (única) és

$$\vec{x} = (2, 2, -14)$$

EXERCICI 5.3. (pàgina 100) *Trobeu tots els vectors que són ortogonals als dos vectors* $(1, -1, 0)$ *i* $(1, 0, 1)$.

Solució:

Cerquem els vectors (x_1, x_2, x_3) el producte escalar dels quals per aquests dos vectors és zero:

$$(1, -1, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$(1, 0, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$$

és a dir,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Apliquem l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu ampliada d'aquest sistema lineal,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Els vectors que cerquem són les solucions d'aquest sistema, és a dir, tots els de la forma $\alpha(-1,-1,1)$.

Exercici 5.4. (pàgina 100) *Escriviu el sistema lineal*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_3 = -2 \end{cases}$$

en forma vectorial i en forma matricial. Digueu quina és la matriu de coeficients i quina la matriu ampliada.

Solució:
La forma vectorial d'aquest sistema és

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

I la forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La matriu de coeficients és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i la matriu ampliada

$$\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Exercici 5.5. (pàgina 100) *Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és l'aplicació definida com $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 3x_2)$, calculeu les antiimatges $f^{-1}(0,0)$ i $f^{-1}(1,1)$ i (a) demostreu que f és bijectiva.*

Solució:
(a) Aquesta aplicació és una transformació lineal, perquè podem escriure-la en la forma

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Per tant, les antiimatges de $(0,0)$ i $(1,1)$ són les solucions dels sistemes lineals

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

El primer sistema el podem resoldre restant la primera equació a la segona,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

La solució de la segona equació és $x_2 = 0$ així que, substituint en la primera, trobem que $x_1 = 0$: L'antiimatge del vector zero és $f^{-1}(0,0) = (0,0)$.
Fent el mateix amb la segona equació, trobem que $f^{-1}(1,1) = (1,0)$.
(b) Fent el mateix que en l'apartat anterior, podem calcular les antiimatges de tots els vectors de $\mathbb{R}^2$: resolem el sistema lineal $\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ x_1 - 3x_2 = b_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ x_1 - 3x_2 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ - 4x_2 = b_2 - b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ x_2 = (b_1 - b_2)/4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (3b_1 + b_2)/4 \\ x_2 = (b_1 - b_2)/4 \end{cases}$$

Això vol dir que la antiimatge del vector (b_1, b_2) és

$$f^{-1}(b_1, b_2) = (3b_1 + b_2)/4, (b_1 - b_2)/4)$$

així que tots els vectors de l'espai final tenen antiimatge (l'aplicació és suprajectiva) i aquesta antiimatge és única (l'aplicació és injectiva).

Exercici 5.6. (pàgina 100) *Si la matriu de coeficients d'un sistema lineal és una matriu 7×5, quantes incògnites i quantes equacions té el sistema? Quants components té el vector de termes independents? I el vector incògnita?*

Solució:
El sistema té set equacions i cinc incògnites. El vector de termes independents és una matriu 7×1, així que té set components (un per cada equació). El vector incògnita (i els vectors solució) en tenen cinc.

Exercici 5.7. (pàgina 100) *Proveu que quan un sistema lineal és indeterminat, en realitat té infinites solucions.*

Solució:
Si el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és indeterminat, aleshores té almenys dues solucions, $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$. Això vol dir que $\mathsf{A}\vec{x}_1 = \mathsf{A}\vec{x}_2 = \vec{b}$. Per tant, per a qualsevol escalar α,

$$\mathsf{A}(\vec{x}_1 + \alpha(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) = \vec{b} + \alpha(\vec{b} - \vec{b}) = \vec{b}$$

així que tots els vectors de la forma $\vec{x}_1 + \alpha(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ són solucions del sistema.

EXERCICI 6.1. (pàgina 117) *Determineu si cada una d'aquestes matrius és esglaonada, esglaonada reduïda o si no és esglaonada.*

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Solució:
(a) no esglaonada, (b) esglaonada reduïda, (c) esglaonada, (d) esglaonada, (e) esglaonada, (f) no esglaonada, (g) esglaonada reduïda, (h) esglaonada reduïda.

EXERCICI 6.2. (pàgina 118) *Determineu quines són les matrius elementals* E_1, E_2, E_3 *que, en multiplicar-les per* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *ens proporcionen els resultats següents:*

(a) $\mathsf{E}_1\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{E}_2\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{E}_1\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Solució:

(a) $\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_{1,2}(1)$ (b) $\mathsf{E}_2 = \mathsf{E}_2(2)$ (c) $\mathsf{E}_3 = \mathsf{E}_{1,2}$

EXERCICI 6.3. (pàgina 118) *En cada apartat, expliqueu quin és l'efecte de la multiplicació indicada.*

(a) $\mathsf{E}_4(-2)\mathsf{A}$ (b) $\mathsf{E}_{2,4}(3)\mathsf{A}$ (c) $\mathsf{E}_{4,1}\mathsf{A}$ (d) $\mathsf{E}_{2,1}(3)\mathsf{E}_{3,1}(1)\mathsf{E}_{4,1}(-1/2)\mathsf{A}$

Solució:
(a) La quarta fila de la matriu A es multiplica per -2. (b) A la segona fila de la matriu A se suma el triple de la quarta fila. (c) Es permuten les files primera i quarta de A. (d) A la segona fila se suma el triple de la primera, a la tercera se suma la primera i a la quarta es resta un mig de la primera.

Exercici 6.4. (pàgina 118) *Calculeu la forma esglaonada reduïda de la matriu*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

seguint els passos indicats (en cada pas feu les operacions elementals corresponents a les matrius que hi ha al damunt de la fletxa).

$$A \xrightarrow{E_{1,2}\cdot} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)\cdot} \xrightarrow{E_1(1/2)\cdot} \xrightarrow{E_{3,2}(5/2)E_{1,2}(-5/2)\cdot} \xrightarrow{E_2(-1/2)\cdot} \xrightarrow{E_{2,3}(7)E_{1,3}(23)\cdot} \xrightarrow{E_3(2)\cdot} R$$

Solució:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}\cdot} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_1(1/2)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(5/2)E_{1,2}(-5/2)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -23/2 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2(-1/2)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -23/2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,3}(7)E_{1,3}(23)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_3(2)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R$$

Exercici 6.5. (pàgina 118) *Calculeu una forma esglaonada de la matriu*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

fent servir l'algorisme de Gauss.

Solució:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)E_{2,1}(-3)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-2)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda de la matriu és

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercici 6.6. (pàgina 118) *Discutiu i resoleu el sistema lineal*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ 2x_3} = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Solució:
La forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada l'hem obtinguda a l'exercici anterior

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema és indeterminat i és equivalent a $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_3 &= 3. \\ 0 &= 0 \end{aligned}$

Per a resoldre'l hem d'aïllar les incògnites x_1 i x_3,

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_3 &= 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right] \iff \left[\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_2 \\ x_3 &= 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Alternativament, podem aïllar les incògnites principals a nivell matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solució general l'obtenim canviant x_2 per un paràmetre: $x_1 = 1 - 2\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 3$, o

$$\vec{x} = (1, 0, 3) + \alpha(-2, 1, 0)$$

Exercici 6.7. (pàgina 119) *Discutiu i resoleu pel mètode de Gauss-Jordan els sistemes lineals*

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 3x_4 = -4 \end{cases}$$

Solució:

(a) Apliquem l'algorisme de Gauss-Jordan. Comencem esglaonant la matriu:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)\mathsf{E}_{3,1}(-3)\mathsf{E}_{4,1}(-6)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{4,2}\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(1/5)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-2)\mathsf{E}_{4,2}(-3)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{4,3}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aquesta darrera matriu és una forma esglaonada de la matriu ampliada. Tenint en compte el teorema de Rouché, com que $\operatorname{rang} \mathsf{A} = \operatorname{rang} \left[\mathsf{A} \mid \vec{0}\right] = 3$, ja podem assegurar que el sistema és determinat. Per tal de trobar la solució acabarem d'aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&-2&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\mathsf{E}_4(-1/2)\cdot}\left[\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}(1)\mathsf{E}_{1,3}(-1)\cdot}\left[\begin{array}{rrr|r}1&-1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(1)\cdot}\left[\begin{array}{rrr|r}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

La solució és $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.
(b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&0\\-2&5&2&0\\-7&7&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(2)\mathsf{E}_{3,1}(7)\cdot}\left[\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&0\\0&3&4&0\\0&0&8&0\end{array}\right]$$

El sistema és determinat

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}(-1/8)\mathsf{E}_{2,3}(-1/2)\cdot}\left[\begin{array}{rrr|r}1&-1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&8&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(1/3)\cdot}\left[\begin{array}{rrr|r}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&8&0\end{array}\right]\xrightarrow{\mathsf{E}_2(1/3)\mathsf{E}_3(1/8)\cdot}\left[\begin{array}{rrr|r}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

La solució és $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
(c) La matriu

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&-1\\0&3&-6&0&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

és una forma esglaonada de la matriu ampliada, així que el sistema és inconsistent, perquè $\operatorname{rang}\mathsf{A} = 2$ i $\operatorname{rang}\left[\mathsf{A} \mid \vec{0}\right] = 3$.

Exercici 6.8. (pàgina 119) *Discutiu segons els valors dels paràmetres (i resoleu, si és possible) els següents sistemes lineals:*

(a) $\begin{cases}2x_1 + x_2 = a\\6x_1 + 3x_2 = b\end{cases}$ (b) $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = a\\2x_1 + x_2 + 2x_3 = b\\3x_2 + x_3 = c\end{cases}$

(c) $\begin{cases}mx_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = m\\2mx_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1\\3mx_1 + 4x_2 + x_3 = m+1\end{cases}$

Solució:

(a) Esglaonant la matriu ampliada trobem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 6 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(3)\cdot} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & -3a+b \end{array}\right] \xrightarrow{E_1(1/2)\cdot} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & 0 & -3a+b \end{array}\right]$$

així que el sistema és

(a1) Inconsistent si $b \neq 3a$

(a2) Indeterminat si $b = 3a$. En aquest cas, la solució general és

$$(x_1, x_2) = (a/2, 0) + \alpha(-1/2, 1)$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 0 & 3 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 3 & 1 & c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3,2}(3)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right]$$

El sistema és determinat.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,3}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7a-3b-c \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{1,2}(1)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5a-2b-c \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right] \xrightarrow{E_2(-1)\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5a-2b-c \\ 0 & 1 & 0 & 2a-b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right]$$

La solució és

$$\vec{x} = (5a-2b-c, 2a-b, -6a+3b+c)$$

(c) Aquest problema se simplifica notablement si primerament l'escrivim així:

$$\begin{cases} x_4 + 2x_3 + x_2 + mx_1 = m \\ -x_4 - x_3 + 3x_2 + 2mx_1 = 1 \\ x_3 + 4x_2 + 3mx_1 = m+1 \end{cases}$$

(perquè d'aquesta manera no ens hem de capficar amb els paràmetres). Ara esglaonem,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & m & m \\ -1 & -1 & 3 & 2m & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & m & m \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3,2}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & m & m \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema és indeterminat, amb independència dels valors del paràmetre m; les incògnites principals són x_4 i x_3. Només amb una operació elemental més obtindrem la forma esglaonada reduïda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & m & m \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -5m & -m-2 \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

I la solució general és

$$x_4 = -m - 2 + 7\alpha_1 + 5m\alpha_2, \quad x_3 = m + 1 - 4\alpha_1 - 3m\alpha_2, \quad x_2 = \alpha_1, \quad x_1 = \alpha_2$$

Exercici 6.9. (pàgina 119) ***(Una matriu inversa)*** *Si* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$,

(a) Resoleu el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{u}$.

(b) Trobeu la matriu quadrada B *per a la qual la solució és* $\vec{x} = \mathsf{B}\vec{u}$ *i calculeu* AB *i* BA.

Solució:

(a) La matriu ampliada és $\begin{bmatrix} 1 & 2 & u_1 \\ 2 & 3 & u_2 \end{bmatrix}$. Aplicant-hi l'algorisme de Gauss-Jordan obtenim aquesta forma esglaonada reduïda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3u_1 + 2u_2 \\ 0 & 1 & 2u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

Per tant, la solució és $x_1 = -3u_1 + 2u_2$, $x_2 = 2u_1 - u_2$, és a dir, $\vec{x} = (-3u_1 + 2u_2, 2u_1 - u_2)$.

(b) És clar que $\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{u}$ així que $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

A més,

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{BA} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 6.10. (pàgina 119) *(a) Feu servir el teorema de Rouché per a justificar que un sistema lineal amb més incògnites que equacions no pot ser determinat. (b) Un sistema amb més equacions que incògnites pot ser determinat? Indeterminat? Inconsistent?*

Solució:
(a) Si hi ha més incògnites que equacions, llavors el rang és menor que el nombre d'incògnites (perquè el rang no pot ser més gran que el nombre de files de la matriu). Per tant, per la segona part del teorema de Rouché, el sistema no pot ser determinat.
(b) La resposta és afirmativa a totes les qüestions, com mostren els següents exemples:

– Un sistema amb més equacions que incògnites determinat:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2} = 1 \end{cases}$$

– Un sistema amb més equacions que incògnites indeterminat:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

– Un sistema amb més equacions que incògnites inconsistent:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = -\pi \end{cases}$$

Lliçó 7. L'equació matricial AX = B i els sistemes homogenis

Exercici 7.1. (pàgina 126) *Resoleu l'equació*

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

Solució:

La forma esglaonada reduïda de la matriu $\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0 & -2\end{array}\right]$ és

$\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$, així que l'equació és equivalent a

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \mathsf{X}$$

$$\mathsf{X}_1 = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} - 2\mathsf{X}_2$$

$$\mathsf{X}_3 = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathsf{O} = \mathsf{O}$$

Posant $\mathsf{X}_2 = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}$, la solució serà

$$\mathsf{X} = \begin{bmatrix}\mathsf{X}_1\\ \mathsf{X}_2\\ \mathsf{X}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\alpha_1 & -2\alpha_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-2\alpha_1 & -1-2\alpha_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Exercici 7.2. (pàgina 127) ***(Una matriu inversa)***

(a) Resoleu l'equació

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(b) Siguen $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$ les dues columnes de la solució de l'apartat anterior. Proveu que el sistema lineal

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$$

és consistent determinat i que la solució és $\vec{x} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2$.

(c) Resoleu els sistemes lineals següents:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solució:

(a) La forma esglaonada reduïda de la matriu $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ és $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$, així que la solució és $\mathsf{X} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Com que rang $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 2$ qualsevol sistema amb aquesta matriu de coeficients és consistent determinat. A més a més,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} (a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2) = a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}_1 + b \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

(c) Les solucions es poden trobar aplicant el resultat de l'apartat anterior:

(a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\vec{x} = -2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$

EXERCICI 7.3. (pàgina 127) *Trobeu els espais nuls de les matrius següents*

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Solució:

(a) Es tracta de resoldre el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$. Aplicant l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu ampliada $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$ obtenim la forma esglaonada reduïda $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, així que el sistema és equivalent a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

és a dir, $x_1 = 2x_3, x_2 = 0$, de manera que la solució és $x_1 = 2\alpha, x_2 = 0, x_3 = \alpha$ i

$$\operatorname{Nul} \mathsf{A} = \{\alpha(2, 0, 1) : \alpha \in \mathbb{K}\}$$

(b) La forma esglaonada reduïda de la matriu B és $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (noteu que, com que el sistema lineal que hem de resoldre és homogeni, no és necessari incloure el vector de termes independents, que serà sempre zero —abans i després d'esglaonar), així que $\operatorname{Nul} \mathsf{B} = \{\alpha(0, 1, 0) : \alpha \in \mathbb{K}\}$.

(c) La forma esglaonada reduïda de la matriu C és $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, així que $\operatorname{Nul} \mathsf{C} = \{\alpha_1(-1, 1, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 0, 1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$.

(d) La forma esglaonada reduïda de la matriu D és $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, així que l'espai nul és $\operatorname{Nul} \mathsf{D} = \{\alpha_1(0, 1, 0) + \alpha_2(0, 0, 1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$.

(e) $\operatorname{Nul} \mathsf{E} = \mathbb{K}^4$

(f) La forma esglaonada reduïda de la matriu F és $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Així que l'espai nul és $\operatorname{Nul} \mathsf{F} = \{\vec{0}\}$.

Exercici 7.4. (pàgina 127)

(a) Resoleu el sistema lineal homogeni

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) Trobeu l'espai nul de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Trobeu el conjunt de tots els vectors que són ortogonals als dos vectors del conjunt

$$S = \{(1, 2, -1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

(d) Si $\vec{b}$ és el vector $\vec{b} = (2, 2)$, comproveu que $\vec{x}_p = (1, 0, 0, 1)$ és una solució particular del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

(e) Sense fer cap més càlcul, determineu la solució general del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

Solució:

(a) La forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

així que la solució general d'aquest sistema lineal és $\vec{x} = \alpha_1(-3, 2, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 0, 1)$.

(b) En conseqüència, l'espai nul és el conjunt

$$\{\alpha_1(-3, 2, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 0, 1) \colon \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$$

(c) Els vectors ortogonals als elements de S són els vectors $\vec{x}$ els productes escalars dels quals pels dos vectors de S són iguals a zero, és a dir, els vectors $\vec{x}$ per als quals

$$\left[\begin{aligned} (1, 2, -1, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ (1, 1, 1, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{aligned}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right]$$

Per tant, el conjunt dels vectors ortogonals als de S és l'espai nul de la matriu A.

(d) Comprovem que $\mathsf{A}\vec{x}_p = \vec{b}$:

$$\mathsf{A}\vec{x}_p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

(e) La solució general del sistema és la suma d'una solució particular qualsevol més l'espai nul de la matriu A:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \operatorname{Nul}\mathsf{A} = (1, 0, 0, 1) + \alpha_1(-3, 2, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 0, 1)$$

Exercici 7.5. (pàgina 128) ***(Matrius estocàstiques i vectors estacionaris)*** *Un vector $\vec{u}$ és* estocàstic *si totes les seues coordenades són reals no negatives i sumen 1; per exemple, $\vec{u}_0 = (0{,}20, 0{,}45, 0{,}35)$ és estocàstic. Una matriu quadrada $n \times n$, A, és* estocàstica *si totes columnes són vectors estocàstics; per exemple, la matriu*

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}73 \end{bmatrix}$$

és estocàstica.
(a) Proveu que el vector producte d'una matriu estocàstica per un vector estocàstic també és estocàstic.
Un vector $\vec{u}$ és estacionari *per a la matriu A si $\mathsf{A}\vec{u} = \vec{u}$. (b) Proveu que, si la matriu A és estocàstica, llavors hi ha vectors estacionaris distints del vector zero. (c) Trobeu tots els vectors estacionaris de la matriu M. (d) Trobeu un vector estacionari estocàstic de la matriu M.*

La matriu M d'aquest exercici és la matriu de transició de la cadena de Màrkov que vam introduir a la lliçó 0 (a l'apartat 0.2). El vector que heu obtingut al darrer apartat representa la distribució de la població a llarg termini en aquell problema.

Solució:

(a) Si A i $\vec{u}$ són estocàstics i $\vec{v} = \mathsf{A}\vec{u}$, llavors és clar que les entrades de $\vec{v}$ són totes no negatives; a més a més, la suma de totes les entrades de $\vec{v}$ és $(1, 1, \dots, 1)\vec{v}$, és a dir,

$$\begin{aligned} (1, 1, \dots, 1)\vec{v} &= (1, 1, \dots, 1)\mathsf{A}\vec{u} \\ &= (1, 1, \dots, 1)\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}\vec{u} \\ &= (1, 1, \dots, 1)\vec{u} = 1 \end{aligned}$$

(b) Els vectors estacionaris són les solucions del sistema d'equacions $\mathsf{A}\vec{u} = \vec{u}$, que es pot escriure també com $(\mathsf{A} - \mathrm{I})\vec{u} = 0$; això vol dir que els vectors estacionaris són els elements de l'espai nul $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \mathrm{I})$.

I, com que la matriu A és estocàstica, resulta que els elements de cada columna de la matriu $\mathsf{A} - \mathrm{I}$ sumen zero. Per tant, el rang de $\mathsf{A} - \mathrm{I}$ és menor que n, així que l'espai nul conté vectors distints de zero.

(c) Es tracta de trobar l'espai nul $\mathrm{Nul}(\mathsf{M} - \mathrm{I})$, és a dir, de resoldre el sistema la matriu ampliada del qual és

$$\begin{bmatrix} 0{,}85 - 1 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0 \\ 0{,}10 & 0{,}75 - 1 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}73 - 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0 \\ 0{,}10 & -0{,}25 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & -0{,}27 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2{,}\overline{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1{,}5\overline{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

així que els vectors estacionaris són tots els de la forma $\alpha(2{,}\overline{3}, 1{,}5\overline{3}, 1)$. És a dir, els de la forma $\alpha(7/3, 23/15, 1)$

(d) Com que $7/3 + 23/15 + 1 = 73/15$, podem elegir $\alpha = 15/73$ per a obtenir un vector estocàstic,

$$\vec{u} = \frac{15}{73}\left(\frac{7}{3}, \frac{23}{15}, 1\right) \approx (0{,}4794521,\ 0{,}3150685,\ 0{,}2054795)$$

Lliçó 8. El rang d'una matriu

Exercici 8.1. (pàgina 139) *Donada la matriu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, *si* R *és la forma esglaonada reduïda de* A *calculeu una matriu* T *de manera que* $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$.

Solució:
Calculem la forma esglaonada reduïda de la matriu A i fem simultàniament les mateixes operacions elementals sobre la matriu identitat:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_2(-1/2)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

Llavors,
$$\mathsf{T} = \mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_2(-1/2)\mathsf{E}_{2,1}(-2) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Exercici 8.2. (pàgina 140) *Estudieu si els conjunts següents són linealment dependents o independents.*

(a) $A = \{(1,2,0),(1,-1,1),(1,5,-1)\}$

(b) $B = \{(1,2,0,1),(1,-1,1,1),(1,5,-1,0)\}$

Solució:

(a) Discutim l'equació lineal $x_1(1,2,0) + x_2(1,-1,1) + x_3(1,5,-1) = (0,0,0)$, o, de manera equivalent, el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$.

Esglaonem la matriu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1/3)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com que el rang d'aquesta matriu és 2, el sistema lineal és indeterminat, així que l'equació inicial té més d'una solució i el conjunt A és linealment dependent.

(b) Ara cal estudiar l'equació $x_1(1,2,0,1) + x_2(1,-1,1,1) + x_3(1,5,-1,0) = (0,0,0,0)$, que és equivalent a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \mathrm{O}$.

Com que rang $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$, el sistema és determinat i el conjunt B és independent.

Exercici 8.3. (pàgina 140)

(a) Calculeu la forma esglaonada reduïda, R*, de la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

i trobeu la matriu T *per a la qual* $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$*.*

(b) Quin és el rang de la matriu A*?*

(c) Trobeu alguna relació de dependència entre les columnes de la matriu A*.*

(d) Trobeu alguna relació de dependència entre les files de la matriu A*.*

Solució:

(a) Esglaonem la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathrm{I} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathrm{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(2)\cdot} \left[\begin{array}{rrrrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{rrrrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Així que la forma esglaonada reduïda de la matriu A és $\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, i la matriu T per a la qual $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$ és $\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) El rang de A és 2, perquè R té dues files no nul·les.

(c) Observant la matriu R comprovem que les columnes no principals són la segona, la quarta i la cinquena. Per tant, la segona columna és combinació lineal de la primera,

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1$$

la quarta i la cinquena són combinacions de la primera i la tercera:

$$\vec{a}_4 = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_3$$
$$\vec{a}_5 = 2\vec{a}_3$$

(d) De

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

deduïm que

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per tant, si A_1, A_2 i A_3 són les files de A, $-2\mathsf{A}_1 - \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 = \mathsf{O}$.

Exercici 8.4. (pàgina 140) *Proveu que qualsevol subconjunt de $\mathbb{K}^3$ amb quatre vectors és necessàriament linealment dependent.*

Solució:
Si $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} \subset \mathbb{K}^3$, llavors $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{bmatrix}$ és una matriu 3×4. Per tant, el rang d'aquesta matriu és com a màxim 3, de manera que els quatre vectors no poden ser independents.

Exercici 8.5. (pàgina 140) *Determineu alguna relació de dependència entre les columnes de la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

i calculeu el rang de A*.*

Solució:
Apliquem l'algorisme de Gauss-Jordan per tal de trobar la forma esglaonada reduïda de A:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(3)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquesta matriu és la forma esglaonada reduïda de A. Com que hi ha dues columnes principals, el rang de A és 2. A més a més, si $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ i $\vec{a}_4$ són les columnes de A, trobem aquestes relacions de dependència:

$$\begin{aligned}\vec{a}_3 &= 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ \vec{a}_4 &= -3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2\end{aligned}$$

Exercici 8.6. (pàgina 140) *Extraieu un subconjunt linealment independent del conjunt*

$$A = \{(1,2,1,0),(1,1,0,1),(0,1,1,-1),(1,1,1,1)\}$$

que tinga el màxim nombre possible d'elements.

Solució:
El màxim possible d'elements linealment independents és el rang de la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esglaonant aquesta matriu podrem calcular aquest rang i, simultàniament, trobar les columnes que són independents.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)\mathsf{E}_{3,1}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)\mathsf{E}_{4,1}(1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rang és 3, així que hi ha tres vectors independents, que corresponen a les columnes principals de la darrera matriu, és a dir, les columnes primera, segona i quarta. El conjunt

$$B = \{(1,2,1,0),(1,1,0,1),(1,1,1,1)\}$$

és un subconjunt de A linealment independent i té el màxim nombre possible d'elements amb aquesta propietat.

Exercici 8.7. (pàgina 140) *Proveu que si el conjunt $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent llavors, $B = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_1 + \vec{u}_3\}$ també és independent.*

Què podem dir quant a la independència lineal d'aquest altre conjunt: $C = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_1 - \vec{u}_3\}$?

Solució:
Per a estudiar la independència lineal del conjunt B hem de discutir l'equació

$$x_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + x_2(\vec{u}_2 + \vec{u}_3) + x_3(\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = \vec{0}$$

Reordenant-la obtenim l'equació equivalent

$$(x_1 + x_3)\vec{u}_1 + (x_1 + x_2)\vec{u}_2 + x_1(x_2 + x_3)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

Ara, com que el conjunt A és linealment independent, en aquesta darrera equació tindrem

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com que la matriu d'aquest darrer sistema té rang 3 (comproveu-ho), la solució única és $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ i el conjunt B és linealment independent.
En canvi, el conjunt C és linealment dependent, perquè repetint el mateix raonament tindrem l'equació

$$x_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + x_2(\vec{u}_2 + \vec{u}_3) + x_3(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) = \vec{0}$$

O bé

$$(x_1 + x_3)\vec{u}_1 + (x_1 + x_2)\vec{u}_2 + x_1(x_2 - x_3)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

I, com que el conjunt A és linealment independent, en aquesta darrera equació tindrem

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Però ara la matriu que hem obtingut té rang 2 i, en conseqüència, hi ha més d'una solució.

EXERCICI 8.8. (pàgina 141) *Proveu que, si* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *i* $\mathsf{B} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ *llavors,* $\operatorname{rang} \mathsf{AB} \le \operatorname{rang} \mathsf{A}$ *i* $\operatorname{rang} \mathsf{AB} \le \operatorname{rang} \mathsf{B}$*.*

Solució:
Si el rang de la matriu A és r llavors, podem transformar A en esglaonada fent-hi operacions elementals. Si el producte d'aquestes matrius elementals és la matriu T, tindrem que TA té $m-r$ files nul·les. Llavors, la matriu $\mathsf{T}(\mathsf{AB})$ també té (si més no) $m-r$ files nul·les, així que les mateixes operacions elementals transformen AB en una matriu que té, almenys, $m-r$ files nul·les i el rang de la qual és, com a molt, r. És a dir, $\operatorname{rang}\mathsf{AB} \leq \operatorname{rang}\mathsf{A}$.
Com que el rang per files i per columnes són iguals, el mateix raonament justifica que $\operatorname{rang}\mathsf{AB} \leq \operatorname{rang}\mathsf{B}$.

Exercici 8.9. (pàgina 141) *Proveu que qualsevol matriu $m \times n$ de rang 1 es pot escriure com $\sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^*$, on σ_1 és un nombre positiu i $\vec{u}_1$ i $\vec{v}_1$ són vectors unitaris.*

Solució:
Si la matriu és de rang 1, totes les columnes són múltiples d'un mateix vector unitari, $\vec{u}_1$:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1\vec{u}_1 & \alpha_2\vec{u}_2 & \cdots & \alpha_n\vec{u}_n \end{bmatrix} = \vec{u}_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Si elegim $\sigma_1 = \|(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\|$, llavors $\sigma_1 > 0$ (perquè la matriu és de rang 1 i no poden ser totes les columnes iguals a zero). Aleshores, definint $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)/\sigma_1$, aquest vector és unitari i $\mathsf{A} = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^*$.

☞ Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són, respectivament, un *vector singular esquerre* i un *vector singular dret* de la matriu A i σ és el *valor singular* de la matriu. Com que els dos vectors són unitaris, el valor singular ens proporciona una mida de la grandària de la matriu.

Al final del curs estudiarem els valors singulars i els vectors singulars de qualsevol matriu.

LLIÇÓ 9. LA MATRIU INVERSA

EXERCICI 9.1. (pàgina 152) *Determineu si les matrius següents són invertibles i, en cas que ho siguen, calculeu la inversa i escriviu les matrius com a producte de matrius elementals.*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(j) $M = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ (k) $N = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$ (l) $P = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$

Solució:

(a) És clar que les dues columnes de la matriu són linealment independents. Per tant, la matriu és invertible. Calcularem la inversa buscant la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada $\begin{bmatrix} A \mid I \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-3/2)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_{1,2}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_2(2)E_1(1/2)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

En conseqüència, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

La matriu inversa de A és $A^{-1} = E_2(2)E_1(1/2)E_{1,2}(-2)E_{2,1}(-3/2)$, així que $A = E_{2,1}(3/2)E_{1,2}(2)E_1(2)E_2(1/2)$.

(b) La matriu és invertible, pel mateix motiu que ho era la de l'apartat anterior. Calculem la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada $\begin{bmatrix} B \mid I \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-3)\cdot} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(1/10)\cdot} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(3)\cdot} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$

En conseqüència,

$$\mathsf{B}^{-1} = \mathsf{E}_{1,2}(3)\mathsf{E}_2(1/10)\mathsf{E}_{2,1}(-3) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{B} = \mathsf{E}_{2,1}(3)\mathsf{E}_2(10)\mathsf{E}_{1,2}(-3)$$

(c) Podríem comprovar prèviament si el rang de la matriu C és tres. Però ho farem simultàniament amb l'intent de calcular la inversa:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-3/2)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-5/2)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-4)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Ara ja podem assegurar que la matriu C és invertible, perquè $\operatorname{rang}\mathsf{C} = 3$. Continuem, doncs, cercant-hi la forma esglaonada reduïda:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}(1)\mathsf{E}_{1,3}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 0 & 8 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 0 & 8 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-2)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1}(1/2)\cdot} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

I la inversa és

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}^{-1} &= \mathsf{E}_1(1/2)\mathsf{E}_{1,2}(-2)\mathsf{E}_2(-1)\mathsf{E}_{2,3}(1)\mathsf{E}_{1,3}(-2)\mathsf{E}_3(-1)\mathsf{E}_{3,2}(-4)\mathsf{E}_{3,1}(-5/2)\mathsf{E}_{2,1}(-3/2)\\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ 5 & -5 & 1\\ -7/2 & 4 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

així que

$$\mathsf{C} = \mathsf{E}_{2,1}(3/2)\mathsf{E}_{3,1}(5/2)\mathsf{E}_{3,2}(4)\mathsf{E}_3(1)\mathsf{E}_{1,3}(2)\mathsf{E}_{2,3}(-1)\mathsf{E}_2(1)\mathsf{E}_{1,2}(2)\mathsf{E}_1(2)$$

(d) Les dues darreres columnes de la matriu D són iguals, així que la matriu no és invertible (les seues columnes no són linealment independents).

(e) És clar que $\mathsf{E}^{-1} = \mathsf{E}$ (de fet, E és la matriu identitat).

(f) Aquesta és una matriu elemental del tipus permutació. En conseqüència,

$$\mathsf{F}^{-1} = \mathsf{F} = \mathsf{E}_{1,3}$$

(g)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}\cdot} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}\cdot} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Així que

$$\mathsf{G}^{-1} = \mathsf{E}_{2,3}\mathsf{E}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{G} = \mathsf{E}_{1,2}\mathsf{E}_{2,3}$$

(h) Com que $\mathsf{G}^{-1} = \mathsf{H}$, és clar que $\mathsf{H}^{-1} = \mathsf{G}$.

(i) Aquesta matriu no és invertible, perquè té una columna de zeros i, per tant, no pot tenir rang tres.

(j) La segona fila de la matriu M és igual a la primera multiplicada per i, així que la matriu no és invertible.

(k)

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0\\ i & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] &\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-i/2)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0\\ 0 & 5/2 & -i/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_2(2/5)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0\\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right]\\
&\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(i)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6/5 & 2i/5\\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_1(1/2)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & i/5\\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\mathsf{N}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & i\\ -i & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{N} = \mathsf{E}_{2,1}(i/2)\mathsf{E}_2(5/2)\mathsf{E}_{1,2}(-i)\mathsf{E}_1(2)$$

(l) La matriu P és un producte de matrius elementals: $\mathsf{P} = \mathsf{E}_1(1-\mathrm{i})\mathsf{E}_2(1+\mathrm{i})$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}^{-1} &= \Big(\mathsf{E}_1(1-\mathrm{i})\mathsf{E}_2(1+\mathrm{i})\Big)^{-1} = \mathsf{E}_2(1+\mathrm{i})^{-1}\mathsf{E}_1(1-\mathrm{i})^{-1} \\
&= \mathsf{E}_2\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right) + \mathsf{E}_1\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right) = \mathsf{E}_2\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)\mathsf{E}_1\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Exercici 9.2. (pàgina 152) *Calculeu la inversa, si existeix, de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solució:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{4,3}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,4}(1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}(1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_2(-1)\mathsf{E}_3(-1)\cdot} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La inversa és $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercici 9.3. (pàgina 152) *Sense fer cap càlcul digueu quina és la matriu inversa de la matriu*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solució:

Aquesta matriu és el producte de tres matrius elementals del tipus reducció. Notem que és la matriu que faríem servir en el primer pas de l'algorisme de Gauss, si a la segona fila li restàvem la primera, a la tercera li la sumàvem dues vegades i, a la quarta, tres. Aquest tipus de matrius s'anomenen a vegades *matrius del tipus G* (per Gauss).

És clar que la inversa és $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercici 9.4. (pàgina 152) *Sabent que les matrius* A *i* B *són invertibles, aïlleu la matriu* X *en l'expressió*

$$BA^2XB = C - 2I$$

Solució:

$$\begin{aligned} BA^2XB &= C - 2I \\ X &= (A^2)^{-1}B^{-1}(C - 2I)B^{-1} \\ &= (A^2)^{-1}B^{-1}CB^{-1} - 2(A^2)^{-1}B^{-1}IB^{-1} \\ &= (A^2)^{-1}B^{-1}CB^{-1} - 2(A^2)^{-1}(B^{-1})^2 \end{aligned}$$

Exercici 9.5. (pàgina 153) *Proveu que si* $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ *aleshores* $A^3 - 8A - 32I = O$ *i utilitzeu aquest resultat per a calcular la matriu inversa* A^{-1}.

Solució:

Fent les operacions es comprova sense dificultat que $A^3 - 8A - 32I = O$.
A partir d'aquí, podem aïllar la matriu identitat I d'aquesta manera:

$$A^3 - 8A - 32I = O \Rightarrow I = \frac{1}{32}(A^3 - 8A) = A\Big(\frac{1}{32}(A^2 - 8I)\Big)$$

En conseqüència,

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{32}(\mathsf{A}^2 - 8\mathrm{I}) = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 14 & 40 & -12 \\ -4 & -16 & 8 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Exercici 9.6. (pàgina 153) *Proveu que si el determinant d'una matriu* 2×2 *és igual a zero llavors, aquesta matriu no és invertible.*

Solució:
Suposem que el determinant $\det \mathsf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ és zero. Per provar que la matriu A no té inversa, distingirem dos casos:

1. Si a_{11} és igual a zero, llavors $\det \mathsf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow -a_{12}a_{21} = 0$, així que $a_{12} = 0$ o $a_{21} = 0$, per tant, la primera columna és nul·la o bé ho és la primera fila. En qualsevol cas, la matriu no té rang 2 i, en conseqüència, no és invertible.
2. En el cas que a_{11} no és zero, si apliquem el mètode de Gauss per esglaonar la matriu A tindrem

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-a_{21}/a_{11})} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \end{bmatrix}$$

però $a_{22} - (a_{21}/a_{11})a_{12} = \det \mathsf{A}/a_{11} = 0$, així que el rang de A és 1 i aquesta matriu no és invertible.

Exercici 9.7. (pàgina 153) ***(Càlcul ràpid de la inversa d'una matriu*** 2×2***)*** *Feu servir el determinant per calcular inverses, si existeixen, de les matrius* 2×2 *de l'exercici 9.1.*

Solució:
Els determinants de les matrius 2×2 de l'exercici 9.1. són

(a) $\det \mathsf{A} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$ (b) $\det \mathsf{B} = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 10$

(k) $\det \mathsf{M} = 1 \cdot 1 - (-\mathrm{i})\mathrm{i} = 0$ (l) $\det \mathsf{N} = 2 \cdot 3 - (-\mathrm{i})\mathrm{i} = 5$

(m) $\det \mathsf{P} = (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) - 0 \cdot 0 = 2$

Així que totes aquestes matrius, excepte M són invertibles. I les inverses són

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{N}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 - \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Exercici 9.8. (pàgina 153) ***(Inverses laterals)*** *Si* A *és una matriu* $m \times n$ *i* B *és una matriu* $n \times m$ *direm que* B *és una* inversa dreta *de* A *si* $\mathsf{AB} = \mathrm{I}$. *De la mateixa manera, direm que* B *és una* inversa esquerra *de* A *si* $\mathsf{BA} = \mathrm{I}$.

(a) *Quina condició s'ha de complir perquè la matriu* A *tinga alguna inversa dreta?*

(b) *Quina condició s'ha de complir perquè la inversa dreta de la matriu* A *siga única?*

(c) *Quina condició s'ha de complir perquè la matriu* A *tinga alguna inversa esquerra?*

(d) *Quina condició s'ha de complir perquè la inversa esquerra de la matriu* A *siga única?*

(e) *Quines condicions s'han de complir perquè la matriu* A *tinga inverses pels dos costats?*

Solució:
Perquè existisca B tal que $\mathsf{AB} = \mathrm{I}$, el que ha de passar és que l'equació $\mathsf{AX} = \mathrm{I}$ siga compatible, és a dir, que el rang de A siga m; perquè la inversa siga única, el rang ha de ser, també, n (en conseqüència, $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n = m$). Perquè existisca inversa esquerra haurà de ser $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$ i, perquè siga única, que, a més aquest rang siga també m. Així que les úniques matrius que tenen inverses pels dos costats, o les que tenen alguna inversa lateral única són les matrius invertibles.

Exercici 9.9. (pàgina 153) *Calculeu totes les matrius inverses esquerres i/o dretes, en cas que existisquen, de les matrius següents:*

$$\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solució:
El rang de la matriu A_1 és 2; en conseqüència, aquesta matriu té infinites inverses dretes i no té cap inversa esquerra. Per a calcular les inverses dretes hem de resoldre l'equació matricial $\mathsf{A}_1\mathsf{X} = \mathrm{I}$, així que esglaonarem la matriu ampliada corresponent:

$$\left[\mathsf{A}_1 \mid \mathrm{I}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

L'equació és equivalent a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{X}$$
$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -x_{31} & -x_{32} \\ 2x_{31} & 2x_{32} \end{bmatrix}$$

així que, canviant les entrades lliures per paràmetres, obtenim que les inverses dretes són les matrius de la forma

$$\mathsf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ -2\alpha_{11} & -2\alpha_{12} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

La matriu A_2 té inverses esquerres, però no dretes, i la matriu A_3 no té inversa per cap dels dos costats.
Per trobar les inverses esquerres de A_2 hem de resoldre l'equació $\mathsf{X}\mathsf{A}_2 = \mathrm{I}$, o bé, $\mathsf{A}_2^{\mathsf{T}}\mathsf{X}^{\mathsf{T}} = \mathrm{I}$. Són aquestes:

$$\mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & \alpha_{11} & \alpha_{11} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{12} & \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

LLIÇÓ 10. TRANSPOSICIÓ I CONJUGACIÓ. MATRIUS HERMÍTIQUES

EXERCICI 10.1. (pàgina 163) *Proveu que, si* A *i* B *són matrius quadrades del mateix ordre i* A *és simètrica llavors, la matriu* $\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{AB}+\mathsf{A}$ *també és simètrica.*

Solució:
$\left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{AB}+\mathsf{A}\right)^\mathsf{T} = \left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{AB}\right)^\mathsf{T} + \mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathsf{B}^\mathsf{T})^\mathsf{T} + \mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{AB}+\mathsf{A}.$

EXERCICI 10.2. (pàgina 163) *Si la matriu* A *i* B*, del mateix ordre, són respectivament, simètrica i antisimètrica, què podem dir de* $\mathsf{AB}+\mathsf{BA}$ *i de* $\mathsf{AB}-\mathsf{BA}$*?*

Solució:
$\mathsf{AB}+\mathsf{BA}$ és antisimètrica i $\mathsf{AB}-\mathsf{BA}$ simètrica, perquè

$$(\mathsf{AB}+\mathsf{BA})^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T} + \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{B}^\mathsf{T} = -\mathsf{BA}+\mathsf{A}(-\mathsf{B}) = -\mathsf{AB}-\mathsf{BA}$$
$$(\mathsf{AB}-\mathsf{BA})^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T} - \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{B}^\mathsf{T} = -\mathsf{BA}-\mathsf{A}(-\mathsf{B}) = -\mathsf{AB}+\mathsf{BA} = -(\mathsf{AB}-\mathsf{BA})$$

EXERCICI 10.3. (pàgina 163)

(a) *Proveu que la matriu* AA^T *és una matriu simètrica (per a qualsevol matriu* A*, no necessàriament quadrada).*

(b) *Donada la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ *calculeu* AA^T *i* $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ *i comproveu que són matrius simètriques distintes.*

(c) *Si* A *és una matriu quadrada, és cert que* $\mathsf{AA}^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$*?*

Solució:

(a)

$$(\mathsf{AA}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathsf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{AA}^\mathsf{T}$$

(b)

$$\mathsf{AA}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

Es veu clarament que totes dues són simètriques (d'altra banda, això és el que hem demostrat en l'apartat anterior).

I és clar que són diferents. Si A és una matriu $m \times n$, llavors AA^T és una matriu $m \times m$, mentre que A^T és $n \times n$, així que perquè coincidisquen és necessari (però no suficient!) que A siga una matriu quadrada, com veurem en l'apartat següent.

(c) No necessàriament. Per exemple, si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tenim $\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, però $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Exercici 10.4. (pàgina 163)

(a) Proveu que, si A és una matriu quadrada, llavors la matriu $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ és una matriu simètrica i que la matriu $\mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ és una matriu antisimètrica.

(b) Proveu que, per a qualsevol matriu A, $\mathsf{A} = \dfrac{\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}}{2} + \dfrac{\mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{T}}}{2}$.

(en conseqüència, qualsevol matriu quadrada és la suma d'una matriu simètrica i una matriu antisimètrica).

Solució:

$\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ és una matriu simètrica:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}} + (\mathsf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}} + \mathsf{A} = \mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$$

$\mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ és una matriu antisimètrica:

$$(\mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}} - (\mathsf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}} - \mathsf{A} = -(\mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{T}})$$

Finalment,

$$\frac{\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}}{2} + \frac{\mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{T}}}{2} = \frac{\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}} + \mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{T}}}{2} = \frac{\mathsf{A} + \mathsf{A}}{2} = \mathsf{A}$$

Exercici 10.5. (pàgina 163) *Proveu que les matrius següents són ortogonals:*

$$\mathsf{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solució:

$$\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\mathsf{P}^{\mathsf{T}}\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\mathsf{B}^{\mathsf{T}}\mathsf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

Exercici 10.6. (pàgina 163) *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= -6 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

aprofitant el fet que la matriu B *de l'exercici anterior és ortogonal.*

Solució:
El sistema, en forma matricial, és aquest:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com que la matriu del sistema és la matriu B de l'exercici anterior multiplicada per 2, dividim entre 2 i obtindrem el sistema equivalent

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és a dir,

$$\mathsf{B}\vec{x} = (0, -3, -1, 0)$$

i com que la matriu B és ortogonal, la solució serà

$$\vec{x} = \mathsf{B}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exercici 10.7. (pàgina 164) *Proveu que les matrius de la forma* $\mathsf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha+\pi/2) \\ \sin\alpha & \sin(\alpha+\pi/2) \end{bmatrix}$ *són ortogonals i interpreteu aquest fet geomètricament.*

Solució:
Tenint en compte que $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha$ i $\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha$, la matriu la podem escriure com

$$\mathsf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

així que

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_\alpha^\mathsf{T}\mathsf{A}_\alpha &= \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^\mathsf{T}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\\ -\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

i la matriu és ortogonal.
Interpretació geomètrica: El vector $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ és unitari i fa un angle α amb l'eix d'abscisses. Anàlogament, $(\cos(\alpha+\pi/2), \sin(\alpha+\pi/2)$ és unitari i fa un angle $\alpha+\pi/2$ amb l'eix d'abscisses. Per tant, entre ells fan un angle recte.

Exercici 10.8. (pàgina 164) *Una matriu permutació és la matriu que resulta de reordenar arbitràriament les files de la matriu identitat. Per exemple, les matrius*

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

són matrius permutació.
(a) Quantes matrius permutació d'ordre n hi ha?
(b) Totes les matrius permutació són elementals?
(c) Proveu que les matrius permutació són ortogonals.

Solució:

(a) Es tracta de decidir de quantes maneres es pot ordenar un conjunt de n elements (les files de la matriu I). Per tant, la solució és $P_n = n!$.

(b) No. Les matrius elementals del tipus permutació són matrius permutació, però no totes aquestes són elementals; la diferència és que les matrius $\mathsf{E}_{i,j}$ només es canvia l'ordre de dues files. En realitat, qualsevol matriu permutació és el producte de diverses matrius elementals del tipus permutació.

(c) És evident que les columnes de les matrius permutació són vectors unitaris i, a més, si en multipliquem dues de diferents el producte escalar serà nul, perquè en multiplicar cada entrada, els uns no es troben en la mateixa posició.

Exercici 10.9. (pàgina 164) *Proveu que si* Q *és una matriu ortogonal, llavors,*
(a) la norma del vector $\mathsf{Q}\vec{u}$ *coincideix amb la norma de* $\vec{u}$*,*
(b) l'angle entre els vectors $\mathsf{Q}\vec{u}$ *i* $\mathsf{Q}\vec{v}$ *és el mateix que el que hi ha entre* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$*,*
(c) la distància entre els vectors $\mathsf{Q}\vec{u}$ *i* $\mathsf{Q}\vec{v}$ *és igual a la distància entre* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$*.*

Solució:
Tot això és conseqüència del fet que $\mathsf{Q}\vec{u}\cdot\mathsf{Q}\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}$:

(a) $\|\mathsf{Q}\vec{u}\|^2=\mathsf{Q}\vec{u}\cdot\mathsf{Q}\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

(b) Si α i β són, respectivament, els angles que hi ha entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i entre $\mathsf{Q}\vec{u}$ i $\mathsf{Q}\vec{v}$, llavors
$$\cos\beta=\frac{\mathsf{Q}\vec{u}\cdot\mathsf{Q}\vec{v}}{\|\mathsf{Q}\vec{u}\|\,\|\mathsf{Q}\vec{v}\|}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}=\cos\alpha$$

(c) $d(\mathsf{Q}\vec{u},\mathsf{Q}\vec{v})=\|\mathsf{Q}\vec{u}-\mathsf{Q}\vec{v}\|=\|\mathsf{Q}(\vec{u}-\vec{v})\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|=d(\vec{u},\vec{v})$

Exercici 10.10. (pàgina 164)

Proveu que la matriu $\mathsf{U}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\end{bmatrix}$ *és simètrica, antihermítica i unitària.*

Solució:
Aquesta matriu és simètrica perquè
$$\mathsf{U}^{\mathsf{T}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\end{bmatrix}=\mathsf{U}$$
antihermítica perquè
$$\mathsf{U}^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\end{bmatrix}=-\mathsf{U}$$
i unitària perquè
$$\mathsf{U}^*\mathsf{U}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

Exercici 10.11. (pàgina 164) *Suposem que* B *i* C *són les parts real i imaginària de* A*, respectivament (és a dir,* B *i* C *són reals i* $\mathsf{A}=\mathsf{B}+\mathrm{i}\mathsf{C}$*). Proveu les propietats següents:*

(a) Si la matriu A *és hermítica llavors,* B *és simètrica i* C *és antisimètrica.*

(b) Si la matriu A *és hermítica llavors, la diagonal de* A *és real.*

(c) Si la matriu A *és antihermítica si i només si* $\mathrm{i}\mathsf{A}$ *és hermítica.*

(d) Si A *és antihermítica llavors, els elements de la diagonal de* A *són imaginaris purs.*

(e) Si A *és antihermítica llavors,* B *és antisimètrica i* C *és simètrica.*

Solució:

(a) Com que $A^* = (B + iC)^*$ i $A = A^*$, $B + iC = (B + iC)^* = B^T - iC^T$, així que $B = B^T$ i $C = -C$.

(b) Com que C és antisimètrica, la diagonal de C és nul·la, així que la diagonal de $A = B + iC$ és igual a la diagonal de B i, per tant, és real.

(c) La matriu A és antihermítica si i només sí $A = -A^*$, és a dir, si i només si $iA = -iA^* = \bar{i}A^* = (iA)^*$.

(d) Si A és antihermítica iA és hermítica, així que la diagonal de iA és real. I això implica que la diagonal de A és imaginària pura.

(e) Si A és antihermítica llavors $iA = i(B + iC) = -C + iB$ és hermítica, així que C és simètrica, i B antisimètrica.

Exercici 10.12. (pàgina 164) *Proveu que el producte de dues matrius unitàries també és una matriu unitària.*

Solució:

Suposem que U_1 i U_2 són unitàries. Això vol dir que són quadrades i $U_1^*U_1 = U_2^*U_2 = I$. Llavors, $(U_1U_2)^*U_1U_2 = U_2^*U_1^*U_1U_2 = U_2^*IU_2 = I$.

LLIÇÓ 11. MATRIUS TRIANGULARS. FACTORITZACIONS LU I MATRIUS UNITÀRIES

EXERCICI 11.1. (pàgina 179) *Calculeu la matriu inversa, si existeix, de les matrius següents (els nombres a, b, c i d són tots no nuls):*

$$\text{(a)}\quad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}\quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

Solució:

(a) $\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

(b)
$$\left[\mathsf{B} \mid \mathrm{I}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-1/3)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_1(1/2)\mathsf{E}_2(1/3)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

així que $\mathsf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

(c)
$$\left[\mathsf{C} \mid \mathrm{I}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-b/d)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & -b/d \\ 0 & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_1(1/a)\mathsf{E}_2(1/d)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & -b/(ad) \\ 0 & 1 & 0 & 1/d \end{array}\right]$$

així que $\mathsf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & -b/(ad) \\ 0 & 1/d \end{bmatrix}$

(d) $\mathsf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ -c/(ad) & 1/d \end{bmatrix}$

EXERCICI 11.2. (pàgina 179) ***(Substitució progressiva)*** *Resoleu el sistema d'equacions lineals*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solució:

Com que la matriu és triangular inferior, podem resoldre el sistema per substitució progressiva:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ -x_2 &= -2x_1 \\ x_3 &= -3x_1 + x_2 \end{aligned}\left.\vphantom{\begin{aligned} x \\ x \\ x \end{aligned}}\right\} \xrightarrow{x_1=1} \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -3 + x_2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x_2=2} \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}\right\}$$

EXERCICI 11.3. (pàgina 179) *La matriu* N *l'hem obtinguda fent les operacions elementals següents sobre la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$*:*
(a) Hem sumat la columna primera a la tercera; (b) Hem restat la columna segona a la tercera; (c) Hem intercanviat les dues files; (d) A la primera fila li hem sumat el doble de la segona. Calculeu la matriu N *i trobeu dues matrius invertibles B i C de manera que* $\mathsf{N} = \mathsf{BAC}$*.*

Solució:
Hem fet aquestes transformacions:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \mathsf{E}_{1,3}(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \mathsf{E}_{2,3}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}\cdot} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(2)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{N}$$

Aquestes operacions elementals són equivalents a diverses multiplicacions:

$$\mathsf{N} = \mathsf{E}_{1,2}(2)\mathsf{E}_{1,2}\mathsf{A}\mathsf{E}_{1,3}(1)\mathsf{E}_{2,3}(-1)$$

Per tant,

$$\mathsf{B} = \mathsf{E}_{1,2}(2)\mathsf{E}_{1,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathsf{C} = \mathsf{E}_{1,3}(1)\mathsf{E}_{2,3}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCICI 11.4. (pàgina 180) *Donada la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ *(a) Trobeu, si és possible, una factorització LU estricta de* A*. (b) Trobeu una factorització LU de* A *fent servir l'algorisme de Gauss amb pivotatge parcial.*

Solució:

(a) Apliquem l'algorisme de Gauss a la matriu A, fent simultàniament les operacions inverses (per columnes) sobre la identitat:

A la segona fila de A, li sumem la primera	A la primera columna de I, li restem la segona
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A la tercera fila, li restem el doble de la segona

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

A la segona columna, li sumem el doble de la tercera

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ és una factorització LU estricta de la matriu A.

(b) Comencem esglaonant la primera columna. Com que els dos pivots possibles, 1 i -1, tenen el mateix valor absolut, no cal fer-hi cap permutació.

A la segona fila, li sumem la primera

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

A la primera columna, li restem la segona

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ara, com que el 4 que hi ha a la tercera fila (segona columna) és més gran en valor absolut que no el 2 de la segona fila, cal permutar aquestes dues files.

Permutem les files segona i tercera

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Permutem les columnes segona i tercera

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

A la tercera fila, li restem la meitat de la segona

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

A la segona columna, li sumem la meitat de la tercera

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1/2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1/2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ és la factorització LU de A que s'obté fent servir l'algorisme de Gauss amb pivotatge parcial.

Exercici 11.5. (pàgina 180) *Donada la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}$ *(a) Proveu que no és possible trobar una factorització LU estricta de* A*. (b) Trobeu una factorització LU de* A *(òbviament, no estricta).*

Solució:

(a) Si existís una factorització LU estricta, tindríem

$$\mathsf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \mathsf{A}$$

Per tant, columna a columna, tindrem

(i) $u_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ l_{21} \\ l_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ii) $u_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ l_{21} \\ l_{31} \end{bmatrix} + u_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ l_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

(iii) $u_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ l_{21} \\ l_{31} \end{bmatrix} + u_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ l_{32} \end{bmatrix} + u_{33} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Llavors, de (i), es dedueix que $u_{11} = 1, l_{21} = 1, l_{31} = 3$, i, substituint aquests valors en (ii),

$$u_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + u_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ l_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

és a dir,

$$\left.\begin{aligned} u_{12} &= 3 \\ u_{12} + u_{22} &= 3 \\ 3u_{12} + u_{22}l_{32} &= 3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{u_{12}=3} \left.\begin{aligned} u_{12} &= 3 \\ 3 + u_{22} &= 3 \\ 9 + u_{22}l_{32} &= 3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{u_{22}=0} \left.\begin{aligned} u_{12} &= 3 \\ u_{22} &= 0 \\ 9 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

i hem arribat a una contradicció.

(b) Apliquem l'algorisme de Gauss per a transformar A en triangular superior:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{31}(-3)\mathsf{E}_{21}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{23}\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$

Apliquem a les columnes de la identitat les operacions inverses, per columnes:

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{21}(1)\mathsf{E}_{31}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{L}$$

EXERCICI 11.6. (pàgina 180) *Trobeu una factorització LU de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ *i feu servir aquesta factorització per resoldre el sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = (0, -6, -2)$.

Solució:
Calculem la factorització LU:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{2,1}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathsf{E}_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{L}$$

El sistema $\mathsf{A}\vec{x} = (0, -6, -2)$ és equivalent a

$$\mathsf{LU}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathsf{L}\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$$

Així que resolem en primer lloc $\mathsf{L}\vec{y} = (0, -6, -2)$:

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y_1 \qquad\quad &= 0 \\ -y_1 + y_2 \qquad &= -6 \\ y_2 + y_3 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= -6 + y_1 \\ y_3 &= -2 - y_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= -6 \\ y_3 &= 4 \end{aligned}$$

I ara resolem el sistema $\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}$:

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 \qquad + \ x_3 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -6 \\ -4x_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= 3 + x_3 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

La solució és $\vec{x} = (1, 2, -1)$.

EXERCICI 11.7. (pàgina 180) *Trobeu una forma esglaonada,* R*, de la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

fent servir l'algorisme de Gauss amb pivotatge parcial. Trobeu també una matriu L *tal que* $\mathsf{A} = \mathsf{LR}$.

Solució:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}\cdot} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{2,1}(1/4)\cdot} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{2,3}\cdot} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3,2}(-2/3)\cdot} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 17/6 & 1/3 \end{bmatrix} = R$$

Al primer pas, hem permutat les files primera i segona, perquè el pivot més adequat era el -4 de la segona fila. I, després, hem fet el mateix amb les files segona i tercera, per un motiu similar.
Podem escriure A com el producte LR, si L és la matriu $E_{1,2}E_{2,1}(-1/4)E_{2,3}E_{3,2}(2/3)$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{1,2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{2,1}(-1/4)} \begin{bmatrix} -1/4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdot E_{2,3}} \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{3,2}(2/3)} \begin{bmatrix} -1/4 & 2/3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = L$$

LLIÇÓ 12. ELS ESPAIS $\mathbb{K}^n$

EXERCICI 12.1. (pàgina 193) *Feu servir la definició de base per a determinar si els conjunts següents són o no bases de l'espai* $\mathbb{K}^2$.

(a) $\mathcal{B}_1 = \{(0,-4),(1,0)\}$ (b) $\mathcal{B}_2 = \{(1,-1),(-2,2)\}$

(c) $\mathcal{B}_3 = \{(1,-1),(2,1),(1,1)\}$

Solució:

(a) Qualsevol vector (a,b) de $\mathbb{K}^2$ es pot escriure com $(a,b) = -\frac{b}{4}(0,-4)+a(1,0)$, així que aquest conjunt genera $\mathbb{K}^2$. A més, és linealment independent, perquè

$$\alpha_1(0,-4)+\alpha_2(1,0) = (0,0) \iff (\alpha_2,-4\alpha_1) = (0,0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

així que, $\mathcal{B}_1$ és base de $\mathbb{K}^2$.

(b) Aquest conjunt no és linealment independent, perquè $2(1,-1)+(-2,2) = (0,0)$, així que no és base.

(c) $\mathcal{B}_3$ genera $\mathbb{K}^2$, però tampoc no és linealment independent (ni base), perquè

$$-(1,-1)+2(2,1)-3(1,1) = (0,0)$$

EXERCICI 12.2. (pàgina 193) *Justifiqueu si els conjunts següents són o no linealment independents, generadors o bases de* $\mathbb{K}^3$.

(a) $S_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

(b) $S_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(2,5,5)\}$

(c) $S_3 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1),(2,5,5)\}$

(d) $S_4 = \{(1,1,1),(2,5,5)\}$

Solució:

(a) S_1 és base de $\mathbb{K}^3$, perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{S_1} = 3$.

(b) S_2 no és generador, ni independent, ni tampoc base de $\mathbb{K}^3$, perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{S_2} = 2$.

(c) S_3 és generador, però no independent ni base de $\mathbb{K}^3$, perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{S_3} = 3$.

(d) S_4 és independent, però no generador ni base de $\mathbb{K}^3$, perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{S_4} = 2$.

EXERCICI 12.3. (pàgina 193) *Vertader o fals (justifiqueu la resposta):*

(a) Si S és un conjunt de tres vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és linealment independent.

(b) Si S és un conjunt de cinc vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és linealment dependent.

(c) Si S és un conjunt de tres vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S no és generador.

(d) Si S és un conjunt de cinc vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és generador.

(e) Si S és un conjunt de quatre vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és base.
(f) Si S és un conjunt linealment independent de quatre vectors en $\mathbb{K}^4$ llavors S és base.
(g) Si S és un conjunt de quatre vectors en $\mathbb{K}^4$ i S genera $\mathbb{K}^4$, llavors S és base.

Solució:

(a) Fals. Per exemple, $S = \{(1,1,1,1),(2,2,2,2),(3,3,3,3)\}$ no és linealment independent.

(b) Vertader: una matriu 4×5 no pot tenir rang 5 (en $\mathbb{K}^5$ no pot haver-hi més de quatre vectors en un conjunt linealment independent).

(c) Vertader: una matriu 4×3 no pot tenir rang 4 (en $\mathbb{K}^4$ no pot haver-hi menys de quatre vectors en un conjunt generador).

(d) Fals. Per exemple, $S = \{(1,1,1,0),(1,2,3,0),(0,1,1,0),(-2,3,3,0),(0,0,1,0)\}$ no és generador.

(e) Fals. Per exemple, $S = \{(1,1,1,0),(1,2,3,0),(0,1,1,0),(-2,3,3,0)\}$ no és base de $\mathbb{K}^4$.

(f) Cert. Si S és linealment independent i té quatre vectors, llavors $\operatorname{rang} M_S = 4$ i, llavors S és base de $\mathbb{K}^4$.

(g) Cert. Si S és generador i té quatre vectors, llavors $\operatorname{rang} M_S = 4$ i, en conseqüència, S és base de $\mathbb{K}^4$.

Exercici 12.4. (pàgina 193) *(a) Proveu que els conjunts $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(-1,2)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ són bases de $\mathbb{K}^2$. (b) Calculeu els vectors de coordenades ($\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$ i $\vec{u}_{\mathcal{B}_2}$) del vector $\vec{u} = (1,7)$ respecte a cadascuna d'aquestes bases. (c) Trobeu el vector $\vec{v}$ sabent que les coordenades d'aquest vector respecte a la base $\mathcal{B}_1$ són $\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = (2,2)$.*

Solució:

(a) Aquests dos conjunts són bases de $\mathbb{K}^2$ perquè

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

(b) Hem d'expressar el vector $\vec{u}$ com a combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}_1$ i dels de $\mathcal{B}_2$, és a dir, resoldre els sistemes lineals

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Per a fer-ho trobarem les formes esglaonades reduïdes de les matrius ampliades respectives:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 7\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 7\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

Per tant, les coordenades són aquestes:

$$\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = (3,2) \qquad \vec{u}_{\mathcal{B}_2} = (1,6)$$

(c) Si $\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = (2,2)$ llavors

$$\vec{v} = 2(1,1) + 2(-1,2) = (0,6)$$

Exercici 12.5. (pàgina 193) *Trobeu les matrius de canvi de base $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ i $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ on $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són les bases de $\mathbb{K}^2$ de l'exercici anterior.*

Solució:
La matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$ la podem obtenir cercant la forma esglaonada reduïda de la matriu $\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right]$:

$$\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-1)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{array}\right]$$

així que $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$.
La matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ podríem obtenir-la de la mateixa manera, però també invertint $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$:

$$\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \mid \mathrm{I}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(1/3)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1/3\\ 0 & 3 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(1/3)\cdot} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & 1/3\end{array}\right]$$

així que $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}1 & 1/3\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}$.

Exercici 12.6. (pàgina 194) *Calculeu les coordenades del vector $\vec{u} = (1,2,-1,-2)$ respecte a la base*

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,-1,1), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\}$$

Solució:
A l'exercici 10.5. hem vist que la matriu que té per columnes els vectors de $\mathcal{B}$ és ortogonal. Per tant, $\mathcal{B}$ és una base ortonormal, així que

$$\vec{u}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EXERCICI 12.7. (pàgina 194) *Proveu que si les bases de $\mathbb{K}^n$ $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són ortonormals, llavors la matriu de canvi de base $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ és unitària.*

Solució:
Si les bases són ortonormals, llavors les matrius $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$ i $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}$ són unitàries, així que

$$\left(\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\right)^* \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \left(\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}^*\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right)^* \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}^*\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}^*\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}^*\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1} = \mathrm{I}$$

LLIÇÓ 13. SUBESPAIS DE $\mathbb{K}^n$

EXERCICI 13.1. (pàgina 203) *Estudieu si els conjunts de vectors següents són subespais de l'espai $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ o si no ho són. Descriviu geomètricament aquests conjunts.*
(a) $F_1 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$
(b) $F_2 = \{(a - b, 2a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
(c) $F_3 = \{(a - b, b - c, c - a) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$
(d) $F_4 = \{(a + 1, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$
(e) $F_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 = 1\}$
(f) $F_6 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$
(g) $F_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$
(h) $F_8 = \{(1, 2, 0), (0, -1, 1)\}$

Solució:

(a) F_1 és un subespai de $\mathbb{R}^2$, perquè és una recta que passa per l'origen. Es tracta de l'eix d'abscisses $y = 0$.

Es pot provar que és un subespai observant que el vector $\vec{0} = (0, 0)$ és un element de F_1 i que, si $(a_1, 0)$ i $(a_2, 0)$ són dos vectors qualssevol de F_1, llavors la combinació lineal

$$\alpha_1(a_1, 0) + \alpha_2(a_2, 0) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, 0)$$

també és a F_1.

(b) F_2 també és subespai de $\mathbb{R}^2$: com que $(0, 0) = (0 - 0, 2 \cdot 0 + 0)$, el vector nul hi és; d'altra banda, fent una combinació lineal amb dos vectors arbitraris de F_2 tindrem

$$\begin{aligned}&\alpha_1(a_1 - b_1, 2a_1 + b_1) + \alpha_2(a_2 - b_2, 2a_2 + b_2) = \\ &((\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) - (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2), 2(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)) \in F_2\end{aligned}$$

En realitat, $F_2 = \mathbb{R}^2$, perquè $(a - b, 2a + b) = a(1, 2) + b(-1, 1)$, així que es tracta del conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $(1, 2)$ i $(-1, 1)$.

(c) F_3 és un subespai de $\mathbb{R}^3$. Com que

$$(a - b, b - c, c - a) = a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) + c(0, -1, 1)$$

resulta que F_3 és el conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $(1, 0, -1)$, $(-1, 1, 0)$ i $(0, -1, 1)$; però, com que $(0, -1, 1) = -(1, 0, -1) - (-1, 1, 0)$, podem expressar els vectors de F_3 com a combinacions lineals de, només, els dos primers vectors. Així, F_3 és un pla.

(d) F_4 no és un subespai, perquè $(0, 0, 0) \notin F_4$.

F_4 és la recta que passa pels punts $(1, 0, 0)$ i $(0, -1, 0)$.

(e) F_5 no és un subespai de $\mathbb{R}^3$, perquè $(0,0,0) \notin F_5$. Resolent el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

obtenim $x_1 = 1 + \alpha$, $x_2 = 1 + \alpha$, $x_3 = \alpha$, així que es tracta de la recta que passa pel punt $(1,1,0)$ i té per vector director $(1,1,1)$.

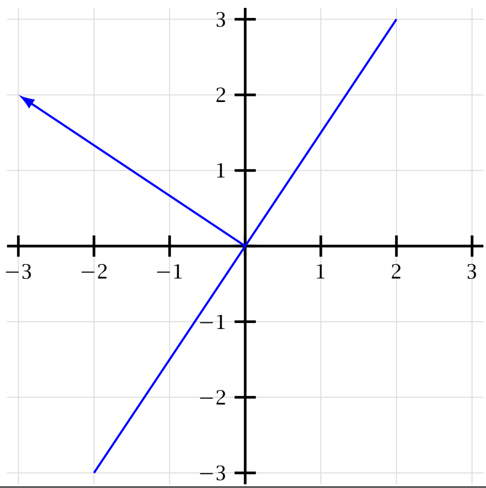
(f) F_6 no és un subespai de $\mathbb{R}^3$, perquè el vector $\vec{u} = (1,2)$ hi és però $-\vec{u} = (-1,-2)$, no. És un semiplà.

(g) F_7 és un subespai de $\mathbb{R}^3$. Es tracta de la recta que passa per l'origen amb vector director $(1,1,1)$.

(h) F_8 no és un subespai de $\mathbb{R}^3$, per exemple, perquè el vector zero no hi pertany. Tret del subespai zero, tots els subespais de $\mathbb{K}^n$ tenen un nombre infinit d'elements (i aquest conjunt només en té dos).

Exercici 13.2. (pàgina 203) *Proveu que el conjunt $F = \{(2a,3a) : a \in \mathbb{R}\}$ és un subespai de $\mathbb{R}^2$, representeu-lo gràficament i descriviu-lo (1) com el conjunt de totes les combinacions lineals d'un vector, (2) com la solució general d'una equació lineal, i (3) com el conjunt de tots els vectors ortogonals a un vector.*

Solució:



Es tracta d'un subespai perquè és la recta que passa per l'origen amb vector director $(2,3)$.

(1) F és el conjunt de totes les combinacions lineals del vector $(2,3)$.

(2) F és el conjunt de totes les solucions de l'equació $-3x_1 + 2x_2 = 0$.

(3) F és el conjunt de tots els vectors ortogonals al vector $(-3,2)$.

Exercici 13.3. (pàgina 203) *Proveu que els conjunts següents són subespais de $\mathbb{R}^3$ i descriviu-los (a) com el conjunt de totes les combinacions lineals d'un conjunt de vectors, (b) com la solució general d'un sistema d'equacions lineals, i (c) com el conjunt de tots els vectors ortogonals a un conjunt de vectors.*

$$F_1 = \{(a,2a,3a) : a \in \mathbb{R}\} \qquad F_2 = \{(a,a+b,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

Solució:
F_1 i F_2 són una recta i un pla que contenen l'origen; per tant, són subespais de $\mathbb{R}^3$.

(a) F_1 és el conjunt de totes les combinacions lineals de $S_1 = \{(1, 2, 3)\}$. F_2 és el conjunt de totes les combinacions lineals de $S_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

(b) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 = 0; 3x_1 - x_3 = 0\}$
$F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

(c) $F_1 = \{(2, -1, 0), (3, 0, -1)\}^{\perp}$. $F_2 = \{(1, -1, 1)\}^{\perp}$.

Exercici 13.4. (pàgina 203) *Trobeu una base de cadascun dels subespais de $\mathbb{R}^4$ següents*

(a) $F = \{(a - b, b - c, c - d, d - a) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

(b) $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0; x_3 + x_4 = 0\}$

Solució:

(a) Com que

$$(a - b, b - c, c - d, d - a) \\ = a(1, 0, 0, -1) + b(-1, 1, 0, 0) + c(0, -1, 1, 0) + d(0, 0, -1, 1)$$

el conjunt $S = \{(1, 0, 0, -1), (-1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, -1, 1)\}$ genera el subespai F. D'altra banda, una forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\mathsf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de manera que els tres vectors primers són independent, però el quart n'és combinació lineal.

En conseqüència, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, -1), (-1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0)\}$ és una base de F.

(b) És fàcil veure que $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ és una base de G.

Exercici 13.5. (pàgina 203) *Trobeu bases dels subespais següents:*

(a) $F = \langle(1, 1, 0), (2, -1, 1), (3, 0, 1)\rangle$ (b) $G = \langle(1, 1, 0), (2, -1, 1), (3, 0, 0)\rangle$

Solució:

(a) Esglaonem la matriu formada pels tres vectors:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Així que el tercer vector és combinació lineal dels dos primers. Per tant, el conjunt $\mathcal{B}_F = \{(1,1,0),(2,-1,1)\}$ és una base del subespai F.

(b) El rang de la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ és tres, així que podem triar el conjunt $\mathcal{B}_G = \{(1,1,0),(2,-1,1),(3,0,0)\}$ com a base de G.

Exercici 13.6. (pàgina 204) *Siga S un subconjunt no buit de $\mathbb{K}^n$. Proveu que*

(a) $\langle S\rangle$ és un subespai de $\mathbb{K}^n$.

(b) Si F és un subespai de $\mathbb{K}^n$ i $S \subset F$, llavors $\langle S\rangle \subset F$.

Solució:

(a) Si $\vec{u}$ és un vector de S, llavors $\vec{0} = 0\vec{u}$, així que el vector zero és combinació lineal dels vectors de S. D'altra banda, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són elements de $\langle S\rangle$, com que tots dos són combinacions lineals dels elements de S és clar que una combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ també ho serà.

Això prova que $\langle S\rangle$ és un subespai.

(b) Si F conté S, com que F és subespai, també contindrà totes les combinacions lineals que es puguen fer amb els elements de S; és a dir, $\langle S\rangle \subset F$.

Exercici 13.7. (pàgina 204) *És clar que, si el vector $\vec{u}$ no pertany a S, llavors $\langle S\rangle \subset \langle S \cup \{\vec{u}\}\rangle$. Poden ser iguals, $\langle S\rangle$ i $\langle S \cup \{\vec{u}\}\rangle$? En cas afirmatiu, quina condició s'ha de complir perquè no ho siguen?*

Solució:

La condició necessària i suficient perquè $\langle S\rangle = \langle S \cup \{\vec{u}\}\rangle$ és que $\vec{u}$ siga una combinació lineal dels vectors de S, perquè, si no ho és, $\vec{u}$ és un element de $\langle S \cup \{\vec{u}\}\rangle$ però no de $\langle S\rangle$; en canvi, si $\vec{u}$ és combinació lineal dels vectors de S, llavors en qualsevol combinació lineal de $S \cup \{\vec{u}\}$ podem substituir $\vec{u}$ per una combinació lineal dels vectors de S.

Exercici 13.8. (pàgina 204) ***(Canvi de base en un subespai)***
(a) Proveu que els conjunts $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(1,-1,0)\}$ *i* $\mathcal{B}_2 = \{(2,0,1),(0,2,1)\}$ *són bases del subespai de* $\mathbb{K}^3$ $F = \{(x+y, x-y, x) : x, y \in \mathbb{K}\}$*. (b) Comproveu que el vector* $\vec{u} = (3,1,2)$ *és un element de* F *i calculeu les coordenades de* $\vec{u}$ *respecte a cadascuna d'aquestes bases. (c) Trobeu una matriu* $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ *de manera que, per a qualsevol vector* $\vec{v} \in F$*,* $\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{v}_{\mathcal{B}_1}$*. d) Comproveu amb el vector* $\vec{u}$ *el resultat que heu obtingut.*

Solució:

(a) Els dos conjunts $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són, clarament, linealment independents. D'altra banda, un vector qualsevol de F es pot escriure com

$$(x+y, x-y, x) = x(1,1,1) + y(1,-1,0)$$

de manera que $\mathcal{B}_1$ genera F (i n'és base). Per a provar que $\mathcal{B}_2$ també genera F bastarà que provem que els dos vectors de $\mathcal{B}_1$ són combinacions lineals dels de $\mathcal{B}_2$, és a dir que el sistemes lineals

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

són compatibles. Però això és cert perquè

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Això prova que $\mathcal{B}_2$ també és base de F.

(b) Aquest vector és un element de F perquè $(3,1,2) = 2(1,1,1) + (1,-1,0)$ la qual cosa també prova que $\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = (2,1)$.
Per a calcular les coordenades de $\vec{u}$ respecte la base $\mathcal{B}_2$ resolem el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solució que s'hi obté és $\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(c) Per a qualsevol vector $\vec{v} \in F$ tenim les igualtats

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_1} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_2}$$

Per tant,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_1}$$

Per a aïllar $\vec{v}_{\mathcal{B}_2}$ en aquesta igualtat podem fer servir l'algorisme de Gauss-Jordan!:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_1} &\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1/2)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_1} \\ &\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1/2)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_1} \\ &\xrightarrow{\mathsf{E}_1(1/2)\mathsf{E}_2(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_1} \end{aligned}$$

així que

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \vec{v}_{\mathcal{B}_1}$$

i la matriu que cercàvem és

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(Observem que, quan es tracta de bases de subespais, no podem dir que la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ és igual a $\left(\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$, perquè la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}$ no és quadrada, però sí que és cert que aquesta matriu de canvi de base es pot obtenir aplicant l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right]$)

(d) $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \vec{u}_{\mathcal{B}_2}$.

Lliçó 14. Els quatre subespais deduïts d'una matriu

Exercici 14.1. (pàgina 217) *Trobeu (si és possible) bases dels quatre subespais associats a les matrius següents:*

$$\text{(a)}\quad \mathsf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathsf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \mathsf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}\quad \mathsf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solució:

(a) Amb una sola operació elemental, trobem una forma esglaonada de M_1:

$$\mathsf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Així que $\operatorname{rang} \mathsf{M}_1 = 3$. En conseqüència,

$$\begin{aligned} \operatorname{Col} \mathsf{M}_1 &= \mathbb{K}^3 \\ \operatorname{Fil} \mathsf{M}_1 &= \langle (1,0,1,-1), (0,1,1,0), (1,0,1,1) \rangle \end{aligned}$$

i podem escollir les bases següents:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\operatorname{Col} \mathsf{M}_1} &= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \\ \mathcal{B}_{\operatorname{Fil} \mathsf{M}_1} &= \{(1,0,1,-1), (0,1,1,0), (1,0,1,1)\} \end{aligned}$$

L'espai nul esquerre és $\operatorname{Nul} \mathsf{M}_1^* = \{\vec{0}\}$, que no té cap base. Finalment, per a trobar l'espai nul cal resoldre un sistema homogeni, la matriu de coeficents del qual és M_1, així que acabarem de calcular la forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu:

$$\mathsf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solució del sistema $\mathsf{M}_1\vec{x} = \vec{0}$ és $x_1 = -\alpha, x_23 = -\alpha, x_3 = \alpha, x_4 = 0$, així que

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Nul} M_1} = \{(-1,-1,1,0)\}$$

és una base de l'espai nul.

(b) La forma esglaonada reduïda de la matriu M_2 és

$$\mathsf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per tant, obtenim immediatament les bases següents, per als espais columna, fila i nul:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{M}_2} &= \{(1,0,0),(0,1,0)\} \\ \mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{M}_2} &= \{(1,0,1,-1),(0,1,1,0)\} \\ \mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_2} &= \{(-1,-1,1,0),(1,0,0,1)\} \end{aligned}$$

Per a determinar l'espai nul esquerre, calculem la forma esglaonada reduïda de M_2^*; és aquesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

per tant, podem escollir aquesta base:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_2^*} = \{(-1,-1,1)\}$$

(c) Notem que les tres darreres columnes de la matriu M_3 són combinacions lineals de la primera. En conseqüència, com a base de l'espai columna podem elegir

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{M}_3} = \{(1,2,-1)\}$$

Llavors, l'espai fila també té dimensió 1, així que podem triar qualsevol fila per a construir la base. Per exemple,

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{M}_3} = \{(1,0,1,-1)\}$$

L'espai nul és l'espai solució de l'equació

$$x_1 + 0x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

i aquesta n'és una base:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_3} = \{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$$

Per últim, l'espai nul esquerre és la solució de l'equació

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

i aquesta n'és una base:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_3^*} = \{(-2,1,0),(1,0,1)\}$$

(d) La matriu M_4 és esglaonada reduïda. En conseqüència, els conjunts

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{M}_4} &= \{(1,0,0),(0,1,0)\}\\ \mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_4} &= \{(-1-\mathrm{i},1,0,0),(\mathrm{i},0,-1+\mathrm{i},1)\}\end{aligned}$$

són bases dels espais columna i nul.
L'espai fila és

$$\mathrm{Fil}\,\mathsf{M}_4 = \mathrm{Col}\,\mathsf{M}_4^* = \mathrm{Col}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1-\mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 0\end{bmatrix}$$

Així que el conjunt

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{M}_4} = \{(1,1-\mathrm{i},0,\mathrm{i}),(0,0,1,1+\mathrm{i})\}$$

n'és una base. Finalment, les solucions del sistema lineal $\mathsf{M}_4^* = \mathsf{O}$ són els vectors de la forma $(0,0,\alpha)$, així que podem triar la base

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_4^*} = \{(0,0,1)\}$$

Exercici 14.2. (pàgina 217) *La matriu A té 7 files i 5 columnes i el seu rang és 4. Quines són les dimensions dels quatre subespais associats a aquesta matriu?*

Solució:
$\dim \mathrm{Col}\,\mathsf{A} = 4, \dim \mathrm{Fil}\,\mathsf{A} = 4, \dim \mathrm{Nul}\,\mathsf{A} = 5-4 = 1, \dim \mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^* = 7-4 = 3.$

Exercici 14.3. (pàgina 217)
(a) Quina condició ha de complir la matriu $m \times n$ A perquè l'espai columna de A siga $\mathbb{K}^m$?
(b) I perquè l'espai nul siga $\{\vec{0}\}$?
(c) Si A és una matriu $n \times n$ invertible, quins són els quatre subespais associats a A?

Solució:
(a) Ha de ser $\mathrm{rang}\,\mathsf{A} = m$
(b) $\mathrm{rang}\,\mathsf{A} = n$
(c) $\mathrm{Col}\,\mathsf{A} = \mathrm{Fil}\,\mathsf{A} = \mathbb{K}^n$, $\mathrm{Nul}\,\mathsf{A} = \mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^* = \{\vec{0}\}$

Exercici 14.4. (pàgina 218) *Donada la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

(a) *Calculeu la forma esglaonada reduïda* R *de la matriu* A*, la matriu* T *tal que* $\mathsf{R} = \mathsf{TA}$ *i la matriu inversa* $\mathsf{L} = \mathsf{T}^{-1}$ *(tot això requereix únicament una operació elemental).*

(b) *Trobeu els quatre subespais deduïts de* A*.*

(c) *Quina relació hi ha entre l'espai columna de* A *i les columnes de* L*? Per què?*

(d) *Quina relació hi ha entre l'espai nul de* A^* *i les files de* T*? Per què?*

(e) *Sabent que*

$$\mathsf{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{R}}$$

determineu bases dels quatre subespais associats a B *sense calcular explícitament la matriu* B*.*

Solució:

(a)

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{R}$$

Aquesta darrera és la forma esglaonada reduïda de A. Les matrius T i T^{-1} són

$$\mathsf{T} = \mathsf{E}_{3,1}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{L} = \mathsf{T}^{-1} = \mathsf{E}_{3,1}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} \operatorname{Col}\mathsf{A} &= \langle (1,0,2), (0,1,0) \rangle \\ \operatorname{Fil}\mathsf{A} &= \langle (1,0,-1,-2), (0,1,0,1) \rangle \\ \operatorname{Nul}\mathsf{A} &= \langle (1,0,1,0), (2,-1,0,1) \rangle \end{aligned}$$

La forma esglaonada reduïda de la matriu A^* es troba molt fàcilment:

$$\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Llavors

$$\operatorname{Nul}\mathsf{A}^* = \langle (-2,0,1) \rangle$$

(c) Anomenem $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ les columnes de L. Si eliminem les columnes lliures de A i R en

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 & \vec{l}_2 & \vec{l}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{R}$$

obtindrem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 & \vec{l}_2 & \vec{l}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 & \vec{l}_2 \end{bmatrix}$$

De manera que $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2\}$ és una base de $\operatorname{Col}\mathsf{A}$. En general, *si* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = r$*, llavors les* r *primeres columnes de* T^{-1} *formen una base de* $\operatorname{Col}\mathsf{A}$*.*

(d) Un vector $\vec{x}$ és un element de l'espai nul esquerre si $\mathsf{A}^*\vec{x} = \vec{0}$ o, de manera equivalent, si $\vec{x}^*\mathsf{A} = \mathsf{O}$. Ara bé, com que $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$ i la darrera fila de R és nul·la, resulta que la darrera fila de T, multiplicada per A és nul·la:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per tant, $(-2, 0, 1)$ és un element de $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$. En general, com que la dimensió de l'espai nul esquerre és el nombre de files nul·les de R, les conjugades complexes de les files de T corresponents a aquestes són una base de l'espai nul esquerre. Així, podem trobar la base de l'espai nul esquerre sense esglaonar A^*: *Si* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = r$*, llavors les conjugades de les* $m - r$ *darreres files de* T *formen una base de* $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^*$*.*

(e) Com que el rang de B és 2, les dues primeres columnes de L són una base de $\operatorname{Col}\mathsf{B}$:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Col}\mathsf{B}} = \{(1, 2, 5), (0, 1, 0)\}$$

La base de l'espai nul de B s'obté resolent el sistema $\mathsf{R}\vec{x} = \vec{0}$:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Nul}\mathsf{B}} = \{(1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)\}$$

Com a base de l'espai fila agafem les files no nul·les de R:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Fil}\mathsf{B}} = \{(1, 0, -1, -2), (0, 1, 0, 1)\}$$

Finalment, com que el rang de A és 2, la dimensió de l'espai nul esquerre és $3 - 2 = 1$ i podem prendre com a base la darrera fila de $\mathsf{T} = \mathsf{L}^{-1}$. Com que

$$\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenim aquesta base:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Nul}\mathsf{B}^*} = \{(-5, 0, 1)\}$$

Exercici 14.5. (pàgina 218) *Trobeu els valors del paràmetre* λ *per als quals l'espai nul de la matriu* $\mathsf{A}_\lambda = \left[\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{smallmatrix}\right]$ no és *el subespai* $\{\vec{0}\}$.

Solució:
El que ha de passar, perquè l'espai nul de A_λ no siga l'espai zero, és que el rang d'aquesta matriu no siga igual a 2. Calculem aquest rang:

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 2-\frac{1}{2}(1-\lambda)^2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

(a la primera fila hem restat la segona multiplicada per $(1/2)(1-\lambda)$). La condició perquè aquest rang no siga 2 és

$$2-\frac{1}{2}(1-\lambda)^2 = 0$$

és a dir,

$$4-(1-\lambda)^2 = 0$$

Els valors que cerquem són aquests: $\lambda = -1$ o $\lambda = 3$.

Exercici 14.6. (pàgina 218) *Trobeu l'ortogonal del conjunt* $S = \{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$. *Quina relació hi ha entre* S *i* $(S^\perp)^\perp$*?*

Solució:
$S^\perp$ és el conjunt de solucions del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \vec{0}$$

és a dir,

$$S^\perp = \langle(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\rangle$$

Per a calcular $(S^\perp)^\perp$ haurem de resoldre un altre sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} = \vec{0}$$

El que obtindrem és

$$(S^\perp)^\perp = \langle(1,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$$

així que $(S^\perp)^\perp = \langle S\rangle$.

Exercici 14.7. (pàgina 218) *Suposem que* S *és un subconjunt de* $\mathbb{K}^n$. *Quina condició s'ha de complir perquè* $S = (S^\perp)^\perp$*?*

Solució:
En general, $S \subset (S^\perp)^\perp$, perquè si $\vec{u} \in S$, llavors, $\vec{u}$ és ortogonal a tots els vectors de $S^\perp$, així que $\vec{u} \in (S^\perp)^\perp$. Però no sempre són iguals, com passa amb el conjunt S de l'exercici 14.6.
Provarem que la condició necessària i suficient perquè ho siguen és que S siga un subespai de $\mathbb{K}^n$:

- Si són iguals, com que $(S^\perp)^\perp$ és un subespai de $\mathbb{K}^n$, S també ho es.
- Recíprocament, si S és un subespai de $\mathbb{K}^n$, llavors S és l'espai fila d'alguna matriu A. Per tant,

$$(S^\perp)^\perp = ((\operatorname{Fil}\mathsf{A})^\perp)^\perp = (\operatorname{Nul}\mathsf{A})^\perp = \operatorname{Fil}\mathsf{A} = S$$

Exercici 14.8. (pàgina 218) *Si S i T són dos subconjunts de $\mathbb{K}^n$ i $S \subset T$, quina relació hi ha entre $S^\perp$ i $T^\perp$?*

Solució:
Observem que, si $\vec{u} \in T^\perp$, llavors $\vec{u}$ és ortogonal a tots els vectors de T; però com que $S \subset T$, llavors $\vec{u}$ també és ortogonal a tots els vectors de S. És a dir, que

$$\vec{u} \in T^\perp \Longrightarrow \vec{u} \in S^\perp$$

I hem provat que $T^\perp \subset S^\perp$.

Exercici 14.9. (pàgina 219) *Proveu que, si S és un subconjunt de $\mathbb{K}^n$, llavors, $(S^\perp)^\perp = \langle S\rangle$.*

Solució:
Com que $S \subset \langle S\rangle$, segons l'exercici 14.8., $\langle S\rangle^\perp \subset S^\perp$, i, tornant a aplicar el mateix resultat, $(S^\perp)^\perp \subset \left(\langle S\rangle^\perp\right)^\perp$. Però $\left(\langle S\rangle^\perp\right)^\perp = \langle S\rangle$, perquè $\langle S\rangle$ és un subespai.
Així que $(S^\perp)^\perp \subset \langle S\rangle$.
Per provar que $\langle S\rangle \subset (S^\perp)^\perp$, basta que observem que, si un vector és ortogonal als vectors de S també ho és a les combinacions lineals d'aquests vectors.

Exercici 14.10. (pàgina 219) *Quina relació hi ha entre els conjunts S i T, si $S^\perp = T^\perp$?*

Solució:
Si $S^\perp = T^\perp$, llavors $(S^\perp)^\perp = (T^\perp)^\perp$ i, com que $(S^\perp)^\perp = \langle S\rangle$, obtindrem que $\langle S\rangle = \langle T\rangle$.
És fàcil veure que no té perquè ser $S = T$: si elegim dues bases diferents, S i T, del mateix subespai F, llavors $S^\perp = T^\perp = F^\perp$, però $S \neq T$.

EXERCICI 14.11. (pàgina 219) *Expresseu cadascun dels subespais següents com l'espai fila d'una matriu i com l'espai nul d'una altra matriu.*

(a) $F_1 = \langle (1,-1,2) \rangle$
(b) $F_2 = \langle (1,1,0), (-2,0,1) \rangle$
(c) $F_3 = \{(a, a+b, a+2b, -a) : a, b \in \mathbb{K}\}$
(d) $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0, x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$

Solució:

(a) Expressar F_1 com un espai fila és immediat: $F_1 = \operatorname{Fil} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A}$

L'ortogonal de F_1 és $\operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \langle (1,1,0)(-2,0,1) \rangle$ així que

$$F_1 = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $F_2 = \operatorname{Fil} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$

L'ortogonal de F_2 és $\operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \langle (1/2, -1/2, 1) \rangle$ així que

$$F_2 = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

o, de manera equivalent,

$$F_2 = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(els resultats dels dos primers apartats són curiosament simètrics; evidentment, això és perquè $F_1^\perp = F_2$)

(c) Un vector genèric de F_3 es pot escriure com

$$(a, a+b, a+2b, -a) = a(1,1,1,-1) + b(0,1,2,0)$$

de manera que

$$F_3 = \operatorname{Fil} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculem l'espai nul de la matriu:

$$\operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,-2,1,0), (1,0,0,1) \rangle$$

Llavors,

$$F_3 = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) F_4 és el conjunt de les solucions del sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

és a dir,

$$F_4 = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(i ja l'hem expressat com un espai nul). Resolent el sistema lineal homogeni, tenim

$$F_4 = \langle(-1,1,1,0),(-1,1,0,1)\rangle$$

així,

$$F_4 = \operatorname{Col}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 14.12. (pàgina 219) *Trobeu una base i les equacions de cadascun dels subespais de l'exercici anterior.*

Solució:

(a) Base de F_1: $\{(1,-1,2)\}$. Equacions de F_1: $x_1 + x_2 = 0, -2x_1 + x_3 = 0$.

(b) Base de F_2: $\{(1,1,0),(-2,0,1)\}$. Equacions de F_2: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

(c) Base de F_3: $\{(1,1,1,-1),(0,1,2,0\}$. Equacions de F_3: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0$.

(d) Les equacions de F_4 ja les coneixem: $x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 - x_4 = 0$. I la base pot ser aquesta: $\{(-1,1,1,0),(-1,1,0,1)\}$.

Exercici 14.13. (pàgina 219) *Trobeu les equacions del subespai $F = \langle(1,1,1,1),(0,1,1,0)\rangle$ i una base del subespai $G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,\colon\, x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$.*

Solució:

F és l'espai fila de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Així que, per trobar-ne les equacions, calculem una base de l'ortogonal de F:

$$F^\perp = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle(-1,0,0,1),(0,-1,1,0)\rangle$$

així que $F = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i les equacions de F són $-x_1 + x_4 = 0, -x_2 + x_3 = 0$.

Alternativament, per trobar les equacions del subespai F, podem fer el raonament següent: si (x_1,x_2,x_3,x_4) és un vector de F, llavors rang $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{bmatrix}$ = rang $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(perquè la tercera columna és combinació lineal de les dues primeres). Esglaonant, obtindrem

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & 0 & x_1\\ 1 & 1 & x_2\\ 1 & 1 & x_3\\ 1 & 0 & x_4\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & -x_1+x_2\\ 0 & 1 & -x_1+x_3\\ 0 & 0 & -x_1+x_4\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & -x_1+x_2\\ 0 & 0 & -x_2+x_3\\ 0 & 0 & -x_1+x_4\end{bmatrix}$$

Així que aquest rang ha de ser igual a 2. Ara, perquè el rang de la darrera matriu siga 2, les dues files últimes han de ser nul·les, és a dir, el que s'ha de complir és

$$-x_2+x_3=0, \quad -x_1+x_4=0$$

Aquestes són les equacions de f.

Per a trobar una base de G, l'únic que hem de fer és resoldre l'equació $x_1+x_2-x_3-x_4=0$:

$$\mathcal{B}_G=\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$$

Lliçó 15. Intersecció i suma de subespais. Suma directa

Exercici 15.1. (pàgina 234) *En cada apartat, trobeu una base del subespai intersecció dels dos subespais F i G donats.*

(a) $F = \langle (1,1,0),(1,0,1)\rangle$, $G = \langle (0,1,1),(1,1,1)\rangle$

(b) $F = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 - x_2 = 0\}$, $G = \{(x_1,x_2,x_3) : x_3 = 0\}$

Solució:

(a) Considerem la matriu $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ i fem operacions elementals fins a esglaonar el bloc esquerre:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Els vectors de la intersecció es poden escriure com $\vec{v} = a_1(0,1,1) + a_2(1,1,1)$ i compleixen la relació $2a_1 + a_2 = 0$, és a dir, $a_2 = -2a_1$. Per tant, la intersecció és el conjunt dels vectors $\vec{v} = a_1(0,1,1) - 2a_1(1,1,1) = -a_1(2,1,1)$. El conjunt $B = \{(2,1,1)\}$ és una base de $F \cap G$.

(b) Com que tenim les equacions dels dos subespais, la intersecció serà

$$F \cap G = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 - x_2 = 0, x_3 = 0\}$$

Ara bé, la solució d'aquest sistema lineal és $x_1 = \alpha, x_2 = \alpha, x_3 = 0$. Per tant, el conjunt $B = \{(1,1,0)\}$ és una base de $F \cap G$.

Exercici 15.2. (pàgina 234) *En cada apartat, trobeu una base del subespai suma dels dos subespais F i G donats.*

(a) $F = \langle (1,1,0),(1,0,1)\rangle$, $G = \langle (0,1,1),(1,1,1)\rangle$

(b) $F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$,
$G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$

Solució:

(a) $F + G$ és l'espai columna de la mateixa matriu que hem considerat en el primer apartat de l'exercici anterior. Com que allà ja l'hem esglaonada, podem assegurar que el rang d'aquesta matriu és 3; en conseqüència, $\dim(F+G) = 3$ i $F + G = \mathbb{K}^3$ i podem escollir, per exemple, la base canònica:

$$\mathcal{B}_{F\cap G} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

(b) Els conjunts

$$\mathcal{B}_F = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}, \quad \mathcal{B}_G = \{(1,1,1,0),(-1,0,0,1)\}$$

són base de F i de G, respectivament. Per tant,

$$F + G = \mathrm{Col}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathrm{Col}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Les columnes principals són la primera, la segona i la quarta. Per tant podem escollir aquesta base:

$$\mathcal{B}_{F\cap G} = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1),(-1,0,0,1)\}$$

Exercici 15.3. (pàgina 234) *Trobeu bases dels subespais suma i intersecció dels dos subespais $F = \langle(1,1,0,0),(2,1,1,1)\rangle$ i $G = \langle(1,0,1,1),(1,1,1,1)\rangle$.*

Solució:
Construïm la matriu A concatenant les bases dels dos subespais:
$\mathsf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$. Aplicant-hi l'algorisme de Gauss, trobem que la matriu
$\mathsf{S} = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ n'és una forma esglaonada. En conseqüència,

(a) Les columnes linealment independents són la primera, la segona i la quarta, així que, com a base del subespai suma, podem triar

$$\mathcal{B}_{F+G} = \{(1,1,0,0),(2,1,1,1),(1,1,1,1)\}$$

(b) D'altra banda, les solucions del sistema lineal $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix} = 0$ són $a_1 = \alpha$, $a_2 = 0$.
Així que els vectors de la intersecció són les combinacions lineals

$$\vec{v} = a_1(1,0,1,1) + a_2(1,1,1,1) = \alpha(1,0,1,1)$$

En definitiva, $\mathcal{B}_{F\cap G} = \{(1,0,1,1)\}$ és una base de la intersecció $\mathcal{B}_{F\cap G}$.
(Solució alternativa) Tenint en compte la fórmula de Grassmann, la dimensió de la intersecció és $\dim(F\cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 2+2-3 = 1$, així que només cal trobar un vector no nul que es trobe a la intersecció.
Ara bé, en la matriu S és clar que la columna no principal és la tercera, així que el tercer vector de A és combinació lineal dels dos primers: el vector $(1,0,1,1)$ és a la intersecció.
Per tant, $\mathcal{B}_{F\cap G} = \{(1,0,1,1)\}$ és una base de la intersecció $\mathcal{B}_{F\cap G}$.

Exercici 15.4. (pàgina 235) *Proveu que la unió dels subespais F i G només és subespai quan $F \subset G$ o $G \subset F$.*

Solució:
Evidentment, quan $F \subset G$ (o $G \subset F$), la unió coincideix amb G (o amb F), així que la unió és un subespai.
Si això no passa, aleshores, podem elegir un parell de vectors en cada subespai que no és a l'altre subespai: $\vec{u} \in F$, $\vec{u} \notin G$, $\vec{v} \in G$, $\vec{v} \notin F$. Aleshores, la suma $\vec{u} + \vec{v}$ no és al subespai F, perquè si $\vec{u} + \vec{v} \in F$, llavors $\vec{v} = -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \in F$ i això no és cert. De la mateixa manera, aquest vector tampoc és al subespai G, així que tenim dos vectors a $F \cup G$, la suma dels quals no hi pertany. Per tant, la unió $F + G$ no és un subespai.

Exercici 15.5. (pàgina 235)

(a) Trobeu les equacions del subespai $F = \langle (1,2,0,1), (2,3,0,3), (3,2,1,2) \rangle$.

(b) Trobeu una base de $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

(c) Proveu que $F + G = \mathbb{K}^4$.

(d) Determineu la dimensió de $F \cap G$.

(e) Trobeu una base de $F \cap G$.

Solució:

(a) Anomenem A la matriu que té per files els vectors del sistema generador de F:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Llavors,

$$F = \operatorname{Fil} \mathsf{A} = (\operatorname{Nul} \mathsf{A})^{\perp}$$

Així que començarem calculant l'espai nul de A, resolent el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$. Esglaonem la matriu ampliada,

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \vec{0} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Llavors,

$$F = \langle (-3, 1, 5, 1) \rangle^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : -3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0\}$$

L'equació de F és $-3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$.

(b) Com que la solució general de l'equació $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$ és

$$\vec{x} = (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(-1,0,1,0) + \alpha_3(-1,0,0,1)$$

podem escollir aquesta base:

$$\mathcal{B}_G = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$$

(c) $F + G$ es pot generar amb la unió de les bases de F i G. Per tant,

$$F + G = \operatorname{Col}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

de manera que el seu rang és 4 i $\dim(F + G) = 4$ i, per tant, $F + G = \mathbb{K}^4$,

(d) Tenint en compte la fórmula de Grassmann,

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \implies 4 = 3 + 3 - \dim(F \cap G)$$

de manera que $\dim(F \cap G) = 2$.

(e) Els vectors de la intersecció $F \cap G$ són els que satisfan simultàniament les equacions de tots dos subespais, és a dir, les solucions del sistema

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolent-lo obtenim

$$\vec{x} = \alpha_1(3,4,1,0) + \alpha_2(1,2,0,1)$$

així que podem escollir aquesta base:

$$\mathcal{B}_{F\cap G} = \{(3,4,1,0), (1,2,0,1)\}$$

EXERCICI 15.6. (pàgina 235) *Determineu si la suma dels subespais de* $\mathbb{K}^3$

$$F = \langle\{(1,1,0), (1,0,1), (1,2,-1)\}\rangle, \qquad G = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

és directa.

Solució:
Hem d'estudiar si la intersecció $F \cap G$ es redueix al vector zero. Començarem trobant una base de F: el vector $(1, 2, -1)$ és combinació lineal dels altres dos; com que aquests són clarament linealment independents, podem escollir la base

$$\mathcal{B}_F = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

D'altra banda, és evident que

$$\mathcal{B}_G = \{(1, 1, 1)\}$$

és una base de G. Per tant, un vector $\vec{u}$ de $F \cap G$ serà simultàniament combinació lineal d'una base i de l'altra:

$$\vec{u} = x_1(1, 1, 0) + x_2(1, 0, 1) = \alpha(1, 1, 1)$$

O bé

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = 2$$

Esglaonant, aquest rang és igual a

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

així que, perquè el rang siga igual 2, ha de ser $\alpha = 0$ i $\vec{u} = \vec{0}$. La intersecció és l'espai nul i, per tant, la suma és directa.

EXERCICI 15.7. (pàgina 235) *Considerem els subespais de* $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\} \\ G &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon x_1 - x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\} \\ H &= \langle (1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0) \rangle \end{aligned}$$

(a) Trobeu bases de F, G i $F + G$. (b) La suma $F + G$ és directa? Quina és la dimensió de $F \cap G$? (c) Calculeu les equacions de H. (d) Trobeu les equacions i una base del subespai $H^\perp$. (e) Estudieu si la suma $F + H$ és directa.

Solució:
(a) F i G són els conjunts de solucions de dos sistemes lineals (els espais nuls de dues matrius).

$$F = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

$$G = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$$

Així que els conjunts

$$B_F = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\},\ B_G = \{(1,1,1,0),(-1,0,0,1)\}$$

són bases, respectivament, dels subespais F i G.
La unió d'aquestes dues bases,

$$B_F \cup B_G = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1),(-1,0,0,1)\}$$

genera l'espai $F + G$. Vegem si aquest conjunt és linealment independent; això depén del rang de la matriu que té per columnes aquests vectors:

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 3$$

Com que el rang és 3, les tres columnes de la matriu són independents i el conjunt

$$B_{F+G} = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1),(-1,0,0,1)\}$$

és una base de $F + G$.

(b) Tenint en compte la fórmula de Grassmann,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 2 + 2 - 3 = 1$$

I, en conseqüència, la suma no és directa.

(c) H és l'ortogonal del subespai F, perquè

$$H = \operatorname{Fil}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \Longrightarrow H^\perp = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \operatorname{Nul}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix} = F$$

Per tant, $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_4 = 0\}$.

(d) Com que $H^\perp = F$,

$$H^\perp = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) :\ x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$

i el conjunt

$$B_{H^\perp} = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$$

és una base de $H^\perp$.

(e) La suma $F + H$ és directa, perquè $F^\perp = H$.

Exercici 15.8. (pàgina 235) *Proveu que si E i F són dos subespais de $\mathbb{K}^n$ i E i F són ortogonals entre ells, llavors la suma $E + F$ és directa.*

Solució:
L'únic que cal provar és que $E \cap F = \{\vec{0}\}$. Però, si $\vec{u} \in E \cap F$, llavors $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ perquè és el producte d'un vector de F per un de G, i l'únic vector que té aquesta propietat és $\vec{u} = \vec{0}$.

Lliçó 16. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals

Exercici 16.1. (pàgina 244) *Calculeu l'espai ortogonal de* $F = \langle\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}\rangle$ *i calculeu les projeccions ortogonals del vector* $\vec{v} = (2,1,2,1)$ *sobre* F *i sobre* $F^{\perp}$.

Solució:

Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ llavors, $F = \operatorname{Col}\mathsf{A}$. Per tant,

$$F^{\perp} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}^* = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \langle(1,-1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$$

Per trobar la projecció ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre F, en primer lloc resolem el sistema $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{v}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\vec{x} = (1,1)$$

Així que les projeccions del vector $\vec{v}$ sobre F i sobre $F^{\perp}$ són

$$p_{_F}(\vec{v}) = \mathsf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$p_{_{F^{\perp}}}(\vec{v}) = \vec{v} - p_{_F}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 16.2. (pàgina 244) *Calculeu la projecció ortogonal del vector* $\vec{v} = (1,1,1,1)$ *sobre el pla*

$$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; x_2 + x_3 = 0\}$$

Solució:

F és l'espai nul de la matriu $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Però ens interessa representar-lo com un espai columna:

$$F = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-2, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$$

Així que F és l'espai columna de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Resolem les equacions normals:

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{u}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En conseqüència, la projecció ortogonal de $\vec{v}$ sobre F és

$$p_F(\vec{v}) = \mathsf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solució alternativa: F és l'espai nul de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, així que, com que la projecció ortogonal $p_F(\vec{v})$ és un vector de F, $\mathsf{A}p_F(\vec{v}) = 0$. D'altra banda, $\vec{v} - p_F(\vec{v})$ és ortogonal a $F = \text{Nul}\,\mathsf{A}$; però l'ortogonal de l'espai nul és l'espai fila, és a dir, que $\vec{v} - p_F(\vec{v}) \in \text{Fil}\,\mathsf{A}$. Per tant, per a algun vector $\vec{u}$,

$$\vec{v} - p_F(\vec{v}) = \mathsf{A}^*\vec{u} \tag{16.1}$$

Multiplicant-hi A obtenim

$$\mathsf{A}\left(\vec{v} - p_F(\vec{v})\right) = \mathsf{A}\mathsf{A}^*\vec{u}$$
$$\mathsf{A}\vec{v} = \mathsf{A}\mathsf{A}^*\vec{u}$$

En altres paraules, per trobar la projecció ortogonal, en primer lloc haurem de resoldre el sistema lineal

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^*\vec{u} = \mathsf{A}\vec{v}$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solució és $\vec{u} = (0, 1)$. Finalment, de la igualtat (16.1), deduïm

$$p_F(\vec{v}) = \vec{v} - \mathsf{A}^*\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\\1 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Exercici 16.3. (pàgina 244) *Calculeu les projeccions ortogonals del vector* $\vec{v} = (2, 1, -3)$ *sobre el subespai* $F = \langle(1, 1, 1), (2, 1, -1), (1, 0, -2)\rangle$ *i sobre* $F^\perp$.

Solució:
F és l'espai columna de la matriu $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & -1 & -2\end{bmatrix}$. Ara bé, els tres vectors que generen F són linealment dependents (el primer és la diferència dels altres dos), així que F també és l'espai columna de $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\\-1 & -2\end{bmatrix}$. Resolem el sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{v}$,

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\\-1 & -2\end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}6 & 4\\4 & 5\end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix}$$
$$\vec{x} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}8\\16\end{bmatrix}$$

Així que la projecció ortogonal sobre F és $\vec{v}_F = \mathsf{A}\frac{1}{14}(8, 16) = \frac{1}{7}(16, 4, -20)$ i, la projecció ortogonal sobre $F^\perp$, $\vec{v}_{F^\perp} = (2, 1, -3) - \frac{1}{7}(16, 4, -20)$.

Exercici 16.4. (pàgina 244) *Comproveu que el conjunt* $S = \{\frac{1}{15}(-5, 14, -2), \frac{1}{15}(10, 5, 10)\}$ *és ortonormal i calculeu la projecció ortogonal del vector* $\vec{v} = (-3, 2, -1)$ *sobre* $F = \langle S\rangle$.

Solució:
El conjunt S és ortonormal perquè

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-5 & 14 & -2\\10 & 5 & 10\end{bmatrix}\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-5 & 10\\14 & 5\\-2 & 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Per tant, la projecció ortogonal és

$$
\begin{aligned}
p_F = \Big(\frac{1}{15}(-5,14,-2)\cdot(-3,2,-1)\Big)\frac{1}{15}(-5,14,-2) \\
+\Big(\frac{1}{15}(10,5,10)\cdot(-3,2,-1)\Big)\frac{1}{15}(10,5,10) \\
= 3\frac{1}{15}(-5,14,-2) - 2\frac{1}{15}(10,5,10) = \frac{1}{15}(-35,32,-26)
\end{aligned}
$$

Exercici 16.5. (pàgina 244) *Siga $F = \mathrm{Col}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$. Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{u} = (1,1,1,1)$ sobre $F^{\perp}$.*

Solució:
Les columnes d'aquesta matriu són ortonormals (es comprova fàcilment). Per tant,

$$
\begin{aligned}
p_{F^\perp}(\vec{u}) &= \vec{u} - p_F(\vec{u}) \\
&= (1,1,1,1) - \left(\frac{1}{2}(1,1,1,-1)\cdot(1,1,1,1)\right)\frac{1}{2}(1,1,1,-1) \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2}(-1,1,-1,-1)\cdot(1,1,1,1)\right)\frac{1}{2}(-1,1,-1,-1) \\
&= (1,1,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,-1) + \frac{1}{2}(-1,1,-1,-1) \\
&= (0,1,0,1)
\end{aligned}
$$

Exercici 16.6. (pàgina 244) *Siga F la recta generada pel vector $\vec{u} = (1,2,3)$.*

(a) Calculeu les projeccions sobre F i sobre $F^\perp$ del vector $\vec{b} = (3,2,1)$.

(b) La funció $f(\alpha) = d((3,2,1), \alpha(1,2,3))$ mesura la distància del vector $(3,2,1)$ a cada punt de la recta F. Calculeu el mínim d'aquesta funció.

(c) Compareu els resultats dels dos apartats anteriors i interpreteu-los geomètricament.

Solució:

(a) En primer lloc, normalitzarem el vector $\vec{u}$: siga $\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$. Les projeccions són aquestes:

$$
\begin{aligned}
p_F(\vec{b}) &= \left(\vec{q}\cdot\vec{b}\right)\vec{b} = \frac{10}{\sqrt{14}}\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3) = \frac{5}{7}(1,2,3) \\
p_{F^\perp}(\vec{b}) &= \vec{b} - p_F(\vec{v}) = (3,2,1) - \frac{5}{7}(1,2,3) = \frac{1}{7}(16,4,-8)
\end{aligned}
$$

(b) La funció f és

$$f(\alpha) = d((3,2,1), \alpha(1,2,3)) = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (2-2\alpha)^2 + (1-3\alpha)^2}$$

Com que l'arrel quadrada és creixent, el mínim de f s'assoleix al mateix punt que el del seu quadrat: en comptes del mínim de f cercarem el de $g = f^2$, és a dir,

$$g(\alpha) = (3-\alpha)^2 + (2-2\alpha)^2 + (1-3\alpha)^2$$

Això ho farem per mètodes analítics. Calculem la derivada i la igualem a zero:

$$\begin{aligned} g'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 2(3-\alpha)(-1) + 2(2-2\alpha)(-2) + 2(1-3\alpha)(-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow -20 + 28\alpha = 0 \end{aligned}$$

així que la derivada s'anul·la en $\alpha = 5/7$. La segona derivada és $g''(\alpha) = 28$. I, com que $g(\alpha)$ és una funció quadràtica i $g''(5/7) > 0$, la funció té el mínim en $\alpha = 5/7$.

Això vol dir que la distància del vector $(3,2,1)$ a la recta F és $f(5/7)$:

$$\begin{aligned} d((3,2,1), F) &= \min_{\alpha} d((3,2,1), \alpha(1,2,3)) \\ &= f(5/7) = \sqrt{\left(3 - \frac{5}{7}\right)^2 + \left(2 - 2\frac{5}{7}\right)^2 + \left(1 - 3\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{336} \end{aligned}$$

(c) El mínim de la funció f s'assoleix quan $\alpha = 5/7$, és a dir, que el vector de la recta F més pròxim al vector $\vec{b}$ és $\vec{w} = \frac{5}{7}(1,2,3)$.

Aquest vector és la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre la recta F, $p_F(\vec{b})$: el vector de F més pròxim a $\vec{b}$ és la projecció ortogonal $p_F(\vec{b})$.

A més a més, la distància entre F i $\vec{b}$ és la norma de la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre $F^{\perp}$.

Lliçó 17. Aproximació per mínims quadrats

Exercici 17.1. (pàgina 254) *Trobeu la matriu de la projecció ortogonal sobre el subespai*
$F = \langle (1,1,0,0),(0,1,1,0)\rangle$ *i el vector de* F *més pròxim a* $\vec{v} = (2,1,2,1)$. *Quina és la distància del vector* $\vec{v}$ *al subespai* F*?*

Solució:

El subespai F és l'espai columna de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, i, com que les columnes de A són linealment independents, la matriu de la projecció ortogonal sobre F és

$$\mathsf{A}(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^* = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de F més pròxim a $\vec{v}$ és la projecció ortogonal de $\vec{v}$ sobre F:

$$p_F(\vec{v}) = \mathsf{A}(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^*\vec{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalment, la distància entre $\vec{v}$ i el subespai F serà:

$$d(\vec{v},F) = \|\vec{v} - p_F(\vec{v})\| = \|(2,1,2,1) - (1,2,1,0)\| = 2$$

Exercici 17.2. (pàgina 254) *Calculeu la distància del vector* $\vec{v} = (2,1,-3)$ *al subespai* $F = \mathrm{Col}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Solució:

Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ llavors, podem calcular la projecció del vector $\vec{v}$ sobre el subespai

F resolent el sistema lineal $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{v}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

La projecció ortogonal és $p_F(\vec{v}) = \mathsf{A}\vec{x} = \frac{1}{7}(16, 4, -20)$. I, la distància del vector $\vec{v}$ al subespai F,

$$d(\vec{v}, F) = \|\vec{v} - p_F(\vec{v})\| = \left\| \frac{1}{7}(-2, 3, -1) \right\| = \frac{1}{7}\sqrt{14}$$

Exercici 17.3. (pàgina 254) *Calculeu la solució per mínims quadrats del sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$*, on*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quin és l'error de mínims quadrats?

Solució:
La solució per mínims quadrats és la solució del sistema compatible $\mathsf{A}^*\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^*\vec{b}$, és a dir, $\vec{x} = \dfrac{1}{30}(5, 14)$. I, l'error de mínims quadrats, $\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\| = \frac{1}{10}\sqrt{6}$.

Exercici 17.4. (pàgina 254) *De la funció $y = f(x)$ coneixem la taula de valors següent:*

x	0	1	2	3	4
y	-1	1	-1	-7	-17

Busqueu els polinomis $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ de graus 1, 2 i 3 que aproximen millor, en el sentit dels mínims quadrats, aquesta funció. Calculeu en cada cas els errors de mínims quadrats i analitzeu els resultats.

Solució:
El polinomi de grau 1 serà la recta de regressió, és a dir, la solució per mínims quadrats del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}$$

Les equacions normals són

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -25 \\ -90 \end{bmatrix}$$

La solució d'aquest sistema lineal és $\vec{x} = (3, -4)$. Per tant, la recta de regressió és

$$y = 3 - 4x$$

i l'error de mínims quadrats,

$$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = 44{,}45\ldots$$

El polinomi de grau dos $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ el podem obtenir resolent el problema de mínims quadrats

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix} \tag{17.1}$$

Que és equivalent al sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -25 \\ -90 \\ -338 \end{bmatrix}$$

I la solució és $\vec{x} = (-1, 4, -2)$, així que el polinomi serà $y = -1 + 4x - 2x^2$ i l'error de mínims quadrats,

$$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

Que l'error siga zero vol dir que el sistema (17.1) és compatible, de manera que la solució de mínims quadrats és realment una solució del sistema lineal. Això significa que la paràbola d'equació $y = -1 + 4x - 2x^2$ passa per tots els punts de la taula.
No cal trobar el polinomi de grau tres, perquè el resultat serà $y = -1 + 4x - 2x^2 + 0x^3$. Per què?

Exercici 17.5. (pàgina 255) *Un conductor vol estudiar el consum de benzina en funció de la velocitat. Per això, observa els consums del seu trajecte habitual per l'autovia, recorrent-lo a diferents velocitats. Aquests són els resultats que obté:*

velocitat mitjana (km/h)	90	105	117	120
consum (litres per km*)*	6	6,5	7,5	8,2

Calculeu l'equació $y = a + bx$ de la recta que aproxima, en el sentit dels mínims quadrats, aquesta taula (x representa la velocitat mitjana i y el consum). Quin consum es pot esperar a una velocitat mitjana de 130 km/h*?*

Solució:
Cerquem la solució per mínims quadrats del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 90 \\ 1 & 105 \\ 1 & 117 \\ 1 & 120 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6{,}5 \\ 7{,}5 \\ 8{,}2 \end{bmatrix}$$

És a dir, la solució de

$$\begin{bmatrix} 1 & 90 \\ 1 & 105 \\ 1 & 117 \\ 1 & 120 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 90 \\ 1 & 105 \\ 1 & 117 \\ 1 & 120 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 90 \\ 1 & 105 \\ 1 & 117 \\ 1 & 120 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 6 \\ 6{,}5 \\ 7{,}5 \\ 8{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 432 \\ 432 & 47214 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 28{,}2 \\ 3084 \end{bmatrix}$$

Aquesta solució és $\vec{x} \approx (-0{,}38, 0{,}07)$, així que l'equació de la recta és $y = -0{,}38 + 0{,}07x$.
El consum aproximat a 130 km/h és $y = -0{,}38 + 0{,}07 \cdot 130 = 8{,}72$ litres per quilòmetre.

Exercici 17.6. (pàgina 255) *Un professor decideix que el mètode habitual de qualificació, la mitjana aritmètica de les notes dels exàmens, no és bastant justa. Ell pensa que cada alumne té la seua nota* natural*, la que mereix tenint en compte el seu esforç i els seus coneixements i que les notes de cada examen es desvien d'aquesta nota per diversos motius, de manera que la nota* natural *de l'alumne* *ha de ser el nombre més pròxim a totes les notes parcials, en el sentit dels mínims quadrats, així que aplica aquest mètode.*

Un estudiant té aquestes notes en les cinc proves que s'han fet al llarg del curs: $7, 7, 3, 5, 9$. *Quina és la mitjana aritmètica d'aquestes notes? Quina nota li correspon si fem servir el criteri dels mínims quadrats?*

Solució:
La mitjana aritmètica és

$$\overline{x} = \frac{7+7+3+5+9}{5} = 6{,}2$$

Des del punt de vista dels mínims quadrats es tracta de trobar el nombre X que aproxima la solució del sistema (clarament incompatible)

$$\begin{aligned} X &= 7 \\ X &= 7 \\ X &= 3 \\ X &= 5 \\ X &= 9 \end{aligned} \qquad \text{és a dir} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

L'equació normal és

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$
$$5X = 31$$

així que $X = 31/5 = 6{,}2$.

Exercici 17.7. (pàgina 255) *Una matriu* $n \times n$ P *és* idempotent *(o* matriu de projecció*) si* $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$.

(a) Proveu que la matriu P *és idempotent si i només si* $\mathbb{K}^n = \operatorname{Col}\mathsf{P} \oplus \operatorname{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$.

(b) Proveu que, si la matriu P *és idempotent i hermítica llavors,* $\operatorname{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$ *és l'ortogonal de* $\operatorname{Col}\mathsf{P}$.

(c) Proveu que, si el rang de la matriu $m \times n$ A *és* n, *llavors la matriu de la projecció ortogonal sobre* $\operatorname{Col}\mathsf{A}$, $\mathsf{P} = \mathsf{A}\left(\mathsf{A}^*\mathsf{A}\right)^{-1}\mathsf{A}^*$, *és idempotent i hermítica.*

Solució:

(a) Si $\vec{u}$ és un vector de $\mathbb{K}^n$, llavors $\vec{u} = \mathsf{P}\vec{u} + (\vec{u} - \mathsf{P}\vec{u})$. Com que $\mathsf{P}\vec{u} \in \operatorname{Col}\mathsf{P}$ i $\vec{u} - \mathsf{P}\vec{u} = (\mathrm{I} - \mathsf{P})\vec{u} = \in \operatorname{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$, podem assegurar que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Col}\mathsf{P} + \operatorname{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$, per a qualsevol matriu $n \times n$, P.

Ara provarem que P és idempotent si i només si la suma és directa: un vector $\vec{u}$ es troba la intersecció $\operatorname{Col}\mathsf{P} \cap \operatorname{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$ quan hi ha dos vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ tals que

$\vec{u} = \mathsf{P}\vec{v}_1$ i també $\vec{u} = (\mathrm{I} - \mathsf{P})\vec{v}_2$: $\vec{u} = \mathsf{P}\vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \mathsf{P}\vec{v}_2$. Llavors, multiplicant-hi P, tindrem: $\mathsf{P}^2\vec{v}_1 = \mathsf{P}\vec{v}_2 - \mathsf{P}^2\vec{v}_2$. Així que, si P és idempotent, $\mathsf{P}\vec{v}_1 = \mathsf{P}\vec{v}_2 - \mathsf{P}\vec{v}_2 = \vec{0}$. Per tant, $\vec{u} = \mathsf{P}\vec{v}_1 = \vec{0}$. Això prova que si P és idempotent, llavors, la suma és directa.

Recíprocament, per a qualsevol vector $\vec{u}$,

$$\mathsf{P}\vec{u} = \underbrace{\mathsf{P}\vec{u}}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{P}} + \underbrace{\vec{0}}_{\mathrm{Col}(\mathrm{I}-\mathsf{P})} = \underbrace{\mathsf{P}^2\vec{u}}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{P}} + \underbrace{\mathsf{P}\vec{u} - \mathsf{P}^2\vec{u}}_{\mathrm{Col}(\mathrm{I}-\mathsf{P})}$$

Així que, si la suma és directa (un vector només es pot escriure d'una manera com a suma d'un de $\mathrm{Col}\,\mathsf{P}$ i un altre de $\mathrm{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$), $\mathsf{P}\vec{u} = \mathsf{P}^2\vec{u}$ i P és idempotent.

(b) Hem de provar que els productes escalars dels vectors de $\mathrm{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$ pels de $\mathrm{Col}(\mathsf{P})$ són nuls:

$$\begin{aligned}(\mathrm{I} - \mathsf{P})\vec{u} \cdot \mathsf{P}\vec{v} &= \big((\mathrm{I} - \mathsf{P})\vec{u}\big)^* \mathsf{P}\vec{v} = \vec{u}^*(\mathrm{I} - \mathsf{P})^*\mathsf{P}\vec{v} \\ &= \vec{u}^*(\mathrm{I} - \mathsf{P})\mathsf{P}\vec{v} && \text{(perquè } \mathsf{P} \text{ és hermítica)} \\ &= \vec{u}^*\mathsf{P}\vec{v} - \vec{u}^*\mathsf{P}^2\vec{v} = \vec{0} && \text{(perquè } \mathsf{P} \text{ és idempotent)}\end{aligned}$$

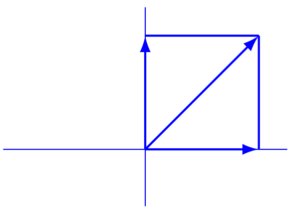
(c) La matriu P és idempotent, perquè $\mathsf{P}^2 = \mathsf{A}\,\underbrace{(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\,\mathsf{A}^*\mathsf{A}}_{\mathrm{I}}\,(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\,\mathsf{A}^* = \mathsf{P}$.

I també és hermítica:

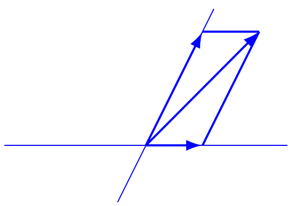
$$\begin{aligned}\mathsf{P}^* = \left(\mathsf{A}\,(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\,\mathsf{A}^*\right)^* &= \mathsf{A}\left((\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\right)^*\mathsf{A}^* \\ &= \mathsf{A}\left((\mathsf{A}^*\mathsf{A})^*\right)^{-1}\mathsf{A}^* = \mathsf{A}\,(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\,\mathsf{A}^* = \mathsf{P}\end{aligned}$$

☞ *Si* P *és una matriu idempotent, el vector* $\mathsf{P}\vec{u}$ *és la* projecció del vector $\vec{u}$ sobre el subespai $\mathrm{Col}\,\mathsf{P}$ paral·lelament *a* $\mathrm{Col}(\mathrm{I} - \mathsf{P})$.

☞ *Si, a més a més,* P *és hermítica, la projecció és* ortogonal*; si no ho és, llavors és una* projecció obliqua.



Projecció ortogonal



Projecció obliqua

Lliçó 18. El mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt i la factorització QR

Exercici 18.1. (pàgina 266) *Apliqueu l'algorisme de Gram-Schmidt i trobeu una factorització QR de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Solució:
Anomenem $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ les columnes de la matriu A. Com que són linealment independents, $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és una base del subespai $F = \operatorname{Col}\mathsf{A}$.

Primer pas: obtenim una base ortogonal:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 = (1,1,1,1) & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 &= 4 & \alpha_{1,2} &= \frac{8}{4} = 2 \\
& & \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 &= 8 & \alpha_{1,3} &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\
& & \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3 &= 10 & & \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 &= 4 & \alpha_{2,3} &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\
&= (3,1,1,3) - 2(1,1,1,1) & \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3 &= 6 & & \\
&= (1,-1,-1,1) & & & & \\
\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \alpha_{1,3}\vec{v}_1 - \alpha_{2,3}\vec{v}_2 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 &= 4 & & \\
&= (5,0,2,3) - \frac{5}{2}(1,1,1,1) & & & & \\
&\quad - \frac{3}{2}(1,-1,-1,1) & & & & \\
&= (1,-1,1,-1) & & & &
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ és una base ortogonal de F.

Segon pas: Convertim els vectors de $\mathcal{B}_2$ en unitaris:

$$\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \\
\vec{q}_2 &= \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1) \\
\vec{q}_3 &= \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_3 = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ és una base ortonormal de F.

La matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix}$ es pot factoritzar com $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$, on les columnes de Q són els vectors de la base $\mathcal{B}_2$ i:

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} \|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,2}\|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,3}\|\vec{v}_1\| \\ 0 & \|\vec{v}_2\| & \alpha_{2,3}\|\vec{v}_2\| \\ 0 & 0 & \|\vec{v}_3\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

és a dir,

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{R}}$$

Exercici 18.2. (pàgina 266) *Calculeu la projecció ortogonal del vector* $\vec{b} = (3, 5, 7, -3)$ *sobre l'espai columna de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Solució:
A l'exercici anterior hem trobat una factorització QR de la matriu A. D'aquí es dedueix que les columnes de la matriu Q, és a dir, els vectors

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \quad \vec{q}_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$$

formen una base ortonormal de l'espai columna de la matriu A. En conseqüència,

$$p_{\mathrm{Col}\,\mathsf{A}}(\vec{b}) = (\vec{q}_1^{\,*}\vec{b})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2^{\,*}\vec{b})\vec{q}_2 + (\vec{q}_3^{\,*}\vec{b})\vec{q}_3 = (2, 4, 8, -2)$$

Exercici 18.3. (pàgina 266) *Resoleu el problema de mínims quadrats* $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$*, fent servir la descomposició QR de l'exercici 18.1. Determineu també l'error de mínims quadrats en aquest problema.*

Solució:
La solució del problema de quadrats mínims coincideix amb la solució del sistema lineal $\mathsf{R}\vec{x} = \mathsf{Q}^*\vec{b}$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\vec{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La solució d'aquest sistema és $\vec{x} = (10, -6, 2)$ i l'error de mínims quadrats $e = \left\| b - \mathsf{Q}\mathsf{Q}^*\vec{b} \right\| = 2$.

Exercici 18.4. (pàgina 266) *Trobeu una factorització QR de la matriu*
$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 & -3 \\ -3 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solució:
Les quatre columnes de la matriu A, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$, són linealment independents, així que podem aplicar-hi l'algorisme de Gram-Schmidt.

Primer pas: obtenim una base ortogonal:

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (4,-3,0,0) && \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 = 25 && \alpha_{1,2} = 0\\
& && \vec{v}_1\cdot\vec{u}_2 = 0 && \alpha_{1,3} = -1\\
& && \vec{v}_1\cdot\vec{u}_3 = -1 && \alpha_{1,4} = 0\\
& && \vec{v}_1\cdot\vec{u}_4 = 0 && \\
&\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha_{1,2}\vec{v}_1 = (3,4,0,0) && \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 = 25 && \alpha_{2,3} = 0\\
& && \vec{v}_2\cdot\vec{u}_3 = 0 && \alpha_{2,4} = -1\\
& && \vec{v}_2\cdot\vec{u}_4 = -1 && \\
&\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \alpha_{1,3}\vec{v}_1 - \alpha_{2,3}\vec{v}_2 && \vec{v}_3\cdot\vec{v}_3 = 25 && \alpha_{3,4} = 0\\
&\quad = (-4,3,4,3) + (4,-3,0,0) && \vec{v}_3\cdot\vec{u}_4 = 0 && \\
&\quad = (0,0,4,3) && && \\
&\vec{v}_4 = \vec{u}_4 - \alpha_{1,4}\vec{v}_1 - \alpha_{2,4}\vec{v}_2 - \alpha_{3,4}\vec{v}_3 && \vec{v}_4\cdot\vec{v}_4 = 25 && \\
&\quad = (-3,-4,-3,4) + (3,4,0,0) && && \\
&\quad = (0,0,-3,4) && &&
\end{aligned}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ és una base ortogonal.

Segon pas: Dividim cada vector per la seua norma, per fer-los unitaris,

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{5}\vec{v}_1 \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_2 \qquad \vec{q}_3 = \frac{1}{5}\vec{v}_3 \qquad \vec{q}_4 = \frac{1}{5}\vec{v}_4$$

$\mathcal{B}' = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ és una base ortonormal de F.
La matriu A es pot factoritzar com $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$, on les columnes de Q són els vectors de la base $\mathcal{B}'$ i:

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} \|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,2}\|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,3}\|\vec{v}_1\| & \alpha_{1,4}\|\vec{v}_1\| \\ 0 & \|\vec{v}_2\| & \alpha_{2,3}\|\vec{v}_2\| & \alpha_{2,4}\|\vec{v}_2\| \\ 0 & 0 & \|\vec{v}_3\| & \alpha_{3,4}\|\vec{v}_3\| \\ 0 & 0 & & 0\,\|\vec{v}_4\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

és a dir,

$$\mathsf{A} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathsf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathsf{R}}$$

Exercici 18.5. (pàgina 266) ***(Una versió alternativa de la factorització QR)*** *Suposem que* $\mathsf{A} = \mathsf{Q}_1\mathsf{R}_1$ *és una factorització QR de la matriu* $m \times n$ A. *Demostreu que* $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$, *on* Q *és una matriu unitària* $m \times m$ *i* $\mathsf{R} = \begin{bmatrix} \mathsf{R}_1 \\ \mathsf{O} \end{bmatrix}$.

Solució:
Si $\mathsf{A} = \mathsf{Q}_1\mathsf{R}_1$ és una factorització QR de la matriu A, llavors el conjunt $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$ és ortonormal.
Si $F = \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n \rangle$ i cerquem una base ortonormal de $F^\perp$, $\{\vec{q}_{n+1}, \vec{q}_{n+2}, \dots, \vec{q}_m\}$ llavors, la unió, $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_m\}$, és una base ortonormal de $\mathbb{K}^m$.
Així que, si ara construïm la matriu $\mathsf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \vec{q}_{n+1} & \vec{q}_{n+2} & \cdots & \vec{q}_m \end{bmatrix}$, tindrem que

$$\mathsf{A} = \mathsf{Q}_1\mathsf{R}_1 = \mathsf{Q}_1\mathsf{R}_1 + \mathsf{Q}_2\mathsf{O} = \begin{bmatrix} \mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{R}_1 \\ \mathsf{O} \end{bmatrix}$$

on $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_2 \end{bmatrix}$ és una matriu unitària $m \times m$.

Exercici 18.6. (pàgina 266) *Factoritzeu la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *com* $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$, *on* Q *és una matriu ortogonal i* $\mathsf{R} = \begin{bmatrix} \mathsf{R}_1 \\ \mathsf{O} \end{bmatrix}$ *amb* R_1 *triangular superior invertible.*

Solució:
A l'exercici 18.1. hem trobat que $\mathsf{A} = \mathsf{Q}_1\mathsf{R}_1$ amb

$$\mathsf{Q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si resolem el sistema lineal $\mathsf{Q}^\mathsf{T}\vec{x} = \vec{0}$ obtenim que els vectors ortogonals a les columnes de Q són els de la forma $\vec{x} = \alpha(-1, -1, 1, 1)$.

Així que la matriu $\mathsf{Q} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ és ortogonal i

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LLIÇÓ 19. ESPAIS VECTORIALS

EXERCICI 19.1. (pàgina 277) *Estudieu si els conjunts F següents són o no subespais dels espais vectorials E que s'indiquen en cada cas.*

(a) F és el conjunt de les matrius quadrades 2×2 A *per a les quals* $a_{11} = a_{22}$ *i* $a_{12} = 2a_{21}$. $E = \mathcal{M}_{2\times 2}$.

(b) F és el conjunt de les matrius quadrades 2×2 A *per a les quals* $a_{11} = a_{22} = 0$ *i* $a_{12} = a_{21} = 2$. $E = \mathcal{M}_{2\times 2}$.

(c) F és el conjunt dels polinomis de grau parell. $E = \mathbb{R}[x]$.

(d) F és el conjunt dels polinomis de la forma $p(x) = ax + bx^2$ *on a i b són constants qualssevol.* $E = \mathbb{R}_1[x]$.

(e) F és el conjunt dels polinomis de la forma $p(x) = 2 + 2ax$ *on a és una constant qualsevol.* $E = \mathbb{R}_1[x]$.

Solució:

(a) Si A i B són dues matrius de F, llavors les podem escriure com

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} c & 2d \\ d & c \end{bmatrix}$$

així que una combinació lineal d'aquestes dues matrius serà

$$\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & 2(\alpha b + \beta d) \\ \alpha b + \beta d & \alpha a + \beta c \end{bmatrix}$$

que també és un element de F. Com que $\mathsf{O} \in F$, F és un subespai de E.

(b) Aquest conjunt F no és un subespai perquè la matriu zero no hi és.[1]

(c) Aquest conjunt no és un subespai de $\mathbb{R}[x]$, perquè la suma de dos polinomis de grau parell no té perquè ser també de grau parell. Per exemple,

$$(1 + x + x^2) + (2 - x^2) = 3 + x$$

(d) Aquest conjunt F és un subespai perquè el polinomi zero es pot escriure com $0 = 0x + 0x^2$ i, si en tenim dos elements, $p_1(x) = a_1x + b_1x^2$ i $p_2(x) = a_2x + b_2x^2$ i dos escalars α i β, llavors

$$\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) = (\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)x^2 \in F$$

(e) Aquest no ho és, perquè, si tenim dos polinomis $p(x) = 2 + 2ax$ i $q(x) = 2 + 2bx$, llavors $p(x) + q(x) = 4 + 2(a + b)x \notin F$.

---

[1] En realitat, el conjunt F només conté la matriu $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Exercici 19.2. (pàgina 277) *Una funció f és una solució de l'*equació diferencial *$y'' + y = 0$ en $\mathbb{R}$ si, per a tot $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$.*

(a) Comproveu que les funcions $\cos x$ i $\sin x$ són solucions d'aquesta equació diferencial.

(b) Proveu que el conjunt S de totes les funcions que són solucions d'aquesta equació diferencial és un subespai vectorial de l'espai $C_\infty(\mathbb{R})$.

(c) Deduïu que totes les funcions de la forma $f(x) = \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x$ també en són solució.

Solució:

(a) Com que $\cos'' x = -\cos x$, és clar que $\cos'' x + \cos x = 0$ (i exactament igual amb la funció sinus).

(b) Les solucions d'aquesta funció són elements de $C_\infty(\mathbb{R})$, perquè, si f n'és solució, del fet que $f''(x) = -f(x)$ es dedueix, en primer lloc que f és almenys dues vegades derivable; però, com que $f'' = -f$, llavors f'' torna a ser derivable i $f''' = -f'$; d'aquí es dedueix que f''' és derivable i així (successivament o -si volem- per inducció) es dedueix l'existència de les derivades de qualsevol ordre.

Per justificar que és un subespai, notem que la funció $f(x) = 0$ és clarament una solució i que si f_1 i f_2 són solucions, llavors,

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))'' + (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) \\
&= \alpha_1 f_1''(x) + \alpha_2 f_2''(x) + \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \\
&= \alpha_1 \left(f_1''(x) + f_1(x)\right) + \alpha_2 \left(f_2''(x) + f_2(x)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

així que $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ també és solució de l'equació.

(c) Això, en realitat ja ho hem demostrat: com que el conjunt de solucions és un subespai vectorial de $C_\infty(\mathbb{R})$, la combinació lineal de dues solucions també és una solució.

☞ *En realitat, totes les solucions de l'equació diferencial $y'' + y = 0$ són de la forma $\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x$, però això no es pot provar amb arguments d'àlgebra lineal.*

Exercici 19.3. (pàgina 277) *Estudieu si les successions*

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\} \\
\{b_n\} &= \{1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots\} \\
\{c_n\} &= \{1, 3, 9, \dots, 3^n, \dots\}
\end{aligned}$$

són linealment independents.

Solució:
Si una combinació lineal d'aquestes tres successions és nul·la, tindrem

$$\begin{aligned} 1\alpha + 1\beta + 1\gamma &= 0 \\ 1\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ 1\alpha + 4\beta + 9\gamma &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

I, com que la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ és invertible, això significa que $\alpha = \beta = \gamma$. Per tant, les tres successions són linealment independents.

Exercici 19.4. (pàgina 277) *Estudieu si els conjunts de polinomis*

$$\mathcal{P}_1 = \{x, 1 + 2x, 1 - 3x, 1 - 4x^2\}, \qquad \mathcal{P}_2 = \{1 + x, 1 + 2x, x - x^2\}$$

són linealment independents. En cas que no ho siguen, trobeu alguna relació de dependència no trivial entre els seus elements.

Solució:
El conjunt $\mathcal{P}_1$ és linealment dependent, perquè hi tinguem una relació de dependència,

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \alpha_2(1 + 2x) + \alpha_3(1 - 3x) + \alpha_4(1 - 4x^2) &= 0 \\ (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3)x + 4\alpha_4 x^2 &= 0 \end{aligned}$$

els pesos han de ser solucions del sistema lineal

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 \qquad &= 0 \\ 4\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

Aquest sistema és indeterminat, així que té solucions distintes de la trivial.
Per trobar-hi una relació de dependència hem de cercar alguna solució no trivial del sistema. Per exemple, la solució $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 0$, ens proporciona la relació

$$-5x + 1(1 + 2x) - 1(1 - 3x) + 0(1 - 4x^2) = 0$$

En canvi, el conjunt $\mathcal{P}_2$ és independent, perquè si

$$\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 + 2x) + \alpha_3(x - x^2) = 0$$

tindrem

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)x - \alpha_3 x^2 = 0$$

així que

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \quad &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

I, com que aquest sistema és determinat, només admet la solució $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Exercici 19.5. (pàgina 278) *Estudieu si el conjunt de matrius* 2×2*,*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

és linealment independent. És possible ampliar *aquest conjunt, afegint una matriu* A*, de manera que el nou conjunt continue essent linealment independent?*

Solució:
Hem d'estudiar el nombre de solucions de l'equació

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Equació que és equivalent al sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I, com que la matriu de coeficients d'aquest sistema té rang quatre, el sistema (i l'equació original) només té la solució trivial. En conseqüència, el conjunt $\mathcal{A}$ és linealment independent.
No s'hi pot afegir cap matriu conservant la independència, perquè aquesta independència implicaria l'existència d'una matriu 4x5 amb el rang igual a cinc.

Exercici 19.6. (pàgina 278) *Estudieu si el conjunt de funcions* $\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ *és linealment independent.*

Solució:
Hem de discutir l'equació

$$\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos 2x + \alpha_4 \sin 2x = 0$$

calculem les derivades successives, primera, segona i tercera

$$\begin{aligned} -\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x - 2\alpha_3 \sin 2x + 2\alpha_4 \cos 2x &= 0 \\ -\alpha_1 \cos x - \alpha_2 \sin x - 4\alpha_3 \cos 2x - 4\alpha_4 \sin 2x &= 0 \\ \alpha_1 \sin x - \alpha_2 \cos x + 8\alpha_3 \sin 2x - 8\alpha_4 \cos 2x &= 0 \end{aligned}$$

Substituint $x = \pi$ en aquestes quatre equacions obtenim el sistema lineal

$$\begin{aligned}
-\alpha_1 \qquad\quad \alpha_3 \qquad\quad &= 0\\
-\alpha_2 \qquad\quad 2\alpha_4 &= 0\\
\alpha_1 \qquad -4\alpha_3 \qquad\quad &= 0\\
\alpha_2 \qquad\quad -8\alpha_4 &= 0
\end{aligned}$$

que té la solució única $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Així que aquest conjunt és linealment independent.

Lliçó 20. Base d'un espai vectorial

Exercici 20.1. (pàgina 292) *Trobeu una base de cadascun dels espais següents.*
(a) F és el conjunt de les matrius quadrades 2×2, A, per a les quals $a_{11} = a_{22}$ i $a_{12} = 2a_{21}$.
(b) F és el conjunt de les matrius simètriques 2×2.
(c) F és el conjunt de les matrius antisimètriques 2×2.
(d) F és el conjunt dels polinomis de grau parell.
(e) F és el conjunt dels polinomis de la forma $p(x) = a + 2ax$ on a és una constant qualsevol.

Solució:

(a) Si A és una matriu de F, llavors la podem escriure com

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

així que el conjunt (clarament independent) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ és una base de F.

(b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(d) $\mathcal{B} = \{x^2, x^4, \dots, x^{2n}, \dots\}$

(e) $\mathcal{B} = \{1 + 2x\}$.

Exercici 20.2. (pàgina 292) *Trobeu una base del subespai* $\langle 1+x, 1-x^2, x+x^2, 2+x-x^2 \rangle$.

Solució:
El tercer polinomi, $x+x^2$, és la diferència dels dos anteriors: $x+x^2 = 1+x-(1-x^2)$. Així que $\langle 1+x, 1-x^2, x+x^2, 2+x-x^2 \rangle = \langle 1+x, 1-x^2, 2+x-x^2 \rangle$. I el quart també, perquè és la suma dels dos primers.
En conseqüència, el conjunt $\mathcal{B} = \{1+x, 1-x^2\}$ és una base de l'espai.

Exercici 20.3. (pàgina 292) *Proveu que el conjunt $S = \{1+x^2, 1-x^2\}$ és linealment independent i completeu-lo a una base de $\mathbb{K}_3[x]$ (és a dir, trobeu una base de $\mathbb{K}_3[x]$, $\mathcal{B}$, tal que $S \subset \mathbb{K}_3[x]$).*

Solució:
S és linealment independent, perquè $\alpha_1\,(1+x^2)+\alpha_2\,(1-x^2)=0$ és equivalent a $(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_2)x^2=0$, i això només és possible si

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2&=0\\ \alpha_1-\alpha_2&=0\end{aligned}$$

I aquest és un sistema homogeni que només té la solució trivial $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Com que la dimensió de $\mathbb{K}_3[x]$ és 4, per completar una base, haurem d'afegir-hi dos polinomis independents (entre ells i dels dos de S). És clar que x i x^3 ho són, així que podem triar la base $\mathcal{B}=\{1+x^2,1-x^2,x,x^3\}$.

Exercici 20.4. (pàgina 292) *Calculeu les coordenades respecte a la base*

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

de la matriu $\mathsf{A}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$.

Solució:
Hem de cercar quatre nombres $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ de manera que

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\ \alpha_3+\alpha_4&\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

sistema lineal la solució del qual és $\alpha_1=1,\alpha_2=-2,\alpha_3=2,\alpha_4=-1$. Per tant, $\mathsf{A}_{\mathcal{B}}=(1,-2,2,-1)$.

Exercici 20.5. (pàgina 292) *Proveu que el conjunt*

$$\mathcal{B}=\{1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3\}$$

és una base de $\mathbb{R}_3[x]$ *i calculeu les coordenades respecte a aquesta base del polinomi* $p(x)=x^3-x+1$.

Solució:
Hem de provar que aquests polinomis són independents i generadors. Per a això, per a qualsevol polinomi $q(x)$ de grau com a molt tres, plantegem l'equació

$$q(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2 + \alpha_3(x-1)^3$$

Si derivem fins a tres vegades aquesta igualtat obtenim

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2 + \alpha_3(x-1)^3 \\ q'(x) &= \alpha_1 + 2\alpha_2(x-1) + 3\alpha_3(x-1)^2 \\ q''(x) &= 2\alpha_2 + 4\cdot 3\alpha_3(x-1)^2 \\ q'''(x) &= 4\cdot 3\cdot 2\alpha_3 \end{aligned}$$

Aquestes igualtats se simplifiquen molt si substituïm $x = 1$:

$$\begin{aligned} q(1) &= \alpha_0 \\ q'(1) &= \alpha_1 \\ q''(1) &= 2\alpha_2 \\ q'''(1) &= 3!\alpha_3 \end{aligned} \tag{20.1}$$

- Els quatre polinomis són linealment independents, perquè si elegim $q(x) = 0$, aquestes darreres igualtats ens donen

$$\alpha_0 = q(1), \quad \alpha_1 = q'(1), \quad \alpha_2 = \frac{q''(1)}{2!}, \quad \alpha_3 = \frac{q'''(1)}{3!}$$

- Llavors, el conjunt $\mathcal{B}$ és base, perquè conté 4 vectors independents en un espai de dimensió 4. A més a més, de les igualtats (20.1) deduïm que $\alpha_0 = q(1)$, $\alpha_1 = q'(1)$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}q''(1)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3!}q(1)$, de manera que per a qualsevol $q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$q(x) = q(1) + q'(1)(x-1) + \frac{q''(x)}{2}(x-1)^2 + \frac{q'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

(que és la fórmula de Taylor del polinomi $q(x)$ centrada en $x_0 = 1$).

Aplicant aquesta fórmula al polinomi $p(x)$ obtenim

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &= 1 + 2(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \end{aligned}$$

Així que $p(x)_{\mathcal{B}} = (1, 2, 3, 1)$.

EXERCICI 20.6. (pàgina 292) *Proveu que el conjunt*

$$\mathcal{B} = \{1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3, \dots, (x-a)^n, \dots\}$$

(on a és un nombre real qualsevol) és una base de $\mathbb{R}[x]$ i calculeu les coordenades respecte aquesta base d'un polinomi arbitrari $p(x)$.

Solució:
Per provar que el conjunt $\mathcal{B}$ és base l'espai, si $q(x)$ és un polinomi qualsevol, haurem de provar que el podem escriure com a combinació lineal (única) dels polinomis de $\mathcal{B}$. Més concretament, si el grau de $q(x)$ és n, provarem que l'equació

$$q(x) = \alpha_0 1 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_n(x-a)^n \tag{20.2}$$

(on les incògnites són els coeficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$) té solució i aquesta solució és única.
Per fer això, hi calcularem les derivades successives:

$$\begin{aligned}
q(x) &= \alpha_0 1 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + +\alpha_3(x-a)^3 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n \\
q'(x) &= \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + 3\alpha_3(x-a)^2 + \cdots + n\alpha_n(x-a)^{n-1} \\
q''(x) &= 2\alpha_2 + 3\cdot 2\alpha_3(x-a) + \cdots + n(n-1)\alpha_n(x-a)^{n-2} \\
q'''(x) &= 3\cdot 2\alpha_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)\alpha_n(x-a)^{n-3} \\
&\ldots \\
q^{n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\alpha_n
\end{aligned}$$

Si en totes aquestes igualtats, substituïm $x = a$ obtenim

$$\begin{aligned}
q(a) &= \alpha_0 \\
q'(a) &= \alpha_1 \\
q''(a) &= 2\alpha_2 \\
q'''(a) &= 3\cdot 2\alpha_3 \\
&\ldots \\
q^{n)}(a) &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\alpha_n
\end{aligned}$$

Així que l'equació (20.2) té una solució única:

$$\alpha_0 = q(a), \quad \alpha_1 = q'(a), \quad \alpha_2 = \frac{q''(a)}{2!}, \quad \alpha_3 = \frac{q'''(a)}{3!}, \ldots, \quad \alpha_n = \frac{q^{n)}(a)}{n!}$$

Aquestes són les coordenades, i el polinomi $q(x)$ es pot escriure com

$$q(x) = q(a) + q'(a)(x-a) + \frac{q''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{q'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{q^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exercici 20.7. (pàgina 293)

(a) Proveu que el conjunt S de les successions que són solució de la recurrència

$$a_{n+2} - 4a_n = 0$$

és un subespai vectorial de l'espai de totes les successions.

(b) Proveu que aquest subespai és de dimensió 2.

(c) *Comproveu que les successions $a_n = 2^n$ i $b_n = (-2)^n$ són solucions de la recurrència linealment independents i deduïu que qualsevol solució de la recurrència n'és combinació lineal.*

(d) *Resoleu la recurrència pels mètodes típics de l'Anàlisi Matemàtica i compareu els resultats.*

Solució:

(a) La successió nul·la és solució de la recurrència, així que és al conjunt S. D'altra banda, si $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ són elements de S tindrem

$$\left.\begin{aligned} a_{n+2} - 4a_n &= 0 \\ b_{n+2} - 4b_n &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (\alpha a_{n+2} + \beta b_{n+2}) - 4(\alpha a_n + \beta b_n) = 0$$

així que S és un subespai.

(b) Si $\{a_n\}$ és una solució de la recurrència, llavors $a_{n+2} = 4a_n$ així que la successió es pot escriure així:

$$\begin{aligned} &\{a_0, a_1, 4a_0, 4a_1, 4^2a_0, 4^2a_1, 4^3a_0, 4^3a_1, \ldots\} \\ &\qquad = a_0\{1, 0, 4, 0, 4^2, 0, 4^3, 0, \ldots\} + a_1\{0, 1, 0, 4, 0, 4^2, 0, 4^3, \ldots\} \end{aligned}$$

la qual cosa demostra que les dues successions $\{1, 0, 4, 0, 4^2, 0, 4^3, 0, \ldots\}$ i $\{0, 1, 0, 4, 0, 4^2, 0, 4^3, \ldots\}$ generen S. Com que és clar que són linealment independents, la dimensió és 2.

(c) Són solució perquè

$$(\pm 2)^{n+2} - 4(\pm 2)^n = (2)^{n+2} - 4(2)^n = 0$$

Són independents, perquè

$$\alpha_1\{2^n\} + \alpha_2(-2)^n = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 2^0 + \alpha_2(-2)^0 = 0 \\ \alpha_1 2^1 + \alpha_2(-2)^1 = 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Com que la dimensió de S és 2, aquestes dues successions són una base i qualsevol altra solució de la recurrència n'és combinació lineal.

(d) Si cerquem solucions de la forma $a_n = \lambda^n$ trobarem

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^n = 0$$

o bé $\lambda^n(\lambda^2 - 4) = 0$. Si eliminem la solució trivial ($\lambda = 0$) podem simplificar a

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

Aquesta és l'equació característica que té les arrels $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. Per tant, la solució general serà

$$a_n = C_1 2^n + C_2(-2)^n$$

la qual cosa confirma el que hem vist a l'apartat anterior. Observeu que aquest raonament no justifica que no n'hi ha més solucions. En canvi, l'ús de l'àlgebra lineal sí que ho fa.

Lliçó 21. Espais vectorials euclidians

Exercici 21.1. (pàgina 310) *Proveu, fent servir la definició, que l'expressió* $(\vec{u}|\vec{v}) = 5\overline{u_1}v_1 - \mathrm{i}\overline{u_1}v_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}v_1 + 5\overline{u_2}v_2$ *defineix un producte escalar en l'espai vectorial* $\mathbb{C}^2$.

Solució:
Hem de comprovar que es compleixen les quatre condicions de la definició:
1. $(\vec{u}|\vec{v}) = 5\overline{u_1}v_1 - \mathrm{i}\overline{u_1}v_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}v_1 + 5\overline{u_2}v_2$
$$= \overline{5\overline{v_1}u_1} + \overline{\mathrm{i}\overline{v_2}u_1} - \overline{\mathrm{i}\overline{v_1}u_2} + \overline{5\overline{v_2}u_2} = \overline{(\vec{v}|\vec{u})}$$
2.
$$\begin{aligned}(\vec{u}|\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= 5\overline{u_1}(v_{11} + v_{21}) - \mathrm{i}\overline{u_1}(v_{12} + v_{22}) + \mathrm{i}\overline{u_2}(v_{11} + v_{21}) + 5\overline{u_2}(v_{12} + v_{22}) \\ &= 5\overline{u_1}v_{11} - \mathrm{i}\overline{u_2}v_{12} + \mathrm{i}u_2v_{11} + 5\overline{u_2}v_{12} + 5\overline{u_1}v_{21} - \mathrm{i}\overline{u_1}v_{22} + \mathrm{i}\overline{u_2}v_{21} + 5\overline{u_2}v_{22} \\ &= (\vec{u}|\vec{v}_1) + (\vec{u}|\vec{v}_2)\end{aligned}$$
3. $\alpha\,(\vec{u}|\vec{v}) = \alpha(5\overline{u_1}v_1 - \mathrm{i}\overline{u_1}v_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}v_1 + 5\overline{u_2}v_2)$
$$= 5\overline{u_1}\alpha v_1 - \mathrm{i}\overline{u_1}\alpha v_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}\alpha v_1 + 5\overline{u_2}\alpha v_2 = (\vec{u}|\alpha\vec{v})$$
4. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, llavors
$$\begin{aligned}(\vec{u}|\vec{u}) &= 5\,|u_1|^2 - \mathrm{i}\overline{u_1}u_2 + \mathrm{i}\overline{u_2}u_1 + 5\,|u_2|^2 \\ &= 5\,|u_1|^2 + 2\,\mathrm{im}(\overline{u_1}u_2) + 5\,|u_2|^2 \geq 5\,|u_1|^2 - 2\,|\overline{u_1}u_2| + 5\,|u_2|^2 \\ &= 4\,|u_1|^2 + 4\,|u_2|^2 + (|u_1| - |u_2|)^2 > 0\end{aligned}$$

Exercici 21.2. (pàgina 310) *Proveu que, en l'espai vectorial de les funcions reals contínues en l'interval* $[a,b]$, $C_0([a,b])$, *l'operació* $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ *és un producte escalar.*

Solució:
Primer de tot, notem que, com que les funcions són contínues, el producte $f(x)g(x)$ és integrable. A més, és clar que el producte $(f|g)$ és un nombre real. Comprovem les condicions de la definició de producte escalar:

1. $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = (g|f)$
2. $(f|g_1 + g_2) = \int_a^b f(t)\,(g_1(t) + g_2(t))\,\mathrm{d}t$
$$= \int_a^b f(t)g_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g_2(t)\,\mathrm{d}t = (f|g_1) + (f|g_2)$$
3. $\alpha\,(f|g) = \alpha\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,(\alpha g(t))\,\mathrm{d}t = (f|\alpha g)$

4. Si $f \neq \vec{0}$, llavors $(f|f) = \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t > 0$ (perquè $f(t)^2 \geq 0$, per a tot t i, a més $f(t) > 0$ almenys en un subinterval de $[a,b]$).

Exercici 21.3. (pàgina 311) *Si $l_2(\mathbb{K})$ és l'espai vectorial de les successions $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ tals que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ és convergent proveu que, en aquest espai, $(\{a_n\}|\{b_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n$ és un producte escalar.*

Solució:
Comprovem les condicions de la definició de producte escalar:

1. $(\{a_n\}|\{b_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}} = \overline{(\{b_n\}|\{a_n\})}$
2. $$(\{a_n\}|\{b_n\} + \{c_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}(b_n + c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} c_n$$ $$= (\{a_n\}|\{b_n\}) + (\{a_n\}|\{c_n\})$$
3. $\alpha(\{a_n\}|\{b_n\}) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \alpha b_n = (\{a_n\}|\alpha\{b_n\})$
4. Si $\{a_n\} \neq 0$, $(\{a_n\}|\{a_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 > 0$

Exercici 21.4. (pàgina 311) *Proveu que l'expressió $(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \operatorname{tr}(\mathsf{A}^*\mathsf{B})$ defineix un producte escalar en l'espai $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

Solució:
Notem que

$$\operatorname{tr}(\mathsf{A}^*\mathsf{B}) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j1}} b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j1}} b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j1}} b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j2}} b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j2}} b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j2}} b_{jn} \\ \cdots & & & \\ \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{jn}} b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{jn}} b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{jn}} b_{jn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{a_{ji}} b_{ji} = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

on $\vec{a} = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$ i
$\vec{b} = (b_{11}, \ldots, b_{1n}, b_{21}, \ldots, b_{2n}, \ldots, b_{m1}, \ldots, b_{mn})$. Així que el nostre producte coincideix amb el producte escalar estàndard en $\mathbb{K}^{mn}$.

Exercici 21.5. (pàgina 311) *Proveu que l'expressió $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v}$ és un producte escalar en l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$ si i només si la matriu A és hermítica definida positiva.*

Solució:
Si $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v}$ és un producte escalar, llavors

$$(\vec{u}|\vec{v}) = \overline{(\vec{v}|\vec{u})} \Longrightarrow \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v} = \overline{\vec{v}^*\mathsf{A}\vec{u}} = (\vec{v}^*\mathsf{A}\vec{u})^* = \vec{u}^*\mathsf{A}^*\vec{v}$$

Com que això és cert per a tots els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, elegint els vectors de la base canònica $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_j$, tindrem que $\vec{e}_i^*\mathsf{A}\vec{e}_j = \vec{e}_j^*\mathsf{A}^*\vec{e}_i \Longrightarrow a_{ij} = a_{ij}^*$ (per a qualsevol parell d'índexs i, j. Per tant, la matriu A és hermítica. D'altra banda, si $\vec{u} \neq 0$ com que $(\vec{u}|\vec{u}) > 0$, $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} >=$, així que la matriu és definida positiva.
Recíprocament, si la matriu A és hermítica definida positiva, es compleixen totes les condicions de la definició de producte escalar:

1. $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v} = \vec{u}^*\mathsf{A}^*\vec{v} = \overline{\vec{v}^*\mathsf{A}\vec{u}} = \overline{(\vec{v}|\vec{u})}$ (perquè A és hermítica)
2. $(\vec{u}|\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u}^*\mathsf{A}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v}_1 + \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v}_2 = (\vec{u}|\vec{v}_1) + (\vec{u}|\vec{v}_2)$
3. $\alpha\,(\vec{u}|\vec{v}) = \alpha\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{v} = \vec{u}^*\mathsf{A}\alpha\vec{v} = (\vec{u}|\alpha\vec{v})$
4. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, llavors $(\vec{u}|\vec{u}) = \vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} > 0$ (perquè A és definida positiva)

Exercici 21.6. (pàgina 311) *En cada apartat, estudieu si l'operació* $(\vec{u}|\vec{v}) = \vec{u}^\mathsf{T}\mathsf{A}\vec{v}$ *és un producte escalar en l'espai vectorial* $\mathbb{R}^3$*. En cas que ho siga, trobeu-ne una base ortonormal.*

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Solució:
En tots els casos, la matriu A és simètrica. Per tant, cal veure si és definida positiva.

(a) La matriu A és clarament definida positiva, perquè, si $\vec{u} \neq 0$, $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} = \overline{u_1}u_1 + 2\overline{u_2}u_2 + 3\overline{u_3}u_3 = |u_1|^2 + 2\,|u_2|^2 + 3\,|u_3|^2 > 0$.
Com que la matriu A és diagonal, els vectors de la base canònica fan un conjunt ortogonal; a més a més, $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\|^2 = 2$, $\|\vec{e}_3\|^2 = 3$. Per tant, el conjunt $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0, 1/\sqrt{2}), 0), (0, 0, 1/\sqrt{3})\}$ és una base ortonormal.

(b) El producte $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u}$ el podem escriure com una suma de quadrats:

$$\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} = u_1^2 - 2u_1u_2 + 5u_2^2 + 4u_2u_3 + u_3^2 = (u_1 - u_2)^2 + (2u_2 + u_3)^2$$

Aleshores, elegint el vector $\vec{u} = (1, 1, -2)$, resulta que $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} = (1-1)^2 + (2-2)^2 = 0$. Per tant, la matriu no és definida positiva.

(c) El producte $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u}$ també el podem escriure com una suma de quadrats:

$$\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u} = u_1^2 - 2u_1u_2 + 5u_2^2 + 4u_2u_3 + 2u_3^2 = (u_1 - u_2)^2 + (2u_2 + u_3)^2 + u_3^2 \geq 0$$

I, perquè $\vec{u}^*\mathsf{A}\vec{u}$ siga igual a zero ha de ser $(u_1 - u_2)^2 = 0, (2u_2 + u_3)^2 = 0, u_3^2 = 0$. Això només passa si $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, així que aquesta matriu sí que és definida positiva.

En aquest cas, per a trobar una base ortonormal, podem aplicar el mètode de Gram-Schmidt; si partim de la base canònica, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,

Primer pas: obtenim una base ortogonal:

- $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 = (1,0,0)$
  Aleshores, $(v_1|v_1) = a_{11} = 1$
  $(v_1|e_2) = (e_1|e_2) = a_{12} = -1$
  $(v_1|e_3) = (e_1|e_3) = a_{13} = 0$
- $\vec{v}_2 = \vec{e}_2 - \dfrac{(v_1|e_2)}{(v_1|v_1)}\vec{v}_1 = (1,0,0) - (-1)(0,1,0) = (1,1,0)$
  Aleshores, $(v_2|v_2) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} \mathsf{A} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 4$
  $(v_2|e_3) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} \mathsf{A} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = a_{13} + a_{23} = 2$
- $\vec{v}_3 = \vec{e}_3 - \dfrac{(v_1|e_3)}{(v_1|v_1)}\vec{v}_1 - \dfrac{(v_2|e_3)}{(v_2|v_2)}\vec{v}_2$
  $= (0,0,1) - 0(1,0,0) - (2/4)(1,1,0) = (-1/2, -1/2, 1)$
  Per tant, $(\vec{v}_3|\vec{v}_3) = \begin{bmatrix}-1/2 & -1/2 & 1\end{bmatrix} \mathsf{A} \begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix} = 1$

$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0), (1,1,0), (-1/2,-1/2,1)\}$ és una base ortogonal.

Segon pas: Convertim els vectors de $\mathcal{B}_1$ en unitaris:

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{1}(1,0,0), \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{2}(1,1,0),$$
$$\vec{q}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \frac{1}{1}(-1/2,-1/2,1)$$

$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0), (1/2,1/2,0), (-1/2,-1/2,1)\}$ és una base ortonormal.

EXERCICI 21.7. (pàgina 311) *En l'espai* $\mathbb{R}_{[}x]$, *amb el producte escalar* $(p(x)|q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$, *trobeu l'ortogonal del subespai* $F = \langle x \rangle$.

Solució:
Hem de trobar els polinomis $p(x) = a + bx$ tals que $(x|p(x)) = 0$,

$$(x|p(x)) = 0 \iff \int_0^1 t(a+bt)\mathrm{d}t = 0 \iff \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 0 \iff 3a = -2b$$

Per tant, $F^{\perp} = \langle 2 - 3x \rangle$.

Exercici 21.8. (pàgina 311) *(a) Trobeu la matriu de Gram del producte escalar* $(p(x)|q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$ *en l'espai* $\mathbb{R}_2[x]$*, respecte a la base canònica de* $\mathbb{R}_2[x]$*. (b) En aquest espai vectorial euclidià, trobeu una base ortonormal del subespai* $F = \langle 1, x\rangle$ *i el complement ortogonal* $F^\perp$*. (c) Trobeu una base ortonormal de l'espai euclidià* $\mathbb{R}_2[x]$ *amb aquest producte escalar.*

Solució:

(a) La matriu de Gram és $\mathsf{G}_{C(\mathbb{K}_2[x])} = \begin{bmatrix} (1|1) & (1|x) & (1|x^2) \\ (x|1) & (x|x) & (x|x^2) \\ \dots & & \\ (x^2|1) & (x^2|x) & (x^2|x^2) \end{bmatrix}$, així que calculem els productes

$$\begin{aligned} (1|1) &= \int_0^1 \mathrm{d}t = 1 & (1|x) &= \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2 & (1|x^2) &= \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 1/3 \\ (x|1) &= \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2 & (x|x) &= \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 1/3 & (x|x^2) &= \int_0^1 t^3\mathrm{d}t = 1/4 \\ (x^2|1) &= \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 1/3 & (x^2|x) &= \int_0^1 t^3\mathrm{d}t = 1/4 & (x^2|x^2) &= \int_0^1 t^4\mathrm{d}t = 1/5 \end{aligned}$$

En conseqüència, $\mathsf{G}_{C(\mathbb{K}_2[x])} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$.

(b) Els polinomis 1 i x no són ortogonals, perquè $(1|x) = 1/2$. Podríem fer servir el mètode de Gram-Schmidt, però també podem cercar un polinomi de F, és a dir, de la forma $a + a_1x$ que siga ortogonal a 1. Això ho podem fer fent servir la definició,

$$(1|a + a_1x) = 0 \iff \int_0^1 (a + a_1t)\mathrm{d}t = 0 \iff a + a_1/2 = 0$$

o, també, amb la matriu de Gram!

$$\begin{aligned} (1|a + a_1x) = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a + a_1/2 = 0 \end{aligned}$$

això vol dir que ha de ser $a_2 = -2a$. En conseqüència, el conjunt $\{1, a(1-2x)\}$ ($a \neq 0$) és una base ortogonal de F, i, per trobar-ne una d'ortonormal, haurem de dividir els dos polinomis per les seues normes, $\|1\| = 1$ i

$$\|a(1-2x)\| = \sqrt{a^2\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\end{bmatrix}} = a/\sqrt{3}$$

El conjunt $\{1, \sqrt{3}(1-2x)\}$ és una base ortonormal de F.
D'altra banda, un polinomi $b_0 + b_1x + b_2x^2$ serà a l'ortogonal de F si $(1|b_0 + b_1x + b_2x^2) = (x|b_0 + b_1x + b_2x^2) = 0$:

$$\begin{aligned}(1|a + a_1x + a_2x^2) = 0 \iff \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}\\ &= b_0 + b_1/2 + b_2/3 = 0\\ (x|b_0 + b_1x + b_2x^2) = 0 \iff \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}\\ &= b_0/2 + b_1/3 + b_2/4 = 0\end{aligned}$$

Això vol dir que els polinomis de $F^\perp$ són les solucions del sistema lineal

$$\begin{cases} b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{3}b_2 = 0\\ \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{4}b_2 = 0\end{cases}$$

és a dir, els polinomis de la forma $b_2(\frac{1}{6} - x + x^2)$: $F^\perp = \langle 1 - 6x + 6x^2\rangle$.

(c) El conjunt $\{1, \sqrt{3}(1-2x), 1 - 6x - 6x^2\}$ és ortogonal; però només els dos primers vectors són unitaris. Així que hem de calcular la norma del tercer polinomi:

$$\|1 - 6x + 6x^2\|^2 = \begin{bmatrix}1 & -6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -6\\ 6\end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

El conjunt $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{3}(1-2x), \sqrt{5}(1 - 6x - 6x^2)\}$ és una base ortonormal de l'espai.

Exercici 21.9. (pàgina 311) *Proveu que, si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ són tres vectors en un espai vectorial euclidià real llavors,*

$$\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\|^2 = \|\vec{u}_1\|^2 + \|\vec{u}_2\|^2 + \|\vec{u}_3\|^2 + 2\,(\vec{u}_1|\vec{u}_2) + 2\,(\vec{u}_1|\vec{u}_3) + 2\,(\vec{u}_2|\vec{u}_3)$$

Quina fórmula obtenim en el cas que l'espai vectorial euclidià siga complex?

Solució:

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3\|^2 &= (\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3)\\
&= (\vec{u}_1|\vec{u}_1)+(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+(\vec{u}_1|\vec{u}_3)+(\vec{u}_2|\vec{u}_1)+(\vec{u}_2|\vec{u}_2)+(\vec{u}_2|\vec{u}_3)\\
&\qquad +(\vec{u}_3|\vec{u}_1)+(\vec{u}_3|\vec{u}_2)+(\vec{u}_3|\vec{u}_3)\\
&= (\vec{u}_1|\vec{u}_1)+(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+(\vec{u}_1|\vec{u}_3)+(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+(\vec{u}_2|\vec{u}_2)+(\vec{u}_2|\vec{u}_3)\\
&\qquad +(\vec{u}_1|\vec{u}_3)+(\vec{u}_2|\vec{u}_3)+(\vec{u}_3|\vec{u}_3)\\
&= \|\vec{u}_1\|^2+\|\vec{u}_2\|^2+\|\vec{u}_3\|^2+2\,(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+2\,(\vec{u}_1|\vec{u}_3)+2\,(\vec{u}_2|\vec{u}_3)
\end{aligned}$$

En el cas complex,

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3\|^2 &= (\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3)\\
&= (\vec{u}_1|\vec{u}_1)+(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+(\vec{u}_1|\vec{u}_3)+(\vec{u}_2|\vec{u}_1)+(\vec{u}_2|\vec{u}_2)+(\vec{u}_2|\vec{u}_3)\\
&\qquad +(\vec{u}_3|\vec{u}_1)+(\vec{u}_3|\vec{u}_2)+(\vec{u}_3|\vec{u}_3)\\
&= (\vec{u}_1|\vec{u}_1)+(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+(\vec{u}_1|\vec{u}_3)+\overline{(\vec{u}_1|\vec{u}_2)}+(\vec{u}_2|\vec{u}_2)+(\vec{u}_2|\vec{u}_3)\\
&\qquad +\overline{(\vec{u}_1|\vec{u}_3)}+\overline{(\vec{u}_2|\vec{u}_3)}+(\vec{u}_3|\vec{u}_3)\\
&= \|\vec{u}_1\|^2+\|\vec{u}_2\|^2+\|\vec{u}_3\|^2\\
&\qquad +2\,\mathrm{re}\,(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+2\,\mathrm{re}\,(\vec{u}_1|\vec{u}_3)+2\,\mathrm{re}\,(\vec{u}_2|\vec{u}_3)
\end{aligned}$$

Exercici 21.10. (pàgina 312) *Proveu la* llei del paral·lelogram*: en un espai vectorial euclidià, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors, $\|\vec{u}_1+\vec{u}_2\|^2+\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|^2 = 2\,\|\vec{u}_1\|^2+2\,\|\vec{u}_2\|^2$.*

Expliqueu el significat geomètric d'aquesta propietat, en termes dels costats d'un paral·lelogram.

Solució:

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}_1+\vec{u}_2\|^2+\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|^2 &= (\vec{u}_1+\vec{u}_2|\vec{u}_1+\vec{u}_2)+(\vec{u}_1-\vec{u}_2|\vec{u}_1-\vec{u}_2)\\
&= (\vec{u}_1|\vec{u}_1)+(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+(\vec{u}_2|\vec{u}_1)+(\vec{u}_2|\vec{u}_2)+\\
&\quad (\vec{u}_1|\vec{u}_1)-(\vec{u}_1|\vec{u}_2)-(\vec{u}_2|\vec{u}_1)+(\vec{u}_2|\vec{u}_2)\\
&= 2\,\|\vec{u}_1\|^2+2\,\|\vec{u}_2\|^2
\end{aligned}$$

Si interpretem $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ com els costats d'un paral·lelogram, aquesta propietat ens diu que la suma dels quadrats de les logituds dels quatre costats és igual a la suma dels quadrats de les dues diagonals.

Exercici 21.11. (pàgina 312) *Proveu que en un espai vectorial euclidià real, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors, $\|\vec{u}_1+\vec{u}_2\|^2-\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|^2 = 4\,(\vec{u}_1|\vec{u}_2)$.*

Solució:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_1+\vec{u}_2\|^2-\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\|^2 &= (\vec{u}_1+\vec{u}_2|\vec{u}_1+\vec{u}_2)-(\vec{u}_1-\vec{u}_2|\vec{u}_1-\vec{u}_2)\\ &= (\vec{u}_1|\vec{u}_1)+(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+(\vec{u}_2|\vec{u}_1)+(\vec{u}_2|\vec{u}_2)-\\ &\quad(\vec{u}_1|\vec{u}_1)+(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+(\vec{u}_2|\vec{u}_1)-(\vec{u}_2|\vec{u}_2)\\ &= 4\,(\vec{u}_1|\vec{u}_2)\end{aligned}$$

Exercici 21.12. (pàgina 312) *En un espai vectorial euclidià real, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són dos vectors unitaris que fan un angle de 60 graus, calculeu la norma del vector $\vec{u}_1+2\vec{u}_2$.*

Solució:
Com que són vectors unitaris, si l'angle és de 60 graus, $(\vec{u}_1|\vec{u}_2)=\cos 60^{\circ}=1/2$, així que el quadrat de la norma és

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_1+2\vec{u}_2\|^2 &= (\vec{u}_1+2\vec{u}_2|\vec{u}_1+2\vec{u}_2)\\ &= (\vec{u}_1|\vec{u}_1)+4\,(\vec{u}_1|\vec{u}_2)+4\,(\vec{u}_2|\vec{u}_2)=1+4\frac{1}{2}+4=7\end{aligned}$$

Exercici 21.13. (pàgina 312) *Proveu que la desigualtat de Cauchy-Schwarz és una igualtat únicament si els dos vectors són linealment dependents.*

Solució:
Si els dos vectors són linealment dependents, l'un és múltiple de l'altre, així que suposarem que $\vec{u}=\alpha\vec{v}$. Aleshores,

$$(\vec{u}|\vec{v})=\overline{\alpha}\,(\vec{v}|\vec{v})=\overline{\alpha}\,\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

Recíprocament, si $(\vec{u}|\vec{v})=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ i algun dels vectors és zero, llavors són linealment dependents, així que suposarem que no ho són. A la prova de la desiguialtat de Cauchy-Schwarz hem vist que

$$(\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}|\alpha\vec{u}-\beta\vec{v})=-\left|(\vec{u}|\vec{v})\right|^2+\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$$

(on $\alpha=(\vec{u}|\vec{v})$ i $\beta=\|\vec{u}\|^2$).
En conseqüència, si $(\vec{u}|\vec{v})=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, $(\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}|\alpha\vec{u}-\beta\vec{v})=0$ i $\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}=0$. Com que $\beta=\|\vec{u}\|^2\neq 0$, això vol dir que els dos vectors són dependents.

Exercici 21.14. (pàgina 312) *Expresseu com una sèrie de Fourier la funció real de variable real f, periòdica amb període igual a 2π, que, en l'interval $[-\pi,\pi]$ és igual al valor absolut, $|x|$.*

Solució:
Calculem els coeficients

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,\mathrm{d}t = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos nt\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ és parell} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos nt\mathrm{d}t = 0 \quad n = 1, 2, \ldots$$

Aquesta funció és contínua en $\mathbb{R}$, perquè $f(-\pi) = f(\pi)$, així que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \qquad \square$$

Lliçó 22. Aplicacions lineals

Exercici 22.1. (pàgina 327) *Estudieu si les aplicacions següents són lineals*

(a) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ p(x) &\rightsquigarrow f(p(x)) = p(0) \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} f\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ \mathsf{A} &\rightsquigarrow f(\mathsf{A}) = (a_{11}+a_{12}, a_{21}+a_{22}) \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} f\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathsf{A} &\rightsquigarrow f(\mathsf{A}) = a_{11}+a_{22} \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}_2[x] \\ a &\rightsquigarrow f(a) = a + 2ax - ax^2 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}_2[x] \\ a &\rightsquigarrow f(a) = a + 2ax - x^2 \end{aligned}$

Solució:

(a) Sí: $f(\alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x)) = \alpha_1 p(0) + \alpha_2 q(0) = \alpha_1 f(p(x)) + \alpha_2 f(q(x))$.

(b) Sí: $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Per tant,

$$f(\alpha_1\mathsf{A} + \alpha_2\mathsf{B}) = \alpha_1\mathsf{A}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \alpha_2\mathsf{B}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \alpha_1 f(\mathsf{A}) + \alpha_2 f(\mathsf{B})$$

(c) Sí: $\begin{aligned} f(\alpha_1\mathsf{A} + \alpha_2\mathsf{B}) &= f\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 a_{11}+\alpha_2 b_{11} & \alpha_1 a_{12}+\alpha_2 b_{12} \\ \alpha_1 a_{21}+\alpha_2 b_{21} & \alpha_1 a_{22}+\alpha_2 b_{22}\end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 b_{11} + \alpha_1 a_{22} + \alpha_2 b_{22} \\ &= \alpha_1(a_{11}+a_{22}) + \alpha_2(b_{11}+b_{22}) \\ &= \alpha_1 f(\mathsf{A}) + \alpha_2 f(\mathsf{B}) \end{aligned}$

(d) Sí: Observem que $f(a) = a(1+2x-x^2)$. Així que

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 a + \alpha_2 b) &= (\alpha_1 a + \alpha_2 b)(1+2x-x^2) \\ &= \alpha_1 a(1+2x-x^2) + \alpha_2 b(1+2x-x^2) \\ &= \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(b) \end{aligned}$$

(e) No: $f(0) = -x^2 \neq 0$.

Exercici 22.2. (pàgina 327) *Trobeu bases del nucli i la imatge de l'aplicació lineal $f\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ definida per*

$$f\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a_{11}+a_{22} & a_{12}-a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}-a_{12}+a_{21}+a_{22} & a_{22}\end{bmatrix}$$

Solució:
Perquè la matriu A siga al nucli ha de complir-se

$$\begin{aligned} a_{11} \qquad\qquad\quad + a_{22} &= 0 \\ a_{12} - a_{21} \qquad\quad &= 0 \\ a_{11} - a_{12} + a_{21} + a_{22} &= 0 \\ a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

La solució general d'aquest sistema és $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = a_{21}$. Així que el nucli és

$$\operatorname{Nuc} f = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

D'altra banda, la matriu B és a la imatge si existeix una matriu A de manera que

$$\begin{aligned} a_{11} \qquad\qquad\quad + a_{22} &= b_{11} \\ a_{12} - a_{21} \qquad\quad &= b_{12} \\ 0 &= b_{13} \\ 0 &= b_{21} \\ a_{11} - a_{12} + a_{21} + a_{22} &= b_{22} \\ a_{22} &= b_{23} \end{aligned}$$

Això és un sistema lineal la matriu ampliada del qual és

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b_{11} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{23} \end{array}\right]$$

Fent-hi operacions elementals trobem

$$\left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{11} - b_{23} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{11} + b_{12} + b_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} \end{array}\right]$$

Perquè hi haja solució ha de ser $-b_{11} + b_{12} + b_{22} = b_{13} = b_{21} = 0$, és a dir, $b_{11} = b_{12} + b_{22}$, $b_{13} = 0$, $b_{21} = 0$. Qualsevol matriu que es trobe a la imatge és de la forma

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} b_{12} + b_{22} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

així que

$$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Exercici 22.3. (pàgina 328) *Proveu que l'aplicació de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A} + \mathsf{A}^*$ és una transformació lineal i calculeu-ne el nucli i la imatge.*

Solució:
L'aplicació f és lineal perquè

$$\begin{aligned} f(\alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2) &= \alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2 + (\alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2)^* \\ &= \alpha_1(\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_1^*) + \alpha_2(\mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_2^*) \\ &= \alpha_1 f(\mathsf{A}_1) + \alpha_2 f(\mathsf{A}_2) \end{aligned}$$

Una matriu A és al nucli si $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A} + \mathsf{A}^* = 0$, és a dir, si $\mathsf{A} = -\mathsf{A}^*$. Així que el nucli de f és el conjunt de les matrius $n \times n$ antihermítiques.
Per calcular la imatge, observem, primer de tot, que les imatges són sempre matrius hermítiques (perquè $\mathsf{A} + \mathsf{A}^*$ és una matriu hermítica). Recíprocament, per a qualsevol matriu hermítica, B, tindrem

$$f\left(\frac{1}{2}\mathsf{B}\right) = \frac{1}{2}\mathsf{B} + \frac{1}{2}\mathsf{B}^* = \mathsf{B}$$

així que totes les matrius hermítiques són imatge d'alguna matriu. En definitiva, la imatge $\operatorname{Im} f$ és el conjunt de totes les matrius hermítiques $n \times n$.

Exercici 22.4. (pàgina 328) *Proveu que l'aplicació de $\mathbb{K}^3$ en $\mathbb{K}^2$*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

és una transformació lineal i calculeu una base del nucli i una de la imatge de f.

Solució:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 + x_3) \\ &= x_1(1,1) + x_2(1,1) + x_3(-2,1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} \end{aligned}$$

així que f és lineal.
El nucli és l'espai nul de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nul} \mathsf{A} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle (-1, 1, 0) \rangle$$

Per tant, $\{(-1, 1, 0)\}$ és una base del nucli de f.
La imatge és l'espai columna de A. Per tant, $\{(1, 1), (-2, 1)\}$ és una base de $\operatorname{Im} f$.

EXERCICI 22.5. (pàgina 328) *Siga $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida com*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3)$$

(a) Trobeu la matriu canònica de f.

(b) Trobeu bases del nucli i la imatge de f.

(c) Justifiqueu si f és injectiva, suprajectiva i/o bijectiva.

(d) Proveu que el vector $\vec{y} = (3, 1, 5)$ es troba a la imatge de f i calculeu el conjunt de totes les antiimatges de $\vec{y}$.

Solució:

(a) La matriu canònica és $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) El nucli de f és l'espai nul de la matriu A,

$$\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nul} \mathsf{A} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$$

La imatge de f és l'espai columna de la matriu A. I, com que ja sabem que la forma esglaonada reduïda de A és $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, deduïm que el rang de la matriu A és 2, les dues primeres columnes són independents i, per tant, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Col} \mathsf{A} = \langle (1, 1, 1), (1, -1, 3) \rangle$.

Així que $B_{\operatorname{Nuc} f} = \{(-1, 0, 1)\}$ i $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 3)\}$ són bases, respectivament, del nucli i de la imatge de f.

(c) Com que el nucli no és zero, f no és injectiva (ni bijectiva). I tampoc no és suprajectiva, perquè la dimensió de la imatge no és 3.

(d) El vector $\vec{y}$ és a la imatge de f perquè $\vec{y} = 2(1, 1, 1) + (1, -1, 3)$ (o perquè $f(2, 1, 0) = y$).

El conjunt de totes les antiimatges del vector $\vec{y}$ és la solució completa del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{y}$, és a dir, la suma d'una solució particular i l'espai nul de la matriu, ço és, el conjunt

$$f^{-1}(\vec{y}) = \{(2, 1, 0) + \alpha(-1, 0, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

EXERCICI 22.6. (pàgina 328) *Demostreu que si les aplicacions $f : E_1 \longrightarrow E_2$ i $g : E_2 \longrightarrow E_3$ són lineals llavors, la composició, $g \circ f$, també és lineal.*

Solució:
La prova és trivial:

$$\begin{aligned} g\circ f(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2) &= g(f(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2)) \\ &= g(\alpha_1 f(\vec{x}_1)+\alpha_2 f(\vec{x}_2)) \\ &= \alpha_1 g(f(\vec{x}_1))+\alpha_2 g((f(\vec{x}_2)) \\ &= \alpha_1(g\circ f(\vec{x}_1))+\alpha_2(g\circ f(\vec{x}_2)) \end{aligned}$$

Exercici 22.7. (pàgina 328) *Demostreu que si l'aplicació lineal $f : E_1 \longrightarrow E_2$ és bijectiva llavors, la inversa, f^{-1}, també és lineal.*

Solució:
Com que l'aplicació f és bijectiva, si $\vec{y}_1$ i $\vec{y}_2$ són vectors de E_2, hi ha dues antiimatges $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$, en E_1, tals que $f(\vec{x}_1)=\vec{y}_1$ i $f(\vec{x}_2)=\vec{y}_2$.
Aleshores, $f^{-1}(\alpha_1\vec{y}_1+\alpha_2\vec{y}_2)=f^{-1}(\alpha_1 f(\vec{x}_1)+\alpha_2 f(\vec{x}_2))$. Però, com que f és lineal, $\alpha_1 f(\vec{x}_1)+\alpha_2 f(\vec{x}_2)=f(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2)$, així que

$$f^{-1}(\alpha_1\vec{y}_1+\alpha_2\vec{y}_2)=f^{-1}(f(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2))=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2=\alpha_1 f^{-1}(\vec{y}_1)+\alpha_2 f^{-1}(\vec{y}_2)$$

Exercici 22.8. (pàgina 328) *Suposem que $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^5$ és l'aplicació lineal definida com*
$f(\vec{x})=\mathsf{A}\vec{x}$ i que el rang de la matriu A és 3.

(a) Aquesta aplicació és injectiva, suprajectiva i/o bijectiva?

(b) És possible que la composició, $g\circ f$, de dues aplicacions lineals, $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^5$ i $g : \mathbb{K}^5 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ siga bijectiva?

(c) És possible que la composició, $f\circ g$, de dues aplicacions lineals, $f : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^5$ i $g : \mathbb{K}^5 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ siga bijectiva?

Solució:

(a) Si el rang és 3, llavors la dimensió del subespai imatge és 3, així que aquest subespai no coincideix amb $\mathbb{K}^5$ i f no és suprajectiva (ni bijectiva). D'altra banda, com que $\dim \mathrm{Nuc}(f)+\dim \mathrm{Im}(f)=3$, el nucli és igual a zero i f sí que és injectiva.

(b) Sí. Per exemple, si

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}^3 &\longrightarrow \mathbb{K}^5 \\ (x_1,x_2,x_3) &\rightsquigarrow f((x_1,x_2,x_3))=(x_1,x_2,x_3,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{K}^5 &\longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &\rightsquigarrow g((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5))=(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

aquestes dues aplicacions són lineals i la composició $g\circ f$ és l'aplicació identitat (que és bijectiva).

(c) No. I ho podem justificar de diverses maneres:

- Perquè no pot ser injectiva. Observem que el nucli de g és un subconjunt del nucli de $f \circ g$ (si $g(\vec{x}) = 0$, llavors $f(g(\vec{x})) = 0$). Així que si $f \circ g$ fora injectiva, g també ho seria. Però el nucli de g no pot ser zero, perquè és l'espai nul d'una matriu 3×5.
- Perquè no pot ser suprajectiva. Si $f \circ g$ fora suprajectiva, qualsevol vector $\vec{z}$ tindria una antiimatge $\vec{x}$, de manera que $f(g(\vec{x})) = \vec{z}$, però aleshores, si $\vec{y} = g(\vec{x})$, tindrem que $f(\vec{y}) = \vec{z}$, de manera que f també seria suprajectiva. Però f no pot ser suprajectiva, perquè la dimensió de la imatge de f és, com a molt, 3.
- Perquè, si $f(\vec{y}) = \mathsf{A}\vec{y}$ i $g(\vec{x}) = \mathsf{B}\vec{x}$ llavors, $f \circ g(\vec{x}) = \mathsf{AB}\vec{x}$. És sabut que el rang del producte és menor o igual que el rang de cadascuna de les matrius (vegeu l'exercici 8.8.). Per tant, $\operatorname{rang}(\mathsf{AB}) \leq \operatorname{rang} \mathsf{A} \leq 3$ i $f \circ g$ no és suprajectiva.

Lliçó 23. Canvis de base

Exercici 23.1. (pàgina 339) *Trobeu les matrius de canvi de base* $\mathsf{M}_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}^3)}$ *i* $\mathsf{M}_{C(\mathbb{K}^3)\mathcal{B}}$, *on* $C(\mathbb{K}^3)$ *és la base canònica de* $\mathbb{K}^3$ *i* $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,0,3)\}$.

Solució:
Trobar la matriu de canvi d'una base qualsevol a la base canònica és especialment senzill:

$$\left.\begin{aligned}(1,0,-1) &= 1(1,0,0) + 0(0,1,0) - 1(0,0,1)\\ (1,0,-1) &= 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)\\ (1,0,-1) &= 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 3(0,0,1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathsf{M}_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}^3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

(com que $\vec{v}_{C(\mathbb{K}^3)} = \vec{v}$, la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}^3)}$ coincideix amb $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}$, la matriu les columnes de la qual són els vectors de la base $\mathcal{B}$).
La matriu de canvi $\mathsf{M}_{C(\mathbb{K}^3)\mathcal{B}}$ és

$$\mathsf{M}_{C(\mathbb{K}^3)\mathcal{B}} = \mathsf{M}^{-1}_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}^3)} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Exercici 23.2. (pàgina 339) *Trobeu les matrius de canvi entre la base canònica de* $\mathbb{K}_2[x]$ *i la base* $\mathcal{B} = \{1,(x-a),(x-a)^2\}$ *(a és un nombre real o complex qualsevol). Feu servir el resultat obtingut per a justificar la fórmula de Taylor d'un polinomi qualsevol de grau* 2 *(centrada en a).*

Solució:
La base canònica és $C(\mathbb{K}_2[x]) = \{1,x,x^2\}$, així que expressar els vectors de $\mathcal{B}$ respecte a la canònica és immediat:

$$1 = 1\cdot 1 + 0x + 0x^2 \quad x - a = -a1 + 1x + 0x^2 \quad (x-a)^2 = a^2 - 2ax + 1x^2$$

Això vol dir que la matriu de canvi de la base $\mathcal{B}$ a la base canònica és $\mathsf{M}_{\mathcal{B}C(\mathbb{K}_2[x])} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2\\ 0 & 1 & -2a\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.
La matriu $\mathsf{M}_{C(\mathbb{K}_2[x])\mathcal{B}}$ podem obtenir-la invertint aquesta matriu o, també, expressant els vectors de la base canònica com a combinacions lineals dels del $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}1 &= 1\cdot 1 + 0(x-a) + 0(x-a)^2\\ x &= -a1 + 1(x-a) + 0(x-a)^2\\ x^2 &= \left((x-a)+a\right)^2 = a^21 + 2a(x-a) + (x-a)^2\end{aligned}$$

així que $\mathsf{M}_{C(\mathbb{K}_2[x])\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Aquesta matriu ens permet referir el polinomi $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ a la base $\mathcal{B}$:

$$p(x)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 a \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(a) \\ p'(a) \\ p''(a)/2 \end{bmatrix}$$

Això vol dir que $p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \dfrac{p''(a)}{2}(x-a)^2$ (que és la fórmula de Taylor corresponent a aquest polinomi).

Exercici 23.3. (pàgina 339)

(a) Justifiqueu que els conjunts

$$\mathcal{B}_1 = \{(-3, 2), (2, 1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(-1, 2), (2, -3)\}$$

són bases de $\mathbb{K}^2$.

(b) Trobeu les dues matrius de canvi de base entre aquestes bases.

(c) Del vector $\vec{v}$ sabem que $\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = (1, 1)$.

(d) Quines són les coordenades de $\vec{v}$ respecte a la base $\mathcal{B}_2$?

(e) Quines són les coordenades respecte a la base canònica del vector $\vec{v}$?

Solució:

(a) Aquests conjunts són bases de $\mathbb{K}^2$ perquè les matrius $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ són invertibles i, en conseqüència, les seues columnes són linealment independents (com que la dimensió de l'espai és 2, dos vectors independents hi fan una base).

(b) Per obtenir la matriu de canvi de base de $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$ a $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}$ hem d'expressar els vectors de $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$ com a combinacions lineals dels de $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}$, és a dir, resoldre els dos sistemes lineals

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o bé, l'equació matricial $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Com que la forma esglaonada reduïda de la matriu $\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$ és $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right]$, obtenim que la matriu del canvi de base de $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$ a $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}$ és $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$.

En conseqüència, $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) Aplicant la fórmula del canvi de base, $\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Com que el vector de coordenades respecte a la base $\mathcal{B}_1$ és $(1,1)$, el nostre vector és $\vec{v} = 1(-3,2)+1(2,1) = (-1,3)$, així que les coordenades canòniques són $\vec{v}_{C(\mathbb{K}^2)} = (-1,3)$.

Exercici 23.4. (pàgina 339) *Si $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ són dues bases de l'espai $\mathbb{K}^n$, quina relació hi ha entre les matrius $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$, $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}$ i $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$?*

Solució:

Per trobar la matriu $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ hem d'escriure els vectors de la base $\mathcal{B}_1$ com a combinació lineal dels de la base $\mathcal{B}_2$, la qual cosa és equivalent a resoldre l'equació matricial $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}\mathsf{X} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$, la solució de la qual és $\mathsf{X} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$, així que $\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}$.

☞ Aquest exercici ens mostra la forma més eficient de trobar la matriu de canvi de base: aplicant l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} & \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1} \end{bmatrix}$ obtenim

$$\left[\mathsf{M}_{\mathcal{B}_2} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\mathrm{I} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_2}^{-1}\mathsf{M}_{\mathcal{B}_1}\right] = \left[\mathrm{I} \mid \mathsf{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\right]$$

Exercici 23.5. (pàgina 340) *De la transformació lineal f sabem que la matriu $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}}$, on $\mathcal{B}$ és la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$, és $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Quina és la matriu canònica de f?*

Solució:

Si A és la matriu canònica de f, com que $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}\mathcal{B}} = \mathsf{M}_{BC_2}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M}_{BC_2}$ tindrem

$$\mathsf{A} = \mathsf{M}_{BC_2}\mathsf{M}_{fBB}\mathsf{M}_{BC_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 23.6. (pàgina 340) *Trobeu la matriu M_{fBB} de l'aplicació lineal*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) &\rightsquigarrow f(p(x)) = p'(x) - p(x) \end{aligned}$$

respecte a la base $B = \{1, x, x^2\}$ i proveu que f és bijectiva.

Solució:

Calculem les imatges dels elements de la base:

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 + 0x + 0x^2 \\ f(x) &= 1 - x + 0x^2 \\ f(x^2) &= 0 + 2x - x^2 \end{aligned}$$

La matriu és

$$M_{fBB} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'aplicació és bijectiva perquè aquesta matriu és invertible.

Exercici 23.7. (pàgina 340) *Trobeu la matriu M_{fBB} de l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida com $f(\vec{x}) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$, respecte a la base $B = \{(1,-1),(1,1)\}$.*

Solució:

La matriu, respecte a la base canònica, de f és $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. La matriu M_{fBB} és aquesta:

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{fBB} = \mathsf{M}_{BC_2}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M}_{BC_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aquesta matriu la podem calcular d'una manera alternativa: si calculem les imatges dels vectors de B, $\vec{v}_1 = (1,-1)$ i $\vec{v}_2 = (1,1)$, tindrem

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &= \mathsf{A}\vec{v}_1 = (2,-2) = 2\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 \\ f(\vec{v}_2) &= \mathsf{A}\vec{v}_2 = (4,4) = 0\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 \end{aligned}$$

Per tant, la matriu de f respecte aquesta base és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercici 23.8. (pàgina 340)

(a) *Trobeu la matriu $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ de l'aplicació lineal*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &\rightsquigarrow (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)x^2 \end{aligned}$$

respecte a les bases $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x + x^2, 1 + x^3\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{1, 1 + x, x + x^2\}$

(b) *Calculeu les coordenades respecte a la base $\mathcal{B}_2$ de la imatge $f(2 + 2x + x^2 + x^3)$.*

(c) *Trobeu el nucli de f.*

Solució:

(a) Calculem les imatges de la base $\mathcal{B}_1$ i les expressem en funció de la base $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 = 1 + 0(1+x) + 0(x+x^2) \\ f(x) &= 1 + x = 0 + 1(1+x) + 0(x+x^2) \\ f(x+x^2) &= 1 + 2x + x^2 = 0 + 1(1+x) + 1(x+x^2) \\ f(1+x^3) &= 1 + x^2 = 2 - 1(1+x) + 1(x+x^2) \end{aligned}$$

La matriu de f respecte d'aquestes bases és $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Primer de tot, expressem el vector $2 + 2x + x^2 + x^3$ com a combinació lineal de la base $\mathcal{B}_1$: $2 + 2x + x^2 + x^3 = 0 + (1+x) + (x+x^2) + (1+x^3)$.
La imatge d'aquest vector, referida a la base $\mathcal{B}_2$, és

$$\begin{aligned} f(2+2x+x^2+x^3)_{\mathcal{B}_2} &= f(0 + (1+x) + (x+x^2) + (1+x^3))_{\mathcal{B}_2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Un polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ es troba al nucli de f si $f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 0$, és a dir, si

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \qquad\qquad &= 0 \\ a_1 + a_2 \qquad &= 0 \\ a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

és a dir, si $a_0 = -a_1 = a_2 = -a_3$. El nucli de f és $\langle 1 - x + x^2 - x^3 \rangle$.

Exercici 23.9. (pàgina 340) *Donada la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$,

(a) Determineu les dimensions del nucli i la imatge de la transformació lineal $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$.

(b) Trobeu una base, $\mathcal{B}_1$, de $\mathbb{R}^3$ que siga la unió d'una base de l'espai fila i una de l'espai nul de A.

(c) Construïu també una base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_2$, de manera que la matriu de f respecte a aquestes bases siga $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solució:

(a) El rang de la matriu A és 2. Per tant,

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} f &= 2\\ \dim \operatorname{Nuc} f &= 3-2=1\end{aligned}$$

(b) La forma esglaonada reduïda de A és

$$\mathsf{R}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Per tant,

- el conjunt $\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}}=\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ és una base de l'espai fila de A,
- i $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}}=\{(-1,0,1)\}$ és una base de l'espai nul.

La unió d'aquestes dues bases,

$$\mathcal{B}_1=\{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$$

és una base de $\mathbb{R}^3$.

(c) D'altra banda, les imatges de la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{A}}$ formen una base de l'espai columna:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,\mathsf{A}}=\{f(1,0,1),f(0,1,0)\}=\{(2,4,2,8),(1,1,0,2)\}$$

Completarem aquesta base afegint-hi una base de l'espai nul de $\mathsf{A}^\mathsf{T}=(\mathrm{Col}\,\mathsf{A})^\perp$:

$$\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^\mathsf{T}=\mathrm{Nul}\begin{bmatrix}2&4&2&8\\1&1&0&2\end{bmatrix}=\mathrm{Nul}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&2\end{bmatrix}=\langle(1,-1,1,0),(0,-2,0,1)\rangle$$

El conjunt $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^\mathsf{T}}=\{(1,-1,1,0),(0,-2,0,1)\}$ és una base de l'espai nul de A^T i

$$\mathcal{B}_2=\{(2,4,2,8),(1,1,0,2),(1,-1,1,0),(0,-2,0,1)\}$$

és la base de $\mathbb{R}^4$ que cercàvem. La matriu $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ és $\mathsf{M}_{f\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Lliçó 24. Determinants

Exercici 24.1. (pàgina 358) *Calculeu els determinants de les matrius següents:*

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} x+1 & x-1 \\ x-1 & x+1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solució:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$

(b) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2$

(c) $\begin{bmatrix} x+1 & x-1 \\ x-1 & x+1 \end{bmatrix} = (x+1)^2 - (x-1)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = 4x$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = -4$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -9$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Ací, hem sumat la tercera fila a la primera i també a la segona. Llavors, com que la nova matriu té dues files proporcionals, no pot ser invertible.

Exercici 24.2. (pàgina 358) *Estudieu la invertibilitat de les matrius*

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Solució:
El determinant de la matriu A és

$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

així que aquesta matriu és invertible.
D'altra banda, en els exemples del text hem vist que $\det \mathsf{B} = -102$ i $\det \mathsf{C} = 0$. Per tant, B és invertible i C no ho és. $\square$

Exercici 24.3. (pàgina 358) *Calculeu els determinants següents, cercant en cada cas el mètode més eficient que pugueu trobar (la matriu de l'apartat (b) té n files).*

$$\text{(a)} \quad \det \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \det \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{bmatrix}$$

Solució:

(a)

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x & y-x & y-x & y-x \\ x & y-x & z-x & z-x \\ x & y-x & z-x & t-x \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x & y-x & 0 & 0 \\ x & y-x & z-y & z-y \\ x & y-x & z-y & t-y \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x & y-x & 0 & 0 \\ x & y-x & z-y & 0 \\ x & y-x & z-y & t-z \end{bmatrix} \\ &= x(y-x)(z-y)(t-z) \end{aligned}$$

(b)

$$\det\begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} n+x & n+x & n+x & \dots & n+x \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{bmatrix}$$

$$= (n+x)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{bmatrix}$$

$$= (n+x)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{bmatrix}$$

$$= (n+x)x^{n-1}$$

Exercici 24.4. (pàgina 359) *Per a quins valors dels paràmetres són invertibles les matrius de l'exercici anterior?*

Solució:

(a) Per a $x = 0$, $y = x$, $z = y$ o $t = z$.

(b) Per a $x = -n$ o $x = 0$.

Exercici 24.5. (pàgina 359) *La matriu* A *l'hem obtinguda, a partir de la matriu identitat fent-hi les següents operacions elementals:*

1. *Hem permutat les files segona i quarta.*
2. *A la fila tercera li hem sumat quatre vegades la primera.*
3. *Hem multiplicat la columna segona per* -2.
4. *Hem multiplicat la fila primera per* 3.
5. *Hem permutat les files primera i tercera.*

Quin és el deteminant de A*?*

Solució:

$$\det \mathsf{A} = (-1)(1)(-2)(3)(-1) = 6$$

Exercici 24.6. (pàgina 359) *Sabent que el determinant de la matriu* 3×3 A *és igual a* 7*, calculeu els determinants següents:*

(a) $\det \mathsf{A}^\mathsf{T}$ (b) $\det(2\mathsf{A})$ (c) $\det(\mathsf{E}_{1,3}\mathsf{A})$ (d) $\det(\mathsf{E}_{1,3}(-5)\mathsf{A})$
(e) $\det \mathsf{A}^2$ (f) $\det \mathsf{A}^{-1}$ (g) $\det(\mathsf{E}_2(3)\mathsf{A}^{-1})$

Solució:

(a) $\det \mathsf{A}^\mathsf{T} = 7$ (b) $\det(2\mathsf{A}) = 2^3 \cdot 7$ (c) $\det(\mathsf{E}_{1,3}\mathsf{A}) = -7$
(d) $\det(\mathsf{E}_{1,3}(-5)\mathsf{A}) = 7$ (e) $\det \mathsf{A}^2 = 7^2$ (f) $\det \mathsf{A}^{-1} = 1/7$
(g) $\det(\mathsf{E}_2(3)\mathsf{A}^{-1}) = 3/7$

Exercici 24.7. (pàgina 359) *Demostreu que la matriu*

$$\begin{bmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{bmatrix}$$

és invertible (independentment del valor del paràmetre x*) i calculeu-ne la inversa.*

Solució:
Per demostrar que és invertible bastarà que provem que el determinant d'aquesta matriu és no nul:

$$\det \begin{bmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{bmatrix} = (x+1)(x-1) - x^2 = -1$$

La inversa és

$$\mathsf{A}^{-1} = -\begin{bmatrix} x-1 & -x \\ -x & x+1 \end{bmatrix}$$

Exercici 24.8. (pàgina 359) *Calculeu el determinant de la matriu* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solució:
Desenvolupant aquest determinant per la segona columna obtenim

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ara desenvolupem per la tercera columna

$$= -2 \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Per la primera columna

$$= -2 \cdot 3 \det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

I per la segona

$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \det \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Exercici 24.9. (pàgina 359) *Calculeu el determinant de la matriu*
$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

Solució:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= 5 \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -11 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$
$$= -5 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -11 & -1 \end{bmatrix} = -5(-5 + 22) = -85$$

Exercici 24.10. (pàgina 360) ***(Determinant de Vandermonde)*** *Calculeu el determinant de la matriu de Vandermonde,*

$$\det V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \cdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}$$

Solució:
Amb dos paràmetres, el determinant és

$$\det V(z_0, z_1) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \end{vmatrix} = z_1 - z_0$$

En el cas general, podem calcular-lo seguint els mateixos passos que vam fer servir per calcular el rang de la matriu $V(z_0, z_1, \cdots - z_n)$:

$$\det V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ \cdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}$$

Restem a cada columna la columna anterior multiplicada per z_0:

$$\det V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_1 - z_0 & z_1^2 - z_1 z_0 & \cdots & z_1^n - z_1^{n-1} z_0 \\ 1 & z_2 - z_0 & z_2^2 - z_2 z_0 & \cdots & z_2^n - z_2^{n-1} z_0 \\ \cdots \\ 1 & z_n - z_0 & z_n^2 - z_n z_0 & \cdots & z_n^n - z_n^{n-1} z_0 \end{vmatrix}$$

Ara restem la primera fila a totes les altres:

$$\det V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \operatorname{rang} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 - z_0 & z_1^2 - z_1 z_0 & \cdots & z_1^n - z_1^{n-1} z_0 \\ 0 & z_2 - z_0 & z_2^2 - z_2 z_0 & \cdots & z_2^n - z_2^{n-1} z_0 \\ \cdots \\ 0 & z_n - z_0 & z_n^2 - z_n z_0 & \cdots & z_n^n - z_n^{n-1} z_0 \end{vmatrix}$$

I dividim la primera fila per $z_1 - z_0$, la segona per $z_2 - z_0$...

$$\begin{aligned} \det V(z_0, z_1, \dots, z_n) &= \prod_{j=1}^{n} (z_j - z_0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 0 & 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \cdots \\ 0 & 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^{n} (z_j - z_0) \left| V(z_1, z_2, \dots, z_n) \right| \end{aligned}$$

Reiterant aquesta fórmula tindrem

$$\begin{aligned} \det V(z_0, z_1, \dots, z_n) &= \prod_{j=1}^{n} (z_j - z_0) \left| V(z_1, z_2, \dots, z_n) \right| \\ &= \prod_{j=1}^{n} (z_j - z_0) \prod_{j=2}^{n} (z_j - z_1) \left| V(z_2, z_3, \dots, z_n) \right| \\ &\dots \\ &= \prod_{j=1}^{n} (z_j - z_0) \prod_{j=2}^{n} (z_j - z_1) \dots \prod_{j=n-1}^{n} (z_j - z_{n-2}) \left| V(z_{n-1}, z_n) \right| \\ &= \prod_{j=1}^{n} (z_j - z_0) \prod_{j=2}^{n} (z_j - z_1) \dots \prod_{j=n-1}^{n} (z_j - z_{n-2})(z_n - z_{n-1}) \end{aligned}$$

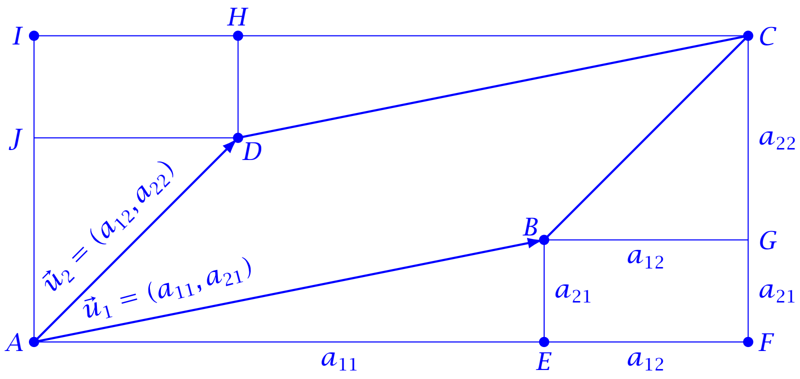
En una forma més compacta, el determinant és:

$$\det V(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$$

(els factors són les diferències de cada paràmetre per tots els paràmetres anteriors a ell).

Exercici 24.11. (pàgina 360) *La figura representa el paral·lelogram $ABCD$ definit pels vectors $\vec{u}_1 = (a_{11}, a_{21})$ i $\vec{u}_2 = (a_{21}, a_{22})$. Calculeu la seua àrea (restant a l'àrea del rectangle* gran *$AFCI$ les dels polígons exteriors a $ABCD$).*

Expresseu el resultat que obteniu com un determinant.



Solució:

La superfície del romboide $ABCD$ és la diferència entre l'àrea del rectangle $AFCI$ i les dels quatre triangles i els dos rectangles exteriors al romboide. Notem, a més, que aquests polígons exteriors tenen àrees iguals dues a dues (per exemple, les àrees dels triangles AEB i DCH són iguals). En conseqüència,

$$\begin{aligned}
\text{Àrea}(ABCD) &= \text{Àrea}(AFCI) - 2\text{Àrea}(AEB) - 2\text{Àrea}(EFGB) - 2\text{Àrea}(BGC) \\
&= (a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22}) - 2\frac{a_{11}a_{21}}{2} - 2a_{12}a_{21} - 2\frac{a_{12}a_{22}}{2} \\
&= a_{11}a_{21} + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{12}a_{22} - a_{11}a_{21} - 2a_{12}a_{21} - a_{12}a_{22} \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Així que la superfície del romboide és el determinant de la matriu $\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix}$.

Exercici 24.12. (pàgina 360) *Si* $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ *és una factorització LU de la matriu* A*, quina relació hi ha entre els determinants de les tres matrius* A*,* L *i* U*? (*No és suficient la resposta $\det \mathsf{A} = \det \mathsf{L} \det \mathsf{U}$*). Potser us convindrà distingir si la factorització és estricta o no ho és.*

Solució:
Si la factorització LU és estricta llavors, la matriu L és triangular inferior i només té uns a la diagonal, així que $\det \mathsf{L} = 1$ i $\det \mathsf{A} = \det \mathsf{U} = \vec{u}_{11}\vec{u}_{22}\ldots\vec{u}_{nn}$.
En cas que la factorització no siga estricta, $\det \mathsf{L} = \pm 1$ i $\det \mathsf{A} = \pm \det \mathsf{U} = \pm\vec{u}_{11}\vec{u}_{22}\ldots\vec{u}_{nn}$.

Exercici 24.13. (pàgina 360) *(a) Quina relació hi ha entre el determinant de la matriu quadrada* A *i el de l'adjunta* A^**? (b) Proveu que si la matriu* A *és unitària llavors el mòdul del determinant de* A *és igual a* 1*. Deduïu que si la matriu* A *és ortogonal llavors* $\det \mathsf{A} = \pm 1$*. (c) Proveu que si la matriu* A *és hermítica llavors el determinant de* A *és real.*

Solució:

(a) Com que els rangs de A i A^* són iguals, si el determinant de A és zero, el de A^* també ho és.

En cas contrari, A és un producte de matrius elementals, $\mathsf{A} = \mathsf{E}_1\mathsf{E}_2\ldots\mathsf{E}_p$, així que $\mathsf{A}^* = \mathsf{E}_p^*\ldots\mathsf{E}_2^*\ldots\mathsf{E}_1^*$ i

$$\det \mathsf{A}^* = \det \mathsf{E}_p^* \ldots \det \mathsf{E}_2^* \ldots \det \mathsf{E}_1^* = \overline{\det \mathsf{E}_p} \ldots \overline{\det \mathsf{E}_2} \ldots \overline{\det \mathsf{E}_1} = \overline{\det \mathsf{A}}$$

perquè els determinants de les adjuntes de les matrius elementals són els conjugats de les matrius elementals corresponents:

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{E}_{i,j}^* &= \det \mathsf{E}_{i,j} = -1 = \overline{\det \mathsf{E}_{i,j}} \\
\det \mathsf{E}_i(\alpha)^* &= \det \mathsf{E}_i(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha} = \overline{\det \mathsf{E}_i(\alpha)} \\
\det \mathsf{E}_{i,j}(\alpha)^* &= \det \mathsf{E}_{j,i}(\overline{\alpha}) = 1 = \overline{\det \mathsf{E}_{i,j}(\alpha)}
\end{aligned}$$

En definitiva, $\det \mathsf{A}^* = \overline{\det \mathsf{A}}$.

(b) Si A és unitària, $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathrm{I}$. Per tant, el valor absolut del determinant de A (al quadrat) és $|\det \mathsf{A}|^2 = \det \mathsf{A}^* \det \mathsf{A} = \det(\mathsf{A}^*\mathsf{A}) = \det \mathrm{I} = 1$.

Això vol dir que el mòdul del determinant és 1. Si la matriu és ortogonal (és a dir, real i unitària), aquest mòdul ha de ser 1 o -1.

(c) Si A és hermítica, és a dir, si $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$, $\det \mathsf{A}^* = \det \mathsf{A}$ i, alhora, $\det \mathsf{A}^* = \overline{\det \mathsf{A}}$, així que $\overline{\det \mathsf{A}} = \det \mathsf{A}$ i això vol dir que $\det \mathsf{A}$ és un nombre real.

Lliçó 25. Altres propietats i aplicacions dels determinants

Exercici 25.1. (pàgina 374) *Calculeu el rang de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Solució:
El determinant de la matriu A és

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 13 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(a la segona fila li hem sumat el triple de la tercera i a la quarta li hem sumat la tercera).
Això vol dir que el rang no és igual a quatre. Però també s'hi veu que les files primera, segona i quarta són proporcionals. Per tant, el rang tampoc no pot ser igual a 3.
Com que hi ha diversos menors 2×2 que no són iguals a zero (per exemple, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3$), el rang de la matriu A és igual a 2.

Exercici 25.2. (pàgina 374) *Discutiu el sistema i, si és possible, apliqueu la regla de Cramer per a resoldre'l:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Solució:
La matriu de coeficients és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

i el determinant d'aquesta matriu

$$\det \mathsf{A} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1$$

Per tant, hi podem aplicar la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\det \mathsf{A}(1)}{\det \mathsf{A}} = \det \begin{bmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$x_2 = \frac{\det \mathsf{A}(2)}{\det \mathsf{A}} = \det \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$x_3 = \frac{\det \mathsf{A}(3)}{\det \mathsf{A}} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

Exercici 25.3. (pàgina 374) *Discutiu el sistema i, en els casos determinats, apliqueu la regla de Cramer per a resoldre'l:*

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 &= b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

Solució:
La matriu ampliada és aquesta:

$$\mathsf{B} = \left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right]$$

El determinant de A és

$$\begin{aligned} \det \mathsf{A} &= \det \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix} = b \det \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \\ &= b(a+2) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} = b(a+2) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \\ &= b(a+2)(a-1)^2 \end{aligned}$$

Així que el rang de A és 3 sempre que $b \neq 0$, $a \neq 1$ i $a \neq -2$. En aquest cas, el sistema és determinat i s'hi pot aplicar la regla de Cramer; per exemple,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{b(a+2)(a-1)^2} \det \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix} = \frac{b}{b(a+2)(a-1)^2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(a+2)(a-1)^2} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & 1-b \\ 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(a+2)(a-1)^2}(a-b)(a-1) \\ &= \frac{a-b}{(a+2)(a-1)} \end{aligned}$$

En els casos especials,

(a) Si $b = 0$ $\operatorname{rang} \mathsf{A} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ és 1 per a $a = 1$ i 2 en cas contrari. I el rang de la matriu ampliada, $\operatorname{rang} \mathsf{B} = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right] = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$. El determinant d'aquesta matriu és $\det \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \end{bmatrix} =$ $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-a & a-1 \end{bmatrix} = 2a$, així que

(a1) Si $b = 0$ i $a \neq 0$, $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 2$ i $\operatorname{rang} \mathsf{B} = 3$. El sistema és incompatible.

(a2) Si $b = 0$ i $a = 0$, $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 2$ i $\operatorname{rang} \mathsf{B} = 2$. El sistema és indeterminat. Substituint $b = 0$, $a = 0$ el sistema lineal és $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Com que les files 1a i 3a són independents podem suprimir la segona equació i tindrem $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és a dir, $x_1 = 1$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 1$ (no és necessària la regla de Cramer, perquè les incògnites ja estan separades).

(b) Si $b \neq 0$ i $a = 1$, $\operatorname{rang} \mathsf{B} = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array}\right] = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = 2$, però $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 1$ i el sistema és incompatible.

(c) Si $b \neq 0$ i $a = -2$,

$$\operatorname{rang} \mathsf{B} = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & 0 \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array}\right] = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \operatorname{rang} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = 3$$

i el rang de A és 2 (sistema incompatible).

Exercici 25.4. (pàgina 375) *Fent servir els determinants, justifiqueu que la matriu següent, A, és invertible i calculeu la matriu inversa A^{-1}.*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solució:
El determinant de la matriu A és $\det \mathsf{A} = 5$, així que aquesta matriu és invertible. La matriu inversa és

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercici 25.5. (pàgina 375) ***(Valors propis i vectors propis)*** *Trobeu els valors del paràmetre λ per als quals la matriu*

$$\mathsf{A}_\lambda = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

no *és invertible i calculeu l'espai nul de la matriu A_λ per a cadascun d'aquests valors.*

Solució:
La matriu no serà invertible si $\det \mathsf{A}_\lambda = 0$, així que calculem aquest determinant:

$$\begin{aligned} \det \mathsf{A}_\lambda &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) \end{aligned}$$

Per tant, si $\lambda \in \{1, -1, 2\}$ la matriu A_λ no és invertible. En qualsevol altre cas sí que ho és.

L'espai nul de A_1 és el conjunt de solucions del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

La forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ és $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, així que la solució és

$$\operatorname{Nul} \mathsf{A}_1 = \{\alpha(1,0,1) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$$

De manera semblant s'obtenen els altres dos espais nuls:

$$\operatorname{Nul} \mathsf{A}_{-1} = \{\alpha(1,1,0) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$\operatorname{Nul} \mathsf{A}_2 = \{\alpha(0,0,1) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$$

LLIÇÓ 26. ENDOMORFISMES I MATRIUS DIAGONALITZABLES

EXERCICI 26.1. (pàgina 395) *Estudieu si són diagonalitzables les matrius*

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -9 & -7 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

En cas que ho siguen, diagonalitzeu-les.

Solució:

(a) L'equació característica és $\begin{vmatrix} 8-\lambda & 6 \\ -9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (8-\lambda)(-7-\lambda)+54 = 0.$
Resolent aquesta equació obtenim els valors propis $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$, així que la matriu és diagonalitzable.
Els vectors propis s'obtenen resolent un parell de sistemes lineals:

$$\begin{bmatrix} 8-2 & 6 \\ -9 & -7-2 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -9 & -9 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \longleftrightarrow \vec{x} = \alpha(-1,1)$$
$$\begin{bmatrix} 8+1 & 6 \\ -9 & -7+1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \longleftrightarrow \vec{x} = \alpha(-2/3,1)$$

Elegint els vectors propis $\vec{p}_1 = (-1,1)$ i $\vec{p}_2 = (-2,3)$ tindrem

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

(b) L'equació característica és $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)^2 + 16 = 0$, així que els valors propis són $\lambda_1 = 3+4\mathrm{i}$ i $\lambda_2 = 3-4\mathrm{i}$, així que la matriu és diagonalitzable en el camp complex, però no com a matriu real.
En el cas complex, els vectors propis són de la forma $\vec{p}_1 = \alpha(1,\mathrm{i})$ i $\vec{p}_2 = \alpha(-1,\mathrm{i})$ i tindrem

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+4\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 3-4\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix}^{-1}$$

EXERCICI 26.2. (pàgina 395) *Estudieu si les matrius*

$$\text{(a)}\ \ \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)}\ \ \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(c)}\ \ \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(d)}\ \ \mathsf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

són diagonalitzables. En cas que ho siguen, diagonalitzeu-les.

Solució:

(a) El polinomi característic de la matriu A és

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -4 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2) = (3-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 3$ (simple) i $\lambda_2 = 2$ (doble). La multiplicitat geomètrica de λ_2 és

$$\operatorname{mgeo}(2,\mathsf{A}) = \dim \operatorname{Nul}(\mathsf{A}-3\mathrm{I}) = \dim \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= 3 - \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3-2 = 1$$

Com que $\operatorname{mgeo}(2,\mathsf{A}) \neq \operatorname{malg}(2,\mathsf{A})$ la matriu no és diagonalitzable.

(b) En el cas de la matriu B, l'equació característica de la matriu és

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

és a dir, $(1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$. Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = 3$. Com que per a cada valor propi ha d'existir almenys un valor propi, elegint-ne un per cada valor propi obtindrem tres vectors propis independents, de manera que la matriu B és diagonalitzable. Els subespais propis són

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{B}-\mathrm{I}) = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{B}+\mathrm{I}) = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1,1,0) \rangle$$

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{B}-3\mathrm{I}) = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (3,1,4) \rangle$$

Per tant,

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

(c) El polinomi característic de la matriu C és

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda)$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 3$, amb multiplicitats algèbriques $\operatorname{malg}(0, \mathsf{C}) = 2$ i $\operatorname{malg}(3, \mathsf{C}) = 1$ Les multiplicitats geomètriques són

$$\begin{aligned} \operatorname{mgeo}(0, \mathsf{C}) &= \dim \operatorname{Nul}(\mathsf{C} - 3\mathrm{I}) = \dim \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \\ \operatorname{mgeo}(3, \mathsf{C}) &= \dim \operatorname{Nul}(\mathsf{C} - 3\mathrm{I}) = \dim \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 3 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

així que la matriu és diagonalitzable. Els subespais propis són

$$\operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$$

$$\operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

així que

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

(d) Qualsevol matriu diagonal és diagonalitzable. En el cas de la matriu O, a més a més, qualsevol que siga la matriu invertible P, tindrem $\mathrm{O} = \mathsf{P}\mathrm{O}\mathsf{P}^{-1}$.

Exercici 26.3. (pàgina 396) *Determineu per a quins valors del paràmetre a és diagonalitzable la matriu real*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & -a & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solució:
L'equació característica és

$$\det(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} a-\lambda & -a & 6 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(\lambda^2-4) = 0$$

així que els valors propis són $a, 2, -2$. Distingirem tres casos:

(a) Si $a \neq 2$ i $a \neq -2$, llavors hi ha tres valors propis distints i la matriu és diagonalitzable.

(b) Si $a = 2$, llavors els valors propis són $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$, amb multiplicitats algèbriques $\operatorname{malg}(2, \mathsf{A}) = 2$ i $\operatorname{malg}(-2, \mathsf{A}) = 1$. Per tant, la matriu serà diagonalitzable si $\operatorname{mgeo}(2, \mathsf{A}) = 2$. Ara,

$$\begin{aligned} \operatorname{mgeo}(2,\mathsf{A}) &= \dim \operatorname{Nul}(\mathsf{A}-2\mathrm{I}) = 3 - \operatorname{rang}(\mathsf{A}-2\mathrm{I}) \\ &= 3 - \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 2-2 & -2 & 6 \\ 0 & 1-2 & 3 \\ 0 & 1 & -1-2 \end{bmatrix} \\ &= 3 - \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

així que la matriu és diagonalitzable.

(c) Si $a = -2$, llavors els valors propis són $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$, amb multiplicitats algèbriques $\operatorname{malg}(2, \mathsf{A}) = 1$ i $\operatorname{malg}(-2, \mathsf{A}) = 2$. Per tant, la matriu serà diagonalitzable si $\operatorname{mgeo}(-2, \mathsf{A}) = 2$. Ara,

$$\begin{aligned} \operatorname{mgeo}(-2,\mathsf{A}) &= \dim \operatorname{Nul}(\mathsf{A}+2\mathrm{I}) = 3 - \operatorname{rang}(\mathsf{A}+2\mathrm{I}) \\ &= 3 - \operatorname{rang}\begin{bmatrix} -2+2 & 2 & 6 \\ 0 & 1+2 & 3 \\ 0 & 1 & -1+2 \end{bmatrix} \\ &= 3 - \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

així que la matriu no és diagonalitzable.

En resum, la matriu A és diagonalitzable sempre que $a \neq -2$.

EXERCICI 26.4. (pàgina 396) *Proveu que si la matriu complexa $n \times n$ A té n valors propis distints, llavors aquesta matriu és diagonalitzable.*

Solució:
Si els valors propis són λ_1, λ_2, …, λ_n i elegim un vector propi per a cadascun, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, …, $\vec{p}_n$, llavors $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ és una base de $\mathbb{K}^n$ formada per vectors propis.

Exercici 26.5. (pàgina 396) *Determineu per a quins valors del paràmetre a és diagonalitzable la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

Diagonalitzeu-la en el cas $a = 0$.

Solució:
L'equació característica és

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ a & 0 & a-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (a-\lambda)((1-\lambda)(a-\lambda) - a) = \lambda(a-\lambda)(\lambda - (a+1))$$

així que els valors propis són $0, a, a+1$. Aquests tres valors propis són distints excepte en els casos: $a = 0$ i $a = -1$. Per tant, si $a \neq 0$ i $a \neq -1$, la matriu és diagonalitzable. En el cas $a = 0$, tenim que

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i els valors propis són $\lambda_1 = 0$ (doble) i $\lambda_2 = 1$. Com que $\operatorname{rang}(\mathsf{A} - 0\mathrm{I}) = \operatorname{rang} \mathsf{A} = 1$, $\dim \operatorname{Nul}(\mathsf{A} - 0\mathrm{I}) = 2$ i la matriu és diagonalitzable. Finalment, si $a = -1$,

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

els valors propis són $\lambda_1 = 0$ (doble) i $\lambda_2 = -1$. El rang de $\mathsf{A} - 0\mathrm{I}$ és $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 2$ i la matriu no és diagonalitzable.
En definitiva, A és diagonalitzable sempre que a no siga -1.

Si $a = 0$, els subespais propis són

$$E_0 = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1,0,1), (0,1,0) \rangle$$

$$E_1 = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,0,0) \rangle$$

i tenim

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Exercici 26.6. (pàgina 396) *Proveu que els valors propis d'una matriu triangular són els elements de la diagonal principal d'aquesta matriu.*

Solució:
Si la matriu A és triangular,

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

llavors el polinomi característic també és un determinant triangular:

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$$

i els valors propis són $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Exercici 26.7. (pàgina 396) *Proveu que la matriu $n \times n$*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

és diagonalitzable i trobeu dues matrius P*, invertible, i* D*, diagonal, de manera que* $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$ *(podeu* inspirar-vos *en un exercici anterior).*

Solució:
El polinomi característic és

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & \cdots & 1 \\ \cdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n - \lambda & n - \lambda & \cdots & n - \lambda \\ 1 & 1 - \lambda & \cdots & 1 \\ \cdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{n-1}(n - \lambda)$$

així que els valors propis són $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = n$, amb miltiplicitats algèbriques $n - 1$ i 1, respectivament. La multiplicitat geomètrica de λ_1 és:

$$\mathrm{mgeo}(0, \mathsf{A}) = n - \mathrm{rang}(\mathsf{A}) = n - \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = n - 1$$

així que la matriu és diagonalitzable. Calculem els subespais propis:

$$E_0(\mathsf{A}) = \operatorname{Nul}\mathsf{A} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \langle(-1,1,0,\dots,0),(-1,0,1,\dots,0),\dots,(-1,0,0,\dots,1)\rangle$$

Per trobar un vector propi associat al valor propi n observem que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \\ \cdots \\ n \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

així que $E_n(\mathsf{A}) = \langle(1,1,1,\dots,1)\rangle$. En definitiva,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Exercici 26.8. (pàgina 396) *Una matriu* escalar *és una matriu diagonal amb totes les entrades diagonals iguals, és a dir, una matriu de la forma* $a\mathrm{I}$.

Proveu que les úniques matrius diagonalitzables que tenen només un valor propi són les matrius escalars.

Solució:
Si A és diagonalitzable i només té un valor propi, λ_1, existeix una matriu invertible P tal que

$$\mathsf{A} = \mathsf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}\mathsf{P}^{-1} = \lambda_1\mathsf{P}\mathrm{I}\mathsf{P}^{-1} = \lambda_1\mathrm{I}$$

i A és una matriu escalar. □

Exercici 26.9. (pàgina 396) *Estudieu si són diagonalitzables els endomorfismes de* $\mathbb{R}^2$ *o* $\mathbb{R}^3$ *següents:*

(a) $f(x_1,x_2) = (2x_1 - x_2, -4x_1 + 2x_2)$

(b) $f(x_1,x_2) = (x_1 + ax_2, ax_2)$ *(segons els valors de* $a \in \mathbb{R}$*)*

(c) $f(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3)$

(d) $f(x_1,x_2,x_3) = (-x_1 - 3x_2 - 9x_3, 5x_2 + 18x_3, -2x_2 - 7x_3)$

(e) $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + 5x_2 + 6x_3, -3x_2 + 2x_3, 5x_3)$

(f) $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, 5x_3)$

Solució:

(a) $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -4x_1 + 2x_2)$
L'equació característica és

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = 0$$

i els valors propis són 0 i 4. Com que són distints, l'aplicació lineal és diagonalitzable.

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1 + ax_2, ax_2)$
La matriu canònica és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Com que és una matriu triangular, els valors propis són els elements de la diagonal, $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = a$. En cas que $a \neq 1$, hi ha dos valors propis distints, i l'aplicació lineal és diagonalitzable. Però si $a = 1$ hi ha un sol valor propi doble i la matriu no és diagonal, així que no és diagonalitzable.

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
La matriu canònica d'aquest endomorfisme és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

així que l'equació característica serà

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculem el determinant:

$$\begin{aligned}
\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1+\lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
= (1+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (1+\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
= (1+\lambda)\begin{vmatrix} 4 & -\lambda \\ 7-\lambda & 2 \end{vmatrix} &= (1+\lambda)(8 + 7\lambda - \lambda^2)
\end{aligned}$$

En conseqüència, l'equació característica serà

$$(1+\lambda)(8 + 7\lambda - \lambda^2) = 0$$

i els valors propis són $\lambda_1 = -1$ (doble) i $\lambda_1 = 8$.

Tots els valors propis són reals, així que perquè l'endomorfisme siga diagonalitzable, el que ha de passar és que

(a) $\text{mgeo}(-1) = \text{malg}(-1) = 2$ (b) $\text{mgeo}(8) = \text{malg}(8) = 1$

i només hem de comprovar la primera igualtat, perquè per als valors propis simples sempre són iguals les multiplicitats artimètica i geomètrica. Ara bé, la multiplicitat geomètrica del valor propi -1 és

$$\dim \text{Nul}(\mathsf{A} + \text{I}) = 3 - \text{rang}(\mathsf{A} - (-1)\text{I}) = 3 - \text{rang} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$$

I podem concloure que l'endomorfisme f és diagonalitzable.

(d) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 3x_2 - 9x_3, 5x_2 + 18x_3, -2x_2 - 7x_3)$
La matriu canònica és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

l'equació característica,

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\text{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 18 \\ -2 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(-(5-\lambda)(7+\lambda) + 36) = 0(1+\lambda)^3 = 0$$

Així que hi ha un únic valor propi, $\lambda = -1$ amb multiplicitat algèbrica 3. La multiplicitat geomètrica és

$$\dim \text{Nul}(\mathsf{A} + \text{I}) = 3 - \text{rang}(\mathsf{A} + \text{I}) = 3 - \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$$

i l'endomorfisme no és diagonalitzable.

(e) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 5x_2 + 6x_3, -3x_2 + 2x_3, 5x_3)$
Ací la matriu canònica és triangular i els valors propis són 2, -3 i 5, tots simples. Per tant, l'endomorfisme és diagonalitzable.

(f) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, 5x_3)$
La matriu canònica és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

l'equació característica,

$$\det(\mathsf{A}-\lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)[(1-\lambda)^2+1] = 0$$

Així que els valors propis són 5, $1+\mathrm{i}$ i $1-\mathrm{i}$, i l'endomorfisme no és diagonalitzable, perquè hi ha valors propis que no són reals.

Exercici 26.10. (pàgina 397) *Estudieu si els endomorfismes de* $\mathbb{R}^3$

$$f(x_1,x_2,x_3) = (-2x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3)$$
$$g(x_1,x_2,x_3) = (-2x_1, x_1+x_2, x_1+x_3)$$

són diagonalitzables. En cas que ho siguen, trobeu una base de vectors propis.

Solució:
La matriu canònica de l'endomorfisme f és aquesta:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

així que els valors propis són $\lambda_1 = -2$, amb multiplicitat algèbrica 1, i $\lambda_2 = 1$, amb multiplicitat algèbrica 2. Per tant, endomorfisme serà diagonalitzable si la multiplicitat geomètrica del valor propi λ_2 és 2. Ara bé,

$$\mathrm{mgeo}(\lambda_2) = \dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-1\mathrm{I}) = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3-2 = 1$$

així que f no és diagonalitzable.

En el cas de l'aplicació g, la matriu canònica és

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Els valors propis i les multiplicitats algèbriques són els mateixos, però ara la multiplicitat geomètrica de $\lambda_2 = 1$ serà

$$\mathrm{mgeo}(\lambda_2) = \dim \mathrm{Nul}(\mathsf{B}-1\mathrm{I}) = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3-1 = 2$$

així que g sí que és diagonalitzable. Els espais propis són

$$E_{-2} = \mathrm{Nul}(\mathsf{B} + 2\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \langle(-3, 1, 1)\rangle$$

$$E_1 = \mathrm{Nul}(\mathsf{B} - \mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle(0, 1, 0), (0, 0, 1\rangle$$

així que $\mathcal{B} = \{(-3, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ és una base de vectors propis.

Exercici 26.11. (pàgina 397) *Estudieu si l'endomorfisme de l'espai $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definit per $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ és diagonalitzable. En cas que ho siga, trobeu una base de vectors propis.*

Solució:
Podem provar-ho cercant la matriu de l'endomorfisme associada a una base (per exemple, la canònica). Però en comptes d'això, cercarem directament valors i vectors propis d'aquest endomorfisme: si hi ha quatre vectors propis linealment independents, això significarà que l'endomorfisme és diagonalitzable.
La matriu A és un vector propi associat al valor propi λ si $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \lambda\mathsf{A}$, és a dir, si $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = (\lambda - 1)\mathsf{A}$. I hi ha dues classes de matrius ben conegudes que tenen aquesta propietat: les matrius simètriques i les antisimètriques:

- $\lambda_1 = 0$ és un vector propi i les matrius antisimètriques hi són vectors propis associats, perquè, si A és antisimètrica, $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = (0 - 1)\mathsf{A}$.
- $\lambda_2 = 2$ és un vector propi i les matrius simètriques hi són vectors propis associats, perquè, si A és simètrica, $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = (2 - 1)\mathsf{A}$.

D'altra banda, qualsevol matriu antisimètrica és de la forma $\alpha\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, qualsevol matriu simètrica, de la forma $\alpha_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, així que el conjunt $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ és una base formada per vectors propis.

Exercici 26.12. (pàgina 397) *En aquest exercici trobem un endomorfisme diagonalitzable en un espai de dimensió infinita.*

(a) Demostreu que l'endomorfisme de $\mathbb{K}_3[x]$ $f_3(p(x)) = p(x) + xp'(x) + p''(x)$ és diagonalitzable i trobeu una base de $\mathbb{K}_3[x]$ per a la qual la matriu de f és diagonal.

(b) Demostreu que l'endomorfisme de $\mathbb{K}_n[x]$ $f_n(p(x)) = p(x) + xp'(x) + p''(x)$ és diagonalitzable.

(c) Demostreu que l'endomorfisme de $\mathbb{K}[x]$ $f(p(x)) = p(x) + xp'(x) + p''(x)$ és diagonalitzable.

Solució:

(a) Les imatges dels polinomis de la base canònica són

$$\begin{aligned} f_3(1) &= 1+0+0 = 1+0x+0x^2+0x^3 \\ f_3(x) &= x+x+0 = 0+2x+0x^2+0x^3 \\ f_3(x^2) &= x^2+2x^2+2 = 2+0x+3x^2+0x^3 \\ f_3(x^3) &= x^3+3x^3+6x = 0+6x+0x^2+4x^3 \end{aligned}$$

així que la matriu d'aquest endomorfisme respecte a la base canònica és $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Aquesta matriu té quatre valors propis, tots amb multiplicitat algèbrica igual a 1, així que l'endomorfisme és diagonalitzable. Per a diagonalitzar-lo, hem de trobar els polinomis propis.

- Els polinomis $p_1(x) = 1$ i $p_2(x) = x$ són vectors propis, associats als valors propis $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$, perquè ja sabem que $f_3(1) = 1$ i $f_3(x) = 2x$.
- Cerquem un vector propi de la matriu A associat al valor propi $\lambda_3 = 3$. El subespai propi és

$$E_{-3}(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle (1,0,1,0) \rangle$$

  Això vol dir que $p_3(x) = 1 + x^2$ és un vector propi de l'endomorfisme f_3, associat al valor propi λ_3.
- El subespai propi de la matriu A associat a $\lambda_4 = 4$ és

$$E_4(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,3,0,1) \rangle$$

  així que $p_4(x) = 3x + x^3$ és un vector propi.

El conjunt $\mathcal{B} = \{1, x, 1+x^2, 3x+x^3\}$ és una base de $\mathbb{K}_3[x]$ formada per vectors propis de l'endomorfisme f_3.

(b) Les imatges de la base canònica de $\mathbb{K}[x]$ són

$$f_n(x^n) = x^n + x\,(nx^{n-1}) + n(n-1)x^{n-2} = (n+1)x^n + n(n-1)x^{n-2}$$

per tant, la matriu associada a l'endomorfisme f_n en la base canònica és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & n-1 & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n+1 \end{bmatrix}$$

Els valors propis són $1, 2, 3, \dots, n+1$, tots simples. Així que l'endomorfisme és diagonalitzable.

(c) De l'apartat anterior es dedueix que tots els nombres naturals són valors propis de l'endomorfisme f. Per tant, podem elegir un vector propi, $p_n(x)$, associat a cada valor propi n.

Ara, per a tot n, si $p(x)$ és un polinomi de grau n, $p(x)$ és una combinació lineal dels polinomis propis $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_{n+1}(x)$. Així que el conjunt de vectors propis $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), \dots\}$ genera l'espai $\mathbb{K}[x]$.

EXERCICI 27.1. (pàgina 406) *Sabent que la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 5 \\ 2 & 17 & -7 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ *té un únic valor propi,* $\lambda_1 = 9$*, trobeu-ne una factorització de Schur.*

Solució:
En primer lloc, trobarem una forma triangular, T_1, de la matriu. Tinguem en compte que totes les entrades de la diagonal de la matriu T_1 han de ser iguals a 9. Primer de tot, cercarem el subespai propi $E_9(\mathsf{A})$:

$$E_9(\mathsf{A}) = \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 9\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -4 & -7 & 5 \\ 2 & 8 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \langle(-1/2, 1, 1)\rangle$$

Podem elegir el vector propi, $\vec{u}_1 = (-1, 2, 2)$.
Ara necessitem un vector $\vec{u}_2$ tal que $\mathsf{A}\vec{u}_2 = a\vec{u}_1 + 9\vec{u}_2$; això és equivalent a $(\mathsf{A} - 9\mathrm{I})\vec{u}_2 = a\vec{u}_1$, és a dir, que $\vec{u}_2$ ha de ser una solució del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} -4 & -7 & 5 \\ 2 & 8 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

la solució general del qual és $\vec{x} = a(-1/3, 1/3, 0) + \alpha(-1/2, 1, 1)$. Podem elegir $a = 3$ i $\alpha = 0$ i tindrem $\vec{u}_2 = (-1, 1, 0)$. Els vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són independents, i podem completar una base de $\mathbb{K}^3$ amb qualsevol altre vector que hi siga independent; per exemple, $\vec{u}_3 = (1, 0, 0)$. Aleshores,

$$\mathsf{A}\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 5 \\ 2 & 17 & -7 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En conseqüència,

$$\mathsf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}}\underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{\mathsf{T}_1}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}}$$

Ara cerquem una factorització QR de la matriu P:

$$\mathsf{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Llavors, si $\mathsf{U} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ i

$$\mathsf{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 9 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 & 5 \\ 2 & 17 & -7 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -9 & 9 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)^{*}$$

és una factorització de Schur de la matriu A.

Exercici 27.2. (pàgina 406) *És possible que una matriu siga diagonalitzable però que cap forma de Schur d'aquesta matriu no siga diagonal?*

Solució:
Sí. Perquè hi haja una forma de Schur diagonal, ha d'haver-hi una base ortonormal de vectors propis. Suposem que A és una matriu 2×2 diagonalitzable $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$, amb dos valors propis, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, i dos vectors propis associats, $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$, que no són ortogonals entre ells, llavors, qualsevol base formada per vectors propis és $\{\alpha_1\vec{p}_1, \alpha_2\vec{p}_2\}$, $\alpha_1 \neq 0$ i $\alpha_2 \neq 0$. Com que $\alpha_1\vec{p}_1 \cdot \alpha_2\vec{p}_2 \neq 0$, no hi ha cap base ortonormal que diagonalitze la matriu. Per exemple, la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ és diagonalitzable i no té formes de Schur diagonals.

☞ Les matrius que tenen una forma de Schur diagonal són les matrius normals, que estudiarem a la lliçó següent.

Exercici 27.3. (pàgina 407) *Proveu que la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{i} \\ -\mathsf{i} & 0 \end{bmatrix}$ *és unitària i diagonalitzeu-la unitàriament.*

Solució:
La matriu és unitària, perquè les seues columnes són ortonormals. Els valors propis són les arrels de l'equació característica

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mathsf{i} \\ -\mathsf{i} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0$$

és a dir, $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$, i els subespais propis,

$$E_1 = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & \mathsf{i} \\ -\mathsf{i} & -1 \end{bmatrix} = \langle(\mathsf{i}, 1)\rangle \qquad E_{-1} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & \mathsf{i} \\ -\mathsf{i} & 1 \end{bmatrix} = \langle(-\mathsf{i}, 1)\rangle$$

Així que $\mathcal{B} = \{(\sqrt{2}/2)(\mathrm{i}, 1), (\sqrt{2}/2)(-\mathrm{i}, 1)\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ i

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 27.4. (pàgina 407) *Diagonalitzeu ortogonalment les matrius simètriques següents*

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solució:

(a) El polinomi característic és

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = \det\begin{bmatrix} 7-\lambda & -6 \\ -6 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (7-\lambda)(-2-\lambda) - 36$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda - 50 = (\lambda - 10)(\lambda + 5)$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 10$ i $\lambda_2 = -5$.
Els subespais propis són

$$E_{10} = \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 10\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 7-10 & -6 \\ -6 & -2-10 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$
$$= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle(-2, 1)\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1) \right\rangle$$
$$E_{-5} = \mathrm{Nul}(\mathsf{A} + 5\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 7+5 & -6 \\ -6 & -2+5 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle(1, 2)\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \right\rangle$$

Així que

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

(b) El polinomi característic és

$$\det(\mathsf{B} - \lambda \mathrm{I}) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 16) = -(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda+4)$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ i $\lambda_3 = -4$.
Els subespais propis són

$$E_{-2} = \mathrm{Nul}(\mathsf{B} + 2\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,1,0) \rangle$$

$$E_{4} = \mathrm{Nul}(\mathsf{B} - 4\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,0,1) \rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \right\rangle$$

$$E_{-4} = \mathrm{Nul}(\mathsf{B} + 4\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1,0,1) \rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \right\rangle$$

Així que

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

(c) El polinomi característic és

$$\det(\mathsf{C} - \lambda\mathrm{I}) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = -1$.
Els subespais propis són

$$E_{0} = \mathrm{Nul}(\mathsf{C} - 0\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$E_{1} = \mathrm{Nul}(\mathsf{C} - 1\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \right\rangle$$

$$E_{-1} = \mathrm{Nul}(\mathsf{C} + 1\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \right\rangle$$

Així que

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

(d) El polinomi característic és

$$\det(\mathsf{E} - \lambda \mathrm{I}) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda)^2$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 4$, tots dos amb multiplicitats dobles.

Els subespais propis són

$$\begin{aligned} E_2 = \mathrm{Nul}(\mathsf{E} - 2\mathrm{I}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1) \right\rangle \\ E_4 = \mathrm{Nul}(\mathsf{E} - 4\mathrm{I}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} &= \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1) \right\rangle \end{aligned}$$

Normalment, quan un valor propi és múltiple s'ha d'aplicar el mètode de Gram-Schmidt o alguna altra tècnica per aconseguir-ne una base ortonormal. Però en aquest cas hem trobat una base ortogonal directament, de manera que només hem hagut de normalitzar-la. Així que

$$\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

EXERCICI 27.5. (pàgina 407) *Diagonalitzeu ortogonalment la matriu simètrica* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solució:
El polinomi característic és

$$\det(\mathsf{E}-\lambda \mathrm{I}) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\lambda^2$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 0$ (doble).
Els subespais propis són

$$E_3 = \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-3\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \langle (1,1,1) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\rangle$$
$$E_0 = \mathrm{Nul}(\mathsf{A}-0\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1,0,1), (-1,1,0) \rangle$$

Aplicant el mètode de Gram-Schmidt a la base de E_0 obtenim que

$$E_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1) \right\rangle$$

Així que

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

EXERCICI 27.6. (pàgina 407) *Expresseu la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *com una combinació lineal de matrius de rang un,* $\mathsf{A} = \lambda_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1^{\mathsf{T}} + \lambda_2 \vec{q}_2 \vec{q}_2^{\mathsf{T}} + \lambda_3 \vec{q}_3 \vec{q}_3^{\mathsf{T}}$*, on* λ_1*,* λ_3*,* λ_3 *són els valors propis i* $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ *és una base ortonormal de vectors propis.*

Solució:
Els valors propis de la matriu A són $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, i $\lambda_3 = 9$ i els subespais propis, $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-3\mathrm{I}) = \langle (2,1,2) \rangle$, $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-6\mathrm{I}) = \langle (1,2,-2) \rangle$ i $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-3\mathrm{I}) = \langle (2,-2,-1) \rangle$. Per obtenir una base ortonormal basta que dividim els vectors propis per les seues normes: $\vec{q}_1 = (1/3)(2,1,2)$, $\vec{q}_2 = (1/3)(1,2,-2)$, $\vec{q}_3 = (1/3)(2,-2,-1)$. Aleshores,

$$\mathsf{A} = 3\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 6\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} + 9\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A} = 3\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} + 6\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} + 9\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 27.7. (pàgina 407) *Proveu que les úniques matrius reals que són diagonalitzables ortogonalment són les simètriques.*

Solució:
Si A és diagonalitzable ortogonalment, és a dir, si $\mathsf{A} = \mathsf{QDQ}^\mathsf{T}$, amb D diagonal i Q ortogonal, llavors

$$\mathsf{A}^\mathsf{T} = (\mathsf{QDQ}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathsf{Q}^{\mathsf{T}\mathsf{T}}\mathsf{D}^\mathsf{T}\mathsf{Q}^\mathsf{T} = \mathsf{QDQ}^\mathsf{T} = \mathsf{A}$$

així que A és simètrica.

Exercici 27.8. (pàgina 407) *Proveu que si* A *és una matriu real qualsevol, llavors tots els valors propis de la matriu* $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ *són reals no negatius.*

Solució:
La matriu $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ és simètrica, així que els valors propis són reals. D'altra banda, si λ és un valor propi de $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ amb vector propi unitari associat $\vec{q}$, llavors

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\vec{q} = \lambda\vec{q} \Rightarrow \|\mathsf{A}\vec{q}\|^2 = \vec{q}^{\,\mathsf{T}}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\vec{q} = \lambda\vec{q}^\mathsf{T}\vec{q} = \lambda$$

Així que $\lambda = \|\mathsf{A}\vec{q}\|^2 \geq 0$.

Lliçó 28. Aplicacions de la diagonalització

Exercici 28.1. (pàgina 423) *Calculeu el terme general de la successió $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_n = -4a_{n-2} = 0$, si $n \geq 2$.*

Solució:
Si $\vec{a}_n = (a_n, a_{n+1})$, llavors $\vec{a}_0 = (1, -1)$, $\vec{a}_n = \mathsf{A}\vec{a}_{n-1} = \mathsf{A}^n(1, -1)$.
I, com que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 2^n & \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2^n & (-2)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Llavors, el terme general de la successió $\{a_n\}$ és $a_n = \frac{1}{4}(2^n + 3(-2)^n)$.

Exercici 28.2. (pàgina 423) *Resoleu l'equació (matricial) en diferències $\vec{x}_n = \mathsf{A}\vec{x}_{n-1}$, on*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solució:
El terme general de la successió $\vec{x}_n$ és $\vec{x}_n = \mathsf{A}\vec{x}_{n-1} = \mathsf{A}^2\vec{x}_{n-2} = \cdots = \mathsf{A}^n\vec{x}_0$.
D'altra banda, la matriu simètrica A ja l'hem diagonalitzada a l'exercici 27.5.:
$\mathsf{A} = \mathsf{QDQ}^\mathsf{T}$ amb $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \vec{q}_3 \end{bmatrix}$ ($\vec{q}_1 = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$, $\vec{q}_2 = (1/\sqrt{2})(-1, 0, 1)$, $\vec{q}_3 = (1/\sqrt{6})(-1, 1, 0)$), així que

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^n &= \mathsf{QD}^n\mathsf{Q}^\mathsf{T} = 3^n \vec{q}_1\vec{q}_1^\mathsf{T} + 0\vec{q}_2\vec{q}_2^\mathsf{T} + 0\vec{q}_3\vec{q}_3^\mathsf{T} \\ &= 3^n \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solució general de l'equació en diferències és $\vec{x}_n = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}_0$.

Realment, aquesta equació la podríem haver resolt fàcilment, sense recórrer a la diagonalització, perquè és clar que

$$\mathsf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3\mathsf{A}, \qquad \mathsf{A}^3 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} = 3^2\mathsf{A}, \qquad \cdots, \qquad \mathsf{A}^n = 3^{n-1}\mathsf{A}$$

Exercici 28.3. (pàgina 423) *Suposant que la matriu quadrada, $m \times m$, A és diagonalitzable ($\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$, amb D diagonal), trobeu el conjunt de totes les solucions de l'equació en diferències $\vec{a}_n = \mathsf{A}\vec{a}_{n-1}$.*

Solució:
Si $\mathsf{A} = \mathsf{PDP}^{-1}$, $\vec{a}_n = \mathsf{PD}^n\mathsf{P}^{-1}\vec{a}_0$. Observem que per a cada elecció del vector inicial $\vec{a}_0$ hi trobarem una solució de l'equació, així que el conjunt de totes les solucions s'obté elegint tots els vectors $\vec{a}_0 \in \mathbb{C}^m$; i, com que P^{-1} és invertible, el producte $\mathsf{P}^{-1}\vec{a}_0$ també recorre tots els vectors. Això vol dir que les solucions són totes les successions de la forma $\vec{a}_n = \mathsf{PD}^n\vec{C}$ (on $\vec{C}$ és un vector arbitrari), és a dir,

$$\vec{a}_n = C_1\lambda_1^n\vec{p}_1 + C_2\lambda_2^n\vec{p}_2 + \cdots + C_1\lambda_m^n\vec{p}_m$$

on $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ són els valors propis de la matriu A.

Exercici 28.4. (pàgina 423) *Resoleu el sistema d'equacions diferencials lineals*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned}$$

i trobeu la solució particular que compleix les condicions inicials
$y_1(0) = -1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 1$.

Solució:
En forma matricial, aquest sistema és

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{y} = \mathsf{A}\vec{y}$$

La matriu A és diagonalitzable i

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

En conseqüència, la solució general serà

$$\vec{y} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3\mathsf{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per trobar la solució particular, hem de substituir $t = 0$ en la solució general i igualar-la al vector $(-1, 2, 1)$:

$$C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \mathrm{e}^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{y}(0)$$

$$C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolent aquest sistema lineal obtenim $\vec{C} = (1/3)(4, 1, 2)$, així que la solució particular que cerquem és

$$\vec{y} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 28.5. (pàgina 424) *Resoleu el sistema d'equacions diferencials lineals*

$$\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \vec{y}$$

Solució:

La matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ no és diagonalitzable. Així que farem servir una forma de Schur:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathsf{T}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{U}^*}$$

Fent el canvi $\vec{y} = \mathsf{U}\vec{z}$ ens quedarà el sistema $\vec{z}\,' = \mathsf{T}\vec{z}$, és a dir,

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} z_1' &= 4z_1 + 2z_2 \\ z_2' &= 4z_2 \end{aligned}$$

La solució de la segona equació és $z_2 = C_2 \mathrm{e}^{4t}$, així que la primera equació és $z_1' = 4z_1 + 2C_2\mathrm{e}^{4t}$. Aplicant la fórmula de la solució general de l'equació lineal,

$$z_1 = \left(C_1 + \int 2C_2 \mathrm{e}^{4t} \mathrm{e}^{-4t} \mathrm{d}\,t \right) \mathrm{e}^{4t} = \left(C_1 + \int 2C_2 \mathrm{d}\,t \right) \mathrm{e}^{4t} = (C_1 + 2C_2 t)\, \mathrm{e}^{4t}$$

Així que la solució del sistema és $\vec{z} = \left(C_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}2t\\1\end{bmatrix}\right)\mathrm{e}^{4t}$. Desfent el canvi,

$$\begin{aligned}\vec{y} = \mathsf{U}\vec{z} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\left(C_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}2t\\1\end{bmatrix}\right)\mathrm{e}^{4t}\\ &= \left((K_1+2tK_2)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + K_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)\mathrm{e}^{4t}\end{aligned}$$

Exercici 28.6. (pàgina 424) *(a) Proveu que el conjunt de totes les solucions del sistema d'equacions diferencials lineals $\vec{y}' = \mathsf{A}\vec{y}$ és un subespai vectorial de l'espai $C_1(\mathbb{R})$. (b) Proveu que, si A és una matriu real i $\vec{z}$ és una funció complexa de variable real llavors, $\vec{z}$ és solució del sistema lineal $\vec{y}' = \mathsf{A}\vec{y}$, si i només si les parts real i imaginària de $\vec{z}$ en són solucions. (c) Proveu que, si A és una matriu real i $\vec{z}$ és una funció complexa de variable real, i si $\vec{z}$ és solució del sistema lineal $\vec{y}' = \mathsf{A}\vec{y}$ llavors, el conjugat $\overline{\vec{z}}$ també és solució del sistema.*

Solució:

(a) És clar que, si $\vec{y}' = \mathsf{A}\vec{y}$, llavors, $\vec{y}$ és una funció derivable i la seua derivada és contínua (pel fet de ser igual a $\mathsf{A}\vec{y}$), així que totes les solucions del sistema d'equacions són a l'espai $C_1(\mathbb{R})$. D'altra banda, com que $\vec{0} = \mathsf{A}\vec{0}$, la funció zero és una solució del sistema; i, a més, si $\vec{y}_1$ i $\vec{y}_2$ en són solucions i α_1, α_2 són escalars, llavors,

$$(\alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2)' = \alpha_1\vec{y}_1' + \alpha_2\vec{y}_2' = \alpha_1\mathsf{A}\vec{y}_1 + \alpha_2\mathsf{A}\vec{y}_2 = \mathsf{A}(\alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2)$$

així que aquest conjunt és un subespai.

(b) Si $\vec{x}$ i $\vec{y}$ són les parts real i imaginària de $\vec{z}$ llavors,

$$\vec{z}' = \mathsf{A}\vec{z} \iff \vec{x}' + \mathrm{i}\vec{y}' = \mathsf{A}(\vec{x} + \mathrm{i}\vec{y}) \iff \vec{x}' = \mathsf{A}\vec{x} \text{ i } \vec{y}' = \mathsf{A}\vec{y}$$

(perquè, pel fet de ser A, $\vec{x}$ i $\vec{y}$ reals, la part real i la part imaginària de $\mathsf{A}(\vec{x}+\mathrm{i}\vec{y})$ són $\mathsf{A}\vec{x}$ i $\mathsf{A}\vec{y}$).

(c) Si $\vec{z}$ és solució del sistema, $\vec{z}' = \mathsf{A}\vec{z}$ llavors, $\overline{\vec{z}'} = \overline{\mathsf{A}\vec{z}} = \mathsf{A}\overline{\vec{z}}$, així que $\overline{\vec{z}}$ també ho és.

Exercici 28.7. (pàgina 424) *(a) Trobeu totes les solucions complexes del sistema d'equacions lineals $\begin{bmatrix}y_1' = y_2\\ y_2' = -y_1\end{bmatrix}$. (b) Trobeu, també, totes les solucions reals.*

Solució:

La matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ és diagonalitzable i $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}-\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i} & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$.

Així que la solució general és $\vec{y} = C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{bmatrix} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix}$.

A més a més, com hem vist a l'exercici 28.6., la part real i la part imaginària de les solucions complexes són també solucions, així, com que

$$e^{it}(-i,1) = (\cos t + i\sin t)(-i,1) = (\sin t, \cos t) + i(-\cos t, \sin t)$$

$\vec{y}_1 = (\sin t, \cos t)$ i $\vec{y}_2 = (-\cos t, \sin t)$ són solucions (reals) del sistema d'equacions diferencials. Llavors, qualsevol combinació lineal

$$\vec{y} = C_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

també és solució. Per justificar que totes les solucions són d'aquest tipus, basta observar que les solucions $e^{it}(-i,1)$ i $e^{-it}(i,1)$ són combinacions lineals de $\vec{y}_1$ i $\vec{y}_2$.

(a) El conjunt de totes les solucions complexes és

$$\left\{ C_1 e^{it} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} : C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

I també el podem escriure com $\left\{ C_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} : C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\}$.

(b) El conjunt de totes les solucions reals és

$$\left\{ C_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} : C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

EXERCICI 28.8. (pàgina 424) *Proveu que les funcions* $y = \left(C + \int g(t) e^{-\int f(t)\,dt} dt\right) e^{\int f(t)\,dt}$, *on* C *és una constant arbitrària i* $f(t)$ *i* $g(t)$ *funcions contínues en* $\mathbb{K}$, *són solucions de l'equació diferencial lineal* $y' = f(t)y + g(t)$.

Solució:

Com que totes les funcions implicades a la fórmula són contínues, la funció y és derivable i la seua derivada és

$$\begin{aligned} y' &= \left(g(t) e^{-\int f(t)\,dt}\right) e^{\int f(t)\,dt} + \left(C + \int g(t) e^{-\int f(t)\,dt} dt\right) e^{\int f(t)\,dt} f(t) \\ &= g(t) + \left(C + \int g(t) e^{-\int f(t)\,dt} dt\right) e^{\int f(t)\,dt} f(t) \\ &= g(t) + y f(t) \end{aligned}$$

que és el que volíem provar.

EXERCICI 28.9. (pàgina 424) *Trobeu totes les solucions reals de les equacions lineals de segon ordre*

$$\text{(a)} \quad y'' + y = 0 \qquad \text{(b)} \quad y'' - y = 0$$

fent servir el canvi $y_1 = y, y_2 = y'$.

Solució:

(a) Si posem $y_1 = y, y_2 = y'$, l'equació $y'' = -y$ es transforma en el sistema d'equacions de primer ordre $y_1' = y_2, y_2' = -y_1$. Aquest sistema l'hem resolt a l'exercici 28.7.; hi hem trobat que la solució gemeral real és

$$C_1(\sin t, \cos t) + C_2(-\cos t, \sin t) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Com que hem fet el canvi $y_1 = y, y_2 = y'$, la solució de l'equació $y'' + y = 0$ és

$$K_1 \sin t + K_2 \cos t \quad (K_1, K_2 \in \mathbb{R})$$

(b) En aquest cas, el canvi $y_1 = y, y_2 = y'$ ens proporciona el sistema d'equacions de primer ordre $y_1' = y_2, y_2' = y_1$, és a dir, $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{y}$. Diagonalitzant la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obtenim

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

així que la solució general del sistema lineal és

$$\vec{y} = C_1 \mathrm{e}^{-t}(-1, 1) + C_2 \mathrm{e}^{t}(1, 1)$$

Per tant, les solucions reals de l'equació $y'' - y = 0$ seran

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Exercici 28.10. (pàgina 424) *Una forma quadràtica $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\vec{x}$ és* definida positiva *si $f(\vec{x}) > 0$ per a tots els vectors no nuls. Proveu que això vol dir que tots els valors propis de la matriu A són positius. Si $f(\vec{x}) \geq 0$ per a tots els vectors, llavors la forma quadràtica és* semidefinida positiva*; i si la funció pren algun valor positiu i algun de negatiu, llavors es diu que la forma quadràtica és* indefinida *(la forma quadràtica f és definida positiva, semidefinida positiva o indefinida, quan ho és la matriu simètrica A).*

(a) Caracteritzeu les formes semidefinides positives i les indefinides segons els signes dels valors propis.

(b) Estudieu si cadascuna de les matrius següents són definides positives, semidefinides positives o indefinides.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solució:

(a) Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ són els valors propis de la matriu A, $B = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ és una base de vectors propis adequada i $\vec{x}_B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ llavors, $f(\vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 > 0$ sempre que $\vec{x}_B$ continga alguna entrada no nul·la, és a dir, sempre que $\vec{x} \neq 0$. Per tant, f és definida positiva quan tots els valors propis són positius.

Serà semidefinida positiva si tots els valors propis són no negatius.

I serà indefinida si hi ha algun valor propi positiu i algun de negatiu; per exemple, si $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 < 0$, tindrem $f(\vec{p}_1) = \lambda_1 1^2 + \lambda_2 0^2 + \cdots + \lambda_n 0^2 = \lambda_1 > 0$ i $f(\vec{p}_2) = \lambda_2 < 0$.

(b) Les tres primeres matrius són diagonals, així que els valors propis són els elements diagonals. A és semidefinida positiva, B és definida positiva i C és indefinida.

Els valors propis de la matriu D són les arrels de l'equació característica

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

és a dir, -3 i 2. Per tant, la matriu és indefinida.

Els valors propis de la matriu E són 0 i 5, així que aquesta matriu és semidefinida positiva.

I, per últim, F és definida positiva, perquè els valors propis d'aquesta matriu són $(5 \pm \sqrt{17})/2$ i, com que $\sqrt{17} < 5$, tots dos són positius.

Exercici 28.11. (pàgina 425) *Reduïu la cònica* $31x_1^2 + 10\sqrt{3}x_1x_2 + 21x_2^2 + x_1 + \sqrt{3}x_2 = 3/4$.

Solució:

En forma matricial, la corba és

$$\vec{x}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \vec{x} = \frac{3}{4}$$

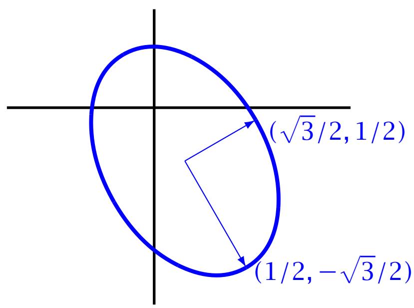
Si diagonalitzem la matriu obtenim

$$\begin{bmatrix} 31 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 21 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Per tant, fem el canvi $\vec{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$:

$$\vec{y}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \vec{y} = \frac{3}{4}$$

$$16y_1^2 + 36y_2^2 + 4y_1 = \frac{3}{4}$$



La cònica és una el·lipse, perquè els dos valors propis són positius. Per a obtenir l'equació reduïda, completem el quadrat,

$$16y_1^2 + 36y_2^2 + 4y_1 = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow 16\left(y_1 + \frac{1}{8}\right)^2 + 36y_2^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

dividint per $16 \cdot 36 = 4^2 6^2$, $\dfrac{(y_1 + 1/8)^2}{6^2} + \dfrac{y_2^2}{4^2} = \dfrac{1}{4^2 6^2}$, o bé

$$\frac{(y_1 + 1/8)^2}{(1/4)^2} + \frac{y_2^2}{(1/6)^2} = 1$$

Lliçó 29. La forma reduïda de Jordan

Exercici 29.1. (pàgina 443) *Trobeu les formes de Jordan de les matrius següents, una base de Jordan per a cadascuna d'elles i mostreu-ne una factorització de Jordan.*

$$\text{(a)}\quad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)}\quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(c)}\quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(d)}\quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solució:

(a) Els valors propis de la matriu A són 3, 2 i 1, tots amb multiplicitat algèbrica igual a 1, així que la matriu A és diagonalitzable. La forma de Jordan és $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Els subespais propis són

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{A} - 3\mathrm{I}) = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \langle(-1, 1, 0)\rangle$$

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{A} - 2\mathrm{I}) = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \langle(0, -1, 1)\rangle$$

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{A} - 3\mathrm{I}) = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \langle(0, 0, 1)\rangle$$

així que el conjunt $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ és una base de Jordan. I

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

(b) Els valors propis de la matriu B són 0 (simple) i 2 (doble).

Els subespais propis són

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{B} - 0\mathrm{I}) = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \langle(-1, 1, 0)\rangle$$

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{B} - 2\mathrm{I}) = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle(0, 0, 1)\rangle$$

Per tant, la matriu B no és diagonalitzable i la forma de Jordan és $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

– El vector $(-1,1,0)$ és una cadena de Jordan associada al valor propi 0.
– El vector $(0,0,1)$ és a una cadena de Jordan de longitud 2 associada al valor propi 2. Per trobar un altre vector que complete la cadena de Jordan, com que la dimensió del subespai propi és 1, podem resoldre el sistema lineal $(\mathsf{B}-2\mathrm{I})\vec{x} = (0,0,1)$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Així que $\{(0,0,1),(0,1,0)\}$ és una cadena de Jordan associada al valor propi 2.

El conjunt $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ és una base de Jordan. I

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

(c) El valor propi de la matriu C és 2, amb multiplicitat algèbrica 3. La multiplicitat geomètrica corresponent és

$$\mathrm{mgeo}(2,\mathsf{C}) = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Així que la matriu no és diagonalitzable. A la forma de Jordan ha d'haver-hi dues cadenes: per tant, ha de ser $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

El subespai propi és

$$\mathrm{Nul}(\mathsf{C}-2\mathrm{I}) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle(-1,1,0),(0,0,1)\rangle$$

Hi ha d'haver dues cadenes de Jordan, així que necessitem un vector no nul de $\mathrm{Nul}(\mathsf{C}-2\mathrm{I})^2$ que no siga propi. Com que $(\mathsf{C}-2\mathrm{I})^2 = \mathrm{O}$, qualsevol vector que no siga al subespai propi ens servirà. Per exemple, $\vec{u}_2 = (1,0,0)$. Per completar una cadena Jordan, calculem $\vec{u}_1 = (\mathsf{C}-2\mathrm{I})\vec{u}_2 = (0,0,1)$. La segona cadena de Jordan es redueix a un altre vector propi independent; per exemple, $\vec{u}_3 = (-1,1,0)$.

El conjunt $\mathcal{B} = \{(0,0,1),(1,0,0),(-1,1,0)\}$ és una base de Jordan. I

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

(d) El valor propi de la matriu D és 2, amb multiplicitat algèbrica 3. La multiplicitat geomètrica corresponent és

$$\operatorname{mgeo}(2, \mathsf{D}) = 3 - \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Així que la matriu no és diagonalitzable. A la forma de Jordan hi ha una cadena: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. El subespai propi és

$$\operatorname{Nul}(\mathsf{D} - 2\mathrm{I}) = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,0,1) \rangle$$

- Per a formar la cadena de Jordan $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ podem començar amb el vector $\vec{u}_1 = (0,0,1)$.
- $\vec{u}_2$ ha de ser una solució del sistema lineal $(\mathsf{A} - 2\mathrm{I})\vec{x} = \vec{u}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Per exemple, $\vec{u}_2 = (0,1,0)$.
- I $\vec{u}_3$ ha de ser solució de $(\mathsf{A} - 2\mathrm{I})\vec{x} = \vec{u}_2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  I podem elegir $\vec{u}_3 = (1,0,0)$

el conjunt $\mathcal{B} = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$ és una base de Jordan. I

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Exercici 29.2. (pàgina 443) *Trobeu la forma de Jordan* J *de la matriu* A $= \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ *i una matriu* P *tal que* $\mathsf{A} = \mathsf{PJP}^{-1}$.

Solució:
L'únic valor propi és $\lambda_1 = a$, amb multiplicitat algèbrica 5. La multiplicitat geomètrica d'aquest valor propi és

$$\text{mgeo}(0, \mathsf{A}) = 5 - \text{rang}(\mathsf{A} - a\mathrm{I}) = 5 - \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 5 - 4 = 1$$

Per tant, només hi ha una cadena de Jordan i $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

Les potències successives de la matriu $\mathsf{A} - a\mathrm{I}$ són

$$\mathsf{A} - a\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathsf{A} - a\mathrm{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathsf{A} - a\mathrm{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathsf{A} - a\mathrm{I})^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathsf{A} - a\mathrm{I})^5 = \mathrm{O}$$

Elegirem un vector que siga a l'espai nul de $(\mathsf{A} - a\mathrm{I})^5$ però no al de $(\mathsf{A} - a\mathrm{I})^4$; com que $\text{Nul}(\mathsf{A} - a\mathrm{I})^5 = \mathbb{C}^5$ i $\vec{u}_5 = (0, 0, 0, 0, 1) \notin (\mathsf{A} - a\mathrm{I})^4$, aquest serà el vector que triarem. Ara la cadena de Jordan és $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\}$ amb

$$\vec{u}_4 = (\mathsf{A} - a\mathrm{I})\vec{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = (\mathsf{A} - a\mathrm{I})\vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = (\mathsf{A} - a\mathrm{I})\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = (\mathsf{A} - a\mathrm{I})\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriu P pot ser aquesta:

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 29.3. (pàgina 443) *Trobeu la forma de Jordan,* J*, de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ *i una matriu* P *tal que* $\mathsf{A} = \mathsf{PJP}^{-1}$.

Solució:

El polinomi característic de la matriu A és

$$(3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2\big((2-\lambda)(4-\lambda)+1\big) = (3-\lambda)^4$$

així que només hi ha un valor propi, $\lambda_1 = 3$, amb multiplicitat algèbrica igual a 4. La multiplicitat geomètrica corresponent és

$$\dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 3\mathrm{I}) = 4 - \mathrm{rang}(\mathsf{A} - 3\mathrm{I}) = 4 - \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Per tant, hi ha dues cadenes de Jordan, a la base. Cerquem els rangs de les matrius $(\mathsf{A} - 3\mathrm{I})^k$: ja sabem que $\mathrm{rang}(\mathsf{A} - 3\mathrm{I}) = 2$. A més,

$$\mathrm{rang}(\mathsf{A} - 3\mathrm{I})^2 = \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

i, per tant, també serà $\mathrm{rang}(\mathsf{A} - 3\mathrm{I})^3 = 0$. La longitud màxima de les cadenes de Jordan serà 2. D'aquí ja es dedueix clarament que n'hi ha dues de longitud 2, però si volem fer servir el mètode de les diferències,

$$\begin{array}{ccc} 4 & & \\ & 2 & \\ 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \\ & 0 & \\ 0 & & \end{array}$$

Hi ha 0 cadenes de longitud 1 i 2 de longitud 2.

La forma de Jordan és $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Per a trobar una base formada per cadenes de Jordan, comencem cercant una base del subespai $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 3\mathrm{I})^2$. Ara bé, com ja sabem que aquesta és la matriu nul·la, podem elegir qualsevol base de $\mathbb{C}^4$. Per exemple, la base canònica: les columnes de la matriu

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

són una base del subespai propi generalitzat. Els vectors finals de les cadenes de Jordan han de ser a l'espai nul de $(\mathsf{A} - 3\mathrm{I})^2$ però no al de $(\mathsf{A} - 3\mathrm{I})$, així que multipliquem $(\mathsf{A} - 3\mathrm{I})$ per aquesta matriu,

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathsf{A} - 3\mathrm{I})\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

i deduïm que els vectors adequats són $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ i $(0, 0, 0, 1)$, vectors terminals de les cadenes

$$\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$$
$$\{(0, 0, -1, -1), (0, 0, 1, 0)\}$$
$$\{(0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

Com en necessitem dues de longitud dos, i els vectors propis han de ser linealment independents, triarem la primera i la tercera: el conjunt

$$\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, -1, -1), (0, 0, 1, 0)\}$$

és una base de Jordan. La matriu de canvi de base serà $\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Aleshores, tenim la factorització de Jordan

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Exercici 29.4. (pàgina 443) *El polinomi característic de la matriu* A *és* $\lambda^2(1-\lambda)^6(2-\lambda)$. *A més a més,* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = 7$, $\operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = 6$, $\operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^2 = 4$ *i* $\operatorname{rang}(\mathsf{A}-\mathrm{I})^3 = 3$. *Quina és la forma de Jordan de la matriu* A*?*

Solució:
La matriu A és 9×9, perquè el grau del polinomi característic és igual a 9.
Hi ha tres valors propis: 0, 1 i 2. El 0 i el 2 són geomètricament complets: en el cas del zero, perquè si el rang de $\mathsf{A} = 7$, llavors la multiplicitat geomètrica de 0 és $9 - 7 = 2$ i coincideix amb la multiplicitat algèbrica; i en el cas del valor propi 2, perquè la multiplicitat algèbrica és 1. Per tant, hi ha dues cadenes de Jordan de longitud 1, amb el valor propi 0 i una altra amb el valor propi 2.

$$\begin{array}{ccc} 9 & & \\ & 3 & \\ 6 & & 1 \\ & 2 & \\ 4 & & 1 \\ & 1 & \\ 3 & & 1 \\ & 0 & \\ 3 & & \end{array}$$

En el cas del valor propi 1, hi ha tres cadenes: una cadena de longitud 3, una de longitud 2 i una de longitud 1.

La forma de Jordan és aquesta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercici 29.5. (pàgina 443) *Proveu que, si* λ *és un valor propi de la matriu* A *i* $\dim\operatorname{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^k = \dim(\operatorname{Nul}(\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I})^{k+1}$ *llavors aquesta dimensió és igual a la multiplicitat algèbrica de* λ.

Solució:
Suposem que $m = \text{malg}(\lambda, \mathsf{A})$.
En general, $\text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^k \subset \text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+1}$; en conseqüència, si les dimensions són iguals, $\text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^k = \text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+1}$, de manera que, si $\vec{u}$ és un vector de l'espai nul de $(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+2}$,

$$\begin{aligned}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+1}\vec{u} &= (\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^k\vec{u} \\ &= (\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+1}\vec{u} \\ &= (\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+2}\vec{u} = 0\end{aligned}$$

la qual cosa vol dir que $\text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^k = \text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+2}$. En general,

$$\text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^k = \text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+1} = \text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^{k+2} = \dots$$

Això vol dir que $\text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^k$ és el conjunt de tots els vectors propis generalitzats associats al valor propi λ. Per tant, $\dim \text{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})^k = \text{malg}(\mathsf{A})$ □

Exercici 29.6. (pàgina 444) ***(El teorema de Cayley-Hamilton)*** *Demostreu que el polinomi característic de la matriu* A *n'és anul·lador.*

Solució:
El polinomi característic es pot factoritzar com

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_r - \lambda)^{m_r}$$

on λ_1, λ_2, ... són els valors propis de A i m_1, m_2,... les multiplicitats algèbriques. Si elegim un vector propi generalitzat $\vec{u}$, associat al valor propi λ_r,

$$\begin{aligned}p(\mathsf{A})\vec{u} &= (\lambda_1\mathrm{I} - \mathsf{A})^{m_1}(\lambda_2\mathrm{I} - \mathsf{A})^{m_2} \dots (\lambda_r\mathrm{I} - \mathsf{A})^{m_r}\vec{u} \\ &= \Big((\lambda_1\mathrm{I} - \mathsf{A})^{m_1}(\lambda_2\mathrm{I} - \mathsf{A})^{m_2} \dots\Big)\Big((\lambda_r\mathrm{I} - \mathsf{A})^{m_r}\vec{u}\Big) \\ &= \Big((\lambda_1\mathrm{I} - \mathsf{A})^{m_1}(\lambda_2\mathrm{I} - \mathsf{A})^{m_2} \dots\Big)\vec{0} = \vec{0}\end{aligned}$$

perquè $\vec{u}$ és a l'espai nul de $(\mathsf{A} - \lambda_2\mathrm{I})^{m_r}$. Ara bé, és evident que les matrius $\lambda_1\mathrm{I} - \mathsf{A}$, $\lambda_2\mathrm{I} - \mathsf{A}$, ... commuten i, per tant, $p(\mathsf{A})\vec{u} = \vec{0}$ per a qualsevol vector propi generalitzat.

Com que existeix una base de Jordan de $\mathbb{C}^n$, qualsevol vector d'aquesta base és un vector propi generalitzat; per tant, $p(\mathsf{A})\vec{u} = \vec{0}$ per a tots els vectors de la base i, per tant, per a tots els vectors de $\mathbb{C}^n$: tots els vectors compleixen que $p(\mathsf{A})\vec{u} = \vec{0}$. I això implica que $p(\mathsf{A})$ és la matriu zero.

Exercici 29.7. (pàgina 444) ***(El polinomi mínim)*** *Si els valors propis de la matriu* A *són* λ_1, λ_2,..., λ_r *i* l_1, l_2, ..., l_r *són les longituds màximes de les cadenes de Jordan corresponents, el* polinomi mínim *de la matriu* A *és* $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{l_r}$.

Demostreu que (a) el polinomi mínim de la matriu A *n'és anul·lador, (b) el polinomi mínim és divisor de qualsevol altre polinomi anul·lador i (c) la matriu* A *és diagonalitzable si i només si* $m(\lambda, \mathsf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_r)$.

Solució:

(a) Per demostrar que el polinomi mínim és anul·lador, bastarà provar que el producte de $m(\lambda)$ per qualsevol vector propi generalitzat és igual a zero (perquè això implica que el producte de $m(\lambda)$ per tots els vectors és zero i la matriu O és l'única que té aquesta propietat).

Ara bé, com que els polinomis $\mathsf{A}-\lambda_1\mathrm{I}$, $\mathsf{A}-\lambda_2\mathrm{I}$, … commuten, si $\vec{u}$ és un vector propi generalitzat associat al valor propi λ_i,

$$m(\lambda)\vec{u} = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda)^{l_2}\dots(\lambda-\lambda_r)^{l_r}(\lambda-\lambda_i)^{l_i}\vec{u} = \vec{0} \quad \square$$

(b) El polinomi mínim és divisor de qualsevol polinomi anul·lador, perquè si $p(\lambda)$ és anul·lador, $p(\vec{u}) = 0$ per a un vector propi generalitzat que és el darrer element d'una cadena de longitud l_i, així que tots els polinomis $(\lambda_i-\lambda)^{l(\lambda_i)}$ són divisors de $p(\lambda)$. $\square$

(c) La matriu A és diagonalitzable si i només si tots els vectors propis són geomètricament complets, així que només hi ha cadenes de Jordan de longitud 1 i, per tant, $l(\lambda_1) = l(\lambda_2) = \cdots = l(\lambda_r) = 1$. $\square$

Exercici 29.8. (pàgina 444) *Trobeu el polinomi mínim i la forma de Jordan de la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solució:

Els valors propis són $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 1$, amb multiplicitats algèbriques 3 i 2. Per tant, el polinomi mínim és un d'aquests:

$$\begin{array}{lll} (\lambda-2)(\lambda-1) & (\lambda-2)^2(\lambda-1) & (\lambda-2)^3(\lambda-1) \\ (\lambda-2)(\lambda-1)^2 & (\lambda-2)^2(\lambda-1)^2 & (\lambda-2)^3(\lambda-1)^2 \end{array}$$

Substituirem λ per A en cadascun dels polinomis candidats fins que el resultat siga la matriu zero:

$$(\mathsf{A}-2\mathrm{I})(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathsf{A}-2\mathrm{I})^2(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathsf{A}-2\mathrm{I})^3(\mathsf{A}-\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Això vol dir que el polinomi mínim és $m(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 1)$. Per tant,

- hi ha una cadena de Jordan de longitud 3, associada al valor propi 2; com que, a més, $\mathrm{malg}(2) = 3$, aquesta és l'única cadena associada al 2.
- i les cadenes associades al valor propi 1 són de longitud 1; com que $\mathrm{malg}(1) = 2$, n'hi ha dues.

La forma de Jordan és $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercici 29.9. (pàgina 444) *Trobeu el polinomi mínim, la forma de Jordan i una base de Jordan de la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solució:
Els valors propis i les multiplicitats algèbriques corresponents són $\lambda_1 = 2$, amb multiplicitat algèbrica 2, i $\lambda_2 = 3$, amb multiplicitat algèbrica 4.
Treballant com a l'exercici anterior trobem que el polinomi mínim de la matriu A és $m(\mathsf{A}) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^3$. D'aquí es dedueix fàcilment que la forma de Jordan és

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La base de Jordan és formada per:

- Dos vectors propis associats al valor propi 2, que podem trobar cercant l'espai propi:

$$\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 2\mathrm{I}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle (1,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0) \rangle$$

- Dues cadenes, l'una de longitud 3 i l'altra de longitud 1, de vectors propis generalitzats associades al valor propi 3. Notem que tots aquests vectors propis generalitzats són elements del subespai $\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-3\mathrm{I})^3$. Aquest subespai és

$$\begin{aligned}\mathrm{Nul}(\mathsf{A}-3\mathrm{I})^3 &= \mathrm{Nul}\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}^3 = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\ &= \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\rangle\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (1,0,0,0,0,0) & \vec{v}_2 &= (0,1,0,0,0,0)\\ \vec{v}_3 &= (0,0,0,1,0,1) & \vec{v}_4 &= (0,0,0,0,1,0)\end{aligned}$$

Per cercar una cadena de longitud 3, hem d'elegir un vector que es trobe en aquest subespai però no en el de $(\mathsf{A}-3\mathrm{I})^2$ així que els (pre)multipliquem per $(\mathsf{A}-3\mathrm{I})^2$.

$$\begin{aligned}&(\mathsf{A}-3\mathrm{I})^2\begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4\end{bmatrix}\\ &\quad= \begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

El resultat ens indica que el vector $\vec{v}_1$ és terminal en una cadena de longitud 3, aquesta:

$$\begin{aligned}\vec{p}_3 &= \vec{v}_1 = (1,0,0,0,0,0)\\ \vec{p}_2 &= (\mathsf{A}-3\mathrm{I})\vec{p}3 = (0,1,0,0,0,0)\\ \vec{p}_1 &= (\mathsf{A}-3\mathrm{I})\vec{p}2 = (0,0,0,0,1,0)\end{aligned}$$

Hem de fer servir la cadena de longitud 3 i un vector propi que siga linealment independent amb $\vec{p}_1$:

$$\{(0,0,0,0,1,0),(0,1,0,0,0,0),(1,0,0,0,0,0)\}\cup\{(0,0,0,1,0,1)\}$$

La base de Jordan és

$$\begin{aligned}\{&(1,0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1,0),\\ &\qquad (0,1,0,0,0,0),(1,0,0,0,0,0),(0,0,0,1,0,1)\}\end{aligned}$$

Exercici 29.10. (pàgina 444) *Què podem dir sobre el polinomi mínim i la forma de Jordan d'una matriu* A *si totes les multiplicitats geomètriques són iguals a* 1*?*

Solució:
El polinomi mínim coincideix amb el polinomi característic, i a la base de Jordan només hi ha una cadena per cada valor propi (la matriu J té un únic bloc de Jordan per cada valor propi, de longitud igual a la multiplicitat algèbrica).

Exercici 29.11. (pàgina 444) *Resoleu el sistema d'equacions diferencials lineals* $\vec{y}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \vec{y}$*, fent servir la forma de Jordan de la matriu de coeficients.*

Solució:
La matriu té un sol valor propi, 4, amb $\operatorname{malg}(4, \mathsf{A}) = 2$ i $\operatorname{mgeo}(4, \mathsf{A}) = 1$. Calculant els vectors propis generalitzats obtenim la factorització de Jordan següent:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathsf{J}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Fent el canvi $\vec{y} = \mathsf{P}\vec{z}$ ens quedarà el sistema $\vec{z}\,' = \mathsf{J}\vec{z}\,'$, és a dir,

$$\begin{aligned} z_1' &= 4z_1 + z_2 \\ z_2' &= \phantom{4z_1 + {}} 4z_2 \end{aligned}$$

La solució de la segona equació és $z_2 = C_2 \mathrm{e}^{4t}$, així que la primera equació és $z_1' = 4z_1 + C_2\mathrm{e}^{4t}$. Aplicant la fórmula de la solució general de l'equació lineal,

$$z_1 = \left(C_1 + \int C_2 \mathrm{e}^{4t} \mathrm{e}^{-4t} \mathrm{d}\,t \right) \mathrm{e}^{4t} = \left(C_1 + \int C_2 \mathrm{d}\,t \right) \mathrm{e}^{4t} = (C_1 + C_2 t)\, \mathrm{e}^{4t}$$

Així que la solució del sistema és $\vec{z} = \left(C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^{4t}$. Desfent el canvi,

$$\begin{aligned} \vec{y} = \mathsf{P}\vec{z} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^{4t} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} -t \\ t+1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{4t} \\ &= \left((C_1 + tC_2) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^{4t} \end{aligned}$$

Exercici 30.1. (pàgina 464) *Trobeu la descomposició en valors singulars de les matrius*

$$\text{(a)}\quad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solució:

(a) Els valors singulars són les arrels quadrades dels valors propis de la matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Com que aquests valors propis són $\lambda_1 = 6$ i $\lambda_2 = 2$, els valors singulars són $\sigma_1 = \sqrt{6}$ i $\sigma_2 = \sqrt{2}$. D'altra banda, els vectors de la base canònica de $\mathbb{K}^2$, $\vec{v}_1 = (1,0)$ i $\vec{v}_2 = (0,1)$ són vectors propis de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i, per tant, vectors singulars drets de A. L'espai nul de A és $\operatorname{Nul}\mathsf{A} = \{\vec{0}\}$.

Els vectors singulars esquerres seran

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathsf{A}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathsf{A}\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aquests dos vectors fan una base ortonormal de l'espai columna de A. Hi afegim una base de l'espai nul esquerre:

$$\operatorname{Nul}\mathsf{A}^* = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle (1,-1,1) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \right\rangle$$

Per tant,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és una descomposició en valors singulars de A.

(b) Els valors singulars són les arrels quadrades dels valors propis de la matriu

$\mathtt{B}^*\mathtt{B}$, és a dir, de les arrels de l'equació característica $\det(\mathtt{B}^*\mathtt{B} - \mathtt{I})$,

$$\det(\mathtt{B}^*\mathtt{B} - \mathtt{I}) = 0 \Longleftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 16-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (16-\lambda)(9-\lambda)(-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda) - 4\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow (16-\lambda)(9-\lambda)(-\lambda)^2(5-\lambda) = 0$$

Els valors propis de la matriu $\mathtt{B}^*\mathtt{B}$ són 16, 9, 5 i 0 (doble). En conseqüència, els valors singulars de la matriu $\mathtt{B}$ són 4, 3 i $\sqrt{5}$.
Ara calculem els espais propis de la matriu $\mathtt{B}^*\mathtt{B}$:

$$E_{16} = \mathrm{Nul}(\mathtt{B}^*\mathtt{B} - 16\mathtt{I}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} = \langle (0,1,0,0,0) \rangle$$

$$E_{9} = \mathrm{Nul}(\mathtt{B}^*\mathtt{B} - 9\mathtt{I}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \langle (0,0,1,0,0) \rangle$$

$$E_{5} = \mathrm{Nul}(\mathtt{B}^*\mathtt{B} - 5\mathtt{I}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \langle (1,0,0,0,2) \rangle$$

$$E_{0} = \mathrm{Nul}(\mathtt{B}^*\mathtt{B}) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \langle (-2,0,0,0,1), (0,0,0,1,0) \rangle$$

Així obtenim

- una base ortonormal de $\mathrm{Fil}\,\mathtt{B}$, formada per vectors singulars drets $\vec{v}_i$:

$$B_{\mathrm{Fil}\,\mathtt{B}} = \{(0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), 1/\sqrt{5}(1,0,0,0,2)\}$$

- una base ortonormal de $\mathrm{Nul}\,\mathtt{B}$, formada per vectors propis associats al valor propi 0:

$$B_{\mathrm{Nul}\,\mathtt{B}} = \{(1/\sqrt{5})(-2,0,0,0,1), (0,0,0,1,0))\}$$

– una base ortonormal de Col B, formada pels vectors $(1/\sigma_i)\mathsf{B}\vec{v}_i$, $(i = 1, 2, 3)$,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{B}(0,1,0,0,0) = (0,0,0,4) \Rightarrow (1/4)\mathsf{B}(0,1,0,0,0) = (0,0,0,1)\\
&\mathsf{B}(0,0,1,0,0) = (0,3,0,0) \Rightarrow (1/3)\mathsf{B}(0,0,1,0,0) = (0,1,0,0)\\
&\mathsf{B}(1/\sqrt{5})(1,0,0,0,2) = 5/\sqrt{5}(1,0,0,0)\\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow (1/\sqrt{5})\mathsf{B}(1/\sqrt{5})(1,0,0,0,2) = (1,0,0,0)
\end{aligned}$$

$B_{\operatorname{Col}\mathsf{B}} = \{(0,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0)\}$

Per acabar, necessitem trobar una base ortonormal de Nul B^*,

$$\operatorname{Nul}\mathsf{B}^* = \operatorname{Nul}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&4\\0&3&0&0\\0&0&0&0\\2&0&0&0\end{bmatrix} = \langle(0,0,1,0)\rangle\,,\quad B_{\operatorname{Nul}\mathsf{B}^*} = \{(0,0,1,0)\}$$

Ara ja podem muntar la factorització:

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&\sqrt{5}&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1/\sqrt{5}&0&0&0&2/\sqrt{5}\\-2/\sqrt{5}&0&0&0&1/\sqrt{5}\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Exercici 30.2. (pàgina 464) *Trobeu les descomposicions en valors singulars reduïdes de les matrius de l'exercici anterior.*

Solució:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}\\2/\sqrt{6}&0\\1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1/\sqrt{5}&0&0&0&2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

Exercici 30.3. (pàgina 464) *Trobeu la descomposició en valors singulars reduïda de la matriu* $\mathsf{C} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$.

Solució:
Primer de tot, calculem els valors singulars. L'equació característica de la matriu $\mathsf{C}^*\mathsf{C}$ és

$$\det(\mathsf{C}^*\mathsf{C} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -(16-\lambda)\lambda^3$$

així que els valors propis de $\mathsf{C}^*\mathsf{C}$ són 16 (amb multiplicitat algèbrica 1) i 0 (triple). En conseqüència, l'únic valor singular de la matriu C és $\sqrt{16} = 4$, i l'únic que necessitem per tal de construir la descomposició en valors singulars reduïda és trobar un vector singular dret unitari, associat al valor singular 4 (un vector propi de $\mathsf{C}^*\mathsf{C}$ associat al valor propi 16):

$$E_{16} = \mathrm{Nul}(\mathsf{C}^*\mathsf{C} - 16I) = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} -12 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & -12 \end{bmatrix} = \langle (1,1,1,1) \rangle$$

Així que $\vec{v} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ és un vector singular dret, i

$$\vec{u} = \frac{1}{4}\mathsf{C}\vec{v} = \frac{1}{4}\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

és el vector singular esquerre corresponent.
La descomposició en valors singulars reduïda és

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Exercici 30.4. (pàgina 465) *Expresseu la matriu* B *de l'exercici 30.1. com una combinació lineal de matrius de rang* 1 *amb pesos els valors singulars de* B.

Solució:

$$\mathsf{B} = 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} + \sqrt{5}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&0&0&\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Exercici 30.5. (pàgina 465) *Quins són els valors màxim i mínim de la funció* $g(\vec{x}) = \|\mathsf{A}\vec{x}\|$, *on* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\1&1\end{bmatrix}$, *en la circumferència (de* $\mathbb{R}^2$*)* $\{\vec{x} : \|\vec{x}\| = 1\}$*?*

Solució:
Hem trobat els valors i els vectors singulars de la matriu A a l'exercici 30.1. Com que els valors singulars són $\sigma_1 = \sqrt{6}$ i $\sigma_2 = \sqrt{2}$, la imatge de la circumferència unitària és un el·lipsoide de semieixos σ_1 i σ_2. Per tant, el màxim i el mínim de la funció g són $\sigma_1 = \sqrt{6}$ i $\sigma_2 = \sqrt{2}$.
També podem provar-ho observant que els vectors de norma igual a 1 són els de la forma $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$ (on $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ són vectors singulars drets i $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$). Llavors, $g(\vec{x}) = \left\|\sqrt{6}\alpha_1\vec{u}_1 + \sqrt{2}\alpha_2\vec{u}_2\right\|$ (on $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són vectors singulars esquerres). Per tant,

$$g(\vec{x})^2 = 6\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 = 6\alpha_1^2 + 2(1-\alpha_1^2) = 2 + 4\alpha_1^2$$

que, evidentment, és màxim (= 6) quan $\alpha_1 = \pm 1$ i mínim (2) quan $\alpha = 0$

Exercici 30.6. (pàgina 465) *Proveu que, si* $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ *és una descomposició en valors singulars, llavors, les columnes de* U *són vectors singulars esquerres, les de* V*, vectors singulars drets, i les entrades no nul·les de* Σ*, els valors singulars de* A.

Solució:
Si $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ és una descomposició en valors singulars, tindrem

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{V}\Sigma\mathsf{U}^*\mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^* = \mathsf{V}\Sigma^2\mathsf{V}^*$$

així que les columnes de V són vectors propis de A i els elements diagonals de Σ^2 els valors propis corresponents.
De manera anàloga,

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^* = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*\mathsf{V}\Sigma\mathsf{U}^* = \mathsf{U}\Sigma^2\mathsf{U}^*$$

Exercici 30.7. (pàgina 465) *Proveu que, si la matriu real* A *és simètrica definida (o semidefinida) positiva, llavors, els valors propis no nuls de* A *són valors singulars. Què passa, en general, en el cas de les matrius simètriques? Quina relació hi ha entre els vectors propis i els vectors singulars, en una matriu simètrica?*

Solució:
Si A és real i simètrica, els valors singulars són les arrels quadrades dels valors propis de $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \mathsf{A}^2$. Llavors, si λ és un valor propi de A, λ^2 ho és de $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ i $\lambda = \sqrt{\lambda^2}$ és un valor singular de A.
En el cas que A siga una matriu simètrica amb algun valor propi $\lambda < 0$, tindrem que $-\lambda = \sqrt{\lambda^2}$ és un valor singular (però no ho és λ, perquè els valors singulars han de ser no negatius).
Respecte als vectors propis, com que els vectors propis de A també ho són de A^2, resulta que els vectors propis associats als valors propis no nuls són vectors singulars (esquerres i drets).

Lliçó 31. Aplicacions dels valors singulars. La pseudoinversa

---

Exercici 31.1. (pàgina 475) *Feu servir la descomposició en valors singulars de la matriu*
$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
per resoldre el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$*, essent* $\vec{b} = (3, 3, 0, 4)$.

Solució:
A l'exercici 30.1. n'hem trobat la descomposició en valors singulars:

$$\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si fem els canvis $\vec{y} = \mathsf{V}^*\vec{x}$, $\mathsf{U}^*\vec{b} = \vec{c}$, tindrem $c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ i el sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ es converteix en $\Sigma\vec{y} = \vec{c}$, és a dir,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solució general d'aquest darrer sistema és, clarament,
$y = (1, 1, 3/\sqrt{5}, 0, 0) + \alpha_1(0, 0, 0, 1, 0) + \alpha_2(0, 0, 0, 0, 1)$, així que la solució del sistema original serà

$$\vec{x} = \vec{V}\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 6/5 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercici 31.2. (pàgina 475) *Trobeu les matrius* A_1 *i* A_2*, de rang* 1 *i de rang* 2*, respectivament, més pròximes en norma espectral a la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Comproveu que la norma espectral de $\mathsf{A} - \mathsf{A}_2$ *és igual al tercer valor singular de la matriu* A.

Solució:

Tenint en compte que la descomposició en valors singulars de la matriu A és

$$\mathsf{A} = \mathsf{U\Sigma V^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i el teorema de Eckart–Young, la matriu de rang 1 més pròxima és

$$\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i, la de rang 2,

$$\mathsf{A} = \mathsf{U\Sigma V^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La norma espectral de $\mathsf{A} - \mathsf{A}_2$ és $\|\mathsf{A} - \mathsf{A}_2\| = \sup\{\|(\mathsf{A} - \mathsf{A}_2)\vec{x}\| : \|\vec{x}\| = 1\}$. Ara, si $\vec{x}$ és un vector unitari,

$$\begin{aligned} \|(\mathsf{A} - \mathsf{A}_2)\vec{x}\| &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} \right\| \\ &= \|(x_1 + 2x_5, 0, 0, 0)\| = \sqrt{|x_1|^2 + 4\,|x_2|^2} \le \sqrt{5} \end{aligned}$$

perquè, si $\|\vec{x}\| = 1$, tots els components del vector $\vec{x}$, en valor absolut, són menors o iguals a 1.

Això demostra que $\|\mathsf{A}-\mathsf{A}_2\| \leq \sqrt{5}$. Ara bé, elegint el vector unitari $\vec{v}_3 = (1/\sqrt{5}, 0, 0, 0, 2/\sqrt{5})$, resulta que

$$(\mathsf{A}-\mathsf{A}_2)\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{5}\vec{u}_3$$

Per tant, la norma espectral de $\mathsf{A}-\mathsf{A}_2$ és $\sqrt{5}$ (el tercer valor singular).

Exercici 31.3. (pàgina 475) *Trobeu la pseudoinversa de la matriu*
$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solució:
La descomposició en valors singulars reduïda de la matriu A és:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Per tant, la pseudoinversa és

$$\mathsf{A}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^*$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercici 31.4. (pàgina 475) *Trobeu la pseudoinversa de la matriu*
$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *i apliqueu el resultat per trobar la solució del problema de mínims quadrats* $\mathsf{A}\vec{x} = (1, 1, 1, 2)$.

Solució:
La descomposició en valors singulars reduïda de la matriu A l'hem trobada a l'exercici 30.3.:

$$\mathsf{A} = \vec{u}\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}\vec{v}^* = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

En conseqüència, la pseudoinversa és la matriu

$$\mathsf{A}^+ = \vec{v}\begin{bmatrix}1/4\end{bmatrix}\vec{u}^* = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \frac{1}{16}\mathsf{A}$$

i la solució del problema de mínims quadrats $\mathsf{A}\vec{x} = (1,1,1,2)$ és

$$\vec{x} = \mathsf{A}^+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}5\\5\\5\\5\end{bmatrix} = \frac{5}{16}(1,1,1,1)$$

Exercici 31.5. (pàgina 476) *Demostreu que $\mathsf{A}^+\vec{b}$ és la solució per mínims quadrats del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ que té la norma mínima.*

Solució:
Com que $\mathsf{A}^+\vec{b}$ és una solució del problema de mínims quadrats, qualsevol altra solució per mínim quadrats és de la forma $\mathsf{A}^+\vec{b} + \vec{y}$, on $\vec{y} \in \operatorname{Nul}\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \operatorname{Nul}\mathsf{A}$. D'altra banda, tal com es contrueix la pseudoinversa, $\mathsf{A}^+\vec{b}$ és a l'espai fila de A. Com que $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^\perp = \operatorname{Fil}\mathsf{A}$, $\vec{y}$ és ortogonal a $\mathsf{A}^+\vec{b}$.
En conseqüència,

$$\left\|\mathsf{A}^+\vec{b} + \vec{y}\right\|^2 = \left\|\mathsf{A}^+\vec{b}\right\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \geq \left\|\mathsf{A}^+\vec{b}\right\|^2$$

la qual cosa vol dir que, en norma, $\mathsf{A}^+\vec{b}$ és menor o igual que qualsevol altra solució. A més a més, és l'única solució de norma mínima, perquè si

$$\left\|\mathsf{A}^+\vec{b} + \vec{y}\right\|^2 = \left\|\mathsf{A}^+\vec{b}\right\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \left\|\mathsf{A}^+\vec{b}\right\|^2$$

llavors $\left\|\vec{b}\right\|^2$ ha de ser igual a zero.

Exercici 31.6. (pàgina 476) *Siga A una matriu real $m \times n$. Proveu les següents propietats sobre la pseudoinversa:*

(a) $AA^+A = A$

(b) $A^+AA^+ = A^+$

(c) AA^+ *és hermítica*

(d) A^+A *és hermítica*

Solució:

(a) $AA^+A = U_1\Sigma_{11}V_1^*V_1\Sigma_{11}^{-1}U_1^*U_1\Sigma_{11}V_1^* = U_1\Sigma_{11}V_1^* = A$

(b) $A^+AA^+ = V_1\Sigma_{11}^{-1}U_1^*U_1\Sigma_{11}V_1^*V_1\Sigma_{11}^{-1}U_1^* = V_1\Sigma_{11}^{-1}U_1^* = A^+$

(c) $(AA^+)^* = (U_1\Sigma_{11}V_1^*V_1\Sigma_{11}^{-1}U_1^*)^* = U_1\Sigma_{11}^{-1}V_1^*V_1\Sigma_{11}U_1^* = AA^+$

(d) $(A^+A)^* = (V_1\Sigma_{11}^{-1}U_1^*U_1\Sigma_{11}V_1^*)^* = V_1\Sigma_{11}U_1^*U_1\Sigma_{11}^{-1}V_1^* = A^+A.$

Exercici 31.7. (pàgina 476) *Siga* A *una matriu real* $m \times n$*. Proveu que, si la matriu* B *compleix les següents propietats*

(a) $ABA = A$

(b) $BAB = B$

(c) AB *és hermítica*

(d) BA *és hermítica*

llavors $B = A^+$*.*

Solució:
Suposant que B compleix aquestes quatre propietats, i tenint en compte l'exercici 31.6.,

$$\begin{aligned} B &= BAB = BAA^+AB = B(AA^+)^*(AB)^* = B(A^+)^*A^*B^*A^* = B(A^+)^*A^* = B(AA^+)^* \\ &= BAA^+ = BAA^+AA^+ = (BA)^*(A^+A)^*A^+ = A^*B^*A^*(A^+)^*A^+ = A^*(A^+)^*A^+ \\ &= (A^+A)^*A^+ = A^+AA^+ = A^+ \end{aligned}$$

Exercici 31.8. (pàgina 476) *Quina condició s'ha de complir perquè la pseudoinversa de la matriu* A *siga una inversa esquerra? I perquè siga una inversa dreta?*

Solució:
Recordem que, si A és una matriu $m \times n$, la condició necessària i suficient perquè hi haja una inversa esquerra de A és que $\operatorname{rang} \mathsf{A} = n$. En conseqüència, si $\operatorname{rang} \mathsf{A} < n$, la pseudoinversa no és una inversa esquerra.
En cas que $\operatorname{rang} \mathsf{A} = n$, siga B una inversa esquerra de A. Com hem vist a l'exercici 31.6. que $\mathsf{A}\mathsf{A}^+\mathsf{A} = \mathsf{A}$, tindrem,

$$\underbrace{\mathsf{B}\mathsf{A}}_{\mathrm{I}}\mathsf{A}^+\mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{B}\mathsf{A}}_{\mathrm{I}}$$
$$\mathsf{A}^+\mathsf{A} = \mathrm{I}$$

així que A^+ és una inversa esquerra. En conseqüència, A^+ *és una inversa esquerra de* A *si i només si* $\operatorname{rang} \mathsf{A} = n$.
De la mateixa manera es pot provar que A^+ és una inversa dreta de A si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{A} = m$.

EXERCICI 31.9. (pàgina 476) ***(La descomposició polar d'una matriu quadrada)*** *Proveu que, si* A *és una matriu quadrada, llavors podem factoritzar-la com* $\mathsf{A} = \mathsf{QP}$, *on* Q *és unitària i* P *hermítica semidefinida positiva (*suggeriment: *si* $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ *és la descomposició en valors singulars, preneu* $\mathsf{Q} = \mathsf{U}\mathsf{V}^*$ *i* $\mathsf{P} = \mathsf{V}\Sigma\mathsf{V}^*$*).*

Com ha de ser A *perquè* P *siga definida positiva?*

Solució:
Si A és una matriu quadrada $n \times n$, la factorització en valors singulars $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$ (on totes les matrius són $n \times n$) podem reescriure-la com

$$\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^* = \underbrace{\mathsf{U}\mathsf{V}^*}_{\mathsf{Q}}\,\underbrace{\mathsf{V}\Sigma\mathsf{V}^*}_{\mathsf{P}} = \mathsf{QP}$$

Ací,

(a) la matriu Q és unitària (perquè les dues matrius U i V^* ho són) i

(b) la matriu P és hermítica, perquè $\mathsf{P}^* = \mathsf{V}\Sigma\mathsf{V}^* = \mathsf{P}$ i semidefinida positiva, perquè $\vec{x}^*\mathsf{P}\vec{x} = \vec{x}^*\mathsf{V}\Sigma\mathsf{V}^*\vec{x}$, així que, si $\vec{y} = \mathsf{V}^*\vec{x}$,

$$\vec{x}^*\mathsf{P}\vec{x} = \vec{y}^*\Sigma\vec{y} = \sigma_1\overline{y_1}y_1 + \sigma_2\overline{y_2}y_2 + \cdots + \sigma_n\overline{y_n}y_n \geq 0$$

perquè tots els σ_i són reals no negatius.

És clar que P és definida positiva si i només si la matriu A és invertible.

Índex analític

Alembert, Jean le Rond D', xv
algorisme
de càlcul d'una base de Jordan, 441
de descomposició en valors singulars, 457
reduïda, 460
de Gauss, 105–109
interpretació matricial, 131–132
de Gauss-Jordan, 93, 105–109
interpretació matricial, 131–132
per a equacions matricials, 121
de Jacobi, 412
de substitució regressiva, 112
PageRank, 6–9
anàlisi harmònica, 304
Anònim, 80
aplicació lineal, 313–326, 485
composició d'aplicacions lineals, 328, 631
de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$, 317–318
interpretació geomètrica, 318–323
matriu canònica, 318
prop. algebraiques i geomètriques, 324–326
els quatre subespais, 325
factorització en valors singulars, 450
fórmula del canvi de base, 335
imatge, 315, 485
fórmula de les dimensions, 316, 324
propietats del nucli i la imatge, 316
inversa d'una aplicació lineal, 328, 632
isomorfisme, 326
matriu associada a una aplicació lineal, 333
nucli, 315, 485
fórmula de les dimensions, 316, 324
propietats del nucli i la imatge, 316
aproximació òptima, 247–249, 304
Argand, Jean-Robert, 24
argument (d'un nombre complex), 18
arrel d'un polinomi, 34
arrels complexes de polinomis reals, 37
arrels múltiples, 35
arrels d'un nombre complex, 29
Axler, Sheldon, 313

base
base canònica, 281
base canònica de l'espai $\mathbb{K}^n$, 187
base estàndard, 281
base estàndard de l'espai $\mathbb{K}^n$, 187
canvi de base
en un espai vectorial, 329
en una aplicació lineal, 332
d'un espai vectorial, 280, 486
base ordenada, 283
compleció d'una base, 285
extracció d'una base, 284
d'un subespai
compleció, 201
extracció, 201
d'un subespai de $\mathbb{K}^n$, 199
de Jordan, 428
de l'espai $\mathbb{K}^n$, 186
fórmula del canvi de base
en un espai vectorial, 331
en una aplicació lineal, 335
matriu del canvi de base

en un espai vectorial, 329
ordenada, 283
ortogonal, 190
ortonormal, 190, 300, 487
Binet
Binet, Jacques Philippe Marie, 348
teorema de Binet, 348
bloc de Jordan, 427
Bowman, David, 195
Brechenmacher, Frederic, 426
Brin, Serguei Mikhàilovitx, 6
Buniakovski
Buniakovski, Víktor Iakovlévitx, 56
desigualtat de Cauchy-Buniakovski-Schwarz, 56, 58, 297

cadena de Jordan
d'un endomorfisme, 428
d'una matriu, 428
independència lineal, 445
canvi de base, 486
en $\mathbb{K}^n$, 190
en un espai vectorial, 329
fórmula del canvi de base, 331
matriu del canvi de base, 329
en un subespai de $\mathbb{K}^n$, 204, 574
en una aplicació lineal, 332
fórmula del canvi de base, 335
matriu del canvi de base en $\mathbb{K}^n$, 190
caracterització de les matrius invertibles, 148
Cauchy
Cauchy, Augustin Louis, 56, 297
desigualtat de Cauchy-Schwarz, 56, 58, 297
Cèsar, Gai Juli, 101
Chesterton, G. K., 120
Cholesky
Cholesky, André-Louis, 490
factorització de, 490
cofactor, 353
matriu de cofactors, 372
combinació lineal, 51, 61
en un espai vectorial, 270
compleció d'una base, 201
conjugat (d'un nombre complex), 25
conjunt generador, 279
coordenades d'un vector, 189, 282–284
en un subespai de $\mathbb{K}^n$, 200
respecte a una base ortogonal, 191
respecte a una base ortonormal, 191
Cotes, Roger, 28
Cramer
Cramer, Gabriel, 369, 370
regla de Cramer, 370
criteris de diagonalitzabilitat, 384–390
primera caracterització, 386
segona caracterització, 387
cònica, 419

Darwin, Charles R., 466
De Moivre
fórmula de, 24
Moivre, Abraham De, 24
definida negativa, 299, 484
definida positiva, 299, 484
dependència lineal, 132–134, 274
descomposició
polar, 492
descomposició polar
d'una matriu, 476
desigualtat de Cauchy-Schwarz, 56, 58, 297
determinant, 344–349, 489
cofactor, 353
comparació entre els mètodes de Gauss i el de desenvolupament per una fila o columna, 361–362
criteri d'invertibilitat, 348

càlcul de determinants
fent servir l'algorisme de Gauss, 349
mitjançant operacions elementals, 349
càlcul de la matriu inversa, 373
càlcul del rang d'una matriu
fent servir determinants, 369
d'una matriu 2×2, 149
de les matrius elementals, 347
de Vandermonde, 360, 644
definició, 345
desenvolupament per una columna, 351–354
desenvolupament per una fila, 354
determinant d'un producte, 348
determinants i operacions elementals
per columnes, 347, 348
menor complementari, 353
nombre d'operacions en el càlcul d'un determinant, 363
regla de Cramer, 370
teorema de Binet, 348
teorema de Laplace, 354
diagonal principal, 165
diagonalització, 490
algorisme de Jacobi, 412
d'una matriu, 379
equacions diferencials lineals, 415–417
equacions en diferències lineals, 409–411
forma quadràtica, 418–419
mètode de Jacobi, 412
mètodes iteratius, 411–415
nombres de Fibonacci, 410–411
potències d'una matriu, 408–409
recurrències lineals, 409–411
reducció de còniques, 419–421
unitària d'una matriu, 401
diferència de dos vectors, 50
dimensió
d'un espai vectorial, 284–287
d'un subespai de $\mathbb{K}^n$, 200
de l'espai $\mathbb{K}^n$, 187
de l'espai columna, 207
de l'espai fila, 209
de l'espai nul, 207
de l'espai nul esquerre, 209
de la intersecció, 227
de la suma, 227
fórmula de Grassmann, 228
teorema de la dimensió, 286
distància entre dos vectors, 297
divisibilitat de polinomis, 35
divisió de polinomis, 35
divisor d'un polinomi, 35

Eckart
Eckart, Carl Henry, 469
teorema d'Eckart-Young, 469
el·lipse, 419
els quatre subespais, 205–216, 488
en una transformació lineal, 325
embolcall lineal, 198, 279
endomorfisme, 390, 486
cadena de Jordan, 428
diagonalitzable, 390–393
equació lineal, 80
discussió i resolució, 84
solució general, 81
forma paramètrica, 81
solució particular, 81
equacions d'un subespai, 215
equacions diferencials lineals, 415–417
equacions en diferències lineals, 409–411
equacions normals, 241
equació matricial, 121
error de mínims quadrats, 250
escalar, 50
producte escalar-vector, 50
espai vectorial, 269, 485

base d'un espai vectorial, 280, 486
bases canòniques, 281
bases estàndard, 281
compleció d'una base, 285
conjunt generador, 279
coordenades d'un vector respecte a una base, 282–284
de dimensió finita, 282
dependència lineal, 132–134, 274
  entre les columnes d'una matriu, 135
  entre les files d'una matriu, 137
els quatre subespais, 205
embolcall lineal, 279
equacions d'un subespai, 215
espai columna d'una matriu, 205, 488
espai fila d'una matriu, 208, 488
espai nul d'una matriu, 125, 206, 488
espai nul esquerre d'una matriu, 208, 488
espai propi generalitzat, 428
euclidià, 294–308, 485
exemples, 271
extracció d'una base, 284
generat finitament, 282
independència lineal, 132–134, 274
intersecció de subespais, 220–223, 487
  càlcul de la intersecció a partir de les bases, 223
  càlcul de la intersecció a partir de les equacions, 220
  dimensió de la intersecció, 227
  fórmula de Grassmann, 228
  ortogonal de la intersecció, 226
l'espai $\mathbb{K}^n$, 185
  base, 185, 186
  base canònica, 187
  base estàndard, 187
la dimensió d'un espai vectorial, 284–287
propi, 380
relació de dependència, 273
subespai vectorial, 272
  exemples, 272
subespais impropis, 272
suma de subespais, 223–226, 487
  càlcul de la suma, 225
  dimensió de la suma, 227
  ortogonal de la suma, 226
  suma directa, 229–232, 487
  suma directa de diversos subespais, 231–232
  suma directa ortogonal, 238–243, 303
teorema de la dimensió, 286
unitari, 295
vector de coordenades, 283
Euclides d'Alexandria, 294
Euler
  fórmula d', 28
  Euler, Leonhard, 28
exponencial complexa, 27
extracció d'una base, 201

factorització
  d'un polinomi complex, 37
  d'un polinomi real, 38
  de Cholesky, 490
  de Schur, 338, 400–401, 490
  en valors singulars, 453–461, 490, 491
    aplicació a la compressió d'imatges, 470–472
    aproximacions de rang limitat, 468–472
    construcció de la descomposició, 453–458
    d'una aplicació lineal, 450

reduïda, 459–461
teorema d'Eckart–Young, 469
LDU, 490
LU, 167–177, 489
càlcul pràctic, 174
estricta, 168
no estricta, 170
pivotatge parcial, 175
resolució de sistemes lineals, 170–172
QR, 262, 490
amb tres vectors, 260–262
aplicacions, 264
aplicació al càlcul de la projecció ortogonal, 264
aplicació al problema de mínims quadrats, 264
deduïda del mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt, 263
Fibonacci
els nombres (o la successió) de, 11, 410–411
Leonardo de Pisa (Fibonacci)*, 11*
forma binòmica, 22
forma de Jordan, 427, 491
forma de Schur, 338, 400–401
forma esglaonada d'una matriu, 102
forma esglaonada reduïda d'una matriu, 102
forma exponencial, 26, 29
forma polar, 19
forma quadràtica, 418–419
forma reduïda de Jordan, 338, 426, 491
forma trigonomètrica, 29
fórmula
d'Euler, 28
de De Moivre, 24
de Grassmann, 228
Fourier
Fourier, Jean-Baptiste Joseph, 304
sèries de Fourier, 304–308
Frobenius
Frobenius, Ferdinand Georg, 462
norma de, 462
funció exponencial complexa, 27
funció polinòmica, 34
Fuster, Joan, 1

Gauss
algorisme de Gauss, 106
càlcul de determinants, 349
algorisme de Gauss-Jordan, 93
per a equacions matricials, 121
Gauß, Carl Friedrich, 93, 185, 245
mètode de reducció de Gauss-Jordan, 93
Germain, Sophie, 205
Google, 6
Gracia, Juan Miguel, 131
Gram
Gram, Jørgen Pedersen, 256
matriu de Gram, 298
mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt, 256–264
amb dos vectors, 257
amb tres vectors, 260
cas general, 263
en espais euclidians, 301
Gram-Schmidt
mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt, 256–264
amb dos vectors, 257
amb tres vectors, 260
cas general, 263
en espais euclidians, 301
Grassmann
fórmula de Grassmann, 228
Graßmann, Hermann Gunther, 228
grau d'un polinomi, 34

Hadamard, Jacques, 34
Halmos, Paul Richard, vii, xv
hiperplà, 200
hipèrbola, 419

imatge d'una aplicació lineal, 315, 485
  fórmula de les dimensions, 316
  propietats del nucli i la imatge, 316
incògnita principal, 109
indefinida, 299, 484
independència lineal, 132–134, 274
  propietats, 135
indeterminada, 34
interpolació polinomial, 287
intersecció de subespais, 220–223, 487
  càlcul de la intersecció a partir de les bases, 223
  càlcul de la intersecció a partir de les equacions, 220
  dimensió de la intersecció, 227
  fórmula de Grassmann, 228
  ortogonal de la intersecció, 226
inversa, 145, 482
inversa Moore-Penrose, 472
isomorfisme, 326

Jacobi
  Jacobi, Carl Gustav Jakob, 412
  mètode de Jacobi, 412
Jordan (Camille)
  base de Jordan, 428
  bloc de Jordan, 427
  cadena de Jordan, 428
    independència lineal, 445
  forma reduïda de Jordan, 338, 426
  Jordan, Marie Ennemond Camille, 338, 426
  matriu en forma de Jordan, 427
Jordan (Wilhelm)
  algorisme de Gauss-Jordan, 93
    per a equacions matricials, 121
  Jordan, Wilhelm, 93
  mètode de reducció de Gauss-Jordan, 93

Kaplansky, Irving, 279
Kronecker, Leopold, 17

Laplace
  Laplace, Pierre-Simon de, 354
  teorema de Laplace, 354
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 344
longitud d'un vector, 297

Màrkov
  cadena de Màrkov, 3–6, 128, 538
  cadena de Màrkov regular, 6
  Màrkov, Andrei Andréievitx, 3
matriu, 58–479
  $\mathsf{A}^+\mathsf{A}$, 245
  adjunta, 158, 483
  antihermítica, 160, 484
  antisimètrica, 156, 484
  autoadjunta, 159
  bloc de Jordan, 427
  cadena de Jordan, 428
    independència lineal, 445
  canvi de base, 486
    en $\mathbb{K}^n$, 190
  característica, 381
  columna, 59
  combinació lineal, 61
  conjugada, 158
  càlcul de la inversa, 145
  càlcul de la inversa amb determinants, 373
  de cofactors, 372
  de Gram, 298
  de la projecció ortogonal, 247
  de projecció, 255, 601
  de transició, 6
  de Vandermonde, 288–290
  definida negativa, 299, 484
  definida positiva, 299, 484
  del canvi de base
    en un espai vectorial, 329
  descomposició polar d'una matriu, 476
  determinant, 345, 489
  diagonal, 165, 481

diagonal principal d'una matriu, 165
diagonalitzable, 379, 384–390
criteris de diagonalitzabilitat, 384–390
estudi de la diagonalitzabilitat, 388
primera caracterització, 386
segona caracterització, 387
teorema espectral, 402
teorema espectral per a matrius reals simètriques, 404
unitàriament, 401–404
el producte matriu-matriu
A per columnes de B, 76
columnes per files, 76
files de A per B, 76
files per columnes, 76
elemental, 103–105, 481
determinant de les matrius elementals, 347
tipus escalat, 104
tipus permutació, 103
tipus reducció, 105
en forma de Jordan, 427
esglaonada, 101, 481
element principal, 101
forma esglaonada d'una matriu, 102
pivot, 101
uns principals, 101
esglaonada fins una columna, 105
esglaonada reduïda, 101, 114, 481
forma esglaonada reduïda d'una matriu, 102
espai columna d'una matriu, 205
dimensió de l'espai columna, 207
espai fila d'una matriu, 208
dimensió, 209
espai nul d'una matriu, 125, 206
dimensió de l'espai nul, 207
espai nul esquerre d'una matriu, 208
dimensió, 209
estocàstica, 3–6, 128, 538
factorització de Schur, 338, 400–401
factorització LU, 167–177
estricta, 168
no estricta, 170
resolució de sistemes lineals, 170–172
fila, 58
files pivotades d'una matriu, 105
forma de Schur, 338, 400–401
forma reduïda de Jordan, 338, 426
fórmula del canvi de base
en un espai vectorial, 331
en una aplicació lineal, 335
hermítica, 159, 484
idempotent, 255, 601
identitat, 59
indefinida, 299, 484
inversa, 145, 482
càlcul ràpid de la inversa d'una matriu 2×2, *149*
inversa de la matriu transposada, 154
inversa dreta, 153, 552
inversa esquerra, 153, 552
inversa lateral, 153, 552
inversa Moore-Penrose, 472
inverses de les matrius elementals, 147
invertible, 143, 482
determinant d'una matriu invertible, 348
propietats, 144
teorema de caracterítzació, 148
matriu associada a una aplicació lineal, 333

matrius equivalents per files, 102
matrius semblants, 379
$m \times n$, 59
normal, 402, 484
diagonalització unitària, 402–404
nul·la, 59
operacions amb matrius, 60–61, 68–74
ortogonal, 157, 484
per blocs, 62, 74
permutació, 164, 557
producte de dues matrius, 70
producte escalar-matriu, 61
producte fila-columna, 70
producte fila-matriu, 69
producte matriu-matriu, 70
producte matriu-vector, 68
propietats de les matrius inverses, 146–147
propietats del producte, 74
pseudoinversa, 472–492
quadrada, 58
traça d'una matriu quadrada, 296
rang d'una matriu, 110, 135–138, 482
càlcul del rang amb determinants, 369
semidefinida negativa, 299, 484
semidefinida positiva, 299, 484
simètrica, 155, 484
diagonalització ortogonal, 404–405
suma de matrius, 60
transposada, 154, 483
transposada conjugada, 158, 483
triangular inferior, 167, 481
triangular superior, 166, 481
unitària, 160, 484
menor complementari, 353
mètode de reducció de Gauss-Jordan, 93
mètode dels mínims quadrats, 249–253
recta de regressió, 250
mínims quadrats, 249–253
recta de regressió, 250
resolució del problema de mínims quadrats mitjançant la descomposició en valors singulars, 467–468
Mirzakhani, Maryam, 329
multiplicació de dos nombres complexos, 20
mètode de Jacobi, 412
mètodes iteratius, 411–415
mètode de Jacobi, 412
mínims quadrats, 485
resolució del problema de mínims quadrats mitjançant la factorització QR, 264
mòdul (d'un nombre complex), 18
múltiple d'un polinomi, 35

Neumann, John von, 256
nombre i, 21
nombre complex, 18
argument, 18
arrels, 29
conjugat, 25
forma binòmica, 22
forma exponencial, 26, 29
forma polar, 19
forma trigonomètrica, 29
fórmula de De Moivre, 24
multiplicació, 20
mòdul, 18
part imaginària, 23
part real, 23
potència, 22
producte, 20
suma, 22, 24
valor absolut, 18
nombre i longituds de les cadenes de Jordan, 436

norma
de Frobenius, 462
d'un vector, 55, 297
espectral, 462
nucli d'una aplicació lineal, 315, 485
fórmula de les dimensions, 316, 324
propietats del nucli i la imatge, 316

operacions amb matrius, 60–61, 68–74
operacions amb vectors, 50–51
operacions elementals
determinants i operacions elementals, 347, 349
per columnes, 172
per files, 101
escalat, 102
permutació, 102
reducció, 102
ortogonal
complement ortogonal, 302
conjunts ortogonals, 210, 300
conjunts ortonormals, 300
de la intersecció, 226
de la suma, 226
ortogonalitat dels quatre subespais, 211–213
projecció ortogonal, 238–243
càlcul de la projecció ortogonal mitjançant la factorització QR, 264
matriu de la projecció ortogonal, 247
subespai ortogonal d'un conjunt, 210

Page, Lawrence Edward «Larry», 6
PageRank, 6–9
part imaginària, 23
part real, 23
paràbola, 419
Peano, Giuseppe, 269
Pitàgores
Pitàgores de Samos, 56, 297
teorema de Pitàgores, 53, 56, 58, 297
pivotatge parcial, 175
pla, 200
pla d'Argand, 24
Plató, 398
Poincaré, Henri, 238, 408
polinomi, 34
anul·lador, 444
arrels complexes de polinomis reals, 37
arrels múltiples, 35
característic, 381
factorització d'un polinomi complex, 37
factorització d'un polinomi real, 38
irreductible, 35
mínim, 444, 687
primer, 35
potència
d'un nombre complex, 22
problema dels mínims quadrats, 250, 485
solucions del problema de mínims quadrats, 250
producte de dos nombres complexos, 20
producte de dues matrius, 70
producte escalar, 52–58, 156–157, 160, 294, 480
aplicacions geomètriques, 55
cas complex, 57
cas real, 54
expressió matricial, 298–300
matriu de Gram, 298
producte escalar-matriu, 61
producte escalar-vector, 50
producte fila-columna, 70
producte fila-matriu, 69
producte matriu-matriu, 70
producte matriu-vector, 68
projecció ortogonal, 238–243, 302
càlcul, 239–242

equacions normals, 241
fent servir una base ortonormal, 242
sobre una recta, 242
pseudoinversa, 472–492

quocient de dos polinomis, 35

rang d'una matriu, 110, 135–138, 482
càlcul del rang amb determinants, 369
recta, 200
recta de regressió, 250
recurrències lineals, 409–411
reducció de còniques, 419–421
relació de dependència, 134
residu de la divisió de polinomis, 35
Rouché
Rouché, Eugène, 110
teorema de Rouché, 110
per a equacions matricials, 122
per a sistemes homogenis, 125

Schmidt
mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt, 256–264
amb dos vectors, 257
amb tres vectors, 260
cas general, 263
en espais euclidians, 301
Schmidt, Erhard, 256
Schnoebelen, Philippe, 220
Schur
factorització de Schur, 338, 400–401
forma de Schur, 338, 400–401
Schur, Issai, 338
teorema de Schur, 400
Schwarz
desigualtat de Cauchy-Schwarz, 56, 58, 297
Schwarz, Hermann Amandus, 56, 297
semidefinida negativa, 299, 484
semidefinida positiva, 299, 484
Simpson, Bartholomew JoJo, 68
sistema d'equacions lineals, 85, 480
classificació, 91
compatible, 91
consistent, 91
determinat, 91
discussió i resolució, 109–112
discussió mitjançant la descomposició en valors singulars, 466–467
forma matricial, 92
forma vectorial, 91
homogeni, 124–126
incompatible, 91
incompatible (mínims quadrats), 249–253
inconsistent, 91
indeterminat, 91
interpretacions gràfiques, 85–87
matriu ampliada, 93
matriu de coeficients, 93
regla de Cramer, 370
resolució amb la factorització LU, 170–172
resolució simultània, 123
solució general, 87, 125
solució particular, 87, 125
vector de termes independents, 93
vector incògnita, 93
Stark, Tony, 379
Strang, Gilbert, 49, 143
subespai vectorial
conjunt generador, 279
de $\mathbb{K}^n$, 195
de $\mathbb{R}^2$, 195–197
de $\mathbb{R}^3$, 198
embolcall lineal, 279
equacions d'un subespai, 215
espai columna d'una matriu, 205
dimensió de l'espai columna, 207

espai fila d'una matriu, 208
dimensió, 209
espai nul d'una matriu, 206
dimensió de l'espai nul, 207
espai nul esquerre d'una matriu, 208
dimensió, 209
intersecció de subespais, 220–223
càlcul de la intersecció a partir de les bases, 223
càlcul de la intersecció a partir de les equacions, 220
dimensió de la intersecció, 227
fórmula de Grassmann, 228
ortogonal de la intersecció, 226
ortogonalitat dels quatre subespais, 213
subespai ortogonal d'un subespai, 210
subespai propi, 380
suma directa dels subespais propis, 385
subespai propi generalitzat, 428
suma directa dels subespais propis generalitzats, 433
suma de subespais, 223–226
càlcul de la suma, 225
dimensió de la suma, 227
ortogonal de la suma, 226
suma directa, 229–232
suma directa (caracteritzacions), 229
suma directa de diversos subespais, 231–232
suma directa ortogonal, 238–243
suma de dos nombres complexos, 22, 24
suma de dos vectors, 50
suma de matrius, 60
suma de subespais, 223–226, 487
càlcul de la suma, 225
dimensió de la suma, 227
ortogonal de la suma, 226
suma directa, 229–232, 487
caracteritzacions, 229
suma directa ortogonal, 238–243
suma directa de diversos subespais, 231–232
suma directa, 229–232, 487
caracteritzacions, 229
de diversos subespais, 231–232
dels subespais propis, 385
suma directa ortogonal, 238–243
Sylvester, James Joseph, 294

teorema
d'Eckart–Young, 469
de Binet, 348
de Cayley-Hamilton, 444, 687
de descomposició en valors singulars, 456
de l'aproximació òptima, 247–249, 304
de la dimensió, 286
de Laplace, 354
de Pitàgores, 53, 56, 58, 297
de Rouché, 110
per a equacions matricials, 122
per a sistemes homogenis, 125
de Schur, 400
del cosinus, 66, 505
espectral, 402
per a matrius simètriques, 404
fonamental de l'àlgebra, 36
fonamental de l'àlgebra lineal, 212, 239
Thompson, Ken, 154
transformació lineal, 313–326
de $\mathbb{K}^n$
propietats algebraiques i geomètriques, 324–326

de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$, 317–318
interpretació geomètrica, 318–323
matriu canònica, 318
els quatre subespais, 325
imatge, 315
fórmula de les dimensions, 316
propietats del nucli i la imatge, 316
nucli, 315
fórmula de les dimensions, 316, 324
propietats del nucli i la imatge, 316
transposició d'una matriu, 154
traça d'una matriu quadrada, 296
Turing, Alan, 165

valor absolut d'un nombre complex, 18
valor propi, 10–11, 338, 380
defectiu, 387
geomètricament complet, 387
multiplicitat algèbrica, 384
multiplicitat geomètrica, 384
semisimple, 387
valor singular, 338, 455
algorisme de descomposició en valors singulars, 457
reduïda, 460
aproximacions de rang limitat, 468–472
aplicació a la compressió d'imatges, 470–472
mínims quadrats, 467–468
sistemes d'equacions lineals, 466–467
teorema d'Eckart–Young, 469
teorema de descomposició en valors singulars, 456
Vandermonde
determinant de Vandermonde, 360, 644
matriu de Vandermonde, 288–290
Vandermonde, Alexandre-Théophile, 288
variable principal, 109
vector, 49–51, 58, 59, 479
angle entre dos vectors, 55, 505
combinació lineal, 51
conjunt de vectors linealment dependent, 133
conjunt de vectors linealment independent, 133
conjunt ortogonal de vectors, 56, 300
conjunt ortonormal de vectors, 56, 300
coordenades d'un vector, 189, 282–284
respecte a una base ortogonal, 191
respecte a una base ortonormal, 191
de coordenades, 283
diferència de dos vectors, 50
distància entre dos vectors, 55, 297
embolcall lineal, 198, 279
estacionari, 6, 128, 538
estocàstic, 6, 128, 538
longitud d'un vector, 55, 57, 297
norma d'un vector, 55, 57, 297
operacions amb vectors, 50–51
producte escalar de dos vectors, 52–58, 156–157, 160, 480
propi, 10–11, 380
propi generalitzat, 428
singular, 338, 456
dret, 456
esquerre, 456
suma de dos vectors, 50
unitari, 55
vectors ortogonals, 56, 57, 297

Young
teorema d'Eckart–Young, 469
Young, Gale J., 469

Zaballa, Jon, 450

Algorismes i mètodes

Discussió i resolució de l'equació lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ . . 84
Algorisme de Gauss 106
Algorisme de Gauss-Jordan 108
Discussió i resolució d'un sistema lineal amb n incògnites 111
Algorisme de substitució regressiva 112
Estudi de la invertibilitat i càlcul de la inversa 145
Resolució del sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ a partir de $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ 170
Factorització LU. Càlcul pràctic 174
Obtenció de les equacions d'un subespai de $\mathbb{K}^n$ 215
Càlcul de la intersecció de dos subespais F i G (a partir de les equacions) 220
Càlcul de la intersecció de dos subespais F i G (a partir de les bases de F i G) 223
Càlcul de la suma de dos subespais F i G 225
Càlcul de la projecció ortogonal 241
Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt 263
Factorització QR deduïda de l'algorisme d'ortonormalització de Gram-Schmidt 263
mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt en espais euclidians . . . 301
Estudi de la diagonalitzabilitat d'una matriu A 388
Diagonalització d'una matriu A 388
Diagonalització unitària d'una matriu normal A 403
Algorisme de Jacobi 413
Nombre i longituds de les cadenes de Jordan 436
Càlcul d'una base de Jordan 441
Descomposició en valors singulars de la matriu A 457
Descomposició en valors sigulars reduïda de la matriu A 460

ÍNDEX GENERAL

Sumari ***v***

Introducció destinada (sobretot) a professors vii
Introducció per a l'estudiant xv
Lliçó 0. Problemes lineals 1
0.1. Sistemes d'equacions lineals. Aproximació polinòmica d'una funció 1
0.2. Cadenes de Màrkov i matrius estocàstiques 3
0.2.1. L'algorisme PageRank 6
0.3. Valors i vectors propis. Equacions en diferències 10
0.3.1. Els nombres de Fibonacci 11

Llibre primer. $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ ***13***

Capítol 0. Nombres complexos i polinomis ***15***

Lliçó 1. Els nombres complexos 17
1.1. Tres o quatre coses sobre els nombres reals 17
1.2. Els nombres complexos 18
1.2.1. Forma polar 19
1.2.2. Producte (o multiplicació) de dos nombres complexos 20
1.2.3. El nombre i 21
1.2.4. Potències dels nombres complexos 22
1.2.5. Suma de dos nombres complexos. Forma binòmica 22
1.2.6. El producte i el quocient en forma binòmica. El conjugat d'un nombre complex 25
1.3. La forma exponencial 26
1.3.1. La funció exponencial complexa 27
La funció $\mathsf{e}^{\mathsf{i}t}$ 27
La fórmula d'Euler 28
1.3.2. Forma exponencial (o trigonomètrica) 29
1.3.3. Arrels d'un nombre complex 29
1.4. Resum 31
1.5. Exercicis 32

Lliçó 2. Polinomis reals i complexos. El teorema fonamental de l'àlgebra 34
2.1. Polinomis (o funcions polinòmiques) 34
2.1.1. Arrels i divisibilitat de polinomis 35
Arrels múltiples 35
Arrels múltiples i derivades successives 36
2.2. El teorema fonamental de l'àlgebra 36
2.2.1. Arrels complexes de polinomis amb coeficients reals 37
2.3. Resum 39
2.4. Exercicis 40
2.5. Apèndix: Demostració del teorema fonamental de l'àlgebra 41
2.5.1. Successions de nombres complexos 41
2.5.2. Algunes propietats dels polinomis complexos 42
2.5.3. La propietat clau 43
2.5.4. Demostració del teorema fonamental de l'àlgebra 44

Capítol 1. Sistemes d'equacions lineals ***47***

Lliçó 3. Vectors i matrius 49
3.1. Vectors 49
3.1.1. Operacions amb vectors: Suma, producte escalar-vector i combinacions lineals 50
3.1.2. Interpretació geomètrica dels vectors i de les operacions amb vectors 51
3.2. El producte escalar 52
3.2.1. El producte escalar (cas real) 54
3.2.2. Aplicacions geomètriques del producte escalar (real) 55
3.2.3. El producte escalar (cas complex) 57
3.3. Matrius 58
3.3.1. Una matriu és una llista de vectors 60
3.3.2. Operacions amb matrius: Suma, producte escalar-matriu i combinacions lineals 60
3.3.3. Matrius per blocs 62
3.4. Resum 64
3.5. Exercicis 65
Lliçó 4. Multiplicació de matrius 68
4.1. El producte matriu-vector 68
4.2. El producte fila-matriu 69
4.3. El producte fila-columna 70
4.4. El producte matriu-matriu 70
4.4.1. Producte per columnes 72
4.4.2. Producte per files 73
4.4.3. Columnes per files 73
4.4.4. Propietats del producte 74

4.4.5. Producte per blocs 74
4.5. Resum 75
4.6. Exercicis 77
Lliçó 5. Equacions i sistemes lineals 80
5.1. Equacions lineals 80
5.2. Sistemes d'equacions lineals 85
5.2.1. Classificació dels sistemes lineals atenent al nombre de solucions 91
5.3. Les formes vectorial i matricial d'un sistema d'equacions lineals. Quatre problemes equivalents 91
5.3.1. Matrius associades a un sistema lineal 93
5.4. Mètode de reducció de Gauss-Jordan (primera aproximació) 93
5.5. Resum 98
5.6. Exercicis 99
Lliçó 6. Matrius elementals. Algorisme de Gauss-Jordan 101
6.1. Matrius esglaonades i operacions elementals 101
6.2. Matrius elementals 103
6.2.1. Matrius elementals del tipus permutació . . . 103
6.2.2. Matrius elementals del tipus escalat 104
6.2.3. Matrius elementals del tipus reducció 105
6.3. Els algorismes de Gauss i de Gauss-Jordan 105
6.4. Discussió i resolució dels sistemes lineals 109
6.4.1. L'algorisme de substitució regressiva 112
6.5. Resum 114
6.6. Exercicis 117
Lliçó 7. L'equació matricial $AX = B$ i els sistemes homogenis 120
7.1. La resolució d'un sistema lineal revisitada 120
7.2. L'equació matricial $AX = B$ 121
7.2.1. Resolució simultània de sistemes lineals 123
7.3. Sistemes homogenis 124
7.4. Resum 126
7.5. Exercicis 126

Capítol 2. Matrius ***129***

Lliçó 8. El rang d'una matriu 131
8.1. Interpretació matricial dels algorismes d'esglaonament 131
8.2. (In)dependència lineal 132
8.3. Relacions de dependència i combinacions lineals 134
8.4. El rang 135
8.4.1. Dependència lineal entre les columnes d'una matriu 135
8.4.2. Dependència lineal entre les files d'una matriu 137
8.5. Resum 138
8.6. Exercicis 139

8.7. Apèndix: Prova de la unicitat de la forma esglaonada reduïda . . . 142
Lliçó 9. La matriu inversa . . . 143
9.1. Definició i càlcul de les matrius inverses . . . 143
9.2. Multiplicació de matrius invertibles . . . 146
9.3. Inverses de les matrius elementals . . . 147
9.4. Teorema de caracterització de les matrius invertibles . 148
9.5. El determinant d'una matriu 2×2. Càlcul ràpid de la inversa . . . 149
9.6. Resum . . . 151
9.7. Exercicis . . . 152
Lliçó 10. Transposició i conjugació. Matrius hermítiques i matrius unitàries 154
10.1. La matriu transposada. Matrius simètriques i matrius ortogonals . . . 154
10.1.1. Matrius simètriques i matrius antisimètriques 155
10.1.2. La matriu $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ i el producte escalar real 156
10.1.3. Matrius ortogonals . . . 157
10.2. La matriu adjunta . . . 158
10.2.1. Matrius hermítiques i matrius antihermítiques 159
10.2.2. La matriu $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ i el producte escalar . . . 160
10.2.3. Matrius unitàries . . . 160
10.3. Resum . . . 161
10.4. Exercicis . . . 163
Lliçó 11. Matrius triangulars. Factoritzacions LU . . . 165
11.1. Matrius diagonals i matrius triangulars . . . 165
11.2. La factorització LU . . . 167
11.2.1. Aplicació de la factorització LU a la resolució de sistemes lineals . . . 170
11.3. Operacions elementals per columnes . . . 172
11.4. Càlcul simultani de les matrius U i L . . . 173
11.5. Pivotatge parcial . . . 175
11.6. Resum . . . 178
11.7. Exercicis . . . 179

Llibre segon. $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$ ***181***

Capítol 3. Els espais $\mathbb{K}^n$ ***183***

Lliçó 12. Els espais $\mathbb{K}^n$ . . . 185
12.1. Bases i dimensió dels espais $\mathbb{K}^n$ . . . 185
12.2. Coordenades . . . 187
12.3. La matriu de canvi de base . . . 190
12.4. Bases ortogonals i ortonormals . . . 190
12.5. Resum . . . 192
12.6. Exercicis . . . 193
Lliçó 13. Subespais de $\mathbb{K}^n$ . . . 195
13.1. Subespais de $\mathbb{K}^n$ . . . 195

13.1.1. Subespais de $\mathbb{R}^2$ 195
13.1.2. Subespais de $\mathbb{R}^3$ 198
13.2. Dimensió i bases dels subespais de $\mathbb{K}^n$ 198
13.3. Extracció i compleció de bases 201
13.4. Resum 201
13.5. Exercicis 203
Lliçó 14. Els quatre subespais deduïts d'una matriu 205
14.1. L'espai columna i l'espai nul 205
14.1.1. Dimensions de l'espai columna i de l'espai nul 207
14.2. L'espai fila i l'espai nul esquerre 208
14.3. Subespais ortogonals 210
14.3.1. Ortogonalitat dels quatre subespais 211
14.4. Subespais i matrius. Les equacions d'un subespai 214
14.5. Resum 216
14.6. Exercicis 217
Lliçó 15. Intersecció i suma de subespais. Suma directa 220
15.1. Intersecció de dos subespais 220
15.2. Suma de dos subespais 223
15.3. Ortogonals dels espais suma i intersecció 226
15.4. La dimensió de la suma i la intersecció 227
15.4.1. La dimensió de la suma 227
15.4.2. La dimensió de la intersecció 227
15.4.3. La fórmula de Grassmann 228
15.5. Suma directa 229
15.5.1. Suma directa de diversos subespais 231
15.6. Resum 233
15.7. Exercicis 234

Capítol 4. Ortogonalitat i mínims quadrats ***237***

Lliçó 16. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals 238
16.1. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals 238
16.2. Càlcul de la projecció ortogonal 239
16.2.1. Projecció ortogonal sobre una recta 242
16.3. Resum 243
16.4. Exercicis 244
Lliçó 17. Aproximació per mínims quadrats 245
17.1. Propietats de la matriu A^*A 245
17.2. Teorema de l'aproximació òptima 247
17.3. Sistemes incompatibles i mínims quadrats 249
17.4. Resum 253
17.5. Exercicis 254
Lliçó 18. El mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt i la factoritza-
ció QR 256
18.1. Obtenció de bases ortonormals. Mètode de Gram-Schmidt
i factorització QR 256

18.1.1. Algorisme de Gram-Schmidt amb dos i tres vectors 256
18.1.2. La factorització QR amb tres vectors 260
18.1.3. El cas general 262
18.2. Aplicacions de la factorització QR 264
18.2.1. Projecció ortogonal 264
18.2.2. Mínims quadrats 264
18.3. Resum 265
18.4. Exercicis 266

Capítol 5. Espais vectorials i aplicacions lineals ***267***

Lliçó 19. Espais vectorials 269
19.1. Espais vectorials 269
19.1.1. Exemples 271
L'espai zero 271
Les matrius $m \times n$ 271
Els polinomis de la indeterminada x 271
El conjunt de totes les successions de nombres reals 272
Les funcions contínues en un interval 272
19.2. Subespais d'un espai vectorial 272
19.2.1. Exemples 272
Subespais de matrius 272
Subespais de polinomis 273
Subespais de successions 273
Subespais de funcions 273
19.3. Dependència lineal 273
19.4. Resum 275
19.5. Exercicis 277
Lliçó 20. Base d'un espai vectorial 279
20.1. Embolcall lineal d'un conjunt de vectors i conjunts generadors 279
20.2. Bases 280
20.2.1. Bases canòniques 281
20.3. Espais de dimensió finita 282
20.3.1. Coordenades d'un vector respecte a una base 282
Linealitat de les coordenades 284
20.3.2. La dimensió d'un espai vectorial 284
20.4. Interpolació polinomial 287
20.4.1. La matriu de Vandermonde 288
20.5. Resum 290
20.6. Exercicis 292
Lliçó 21. Espais vectorials euclidians 294
21.1. Productes escalars. Espais vectorials euclidians 294
21.2. Exemples 295

21.2.1. Productes escalars definits per una matriu . . 295
21.2.2. Un producte escalar en un espai de funcions contínues 296
21.2.3. Un producte escalar en l'espai dels polinomis 296
21.2.4. Un producte escalar en un espai de successions 296
21.2.5. Un producte escalar en l'espai de les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ 297
21.3. Norma, distància i angle. Ortogonalitat 297
21.3.1. Expressió matricial del producte escalar. La matriu de Gram 298
21.3.2. Bases ortonormals 300
21.4. El complement ortogonal. Projeccions ortogonals 302
21.4.1. Aproximació a les sèries de Fourier 304
21.5. Resum 308
21.6. Exercicis 310
21.6.1. Productes escalars 310
21.6.2. Expressió matricial del producte escalar. Bases ortonormals 311
21.6.3. Sèries de Fourier 312
Lliçó 22. Aplicacions lineals 313
22.1. Aplicacions lineals 313
22.1.1. Nucli i imatge 315
22.2. Transformacions lineals de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ 317
22.3. Interpretació geomètrica 318
22.3.1. Transformacions lineals especials 319
Matrius elementals 320
Matrius ortogonals 321
Matrius quadrades no invertibles 322
Producte de transformacions elementals . . . 322
22.3.2. Propietats algèbriques i geomètriques 324
22.4. Resum 326
22.5. Exercicis 327
Lliçó 23. Canvis de base 329
23.1. Canvi de base en un espai vectorial 329
23.1.1. La matriu del canvi de base 329
23.1.2. Fórmula del canvi de base en un espai vectorial 330
23.2. Canvi de base en una aplicació lineal 332
23.2.1. La matriu associada a una aplicació lineal respecte a dues bases 333
23.2.2. Fórmula del canvi de bases en una aplicació lineal 334
23.2.3. Matrius associades a una aplicació lineal en diverses bases 336

Factorització en valors singulars, diagonalització i formes reduïdes de Schur i de Jordan . . . 338
23.3. Resum . . . 338
23.4. Exercicis . . . 339

Llibre tercer.* A = UΣV **341**

Capítol 6. Determinants ***343***

Lliçó 24. Determinants . . . 344
24.1. El determinant d'una matriu . . . 344
24.1.1. Determinants i operacions elementals per columnes . . . 346
24.2. Els tres teoremes importants . . . 348
24.2.1. Determinants i operacions elementals per files 349
24.3. Càlcul de determinants . . . 349
24.3.1. Càlcul de determinants mitjançant operacions elementals . . . 349
24.3.2. Desenvolupament per una columna o per una fila . . . 351
El determinant 1×1 . . . 351
El determinant 2×2 . . . 352
El determinant 3×3 . . . 352
El determinant $n \times n$ . . . 353
24.3.3. L'estratègia òptima . . . 355
24.4. El teorema que ho justifica tot . . . 356
24.5. Resum . . . 357
24.6. Exercicis . . . 358
24.7. Apèndixs . . . 361
24.7.1. Comparació entre el mètode de Gauss i el de desenvolupament per files o columnes . . . 361
24.7.2. Demostració del teorema 24.9 . . . 362
24.7.3. Expressió explícita del valor del determinant . 365
Lliçó 25. Aplicacions dels determinants . . . 369
25.1. Càlcul del rang d'una matriu . . . 369
25.2. Resolució de sistemes lineals: la regla de Cramer . . . 370
25.3. Càlcul de la inversa d'una matriu . . . 372
25.4. Resum . . . 374
25.5. Exercicis . . . 374

Capítol 7. Diagonalització. Valors propis i vectors propis ***377***

Lliçó 26. Endomorfismes i matrius diagonalitzables . . . 379
26.1. Matrius diagonalitzables. Valors propis i vectors propis 379
26.1.1. Criteris de diagonalitzabilitat . . . 384
26.2. Endomorfismes diagonalitzables . . . 390
26.3. Resum . . . 393

26.4. Exercicis 395

Lliçó 27. Diagonalització unitària. Matrius normals 398

27.1. Reducció a una forma triangular 398

27.1.1. La factorització de Schur 400

27.2. Matrius diagonalitzables unitàriament 401

27.2.1. Diagonalització unitària de les matrius normals 402

27.2.2. Diagonalització ortogonal de les matrius simètriques reals 404

27.3. Resum 406

27.4. Exercicis 406

Lliçó 28. Aplicacions de la diagonalització 408

28.1. Potències d'una matriu 408

28.2. Equacions en diferències (o recurrències) lineals 409

28.2.1. Els nombres de Fibonacci 410

28.3. Resolució de sistemes lineals. Mètodes iteratius 411

28.4. Equacions diferencials lineals 415

28.5. Formes quadràtiques 418

28.6. Reducció de còniques 419

28.7. Resum 422

28.8. Exercicis 423

Lliçó 29. La forma reduïda de Jordan 426

29.1. Blocs de Jordan i cadenes de Jordan 426

29.2. Obtenció de la forma reduïda de Jordan 429

29.2.1. Exemples senzills 429

29.2.2. Suma directa dels subespais propis generalitzats 433

29.2.3. Nombre i longitud de les cadenes de Jordan . 433

29.2.4. Càlcul de la base de Jordan 438

29.3. Resum 442

29.4. Exercicis 443

29.4.1. Polinomis anul·ladors 443

29.5. Apèndix: Demostració del teorema d'existència 445

29.5.1. Independència lineal de les cadenes de Jordan 445

29.5.2. Demostració de l'existència de la base de Jordan 446

Capítol 8. Factorització en valors singulars. Valors singulars i vectors singulars ***449***

Lliçó 30. Vectors singulars i valors singulars 450

30.1. Descomposició en valors singulars d'una aplicació lineal 450

30.2. Descomposició en valors singulars d'una matriu 453

30.2.1. Construcció de la descomposició en valors singulars 453

30.2.2. Descomposició en valors singulars reduïda . . 459

30.3. El significat numèric de la descomposició en valors singulars 461

30.4. Resum 463

30.5. Exercicis 464
Lliçó 31. Aplicacions dels valors singulars. La pseudoinversa 466
31.1. Sistemes d'equacions lineals 466
31.2. Mínims quadrats 467
31.3. Aproximacions de rang limitat 468
31.3.1. Aplicació a la compressió d'imatges 470
31.4. La pseudoinversa 472
31.4.1. Interpretació com una inversa per mínims quadrats 474
31.5. Resum 474
31.6. Exercicis 475

Epíleg. Què hem aprés? ***477***
Vectors i matrius 479
Productes escalars i ortogonalitat 480
Sistemes d'equacions lineals 480
Matrius elementals, esglaonades i triangulars 481
El rang d'una matriu 482
Matrius invertibles 482
Matrius hermítiques i unitàries 483
Matrius definides, semidefinides i indefinides 484
Mínims quadrats 485
Espais vectorials i aplicacions lineals 485
Bases i canvi de base 486
Intersecció, suma i suma directa 487
Els quatre subespais 488
Determinants 489
Factoritzacions de matrius 489
La matriu pseudoinversa 492

Llibre quart. Solucions dels exercicis ***493***
Lliçó 1. Els nombres complexos 495
Lliçó 2. Polinomis reals i complexos. El teorema fonamental de l'àlgebra 500
Lliçó 3. Matrius i vectors 503
Lliçó 4. Multiplicació de matrius 511
Lliçó 5. Equacions i sistemes lineals 520
Lliçó 6. Matrius elementals. Algorisme de Gauss-Jordan 526
Lliçó 7. L'equació matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ i els sistemes homogenis 534
Lliçó 8. El rang d'una matriu 540
Lliçó 9. La matriu inversa 546
Lliçó 10. Transposició i conjugació. Matrius hermítiques 554
Lliçó 11. Matrius triangulars. Factoritzacions LU i matrius unitàries . . . 560
Lliçó 12. Els espais $\mathbb{K}^n$ 566
Lliçó 13. Subespais de $\mathbb{K}^n$ 570
Lliçó 14. Els quatre subespais deduïts d'una matriu 576
Lliçó 15. Intersecció i suma de subespais. Suma directa 586

Lliçó 16. Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals 592
Lliçó 17. Aproximació per mínims quadrats 597
Lliçó 18. El mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt i la factorització QR 603
Lliçó 19. Espais vectorials 608
Lliçó 20. Base d'un espai vectorial 613
Lliçó 21. Espais vectorials euclidians 619
Lliçó 22. Aplicacions lineals 628
Lliçó 23. Canvis de base 634
Lliçó 24. Determinants 640
Lliçó 25. Altres propietats i aplicacions dels determinants 648
Lliçó 26. Endomorfismes i matrius diagonalitzables 652
Lliçó 27. Diagonalització unitària. Matrius normals 665
Lliçó 28. Aplicacions de la diagonalització 672
Lliçó 29. La forma reduïda de Jordan 680
Lliçó 30. Vectors singulars i valors singulars 692
Lliçó 31. Aplicacions dels valors singulars. La pseudoinversa 698

Índex analític ***705***

Algorismes i mètodes ***717***

Índex general ***719***