



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

ADE

Facultad de Administración
y Dirección de Empresas /UPV

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Facultat d'Administració i Direcció d'Empreses

Determinació analítica de probabilitats de beneficis per a estratègies especulatives amb productes financers derivats sintètics del tipus "Collar": Teoria i Aplicacions.

Treball Fi de Màster

Màster Universitari en Direcció Financera i Fiscal

AUTOR/A: Signes Lemlih, Soraya

Tutor/a: Cortés López, Juan Carlos

Cotutor/a extern: BURGOS SIMON, CLARA

CURS ACADÈMIC: 2022/2023



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Facultat d'Administració i Direcció d'Empreses

**“Determinació analítica de probabilitats de
beneficis per a estratègies especulatives amb
productes financers derivats sintètics del
tipus *Collar*: Teoria i Aplicacions”**

Treball Fi de Màster

Màster Universitari en Direcció Financera i Fiscal

AUTORA: SIGNES LEMLIH, SORAYA

Directores: Dr. Cortés López, Juan Carlos

Dra. Burgos Simon, Clara

CURS ACADÈMIC: 2022-2023

ÍNDIX

RESUM	8
OBJECTIUS	9
CAPÍTOL I: INSTRUMENTS FINANCERS. ANTECEDENTS I CONTEXT	10
1.1. IBEX-35	12
1.2. BANC SANTANDER.....	12
1.3. DERIVATS FINANCERS.....	13
1.3.1. Opcions financeres.....	14
CAPITOL II: ESTRATÈGIES DE COBERTURA FORMADES A PARTIR D'OPCIONS	18
2.1. ESTRATÈGIA <i>COLLAR</i>	18
2.2. COMPARACIÓ ENTRE L'ESTRATÈGIA <i>COLLAR</i> I LES DE TIPUS <i>SPREAD</i>	24
2.2.1. Diferències entre l'estratègia <i>Collar</i> i les de tipus <i>Spread</i>	26
CAPÍTOL III: MODEL ESTOCÀSTIC LOG-NORMAL.....	30
3.1. PRELIMINARS ESTOCÀSTICS	31
3.1.1. Condicions i propietats del Moviment Brownià	32
3.2. MOTIVACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL O MOVIMENT BROWNIÀ GEOMÈTRIC	34
3.2.1. Primer enfocament.....	36
3.2.2. Segon enfocament.....	42

3.3. CALIBRATGE DELS PARÀMETRES DEL MODEL LOG-NORMAL A PARTIR DE DADES REALS	46
3.4. SIMULACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL MITJANÇANT MONTE CARLO.....	52
3.5. MESURES DE BONDAT D'AJUST	53
CAPÍTOL IV: APLICACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL	55
4.1. APLICACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL MITJANÇANT EL MÈTODE DE MOMENTS...	56
4.2. APLICACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL MITJANÇANT EL MÈTODE DE MÀXIMA VERSEMBLANÇA	71
CAPÍTOL V: MODEL DE BLACK-SCHOLES-MERTON.....	78
5.1. INTRODUCCIÓ AL MODEL DE BLACK-SCHOLES-MERTON.....	79
5.2. APLICACIÓ DEL MODEL BLACK-SCHOLES-MERTON	83
5.2.1. Fórmula de Black-Scholes per a opcions tipus <i>call/put</i> que no paguen dividendes	85
5.2.2. Aplicació de Black-Scholes-Merton al cas concret del Banc Santander	89
5.2.3. Fórmula de Black-Scholes-Merton per a opcions europees de tipus <i>call/put</i> que paguen dividendes	93
CAPÍTOL VI: DETERMINACIÓ DE LA PROBABILITAT DE BENEFICIS PER A ESTRATÈGIES D'INVERSIÓ TIPUS <i>COLLAR</i>	95
6.1. DETERMINACIÓ DE PROBABILITAT DE BENEFICIS PER A UNA ESTRATÈGIA D'INVERSIÓ TIPUS <i>COLLAR</i> . PART TEÒRICA	95
6.2. DETERMINACIÓ DE PROBABILITAT DE BENEFICIS PER A UNA ESTRATÈGIA D'INVERSIÓ TIPUS <i>COLLAR</i> . APLICACIÓ PRÀCTICA	97

ESTRATÈGIES ESPECULATIVES DE TIPUS *COLLAR*: TEORIA I APLICACIONS

CONCLUSIONS100

BIBLIOGRAFIA102

ÍNDEX DE FIGURES

Figura 1: Gràfic de beneficis-pèrdues sobre la compra de l'actiu subjacent, $(B/P)_{S_T}$. Font: Elaboració pròpia	19
Figura 2: Gràfic de beneficis-pèrdues sobre la compra de la <i>put</i> , $(B/P)_{PC}(S_T)$. Font: Elaboració pròpia	20
Figura 3: Gràfic de beneficis-pèrdues sobre la venda de la <i>call</i> , $(B/P)_{CV}(S_T)$. Font: Elaboració pròpia.....	21
Figura 4: Gràfic de beneficis-pèrdues de l'estratègia <i>Collar</i> , $(B/P)_{COLLAR}$. Font: Elaboració pròpia.....	23
Figura 5: Gràfic Beneficis-Pèrdues d'una estratègia <i>Bear Spread</i> , $(B/P)_{Bear Spread}$. Font: Elaboració pròpia.....	25
Figura 6: Gràfic Beneficis-Pèrdues d'una estratègia <i>Bull Spread</i> $(B/P)_{Bull Spread}$. Font: Elaboració pròpia.....	26
Figura 7: Capitalització a interès compost continu. Font: Elaboració pròpia	34
Figura 8: Trajectòries mostrals del Moviment Brownià Geomètric. Font: Elaboració pròpia mitjançant Mathematica®	46
Figura 9: Gràfic de l'evolució de les cotitzacions reals diàries del Banc Santander de l'1 de desembre del 2021 al 31 de gener del 2022. Font: Elaboració pròpia.....	55
Figura 10: Càlcul Log-retorn. Font: elaboració pròpia	57
Figura 11 Càlcul de la mitjana. Font: Elaboració pròpia	58
Figura 12: Càlcul de la variància. Font: Elaboració pròpia	58
Figura 13: Càlcul de la deriva. Font: Elaboració pròpia.....	59

Figura 14: Càlcul de la volatilitat. Font: Elaboració pròpia.....	59
Figura 15: Càlcul de la variable aleatòria. Font: Elaboració pròpia.....	60
Figura 16: Càlcul de les prediccions puntuals. Font: Elaboració pròpia	61
Figura 17: Càlcul del valor esperat per al dia 1 de febrer. Font: Elaboració pròpia	62
Figura 18: Càlcul del marge superior per a un IC Empíric. Font: Elaboració pròpia	63
Figura 19: Càlcul del marge inferior per a un IC Empíric. Font: Elaboració pròpia	63
Figura 20: Càlcul del valor central per a un IC Empíric. Font: Elaboració pròpia.....	64
Figura 21: Càlcul del preu per a un IC Teòric. Font: Elaboració pròpia	65
Figura 22: Càlcul de la volatilitat per a un IC Teòric. Font: Elaboració pròpia	65
Figura 23: Càlcul del marge superior per a un IC Teòric. Font: Elaboració pròpia	66
Figura 24: Càlcul del marge inferior per a un IC Teòric. Font: Elaboració pròpia.....	66
Figura 25: Mesures de Bondat d'Ajust. Font: Elaboració pròpia	67
Figura 26: Gràfic comparatiu entre el valor esperat i l'observat. Font: Elaboració pròpia	68
Figura 27: Càlcul de l'error absolut. Font: Elaboració pròpia	68
Figura 28: Càlcul del valor absolut entre l'observat. Font: Elaboració pròpia	69
Figura 29: Càlcul de l'error al quadrat. Font: Elaboració pròpia.....	69
Figura 30: Càlcul del MAPE. Font: Elaboració pròpia	69
Figura 31: Càlcul del RMSE. Font: Elaboració pròpia.....	70
Figura 32: Simulació de Monte-Carlo. Font: Elaboració pròpia.....	71

Figura 33: Càlcul de $\left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu\Delta t\right)^2$ pertanyent a l'equació $L\mu, \sigma$. Font: Elaboració pròpia 72

Figura 34: Càlcul de l'equació $L(\mu, \sigma)$ o θ . Font: Elaboració pròpia 73

Figura 35: Paràmetres de Solver. Font: Elaboració pròpia..... 74

Figura 36: Gràfic comparatiu entre el valor esperat mitjançant el Mètode de Màxima Versemblança i el valor real observat. Font: Elaboració pròpia 76

Figura 37: Càlcul d'una taxa d'interès r de l'1% per a un període de 20 dies laborables. Font: Elaboració pròpia90

Figura 38: Càlcul del valor T temporal per a un període de 20 dies laborables. Font: Elaboració pròpia.....90

Figura 39: Càlcul de la desviació típica. Font: Elaboració pròpia90

Figura 40: Càlcul de d_1 . Font: Elaboració pròpia..... 91

Figura 41: Càlcul de d_2 . Font: Elaboració pròpia..... 91

Figura 42: Càlcul de $N(d_1)$. Font: Elaboració pròpia..... 91

Figura 43: Càlcul de $N(d_2)$. Font: Elaboració pròpia92

Figura 44: Càlcul de la prima de la *put*. Font: Elaboració pròpia92

Figura 45: Càlcul de la prima de la *call*. Font: Elaboració pròpia92

Figura 46: Càlcul de l'argument N . Font: Elaboració pròpia.....98

Figura 47: Probabilitats de benefici variant el preu d'exercici de la *call*. Font: Elaboració pròpia99

ÍNDIX DE TAULES

Taula 1: Comparació de compra-venta d'opcions de tipus <i>call</i> i de tipus <i>put</i> . Font: Elaboració pròpia.....	16
Taula 2: Càlcul de la funció beneficis-pèrdues de l'estratègia <i>Collar</i> . Font: Elaboració pròpia.	22
Taula 3: Condicions de les opcions <i>Out The Money</i> . Font: Elaboració pròpia	27
Taula 4: Preus de cotització del Banc Santander i càlcul del Log-retorn. Font: Elaboració pròpia	57
Taula 5: Taula comparativa dels valors que s'obtidrien per a μ i per a σ mitjantçant el Mètode de Moments i el Mètode de Màxima Versemblança. Font: Elaboració pròpia.....	75
Taula 6: Comparació dels resultats de les Mesures de Bondat d'Ajust emprant el Mètode de Moments i el Mètode de Màxima Versemblança. Font: Elaboració pròpia	77

RESUM

El propòsit d'aquest Treball Final de Màster consisteix en determinar la probabilitat d'obtenir beneficis en diferents escenaris a través d'una estratègia d'inversió de tipus sintètica anomenada *Collar*. Amb aquest objectiu s'estudia, des d'un punt de vista teòric, la dinàmica de l'actiu subjacent assumint que segueix el Model estocàstic Log-Normal que té com a solució el Moviment Brownià Geomètric. Així, s'estimaran els paràmetres d'aquest model emprant diferents tècniques de calibració basades en dades històriques de l'actiu subjacent, en aquest cas del Banc Santander. A continuació, amb la combinació d'opcions financeres de compra (*call*) i de venda (*put*) amb la possessió de l'actiu subjacent es forma l'estratègia de cobertura objecte d'estudi: el *Collar*. Seguidament, es recorre a la fórmula de Black-Scholes-Merton per al càlcul de les primes i estimació dels preus d'exercici dels derivats financers esmentats. Finalment, es plantegen diferents escenaris per a observar quina és la probabilitat d'obtenir beneficis en cadascun d'aquests emprant aquesta estratègia que es troba present en el mercat real.

Paraules clau

Estratègies especulatives; productes financers sintètics; *Collar*; *call* europea; *put* europea; estratègia de cobertura; Moviment Brownià Geomètric.

OBJECTIUS

L'objectiu principal del present document consisteix a determinar la probabilitat de beneficis que es pot obtenir en diferents escenaris emprant una estratègia inversora de tipus *Collar*, basada en opcions financeres, amb el subjacent del Banc Santander i assumint que segueix un Moviment Brownià Geomètric. Amb aquest objectiu, s'utilitzen diferents tècniques matemàtiques, com el Model Log-Normal per a modelitzar la dinàmica de l'actiu subjacent, o la fórmula de Black-Scholes-Merton per a determinar les primes i preus d'exercici de les opcions financeres que defineixen l'estratègia. Finalment, es simulen diferents escenaris per a determinar la probabilitat d'obtenir beneficis i, així, comprovar la utilitat pràctica d'aquest estudi al mercat real.

Els objectius secundaris que s'han plantejat en aquest projecte per a tractar d'assolir el principal són els següents:

1. Estudiar com funcionen els derivats financers i les estratègies especulatives.
2. Definir el Model Log-Normal i les seues propietats.
3. Analitzar el Lema d'Itô per a entendre i obtenir el Moviment Brownià Geomètric com a solució d'una equació diferencial estocàstica que modelitzi la dinàmica d'un actiu financer.
4. Calibrar els paràmetres del Model Log-Normal fent ús de dades reals.
5. Validar el model mitjançant mesures de Bondat d'Ajust.
6. Establir els preus d'exercici de l'estratègia *Collar*.
7. Calcular les primes dels derivats financers que s'usen en l'estratègia.
8. Determinar la probabilitat de benefici usant l'estratègia *Collar* en diferents escenaris d'inversió.
9. Aplicar els resultats teòrics a la mostra objecte d'estudi conformada per dades reals referents a l'actiu subjacent del Banc Santander.

CAPÍTOL I: INSTRUMENTS FINANCERS.

ANTECEDENTS I CONTEXT

La Borsa situa el seu origen a finals del segle XV en l'Europa occidental. Si bé és cert que la primera institució borsària es va crear ja en 1460, no va ser fins al 1602 quan es realitzà la primera venda d'accions en la Borsa de Valors d'Amsterdam. La institució de la Borsa de Valors va continuar creixent i es va continuar expandint des d'eixe moment. Ja en 1570 va aparèixer la Borsa de Londres, en 1792 la de Nova York, en 1794 la de Paris i en 1831 va aparèixer la de Madrid, la primera d'Espanya.

Cal destacar que al llarg de la història de la Borsa han coexistit dos tipus d'enfocament. D'una banda, l'anàlisi fonamental és aquell que busca el valor intrínsec dels títols. Aquest és un enfocament a un major termini ja que consisteix en l'estudi dels resultats de les empreses. En aquest estudi es tenen en compte variables macroeconòmiques, la valoració de l'empresa, els ratis financers, a més d'altres variables que puguin influir en el seu entorn.

D'altra banda, l'anàlisi tècnic es centra en realitzar prediccions a partir de l'evolució històrica del mercat. Amb aquesta finalitat, s'estudien els gràfics per a tractar d'identificar patrons que doni pistes sobre el que pot passar en el futur. A diferència de l'anterior, aquest és un enfocament a curt termini que s'associa amb l'especulació.

Si bé és cert que els seguidors d'ambdós tipus d'anàlisi tenen una competència entre sí, també és cert que realment aquests dos anàlisis són complementaris. Mentre que l'anàlisi fonamental ajuda a saber quines inversions poden resultar d'interès, l'anàlisi tècnic ajuda a triar el millor moment per a comprar o vendre.

La Borsa de Valors té una forta influència en l'economia mundial. Aquesta serveix com a referència ja que el cicle borsari s'anticipa sis mesos aproximadament al cicle econòmic. Segons la teoria dels cicles econòmics, es poden distingir quatre fases:

1. **Recessió:** Aquesta primera fase es caracteritza per una elevada taxa d'atur que té com a conseqüència una disminució en el consum interior i un creixement en

el tipus d'interès. Una manera de combatre aquesta situació consisteix a devaluar la divisa per a augmentar el consum exterior. En aquest context, sorgeix en la Borsa el concepte de “mans fortes”, que són aquells grans inversors que aprofiten la baixada de preu de les accions per a acumular-les fins que el mercat es recuperi.

2. Recuperació: Els preus en la Borsa comencen a pujar, les grans empreses obtenen majors beneficis, per tant disminueix l'atur i, com a conseqüència augmenta el consum interior.
3. Expansió: Els tipus d'interès han baixat en aquesta fase i les famílies, que ja es troben en una millor situació econòmica, comencen a invertir en Borsa. És en aquesta fase que les anomenades “mans fortes” decideixen aprofitar la pujada de preus per a vendre les accions que venien acumulant en la fase de recessió. Cal destacar que aquest és també el moment en que les famílies s'endeuten per a continuar consumint i comença a aparèixer la inflació.
4. Declivi: Davant d'aquesta situació d'endeutament i inflació, els tipus d'interès comencen a pujar. Com a conseqüència, els deutes de les famílies tenen un major cost, i per tant la capacitat adquisitiva disminueix i existeix un menor consum intern i la Borsa comença a baixar. Les famílies que havien comprat accions, i que representen al xicotet inversor, comencen a vendre-les sucumbint a la por de quedar-se sense liquiditat. És aquest el moment on comença altra vegada la fase de recessió i les “mans fortes” aprofiten la desesperació dels xicotets inversors per a acumular accions a un menor preu. Així el cicle queda tancat i torna a començar el procés.

Com s'observa, el cicle econòmic i el de la Borsa estan estretament lligats. És per aquesta raó que els economistes estan pendents dels moviments produïts en la Borsa per a anticipar les possibles crisis econòmiques. Així, serveixen com a referència els mercats financers i els índexs com, en el cas d'Espanya, l'IBEX-35.

1.1. IBEX-35

L'IBEX-35 té el seu origen en l'any 1992 davant la necessitat d'un subjacent que actués com a referència per a les negociacions. El seu nom deriva de l'Índex Borsari Espanyol i és un índex ponderat segons la capitalització borsària de les 35 empreses més importants d'Espanya. És a dir, aquelles empreses amb major capitalització tindran un pes major.

L'IBEX-35 és l'índex oficial del Mercat Continu de la Borsa Espanyola. Cada sis mesos, es reuneix el Comitè Assessor Tècnic de la Borsa per a establir les empreses que hi formaran part. Els criteris que es segueixen per a aquesta elecció són:

- El valor inicial. Aquest es correspon al que hi havia a tancament de mercat el dia 29 de desembre de 1989.
- Capitalització borsària, freqüència de cotització, volum de contractació i diferència entre preus de compra i venda de l'acció.
- Altra correlació entre l'IBEX-35 i el mercat borsari espanyol. Aquesta ha de ser d'aproximadament el 99,8%.
- El preu de l'acció que es pren com a referència en l'IBEX-35 per a cada empresa és el de l'última transacció realitzada en el Mercat Continu. Per a garantir que aquest valor no es vegi afectat per altres operacions com, per exemple, el repartiment de dividends, es pren el preu ajustat.

El Banc Santander, objecte d'estudi en aquest document, es troba dins de l'IBEX-35. Concretament, la publicació de setembre del 2022 de la institució Borses i Mercats Espanyols o BME el situa en segona posició, només per baix d'Iberdrola, amb una ponderació superior al 10% (Bolsas y Mercados Españoles, 2022).

1.2. BANC SANTANDER

La història del Banc Santander comença el 15 de maig del 1857, quan la reina Isabel II firma el Real Decret que autoritza la seua constitució. Inicialment, es tractava d'un banc estretament lligat al comerç exterior entre el port de Santander i Llatinoamèrica.

No obstant, en 1947 s'obri la primera oficina americana que es troba en La Habana, Cuba. A partir d'açò es va continuar expandint per altres països del continent.

En 1950 assumeix la presidència l'espanyol Emili Botin i impulsa la seua expansió nacional amb la compra d'un gran nombre de bancs locals. Ja en els anys 80, es veia reforçada la seua presència en Europa. El següent pas va consistir en fer-se lloc en Nord-Amèrica. Així, en l'any 2010 entrà al negoci de la banca comercial dels Estats Units.

Cal destacar que en juliol de 1987 el Banc Santander comença a cotitzar en la Borsa de Wall Street. Si ve és cert que en aquell moment ja cotitzava en quatre Borses de Valors diferents, aquesta fita el va convertir en la primera empresa espanyola amb presència en la Borsa novaiorquesa.

Actualment, es pot afirmar que el Banc Santander és una entitat financera consolidada a nivell internacional amb presència tant en el continent europeu com en l'americà. Així, tenint present tant la seua posició d'importància en l'IBEX-35 com la seua trajectòria, es conclou que és una bona opció triar aquest banc com a objecte d'estudi d'aquest document.

1.3. DERIVATS FINANCERS

Els productes derivats es defineixen com un tipus d'instrument amb un valor variable que depèn de l'evolució de preus d'un altre actiu, denominat actiu subjacent. Pot ser de distinta naturalesa. D'una banda, pot tractar-se d'elements financers com, per exemple, accions, divises, tipus d'interès, etc. D'altra banda, un actiu subjacent també pot ser no financer si es basa, per exemple, en *commodities* o matèries primes com metalls, petroli, gas, electricitat, etc. (Comisión Nacional del Mercado de Valores, 2022).

Cal destacar que un derivat financer funciona com un contracte on s'han establert una sèrie de condicions en el moment inicial d'aquest. Així, complint aquestes condicions, l'intercanvi efectiu es produirà en un moment futur dins del termini acordat. Convé ressaltar que els derivats financers són productes d'elevat risc ja que estan subjectes a

un efecte de palanquejament financer¹. En aquest tipus d'inversió, el desemborsament inicial és molt menor que el preu de l'actiu subjacent a obtenir, per la qual cosa tant els beneficis com les pèrdues poden multiplicar-se (Morales, 2012).

Aquest tipus de producte es pot negociar tant en mercats organitzats com en mercats no organitzats. No obstant, si es decideix invertir en un mercat organitzat, s'ha de tenir present que aquests tenen unes condicions estandarditzades que no poden ser modificades per l'inversor. A més a més, poden exigir depòsits per tal de garantir el compliment de les obligacions de pagament. A Espanya, el mercat oficial per a futurs i opcions financeres és el Mercat Espanyol de Futurs Financers (MEFF), el qual forma part del Grup SIX (*Swiss Infrastructure and Exchange*) i està raspallat per la Comissió Nacional del Mercat de Valors (CNMV). Ofereix derivats tant del segment financer (productes sobre accions individuals o índexs borsaris entre altres), com del segment no financer (productes sobre energia elèctrica) (MEFF, 2022).

Existeixen, per tant, molts tipus de derivats financers al mercat per a cobrir les necessitats i preferències de cada inversor. En el cas del present projecte, s'estudia una estratègia de cobertura usant la combinació de l'actiu subjacent amb dos derivats financers del mateix tipus: opcions financeres.

1.3.1. Opcions financeres

Una opció és un contracte sobre una quantitat determinada d'actiu subjacent, on s'estipulen un preu i una data de termini. Aquest contracte versa sobre la transacció

¹ El palanquejament financer consisteix a endeutar-se per a realitzar una inversió. Es pot donar com a única opció quan no es compta amb els recursos suficients, o com una manera de no perdre poder adquisitiu, és a dir, per a evitar la descapitalització. No obstant, el deute no és l'única forma de palanquejament. Per exemple, en el cas d'alguns derivats financers com les opcions financeres (veure 1.3.1. Opcions financeres), on el preu del subjacent sobre el que es té dret és major que la prima que es paga per a adquirir aquest dret.

de l'actiu i implica un dret per al comprador i una obligació per al venedor. Així mateix, el preu establert en el contracte rep el nom de preu d'exercici ja que és el preu en el que es basa el comprador de l'opció per a exercir, o no, el seu dret sobre el subjacent.

Les opcions funcionen de manera que, al moment del contracte, el comprador paga una quantitat anomenada prima a canvi de l'adquisició d'aquest dret. Quan aplega el venciment, el comprador podrà decidir si vol o no exercir el seu dret de fer efectiu el contracte i adquirir o vendre el subjacent al preu establert en un principi. Com que la prima no és retornable, per veure si li convé o no exercir el seu dret, haurà de comparar el preu que té el producte a termini i el que va ser determinat per contracte sabent que, en cas de no exercir, perdrà aquesta quantitat inicial. En canvi, el venedor no tindrà cap opció, haurà de complir el contracte segons la preferència del comprador de manera obligada.

Cal destacar que comprar opcions no és el mateix que comprar l'actiu subjacent. Com s'ha explicat anteriorment, l'opció dona el dret al seu comprador d'efectuar o no la transacció al final del contracte. No obstant, aquesta transacció no té que referir-se a la compra del subjacent necessàriament. D'una banda, quan el comprador adquireix el dret de, al final del contracte, rebre l'actiu subjacent al preu acordat estem parlant d'una opció de compra o *call*. És a dir, quan un inversor adquireix una posició llarga sobre una *call*, es parla de que aquest està comprant el dret de rebre el subjacent al final del contracte. En canvi, si es pren una posició curta sobre una *call*, l'inversor està venent aquest dret i per tant assumeix l'obligació de que, si el comprador exerceix el seu dret, ha de vendre el subjacent al preu acordat.

D'altra banda, el comprador de l'opció pot adquirir el dret a vendre l'actiu al preu acordat en el contracte. És da dir, el comprador de l'opció és el venedor de l'actiu i viceversa. En aquest cas estem parlant d'una opció de venda o *put* (Centro de formación de Bolsas y Mercados españoles, 2022). Així mateix, el comprador de la *put* i, per tant, qui adquireix una posició llarga sobre aquesta, realment compra el dret a vendre el subjacent a un preu pactat. Contràriament, el venedor d'aquest tipus d'opció, situat en una posició curta, ven el dret a vendre i, per tant, es veurà obligat a comprar el

subjacent si el comprador de la *put* exerceix el seu dret a vendre-lo a termini del contracte.

Per a facilitar la comprensió de com funciona la compra-venta d'opcions s'ha creat el quadre explicatiu mostrat a la Taula 1.

	<i>CALL</i>	<i>PUT</i>
Posició llarga / compra d'una opció	Dret a adquirir l'actiu subjacent a un preu acordat	Dret a vendre el subjacent a un preu pactat
Posició curta/ venta d'una opció	Obligació de vendre el subjacent (si el comprador de la <i>call</i> exerceix el seu dret a comprar)	Obligació de comprar l'actiu subjacent (si el comprador de la <i>put</i> exerceix el seu dret a vendre)

Taula 1: Comparació de compra-venta d'opcions de tipus call i de tipus put. Font: Elaboració pròpia

Tanmateix, el comprador d'una opció, pot vendre-la en qualsevol moment convertint-se així en venedor. D'altra banda, el venedor, també pot recomprar l'opció que va vendre en el mercat, cancel·lant així la seua obligació.

Cal destacar que poden existir distints tipus d'opcions depenent del moment en que es pugués exercir el dret dins del contracte. Principalment, es poden distingir entre tres. D'una banda, les opcions americanes són aquelles que es poden exercir en qualsevol moment del contracte sense haver d'esperar al venciment. Les opcions europees són aquelles que només poden exercir-se en la data de termini establida al contracte. Aquestes dos, són les més comuns. D'altra banda, les opcions exòtiques són aquelles que s'adapten a les necessitats dels clients i, per tant, tenen unes condicions més sofisticades i no estandarditzades. Aquestes estan destinades a inversors qualificats per la seua complexitat. Com que les condicions s'adapten al client, es poden trobar

una gran varietat d'opcions exòtiques (Instituto de Estudios Bursátiles, 2019). En el cas de l'estudi realitzat, s'ha decidit usar opcions europees.

CAPITOL II: ESTRATÈGIES DE COBERTURA FORMADES A PARTIR D'OPCIONES

La principal preocupació a l'hora d'invertir són les possibles pèrdues que poden donar-se davant d'una mala decisió. Per a poder evitar aquesta situació s'han realitzat molts estudis per a identificar patrons i s'han creat diverses estratègies d'inversió. Les estratègies de cobertura formades a partir d'opcions sorgeixen, precisament, de la necessitat de gestionar el risc derivat d'aquestes operacions financeres de la manera més adequada possible. Depenent de la situació i les intencions i preferències de l'inversor, es poden emprar distintes combinacions d'actuacions i productes financeres per a crear l'estratègia més convenient per a cada cas.

Aquest estudi versarà sobre una estratègia de cobertura formada a partir de derivats financers amb l'objectiu de limitar les possibles pèrdues i reduir el risc de l'operació. No obstant, per a poder mantenir les possibles pèrdues a uns nivells baixos i estables, també quedaran limitats els possibles beneficis de l'operació.

2.1. ESTRATÈGIA *COLLAR*

Existeixen diverses maneres de dur a terme una estratègia del tipus *Collar* alcista però la manera més comú es dona quan, estant en possessió d'un actiu subjacent (com és una acció), es compra una opció de venda (*put*) i es ven una opció de compra (*call*). Cal destacar que ambdues opcions han de seguir les següents condicions:

- Han d'estar basades en el mateix subjacent.
- Han d'estar *Out The Money* (OTM).
- Han de tindre la mateixa data d'expiració.
- Han de tindre el mateix nombre de contractes.

No obstant, han de tindre preus d'exercici distints. Al mateix temps, es busca el menor desemborsament inicial, és a dir, que la diferència entre el preu de les primes sigui el

més paregut possible. És per aquesta raó que també és coneguda com una estratègia de cost zero.

Per a la formació del *Collar*, per tant, hem distingit tres posicions inicials. D'una banda, ens trobem en possessió del subjacent, el valor del qual a data de venciment és S_T . La seua funció beneficis-pèrdues a la data d'expiració $((B/P)_{S_T})$ és la següent:

$$(B/P)_{S_T} = S_T - A,$$

on A representa el preu de compra de l'actiu subjacent que s'ha volgut protegir posteriorment amb aquesta estratègia; i S_T representa el preu del subjacent en l'instant T . La seua representació es mostra a la Figura 1.

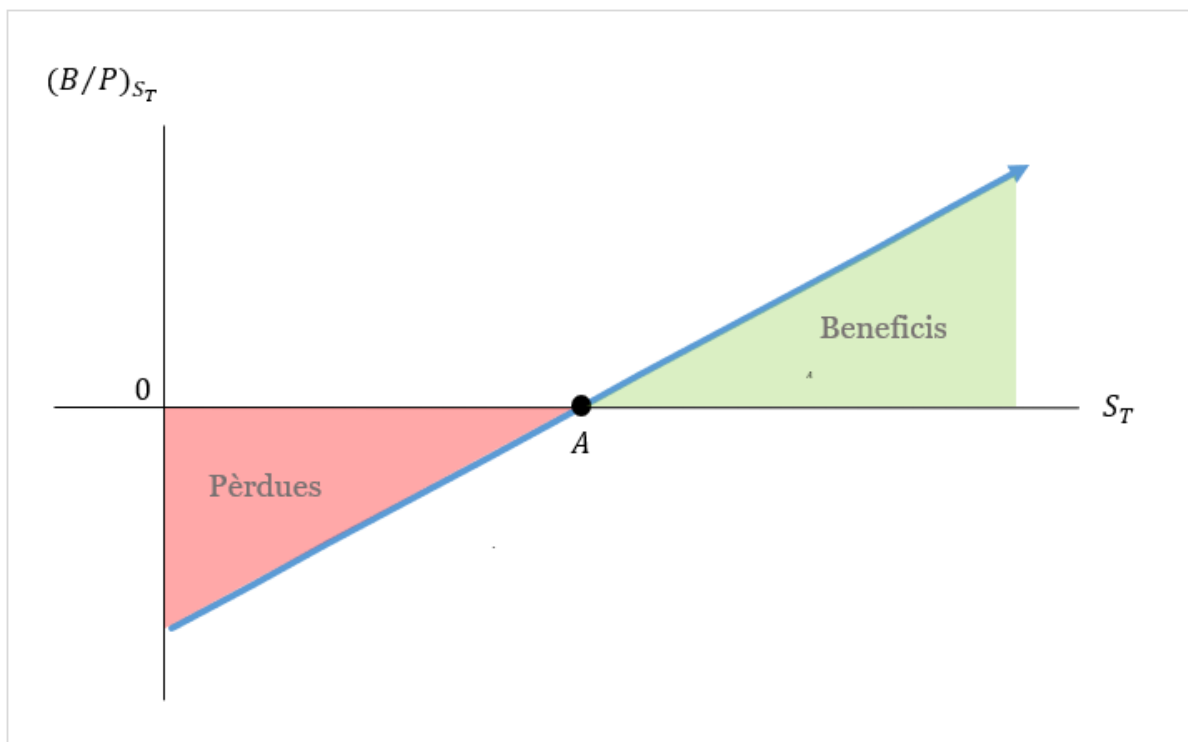


Figura 1: Gràfic de beneficis-pèrdues sobre la compra de l'actiu subjacent, $(B/P)_{S_T}$. Font: Elaboració pròpia

El gràfic està representat de manera que per baix de zero són pèrdues i per damunt beneficis. La línia blava representa l'evolució de la situació depenent del preu de l'actiu subjacent (eix x) i on el punt de tall (situació neutra) és el punt A . És a dir, s'obtidran

beneficis sempre i quan el preu de l'actiu subjacent sigui major que el cost de la seua compra.

D'altra banda, la composició de l'estratègia consta també de la compra d'una *put* i, per a compensar, la venda d'una *call*. Així, la funció de beneficis-pèrdues de la primera posició mencionada és la següent:

$$(B/P)_{PC}(S_T) = \begin{cases} -S_T + E_P - P & \text{si } 0 \leq S_T \leq E_P, \\ -P & \text{si } S_T \geq E_P, \end{cases}$$

on:

- $(B/P)_{PC}(S_T)$: Funció beneficis-pèrdues d'una *put* comprada en relació a un actiu subjacent S_T .
- E_P : Preu d'exercici de la *put*.
- P : Prima de la *put*.

La seua representació gràfica es mostra en la Figura 2.

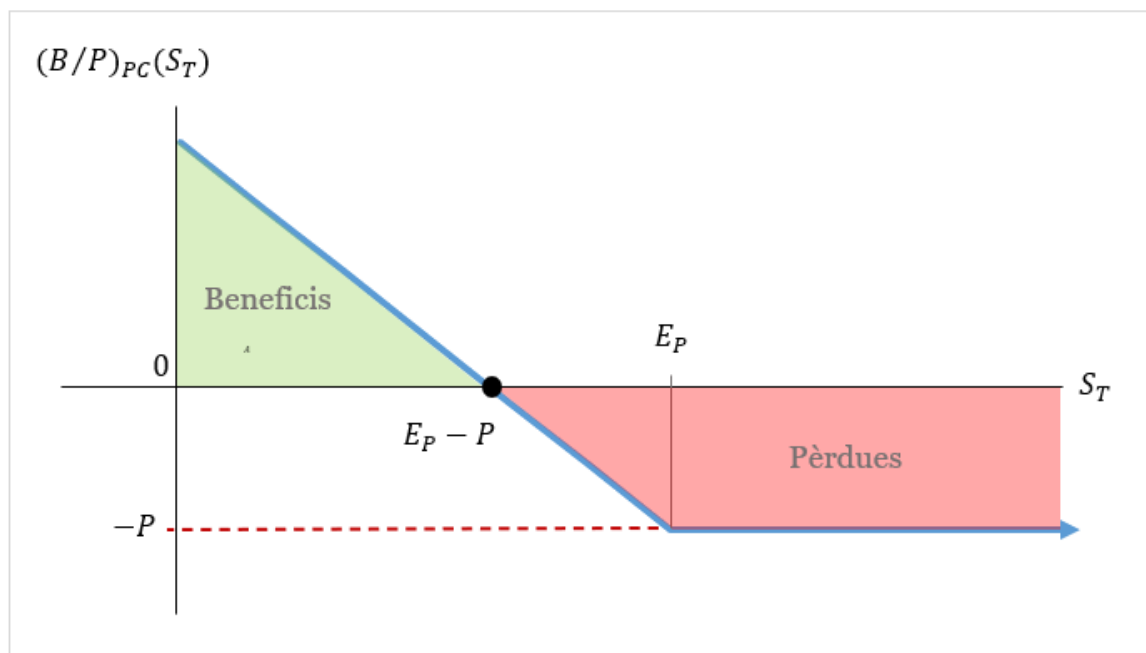


Figura 2: Gràfic de beneficis-pèrdues sobre la compra de la *put*, $(B/P)_{PC}(S_T)$. Font: Elaboració pròpia

Així, com s'observa, el punt de tall o punt a partir del qual hi haurà pèrdues es troba en el valor $E_P - P$. Aquest valor s'obté d'aïllar S_T de la primera part de la funció, és a dir, de resoldre l'equació: $-S_T + E_P - P = 0$.

Finalment, la posició curta de la *call* té la funció següent:

$$(B/P)_{CV}(S_T) = \begin{cases} C & \text{si } 0 \leq S_T \leq E_C, \\ -S_T + E_C + C & \text{si } S_T \geq E_C, \end{cases}$$

on:

- $(B/P)_{CV}(S_T)$: Funció beneficis-pèrdues d'una *call* venuda en relació a un actiu subjacent S_T .
- E_C : Preu d'exercici de la *call*.
- C : Prima de la *call*.

I la seua representació gràfica es mostra a la Figura 3.

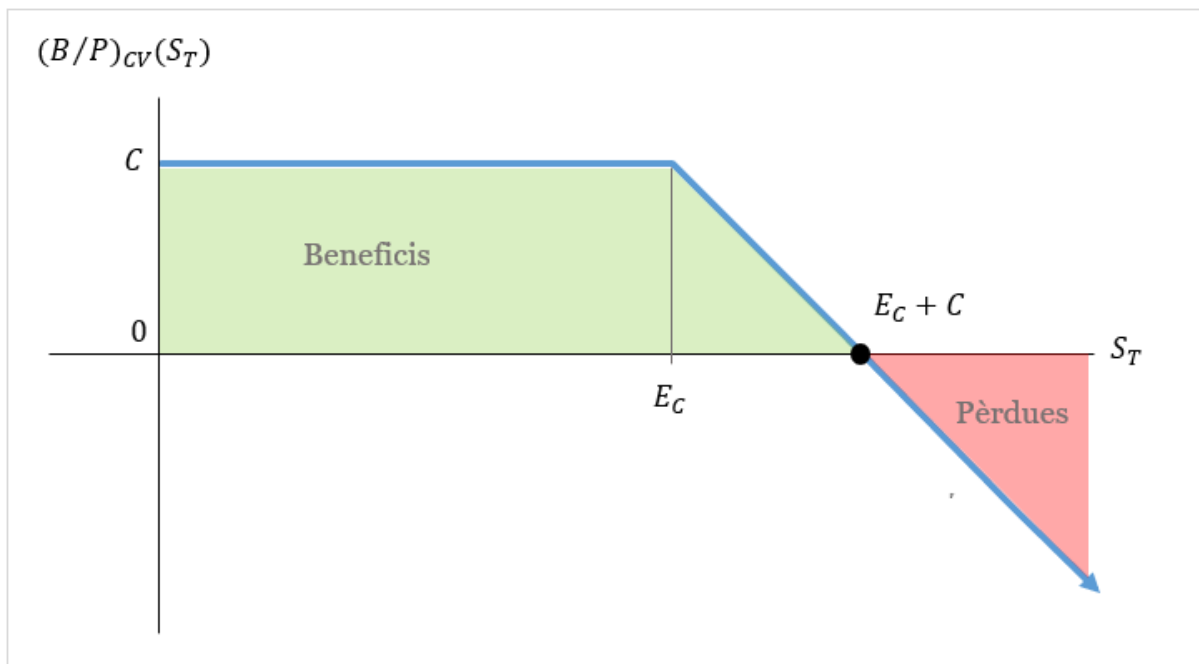


Figura 3: Gràfic de beneficis-pèrdues sobre la venda de la call, $(B/P)_{CV}(S_T)$. Font: Elaboració pròpia

El punt a partir del qual hi haurà pèrdues es troba en el valor $E_C + C$. Aquest valor s'obté de resoldre l'equació: $-S_T + E_C + C = 0$.

Ara que ja s'han establert les posicions inicials s'ha de tenir en compte una sèrie de condicions:

1. Es tracta de posicions OTM, per la qual cosa el preu d'exercici de la *call* ha de ser major que el preu d'exercici de la *put*:

$$E_P < E_C.$$

2. Donat que la venda de la *call* es fa per tal de compensar la compra de la *put*, es busca que ambdues primes tinguin una prima similar:

$$P \approx C.$$

3. El preu de l'actiu subjacent es troba entre els valors de E_P i de E_C . Per tant:

$$E_P < A < E_C.$$

Tenint tot açò present, ja es pot formar l'estratègia *Collar*. Es poden distingir, doncs, tres parts del gràfic diferents: de zero fins a E_P , d'aquest punt a E_C , i finalment el tram on el preu del subjacent sigui major d'aquest últim punt. El procés per a formar l'estratègia es pot resumir com la suma de cada una de les funcions de les posicions que formen l'estratègia. La Taula 2 resumeix com la posició total d'aquesta estratègia.

	$0 \leq S_T \leq E_P$	$E_P \leq S_T \leq E_C$	$S_T \geq E_C$
<i>Subjacent comprat</i>	$S_T - A$	$S_T - A$	$S_T - A$
<i>Put comprada</i>	$-S_T + E_P - P$	$-P$	$-P$
<i>Call venuda</i>	C	C	$-S_T + E_C + C$
TOTAL	$E_P - A + C - P$	$S_T - A + C - P$	$E_C - A + C - P$

Taula 2: Càlcul de la funció beneficis-pèrdues de l'estratègia Collar. Font: Elaboració pròpia.

A continuació, es desglossaran les sumes per a entendre millor els totals:

1. En el primer tram es veu com els subjacents s'anul·len entre sí. A més, s'assumeix que el valor de les primes és menor que els preus d'exercici. D'aquesta manera, com que $E_p < A$, s'entén que el resultat és negatiu. Com s'observa en el resultat, es tracta d'un valor fixe, per la qual cosa, en el primer tram només s'observen pèrdues. Així, la pèrdua màxima de la figura serà de $E_p - A + C - P$.
2. En el següent tram s'observa que S_T és positiu, la qual cosa significa que el gràfic tindrà una tendència positiva. És en aquest tram on es troba el punt de tall i, per tant, es pot afirmar que a partir del valor $A - C + P$ hi haurà beneficis.
3. Finalment, a l'últim tram, deduïm que el resultat serà positiu ja que $A < E_C$. D'aquesta manera, ens trobem en que l'última part de la gràfica ens mostra els beneficis màxims que podem obtenir emprant aquesta estratègia.

En la Figura 4 es mostra el beneficis-pèrdues de l'estratègia de Collar:

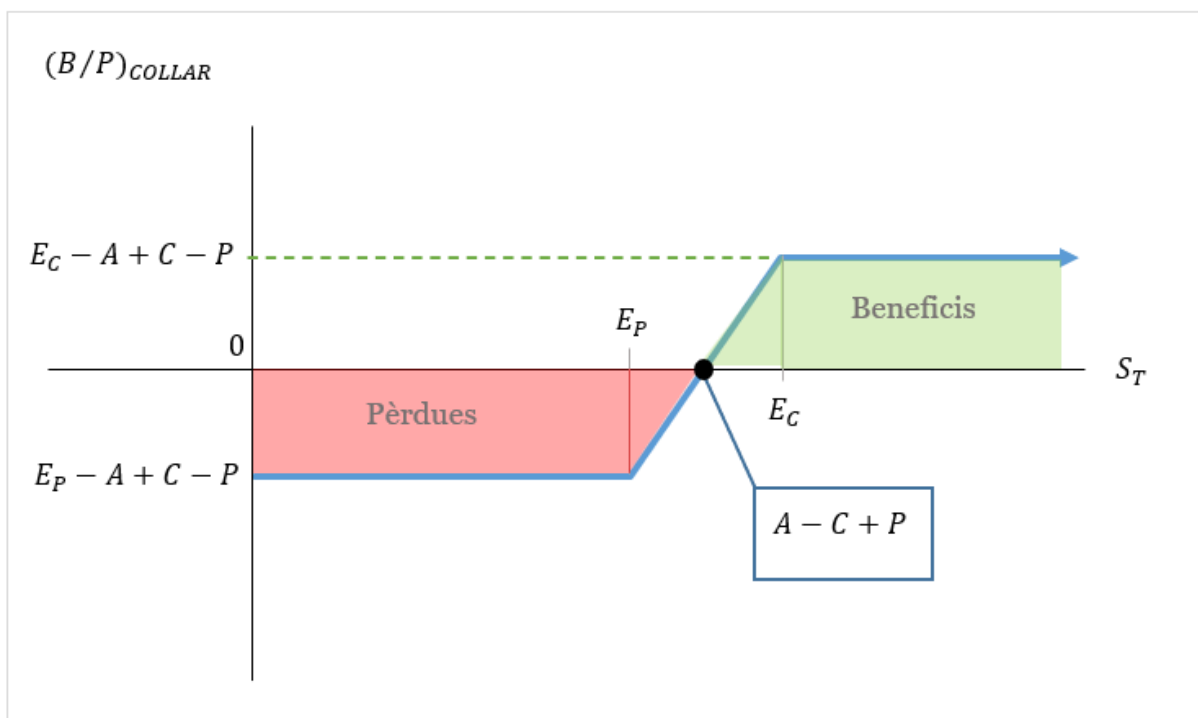


Figura 4: Gràfic de beneficis-pèrdues de l'estratègia Collar, $(B/P)_{COLLAR}$. Font: Elaboració pròpia

En conclusió, aquesta estratègia s'utilitza quan es vol protegir un actiu subjacent d'una possible caiguda del mercat, però es vol que el cost d'aquesta protecció sigui el mínim possible. Així, el resultat és una estratègia on es limiten les pèrdues a canvi de limitar els possibles beneficis.

Per la seua complexitat, es considera que l'estratègia està pensada per a un inversor amb experiència. En el cas del *Collar* alcista, s'empra quan l'inversor té una visió alcista del mercat però vol protegir la seua inversió davant d'una caiguda inesperada en el preu del subjacent.

Si bé és cert que el document es centrarà en aquesta estratègia concreta, existeixen diferents alternatives per a aconseguir aquest mateix objectiu depenent de les preferències de l'inversor. Així, en el següent apartat, es compara el *Collar* amb estratègies de tipus *Spread* per la seua similitud a primera vista.

2.2. COMPARACIÓ ENTRE L'ESTRATÈGIA COLLAR I LES DE TIPUS SPREAD

Per a poder començar amb la comparació entre aquests dos tipus d'estratègia d'inversió, caldrà primer introduir les de tipus *Spread*. Així, s'explica primer l'estratègia *Bear Spread* o *Spread* baixista. Com el seu propi nom indica, es tracta d'una estratègia amb una visió baixista que es pot realitzar mitjançant *calls* o *puts*. En el cas de que triem seguir aquesta tàctica amb *calls*, es deurà comprar una opció *call* y vendre una altra a un preu més baix que la que s'ha comprat. El més comú és que l'opció comprada tingui un preu major al de l'actiu subjacent mentre que l'opció venuda tingui un preu menor. En la Figura 5 s'observa la representació gràfica del *Bear Spread* amb una línia més grossa, i la representació de les accions necessàries per a formar l'estratègia (la compra i la venda de les *call*) amb una línia més fina.

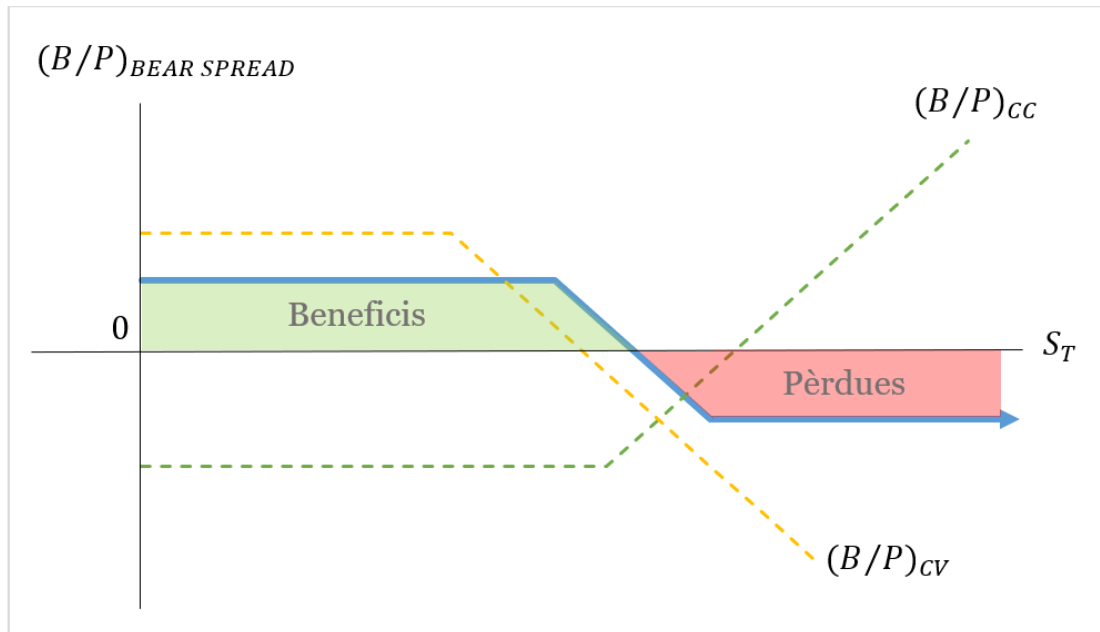


Figura 5: Gràfic Beneficis-Pèrdues d'una estratègia Bear Spread, $(B/P)_{\text{Bear Spread}}$. Font: Elaboració pròpia.

De manera inversa, existeix l'equivalent a aquesta estratègia però amb una visió alcista. Es tracta del *Bull Spread* o *Spread* alcista. Seguint el mateix exemple de les *call*, aquesta vegada es formaria amb la compra d'una *call*, comunament amb un preu menor que el del subjacent, y la venda d'una altra opció *call* amb un preu més elevat que l'anterior. En la Figura 6 s'observa la representació gràfica del *Bull Spread*.

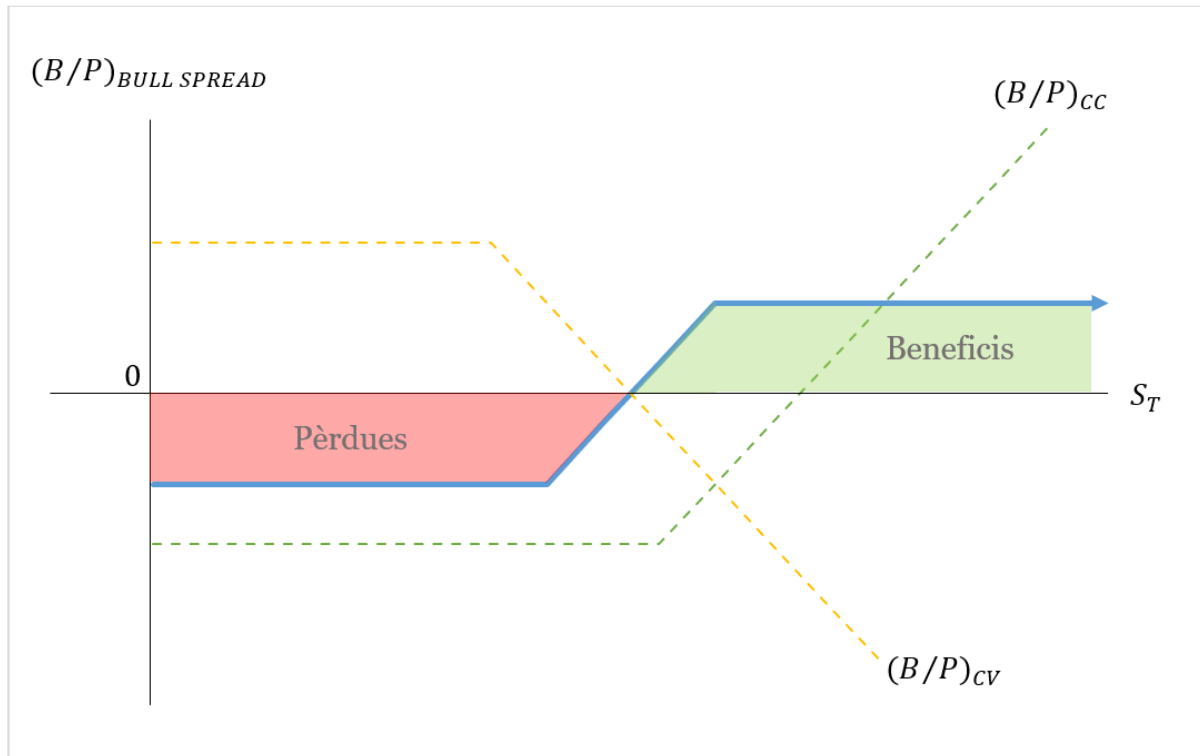


Figura 6: Gràfic Beneficis-Pèrdues d'una estratègia Bull Spread $(B/P)_{Bull\ spread}$. Font: Elaboració pròpia.

L'estratègia de tipus *Collar*, no obstant, es considera més complexa ja que s'utilitza més d'un tipus de derivat per a la formació de la cobertura. Si bé és cert que la seua representació gràfica recorda a les de tipus *Spread*, existeixen clares diferències en la seua naturalesa.

2.2.1. Diferències entre l'estratègia *Collar* i les de tipus *Spread*

L'estratègia *Collar* alcista té una gràfica molt similar a la del *Bull Spread*, però la seua composició, així com la seua complexitat, és molt distinta. En aquest apartat es tracta de reflectir tant les diferències com les similituds que s'hi poden trobar.

Per a dur a terme l'estratègia del *Collar* alcista és necessari estar primer en possessió d'un actiu subjacent. Seguidament, caldrà comprar una opció *put* i vendre una opció *call*. Cal destacar que, tant la *put* com la *call*, han de ser *Out The Money* (OTM). Per tant, aquestes han d'acomplir les condicions mostrades a la Taula 3.

CALL OTM	Preu d'exercici > Preu de l'actiu subjacent
PUT OTM	Preu d'exercici < Preu de l'actiu subjacent

Taula 3: Condicions de les opcions Out The Money. Font: Elaboració pròpia

Una de les característiques més representatives de l'estratègia *Collar* és que la prima que es cobra per la venda de la *call* s'usa per a pagar la prima de la *put*, ja sigui en la seua totalitat o parcialment. És per aquesta raó que es considera com a una estratègia molt rentable. A més, es considera que té un baix risc ja que es veu limitat gràcies a la compra de l'opció *put*. No obstant, el beneficis també es veuen limitats. Així, en cas que el mercat sigui alcista, la tendència l'acompanyarà i, en cas que sigui baixista, el capital de l'inversor es veu protegit (SHARKOPCIONES, 2023). Aquest tipus d'estratègia és perfecta per a un mercat alcista des d'una perspectiva conservadora.

Una estratègia *Bull Spread* és una estratègia pensada per a inversors amb una visió moderadament alcista del mercat que esperen una crecuda lleugera en el preu del subjacent. L'estratègia inclou prendre dues posicions. D'una banda, caldrà prendre una posició llarga sobre una opció *call* i, d'altra banda, una posició curta sobre una opció *call*. El risc de pèrdues i els possibles beneficis també es veuen limitats en aquesta estratègia.

Encara que les dos estratègies tinguin una visió alcista del mercat, es considera que l'estratègia *Collar* és més avançada en quant a dificultat que l'estratègia *Bull Spread*. Açò s'observa tant en el nombre de posicions com en la varietat de derivats financers que s'han necessitat per a la seua formació. D'una banda, el *Collar* ha necessitat de tres posicions distintes amb la compra d'un actiu, la compra d'una *put* i la venda d'una *call*; mentre que el *Bull Spread* només necessita de la compra d'una *call* i la venda d'una *call* distinta.

A més a més, s'ha de tindre en compte que cada una de les estratègies, encara que la representació gràfica sigui la mateixa, estan pensades per a dos objectius diferents. El *Collar* es tracta d'una estratègia perfecta per a un inversor amb una visió alcista sobre

l'actiu subjacent però que està preocupat per les possibles pèrdues i vol protegir-se. D'altra banda, l'estratègia de tipus *Bull Spread* és més adequada quan l'inversor té una visió alcista del mercat però no espera que el preu del subjacent creixi en gran mesura.

En quant a les possibles pèrdues i beneficis, també es troben diferències. Mentre que l'estratègia *Collar* incorreria en les màximes pèrdues quan el preu del subjacent sigui menor que el preu d'exercici de l'opció *put*; les màximes pèrdues mitjançant l'estratègia *Bull Spread* s'originarien si el preu del subjacent a termini del contracte és major o igual al preu d'exercici *call* comprada.

En quant al límit de les pèrdues, en la primera estratègia es veuen influenciades per diversos factors. Donat que s'usen diferents derivats, les màximes pèrdues es correspondrien amb el preu que s'ha pagat per l'actiu subjacent (A) restant el preu d'exercici de la *put* venuda (E_p) i la diferència neta obtinguda en les primes amb la compra de la *put* (P) i la venda de la *call* (C), és a dir, $A + E_p - (C - P)$. En aquest cas el preu del subjacent hauria baixat i s'exerciria l'opció de venda. No obstant, en la segona estratègia les pèrdues únicament es veurien limitades pel desemborsament net, és a dir, la diferència entre lo que s'ha pagat al vendre una *call* i lo que s'ha rebut al comprar l'altra. En aquest cas no s'exerciria cap opció.

Els beneficis també es veuen donats i limitats per diferents escenaris depenent de l'estratègia. Mentre que en el *Collar*, els beneficis sorgeixen quan el preu del subjacent és major que el preu d'exercici de l'opció *call*; en el *Bull Spread* ocorre quan el preu del subjacent creix per damunt del preu d'exercici d'ambdues *calls*. Més específicament, el màxim benefici del *Collar* es correspon amb el valor del preu d'exercici de la *call* (E_c) venuda més la diferència neta obtinguda de la compra de la *put* i la venda de la *call* i restant el preu que s'ha pagat per l'actiu subjacent, és a dir, $E_c + (C - P) - A$. En aquest cas, el preu del subjacent decreixeria i s'exerciria l'opció de compra. D'altra banda, el màxim benefici del *Bull Spread* es veurà limitat per la diferència dels preus d'exercici d'ambdues opcions restant el desemborsament net inicial. Donat el cas d'obtenir beneficis, s'optaria per exercir ambdues opcions (Chittorgarh, 2022).

En conclusió, si bé la figura pot resultar la mateixa, les diferències entre un *Collar* i un *Bull Spread* són significatives. Des de l'objectiu que tenen o el perfil de l'inversor a qui va dirigit fins a coses més específiques com posicions o quantitat de derivats financers que influïrien en els resultats. D'aquesta manera, mentre que el *Collar* pretén protegir a l'inversor de possibles pèrdues sobre l'actiu subjacent, el *Bull Spread* pretén reduir el cost i risc d'una inversió d'opcions de compra. Així i tot, no es pot negar que el desavantatge en comú és el límit als potencials beneficis.

CAPÍTOL III: MODEL ESTOCÀSTIC LOG-NORMAL

Els estudis que tracten de pronosticar el preu dels actius financers, tenint com a referència els històrics d'aquests, utilitzen per als seus mètodes l'estadística. Existeixen, doncs, diferents models matemàtics amb l'objectiu de donar una predicció el més fiable possible del mercat. No obstant, s'ha de tenir present que el mercat es veu fortament influenciat per variables econòmiques, socials i polítiques. Açò té com a conseqüència que cada predicció sigui vàlida per a un moment determinat i el preu de l'actiu es vega com una variable aleatòria. És per això que Damien Lambertson va considerar ja en 1996 que l'evolució del preu d'una acció al llarg del temps es pot definir com un procés estocàstic (Parody Camargo, Charris Fontanilla, & García Luna, 2016).

Louis Bachelier va introduir per primera vegada, ja en 1900, l'element de l'aleatorietat en un model matemàtic emprat en la seua tesis doctoral per a predir preus d'accions. No obstant, aquesta aportació va passar desapercibuda en un primer moment. No va ser fins 1965 que P. Samuelson va recuperar el treball de Bachelier donant un punt de vista nou que va tindre un gran impacte al món de les finances. En l'actualitat, existeixen nombrosos models de tipus estocàstic i nombrosos estudis, com el de Lambertson, que tracten d'explicar l'evolució del preu de les accions tenint present els diversos factors aleatoris i incerts que el poden influenciar (Navarro, 2008).

L'ús del Model Log-Normal o Moviment Brownià Geomètric per a la valoració d'accions i opcions sobre accions es veu degudament justificat pels nombrosos estudis empírics que es van dur a terme a finals del segle XX. A més d'haver demostrat ser un mètode exitós, és un dels punts clau del model de Black-Scholes i Merton. Aquest model, guanyador del Premi Nobel d'Economia en 1997, es basa en una equació diferencial estocàstica de tipus Itô i s'utilitza per a predir el preu d'una opció europea que es basa en el valor d'una acció.

En aquest apartat es començarà introduint el Model i es definiran les seues propietats. Posteriorment, es donarà lloc a la motivació del mateix des de dues perspectives diferents. A continuació, s'explicarà la manera en que poden estimar-se els paràmetres μ i σ . Finalment, s'utilitzarà la tècnica Monte-Carlo per a la simulació del model, i es conclourà donant pas al següent apartat, on es validarà l'aplicació del model amb les dades reals del subjacent Santander.

3.1. PRELIMINARS ESTOCÀSTICS

El Moviment Brownià és un dels processos estocàstics més rellevants i ha demostrat la seua utilitat per a predir el comportament de variables financeres aleatòries. Així, es poden fer prediccions sobre el preu dels actius subjacents o la taxa d'interès, entre altres. Al tractar-se precisament d'un procés estocàstic, cal destacar que les variables a predir variaran en funció d'una magnitud independent. Si bé és cert que aquesta magnitud pot ser distinta depenent del plantejament de l'estudi matemàtic, en aquest cas es tracta la més comú, que és el temps (Morente, 2019).

A pesar de que aquest procés no es va popularitzar en el camp financer fins al segle XX, es va descobrir per primera vegada en 1827. El botànic Robert Brown va observar a través del seu microscopi que les partícules de pols suspeses en un medi líquid formaven un moviment aleatori a causa del contacte de les molècules amb el mateix líquid. Aquest moviment es va formalitzar matemàticament per Norbert Wiener en el segle XX. És per això que rep també el nom de Procés de Wiener.

L'equació diferencial estocàstica en la qual es basa aquest procés és la següent:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t). \quad (3.1.1)$$

A continuació, es detallen les variables de l'equació una per una:

- $S(t)$ és el preu de l'actiu subjacent o acció en el moment t
- μ és una constant que rep el nom de tendència, deriva o *drift*

- σ és una constant positiva que fa referència a la volatilitat
- $B(t)$ és el procés estocàstic denominat Moviment Brownià
- $dS(t)$ és la variació o diferencial del preu del subjacent en l'interval $[t, t + dt]$
- $dB(t)$ és la variació o diferencial del Moviment Brownià en l'interval $[t, t + dt]$

Aquesta equació modelitza la taxa de canvi $dS(t)$ del preu d'una acció o d'un actiu subjacent en un interval $[t, t + dt]$ de longitud dt .

Com s'observa, existeixen dos sumands en l'equació. D'una banda, el que apareix a la part esquerra de l'operació, $\mu S(t)dt$, indica que, sent μ la constant de proporcionalitat, la variació és proporcional al subjacent a l'inici de l'interval, $S(t)$, i al termini transcorregut, dt . No obstant, el segon sumand, $\sigma S(t)dB(t)$, és de tipus aleatori i es centra en els elements no deterministes del mercat que tinguin influència en la variació del preu del subjacent. Aquests elements poden ser des d'aspectes polítics fins a possibles catàstrofes naturals que puguin fer oscil·lar el preu de l'actiu. Per poder incloure aquesta aleatorietat es multiplica el valor de l'actiu subjacent $S(t)$ per la volatilitat, σ .

3.1.1. Condicions i propietats del Moviment Brownià

El Moviment Brownià o Procés de Wiener, $B = \{B(t): t \geq 0\}$, es tracta d'un procés que introdueix l'aleatorietat i que ha de complir les següents condicions:

1. Comença en el seu origen amb una probabilitat 1:

$$P[B(0) = 0] = 1.$$

2. Té increments estacionaris:

$$B(t + \Delta t) - B(t) = B(s + \Delta t) - B(s), \quad \forall s, t \in [0, +\infty[,$$

tractant-se aquesta d'una igualtat en distribució.

3. Té increments independents, és a dir, compleix que les següents variables aleatòries:

$$B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \dots, B(t_{n+1}) - B(t_n),$$

amb $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < +\infty$, són independents.

4. Els increments $B(t) - B(s)$ d'aquest procés estocàstic amb $s < t$ segueix una distribució normal o Gaussiana de mitjana zero i variància $t - s > 0$:

$$B(t) - B(s) \sim N(0; t - s).$$

prenent $s = 0$ i considerant la primera condició, significa que:

$$B(t) \sim N(0; t).$$

5. Té trajectòries contínues (sense salts), però que no són diferencials en cap punt.

L'elecció d'aquest procés estocàstic es basa en l'èxit que ha demostrat en les aplicacions reals. Existeixen nombrosos factors i variables en la realitat que poden aplegar a determinar el valor d'un actiu financer.

A més d'aquestes condicions, el Moviment Brownià $B = \{B(t): t \geq 0\}$ gaudeix de quatre propietats:

1. **Funció mitja.** Indica que, de mitja, el valor que es pren en el procés és nul:

$$\mu_B(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

2. **Funció covariància.** Mesura el grau de relació estadística lineal entre les variables aleatòries $B(s)$ i $B(t)$ que s'obtenen al fixar dos instants s i t :

$$\text{Cov}[B(t), B(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

3. **Propietat geomètrica.** $B(t)$ és $\frac{1}{2}$ - autosemblant:

$$B(Tt) = T^{\frac{1}{2}}B(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T > 0,$$

sent aquesta igualtat en distribució ($\stackrel{d}{=}$), es dedueix d'aquesta propietat que:

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} B(1), \quad \forall T > 0.$$

Aquestes propietats s'introdueixen ja que motiven l'ús del Model Log-Normal en la valoració d'accions.

3.2. MOTIVACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL O MOVIMENT BROWNIÀ GEOMÈTRIC

Sent que S_0 és un actiu que es decideix invertir a un tipus d'interès μ compost continu durant un interval de temps $[0, T]$ dividit en K períodes de longitud $\Delta t > 0$ cada u. En la Figura 7 es representa aquesta situació.

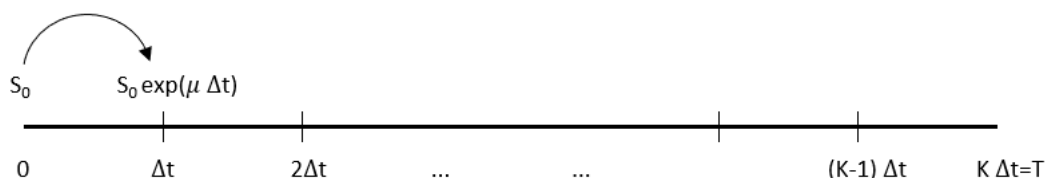


Figura 7: Capitalització a interès compost continu. Font: Elaboració pròpia

Si es denomina com a $\hat{S}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, K$, el capital que es tindrà el finalitzar j períodes (per conveni de notació matemàtica es suposa que, implícitament, $\hat{S}^{(0)} = S_0$), llavors es dedueix que:

$$\hat{S}^{(1)} = S_0 \exp(\mu \Delta t),$$

$$\hat{S}^{(2)} = S^{(1)} \exp(\mu \Delta t),$$

que de manera general, es pot expressar de la següent manera:

$$\hat{S}^{(j)} = S^{(j-1)} \exp(\mu \Delta t), \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad (3.2.1)$$

i, per tant, el raonament reiterat del mateix seria

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} \exp(\mu \Delta t) = \hat{S}^{(j-2)} \exp(2\mu \Delta t) = \dots = S_0 \exp(\mu j \Delta t),$$

$$j = 0, 1, \dots, K. \quad (3.2.2)$$

Tenint present que quan $j = K$, es compleix que: $\hat{S}(T) = \hat{S}^{(K)} = S_0 \exp(\mu K \Delta t) = S_0 \exp(\mu T)$, on s'ha utilitzat que $K \Delta t = T$ i s'ha introduït la notació $\hat{S}(T)$, que representa el capital al finalitzar K períodes. És a dir, l'efecte de K passos de longitud Δt equival a un pas de $T = K \Delta t$. Així, aquest model de capitalització és el resultat de resoldre el problema de valoració inicial (equació diferencial ordinària junt a una condició inicial) que s'observa a continuació:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu \hat{S}(t), \quad \hat{S}(0) = S_0. \quad (3.2.3)$$

Aquesta compta amb la solució

$$\hat{S}(t) = S_0 \exp(\mu t), \quad (3.2.4)$$

que per a $t = T$ serveix com a solució del problema anterior: $\hat{S}(t) = S_0 \exp(\mu t)$. És important observar que el model estocàstic de partida conté el model clàssic determinista de capitalització continua. Seria suficient fer $\sigma = 0$ en l'equació (3.1.1) per a obtenir (3.2.3) mitjançant l'equació diferencial estocàstica (3.1.1).

No obstant, cal destacar que el valor d'una acció està condicionat per multitud de factors i variables que han de considerar-se incerts i no deterministes. És per això que (3.2.3) no és un model adequat. El model que aspiri a ser-ho ha d'incloure en la seua formulació:

- la part del valor de l'evolució del preu de l'acció que es comporta de manera determinista, com a qualsevol altra inversió lliure de risc, i
- la part incerta o aleatòria que té com a conseqüència que el valor de l'actiu financer no sigui predicible de manera determinista.

Aquest apartat servirà per a motivar l'aplicació del Model Log-Normal des de dos perspectives distintes. Per a exposar el primer enfocament, es considerarà en primer lloc el model clàssic determinista de capitalització composta continua. Ja en aquest

punt, s'introduirà l'aleatorietat en el mateix de manera que s'admetrà com a plausible el Model Log-Normal.

A continuació, es presentaran dos enfocaments per a obtenir el resultat del procés estocàstic (3.1.1). Per a exposar el primer enfocament, es considerarà en primer lloc el model clàssic determinista de capitalització composta continua. Ja en aquest punt, s'introduirà l'aleatorietat en el mateix de manera que s'admetrà com a plausible el Model Log-Normal. Per tant, aquest està basat en arguments similars als exposats en aquest apartat, però amb la introducció de l'aleatorietat es té en compte una incertesa que, com es veurà a continuació, permet deduir que la solució del model és:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right). \quad (3.2.5)$$

D'altra banda, el segon enfocament és més formal i tècnic. Per al mateix, es requerirà fer ús del Lema d'Itô per a formalitzar gran part de la teoria estocàstica moderna de la modelització i valoració d'actius financers. D'aquesta manera, es resoldrà (3.1.1) mitjançant el càlcul estocàstic d'Itô.

3.2.1. Primer enfocament

La primera deducció intuïtiva es basa en (3.2.2) amb $j = 1$ per a introduir l'aleatorietat de la següent manera:

$$\tilde{S}^{(1)} = \tilde{S}^{(0)} \exp(\mu\Delta t) \exp(cZ_1), \quad (3.2.6)$$

on $\tilde{S}^{(0)} = S_0$, c és una constant lliure i Z_1 una variable aleatòria normal o Gaussiana tipificada, $Z_1 \sim N(0; 1)$. De manera general, introduint l'aleatorietat en (3.2.1) també s'obté que

$$\tilde{S}^{(j)}(t) = \tilde{S}^{(j-1)}(t) \exp(\mu\Delta t) \exp(cZ_j), \quad (3.2.7)$$

sent $Z_j \sim N(0; 1)$. En cas que es repeteixi l'expressió per a cada $j = 1, 2, \dots, K$ de manera que $Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_K$ siguin variables aleatòries $N(0; 1)$ i independents, en base a l'expressió anterior amb $j = K$, s'obté per recursivitat que

$$\tilde{S}^{(K)}(t) = S_0 \exp(\mu\Delta t) \exp(c(Z_1 + \dots + Z_K)), \quad (3.2.8)$$

és a dir,

$$\tilde{S}(T) = S_0 \exp(\mu T) \exp(c(Z_1 + \dots + Z_K)). \quad (3.2.9)$$

L'aleatorietat introduïda en (3.2.6) pareix, d'aquesta manera, coherent ja que garanteix que $\tilde{S}^{(1)}(t) > 0$ ($\tilde{S}^{(j)}(t) > 0$). No obstant, no és totalment satisfactòria perquè és d'esperar que, quan no hi haja incertesa, $\tilde{S}^{(1)}$ en (3.2.6) es comporti com en (3.2.2) amb $j = 1$, almenys en mitja. Tanmateix, és cert que

$$E[\exp(cZ)] = \exp\left(\frac{c^2}{2}\right), \quad Z \sim N(0; 1), \quad (3.2.10)$$

i, efectivament,

$$E[\tilde{S}^{(1)}(t)] = E[S_0 \exp(\mu\Delta t) \exp\left(cZ_1 - \frac{c^2}{2}\right)], \quad (3.2.11)$$

perquè, de (3.2.10) s'obté que

$$E[S^{(1)}(t)] = S_0 \exp(\mu\Delta t),$$

i, generalment, en (3.2.1) introduïm l'aleatorietat de la mateixa forma:

$$S^{(j)}(t) = S^{(j-1)}(t) \exp(\mu\Delta t) \exp\left(cZ_j - \frac{c^2}{2}\right), \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (3.2.12)$$

Raonant de manera reiterada com en (3.2.2) s'obté que

$$S(T) = S^{(K)} = S_0 \exp(\mu K \Delta t) \exp(c(Z_1 + \dots + Z_K)) \exp\left(-K \frac{c^2}{2}\right). \quad (3.2.13)$$

En cas que s'apliqui la independència estadística de les variables aleatòries $Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_K$ s'obté que:

$$\begin{aligned} E[S(T) = S_0 \exp(\mu K \Delta t) E[\exp(c(Z_1 + \dots + Z_K))] \exp\left(-K \frac{c^2}{2}\right) \\ = S_0 \exp(\mu K \Delta t) E[\exp(cZ_1)] \times \dots \times E[\exp(cZ_K)] \exp\left(-K \frac{c^2}{2}\right) \\ = S_0 \exp(\mu K \Delta t) \exp\left(\frac{c^2}{2}\right) \times \dots \times \left[\exp\left(\frac{c^2}{2}\right)\right] \exp\left(-K \frac{c^2}{2}\right) = S_0 \exp(\mu T). \end{aligned}$$

Denotant que

$$W_K = Z_1 + \dots + Z_K, \quad (3.2.14)$$

llavors, donat que $Z_j \sim N(0; 1)$, amb $j = 1, 2, \dots, K$, són variables aleatòries independents s'obté que $W_K \sim N(0; K)$ i com $K \Delta t = T$ i $S^{(K)}(T) = S(T)$, (3.2.13) equival a

$$S(T) = S_0 \exp(\mu T) \exp\left(cW_K - K \frac{c^2}{2}\right), \quad (3.2.15)$$

on S_0 es correspon amb el preu de l'acció en el moment inicial; $\exp(\mu T)$ és la component determinista del valor de l'acció (lligat al valor μ del tipus d'interès); W_K , per la seua part, representa la introducció de l'aleatorietat en el model; i $\left(K \frac{c^2}{2}\right)$ és un terme de correcció també determinista.

Cal destacar que la modelització donada en (3.2.15) ofereix un gran avantatge front a altres tipus de models que, per exemple, es basen en arbres binomials. Açò es deu a que permet que el valor de l'acció no prengui només dos valors possibles, sinó que té en consideració qualsevol valor positiu.

Tanmateix, continua presentant un defecte rellevant respecte als interessos de l'estudi. En cas que es fixi T i es considerin intervals més menuts (particions més fines de l'interval $[0, T]$, és a dir, es converteix $K \rightarrow +\infty$ o, de manera equivalent, $\Delta t \rightarrow 0$, amb T

fixe, per a la variància del terme que introdueix l'aleatorietat en el model (3.2.15) s'obté per (3.2.14) que

$$\text{Var}[cW_K] = c^2\text{Var}[W_K] = c^2K \rightarrow +\infty, \quad (3.2.16)$$

és a dir, la variància d'aquest terme que forma part del model de l'acció augmentarà segons es prenguin discretitzacions² de l'interval que s'està analitzant, amb independència del valor T que defineix el seu extrem superior, el qual és fixe.

Tot açò no té sentit des del punt de vista financer ja que, fixat l'interval durant el qual s'observa l'acció, la volatilitat de la mateixa és un valor fixe que no hauria de canviar inclús si en lloc d'observar l'acció per setmana es fera per dia. Per tal de resoldre aquest inconvenient es recorre a la constant lliure c introduïda en (3.2.12). D'aquesta manera

$$c^2K = \sigma^2T, \quad (3.2.17)$$

considerant que σ^2 es tracta d'un paràmetre fixe identificatiu del model objecte d'estudi. D'aquesta manera, segons (3.2.16)

$$\text{Var}[cW_K] = \sigma^2T < +\infty. \quad (3.2.18)$$

Cal destacar que açò ens presenta una idea coherent que pot apreciar-se en la pràctica: a major longitud T de l'interval $[0, T]$, hi haurà una major volatilitat o variabilitat del preu de l'acció.

A continuació, es procedeix a relacionar W_K donada en (3.2.14) amb el Moviment Brownià de manera que

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t}W_K, \quad (3.2.19)$$

² Discretització és un concepte matemàtic que es defineix com el procés de transmetre funcions contínues, models, variables i equacions a contraparts discretes. S'usa per a disminuir la complexitat de les equacions i facilita l'anàlisi matemàtic que porta a la solució.

sent la igualtat anterior en distribució. Amb aquest fi, es destaca que ambdós termes de (3.2.19) són Gaussians, amb la mateixa mitjana i variància. El terme de l'esquerra de (3.2.19), per la pròpia definició del Moviment Brownià, es considera gaussià. Així mateix, el terme de la dreta de (3.2.19) és també gaussià per ser la transformació lineal de W_K que és, com ja s'ha destacat anteriorment, normal o gaussià. A més, es pot deduir que ambdós membres coincideixen ja que, per la Propietat 4 del Moviment Brownià

$$E[B(T)] = 0,$$

s'obté que

$$E[\sqrt{\Delta t}W_K] = \sqrt{\Delta t}E[W_K] = 0,$$

ja que, $E[W_K] = 0$. Finalment, per la Propietat 4 sabem que

$$\text{Var}[B(T)] = T,$$

i, tenint present que $\text{Var}[W_K]$ i $K\Delta t = T$, s'obté que

$$\text{Var}[\sqrt{\Delta t}W_K] = \Delta t \text{Var}[W_K] = K\Delta t = T.$$

A més, amb l'elecció de (3.2.17) s'obté que

$$c = \sigma \sqrt{\frac{T}{K}} \xrightarrow{T=K\Delta t} c = \sigma\sqrt{\Delta t}, \quad (3.2.20)$$

i, per tant,

$$cW_K = \sigma\sqrt{\Delta t}W_K = \sigma B(T), \quad (3.2.21)$$

on s'ha usat per a l'últim pas l'equació (3.2.19).

Definitivament, substituint (3.2.17) i (3.2.21) apleguem a:

$$S(T) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \exp(\sigma B(T)). \quad (3.2.22)$$

Per tant, des d'una motivació basada en la introducció de l'aleatorietat en el model determinista, s'obté el Model Log-Normal.

Tanmateix, el Model Log-Normal compta amb l'oportuna propietat de que el comportament mitjà del preu de l'acció és el mateix que el del valor en el cas determinista. Aquesta afirmació es deu a que, tenint en compte la Propietat 3 del Moviment Brownià i que $B(1) \sim N(0; 1)$, si es pren (3.2.22) i s'aplica (3.2.10) amb $c = \sigma\sqrt{T}$, s'obté que

$$\begin{aligned}
 E[S(T)] &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) E[\exp(\sigma B(T))], \\
 E[S(T)] &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) E[\exp(\sigma\sqrt{T}B(1))], \\
 E[S(T)] &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \exp\left(\frac{(\sigma\sqrt{T})^2}{2}\right), \\
 E[S(T)] &= S_0 \exp(\mu T). \quad (3.2.23)
 \end{aligned}$$

D'altra banda, per a conèixer l'evolució de la volatilitat del preu de l'acció segons el Model Log-Normal s'observa que, raonant com en el cas de la mitja, la variància ve donada per

$$\begin{aligned}
 Var[S(T)] &= E[S(T)^2] - (E[S(T)])^2 \\
 &= E\left[(S_0)^2 \exp\left(2\sigma B(T) + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\right] - (S_0)^2 \exp(2\mu T) \\
 &= (S_0)^2 \exp(2\mu T) \left(\exp\left(\frac{4\sigma^2 T}{2}\right) \exp(-\sigma^2 T) - 1\right) \\
 &= (S_0)^2 \exp(2\mu T) (\exp(\sigma^2 T) - 1) > 0, \quad (3.2.24)
 \end{aligned}$$

La qual cosa demostra que, com és predictable i observable en la realitat del mercat borsari, que la variància creix a mesura que ho fa l'horitzó temporal T .

3.2.2. Segon enfocament

A continuació, es planteja la introducció del Model Log-Normal des del segon enfocament, el qual es basa en l'aplicació del Lema d'Itô.

Per a començar, s'ha de situar l'escenari en un ambient d'incertesa on, si $\hat{S}(t)$ és el valor resultant d'invertir 1€ a un règim de capitalització a un interès compost continu a una taxa constant μ durant l'interval de temps $[0, T]$, com s'observà en (3.2.4), $S(t)$ haurà de ser la solució del següent problema:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu\hat{S}(t), \quad \hat{S}(0) = 1. \quad (3.2.25)$$

Aquest problema de valor inicial amb una equació diferencial ordinària indica que el capital creix a una taxa de creixement relatiu constant e igual a μ , i amb una condició inicial que indica la inversió al principi de l'interval. No obstant, quan la inversió es realitza en un mercat borsari, és més realista considerar que la taxa de creixement de la inversió compta amb l'element de la incertesa, la qual es modelitza generalment com a $\mu + \sigma\dot{B}(t)$ ³, sent $B(t) \sim N(0; t)$. És a dir, es tracta d'un procés estocàstic de tipus gaussià o normal amb mitjana zero i variància t , que rep el nom de Moviment Brownià, on $\dot{B}(t)$ és la seua derivada. Aquesta afirmació seria vàlida recurrent a la teoria de distribucions donat que les trajectòries d'aquest procés estocàstic no es poden diferenciar en cap punt. Tenint tot açò present, l'equació diferencial donada en (3.2.25) quedaria de la següent manera:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = (\mu + \sigma\dot{B}(t))S(t), \quad (3.2.26)$$

³ $\dot{B}(t)$ és un procés gaussià i estacionari que rep el nom de "soroll blanc" o *White Noise*.

o en la seua representació diferencial formal donada en (3.2.1) com a equació diferencial estocàstica:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t).$$

Quan $\sigma = 0$, l'equació es correspon a un model determinista, és a dir, no té incertesa o soroll, i la seua solució per a la condició inicial $S(0) = 1$ seria $S(t) = \exp(\mu t)$. Però, si $\sigma \neq 0$, la solució seria un procés estocàstic especial denominat Càlcul d'Itô. Aquest càlcul fa ús d'equacions diferencials estocàstiques de la següent manera:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A_1(s)ds + \int_0^t A_2(s)dB(s), \quad (3.2.27)$$

sent $A_1(s)$ i $A_2(s)$ processos estocàstics adaptats a la filtració generada pel Moviment Brownià: $(\mathfrak{F}_t) = (\sigma(B(s): s \leq t))$, on $\sigma(B(s): s \leq t)$ és la σ – àlgebra generada per $B(s)$ amb $s \leq t$.

En (3.2.27) la primera integral és una integral estocàstica ordinària de tipus Riemann i la segona és una integral estocàstica del tipus Itô. Encara que les hipòtesis es poden relaxar substancialment, si suposem que $A_1(s)$ i $A_2(s)$ són continus i que amb probabilitat 1 es compleix que

$$\int_0^t (A_2(s))^2 ds < +\infty,$$

les integrals que apareixen en (3.2.27) estan ben definides.

Si s'adapta el Lema d'Itô⁴ al Moviment Brownià, s'obté una nova versió on, donada una equació diferencial estocàstica i $f(t, x)$ una funció contínua amb la derivada

⁴ Es considera que la principal ferramenta del càlcul d'Itô exerceix un rol anàleg a la regla de la cadena en el Càlcul Diferencial clàssic de Newton-Leibniz

parcial de primer ordre respecte de t contínua i de segona ordre respecte de x contínua, per a $s < t$, es compleix que:

$$f(t, B(t)) - f(s, B(s)) = \int_s^t \left(\frac{\partial f(u, B(u))}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, B(u))}{\partial x^2} \right) du + \int_s^t \frac{\partial f(u, B(u))}{\partial x} dB(u). \quad (3.2.28)$$

Per a l'aplicació d'aquest resultat, es representa a continuació (3.2.28) amb la condició inicial $S(0) = S_0$ de manera integral

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu S(x) dx + \int_0^t \sigma S(x) dB(x). \quad (3.2.29)$$

Suposant que $S(t) = f(t, B(t))$, llavors es poden identificar els coeficients en (3.2.28) i en (3.2.29) obtenint que:

$$\begin{aligned} \mu f(t, x) &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}, \\ \sigma f(t, x) &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Derivant (3.2.30) respecte de la segona variable, és a dir, x , s'obté que

$$\sigma \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}, \quad (3.2.31)$$

i substituint (3.2.30) en (3.2.31), s'aplega a

$$\sigma^2 f(t, x) = \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}. \quad (3.2.32)$$

Simplificant les equacions des de (3.2.29) a (3.2.32), s'obtenen les equacions en derivades parcials:

$$\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}; \quad \sigma f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad (3.2.33)$$

de la qual la solució es busca utilitzant el mètode de separació de variables per a equacions en derivades parcials. Així, aquesta cerca es realitza en la forma $f(t, x) = g(t)h(x)$, amb la qual cosa segons (3.2.33) es deu satisfer

$$g(t) = g(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right); h(x) = h(0) \exp(\sigma x), \quad (3.2.34)$$

doncs,

$$f(t, x) = g(t)h(x) = g(0)h(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma x\right),$$

i, per la definició de la primera propietat del Moviment Brownià, es compleix que $B(0) = 1$ amb una probabilitat 1, s'obté que $S(0) = f(0, B(0)) = f(0, 0) = g(0)h(0)$, de manera que substituint aquesta última expressió

$$f(t, x) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right).$$

Finalment,

$$S(t) = f(t, B(t)) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right), \quad t \geq 0, \quad (3.2.35)$$

que és el procés estocàstic resultant de l'equació diferencial estocàstica de tipus Itô (3.1.1), el qual és denominat en la literatura del Moviment Brownià Geomètric com a procés estocàstic Log-Normal, ja que, per a cada t és l'exponencial d'una variable aleatòria gaussiana ($B(t)$).

Per a concloure aquest apartat, es mostra en la Figura 8 diferents simulacions del Moviment Brownià Geomètric. S'observa que aquest procés pren valors no negatius, tal i com és desitjable.

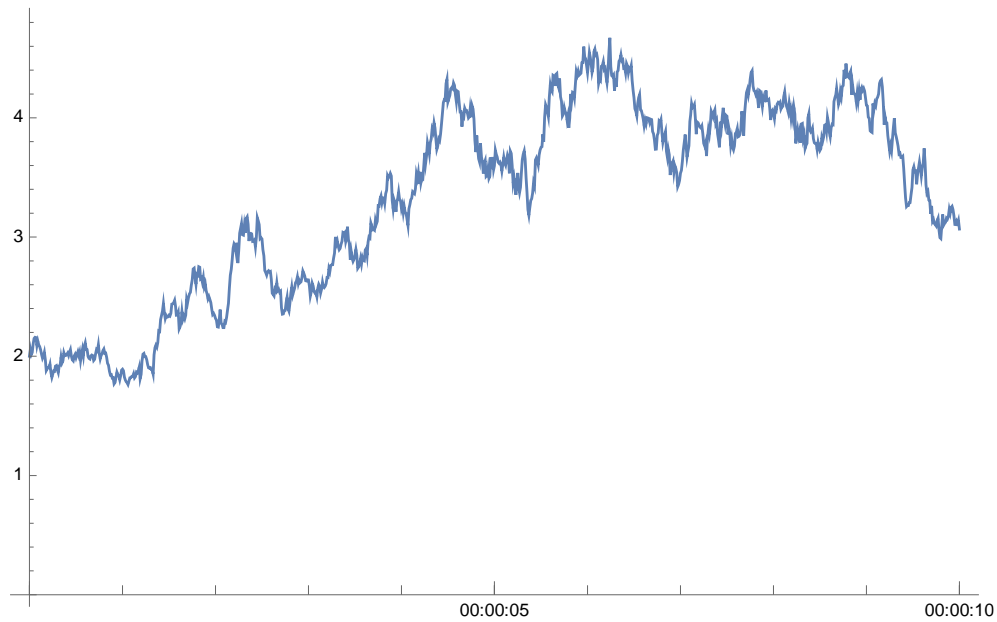


Figura 8: Trajectòries mostrals del Moviment Brownià Geomètric. Font: Elaboració pròpia mitjançant Mathematica®

3.3. CALIBRATGE DELS PARÀMETRES DEL MODEL LOG-NORMAL A PARTIR DE DADES REALS

Des d'un punt de vista pràctic, si $S(t)$ donada en (3.2.35) pretén arreplegar el comportament de la trajectòria temporal d'un actiu borsari, primer cal calibrar els paràmetres μ i σ .

Amb aquesta finalitat, resulta convenient l'ús de (3.2.35) en la forma equivalent resultant de prendre logaritmes:

$$\ln(S(t)) - \ln(S(0)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma\sqrt{t}\right), \quad (3.3.1)$$

on es fa ús de la distribució estocàstica gaussiana per ser una transformació lineal de $B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$.

Considerant ara una col·lecció de $K + 1$ cotitzacions de l'actiu, es pot afirmar: $S(0), S^{(1)} = S(\Delta t), \dots, S^{(K)} = S(K\Delta t)$, en els instants $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, K\Delta t = t$ equidistants de l'interval $[0, t]$. En cada subperíode $[(j - 1)\Delta t, j\Delta t]$ amb $1 \leq j \leq K$ es consideren els K increments:

$$U_j = \ln(S(j\Delta t)) - \ln(S((j - 1)\Delta t)), \quad 1 \leq j \leq K. \quad (3.3.2)$$

Tenint present que per (3.3.1) s'obté que

$$\ln(S(j\Delta t)) = \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(j\Delta t) + \sigma B((j - 1)\Delta t),$$

$$\ln(S((j - 1)\Delta t)) = \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(j - 1)\Delta t + \sigma B((j - 1)\Delta t),$$

on, restant la segona equació de la primera, s'obté que (3.3.2) es pot expressar de la següent manera:

$$U_j = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma (B(j\Delta t) - B((j - 1)\Delta t)). \quad (3.3.3)$$

Per tant, el Moviment Brownià $B(t)$ compleix per definició que té increments gaussians e independents amb una mitjana zero i una variància que es correspon amb la longitud de l'increment sobre t , es té que

$$B(j\Delta t) - B((j - 1)\Delta t) \sim N(0; \sqrt{\Delta t}), \quad 1 \leq j \leq K,$$

per la qual cosa les variables aleatòries U_j són gaussians e independents amb mitjana $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$ i variància $\sigma^2\Delta t$.

A partir d'una mostra de $K + 1$ dades reals de les cotitzacions, podem construir les K diferències donades en (3.3.2) i realitzar una estimació dels paràmetres μ i σ mitjançant el Mètode de Moments Estocàstics, que suposa igualar la mitjana i la variància de les K variables aleatòries a la mitjana mostral, \bar{U} , i a la quasi-variància mostral, S^2 , donades per l'expressió:

$$\bar{U} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K U_j, \quad S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (U_j - \bar{U})^2, \quad (3.3.4)$$

Lo que permet construir el següent sistema d'equacions algebraiques per estimar els paràmetres μ i σ :

$$\bar{U} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \quad S^2 = \sigma^2 \Delta t, \quad (3.3.5)$$

Que proporciona les estimacions buscades en el seu resultat:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left(\bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (3.3.6)$$

Resumint, per a poder posar en pràctica el model de (3.2.35) realitzant l'estimació dels seus paràmetres a través del Mètode de Moments Estadístics, es realitzaran els següents passos:

1^{er} pas: A partir de la sèrie de $K + 1$ cotitzacions: $S(0), S^{(1)} = S(\Delta t), S^{(2)} = S(2\Delta t), \dots, S^{(K)} = S(K\Delta t)$, observades en períodes de longitud Δt (per exemple, per dia), formar la sèrie de K valors U_j donada per (3.3.2).

2ⁿ pas: Calcular la mitjana mostral \bar{U} i la S^2 quasi-variància mostral, donades en (3.3.4).

3^{er} pas: Estimar els paràmetres μ i σ del Model Log-Normal, mitjançant $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$, donades en (3.3.6).

4^t pas: Simular el terme $B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$ a través de qualsevol dels tres mètodes disponibles en la literatura, com el Mètode de Moments o el de Màxima Versemblança.

5^e pas: La implementació dels passos 3 i 4 en el Model Log-Normal, permet obtenir simulacions d'actiu de l'acció al dia següent de les cotitzacions disponibles.

Es recomana l'ús d'un segon mètode estadístic per a estimar els paràmetres per tal de ratificar les estimacions obtingudes dels paràmetres del model. Amb aquesta finalitat s'utilitza a continuació el Mètode de Màxima Versemblança.

El primer pas consistirà en la introducció de la següent notació:

- Funció de densitat de probabilitat (f.d.p.) de transició de (t_k, x_k) començant en (t_{k-1}, x_{k-1}) donat que $\theta \in \mathbb{R}^n$:

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta).$$

- Funció de densitat de probabilitat (f.d.p.) de l'estat inicial: $p(x_0 | \theta)$.

Donada una mostra $\{x_k: 0 \leq k \leq N\}$ de $X(t)$ en els instants $\{t = t_k = k, 0 \leq k \leq N\}$, respectivament, el Mètode de Màxima Versemblança consisteix en determinar el valor del vector de paràmetres $\theta \in \mathbb{R}^n$ de manera que sigui un màxim de la funció de versemblança de la mostra:

$$\text{máx. } D(\theta), \theta \in \mathbb{R}^n,$$

$$D(\theta) = p(t_0, x_0; t_1, x_1; \dots; t_N, x_N; \theta).$$

Amb aquest motiu, cal determinar la f.d.p conjunta de les $N + 1$ variables aleatòries:

$$X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_N),$$

estimada sobre els valors de la mostra $\{x_k: 0 \leq k \leq N\}$. Per a determinar aquesta f.d.p., convé usar que la solució d'una equació diferencial estocàstica de tipus Itô

$$dX(t) = f(t, X(t); \theta)dt + g(t, X(t); \theta)dW(t),$$

$$X(0) = X_0.$$

És un procés estocàstic markovià. D'aquesta manera, la f.d.p. conjunta $p(t_0, x_0; t_1, x_1; \dots; t_N, x_N; \theta)$, és possible expressar-ho com es mostra en

$$D(\theta) = p_0(x_0|\theta) \prod_{k=1}^N p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta).$$

Donat que augmenta la complexitat al fer el càlcul de la derivada d'un producte respecte a la derivada d'una suma, es continua amb la funció de log-versemblança. Una altra raó per a usar aquest mètode és que amb l'ús de logaritmes s'eviten els nombres de xicotet valor, la qual cosa és recomanable quan els càlculs es realitzen en un ordinador ja que poden aparèixer errors d'arrodoniment que provoquen un desviament rellevant al resultat final. Així, es busca el valor del vector de paràmetres $\theta \in \mathbb{R}^n$ per a que aquest sigui la solució del següent programa de minimització:

$$\text{mín } L(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}^n,$$

$$L(\theta) = -\ln(D(\theta)) = -\ln(p_0(x_0|\theta)) - \sum_{k=1}^N \log(p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)).$$

El següent pas consisteix a utilitzar el mètode numèric d'Euler-Maruyama a l'equació diferencial estocàstica d'Itô per a inferir una aproximació de la distribució de $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$:

$$x_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t + g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)(W(t_k) - W(t_{k-1})), \quad k = 1, \dots, N.$$

Tenint present que

$$W(t_k) - W(t_{k-1}) = \sqrt{\Delta t}\eta_k, \quad \eta_k \sim N(0; 1), \quad k = 1, \dots, N,$$

es dedueix que

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2}, \quad k = 1, \dots, N,$$

on

$$\mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t, \quad \sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Per tant, el programa de minimització és el següent:

$$\text{mín } L(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}^n$$

$$L(\theta) = -\ln(p_0(x_0|\theta)) - \sum_{k=1}^N \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2} \right),$$

on

$$\mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t, \quad \sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Si $X_0 = a$ és determinista aleshores $p_0(x_0|\theta) = \delta(x_0 - a)$, $-\infty < x_0 < +\infty$, on $\delta(\cdot)$ és la funció delta de Dirac. La funció objectiu del programa pot ser minimitzada utilitzant un algoritme d'optimització. En el cas del Model Log-Normal, s'ha de tenir present que

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \quad S(0) = s_0,$$

llavors

$$f(t, s) = \mu s, \quad g(t, s) = \sigma s,$$

per tant

$$\mu_k = s_{k-1} + \mu s_{k-1}\Delta t, \quad \sigma_k = \sigma s_{k-1}\sqrt{\Delta t}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Després de càlculs algebraics s'aplega a la conclusió de que la funció objectiu es pot reescriure de la següent manera:

$$\text{mín } L(\mu, \sigma), \quad (\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^n$$

$$L(\mu, \sigma) = \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu\Delta t \right)^2,$$

Utilitzant el Càlcul Diferencial en dos variables, es pot demostrar que l'òptim d'aquesta funció, el qual representa l'estimació màxim versemblant dels paràmetres del model és:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 \right), \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \hat{\mu}\Delta t \right)^2.$$

3.4. SIMULACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL MITJANÇANT MONTE CARLO

El mètode de Monte Carlo (MC) també anomenat Simulació de Monte Carlo analitza distribucions de variables aleatòries utilitzant simulacions de nombres aleatoris.

El mètode dona solució a una gran varietat de problemes matemàtics fent experiments amb mostreig estadístics. Aquest mètode es pot aplicar tant a problemes deterministes com estocàstics. Es pot realitzar en condicions diferents i determinar la millor solució en el marc dels resultats obtinguts. De fet, existeixen nombrosos autors que s'han decantat per usar fulls de càlcul per a la realització de la simulació MC.

La clau de la simulació MC consisteix en crear un model matemàtic del sistema, procés o activitat que es pretén analitzar, identificant aquelles variables (*inPuts* del model) amb un comportament aleatori que determina el comportament global del sistema. Quan s'aconsegueix identificar aquests *inPuts* o variables aleatòries, es du a terme un experiment consistent en:

1. Generar mostres aleatòries amb ajuda de l'ordinador (obtingut de valors concrets) per a aquests *inPuts*.
2. Analitzar el comportament del sistema davant dels valors generats.

Després de repetir N vegades aquest experiment, disposem de N observacions sobre el comportament del sistema, la qual cosa serà de gran utilitat per a entendre el funcionament del mateix. Així, l'anàlisi serà més precís en tant sigui major el nombre N de repeticions que es donen a terme.

Una vegada que s'han calibrat els paràmetres μ i σ i s'han substituït en (3.2.35) del Model Log-Normal, s'obté la següent expressió:

$$\hat{S}(t) = S(0) \exp\left(\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \hat{\sigma}B(t)\right). \quad (3.4.1)$$

Tenint present que $B(t) = \sqrt{t}Z$ amb $Z \sim N(0; 1)$, s'obté el model:

$$\hat{S}(t) = S(0) \exp\left(\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \hat{\sigma}\sqrt{t}Z\right). \quad (3.4.2)$$

Per tant, generant diferents valors de Z , tindrem estimacions puntuals diferents $S(t)$ per a la valoració de l'acció en l'instant fixe t .

La principal crítica als models de predicció puntuals és la falta de mesures de sensibilitat e incertesa. Les mesures d'incertesa en la predicció dels valors són necessàries i s'han de dur a terme mitjançant Intervals de Confiança, expressant aquesta incertesa com a una probabilitat. Partint de les observacions S_0, S_1, \dots, S_N , s'obté l'expressió donada en (3.4.2) del model, es simulen M mostres z_m , $m = 1, 2, \dots, M$, que són realitzats d'una variable aleatòria $N(0; 1)$, les quals es substitueixen en l'expressió (3.4.2). D'aquesta manera s'obtenen M valors, $\hat{S}_m(t) = \hat{S}_m$, $m = 1, 2, \dots, M$, que són estimacions del preu de l'acció en l'instant fixe $t = 0, 1, 2, \dots, N$. Una estimació puntual en cada instant t és sovint generar amb la mitjana de les M simulacions generades en aquest punt temporal. Mentre que, una estimació probabilística es genera via l'interval de confiança al 95%, el qual està format pels percentils, $IC(95\%) = [p_{0,025}; p_{0,975}]$.

3.5. MESURES DE BONDAT D'AJUST

Una vegada que ja ha sigut obtingut el model, es pot passar a valorar fins a quin punt s'ajusta a les dades que han sigut d'utilitat per a la seua formulació. Per al diagnòstic del model s'utilitzen tres ferramentes:

- Gràfica de Comparació de les observacions i les estimacions.
- Error quadràtic mitjà (*Mean Squared Error* (MSE))

$$MSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (S_i - \hat{S}_i)^2}{N}}. \quad (3.5.1)$$

- Error percentual absolut mitjà (*Mean Absolute Percentage Error* (MAPE))

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i} \times 100. \quad (3.5.2)$$

Cal observar que $S_0 = \hat{S}_0$, per la qual cosa no està inclòs en el càlcul del MSE ni del MAPE. Les mesures MSE i MAPE són de Bondat d'Ajust. La primera mesura la distància per terme mig entre els valors observats i els estimats. La segona és la mitjana dels valors absoluts ponderant per l'invers del valor, és una mitjana dels errors associats als valors més alts. En el cas de les prediccions, com es va predir per un període en el que es coneix la cotització real (observació), es considera que la predicció és bona si s'apropa al valor observat. És usual admetre que un MAPE inferior al 5% és un bon valor d'aquesta mesura de Bondat d'Ajust.

CAPÍTOL IV: APLICACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL

Per a il·lustrar l'aplicació del Model Log-Normal introduït en el Capítol 3 s'han considerat les dades corresponents als preus diaris de les accions del Banc Santander durant el període de l'1 de desembre del 2021 fins al 31 de gener del 2022. En la Figura 9 es mostren els valors diaris del subjacent en el període indicat.

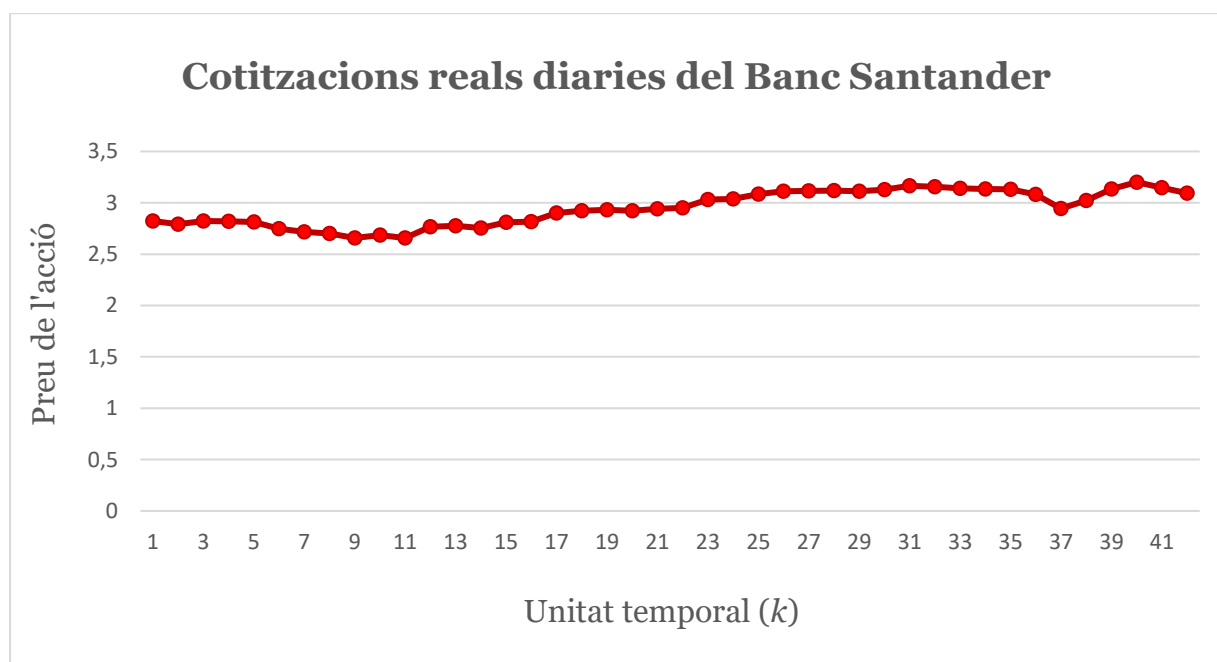


Figura 9: Gràfic de l'evolució de les cotitzacions reals diàries del Banc Santander de l'1 de desembre del 2021 al 31 de gener del 2022. Font: Elaboració pròpia

A continuació, es procedeix a aplicar el model Log-Normal mitjançant el Mètode de Moments i el de Màxima Versemblança a partir de les dades que apareixen en la Figura 9.

4.1. APLICACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL MITJANÇANT EL MÈTODE DE MOMENTS

Cal destacar que en el període seleccionat no es van repartir dividendes (Bolsas y Mercados Españoles, 2022). L'últim repartiment de dividendes previ al període va ser el 2 de novembre del 2021. El següent repartiment s'ha donat el 2 de maig del 2022. En cas de que sí que s'hagueren repartit dividendes en el període seleccionat caldria ajustar el preu restant al de l'actiu subjacent el valor del dividend. A partir de l'històric de cotitzacions diàries del Banc Santander, i aplicant el Model Log-Normal, s'ha calculat el preu que tindrà l'acció l'1 de febrer del 2022. L'estimació dels paràmetres del model s'ha realitzat a través del Mètode de Moments. En la Taula 4 s'exposa la cotització del Banc Santander per al període seleccionat.

k	Data	Preu ajustat (€)	Log-retorn (u_i)
0	01/12/2021	2,822	-
1	02/12/2021	2,793	-0,0103296
2	03/12/2021	2,822	0,01032957
3	06/12/2021	2,819	-0,0010636
4	07/12/2021	2,813	-0,0021307
5	08/12/2021	2,749	-0,0230143
6	09/12/2021	2,717	-0,0117089
7	10/12/2021	2,701	-0,0059063
8	13/12/2021	2,658	-0,0160481
9	14/12/2021	2,687	0,01085137
10	15/12/2021	2,657	-0,0112277
11	16/12/2021	2,766	0,04020457
12	17/12/2021	2,775	0,00324851
13	20/12/2021	2,754	-0,0075963
14	21/12/2021	2,811	0,02048589
15	22/12/2021	2,816	0,00177715
16	23/12/2021	2,901	0,02973807
17	27/12/2021	2,924	0,00789704
18	28/12/2021	2,931	0,00239112
19	29/12/2021	2,922	-0,0030753
20	30/12/2021	2,941	0,00648135
21	03/01/2022	2,951	0,00339444
22	04/01/2022	3,033	0,02740813
23	05/01/2022	3,037	0,00131796

24	06/01/2022	3,086	0,01600557
25	07/01/2022	3,112	0,00838985
26	10/01/2022	3,115	0,00096355
27	11/01/2022	3,119	0,00128329
28	12/01/2022	3,114	-0,0016044
29	13/01/2022	3,127	0,00416601
30	14/01/2022	3,167	0,01271069
31	17/01/2022	3,157	-0,0031626
32	18/01/2022	3,14	-0,0053994
33	19/01/2022	3,135	-0,0015936
34	20/01/2022	3,131	-0,0012767
35	21/01/2022	3,082	-0,0157737
36	24/01/2022	2,943	-0,0461493
37	25/01/2022	3,023	0,02682025
38	26/01/2022	3,135	0,03637946
39	27/01/2022	3,201	0,02083409
40	28/01/2022	3,147	-0,0170136
41	31/01/2022	3,095	-0,0166617

Taula 4: Preus de cotització del Banc Santander i càlcul del Log-retorn. Font: Elaboració pròpia

A continuació, per a facilitar la comprensió de com ha sigut implementat el model al cas pràctic que ens ocupa, es descriu de manera seqüencial i detallada cadascun dels passos que s'han seguit.

1^{er} Pas. Formació de la sèrie de dades

Per a cada període s'elabora una taula de valors, calculant el logaritme neperià de cada cotització menys el logaritme neperià de la cotització del dia anterior. El nombres resultants són els denominats com a log-retorn. En la Figura 10 es mostra com implementar la formula log-retorn en el full de càlcul Excel.

	A	B	C	D	E
1	k	Data	Preu ajustat (€)	Log-retorn (u _i)	
2	0	01/12/2021	2,822	-	
3	1	02/12/2021	2,793	C2)	
4	2	03/12/2021	2,822	0,0103296	

Figura 10: Càlcul Log-retorn. Font: elaboració pròpia

2ⁿ Pas. Càlcul de la mitjana mostral U i la variància S^2

Es calcula la mitjana i la variància mostral de les dades obtingudes en l'apartat anterior aplicant les corresponents funcions d'Excel: PROMEDIO i VAR, tal i com es mostra en les Figures 11 i 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	Data	Preu ajustat (€)	Log-retorn (u _i)				
2	0	01/12/2021	2,822	-		U	S ²	
3	1	02/12/2021	2,793	-0,0103296		D3:D43)	0,0002767	
4	2	03/12/2021	2.822	0.0103296				

Figura 11 Càlcul de la mitja. Font: Elaboració pròpia

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	Data	Preu ajustat (€)	Log-retorn (u _i)				
2	0	01/12/2021	2,822	-		U	S ²	
3	1	02/12/2021	2,793	-0,0103296		0,00225225	D43)	
4	2	03/12/2021	2.822	0.0103296				

Figura 12: Càlcul de la variància. Font: Elaboració pròpia

Els resultats obtinguts per als valors, des de l'1 de desembre del 2021 fins al 31 de gener del 2022, són:

$$U = 0,00225225, \quad S^2 = 0,0002767$$

3^{er} Pas. Estimar els paràmetres μ i σ del model

Per a calibrar el model es pren com a increment temporal el valor $\Delta t = 1/365$ quan es tracta d'actius sensibles a tots els successos que ocorren durant tots els dies de l'any, i l'increment $\Delta t = 1/252$ quan l'actiu sols depèn de les decisions que es prenen en els 252 dies que, en mitjana, s'opera al mercat continu espanyol.

En el cas del Banc Santander, per a escollir el tipus d'increment a usar en els càlculs, es considera que rarament el preu de les accions de l'entitat depenen de l'activitat

empresarial que pot tindre el banc en els dies festius. Així, es tria l'increment $\Delta t = 1/252$, que es correspon als dies hàbils de cotització de l'Ibex-35.

Es calculen les estimacions del paràmetre de la deriva o *drift* ($\hat{\mu}$) i de la volatilitat ($\hat{\sigma}$). En les Figures 13 i 14 es mostren els càlculs dels paràmetres.

=(F3+(G3/2))/G6			
E	F	G	H
	U	S ²	
	0,00225225	0,00027666	
	N (nº dades)	Δt	
	42	0,00396825	
	Dies Any	μ	
	252	/G6	
		σ	
		0,26404225	

Figura 13: Càlcul de la deriva. Font: Elaboració pròpia

=+RAIZ(G3/G6)			
E	F	G	H
	U	S ²	
	0,00225225	0,00027666	
	N (nº dades)	Δt	
	42	0,00396825	
	Dies Any	μ	
	252	0,60242494	
		σ	
		G6)	

Figura 14: Càlcul de la volatilitat. Font: Elaboració pròpia

Els resultats obtinguts són:

$$\hat{\mu} = 0,6024249, \quad \hat{\sigma} = 0,2640422.$$

Donat que $\hat{\mu}$ es tracta d'un valor positiu, s'assumeix que l'acció té un comportament alcista en el mercat.

4^t Pas. Simulació del procés estocàstic Brownià B_t

Es simula un valor z d'una variable aleatòria $Z \sim N(0; 1)$. Amb aquesta finalitat es genera el nombre aleatori d'una distribució uniforme $(0; 1)$, amb la funció ALEATORIO () d'Excel i, posteriorment, s'aplica la inversa de la funció de distribució d'una variable $N(0; 1)$, és a dir, $Z = \text{DISTR.NORM.INV. (ALEATORIO (); 0; 1)$. Els resultats es mostren en la Figura 15.

: ✖ ✔ f_x =DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO())							
D	E	F	G	H	I	J	K
Log-retorn (u_i)					Aleatori (Z)	0	1
-		U	S²		TORIO()	2,822	2,84129007
-0,0103296		0,00225225	0,00027666		0,144860516	2,822	2,8351861
0,01032957					0,765946122	2,822	2,86462702
-0,0010636		N (nº dades)	Δt		0,707252337	2,822	2,86183176
-0,0021307		42	0,00396825		0,418952638	2,822	2,84814122
-0,0230143		Dies Any	μ		-0,98306714	2,822	2,78249121
-0,0117089		252	0,60242494		-2,016767369	2,822	2,735059
-0,0059063			σ		-0,079430034	2,822	2,82462872
-0,0160481			0,26404225		-1,743004288	2,822	2,74754157

Figura 15: Càlcul de la variable aleatòria. Font: Elaboració pròpia

El resultat z és un possible valor d'una variable aleatòria $N(0; 1)$. Després s'aplica que $B_t = \sqrt{t} z$, la qual és Gaussiana, amb mitjana 0 i variància t i es repeteix aquest procediment 1.000 vegades.

5^é Pas. Predicció puntual

A continuació, per a cadascuna de les 1.000 simulacions generades es calculen 1.000 prediccions puntuals mitjançant (3.4.2). Prenent les dades:

$$S(0) = 2,822, \quad \hat{\mu} = 0,60242494, \quad \hat{\sigma} = 0,26404225.$$

En la Figura 16 es mostra com realitzar cadascuna de les prediccions puntuals utilitzant el full d'Excel.

$=+\$C\$2*EXP((\$G\$8-(1/2)*(\$G\$10^2))*(\$I1*\$G\$6)+\$G\$10*RAIZ(\$I1*\$G\$6)*\$I2)$								
C	D	E	F	G	H	I	J	K
Preu ajustat (€)	Log-retorn (u_i)		U	S^2		Aleatori (Z)	0	1
2,822	-					0,274158146	\$I2)	2,84129007
2,793	-0,0103296		0,00225225	0,00027666		0,144860516	2,822	2,8351861
2,822	0,01032957					0,765946122	2,822	2,86462702
2,819	-0,0010636		N (nº dades)	Δt		0,707252337	2,822	2,86183176
2,813	-0,0021307		42	0,00396825		0,418952638	2,822	2,84814122
2,749	-0,0230143		Dies Any	μ		-0,98306714	2,822	2,78249121
2,717	-0,0117089		252	0,60242494		-2,016767369	2,822	2,735059
2,701	-0,0059063			σ		-0,079430034	2,822	2,82462872
2,658	-0,0160481			0,26404225		-1,743004288	2,822	2,74754157

Figura 16: Càlcul de les prediccions puntuals. Font: Elaboració pròpia

A continuació, amb totes les prediccions obtingudes s'aconsegueixen, mitjançant la funció PROMEDIO, la predicció puntual que servirà per a estimar el preu que tindria l'acció del Banc Santander el dia 1 de febrer del 2022.

	I	J	AZ
	-0,701773325	2,822	2,87597756
	-1,102874029	2,822	2,75428001
	-0,246991656	2,822	3,02047993
	-1,428993543	2,822	2,6591382
Valor esperat	2,822		AZ2:AZ1001)
Valor observat	2,822		3,107
Error abs	0,000000		0,010767
ABS/OBS	0,000000		0,003465
Error²	0,000000		0,000116

Figura 17: Càlcul del valor esperat per al dia 1 de febrer. Font: Elaboració pròpia

La cotització estimada mitjançant el Model Log-Normal per al dia 1 de febrer del 2022 és de 3,11776683€. Paral·lelament, la cotització real en aquesta mateixa data (valor observat) és de 3,107€. Per tant, existeix una xicoteta variació de 0,010767€ entre el valor real i la predicció.

A més, com s'explica en el Capítol 3, s'ha obtingut una predicció per Intervals de Confiança del preu de l'acció. D'aquesta manera, es prediuen els valors entre els quals fluctuarà el preu de l'acció en el futur amb una probabilitat del 95%. Aquests càlculs es realitzen des de dos punts de vista: empíric i teòric.

Interval de Confiança Empíric

La diferència entre ambdós intervals de confiança (IC) consisteix en la manera de calcular els marges. El de tipus empíric pren com a referència tots els 1.000 valors estimats del dia 1 de febrer del 2022. En les Figures 18 i 19 es mostra com es calculen els dos marges.

fx =+PERCENTIL(AZ2:AZ1001;1-0,025)		
I	J	AZ
0,127046749	2,822	3,14475231
0,936976841	2,822	3,43165063
-0,701773325	2,822	2,87597756
-1,102874029	2,822	2,75428001
-0,246991656	2,822	3,02047993
-1,428993543	2,822	2,6591382

IC EMPÍRIC		
E[St]	2,8220000	3,1177668
sigma[St]	0,0000000	0,3262703
Marge superior	2,8220000	1-0,025)
Marge inferior	2,8220000	2,5422291
Valor central	2,8220000	3,1791482

Figura 18: Càlcul del marge superior per a un IC Empíric. Font: Elaboració pròpia

fx =+PERCENTIL(AZ2:AZ1001;0,025)		
I	J	AZ
0,127046749	2,822	3,14475231
0,936976841	2,822	3,43165063
-0,701773325	2,822	2,87597756
-1,102874029	2,822	2,75428001
-0,246991656	2,822	3,02047993
-1,428993543	2,822	2,6591382

IC EMPÍRIC		
E[St]	2,8220000	3,1177668
sigma[St]	0,0000000	0,3262703
Marge superior	2,8220000	3,8160674
Marge inferior	2,8220000	0,025)
Valor central	2,8220000	3,1791482

Figura 19: Càlcul del marge inferior per a un IC Empíric. Font: Elaboració pròpia

Per tant, el valor central es calcula com s'exposa en la Figura 20.

=PROMEDIO(AZ1015:AZ1016)		
I	J	AZ
-1,428993543	2,822	2,6591382
IC EMPÍRIC		
E[St]	2,8220000	3,1177668
sigma[St]	0,0000000	0,3262703
Marge superior	2,8220000	3,8160674
Marge inferior	2,8220000	2,5422291
Valor central	2,8220000	AZ1016)

Figura 20: Càlcul del valor central per a un IC Empíric. Font: Elaboració pròpia

La predicció obtinguda mitjançant Intervalls de Confiança a través del mètode empíric és:

$$IC(95\%) = [2,5422291 - 3,8160674].$$

El seu valor central es situa en 3,1791482€. Pel seu costat, la predicció puntual és de 3,11776683€.

Interval de Confiança Teòric

En el cas del càlcul de l'interval de Confiança Teòric es construeix mitjançant l'expressió següent:

$$[E[S_t] - 1,96\sigma[S_t], E[S_t] + 1,96\sigma[S_t]],$$

on $E[S_t]$ és la mitjana del preu i $\sigma[S_t]$ és la volatilitat que venen donades per les fórmules següents:

$$E[S_t] = S(0) \exp(\mu t),$$

$$\sigma[S_t] = \sqrt{S(0)^2 \exp(2\mu t) (\exp(\sigma^2 t) - 1)}.$$

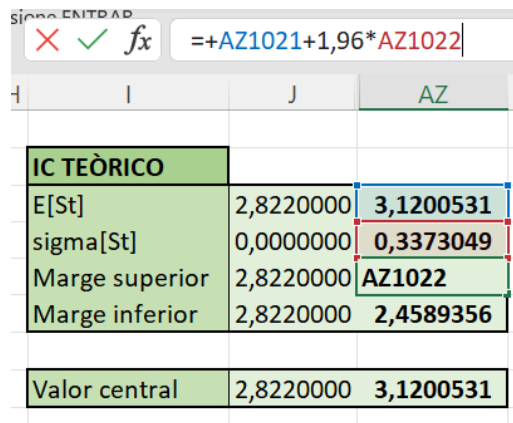
Després, es calculen els intervals tenint present que el valor de Z per a una confiança del 95% és de l'1,96. Així, en les Figures 21, 22, 23 i 24 es mostra com es calculen els marges pas per pas.

IC TEÒRICO			EXTRAE								
	J	AZ	C	D	E	F	G	H	I	J	AZ
E[St]	2,8220000	AZ\$1*\$G\$6	Preu ajustat (€)	Log-retorn (u _i)		U	S ²		Aleatori (Z)	0	42
sigma[St]	0,0000000	0,3373049	2,822	-		0,00225225	0,00027666		0,274158146	2,822	3,1950188
Marge superior	2,8220000	3,7811706	2,793	-0,0103296					0,144860516	2,822	3,15079676
Marge inferior	2,8220000	2,4589356	2,822	0,01032957					0,765946122	2,822	3,36896359
			2,819	-0,0010636		N (nº dades)	Δt		0,707252337	2,822	3,34771583
			2,813	-0,0021307		42	0,00396825		0,418952638	2,822	3,24527816
			2,749	-0,0230143		Dies Any	μ		-0,98306714	2,822	2,790081
			2,717	-0,0117089		252	0,60242494		-2,016767369	2,822	2,49588437
			2,701	-0,0059063			σ		-0,079430034	2,822	3,07553235
			2,658	-0,0160481			0,26404225		-1,743004288	2,822	2,57063605
Valor central	2,8220000	3,1200531									

Figura 21: Càlcul del preu per a un IC Teòric. Font: Elaboració pròpia

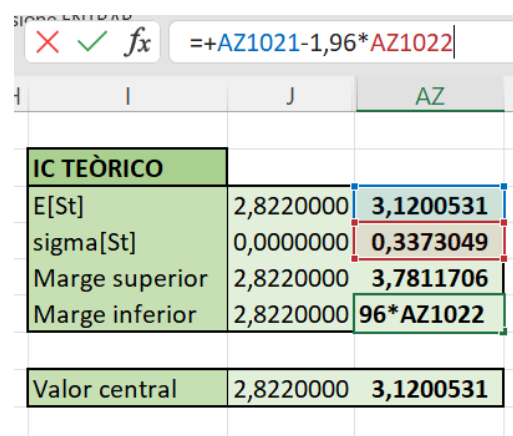
IC TEÒRICO			EXTRAE								
	J	AZ	C	D	E	F	G	H	I	J	AZ
E[St]	2,8220000	3,1200531	Preu ajustat (€)	Log-retorn (u _i)		U	S ²		Aleatori (Z)	0	42
sigma[St]	0,0000000	-1))	2,822	-		0,00225225	0,00027666		0,274158146	2,822	3,1950188
Marge superior	2,8220000	3,7811706	2,793	-0,0103296					0,144860516	2,822	3,15079676
Marge inferior	2,8220000	2,4589356	2,822	0,01032957					0,765946122	2,822	3,36896359
			2,819	-0,0010636		N (nº dades)	Δt		0,707252337	2,822	3,34771583
			2,813	-0,0021307		42	0,00396825		0,418952638	2,822	3,24527816
			2,749	-0,0230143		Dies Any	μ		-0,98306714	2,822	2,790081
			2,717	-0,0117089		252	0,60242494		-2,016767369	2,822	2,49588437
			2,701	-0,0059063			σ		-0,079430034	2,822	3,07553235
			2,658	-0,0160481			0,26404225		-1,743004288	2,822	2,57063605
Valor central	2,8220000	3,1200531									

Figura 22: Càlcul de la volatilitat per a un IC Teòric. Font: Elaboració pròpia



	I	J	AZ
IC TEÒRICO			
E[St]	2,8220000		3,1200531
sigma[St]	0,0000000		0,3373049
Marge superior	2,8220000		AZ1022
Marge inferior	2,8220000		2,4589356
Valor central	2,8220000		3,1200531

Figura 23: Càlcul del marge superior per a un IC Teòric. Font: Elaboració pròpia



	I	J	AZ
IC TEÒRICO			
E[St]	2,8220000		3,1200531
sigma[St]	0,0000000		0,3373049
Marge superior	2,8220000		3,7811706
Marge inferior	2,8220000		96*AZ1022
Valor central	2,8220000		3,1200531

Figura 24: Càlcul del marge inferior per a un IC Teòric. Font: Elaboració pròpia

Tenint present que el valor central es calcula de la mateixa manera que en el mètode empíric, s'obté que

$$IC(95\%) = [2,4589356 - 3,7811706],$$

i el valor central és de 3,1200531€. Recordem que la predicció puntual és de 3,11776683€.

Mitjançant diverses mesures de Bondat d'Ajust, a continuació, justificarem que les prediccions són acceptables.

Amb aquesta finalitat s'han utilitzat els dies del model en els quals ja es coneixen les cotitzacions (des de l'1 de desembre del 2021 fins al 31 de gener del 2022). S'ha estimat el valor que assoliria l'acció en cadascun dels dies coneguts, segons (3.4.2) del Model

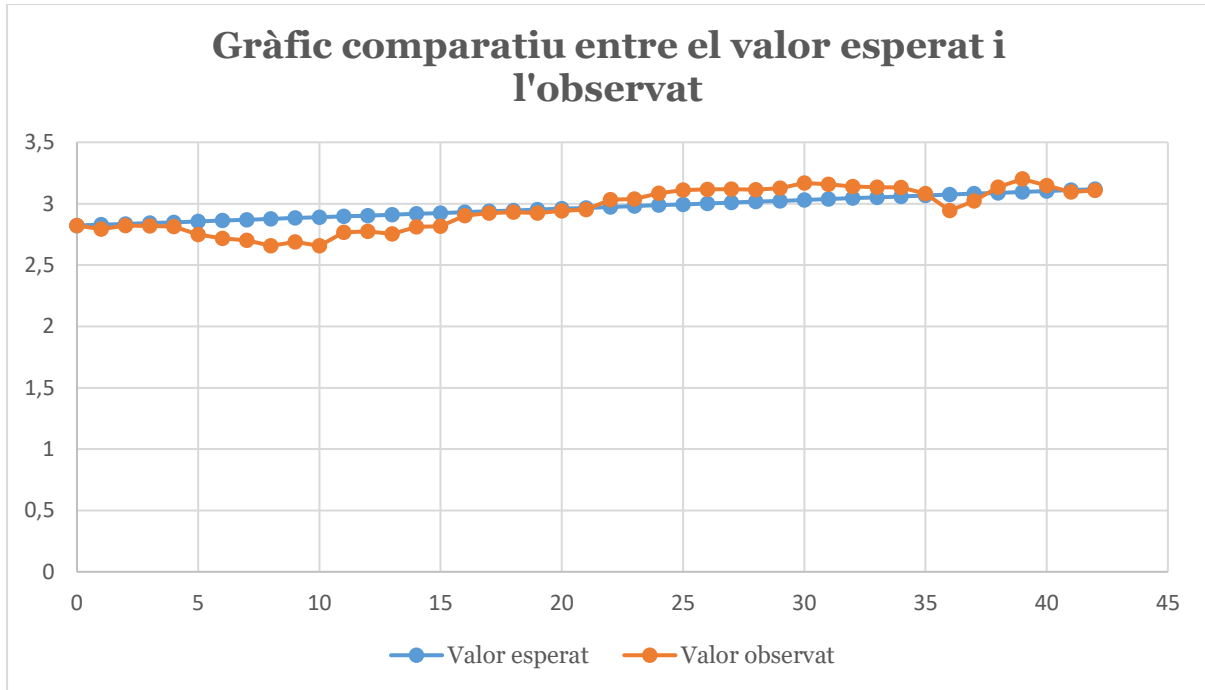


Figura 26: Gràfic comparatiu entre el valor esperat i l'observat. Font: Elaboració pròpia

➤ **Error Quadràtic Mitjà o RMSE (Root Mean Squared Error) i Error Porcentual Absolut Mitjà o MAPE (Mean Absolute Porcentual Error)**

En les Figures 27, 28, 29, 30 i 31 es mostren els passos per a realitzar els càlculs del MAPE i MSE mitjançant el full d'Excel.

		G	H	I	J	K	L
				Valor esperat	2,822	2,8285798	2,8352614
				Valor observat	2,822	2,793	2,822
MESURES BONDAT D'AJUST	Error absolut			0,000000		ABS(K1004-K1003)	0,013261
	ABS/OBS			0,000000		0,012739	0,004699
	Error ²			0,000000		0,001266	0,000176
				MAPE		2,96%	
				RMSE		0,103930	

Figura 27: Càlcul de l'error absolut. Font: Elaboració pròpia

✖ ✔ fx =+K1005/K1004					
G	H	I	J	K	L
		Valor esperat	2,822	2,8285798	2,8352614
		Valor observat	2,822	2,793	2,822
MESURES BONDAT D'AJUST		Error absolut	0,000000	0,035580	0,013261
		ABS/OBS	0,000000	K1004	0,004699
		Error²	0,000000	0,001266	0,000176
		MAPE	2,96%		
		RMSE	0,103930		

Figura 28: Càlcul del valor absolut entre l'observat. Font: Elaboració pròpia

✖ ✔ fx =+K1005^2					
G	H	I	J	K	L
		Valor esperat	2,822	2,8285798	2,8352614
		Valor observat	2,822	2,793	2,822
MESURES BONDAT D'AJUST		Error absolut	0,000000	0,035580	0,013261
		ABS/OBS	0,000000	0,012739	0,004699
		Error²	0,000000	=+K1005^2	0,000176
		MAPE	2,96%		
		RMSE	0,103930		

Figura 29: Càlcul de l'error al quadrat. Font: Elaboració pròpia

✖ ✔ fx =+PROMEDIO(J1006:AY1006)					
G	H	I	J	K	L
		Valor esperat	2,822	2,8285798	2,8352614
		Valor observat	2,822	2,793	2,822
MESURES BONDAT D'AJUST		Error absolut	0,000000	0,035580	0,013261
		ABS/OBS	0,000000	0,012739	0,004699
		Error²	0,000000	0,001266	0,000176
		MAPE	AY1006)		
		RMSE	0,103930		

Figura 30: Càlcul del MAPE. Font: Elaboració pròpia

=+RAIZ(PROMEDIO(J1007:AY1007))					
G	H	I	J	K	L
		Valor esperat	2,822	2,8285798	2,8352614
		Valor observat	2,822	2,793	2,822
MESURES BONDAT D'AJUST		Error absolut	0,000000	0,035580	0,013261
		ABS/OBS	0,000000	0,012739	0,004699
		Error²	0,000000	0,001266	0,000176
		MAPE	2,96%		
		RMSE	AY1007))		

Figura 31: Càlcul del RMSE. Font: Elaboració pròpia

El RMSE mesura la distància mitjana entre els valors observats i els estimats. En aquest cas, el RMSE és de 0,10€.

El MAPE proporciona la mitjana dels valors absoluts ponderats per l'inversió del valor, tenint present els resultats en les estimacions es produeix un error del 2,96%, lo que pot considerar-se un percentatge raonable d'error ja que, al trobar-se per baix del 5%, es considera que està dins dels criteris acceptables en la literatura de models de subjacents.

➤ **Gràfic resultant de la Simulació de Monte Carlo**

Una vegada realitzada tota la simulació de Monte Carlo s'obté el gràfic que es mostra a la Figura 32.

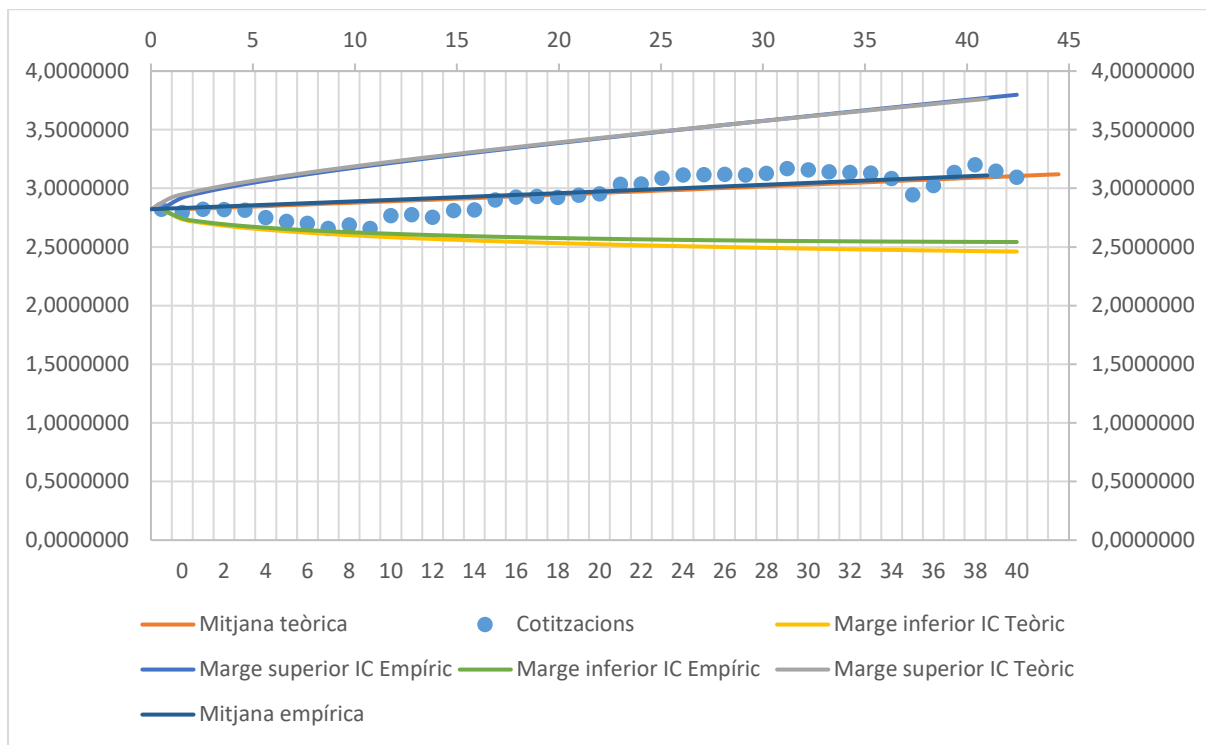


Figura 32: Simulació de Monte-Carlo. Font: Elaboració pròpia

4.2. APLICACIÓ DEL MODEL LOG-NORMAL MITJANÇANT EL MÈTODE DE MÀXIMA VERSEMBLANÇA

El segon mètode que s'utilitzarà per a calibrar els paràmetres i recolzar els resultats anteriors és el Mètode de Màxima Versemblança aplicat a la solució del Model Log-Normal. Per a emprar aquest anàlisi, caldrà fer ús de la ferramenta Solver d'Excel.

Per a poder començar amb els càlculs, serà necessari primer recordar la fórmula obtinguda en la Secció 3.3:

$$L(\mu, \sigma) = \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2.$$

Per tant, abans d'usar Solver cal primer resoldre aquesta equació. El primer pas ha consistit en crear una nova columna per a resoldre el contingut de l'últim sumatori com es mostra a la Figura 33.

C	D	E	F	G	H
Preu ajustat (€)	Log-retorn (u _i)	$((S_k/S_{k-1})-1-\mu\Delta t)^2$		U	S ²
2,822	-	-		0,00225225	0,0002767
2,793	-0,01033	$\$H\$8*\$H\$6)^2$			
2,822	0,0103296	9,19575E-05		N (nº dades)	Δt
2,819	-0,001064	3,44743E-06		42	0,0039683
2,813	-0,002131	8,53846E-06		Dies Any	μ
2,749	-0,023014	0,000554375		252	0,2
2,717	-0,011709	0,000154611			σ
2,701	-0,005906	4,46558E-05			0,2
2,658	-0,016048	0,000279347			

Figura 33: Càlcul de $\left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t\right)^2$ pertanyent a l'equació $L(\mu, \sigma)$. Font: Elaboració pròpia

Com que les cel·les variables que s'han de calcular mitjançant Solver són μ i σ , hem establert per a ambdós un valor inicial de 0,2. A més, cal recordar que $\Delta t = 1/252$.

A continuació, cal resoldre l'equació $L(\mu, \sigma)$ representada en la Figura 34 com a θ .

ESTRATÈGIES ESPECULATIVES DE TIPUS COLLAR: TEORIA I APLICACIONS

✖ ✓ f_x $= (G6/2)*LN(2*H17)+(G6/2)*LN(H6)+G6*LN(H10)+SUMA(D3:D43)+(1/(2*(H10^2)*H6))*SUMA(E3:E43)$

C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Preu stat (€)	Log-retorn (u_i)	$((S_k/S_{k-1})-1-\mu\Delta t)^2$		U	S^2		Aleatori (Z)	0	1
2,822	-	-					0,274158146	2,822	2,8337876
2,793	-0,01033	0,000122546		0,00225225	0,0002767		0,144860516	2,822	2,8291752
2,822	0,0103296	9,19575E-05					0,765946122	2,822	2,8514001
2,819	-0,001064	3,44743E-06		N (nº dades)	Δt		0,707252337	2,822	2,8492924
2,813	-0,002131	8,53846E-06		42	0,0039683		0,418952638	2,822	2,8389619
2,749	-0,023014	0,000554375		Dies Any	μ		-0,98306714	2,822	2,7892553
2,717	-0,011709	0,000154611		252	0,2		-2,016767369	2,822	2,7531653
2,701	-0,005906	4,46558E-05			σ		-0,079430034	2,822	2,8211918
2,658	-0,016048	0,000279347			0,2		-1,743004288	2,822	2,7626776
2,687	0,0108514	0,00010235					0,443051781	2,822	2,839824
2,657	-0,011228	0,000143006					0,475968445	2,822	2,8410019
2,766	0,0402046	0,001618458			θ		1,952905912	2,822	2,8943612
2,775	0,0032485	6,05231E-06			E43)		-2,064317563	2,822	2,7515164
2,754	-0,007596	6,991E-05					-0,408377029	2,822	2,809524
2,811	0,0204859	0,00039615			π		-2,445719787	2,822	2,7383265
2,816	0,0017771	9,70374E-07			3,1415927		1,635879978	2,822	2,8828238
2,901	0,0297381	0,000863831					-0,652615136	2,822	2,8008921

Figura 34: Càlcul de l'equació $L(\mu, \sigma)$ o θ . Font: Elaboració pròpia

En la Figura 35 es mostra com es complimentaria el quadre dels paràmetres de Solver per a obtenir la solució d'aquesta equació.

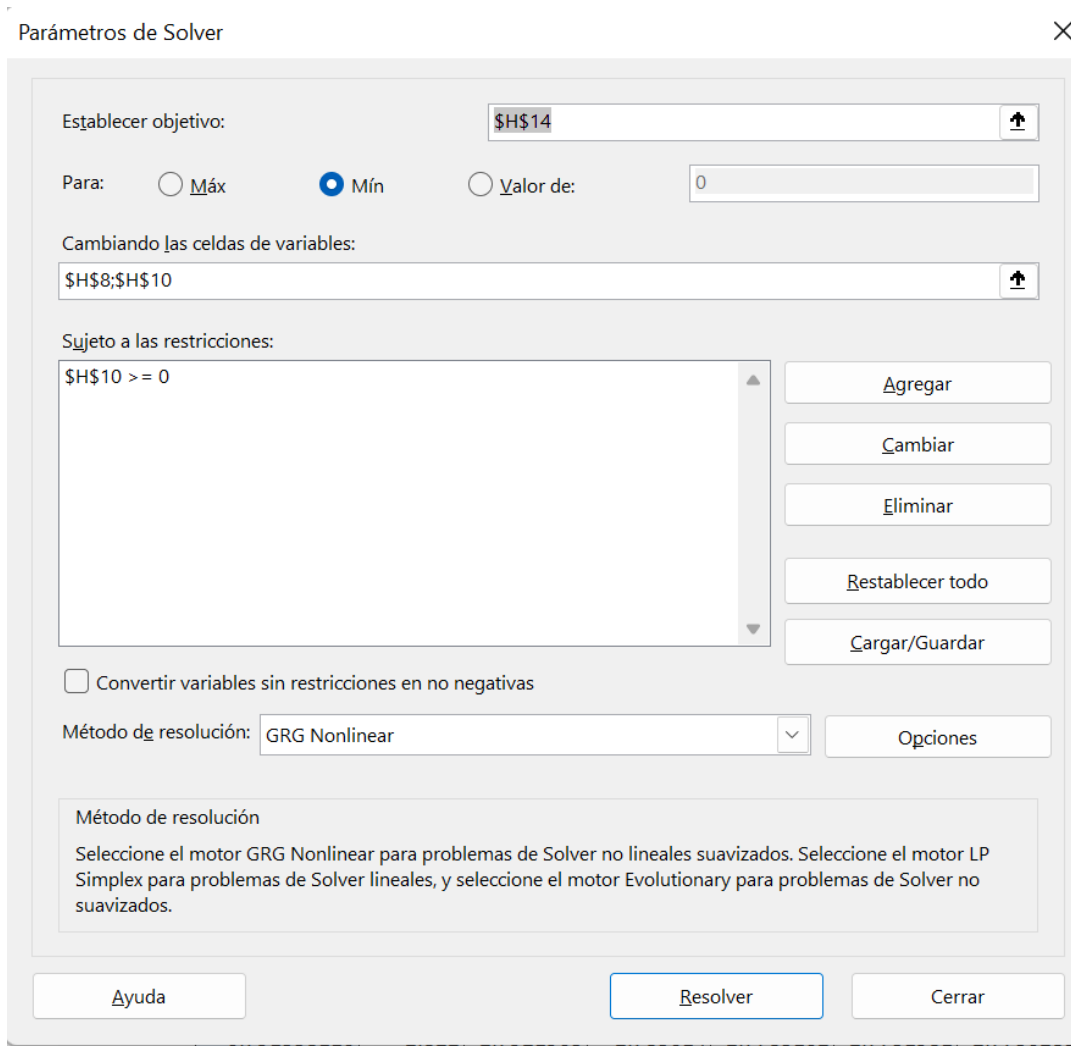


Figura 35: Paràmetres de Solver. Font: Elaboració pròpia

Així, la cel·la objectiu és la calculada en aquest apartat i les cel·les variables són μ i σ . Tot seguit, cal afegir la condició de que σ ha de ser un valor positiu, és a dir, major o igual a 0. Els resultats obtinguts són:

$$\mu = 0,6022926, \quad \sigma = 0,2583141.$$

A continuació, en la Taula 5 es mostra una comparació dels resultats que s'han obtingut mitjançant els dos mètodes:

MÈTODE EMPLEAT	μ	σ
Moments	0,6024249	0,26404225
Màxima Versemblança	0,6022926	0,2583141

Taula 5: Taula comparativa dels valors que s'obtidrien per a μ i per a σ mitjançant el Mètode de Moments i el Mètode de Màxima Versemblança. Font: Elaboració pròpia.

A primera vista, s'observa com els resultats són coherents entre sí. Així mateix, es procedeix a seguir els mateixos passos que en el Mètode de Moments i es calcula l'estimació de la cotització a data de l'1 de febrer del 2022. El valor resultant mitjançant el Mètode de Màxima Versemblança és de 3,117773€, amb una cotització real de 3,107€. Per tant, s'observa que existeix una xicoteta i raonable desviació de 0,010773€ entre ambdós valors.

A continuació, s'usen les tres eines ja utilitzades en el Mètode de Moments per a valorar si s'ajusten les dades emprades, aplicades al Mètode de Màxima Versemblança.

➤ **Gràfic de comparació de les observacions i les estimacions**

En el Figura 36 es mostra la comparativa entre les cotitzacions reals i les estimades mitjançant el model.

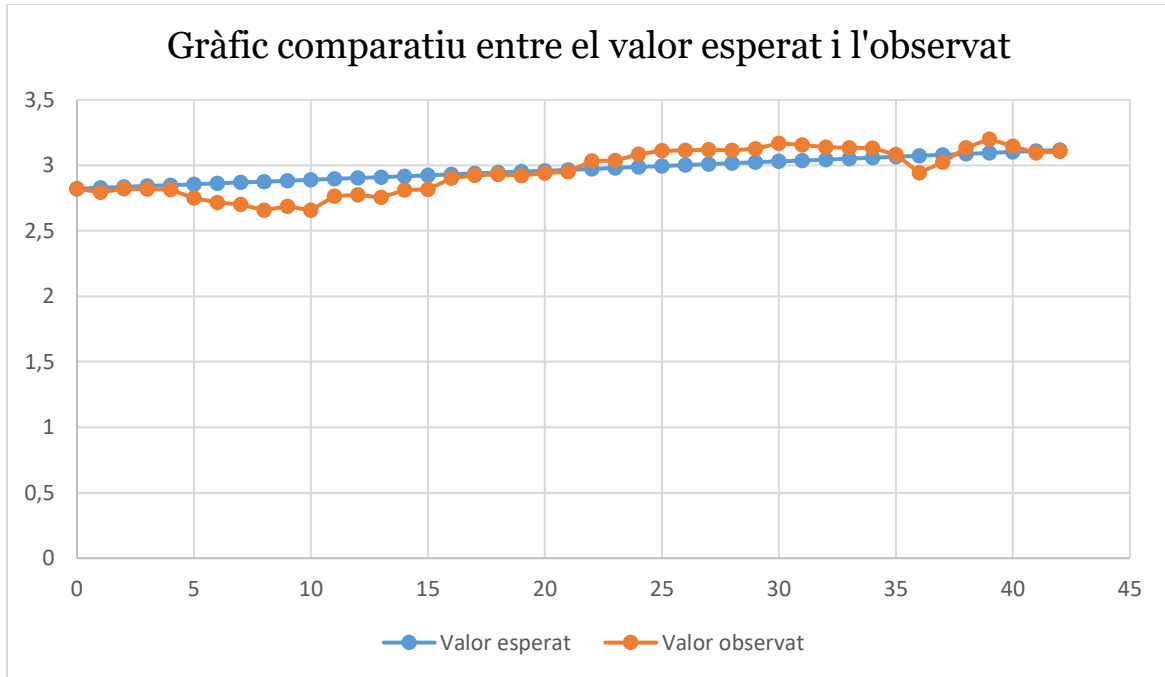


Figura 36: Gràfic comparatiu entre el valor esperat mitjançant el Mètode de Màxima Versemblança i el valor real observat. Font: Elaboració pròpia

➤ **Error Quadràtic Mitjà (RMSE) i Error Percentual Absolut Mitjà (MAPE)**

Seguint els mateixos passos que en el Apartat 4.1., però usant els valors d'aquest mètode, s'obté que:

$$RMSE = 0,103931, \quad MAPE = 2,96\%.$$

Finalment, en la Taula 6 es comparen els resultat de les mesures de Bondat d'Ajust (MAPE i RMSE) obtinguts a través del Model Log-Normal usant ambdues tècniques per a l'estimació dels paràmetres.

MESURES DE BONDAT D'AJUST	MÈTODE DE MOMENTS	MÈTODE DE MÀXIMA VERSEMBLANÇA
MAPE	2,96%	2,96%
RMSE	0,103930	0,103931

Taula 6: Comparació dels resultats de les Mesures de Bondat d'Ajust emprant el Mètode de Moments i el Mètode de Màxima Versemblança. Font: Elaboració pròpia

En conjunt, s'observa com les comparatives dels mètodes ens donen uns resultats molt similars entre sí. Aquesta coherència ens dona a entendre que els passos donats fins a aquest moment han sigut els correctes. Així, es pot continuar amb l'estudi amb una major certesa de que, efectivament, s'està aplicant bé el model i les solucions obtingudes ho recolzen.

CAPÍTOL V: MODEL DE BLACK-SCHOLES-MERTON

Un model de valoració d'opcions s'encarrega de, donades unes determinades condicions del mercat, determinar el preu teòric d'una opció qualsevol. Els principals models per a la valoració de l'opció són els següents:

- El Mètode Binomial.
- El Model de Black-Scholes-Merton (BSM).

D'una banda, en el Mètode Binomial l'evolució del preu de l'actiu subjacent només pot prendre dos valors (S_u i S_d) amb probabilitats associades q i $(1 - q)$. Aquest mètode, com el seu propi nom indica, es basa en la distribució de probabilitat discreta de tipus binomial i es pot aproximar a una distribució Normal o Gaussiana quan el nombre de períodes s'eleva a, generalment, un mínim de 50.

El Model de BSM, apareix per a poder treballar amb un nombre infinit de períodes. El seu nom és una combinació dels cognoms dels seus creadors. En 1970 Fischer Black i Myron Scholes d'una banda, i Robert Merton d'altra, van implementar de manera independent el model.

El model es basa en fixar els preus d'actius de capital per a determinar la relació entre el rendiment de mercat requerit sobre l'opció i el rendiment requerit sobre l'acció. Aquesta relació depèn tant del preu de l'acció com del temps. Robert Merton defenia una idea diferent, el seu model implicava la fixació d'una cartera lliure de risc, justificant que el rendiment al llarg d'un període curt hauria de ser el rendiment lliure de risc. No obstant, el Model de Black i Scholes argumentava que la cartera canvia de manera continua al llarg del temps.

En aquest capítol s'estudiaran els principals resultats teòrics, que s'aplicaran posteriorment en el Capítol 6, sobre el Model BSM. D'aquest s'obté una fórmula per a posar preu a la prima d'un contracte d'opció europea de tipus *call* i *put* sobre un subjacent o acció.

5.1. INTRODUCCIÓ AL MODEL DE BLACK-SCHOLES-MERTON

El model de Black-Scholes-Merton (BSM) considera una acció que no paga dividendes i suposa que el rendiment sobre aquesta acció en un període curt es distribueix de manera normal. Paral·lelament, s'assumeix que els rendiments de dos períodes diferents que no es solapen són independents entre si.

Primerament, cal definir les variables que apareixen en el model de BSM:

- μ : Rendiment esperat sobre l'acció.
- σ : Volatilitat del preu de l'acció.

La mitjana del rendiment en el temps Δt és $\mu\Delta t$ i la desviació estàndard del rendiment és $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Per tant:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \sim N(\mu\Delta t; \sigma^2\Delta t). \quad (5.1.1)$$

En aquesta expressió, l'element $\Delta S(t)$ serveix per a denotar la variació en el preu de l'acció en el temps i $N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$, per la seua part, la distribució normal amb mitjana $\mu\Delta t$ i una variància $\sigma^2\Delta t$. Cal destacar que és la variància del rendiment i no la desviació estàndard, la qual cosa és proporcional a Δt . Equivalentment, quan Δt és menuda, (5.1.1) mostra que el canvi percentual en el preu de l'acció en el temps Δt és normal amb la desviació estàndard de $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

DISTRIBUCIÓ LOGARÍTMICA NORMAL

En un terme de temps llarg, serà necessari precisar la distribució del preu del subjacent en el futur. Açò implica que el preu d'una acció en qualsevol moment futur té una distribució logarítmica normal o Log-Normal. Mentre que una variable amb una distribució Normal és simètrica i pot prendre qualsevol valor negatiu o positiu, una variable que es trobi subjecta a una distribució Log-Normal és esbiaixada i només pot ser positiva. Per tant, una variable amb una distribució logarítmica normal té la

propietat de que el seu logaritme natural o neperià té una distribució normal. Conseqüentment, el model de Black, Scholes i Merton implica que $\ln S_T$ és normal, on S_T és el preu de l'acció en un temps futur T . La mitjana i la variància de $\ln S_T$ són:

$$E[\ln S_T] = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \quad \text{Var}[\ln S_T] = \sigma^2 \Delta t, \quad (5.1.2)$$

on S_0 defineix el preu inicial o actual de l'acció. A més, es pot demostrar que

$$\ln S_T \sim N \left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \quad \sigma^2 \Delta t \right]. \quad (5.1.3)$$

El valor esperat (o mitjana) de S_T és

$$E[S_T] = S_0 e^{\mu T}, \quad (5.1.4)$$

i la variància de S_T és

$$\text{Var}[S_T] = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1). \quad (5.1.5)$$

Tenint present la (5.1.3) i aplicades les propietats de la distribució normal s'obté que

$$\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 \Delta t \right]. \quad (5.1.6)$$

Quan $T = 1$, l'expressió $\ln(S_T/S_0)$ és el rendiment contínuament capitalitzat de l'acció en un any. Concepte distint al rendiment amb capitalització normal $(S_T - S_0)/S_0$. La mitjana i la desviació estàndard del rendiment contínuament capitalitzat en un any són, per tant, $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ i σ , respectivament.

A continuació, es considera amb més detall la propietat del rendiment esperat i el paràmetre de la volatilitat en el model Log-Normal del preu de les accions.

RENDIMENT ESPERAT

El concepte de rendiment esperat (μ) per l'inversor d'una acció depèn del grau de risc ja que, a major risc, s'espera un major rendiment. Tanmateix, s'ha de tenir present la taxa d'interès ja que, quant major sigui la taxa, major el rendiment esperat. Cal destacar que el valor d'una opció sobre una acció, quan s'expressa en termes del valor del subjacent, no depèn de μ . No obstant, existeix un aspecte del rendiment esperat que prové d'una acció que pot causar confusió amb freqüència. La (5.1.1) mostra que $\mu\Delta t$ és el canvi percentual esperat en el preu d'una acció en un període curt. Així, es pot aplegar a la falsa conclusió de que μ és el rendiment esperat contínuament capitalitzable sobre l'acció al llarg d'un període més prolongat. Si es denota amb R el rendiment contínuament capitalitzable que s'obté en realitat en una duració de T anys, llavors s'obté que

$$S_T = S_0 e^{RT}, \quad (5.1.7)$$

de manera que

$$R = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right). \quad (5.1.8)$$

La (5.1.6) serveix per a demostrar que el valor esperat de R és $E[R] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$. La raó per la qual el rendiment esperat contínuament capitalitzat és diferent de μ és de naturalesa subtil, però important.

Considerant un nombre elevat de períodes curts de duració Δt i, paral·lelament, S_i com el preu de l'acció al final de l'interval i de longitud Δt i, denotant per ΔS_i a la diferència $S_{i+1} - S_i$, llavors d'acord amb els càlculs que defineixen el comportament del preu de les accions, la mitjana dels rendiments sobre l'acció en cada interval es troba prop de μ . És a dir, $\mu\Delta t$ és proper a la mitjana aritmètica del rendiment relatiu de la inversió: $\Delta S_i/S_i$. Malgrat això, el rendiment esperat sobre la totalitat del període que cobreixen les dades, expressades com un període de capitalització de longitud Δt es situa prop a la mitjana geomètrica de $\Delta S_i/S_i$. Per a explicar matemàticament els resultats anteriors, s'ha de partir de (5.1.4):

$$E[S_T] = S_0 e^{\mu T}.$$

Prenent logaritmes neperians, s'obté que

$$\ln[E(S_T)] = \ln(S_0) + \mu T.$$

Per tant, com la funció logaritme és còncava, es compleix que

$$\ln(S_0) + \mu T = \ln[E(S_T)] > E[\ln(S_T)],$$

de manera que

$$E[\ln(S_T/S_0)] < \mu T,$$

la qual cosa porta a

$$E[R] < \mu.$$

VOLATILITAT

La volatilitat d'una acció, σ , és una mesura de la incertesa respecte dels rendiments que ofereix una acció. De manera general, les accions tenen volatilitats entre 15% i 50%. D'acord amb (5.1.6), la volatilitat en el preu d'una acció es defineix com la desviació estàndard del rendiment que ofereix una acció en un any quan el rendiment s'expressa usant capitalització contínua.

SUPÒSITS DE SUPORT PER A BLACK-SCHOLES-MERTON

Els supòsits que realitzaren Black, Scholes i Merton quan van deduir la seua fórmula per a la valuació de les opcions foren les següents:

1. No existeixen costos de transacció ni impostos.
2. No existeixen oportunitats d'arbitratge lliures de risc.
3. No hi ha dividendes sobre l'acció subjacent durant el període de vida de l'opció.
4. El comportament del preu d'una acció es correspon amb el Model Log-Normal de paràmetres μ i σ .
5. Les negociacions amb valors han de ser contínues

6. Els inversors poden sol·licitar o donar préstecs a la mateixa taxa d'interès lliure de risc
7. La taxa d'interès lliure de risc a curt terme, r , és constant.

ARGUMENT CLAU DE NO ARBITRATGE

Els arguments que es poden utilitzar per a avaluar les opcions són equivalents als arguments de no arbitratge. El terme arbitratge, des d'un punt de vista financer, es pot definir com la presa d'una posició d'avantatge davant d'una diferència de preus.

En un context d'absència d'oportunitats d'arbitratge, on es forma una cartera lliure de risc amb una posició sobre una opció i una posició sobre una acció, el rendiment obtingut de la cartera ha de ser la taxa d'interès lliure de risc, r . Per tant, es dedueix que aquest ha de ser el resultat d'una equació diferencial que quedarà satisfeta gràcies a l'opció. La raó per la qual es pot establir una cartera lliure de risc és que tant el preu de l'acció com el preu de l'opció es veuen afectats per la mateixa font fonamental d'incertesa: la variació dels preus de les accions. En un període curt, el preu d'una opció de compra està correlacionat d'una manera perfectament positiva amb el preu de l'acció subjacent, i el preu de l'opció de venda està correlacionat d'una manera perfectament negativa amb el preu de l'acció subjacent. En ambdós casos, una vegada establida una cartera adequada de l'acció i de l'opció, el benefici o la pèrdua que pugui donar-se per la posició presa sobre l'acció sempre compensa el guany o pèrdua derivades de la posició. D'aquesta manera, el valor general de la cartera a termini del període curt es coneix amb certa seguretat.

5.2. APLICACIÓ DEL MODEL BLACK-SCHOLES-MERTON

En aquest apartat es revisen els principals resultats teòrics sobre el Model de Black-Scholes-Merton (BSM) per a proporcionar la fórmula que serveix per a calcular el preu d'un contracte d'una opció europea (tipus *call* i *put*) sobre un subjacent o acció. Tot seguit, es proporcionaran les fórmules en el cas que es paguen dividends durant el

període de vida de l'opció i en el cas que no es paguen. Per a finalitzar aquest apartat, s'aplicarà el Model de Black-Scholes-Merton al cas concret del Banc Santander.

En el model de BSM s'assumeix que el subjacent S_t en l'instant t segueix un Moviment Brownià Geomètric. És a dir, la seua dinàmica temporal segueix el procés estocàstic

$$S_t = s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}, \quad B_t \sim N[0, t], \quad (5.2.1)$$

on:

- s_0 és el valor en l'instant inicial $t = 0$ del subjacent o acció. Es denota en minúscula perquè en la pràctica es tracta d'un valor determinista, és a dir, es tracta d'un valor conegut.
- $\mu \in \mathbb{R}$. Es denomina paràmetre de tendència o *drift*. Com s'exposa en el Capítol 4, cal calibrar-lo mitjançant mètodes estadístics a partir d'una sèrie històrica de preus de l'acció. Si el valor que pren aquest element és positiu, estarem davant d'un comportament alcista de l'acció en el mercat, per contra, si el valor és negatiu indica una tendència a la baixa. D'altra banda, si $\mu = 0$ indica que no s'han produït canvis en el seu valor durant el període calibrat.
- $\sigma > 0$ es denomina paràmetre de la volatilitat o difusió del preu de l'acció.
- B_t és el procés estocàstic denominat Moviment Brownià Geomètric. També pot aparèixer com W_t equivalentment ja que també es pot reconèixer com el procés de Wiener.

A continuació, es demostra que el procés estocàstic de (5.2.1) és la solució de la següent equació diferencial estocàstica mitjançant el Lema d'Itô explicat en el Capítol 3.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s_0. \quad (5.2.2)$$

El següent pas consisteix a posar preu a un contracte d'opció europea sobre el subjacent. Amb aquesta finalitat, s'usa una inversió lliure de risc que, habitualment, es tracta d'un bo. Aquesta inversió lliure de risc inicial es denota per b_0 a un tipus d'interès r durant un període de longitud t . Així, el valor del bo en l'instant t és

$$S_t = se^{rt}. \quad (5.2.3)$$

Aquesta funció es correspon amb la solució de l'equació diferencial determinista

$$dS_t = rS_t dt, \quad (5.2.4)$$

que ha de complir la condició inicial $S_0 = s_0$.

Per a poder considerar que un mercat financer està complet, tots els productes derivats sobre un subjacent que cotitza en aquest mercat ha de poder-se replicar o assolir. És a dir, es pot implementar una estratègia en compra-venta un nombre determinat de vegades de subjacents i bons que permeten replicar el valor del derivat en qualsevol instant.

Si $F(S_t, t)$ indica el preu en l'instant t d'un derivat sobre el subjacent S_t , aleshores $F(S_t, t)$ és la solució de l'equació diferencial determinista en derivats parcials:

$$\frac{\partial F(S, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 F(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial F(S, t)}{\partial S} - rF(S, t) = 0. \quad (5.2.6)$$

No obstant, $F(S_t, t)$ també pot obtenir-se com el valor esperat actualitzat o descomptat del *pay-off* del derivat baix de la mesura de martingala equivalent i condicionada per la filtració $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ generada per procés estocàstic $\{S_t, t \geq 0\}$ de les cotitzacions del subjacent:

$$F(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F(S_T, T) | \mathcal{F}_t], \quad (5.2.7)$$

on $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ denota l'esperança baix de la mesura de probabilitat neutral al risc Q condicionada a la informació generada per la filtració $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

5.2.1. Fórmula de Black-Scholes per a opcions tipus *call/put* que no paguen dividendes

Per a una *call*, la funció de *pay-off* a termini T ve donada per:

$$\text{pay-off Call Eurpoea} = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0), \quad (5.2.8)$$

on K indica el preu d'exercici o *strike* i S_T el valor del subjacent a termini.

La solució de l'equació diferencial en derivades parcials o, equivalentment, el valor actualitzat de la funció de *pay-off* baix de la mesura de martingala equivalent, proporcionen la prima que s'ha de pagar en l'instant t per l'adquisició d'un contracte *call* de tipus europeu sobre un subjacent amb termini en l'instant T . Aquest valor ve donat per:

$$C = S_t N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad (5.2.9)$$

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) - S_t N(-d_1), \quad (5.2.10)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (5.2.11)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (5.2.12)$$

La funció $N(x)$ és la funció de distribució d'una variable aleatòria normal estàndard (de mitjana 0 i desviació típica 1), és a dir, el valor de la següent integral que apareix calculada en les taules estadístiques clàssiques:

$$N(x) = P[X \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad X \sim N(0; 1).$$

A continuació, es calcula el valor d'una *call* seguint la tècnica de la cartera que es duplica assumint que $t = 0$:

$$C = e^{-rT} E[(S_T - K)^+], \quad (5.2.13)$$

on S_T és una variable aleatòria que s'assumeix que segueix el Model Brownià Geomètric:

$$S_T = s_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B_T} = s_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}.$$

Per tant,

$$C = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(s_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x} - K \right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (5.2.14)$$

si

$$s_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x} - K > 0,$$

és a dir, aïllant x , si es compleix

$$x^* = \frac{\ln\left(\frac{K}{s_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} > 0.$$

Així, el valor de la integral que determina el valor de l'opció *call* és la següent:

$$C = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^*}^{+\infty} \left(s_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x} - K \right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (5.2.15)$$

Per a poder calcular aquesta integral, cal descompondre-la en dues integrals:

$$C = C_1 - C_2,$$

on

$$C_1 = \frac{s_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^*}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T}x - \frac{x^2}{2}} dx,$$

$$C_2 = \frac{e^{-rT}K}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^*}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-rxT}K \times N(-x^*),$$

$$C = C_1 - C_2 = \frac{s_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^*}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T}x - \frac{x^2}{2}} dx - e^{-rxT}K - N(-x^*). \quad (5.2.16)$$

A continuació, cal completar el quadrat de l'exponent de l'integral:

$$\sigma\sqrt{T}x - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T})^2 + \frac{\sigma^2 T}{2},$$

$$C_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^*}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T})^2} dx. \quad (5.2.17)$$

Després, es realitza un canvi de variable:

$$y = x - \sigma\sqrt{T}, \quad x = y + \sigma\sqrt{T}.$$

Una vegada realitzat el canvi, s'obté que

$$C_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma\sqrt{T}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = S_0 N\left(-\left(x^* - \sigma\sqrt{T}\right)\right) = S_0 N\left(\sigma\sqrt{T} - x^*\right). \quad (5.2.18)$$

Tenint present (5.2.16) es dedueix que

$$C = S_0 N\left(\sigma\sqrt{T} - x^*\right) - Ke^{-rT} K \times N\left(-x^*\right), \quad (5.2.19)$$

on

$$d_1 = \sigma\sqrt{T} - x^* = \sigma\sqrt{T} - \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$x^* = \sigma\sqrt{T} - d_1, \quad -x^* = d_1 - \sigma\sqrt{T} = d_2. \quad (5.2.20)$$

En conjunt, el valor de la prima d'una opció *call* europea es defineix com

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} KN(d_2). \quad (5.2.21)$$

Cal destacar que el preu de la *call* no depèn del paràmetre μ que apareix en (5.2.1) i (5.2.2), si no que depèn del tipus d'interès r lliure de risc.

Una vegada coneguda l'opció de compra europea o *call*, es pot traure a partir de la mateixa la fórmula per a una opció de venda o *put*. En cas de que coincideixin en subjacent, preu d'exercici i termini i, per tant, en la funció de *pay-off* amb termini T

$$\text{pay-off Call Europea} = (K - S_t)^+ = \max(K - S_t; 0), \quad (5.2.22)$$

es pot deduir d'una manera anàloga a l'anterior, assumint que $t = 0$, que la fórmula per a calcular el preu de l'opció de venda o *put* és

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - s_0N(-d_1).$$

També és possible obtenir el preu de la *put* coneixent la prima de la *call* sobre el mateix subjacent, mateix termini i preu d'exercici, gracies a la relació de Paritat *put-call*:

$$P = C + Ee^{-rt} - s_0.$$

5.2.2. Aplicació de Black-Scholes-Merton al cas concret del Banc Santander

Per a poder aplicar el Model de BSM, primer cal fixar les variables del contracte. D'una banda es situa el valor inicial del subjacent en 3,095€, que és l'últim valor conegut en el període estudiat (de l'1 de desembre del 2021 al 31 de gener del 2022). A més, estimem que el contracte és de 20 dies, tenint present que l'any laboral del mercat és de 252 dies, amb una taxa d'interès r de l'1%. Així mateix, s'ha de fixar el preu del contracte. Per a aquest pas, cal recordar les condicions que apareixen en el Capítol 2:

1. Es tracta de posicions OTM, per la qual cosa el preu d'exercici de la *call* ha de ser major que el preu d'exercici de la *put*.

$$E_P < E_C.$$

2. Donat que la venda de la *call* es fa per tal de compensar la compra de la *put*, es busca que ambdues primes tinguin una prima similar.

$$P \approx C.$$

3. El preu de l'actiu subjacent es troba entre els valors de E_P i de E_C . Per tant:

$$E_P < A < E_C.$$

Tenint present que el preu de compra de l'actiu (A) és de 2,82€, s'ha triat un preu d'exercici per a la *put* (E_p) de 2,80€ i per al de la *call* (E_c) de 3,30€. A continuació, en les Figures 37 i 38 es mostren el valors, calculats mitjançant Excel, de la *put*.

=0,01/252*20	
E	F
S_0	3,095 €
E_p	2,80 €
r	0,08%
T	0,07936508
σ	1,01822211

Figura 37: Càlcul d'una taxa d'interès r de l'1% per a un període de 20 dies laborables. Font: Elaboració pròpia

=20/252	
E	F
S_0	3,095 €
E_p	2,80 €
r	0,08%
T	0,07936508
σ	1,01822211

Figura 38: Càlcul del valor T temporal per a un període de 20 dies laborables. Font: Elaboració pròpia

L'última variable, σ , s'ha de calcular com la desviació típica dels preus ajustats del període de referència tal i com es mostra en la Figura 39.

=(DESVEST(C2:C43)/42)*252	
E	F
S_0	3,095 €
E_p	2,80 €
r	0,08%
T	0,07936508
σ	252

Figura 39: Càlcul de la desviació típica. Font: Elaboració pròpia

A continuació, com es detalla a les Figures 40 i 41, es procedeix a fer els càlculs de d_1 i de d_2 .

=+(LN(\$F\$68/F69)+(\$F\$70+((F\$72^2)/2))*\$F\$71)/(\$F\$72*RAIZ(\$F\$71))				
E	F	G	H	I
S ₀	3,095 €			
E _p	2,80 €			
r	0,08%			
T	0,07936508			
σ	1,01822211			
d ₁	\$F\$71))	N(d ₁)	0,68893897	
d ₂	0,2059935	N(d ₂)	0,58160201	

Figura 40: Càlcul de d₁. Font: Elaboració pròpia

=+F74-\$F\$72*RAIZ(\$F\$71)			
E	F	G	H
S ₀	3,095 €		
E _p	2,80 €		
r	0,08%		
T	0,07936508		
σ	1,01822211		
d ₁	0,49284508	N(d ₁)	0,68893897
d ₂	*RAIZ(\$F\$71)	N(d ₂)	0,58160201

Figura 41: Càlcul de d₂. Font: Elaboració pròpia

I, tot seguit, es calculen $N(d_1)$ i $N(d_2)$, com es detalla a les Figures 42 i 43, tenint present que segueix una distribució normal estandard.

=+DISTR.NORM.ESTAND.N(F74;VERDADERO)			
E	F	G	H
d ₁	0,49284508	N(d ₁)	VERDADERO)
d ₂	0,2059935	N(d ₂)	0,58160201

Figura 42: Càlcul de $N(d_1)$. Font: Elaboració pròpia

=+DISTR.NORM.ESTAND.N(F75;VERDADERO)			
E	F	G	H
d ₁	0,49284508	N(d ₁)	0,68893897
d ₂	0,2059935	N(d ₂)	VERDADERO)

Figura 43: Càlcul de $N(d_2)$. Font: Elaboració pròpia

Finalment, es calcula la prima de *put* emprant l'equació que s'observa en la Figura 44.

=-\$F\$68*(1-H74)+F69*EXP(-\$F\$70*\$F\$71)*(1-H75)			
E	F	G	H
S ₀	3,095 €		
E _p	2,80 €		
r	0,08%		
T	0,07936508		
σ	1,01822211		
d ₁	0,49284508	N(d ₁)	0,68893897
d ₂	0,2059935	N(d ₂)	0,58160201
P	H75)		

Figura 44: Càlcul de la prima de la *put*. Font: Elaboració pròpia

En el cas de la *call*, només cal duplicar els càlculs anterior amb cura de canviar tant el preu d'exercici com la fórmula de la prima. Els càlculs es mostren a la Figura 45.

=+\$K\$68*\$M\$74-K69*EXP(-\$K\$70*\$K\$71)*\$M\$75			
J	K	L	M
S ₀	3,095 €		
E _c	3,30 €		
r	0,08%		
T	0,079365079		
σ	1,018222113		
d ₁	-0,079935618	N(d ₁)	0,46814423
d ₂	-0,366787202	N(d ₂)	0,35688888
C	\$K\$71)*\$M\$75		

Figura 45: Càlcul de la prima de la *call*. Font: Elaboració pròpia

Així, les primes del cas d'estudi són les següents:

$$P = 0,21\text{€}, \quad C = 0,27\text{€}.$$

Com s'observa, amb els preus d'exercici establerts s'han aconseguit unes primes paregudes entre sí. Així, es considera que es compleixen les tres condicions que apareixen a l'inici d'aquest apartat.

5.2.3. Fórmula de Black-Scholes-Merton per a opcions europees de tipus *call/put* que paguen dividends

A continuació, s'exposa com seria la fórmula en cas de que es repartiren dividends durant el període estudiant. Amb aquest objectiu, es divideix l'explicació en dos blocs depenent de la forma en que es paguen els dividends.

PAGA DE DIVIDENDS DE FORMA CONTÍNUA

En cas que es paguen dividends de manera contínua, és a dir, que es realitzen pagos de manera constant en el temps, s'ha de substituir la taxa lliure de risc. Per tant, com el pago $D_0 S_t dt$ a l'inversor que posseeix el subjacent es distribueix en el interval dt , es fa la substitució per la taxa $r - D_0$. Així, la fórmula resultant per a aquesta situació on l'instant del contracte és t i el termini es situa en T és la següent:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - D_0 + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (5.2.23)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - D_0 - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (5.2.24)$$

PAGA DE DIVEDENDS DE FORMA DISCRETA

En cas que els dividends es paguen de manera puntual o discreta, es poden implementar fórmules per al càlcul de les primes d'una *call* i una *put* europees. Amb

aquesta finalitat, cal descomptar els dividends repartits durant el període de vida de l'opció. Per tant, la fórmula resultant és

$$C(S_T, t) = (S_t - D)N(d_1) - N(d_1) - Ke^{-rT(T-t)}N(d_2), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t - D}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (5.2.25)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t - D}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (5.2.26)$$

Cal ressaltar que aquesta expressió resulta de substituir S_T en la (5.2.9) per $S_T - D$. Per al càlcul de la *put* europea que paga dividends de forma discreta es pot establir la fórmula equivalent. Així mateix, es pot substituir en la fórmula de paritat de la següent manera:

$$C(S_T, t) - P(S_T, t) = (S_T - D) - Ee^{-r(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

CAPÍTOL VI: DETERMINACIÓ DE LA PROBABILITAT DE BENEFICIS PER A ESTRATÈGIES D'INVERSIÓ TIPUS *COLLAR*

En aquest capítol es determinen les probabilitats de benefici de l'estratègia *Collar* per el subjacent Banc Santander a termini del contracte amb un preu d'exercici del futur prefixat. Amb aquesta finalitat, s'apliquen les teories que es venen explicant en els capítols anteriors.

6.1. DETERMINACIÓ DE PROBABILITAT DE BENEFICIS PER A UNA ESTRATÈGIA D'INVERSIÓ TIPUS *COLLAR*. PART TEÒRICA

Abans de passar a determinar la probabilitat de beneficis d'una estratègia de tipus *Collar*, cal recordar en què consisteix aquesta estratègia explicada en el Capítol 2.

Les posicions de l'inversor en una estratègia *Collar* són:

- Posició llarga en el subjacent: Per a poder començar cal estar en possessió del subjacent amb un cost de compra inicial A .
- Posició llarga en una *put*: També cal comprar una opció *put* sobre el subjacent amb un preu d'exercici E_P .
- Posició curta en una *call*: Finalment, s'ha de vendre una opció *call* sobre el mateix subjacent a un preu E_C .

Així, la funció de beneficis-pèrdues d'una posició inversora de tipus *Collar* és la següent:

$$(B/P)_{TOTAL}(S_T) = \begin{cases} E_P - A + C - P & \text{si } 0 \leq S_t \leq E_P, \\ S_t - A + C - P & \text{si } E_P \leq S_t \leq E_C, \\ E_C - A + C - P & \text{si } S_t \geq E_C, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Aquesta funció, per tant, es tradueix en el gràfic representat en la Figura 6.

Per al càlcul de la probabilitat de beneficis d'un *Collar* primer s'ha de tenir present que els beneficis apareixen al segon tram de la funció. Com que aquest es correspon amb la funció $S_t - A + C - P$, es dedueix que els beneficis apareixen a partir del següent punt:

$$S_T = A - C + P,$$

és a dir, els beneficis apareixen quan

$$S_T \geq A - C + P. \quad (6.1.1)$$

Així, per a poder calcular la probabilitat de beneficis de l'estratègia tipus *Collar*, cal aïllar la variable aleatòria Z en la següent expressió:

$$\mathbb{P}_{\text{Beneficio Collar}} = \mathbb{P}[S_T \geq A - C + P]. \quad (6.1.2)$$

A continuació, cal substituir en (6.1.2) la relació que indica el valor del subjacent a termini segons el Model Log-Normal:

$$S_T = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z},$$

per tant, la probabilitat de benefici respon a l'expressió

$$\mathbb{P}_{\text{Beneficio Collar}} = \mathbb{P}\left[s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} \geq A - C + P\right],$$

$$\mathbb{P}_{\text{Beneficio Collar}} = \mathbb{P}\left[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} \geq \frac{A - C + P}{s_0}\right],$$

$$\mathbb{P}_{\text{Beneficio Collar}} = \mathbb{P}\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z \geq \ln\left(\frac{A - C + P}{s_0}\right)\right],$$

$$\mathbb{P}_{\text{Beneficio Collar}} = \mathbb{P}\left[\sigma\sqrt{T}Z \geq \ln\left(\frac{A - C + P}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right],$$

$$\mathbb{P}_{\text{Beneficio Collar}} = \mathbb{P}\left[Z \geq \frac{\ln\left(\frac{A - C + P}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right].$$

Aquesta probabilitat pot expressar-se en termes de la funció de distribució de probabilitat acumulada en una variable aleatòria normal estàndard $Z \sim N(0; 1)$:

$$\mathbb{P}_{Beneficio Collar} = 1 - N\left(\frac{\ln\left(\frac{A - C + P}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad (6.1.3)$$

on el termini ha de ser $T > 0$ sobre una acció que segueix un procés estocàstic de tipus Moviment Brownià Geomètric. S'ha de tenir present que A es correspon amb el preu de compra del subjacent, C és la prima de la *call* i P és la prima de la *put*. Així, com que el preu de compra del subjacent no varia, es realitzen els càlculs amb la variable A prefixada.

6.2. DETERMINACIÓ DE PROBABILITAT DE BENEFICIS PER A UNA ESTRATÈGIA D'INVERSIÓ TIPUS *COLLAR*. APLICACIÓ PRÀCTICA

A continuació, s'aplica la fórmula de l'apartat anterior per tal d'obtenir la probabilitat de benefici davant de diferents escenaris.

El primer pas consisteix en establir que l'element A serà la variable que es tindrà com a referència per a calcular les distintes probabilitats. Aquesta es correspon amb els 2,822€, que és la primera dada de l'històric emprat en el Capítol 4. La resta d'incògnites que apareixen en (6.1.3) són:

- C : Es tracta de la prima de la *call*. En aquest cas l'import és de 0,33€. El càlcul d'aquest import, així com el de la prima de la *put*, es realitza al Capítol 5.
- P : Es tracta de la prima de la *put*. En aquest cas, l'import de la prima és de 0,32€.
- s_0 : El preu inicial del subjacent és de 3,095€, que és el preu del dia 31 de gener del 2022, quan comença el contracte.
- σ : Aquest símbol es correspon amb la volatilitat calculada per a la simulació de Monte Carlo en el Capítol 4. L'import és de 0,26404225.

- μ : A l'igual que la volatilitat, el paràmetre de la deriva és el calculat en el Capítol 4. L'import és de 0,60242494.
- T : Aquest es refereix al període dels 20 dies del contracte. Coincideix amb la T utilitzada per al càlcul de les primes en el capítol anterior.

Així, es procedeix a realitzar els càlculs necessaris per a obtenir les probabilitats de beneficis amb preus d'exercicis prefixats. Amb aquest objectiu s'hauran de calcular diferents primes amb l'objectiu de calcular l'argument N que apareix en (6.1.3). A continuació, en la Figura 46 es mostren els resultats variant el E_p .

=(LN((\$F\$54-\$K\$77+I61)/\$F\$50)-(\$F\$52-(1/2)*(\$F\$51^2))*\$F\$53)/(\$F\$51*RAIZ(\$F\$53))					
E	F	G	H	I	J
S_0	3,095				
σ	0,26404225				
μ	0,60242494				
T	0,07936508				
A	2,82 €				
E_p	2,65 €	2,70 €	2,75 €	2,80 €	2,82 €
d_1	0,68479026	0,619627176	0,55565982	0,492845083	0,468032713
$N(d_1)$	0,75326186	0,732248365	0,71077828	0,688938974	0,680119402
d_2	0,39793867	0,332775592	0,26880823	0,205993499	0,181181129
$N(d_2)$	0,6546623	0,630348158	0,60596137	0,581602005	0,571887297
P	0,15 €	0,17 €	0,19 €	0,21 €	0,22 €
Argument N	-2,43020489	- 2,34157828	-2,24755358	(\$F\$53))	- 2,10706738
Probabilitat	99,25%	99,04%	98,77%	98,42%	98,24%

Figura 46: Càlcul de l'argument N . Font: Elaboració pròpia

Seguidament, per al càlcul de la probabilitat de beneficis serà necessari emprar la fórmula 1- DISTR.NORM.ESTAND (argument N). Així, variant el preu d'exercici de la *put*, s'observa que com menor sigui aquest preu la probabilitat de beneficis augmentarà. A més, tenint en compte la condició de que aquest no pot ser major que el preu de compra de l'actiu subjacent, la menor probabilitat de beneficis que es pot obtenir canviant aquesta variable serà d'un 98,24%.

A continuació, en la Figura 47 s'observa la taula resultant d'alterar el preu d'exercici de la *call*.

E_C	2,82 €	3,00 €	3,15 €	3,30 €	3,45 €	3,50 €
d_1	0,46803271	0,252327424	0,08223889	-0,079935618	-0,23489994	-0,282071471
$N(d_1)$	0,6801194	0,599606004	0,53277163	0,468144231	0,407143196	0,388944354
d_2	0,18118113	-0,03452416	-0,20461269	-0,366787202	-0,52175153	-0,568923055
$N(d_2)$	0,5718873	0,486229589	0,41893737	0,356888877	0,300921671	0,284704179
P	0,49 €	0,40 €	0,33 €	0,27 €	0,22 €	0,21 €
Argument N	-0,83289818	- 1,26002292	-1,57293967	- 1,84695942	- 2,08366550	- 2,15054046
Probabilitat	79,75%	89,62%	94,21%	96,76%	98,14%	98,42%

Figura 47: Probabilitats de benefici variant el preu d'exercici de la call. Font: Elaboració pròpia

En aquest cas s'observa que, al contrari que el cas anterior, a menor preu d'exercici, menor probabilitat de benefici. Tenint en compte la mateixa condició que s'ha mencionat anteriorment, s'obté que la menor probabilitat de benefici que es pot obtenir variant E_C és d'un 79,75%. A més a més, s'observa que amb un preu d'exercici de 3,50€ la prima de la *put* calculada en el capítol anterior coincidiria amb la prima de la *call*. Així, existiria la mateixa probabilitat de benefici en cas que E_P sigui 2,80€ i E_C sigui 3,50€. No obstant, com que existeix una baixa probabilitat de que ambdues primes coincideixin i els preus d'exercici siguin tan diferents entre sí, es considera que el cas proposat en aquest anàlisi s'adequa més a la realitat.

CONCLUSIONS

La principal motivació d'aquest document consisteix en l'anàlisi, desenvolupament i aplicació pràctica de l'estratègia especulativa de tipus *Collar* emprant opcions financeres. La finalitat d'aquest estudi consisteix en obtenir simulacions d'escenaris d'inversió amb aquesta estratègia i determinar la probabilitat de beneficis de cada escenari. Per a l'aplicació pràctica d'aquest treball s'ha pres dades reals de l'actiu subjacent el Banc Santander assumint que segueix un Model Log-Normal que es resol gràcies al procés estocàstic Moviment Brownià Geomètric.

Amb l'objectiu d'aplicar aquesta estratègia especulativa de tipus *Collar* en els escenaris d'inversió s'han revisat els diversos aspectes teòrics fonamentals. Aquests inclouen els aspectes teòrics de les opcions de compra i de venda, la formació d'estratègies inversores sintètiques de tipus *Collar*, el procés de resolució d'equacions diferencials estocàstiques de tipus Itô aplicant el Lema d' Itô, tècniques de simulació i d'estimació de paràmetres a partir de dades històriques com són les cotitzacions de l'actiu subjacent, la introducció de la fórmula de Black-Scholes-Merton per al càlcul del preu de les primes de les opcions de compra i venda de tipus europeu. Així mateix, s'han posat en pràctica aquests fonaments teòrics mitjançant les cotitzacions històriques d'una acció del Banc Santander. Aquesta s'ha pres com l'actiu subjacent amb la finalitat de formar carteres d'inversió de tipus *Collar* que puguin proporcionar beneficis amb una variable prefixada i s'han exposat diferents escenaris que podrien donar-se en la realitat. D'aquesta manera es prova que aquest treball d'investigació ha aconseguit els objectius establerts a l'inici i pot tindre aplicacions en el món real.

El motiu pel qual s'ha seleccionat el Banc Santander com a empresa objectiu és perquè es tracta del banc millor posicionat de l'IBEX-35, a més de la seua internacionalització sent un banc d'origen espanyol.

Cal destacar que, per al treball realitzat en aquest document, ha sigut necessari ampliar els coneixements adquirits en el Màster de Direcció Financera i Fiscal. Les assignatures que guarden una major relació amb el aquest projecte són: Modelització

i Valoració d'Opcions Financeres, Finances Quantitatives, Banca i Operacions Financeres, i Mercats Financers i Valoració d'Empreses.

Personalment, aquest treball ha suposat un gran aprenentatge personal que m'ha permès assentar i ampliar els conceptes apresos en les assignatures mencionades anteriorment al aplicar-los a la realitat de manera conjunta. Així, he sigut capaç de combinar els coneixements que tinc sobre models bàsics, com ho és el Model Log-Normal, amb processos dinàmics, com els processos estocàstics que conformen el Moviment Brownià, i amb simulacions de cartes de derivats financers i creació de productes sintètics d'inversió.

Així i tot, cal reconèixer que existeixen certes limitacions relacionades amb el projecte. Una d'aquestes limitacions és que tot aquest estudi es realitza amb una visió a curt termini, però en la realitat aquest tipus d'estratègies s'apliquen a llarg termini. S'ha utilitzat aquest enfocament per a facilitar tant la comprensió com l'explicació dels diferents conceptes i càlculs. No obstant, els resultats obtinguts poden ser d'utilitat per ampliar la investigació a unes condicions més ajustades a la realitat del mercat. A més a més, cal destacar que aquest estudi no és exclusiu per a l'estratègia analitzada, si no que es pot ampliar el plantejament per a poder aplicar els seus fruits a altres productes sintètics diferents. En resum, aquest projecte pot contribuir a assolir les bases per a diversos camins d'aprofundiment que pot resultar de gran interès en el camp financer.

BIBLIOGRAFIA

- Arias, A. S. (08 / enero / 2015). *Diferencia entre opciones y warrants*. Consultat el 18 / enero / 2022, a Economipedia.com: [https://economipedia.com/definiciones/diferencia-entre-opciones-y-warrants.html#:~:text=La%20principal%20diferencia%20entre%20las,OTC%20\(over%20the%20counter\)](https://economipedia.com/definiciones/diferencia-entre-opciones-y-warrants.html#:~:text=La%20principal%20diferencia%20entre%20las,OTC%20(over%20the%20counter))
- Bolsas y Mercados Españoles. (10 / agosto / 2022). *Dividendos del Santander*. Recollit de Infobolsa: <https://www.infobolsa.es/cotizacion/dividendos-santander>
- Bolsas y Mercados Españoles. (27 / Octubre / 2022). IBEX 35. *Septiembre 2022*. (B. M. Data, Ed.) Recollit de https://www.bolsamadrid.es/docs/SBolsas/InformesSB/FS-Ibex35_ESP.pdf
- Centro de formación de Bolsas y Mercados españoles. (18 / enero / 2022). *Opción sobre acción*. Recollit de Instituto BME: [https://economipedia.com/definiciones/diferencia-entre-opciones-y-warrants.html#:~:text=La%20principal%20diferencia%20entre%20las,OTC%20\(over%20the%20counter\)](https://economipedia.com/definiciones/diferencia-entre-opciones-y-warrants.html#:~:text=La%20principal%20diferencia%20entre%20las,OTC%20(over%20the%20counter))
- Chittorgarh. (08 / junio / 2022). *Collar Vs Bull Call Spread Options Trading Strategy*. Recollit de Chittorgarh: <https://www.chittorgarh.com/compare-options-trading-strategies/collar-vs-bull-call-spread/8/9/>
- Comisión Nacional del Mercado de Valores. (14 / enero / 2022). *Productos derivados*. Recollit de CNMV: <https://www.cnmv.es/portal/Inversor/Derivados.aspx>
- Instituto de Estudios Bursátiles. (07 / marzo / 2019). *Diccionario financiero: ¿qué son las opciones exóticas?* Consultat el 15 / enero / 2022, a IEB: <https://www.ieb.es/diccionario-financiero-que-son-las-opciones-exoticas/>
- MEFF. (14 / enero / 2022). *La compañía*. Recollit de MEFF: <https://www.meff.es/esp/Sobre-Nosotros/Empresa-MEFF>

Morales, V. V. (08 / marzo / 2012). *Apalancamiento financiero*. Consultat el 14 / enero / 2022, a Economipedia.com: <https://economipedia.com/definiciones/apalancamiento-financiero.html>

Morente, B. C. (2019). *El modelo estocástico Log-Normal con parámetros variables. Aplicación a la modelización del subyacente cotizado "Ferrovial"*. Trabajo Final de Máster, Universidad Politécnica de Valencia. Consultat el 07 / julio / 2022, a El modelo estocástico Log-Normal con parámetros variables. Aplicación a la modelización del subyacente cotizado "Ferrovial": <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/167159/Casas%20-%20El%20modelo%20estoc%C3%A1stico%20Log-Normal%20con%20par%C3%A1metros%20variables.%20Aplcac%C3%B3n%20a%20la%20modelizac%C3%B3n%20del%20sub...pdf?sequence=1>

Navarro, C. M. (2008). *Aplicación del modelo Log-normal al activo BS del Banco Sabadell*. Universidad Politécnica de Valencia, Facultad de Administración y Dirección de Empresas. Consultat el 07 / julio / 2022

Parody Camargo, E., Charris Fontanilla, A., & García Luna, R. (junio / 2016). *Modelo Log-Normal para predicción del precio de las acciones del sector bancario*. Consultat el 06 / julio / 2022, a Dimensión Empresarial.

SHARKOPCIONES. (2 / enero / 2023). Collar Trade Dinámica. Recollit de <https://sharkopciones.com/collar-trade-dinamica/>



ANEXO I. RELACIÓN DEL TRABAJO CON LOS OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE DE LA AGENDA 2030

Anexo al Trabajo de Fin de Grado y Trabajo de Fin de Máster: Relación del trabajo con los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la agenda 2030.

Grado de relación del trabajo con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS).

Objetivos de Desarrollo Sostenibles	Alto	Medio	Bajo	No Procede
ODS 1. Fin de la pobreza.				
ODS 2. Hambre cero.				
ODS 3. Salud y bienestar.				
ODS 4. Educación de calidad.				
ODS 5. Igualdad de género.				
ODS 6. Agua limpia y saneamiento.				
ODS 7. Energía asequible y no contaminante.				
ODS 8. Trabajo decente y crecimiento económico.				
ODS 9. Industria, innovación e infraestructuras.				
ODS 10. Reducción de las desigualdades.				
ODS 11. Ciudades y comunidades sostenibles.				
ODS 12. Producción y consumo responsables.				
ODS 13. Acción por el clima.				
ODS 14. Vida submarina.				
ODS 15. Vida de ecosistemas terrestres.				
ODS 16. Paz, justicia e instituciones sólidas.				
ODS 17. Alianzas para lograr objetivos.				

Descripción de la alineación del TFG/TFM con los ODS con un grado de relación más alto.

***Utilice tantas páginas como sea necesario.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

ADE

Facultat d'Administració
i Direcció d'Empreses /UPV

**Anexo al Trabajo de Fin de Grado y Trabajo de Fin de Máster: Relación del trabajo con los
Objetivos de Desarrollo Sostenible de la agenda 2030.** (Numere la pàgina)