

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TRABAJO FIN DE MASTER

MEJORA DEL MODELO DE INTERACCIÓN DINÁMICA PANTÓGRAFO-CATENARIA.

Presentada por: D. Javier Gómez Monterde

Dirigida por: Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández
Dr. D. Manuel Tur Valiente

Valencia, Julio de 2013



Resumen.

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo principal el desarrollo de un modelo de simulación de la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria en líneas de alta velocidad mediante el método de los elementos finitos.

La formulación de nuevos elementos se ha llevado a cabo considerando la metodología para el cálculo de la configuración inicial de la catenaria y su posterior análisis del comportamiento dinámico en servicio desarrollada en el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la Universitat Politècnica de València. El trabajo desarrollado complementa pues al anteriormente citado para representar efectos estáticos y dinámicos más realistas debidos a diversos elementos presentes en el sistema que forma la catenaria.

En primer lugar, se ha modificado la formulación del elemento tipo cable, empleado para modelar el cable sustentador y de contacto, con el fin de considerar la no continuidad producida cuando éste se conecta con otros elementos. Por otro lado, se ha representado el soporte del cable sustentador y el sistema de compensación mecánica mediante un conjunto de resortes, amortiguadores y masas equivalentes.

A continuación, se han desarrollado modelos de pantógrafos con grados de libertad adicionales que consideran la rotación de algunos componentes. Asimismo, se ha implementado una metodología para la simulación de la interacción entre la catenaria y más de un pantógrafo.

Por último, el código implementado se ha utilizado para comparar los resultados obtenidos en la simulación de una catenaria de referencia definida por un conjunto internacional de grupos de investigación, entre los que se encuentra el Centro de Investigación de Tecnología de Vehículos de la Universitat Politècnica de València.

Palabras clave: Elementos finitos, catenaria, pantógrafo, contacto, interacción dinámica.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





Abstract.

The main objective of this Master's Thesis is the development of a dynamical interaction simulation model between pantograph and catenary in high speed lines by means of the finite element method.

The formulation of new elements has been carried out considering the existing methodology for calculating the initial configuration of the catenary and analyzing the dynamical performance in service, developed by the Department of Mechanical Engineering and Materials at the Universitat Politècnica de València. This work complements the aforementioned in order to consider more realistic static and dynamic effects due to other elements contained in the catenary system.

Firstly, the formulation of the element used to model the messenger and contact wires has been modified so as to take into account lacks of continuity because of connections with other elements. On the other hand, the messenger wire suspension and the tensioning system have been modeled by means of springs, dampers and equivalent masses.

Secondly, new pantographs models have been developed, including degrees of freedom of rotation of some components. Moreover, a catenary-several pantographs interaction simulating method has been programmed, on the basis of a rising distance of the pantographs to the height of the contact wire.

Finally, the code developed in this project has been used in order to compare results obtained in a reference catenary simulation defined by an international group of research institutions, like the Vehicle Technology Research Centre of the Universitat Politècnica de València.

Key words: Finite elements, catenary, pantograph, contact, dynamic interaction.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





Resum.

El present Treball Fi de Màster té com a objectiu principal el desenvolupament d'un model de simulació de la interacció dinàmica entre pantògraf i catenària en línies d'alta velocitat mitjançant el mètode dels elements finits.

La formulació de nous elements s'ha dut a terme considerant la metodologia per al càlcul de la configuració inicial de la catenària i el seu posterior anàlisi del comportament dinàmic en servei desenvolupat al Departament d'Enginyeria Mecànica i Materials de la Universitat Politècnica de València. El treball desenvolupat complementa a l'anteriorment esmentat per a representar efectes estàtics i dinàmics més realistes deguts a diversos elements presents al sistema que forma la catenària.

Per una part, s'ha modificat la formulació de l'element tipus cable, emprat per a modelar el cable sustentador i de contacte, per a considerar la no continuïtat produïda quan aquest es connecta amb altres elements. Per altre costat, s'ha representat el suport del cable sustentador i el sistema de compensació mecànica mitjançant un conjunt de ressorts, amortidors i masses equivalents.

A continuació, s'han desenvolupat models de pantògrafs amb graus de llibertat que consideren la rotació d'alguns components. Així mateix, s'ha implementat una metodologia per a la simulació de la interacció entre la catenària i més d'un pantògraf.

Per últim, el codi obtingut s'ha utilitzat per a comparar els resultats obtinguts en la simulació d'una catenària de referència definida per un conjunt internacional de grups d'investigació, entre els quals es troba el Centre d'Investigació de Tecnologia de Vehícles de la Universitat Politècnica de València.

Paraules clau: Elements finits, catenària, pantògraf, contacte, interacció dinàmica.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





AGRADECIMIENTOS

Me gustaría dedicar unas líneas de agradecimiento a todas aquellas personas que de un modo u otro han intervenido en la realización del presente Trabajo Fin de Máster.

En primer lugar quiero agradecer a los profesores D. Francisco Javier Fuenmayor Fernández y D. Manuel Tur Valiente, directores del Trabajo, la oportunidad de participar en este proyecto y su interés, dedicación y compromiso durante este período. Quisiera extender este agradecimiento a todo el personal del Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, por su gran labor docente e investigadora.

A mis padres y hermanos, por sus consejos y ayuda siempre que los he necesitado, y por sus ánimos en los momentos más difíciles.

Y finalmente, a Cristina Torre, por su apoyo moral e incondicional que no ha dudado en ofrecerme en todo momento.

A todos ellos, muchas gracias.

Valencia, Julio de 2013.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





ÍNDICE GENERAL

<i>Resumen</i>	<i>i</i>
<i>Abstract</i>	<i>iii</i>
<i>Resum</i>	<i>v</i>
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. <i>OBJETO DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER</i>	2
1.2. <i>MOTIVACIÓN</i>	3
2. ANTECEDENTES	5
2.1. <i>INTRODUCCIÓN</i>	5
2.2. <i>DESCRIPCIÓN DEL MODELO</i>	6
2.2.1. Elemento cable.....	7
2.2.2. Elemento barra.....	12
2.3. <i>PROBLEMA ESTÁTICO</i>	15
2.4. <i>PROBLEMA DE CONFIGURACIÓN INICIAL</i>	16
2.4.1. Consideración de restricciones en el problema elástico...	17
2.4.2. Cálculo óptimo de la posición del cable de contacto.....	21
2.5. <i>MODELOS BÁSICOS DE PANTÓGRAFO</i>	26
3. INCORPORACIÓN DE NUEVOS ELEMENTOS AL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE LA CATENARIA	29
3.1. <i>ELEMENTO CABLE MODIFICADO</i>	29
3.1.1. Vector de fuerzas elásticas.....	31
3.1.2. Matriz tangente.....	32
3.1.3. Eliminación del grado de libertad interno.....	33



3.2. ELEMENTO SUSPENSIÓN EN CABLE SUSTENTADOR.....	34
3.2.1. Matriz de rigidez. Fuerzas elásticas.....	35
3.2.2. Matriz de amortiguamiento. Fuerzas disipativas.....	35
3.3. ELEMENTO MASA DE COMPENSACIÓN.....	36
3.3.1. Fuerzas elásticas.....	38
3.3.2. Guiado del cable.....	39
3.3.3. Matriz de masa.....	41
4. MODELOS DE PANTÓGRAFO CON GRADOS DE LIBERTAD ADICIONALES.....	43
4.1. MODELO LINEALIZADO DEL PANTÓGRAFO.....	47
5. INTERACCIÓN. MODELO DE CONTACTO.....	51
5.1. MODELO DE INTERACCIÓN. MÉTODO DE PENALTI.....	51
6. MÚLTIPLES PANTÓGRAFOS.....	57
7. INTEGRACIÓN NUMÉRICA.....	61
7.1. MODELO DE AMORTIGUAMIENTO.....	61
7.2. MODELOS DINÁMICOS DEL SISTEMA.....	62
7.3. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.....	64
7.3.1. Método de Newmark.....	66
7.3.2. Método HHT.....	68
8. ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LOS DIFERENTES MODELOS.....	69
8.1. INFLUENCIA DEL ELEMENTO CABLE MODIFICADO.....	69



8.1.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo AVE.	69
8.1.2. Modelo de pantógrafo.	71
8.1.3. Aplicación del elemento cable modificado.	72
8.2. INFLUENCIA DEL ELEMENTO SUSPENSIÓN EN CABLE SUSTENTADOR.	74
8.2.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo AVE.	74
8.2.2. Modelo de pantógrafo.	74
8.2.3. Aplicación del elemento suspensión en cable sustentador.	74
8.3. INFLUENCIA DEL ELEMENTO MASA DE COMPENSACIÓN. ...	76
8.3.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo Norma EN 50318.	76
8.3.2. Modelo de pantógrafo.	78
8.3.3. Aplicación del elemento masa de compensación.	79
8.4. APLICACIÓN DEL MODELO DE PANTÓGRAFO CON 7 GRADOS DE LIBERTAD.	80
8.4.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo Norma EN 50318.	80
8.4.2. Modelo de pantógrafo.	80
8.4.3. Comparación de resultados entre los distintos modelos de pantógrafos.	81
8.5. APLICACIÓN DE MÚLTIPLES PANTÓGRAFOS.	85
8.5.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo Norma EN 50318 extendida.	85
8.5.2. Modelo de pantógrafo.	86
8.5.3. Resultados.	86
9. APLICACIÓN DEL PROGRAMA. CATENARIA DE REFERENCIA.	89



9.1. INTRODUCCIÓN.....	89
9.2. DATOS DE LA CATENARIA Y PANTÓGRAFO Y CASOS DE SIMULACIÓN.....	90
9.2.1. Datos de la catenaria.	91
9.2.2. Datos del pantógrafo.	97
9.2.3. Casos de simulación.....	97
9.3. RESULTADOS.....	99
9.3.1. Caso 1. Configuración estática no-lineal de la catenaria en 3D.....	99
9.3.2. Caso 2. Interacción dinámica de la catenaria con un pantógrafo en 2D.....	101
9.3.3. Caso 3. Interacción dinámica de la catenaria con un pantógrafo en 3D.....	105
9.3.4. Caso 4. Interacción dinámica de la catenaria con múltiples pantógrafos en 2D.	107
9.4. COMPARATIVA CON OTROS GRUPOS DE INVESTIGACIÓN.	110
9.5. CONCLUSIONES.....	118
10.CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS.....	121
10.1. CONCLUSIONES.	121
10.2. DESARROLLOS FUTUROS.....	122
11.REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	123



1. INTRODUCCIÓN.

A medida que aumenta la velocidad comercial de los trenes, en un escenario mundial de altos costes de la energía, la captación eficiente de la misma por el pantógrafo se vuelve un aspecto crítico.

La línea aérea de contacto o *catenaria* ha sido el sistema seleccionado para las instalaciones de alta velocidad, debido a su capacidad de adaptarse a las elevadas exigencias y grandes voltajes requeridos. En contacto con la catenaria, un colector o *pantógrafo* perteneciente al vehículo ferroviario se alimenta de flujo energético y pone en funcionamiento los motores eléctricos de tracción. Para el correcto funcionamiento de la línea, es condición necesaria que la transmisión de corriente se realice de manera ininterrumpida y que el empuje del pantógrafo sobre la catenaria sea mínimo, con el fin de que el desgaste de las pletinas de rozamiento y del cable de contacto sea reducido y uniforme.

No obstante, el cumplimiento simultáneo de todas estas restricciones no siempre es posible. El desgaste mínimo de las partes interactuantes se consigue con una fuerza de contacto también mínima, pero las acciones dinámicas del pantógrafo pueden provocar que la deformación y oscilación en la catenaria sea de tal magnitud que se produzcan despegues, siendo por tanto discontinuo el contacto entre ambas partes.

Las pérdidas de contacto provocan que el suministro de energía eléctrica sea interrumpido, limitando las velocidades máximas de operación. Además, los despegues generan arcos eléctricos, deteriorando los elementos en contacto, impactos o enganches que pueden producir daños de coste muy elevado. Es decir, las necesidades de elevar la velocidad de circulación y las prestaciones de servicio se verán influenciadas por estos comportamientos, siendo indispensable disponer de medios que permitan simular y predecir el funcionamiento del sistema, así como garantizar el correcto guiado y un contacto permanente, de modo que el proceso de alimentación eléctrica tenga lugar de forma continua.



Normas europeas para la validación de los procedimientos de simulación (UNE-EN 50318 [1]) y proyectos europeos como EUROPAC (European Optimised Pantograph-Catenary Interface) ponen de manifiesto la importancia de la problemática del contacto entre pantógrafo y catenaria.

En el presente Trabajo Fin de Máster se desarrolla una herramienta para generar la geometría de la catenaria y el pantógrafo empleando el método de los elementos finitos, y simular a continuación la interacción dinámica entre ellos, con el fin de estudiar y analizar los complejos fenómenos que tienen lugar evitando los costes asociados a pruebas o ensayos reales en trenes de servicio.

1.1. OBJETO DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER.

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objeto general la introducción de nuevos elementos para complementar el modelo de simulación de la interacción dinámica pantógrafo-catenaria desarrollado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la Universitat Politècnica de València. El modelo emplea el método de elementos finitos y se encuentra implementado por completo en MATLAB.

Con este fin, se establecen los siguientes objetivos parciales:

- Incorporación de nuevos elementos al modelo de elementos finitos de la catenaria que permitan simular los efectos del salto de tracción en cables, los sistemas de compensación mecánica y la suspensión en el soporte de la ménsula del cable sustentador. Análisis de la influencia de cada uno de estos elementos desde el punto de vista de la posición estática o del comportamiento dinámico del sistema.
- Definición de modelos de pantógrafos con un mayor número de grados de libertad y puntos de contacto, y comparación de los resultados con los modelos de dos y tres masas empleados normalmente.



- Adaptación del modelo de interacción (método de penalti) para modelos de pantógrafos con diferentes grados de libertad.
- Modificación del procedimiento de integración numérica para la simulación de la interacción entre catenaria y más de un pantógrafo.
- Empleo del software obtenido para simular el comportamiento de una catenaria de referencia definida por un conjunto internacional de grupos de investigación, entre los que se encuentra el Centro de Investigación de Tecnología de Vehículos de la Universitat Politècnica de València. La finalidad de este procedimiento es comparar los resultados de simulación que cada grupo obtenga utilizando su propio código y validar el procedimiento de simulación.

1.2. MOTIVACIÓN.

El desarrollo de este Trabajo Fin de Máster está motivado por diversas razones, siendo las más importantes las que se enumeran a continuación:

- Aplicación, refuerzo y ampliación de los conocimientos adquiridos en diversos campos de la ingeniería mecánica (método de los elementos finitos, vibraciones y propagación de ondas, dinámica de sólidos elásticos...).
- Participación en un proyecto de investigación sobre un tema de aplicación industrial, como es el estudio de catenarias ferroviarias.
- Implementación de una herramienta de simulación mediante un código de programación en MATLAB.
- Comparación de los resultados obtenidos con los de otros equipos de investigación dedicados al estudio de la misma problemática, aplicando el software desarrollado en el presente trabajo a una catenaria de referencia.
- Obtención del título de Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales tras la finalización de los estudios de posgrado.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





2. ANTECEDENTES.

En el presente capítulo se presenta el modelo de elementos finitos de la catenaria basado en coordenadas nodales absolutas y la simulación de la interacción con el pantógrafo elaborado por V. Vidal, H. Mora, M.Tur y F.J. Fuenmayor ([4] y [5]) en el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la Universitat Politècnica de València.

En [4] se plantean dos metodologías para resolver el problema de configuración de equilibrio inicial de la catenaria sometida a su propio peso y sujeta a una serie de restricciones de diseño. En la formulación del problema se emplean dos tipos de elementos, cable y barra, en coordenadas absolutas y considerando grandes desplazamientos.

En [5] se aborda el contacto entre pantógrafo y catenaria y se desarrollan métodos de integración numérica para simular la interacción, considerando las distintas no-linealidades que presenta el sistema, tales como la unilateralidad del contacto o la imposibilidad de las péndolas de trabajar a compresión.

2.1. INTRODUCCIÓN.

El sistema de cables que componen la catenaria está formado, por lo general, por un cable sustentador, un cable de contacto que cuelga de éste y que es el encargado de transmitir la energía eléctrica al vehículo, y péndolas y cables Y, que se encargan de sujetar este último al sustentador y de dotar al sistema de una mayor flexibilidad. Los elementos estructurales, como los postes, las ménsulas y brazos de registro, tienen como finalidad soportar la línea de contacto aéreo a una altura determinada, y producir un trazado zigzagueante del cable de contacto que origine un desgaste uniforme en las pletinas del pantógrafo. Todo el sistema de cables que forma la catenaria ferroviaria se encuentra tensionado mediante un sistema de compensación mecánica, de modo que se puede controlar la flecha que se produce en los cables de contacto y sustentador.

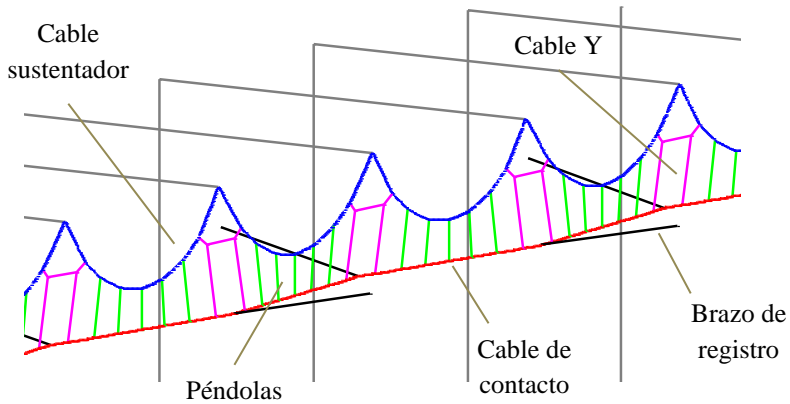


Figura 2.1. Modelo de catenaria.

La estructura que presenta la catenaria es compleja y no lineal, en la que la deformación del sistema debe ser considerada para el análisis de las fuerzas que intervienen. Por esta razón, no es posible realizar la hipótesis de pequeños desplazamientos para la obtención de la posición de equilibrio estático de la misma.

La formulación del problema se ha realizado en coordenadas nodales absolutas, utilizando como grados de libertad la posición absoluta de los nodos (no los desplazamientos) y las derivadas de estas variables con respecto a las coordenadas locales.

2.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO.

Se considera que el trazado de la catenaria se encuentra contenido en un plano horizontal, admitiendo la definición del trazado mediante la ecuación paramétrica correspondiente al eje de la vía (en un plano horizontal). Aunque el trazado corresponda con una recta, la catenaria real es tridimensional, debido al escalonamiento del cable de contacto producido por los brazos de registro.



El modelado de la catenaria se realiza básicamente mediante dos tipos de elementos: cable y barra. El primero de ellos admite deformaciones longitudinales y de flexión, y se emplea para modelar el cable sustentador y el de contacto, donde debido a la alta tensión mecánica la propagación de ondas de flexión puede ser importante. Los elementos tipo barra sólo admiten deformaciones longitudinales, y se utilizan para modelar las péndolas y los tirantes que generan el escalonado. Adicionalmente se pueden incorporar elementos de características puntuales que simulan la masa de elementos de unión como grifas, que en el caso estático solo influyen aportando fuerzas gravitacionales en los nodos en los que se encuentran estos elementos.

2.2.1. Elemento cable.

2.2.1.1. Interpolación. Funciones de forma.

En problemas de flexión, la deformación generalizada correspondiente depende (aunque sea en primera aproximación) de primeras derivadas de las coordenadas absolutas. De esta forma, es necesario utilizar interpolaciones de elementos finitos que preserven la continuidad C^1 entre elementos.

Como se ha indicado anteriormente, en el planteamiento del problema se utilizan como grados de libertad del problema (variables nodales) la posición absoluta y sus derivadas, en lugar de utilizar los desplazamientos y giros relativos. De esta manera se pueden considerar los elementos tipo viga como isoparamétricos en el caso que se presenta de grandes deformaciones.

Cada elemento finito queda definido pues por las coordenadas y las pendientes absolutas de sus nodos (extremos del elemento), por lo que cada nodo presenta 6 grados de libertad en el caso tridimensional, teniéndose un total de 12 grados de libertad por elemento.

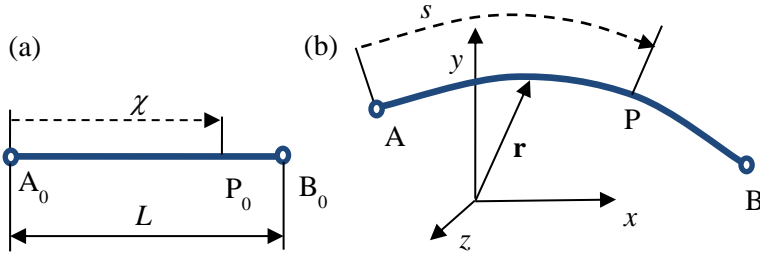


Figura 2.2. (a) Elemento no deformado. (b) Elemento deformado.

Considérese un elemento definido por sus dos nodos i y j (ver Figura 2.2). En el elemento no deformado se define la coordenada χ , que varía entre 0 y L (longitud del elemento no deformado). El vector que define los grados de libertad nodales del elemento es:

$$\mathbf{q} = [q_{i1} \ q_{i2} \ q_{i3} \ q_{i4} \ q_{i5} \ q_{i6} \ q_{j1} \ q_{j2} \ q_{j3} \ q_{j4} \ q_{j5} \ q_{j6}]^T \quad (2.1)$$

$$\mathbf{q} = \left[x_i \ y_i \ z_i \ \frac{dx_i}{d\chi} \ \frac{dy_i}{d\chi} \ \frac{dz_i}{d\chi} \ x_j \ y_j \ z_j \ \frac{dx_j}{d\chi} \ \frac{dy_j}{d\chi} \ \frac{dz_j}{d\chi} \right]^T \quad (2.2)$$

Sea \mathbf{r} el vector de posición del punto P , \mathbf{q} el vector de grados de libertad y \mathbf{S} la matriz de funciones de forma del elemento. La interpolación del elemento está definida por:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{q} \quad (2.3)$$

Siendo la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Considerando las condiciones necesarias de continuidad en la interpolación, se obtienen las siguientes funciones de forma:

$$\begin{aligned}
 S_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\
 S_2(\xi) &= L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\
 S_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\
 S_4(\xi) &= L(\xi^3 - \xi^2)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

En estas ecuaciones se ha utilizado la coordenada local normalizada $\xi = \frac{\chi}{L} \in [0, 1]$, siendo L la longitud no deformada del elemento.

2.2.1.2. Matrices de rigidez. Fuerzas elásticas.

La obtención de las matrices de rigidez de este elemento se basa en el cálculo de las energías de deformación asociadas a las deformaciones longitudinales y de flexión. El desarrollo completo puede encontrarse en [4].

El vector de fuerzas elásticas en el elemento debido a la deformación longitudinal (ε_L) se puede escribir como:

$$\mathbf{F}_{L,el} = \left(\int_0^L EA \varepsilon_L \mathbf{S}_L d\chi \right) \mathbf{q} = \mathbf{K}_L \mathbf{q} \tag{2.6}$$

Por lo que la matriz de rigidez asociada a estas deformaciones es:

$$\mathbf{K}_L = EA \begin{bmatrix}
 \mathcal{A} & o & o & \mathcal{B} & o & o & -\mathcal{A} & o & o & \mathcal{C} & o & o \\
 & \mathcal{A} & o & o & \mathcal{B} & o & o & -\mathcal{A} & o & o & \mathcal{C} & o \\
 & & \mathcal{A} & o & o & \mathcal{B} & o & o & -\mathcal{A} & o & o & \mathcal{C} \\
 & & & \mathcal{D} & o & o & -\mathcal{B} & o & o & \mathcal{E} & o & o \\
 & & & & \mathcal{D} & o & o & -\mathcal{B} & o & o & \mathcal{E} & o \\
 & & & & & \mathcal{D} & o & o & -\mathcal{B} & o & o & \mathcal{E} \\
 & & & & & & \mathcal{A} & o & o & -\mathcal{C} & o & o \\
 & & & & & & & \mathcal{A} & o & o & -\mathcal{C} & o \\
 & & & sim & & & & & \mathcal{A} & o & o & -\mathcal{C} \\
 & & & & & & & & & \mathcal{F} & o & o \\
 & & & & & & & & & & \mathcal{F} & o \\
 & & & & & & & & & & & \mathcal{F}
 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$



En la que los valores de las constantes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E} y \mathcal{F} son función de las coordenadas nodales (no lineal) y de la longitud inicial del elemento.

La matriz de rigidez asociada a las deformaciones de flexión se obtiene mediante un planteamiento similar y en este caso es constante, es decir, independiente de las coordenadas nodales:

$$\mathbf{K}_F = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 \\ 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 12 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 \\ & & & & & & 12 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4L^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4L^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

La matriz de rigidez total del elemento se obtiene a partir de la suma de las dos anteriores:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_F \quad (2.9)$$

De este modo, el vector de fuerzas elásticas del elemento cable se puede calcular como:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{K}\mathbf{q} \quad (2.10)$$

2.2.1.3. Fuerzas gravitatorias.

Las fuerzas gravitacionales dependen exclusivamente de la sección transversal y la densidad ρ correspondiente del cable. El vector de fuerzas gravitacionales asociado a un elemento se expresa del siguiente modo:



$$\mathbf{F}_g = \int_0^L \mathbf{S}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g\rho A \end{Bmatrix} d\chi = \frac{-g\rho AL}{12} (0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 16L \ 0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ -16L)^T \quad (2.11)$$

Utilizando este tipo de planteamiento, el vector de fuerzas gravitacionales asociado al elemento es constante (no depende de las coordenadas nodales).

2.2.1.4. Matriz de masa.

Para un elemento finito, la energía cinética asociada puede definirse como:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.12)$$

La matriz de masa asociada al elemento cable es, por lo tanto:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV = \rho AL \int_0^1 \mathbf{S}^T \mathbf{S} d\chi \quad (2.13)$$

Siendo ρ la densidad, A el área de la sección transversal (supuestas constantes) y L la longitud no deformada del elemento. Realizando la integral, se obtiene:

$$\mathbf{M} = \rho A L \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & 0 \\ & \frac{13}{35} & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 \\ & & \frac{13}{35} & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} \\ & & & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 \\ & & & & & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} \\ & & & & & & \frac{13}{35} & 0 & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{13}{35} & 0 & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 \\ & & & & & & & & \frac{13}{35} & 0 & 0 & -\frac{11L}{210} \\ & & & & & & & & & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{L^2}{105} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La matriz de masa de este tipo de elementos es constante, es decir, no depende de la deformación del mismo.

2.2.2. Elemento barra.

2.2.2.1. Interpolación. Funciones de forma.

En la catenaria existen diferentes elementos cuya rigidez a flexión puede considerarse despreciable, como por ejemplo las péndolas, los componentes del cable Y o el brazo de tirante.

Como no se considera el comportamiento a flexión en este tipo de elementos, las coordenadas nodales corresponden únicamente a la posición de los nodos:

$$\mathbf{q} = [q_{i1} \quad q_{i2} \quad q_{i3} \quad q_{j1} \quad q_{j2} \quad q_{j3}]^T = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad x_j \quad y_j \quad z_j]^T \quad (2.15)$$

En este caso, la deformación es únicamente longitudinal y se supone una interpolación lineal en el elemento, de forma que el vector de posición de un punto P , arbitrario, está definida por:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_b \mathbf{q} \quad (2.16)$$

Siendo \mathbf{S}_b la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} S_{b1} & 0 & 0 & S_{b2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{b1} & 0 & 0 & S_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & S_{b1} & 0 & 0 & S_{b2} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Con:

$$\begin{aligned} S_{b1}(\xi) &= 1 - \xi \\ S_{b2}(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (2.18)$$

En estas ecuaciones se ha empleado la coordenada local normalizada $\xi = \frac{x}{L} \in [0, 1]$, siendo L la longitud no deformada del elemento.

2.2.2.2. Matriz de rigidez. Fuerzas elásticas.

A partir de la definición de la interpolación en el elemento es sencillo obtener la expresión del vector de fuerzas elásticas. Al igual que en el elemento cable, se puede expresar este vector como:

$$\mathbf{F}_{Lel} = \mathbf{K}_L \mathbf{q} \quad (2.19)$$

La matriz de rigidez \mathbf{K}_L del elemento tipo barra resulta en este caso:

$$\mathbf{K}_L = \mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Siendo:

$$\mathcal{A} = \frac{EA}{L^3} [L_{def}^2 - L^2] \quad (2.21)$$

$$L_{def} = \sqrt{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2}$$

2.2.2.3. Fuerzas gravitatorias.

Con la formulación planteada, las fuerzas gravitatorias en el elemento son:

$$\mathbf{F}_g = -\frac{\rho g A L}{2} (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)^T \quad (2.22)$$

2.2.2.4. Matriz de masa.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso del elemento cable, la matriz de masa del elemento barra puede calcularse como:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{S}_b^T \mathbf{S}_b dV = \rho A L \int_0^1 \mathbf{S}_b^T \mathbf{S}_b d\chi \quad (2.23)$$

Siendo ρ la densidad, A el área de sección transversal y L la longitud no deformada del elemento. Realizando la integral, se obtiene una matriz de masa constante:



$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} \rho AL \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

2.3. PROBLEMA ESTÁTICO.

Las ecuaciones de comportamiento del sistema, correspondientes al equilibrio de fuerzas, se definen mediante un procedimiento de ensamblado a partir de los vectores de fuerzas elásticas y gravitatorias de los diferentes elementos que componen la malla de elementos finitos de la catenaria. En estas ecuaciones, las fuerzas externas representan las fuerzas gravitacionales.

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_{el} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

En estas ecuaciones se deben considerar convenientemente las condiciones de apoyo de la catenaria, restringiendo para ello la posición de puntos (nodos de elementos finitos) de la misma. Cuando se considera trazado en curva, es necesario restringir la posición de ciertos nodos (soporte) en las coordenadas de vía y no en el sistema de coordenadas global.

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales resultante del problema planteado se ha utilizado el método iterativo de Newton-Raphson. Este método requiere la obtención de las derivadas del vector de fuerzas elásticas con respecto a las coordenadas (matriz tangente). Las fuerzas externas aplicadas son constantes, ya que las fuerzas gravitacionales no dependen de las coordenadas nodales.

Dada una aproximación $\mathbf{q}^{(i)}$ del vector de grados de libertad del problema en la iteración $^{(i)}$, si se considera el desarrollo en serie del vector de fuerzas totales, se tiene:



$$\mathbf{F}(\mathbf{q}^{(i+1)}) = \mathbf{F}(\mathbf{q}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \Big|^{(i)} \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} + \dots \quad (2.26)$$

Para cada tipo de elemento se define la matriz tangente \mathbf{K}_T como la derivada de las fuerzas elásticas con respecto a las coordenadas nodales:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.27)$$

Teniendo en cuenta únicamente el desarrollo hasta el término lineal y buscando la anulación del vector de fuerzas totales, se tiene:

$$\mathbf{K}_T^{(i)} \Delta \mathbf{q}^{(i)} = -\mathbf{F}(\mathbf{q}^{(i)}) \quad (2.28)$$

Que representa un sistema lineal de ecuaciones del que se obtiene el incremento del vector de grados de libertad del problema que permite definir una mejor solución.

$$\mathbf{q}^{(i+1)} = \mathbf{q}^{(i)} + \Delta \mathbf{q}^{(i)} \quad (2.29)$$

La iteración finaliza cuando se cumple la ecuación de equilibrio del sistema (2.25) según una cierta tolerancia.

La configuración deformada de la catenaria depende de la longitud no deformada de los elementos finitos que la componen, y aunque es posible hacer estimaciones razonables de estas longitudes, la solución obtenida no cumplirá los requisitos de configuración inicial de la catenaria.

2.4. PROBLEMA DE CONFIGURACIÓN INICIAL.

En problemas estructurales convencionales, la configuración de equilibrio estático es conocida a priori. Sin embargo, esto no ocurre en el caso de la catenaria, ya que la configuración de equilibrio depende de las longitudes de los elementos y de las tensiones de montaje. Las primeras, en concreto la longitud de las péndolas, se diseñan para posibilitar una correcta interacción



pantógrafo-catenaria, teniendo en cuenta las cargas que soporta inicialmente la catenaria (fuerzas gravitatorias y tensión impuesta en cables).

En [4] se desarrollan dos metodologías para la obtención de la configuración inicial de la catenaria. En primer lugar se plantea el problema, incorporando a las ecuaciones de equilibrio elástico un conjunto de restricciones que permiten imponer por una parte la tensión conocida en cables y por otra definir la posición que en el equilibrio estático tendrán ciertos nodos del sistema (coordenadas), de modo que se permita considerar la altura a la que se desea que permanezca el cable conductor en la posición de equilibrio, imponiendo el valor de las coordenadas asociadas a los nodos de unión con las péndolas.

La segunda alternativa consiste en considerar el problema de cálculo de longitudes como un problema de optimización. En este caso, se considera el problema de minimizar el error en la posición vertical del cable conductor con respecto a la posición deseada. Se consideran como restricciones las ecuaciones que definen el comportamiento elástico del sistema, restricciones en tensión de cables o en posición de nodos. De esta forma, se consigue definir el problema de una forma más general.

2.4.1. Consideración de restricciones en el problema elástico.

2.4.1.1. Planteamiento del problema.

El planteamiento se basa en considerar simultáneamente las ecuaciones de equilibrio estático del problema junto con un conjunto de ecuaciones de restricción, que representan condiciones que han de verificarse en la configuración de equilibrio. Se debe considerar que las ecuaciones de equilibrio dependen de las coordenadas nodales y de las longitudes de elementos que se desee calcular. Si el vector \mathbf{L} representa las longitudes de elementos, las ecuaciones de equilibrio se expresan como:



$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{F}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) - \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = 0 \quad (2.30)$$

Las ecuaciones de restricción representan condiciones que se desea imponer en la configuración de equilibrio. Este tipo de condiciones son, por ejemplo, la tensión impuesta en un cable o la posición de nodos de la catenaria. Teniendo en cuenta que estas restricciones dependen del valor de las coordenadas nodales y adicionalmente de las longitudes de los elementos que componen la catenaria, formalmente estas restricciones se representan por:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = 0 \quad (2.31)$$

El conjunto formado por las dos ecuaciones anteriores dan lugar a un sistema de ecuaciones resultante no lineal, y para su resolución se ha empleado nuevamente el algoritmo de Newton-Raphson. Considérese una estimación del problema, definida a partir del vector de coordenadas $\mathbf{q}^{(i)}$ y de longitudes $\mathbf{L}^{(i)}$ (asociada a la iteración número $^{(i)}$). Realizando un desarrollo de Taylor hasta el primer término de ambos conjuntos de ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(i+1)} &\approx \mathbf{F}^{(i)} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{(i)} \Delta \mathbf{q}^{(i)} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}} \right)^{(i)} \Delta \mathbf{L}^{(i)} \\ \mathbf{R}^{(i+1)} &\approx \mathbf{R}^{(i)} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{(i)} \Delta \mathbf{q}^{(i)} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{L}} \right)^{(i)} \Delta \mathbf{L}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

El problema se resuelve de forma análoga al proceso explicado en el apartado 2.3. La derivada de las fuerzas elásticas con respecto a las coordenadas nodales corresponde a la matriz tangente del problema elástico, definida en la ecuación (2.27). En cuanto a las derivadas de las fuerzas totales con respecto a la longitud de los elementos, pueden evaluarse fácilmente a nivel de cada elemento a partir de las ecuaciones obtenidas en el modelado de los mismos (fuerzas elásticas y gravitatorias, apartados 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.2.2 y 2.2.2.3).



$$\frac{\partial \mathbf{f}^e}{\partial L} = \frac{\partial \mathbf{f}_{el}^e}{\partial L} + \frac{\partial \mathbf{f}_{ex}^e}{\partial L} \quad (2.33)$$

Las expresiones de las derivadas de las restricciones se definen a continuación. De la resolución del sistema se obtiene, por una parte, las longitudes de elementos necesarias para obtener la configuración deseada, y por otra, la posición final de equilibrio del sistema.

2.4.1.2. Definición de restricciones.

Las restricciones a considerar son las asociadas a la posición de los nodos de elementos finitos y a la tensión de cables.

- Restricciones en posición de nodos.

Mediante este tipo de restricciones se busca imponer en el problema que ciertas coordenadas nodales estén predefinidas. Por ejemplo, esto permitirá calcular las longitudes de las péndolas para que la posición vertical de los nodos que representan el hilo conductor sea la deseada.

Una restricción en la coordenada nodal k , es simplemente:

$$R_k = q_k - q_{k0} = 0 \quad (2.34)$$

Donde q_{k0} es el valor deseado para el grado de libertad k (coordenada). Las derivadas necesarias para definir completamente el sistema son:

$$\frac{\partial R_k}{\partial q_r} = \delta_{kr} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial R_k}{\partial \mathbf{L}} = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

- Restricciones de tensión en cable.

Con este tipo de restricción se impone la tensión en un punto del cable. Para definir el punto, se considera el nodo i de un elemento e . Las componentes de la tensión en el cable pueden calcularse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} T_x^{e,i} &= F_{elx}^{e,i} - F_{gx}^{e,i} \\ T_y^{e,i} &= F_{ely}^{e,i} - F_{gy}^{e,i} \\ T_z^{e,i} &= F_{elz}^{e,i} - F_{gz}^{e,i} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Las fuerzas elásticas en un elemento dependen exclusivamente de las coordenadas nodales (g.d.l.) del elemento \mathbf{q}^e y de su longitud L^e . Las fuerzas gravitatorias, en cambio, dependen únicamente de la longitud del elemento.

Una ecuación de restricción de este tipo es:

$$R^{e,i}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = R^{e,i}(\mathbf{q}^e, L^e) = \sqrt{T_x^{e,i^2} + T_y^{e,i^2} + T_z^{e,i^2}} - T_0^{e,i} = 0 \quad (2.38)$$

$T_0^{e,i}$ representa el valor de la tensión que se desea imponer.

Las derivadas necesarias para definir el sistema de ecuaciones resultante de (2.32) son:

$$\frac{\partial R^{e,i}}{\partial \mathbf{q}^e} = \frac{1}{\sqrt{T_x^{e,i^2} + T_y^{e,i^2} + T_z^{e,i^2}}} \left(T_x^{e,i} \frac{\partial F_{elx}^{e,i}}{\partial \mathbf{q}^e} + T_y^{e,i} \frac{\partial F_{ely}^{e,i}}{\partial \mathbf{q}^e} + T_z^{e,i} \frac{\partial F_{elz}^{e,i}}{\partial \mathbf{q}^e} \right) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial R^{e,i}}{\partial L^e} = \frac{1}{\sqrt{T_x^{e,i^2} + T_y^{e,i^2} + T_z^{e,i^2}}} \left(T_x^{e,i} \frac{\partial T_x^{e,i}}{\partial L^e} + T_y^{e,i} \frac{\partial T_y^{e,i}}{\partial L^e} + T_z^{e,i} \frac{\partial T_z^{e,i}}{\partial L^e} \right) \quad (2.40)$$

En (2.39) se ha tenido en cuenta que las fuerzas nodales gravitatorias no dependen de las coordenadas nodales. Las derivadas de las fuerzas elásticas con respecto a las coordenadas nodales son componentes de la matriz tangente de elemento, y su expresión se definió anteriormente. Las derivadas



de las fuerzas elásticas y gravitatorias en elementos que intervienen en la resolución del sistema se pueden obtener de forma analítica en base a las correspondientes expresiones obtenidas en apartados previos.

2.4.2. Cálculo óptimo de la posición del cable de contacto.

Esta segunda metodología pretende conseguir que la posición del cable de contacto sea lo más parecida posible a una función definida. Para lograr optimizar esta variable se consideran como variables de diseño las longitudes de las péndolas, teniendo en cuenta que la catenaria debe estar en equilibrio, es decir, se debe cumplir la ecuación de equilibrio de fuerzas internas y externas, las condiciones de contorno de desplazamiento y la tensión de tracción en los cables sustentador y de contacto.

2.4.2.1. Planteamiento del problema.

La resolución del problema consiste en minimizar un funcional que mide la diferencia entre la posición vertical del cable de contacto respecto de la definida por una función introducida por el usuario, h_{cc} , en una serie de puntos a lo largo de todo el cable de contacto. El conjunto de restricciones que se ha mencionado anteriormente se considera introduciéndolo mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Con este planteamiento, se define la función error en la posición del cable conductor considerando la diferencia entre la posición calculada de un conjunto de puntos de cada uno de los elementos del cable conductor y la deseada (h_{cc}).

$$E(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \frac{k_p}{2} (r_z(\mathbf{q}, \mathbf{L}, \xi_p) - h_{cc})^2 \quad (2.41)$$

La función objetivo se calcula con dos sumatorios, el primero para considerar todos los elementos que forman el cable de contacto y el segundo para un determinado número de puntos N_p en cada elemento de cable. La coordenada ξ_p indica la posición local (entre 0 y 1) de esos puntos, y la



constante k_p se ha introducido para escalar el funcional y su valor no afecta a la solución del problema de minimización.

Matemáticamente, el planteamiento del problema consiste en minimizar la función error considerando un conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} \min E(\mathbf{q}, \mathbf{L}) \\ \text{sujeto a:} \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{F}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) - \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Las ecuaciones de restricción que se han introducido son el cumplimiento de la ecuación de equilibrio de fuerzas internas y externas \mathbf{F} , la tensión impuesta en cables definidas por el vector de restricciones \mathbf{R} , y otro tipo de ecuaciones de restricción \mathbf{S} , como puede ser la imposición de la posición de los brazos de registro a partir de la correspondiente posición de sus nodos y de la longitud de los mismos.

El problema planteado en la ecuación (2.42) se puede resolver mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, dando lugar al siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\text{opt } \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) = \text{opt } \left[E(\mathbf{q}, \mathbf{L}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{L}) \right] \quad (2.43)$$

Los vectores $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ representan los multiplicadores de Lagrange asociados a las correspondientes restricciones del problema de optimización. La resolución del problema anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones no lineales:



$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial q_i} + \lambda^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} + \mu^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} + \gamma^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial L_j} + \lambda^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial L_j} + \mu^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial L_j} + \gamma^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial L_j} &= 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}, L) &= 0 \\ \mathbf{R}(\mathbf{q}, L) &= 0 \\ \mathbf{S}(\mathbf{q}, L) &= 0\end{aligned}\tag{2.44}$$

Teniendo en cuenta la definición de la función error (2.41), las derivadas con respecto a las coordenadas nodales y con respecto a la longitud de elemento se evalúan como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial q_i} &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} k_p (r_z(\xi_p) - h_{cc}) \frac{\partial r_z(\xi_p)}{\partial q_i} \\ \frac{\partial E}{\partial L_j} &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} k_p (r_z(\xi_p) - h_{cc}) \frac{\partial r_z(\xi_p)}{\partial L_j}\end{aligned}\tag{2.45}$$

2.4.2.2. Resolución del problema.

El sistema de ecuaciones no lineales planteado en la ecuación (2.44) se puede resolver mediante el método de Newton-Raphson. Para aplicar este método es necesario derivar las ecuaciones respecto de todas las variables del sistema, que en este caso son las coordenadas globales \mathbf{q} , las longitudes \mathbf{L} y los multiplicadores de Lagrange λ , μ y γ . El cálculo de la matriz tangente de este problema se puede realizar ensamblando la contribución de cada elemento.

A continuación se detalla la estructura de la matriz tangente, y la contribución de cada sumando del funcional (2.43) a la misma. El primero de ellos, que corresponde a la función error en la posición del cable conductor, da lugar a los siguientes términos de la matriz tangente, para un elemento cualquiera:

$$\begin{bmatrix}
 k_p \frac{\partial r_{z_p}}{\partial q_i} \frac{\partial r_{z_p}}{\partial q_j} & k_p \left(\frac{\partial r_{z_p}}{\partial q_i} \frac{\partial r_{z_p}}{\partial L} + \frac{\partial^2 r_{z_p}}{\partial q_i \partial L} (r_{z_p} - h_{cc}) \right) & 0 & 0 & 0 \\
 k_p \left(\frac{\partial r_{z_p}}{\partial L} \frac{\partial r_{z_p}}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 r_{z_p}}{\partial L \partial q_j} (r_{z_p} - h_{cc}) \right) & k_p \left(\frac{\partial^2 r_{z_p}}{\partial L^2} (r_{z_p} - h_{cc}) + \frac{\partial r_{z_p}}{\partial L} \frac{\partial r_{z_p}}{\partial L} \right) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

El cálculo de la posición vertical del cable de contacto $r_z(\xi_p)$ en la coordenada local se ha renombrado como r_{z_p} .

En segundo lugar, la ecuación de equilibrio de fuerzas internas y externas conduce a estos términos de la matriz tangente:

$$\begin{bmatrix}
 \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q_i \partial q_j} & \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q_i \partial L} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} & 0 & 0 \\
 \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial L \partial q_j} & \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial L^2} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial L} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial q_i} & \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial L} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

El siguiente término del funcional corresponde a la restricción de tracción impuesta en los cables, y da lugar a la expresión que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix}
 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q_i \partial q_j} & \mu \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q_i \partial L} & 0 & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} & 0 \\
 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial L \partial q_j} & \mu \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial L^2} & 0 & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_j} & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial L} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Donde \mathbf{R} es el vector de restricciones de tensión impuesta en cables, cuya expresión y las de sus derivadas respecto de las coordenadas nodales y de la longitud se han definido en las ecuaciones (2.38), (2.39) y (2.40). Las segundas derivadas de este vector se pueden escribir como:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{-1}{\sqrt[3]{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \left(T_x \frac{\partial T_x}{\partial q_i} + T_y \frac{\partial T_y}{\partial q_i} + T_z \frac{\partial T_z}{\partial q_i} \right) \cdot \left(T_x \frac{\partial T_x^T}{\partial q_j} + T_y \frac{\partial T_y^T}{\partial q_j} + T_z \frac{\partial T_z^T}{\partial q_j} \right) + \frac{1}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \cdot \quad (2.49)$$

$$\left(\frac{\partial T_x^T}{\partial q_i} \frac{\partial T_x}{\partial q_j} + \frac{\partial T_y^T}{\partial q_i} \frac{\partial T_y}{\partial q_j} + \frac{\partial T_z^T}{\partial q_i} \frac{\partial T_z}{\partial q_j} + T_x \frac{\partial^2 T_x}{\partial q_i \partial q_j} + T_y \frac{\partial^2 T_y}{\partial q_i \partial q_j} + T_z \frac{\partial^2 T_z}{\partial q_i \partial q_j} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q_i \partial L} = \frac{-1}{\sqrt[3]{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \left(T_x \frac{\partial T_x}{\partial L} + T_y \frac{\partial T_y}{\partial L} + T_z \frac{\partial T_z}{\partial L} \right) \cdot \left(T_x \frac{\partial T_x^T}{\partial q_i} + T_y \frac{\partial T_y^T}{\partial q_i} + T_z \frac{\partial T_z^T}{\partial q_i} \right) + \frac{1}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \cdot \quad (2.50)$$

$$\left(\frac{\partial T_x^T}{\partial q_i} \frac{\partial T_x}{\partial L} + \frac{\partial T_y^T}{\partial q_i} \frac{\partial T_y}{\partial L} + \frac{\partial T_z^T}{\partial q_i} \frac{\partial T_z}{\partial L} + T_x \frac{\partial^2 T_x}{\partial q_i \partial L} + T_y \frac{\partial^2 T_y}{\partial q_i \partial L} + T_z \frac{\partial^2 T_z}{\partial q_i \partial L} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial L^2} = \frac{-1}{\sqrt[3]{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \left(T_x \frac{\partial T_x}{\partial L} + T_y \frac{\partial T_y}{\partial L} + T_z \frac{\partial T_z}{\partial L} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \cdot \left(\frac{\partial T_x^T}{\partial L}^2 + \frac{\partial T_y^T}{\partial L}^2 + \frac{\partial T_z^T}{\partial L}^2 + T_x \frac{\partial^2 T_x}{\partial L^2} + T_y \frac{\partial^2 T_y}{\partial L^2} + T_z \frac{\partial^2 T_z}{\partial L^2} \right) \quad (2.51)$$

Finalmente, el último sumando, reservado a otro tipo de restricciones, contribuye en el ensamblado de la matriz tangente a través de los siguientes términos:

$$\begin{bmatrix} \gamma^T \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial q_i \partial q_j} & \gamma^T \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial q_i \partial L} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q_i} \\ \gamma^T \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial L \partial q_j} & \gamma^T \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial L^2} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial q_i} & \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

2.5. MODELOS BÁSICOS DE PANTÓGRAFO.

Los modelos de pantógrafos considerados en el presente trabajo consisten en sistemas de parámetros concentrados formados por masas, resortes y amortiguadores. El más simple corresponde a un modelo de dos etapas, definido en la norma EN 50318 [1] en su anexo A (ver Figura 2.3).

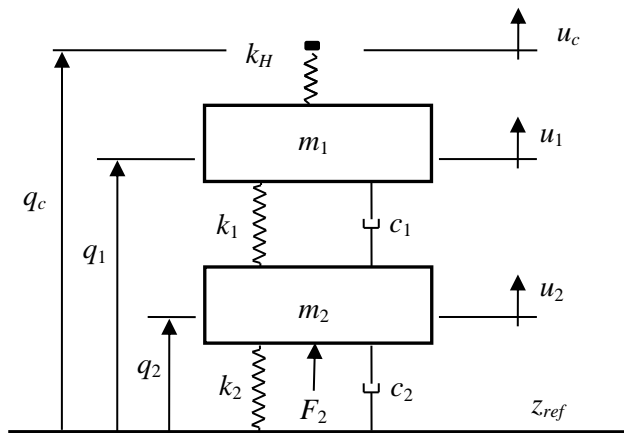


Figura 2.3. Modelo de pantógrafo (EN 50318).

Las masas m_1 y m_2 representan, respectivamente, la mesilla del pantógrafo y el mecanismo de elevación. Las coordenadas absolutas del punto de contacto pantógrafo-catenaria y de las masas concentradas del

modelo se definen mediante las variables q_c , q_1 y q_2 , y k_H es una rigidez elevada que se utiliza para poder aplicar un método de penalti en el modelado de la interacción pantógrafo-catenaria.

Considerando que para una altura del punto de contacto definida por z_{ref} la fuerza en el contacto es nula para una fuerza aplicada F_2 también nula, las ecuaciones de comportamiento dinámico son:

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{K}_p \mathbf{q}_p = \mathbf{F}_p \quad (2.53)$$

Las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento y el vector de fuerzas externas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_p &= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F}_p = \begin{Bmatrix} k_H (q_c - q_1) \\ F_2 + k_2 z_{ref} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.54)$$

El resorte de contacto k_H no se va a considerar como parte integrante del modelo de pantógrafo. Para modelarlo se define un elemento de contacto que relaciona los grados de libertad asociados a la catenaria en el punto de contacto con la coordenada q_1 del pantógrafo.

La norma citada anteriormente establece que se debe aplicar una fuerza F_2 tal que en el equilibrio se ejerza una fuerza de contacto en el pantógrafo de valor $F_{c0} = -120$ N. Con esta fuerza de contacto, se puede analizar la deformación estática de la catenaria, obteniendo la altura del punto de contacto que será denominada q_{c0} . Teniendo en cuenta esta posición deformada de la catenaria, el valor de F_2 necesario se puede calcular como:

$$F_2 = -F_c - k_2 \left[z_{ref} - q_{c0} + F_c \left(\frac{1}{k_H} + \frac{1}{k_1} \right) \right] \quad (2.55)$$

De esta forma, para definir completamente el modelo del pantógrafo es necesario establecer la posición z_{ref} y calcular la posición deformada de la catenaria q_{c0} para la fuerza F_2 . Como la rigidez de la catenaria no es



constante, el valor de q_{c0} depende de la posición a lo largo de la línea donde se aplique, pudiendo obtener resultados en la simulación dinámica ligeramente diferentes.

Un modelo de pantógrafo ampliamente utilizado por fabricantes de pantógrafos, otros autores y códigos de elementos finitos para estudiar la interacción dinámica pantógrafo-catenaria corresponde a un sistema de masas y resortes de tres etapas. Se trata de un modelo sencillo, en el que la topología de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento son similares a las del modelo representado al inicio del presente apartado, por lo que no se repetirán de nuevo.



3. INCORPORACIÓN DE NUEVOS ELEMENTOS AL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE LA CATENARIA.

En el presente capítulo se expone la formulación de diferentes elementos cuya incorporación al modelo de elementos finitos de la catenaria ha permitido simular el comportamiento de algunos componentes que forman parte de dicha estructura.

En primer lugar, se modifica el planteamiento realizado para el elemento cable, con el fin de considerar el salto de tracción producido cuando existe conexión de este elemento con otros. A continuación, se modela la suspensión del soporte del cable sustentador, que permite los desplazamientos de este cable en la dirección vertical.

Finalmente, se representa el sistema de compensación mecánica de la catenaria como un conjunto de masa puntual equivalente y resortes que guían el cable en la dirección longitudinal del mismo.

3.1. ELEMENTO CABLE MODIFICADO.

El planteamiento realizado para la obtención de las fuerzas elásticas en el elemento tipo cable supone que existe continuidad en las derivadas $\partial x/\partial \chi$, $\partial y/\partial \chi$ y $\partial z/\partial \chi$ entre dos elementos de este tipo conectados entre sí. Sin embargo, esta continuidad no existe cuando el elemento tipo cable se encuentra conectado a otro elemento (ver Figura 3.1). Este es el caso, por ejemplo, de los puntos de unión entre el cable sustentador y las péndolas del cable Y.

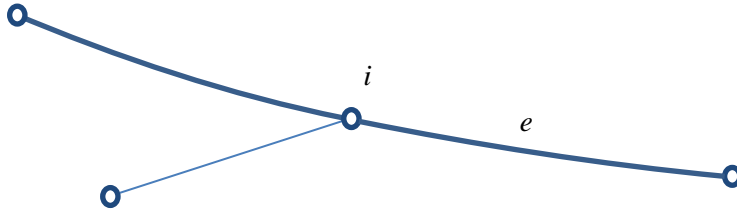


Figura 3.1. Unión entre elementos cable.

En el nodo i , existe una discontinuidad en las derivadas de los elementos cable. Sin embargo, la tangente en este nodo es común entre ambos elementos. Considerando que q_4 , q_5 , y q_6 son las coordenadas que definen las derivadas en el nodo i , para asegurar la dirección tangente en el elemento e , se debe cumplir:

$$q_4^e = \alpha q_4; \quad q_5^e = \alpha q_5; \quad q_6^e = \alpha q_6 \quad (3.1)$$

El elemento, por lo tanto, se plantea considerando que sus coordenadas nodales son:

$$\mathbf{p} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \alpha q_4 \quad \alpha q_5 \quad \alpha q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12}]^T \quad (3.2)$$

Definiendo \mathbf{I}_α como una matriz diagonal cuyos componentes son unos o la variable α :

$$\mathbf{I}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La relación entre las coordenadas locales del elemento y las asociadas a los nodos que conecta es:

$$\mathbf{p} = \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q}^T \quad (3.4)$$

De este modo, se toman como coordenadas independientes la variable interna α y el vector de posición \mathbf{q} .

3.1.1. Vector de fuerzas elásticas.

Teniendo en cuenta que los grados de libertad del elemento corresponden a las coordenadas \mathbf{q} de sus nodos y la variable adicional α , el vector de fuerzas elásticas generalizado puede escribirse, de forma particionada, como:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_q \\ f_\alpha \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

La energía de deformación total, en función de estas coordenadas, se puede expresar del siguiente modo:

$$U(\mathbf{q}, \alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{K}_T \mathbf{p} \quad (3.6)$$

Derivando con respecto a las coordenadas independientes se obtienen las fuerzas elásticas del elemento:

$$\mathbf{f}_q = \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \right]^T = \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T = \mathbf{I}_\alpha^T \mathbf{f}'_q \quad (3.7)$$

$$f_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} = \mathbf{f}'_q{}^T \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q} = \sum_{i=4}^6 \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = \sum_{i=4}^6 f'_{qi} q_i \quad (3.8)$$

Donde \mathbf{f}'_q corresponde al vector de fuerzas calculado considerando las coordenadas del elemento.

3.1.2. Matriz tangente.

La matriz tangente se obtiene de la derivada del vector de fuerzas elásticas con respecto a las coordenadas. Teniendo en cuenta los grados de libertad del elemento, la matriz tangente puede particionarse como:

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{qq} & \mathbf{k}_{q\alpha} \\ \mathbf{k}_{\alpha q} & k_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Considerando en primer lugar las coordenadas nodales, se obtiene:

$$\mathbf{k}_{qq} = \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{I}_\alpha^T \frac{\partial \mathbf{f}'_q}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{I}_\alpha = \mathbf{I}_\alpha^T \mathbf{k}'_{qq} \mathbf{I}_\alpha \quad (3.10)$$

Donde \mathbf{k}'_{qq} corresponde a la matriz tangente calculada considerando las coordenadas del elemento.

Para la variable interna α se tiene:

$$\mathbf{k}_{q\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{q}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}'_q}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q} + \mathbf{f}'_q \mathbf{I}_\alpha \mathbf{I} = \mathbf{k}'_{qq} \alpha \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q} + \mathbf{f}'_q \mathbf{I}_\alpha = \alpha \mathbf{k}'_{qq} \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q} + \mathbf{f}'_q \mathbf{I}_\alpha \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} &= \sum_{i=4}^6 \frac{\partial f'_{qi}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_j} q_i = \alpha \sum_{j=4}^6 k'_{ij} q_j & j &= 4,5,6 \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} &= \sum_{i=4}^6 \frac{\partial f'_{qi}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_j} q_i + f'_{qj} = \alpha \sum_{j=4}^6 k'_{ij} q_j + f'_{qj} & j &= 4,5,6 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Y

$$\begin{aligned} k_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{f}'_q{}^T}{\partial \alpha} \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q} = \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}'_q}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} \right]^T \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q} = (\mathbf{k}'_{qq} \alpha \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q})^T \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q} = \alpha (\mathbf{k}'_{qq} \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q})^T \mathbf{I}_\alpha \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$k_{\alpha\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} = \sum_{i=4}^6 \frac{\partial f'_{qi}}{\partial \alpha} q_i = \sum_{i=4}^6 \left(\sum_{j=4}^6 \frac{\partial f'_{qi}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right) q_i = \sum_{i=4}^6 \left(\alpha \sum_{j=4}^6 k'_{ij} q_j \right) q_i$$

3.1.3. Eliminación del grado de libertad interno.

La variable α se puede eliminar a nivel de elemento cuando se plantea la resolución del problema mediante Newton-Raphson. Las ecuaciones a nivel de elemento pueden escribirse de forma particionada como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{qq} & \mathbf{k}_{q\alpha} \\ \mathbf{k}_{\alpha q} & k_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_q \\ f_\alpha \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

De la segunda ecuación, puede despejarse $\Delta \alpha$:

$$\Delta \alpha = (f_\alpha - \mathbf{k}_{\alpha q} \Delta \mathbf{q}) / k_{\alpha\alpha} \quad (3.15)$$

Sustituyendo este valor en la primera, se obtienen las ecuaciones modificadas a nivel de elemento:

$$(\mathbf{k}_{qq} - \mathbf{k}_{q\alpha} \mathbf{k}_{\alpha q} / k_{\alpha\alpha}) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{f}_q - \mathbf{k}_{q\alpha} f_{\alpha} / k_{\alpha\alpha} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{k}_{qq}^m \Delta \mathbf{q} = \mathbf{f}_q^m \quad (3.16)$$

Una vez resuelto a nivel global la iteración de Newton-Raphson para las incógnitas $\Delta \mathbf{q}$, $\Delta \alpha$ puede calcularse mediante la ecuación (3.15).

3.2. ELEMENTO SUSPENSIÓN EN CABLE SUSTENTADOR.

El cable sustentador se encuentra sujeto y apoyado sobre el cuerpo de la ménsula mediante un conjunto de piezas denominadas conjunto de suspensión, necesario para aislar eléctricamente el cable de contacto de la ménsula.

La existencia de este conjunto de componentes impide la restricción de todos los desplazamientos posibles del cable sustentador en los puntos de unión con la ménsula, apareciendo cierto movimiento vertical con el paso del pantógrafo.

El modelado de este conjunto de compensación se realiza mediante un resorte y un amortiguamiento situados en los nodos correspondientes al soporte del cable sustentador:

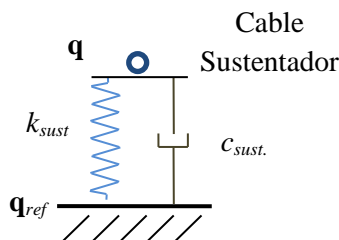


Figura 3.2. Elemento suspensión en cable sustentador.



El vector de grados de libertad de este elemento corresponde a la posición absoluta del nodo i situado en el punto de unión entre el poste y el cable sustentador:

$$\mathbf{q} = [q_{i1} \quad q_{i2} \quad q_{i3}]^T = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T \quad (3.17)$$

3.2.1. Matriz de rigidez. Fuerzas elásticas.

El elemento suspensión únicamente presenta rigidez en la dirección vertical del nodo (el resto de desplazamientos se encuentran restringidos), por lo que la matriz de rigidez del elemento es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{sust} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

El vector de fuerzas elásticas asociado a este elemento se define a partir de las coordenadas del nodo en la posición deformada y sin deformar (\mathbf{q} y \mathbf{q}_{ref} respectivamente):

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{K}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{ref}) \quad (3.19)$$

3.2.2. Matriz de amortiguamiento. Fuerzas disipativas.

Análogamente a la matriz de rigidez del elemento, sólo aparece amortiguamiento en la posición asociada a los grados de libertad verticales del nodo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{sust} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Para obtener las fuerzas de disipación de energía, es necesario obtener previamente la velocidad del nodo, es decir, la derivada de la posición respecto del tiempo. Con ello, las fuerzas disipativas se pueden expresar como:

$$\mathbf{F}_{dis} = \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{ref}) \quad (3.21)$$

3.3. *ELEMENTO MASA DE COMPENSACIÓN.*

El correcto funcionamiento de la instalación ferroviaria requiere que el contacto entre pantógrafo y catenaria sea lo más uniforme posible, hecho que se consigue restringiendo la flecha formada en el cable conductor. Esto es posible mediante el control de la tensión mecánica a la que se encuentran sometidos los elementos del sistema.

No obstante, las condiciones climatológicas, la conducción de calor y electricidad y la propia tensión de los cables provocan efectos físicos de dilatación y contracción en los mismos, produciéndose cambios en las longitudes y en las tensiones iniciales, y por tanto variaciones de altura respecto del plano de rodadura.

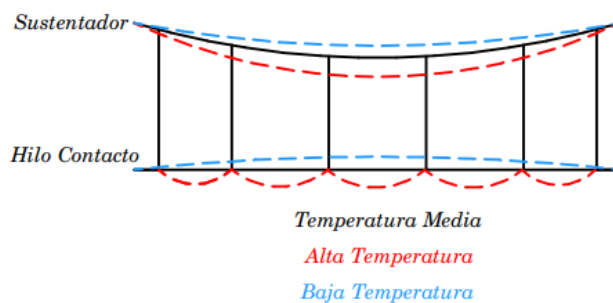


Figura 3.3. Geometría cable sustentador y de contacto, en función de la temperatura.

Para evitar esto, es necesario dotar al conjunto de un sistema de compensación mecánica que garantice en todo momento la misma posición

del cable sustentador y de contacto, y que mantenga la tensión en ellos constante con independencia de las variaciones de temperatura. Los mecanismos de tensionado más usuales son los formados por contrapesos, ruedas, polipastos o poleas en bloque. Otros menos comunes pueden ser mecanismos de accionamiento hidráulico o electromecánicos.

El elemento masa de compensación tiene como finalidad considerar los efectos estáticos y dinámicos de los elementos que forman parte del sistema de compensación mecánica de la catenaria. Este elemento consiste en una masa equivalente y un resorte situados en los nodos de los extremos de los cables sustentador y de contacto. El resorte presenta una rigidez muy baja, de modo que no se producen fuerzas elásticas elevadas, y la masa equivalente únicamente tiene efectos inerciales, no considerando fuerzas gravitacionales en este elemento.

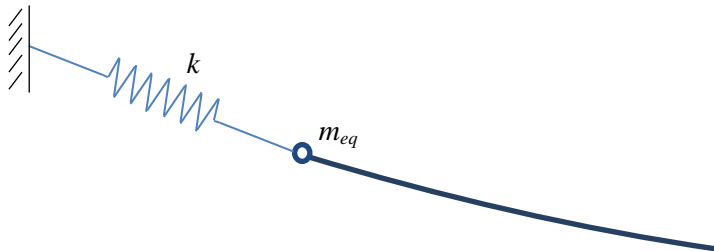


Figura 3.4. Elemento masa de compensación.

De igual modo que en el elemento tipo cable, el vector de grados de libertad o variables nodales corresponden a la posición absoluta y sus derivadas respecto a la coordenada χ , definidas en los nodos i inicial y final de los cables de la catenaria:

$$\mathbf{q} = [q_{i1} \quad q_{i2} \quad q_{i3} \quad q_{i4} \quad q_{i5} \quad q_{i6}]^T = \left[x_i \quad y_i \quad z_i \quad \frac{dx_i}{d\chi} \quad \frac{dy_i}{d\chi} \quad \frac{dz_i}{d\chi} \right]^T \quad (3.22)$$

3.3.1. Fuerzas elásticas.

El vector de fuerzas elásticas asociado al elemento masa de compensación está formado por las fuerzas elásticas de los elementos tipo cable en los nodos correspondientes \mathbf{F}_0 y las debidas a la rigidez del propio elemento:

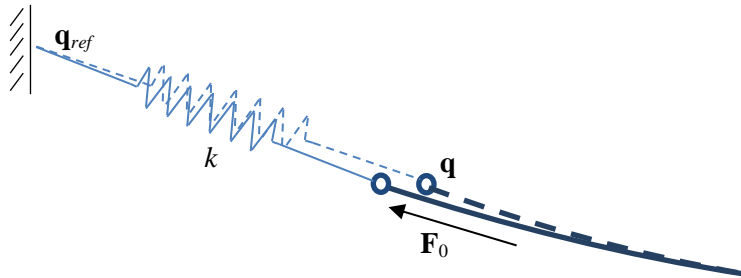


Figura 3.5. Fuerzas elásticas en elemento masa de compensación.

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{ref}) \quad (3.23)$$

Donde \mathbf{q} y \mathbf{q}_{ref} son las coordenadas del nodo en la posición deformada y sin deformar respectivamente, y \mathbf{K} es la matriz de rigidez del elemento en la dirección longitudinal del cable en dicho nodo:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \cos \beta & \cos \alpha \cdot \cos \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cdot \cos \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma & \cos \beta \cdot \cos \gamma & \cos^2 \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Siendo k la rigidez del resorte y $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ los cosenos directores del vector unitario que define la dirección del elemento en el nodo correspondiente.

3.3.2. Guiado del cable.

Con el fin de permitir únicamente los desplazamientos del nodo del elemento en la dirección longitudinal del cable y minimizar el movimiento en las direcciones perpendiculares, el elemento masa de compensación lleva incorporado unos resortes de gran rigidez k_{rest} perpendiculares al resorte inicial del elemento.

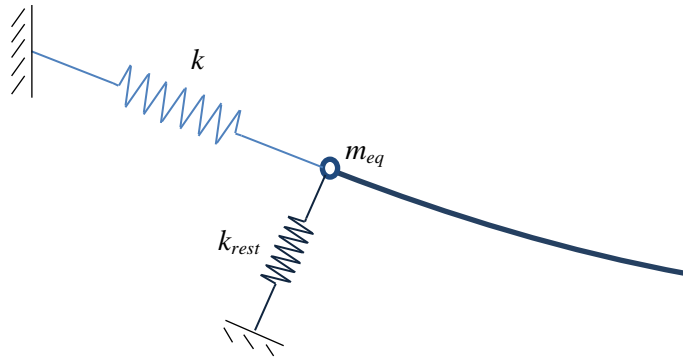


Figura 3.6. Guiado del cable en el elemento masa de compensación.

Para definir la orientación de los vectores unitarios en las dos direcciones perpendiculares al cable, se parte de los cosenos directores en el nodo correspondiente $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, y de un vector unitario contenido en el plano XY, como el que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_{XY} \\ \cos\beta_{XY} \\ \cos\gamma_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos\beta}{\sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\beta^2}} \\ \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\beta^2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

El producto vectorial de ambos vectores unitarios da como resultado los cosenos directores del vector normal a los anteriores:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_{rest1} \\ \cos \beta_{rest1} \\ \cos \gamma_{rest1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \cos \alpha_{XY} \\ \cos \beta_{XY} \\ \cos \gamma_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cdot \cos \gamma_{XY} - \cos \gamma \cdot \cos \beta_{XY} \\ -\cos \alpha \cdot \cos \gamma_{XY} + \cos \gamma \cdot \cos \alpha_{XY} \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta_{XY} - \cos \beta \cdot \cos \alpha_{XY} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

A partir de los cuales se obtiene la primera matriz de rigidez de uno de los resortes perpendiculares:

$$\mathbf{K}_{rest1} = k_{rest} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_{rest1} & \cos \alpha_{rest1} \cdot \cos \beta_{rest1} & \cos \alpha_{rest1} \cdot \cos \gamma_{rest1} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{rest1} \cdot \cos \beta_{rest1} & \cos^2 \beta_{rest1} & \cos \beta_{rest1} \cdot \cos \gamma_{rest1} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{rest1} \cdot \cos \gamma_{rest1} & \cos \beta_{rest1} \cdot \cos \gamma_{rest1} & \cos^2 \gamma_{rest1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Para definir el vector unitario de la otra dirección transversal del elemento, es suficiente con realizar el producto vectorial de los cosenos directores que determinan la dirección del cable y la dirección perpendicular anterior:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_{rest2} \\ \cos \beta_{rest2} \\ \cos \gamma_{rest2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \cos \alpha_{rest1} \\ \cos \beta_{rest1} \\ \cos \gamma_{rest1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cdot \cos \gamma_{rest1} - \cos \gamma \cdot \cos \beta_{rest1} \\ -\cos \alpha \cdot \cos \gamma_{rest1} + \cos \gamma \cdot \cos \alpha_{rest1} \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta_{rest1} - \cos \beta \cdot \cos \alpha_{rest1} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Análogamente a la matriz anterior, se construye la matriz de rigidez con la segunda orientación perpendicular a la dirección del cable:

$$\mathbf{K}_{rest2} = k_{rest} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_{rest2} & \cos \alpha_{rest2} \cdot \cos \beta_{rest2} & \cos \alpha_{rest2} \cdot \cos \gamma_{rest2} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{rest2} \cdot \cos \beta_{rest2} & \cos^2 \beta_{rest2} & \cos \beta_{rest2} \cdot \cos \gamma_{rest2} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{rest2} \cdot \cos \gamma_{rest2} & \cos \beta_{rest2} \cdot \cos \gamma_{rest2} & \cos^2 \gamma_{rest2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La matriz de rigidez del elemento masa de compensación resultante se obtiene del ensamblado de las matrices expuestas en los apartados previos:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{rest1} + \mathbf{K}_{rest2} \quad (3.30)$$

3.3.3. Matriz de masa.

Como se ha comentado anteriormente, el elemento masa de compensación únicamente presenta efectos inerciales durante la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria, sin ejercer fuerzas gravitacionales en el sistema.

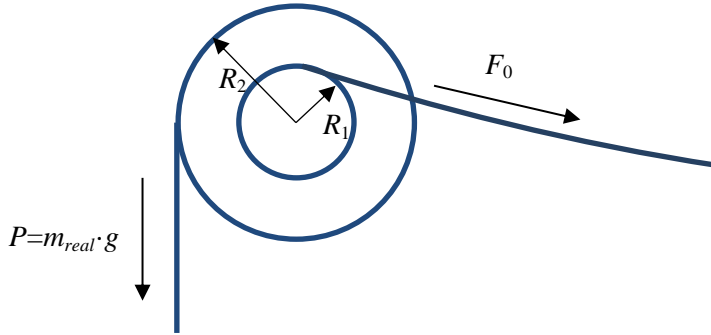


Figura 3.7. Fuerzas actuantes en el sistema de compensación mecánica.

Para obtener la masa equivalente m_{eq} del conjunto de compensación mecánica, es necesario establecer el equilibrio de momentos y de energía cinética:

$$F_0 \cdot R_1 = m_{real} g \cdot R_2 \rightarrow m_{real} = \frac{F_0}{g} \cdot \frac{R_1}{R_2} \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{real} \cdot v_2^2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot R_1^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{real} \cdot R_2^2 \cdot \omega^2 \quad (3.32)$$

Donde F_0 es la tensión en el cable, R_1 y R_2 los radios de las poleas, m_{real} la masa en los contrapesos, m_{eq} las masas puntuales equivalentes situadas en



los radios exteriores de las poleas y ω su velocidad angular (ver Figura 3.7). De las expresiones anteriores es posible despejar el valor de m_{eq} :

$$m_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot m_{real} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{F_0}{g} \cdot \frac{R_1}{R_2} \rightarrow m_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0}{g} \cdot \frac{R_2}{R_1} \quad (3.33)$$

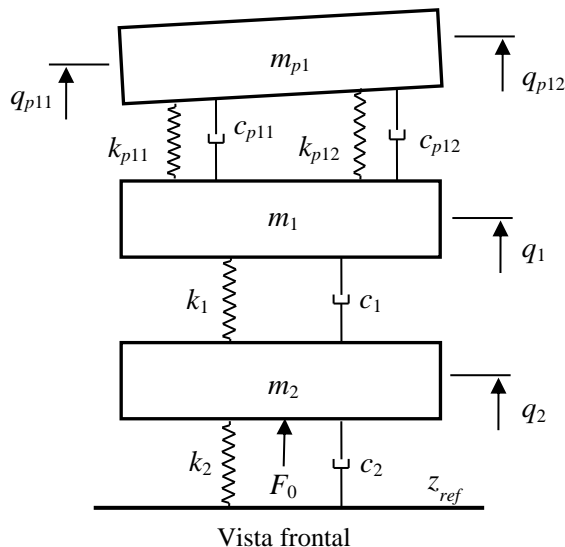
Una vez obtenida la expresión de la masa equivalente, la matriz de masa \mathbf{M} del elemento resulta constante y se puede expresar del siguiente modo:

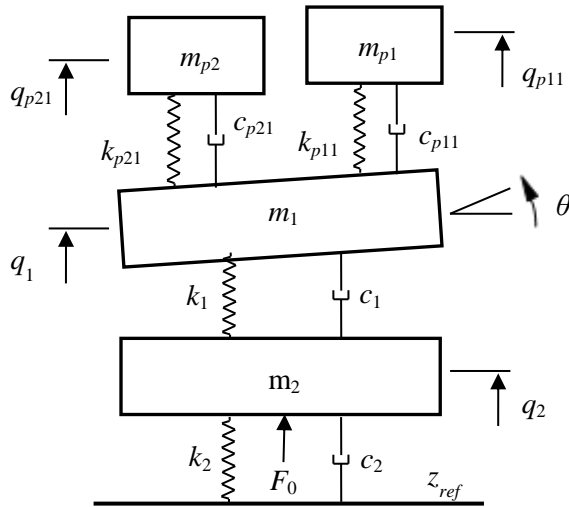
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{eq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{eq} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{eq} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

4. MODELOS DE PANTÓGRAFO CON GRADOS DE LIBERTAD ADICIONALES.

La representación del sistema de masas y resortes presentada en el apartado 2.5 puede ser mejorada incorporando más grados de libertad al pantógrafo. Así, los autores W. Zhang y Yi Liu proponen en [10] un modelo con dos puntos de contacto, e incluyen una rotación para considerar el giro de la mesilla en un eje perpendicular al trazado. Por otra parte, J. Benet utiliza en [11] un modelo de pantógrafo en el que incorpora otra rotación para la masa de la cabeza y la posición lateral del punto de contacto respecto del eje de la vía.

En este trabajo se ha desarrollado un modelo de pantógrafo no lineal con dos puntos de contacto que combina los dos modelos anteriores. Respecto al modelo de tres masas considerado hasta el momento, presenta, por un lado, un grado de libertad de rotación de la masa correspondiente a la mesilla (m_1) respecto de un eje normal al trazado, y por otro, a partir de dos desplazamientos verticales de los extremos de cada colector (m_{p1} y m_{p2}), considera el giro de las dos masas de la cabeza del pantógrafo.





Vista lateral

Figura 4.1. Modelo de pantógrafo con 7 grados de libertad. Vista frontal (arriba) y lateral (abajo).

Como se puede observar en la Figura 4.1, se trata de un sistema con siete grados de libertad (q_1 , q_2 , θ , q_{p11} , q_{p12} , q_{p21} y q_{p22}) en el que para definirlo completamente es preciso conocer la longitud de cada banda de frotamiento (l_p), la distancia entre ellos (l_c) y las características inerciales de la mesilla (J) y de los colectores (J_{p1} y J_{p2}), de rigidez y de amortiguamiento de los diferentes grados de libertad.

Una vez conocidos estos parámetros, las fuerzas de suspensión entre las masas de la cabeza del pantógrafo y la mesilla se pueden expresar del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 F_{s11} &= k_{p11} \left(q_{p11} - \left(q_1 + \frac{l_c}{2} \operatorname{sen}\theta \right) \right) + c_{p11} \left(\dot{q}_{p11} - \left(\dot{q}_1 + \frac{l_c}{2} \cos\theta \cdot \dot{\theta} \right) \right) \\
 F_{s12} &= k_{p12} \left(q_{p12} - \left(q_1 + \frac{l_c}{2} \operatorname{sen}\theta \right) \right) + c_{p12} \left(\dot{q}_{p12} - \left(\dot{q}_1 + \frac{l_c}{2} \cos\theta \cdot \dot{\theta} \right) \right) \\
 F_{s21} &= k_{p21} \left(q_{p21} - \left(q_1 - \frac{l_c}{2} \operatorname{sen}\theta \right) \right) + c_{p21} \left(\dot{q}_{p21} - \left(\dot{q}_1 - \frac{l_c}{2} \cos\theta \cdot \dot{\theta} \right) \right) \\
 F_{s22} &= k_{p22} \left(q_{p22} - \left(q_1 - \frac{l_c}{2} \operatorname{sen}\theta \right) \right) + c_{p22} \left(\dot{q}_{p22} - \left(\dot{q}_1 - \frac{l_c}{2} \cos\theta \cdot \dot{\theta} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aplicando el método de penalti con una rigidez del resorte de contacto k_H , la fuerza de contacto para cada frotador es:

$$\begin{aligned}
 F_{c1} &= k_H (q_{c1} - q_{H1}) \\
 F_{c2} &= k_H (q_{c2} - q_{H2})
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donde q_{c1} y q_{c2} son la altura de la catenaria en los puntos de contacto y q_{H1} y q_{H2} son la altura de cada uno de los colectores en los puntos de contacto, obtenidos del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 q_{H1} &= q_{p11} \left(1 - \frac{y_{c1}}{l_p} \right) + q_{p12} \left(\frac{y_{c1}}{l_p} \right) \\
 q_{H2} &= q_{p21} \left(1 - \frac{y_{c2}}{l_p} \right) + q_{p22} \left(\frac{y_{c2}}{l_p} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

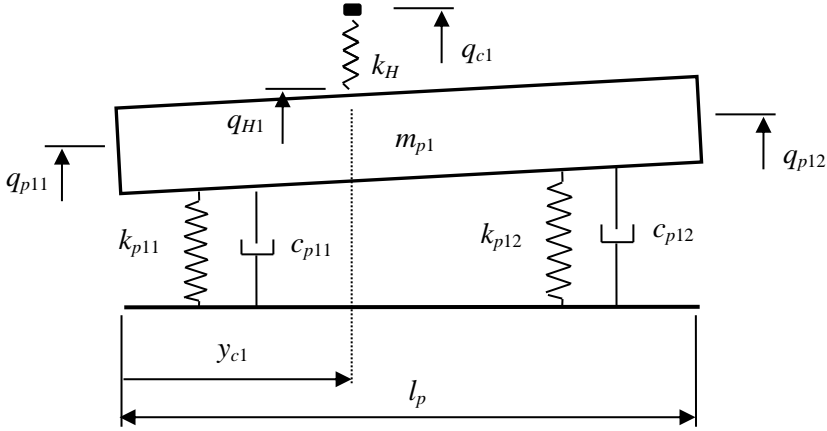


Figura 4.2. Detalle cabeza de pantógrafo.

Siendo y_{c1} e y_{c2} la distancia horizontal de los puntos de contacto. La posición, velocidad, aceleración y rotación medidas en el centro de gravedad de las masas m_{p1} y m_{p2} se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
 q_{p1} &= \frac{q_{p11} + q_{p12}}{2}; \quad \dot{q}_{p1} = \frac{\dot{q}_{p11} + \dot{q}_{p12}}{2}; \quad \ddot{q}_{p1} = \frac{\ddot{q}_{p11} + \ddot{q}_{p12}}{2}; \\
 \theta_{p1} &= \arcsen\left(\frac{q_{p12} - q_{p11}}{l_p}\right) \\
 q_{p2} &= \frac{q_{p21} + q_{p22}}{2}; \quad \dot{q}_{p2} = \frac{\dot{q}_{p21} + \dot{q}_{p22}}{2}; \quad \ddot{q}_{p2} = \frac{\ddot{q}_{p21} + \ddot{q}_{p22}}{2}; \\
 \theta_{p2} &= \arcsen\left(\frac{q_{p22} - q_{p21}}{l_p}\right)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Con todo esto, las ecuaciones de equilibrio en cada uno de los extremos de las masas de la cabeza del pantógrafo son:

$$m_{p1} \left(\frac{\ddot{q}_{p11} + \ddot{q}_{p12}}{2} \right) \frac{l_p}{2} - J_{p1} \ddot{\theta}_{p1} + F_{s11} l_p = k_H (q_{c1} - q_{H1}) (l_p - y_{c1}) \tag{4.5}$$

$$m_{p1} \left(\frac{\ddot{q}_{p11} + \ddot{q}_{p12}}{2} \right) \frac{l_p}{2} + J_{p1} \ddot{\theta}_{p1} + F_{s12} l_p = k_H (q_{c1} - q_{H1}) y_{c1} \quad (4.6)$$

$$m_{p2} \left(\frac{\ddot{q}_{p21} + \ddot{q}_{p22}}{2} \right) \frac{l_p}{2} - J_{p2} \ddot{\theta}_{p2} + F_{s21} l_p = k_H (q_{c2} - q_{H2}) (l_p - y_{c2}) \quad (4.7)$$

$$m_{p2} \left(\frac{\ddot{q}_{p21} + \ddot{q}_{p22}}{2} \right) \frac{l_p}{2} + J_{p2} \ddot{\theta}_{p2} + F_{s22} l_p = k_H (q_{c2} - q_{H2}) y_{c2} \quad (4.8)$$

En la masa que representa la mesilla (m_1) tiene lugar un equilibrio de momentos debidos al giro y de fuerzas respecto del centro de masas:

$$J \ddot{\theta} + (F_{s21} + F_{s22} - F_{s11} - F_{s12}) \frac{l_c}{2} \cos \theta = 0 \quad (4.9)$$

$$m_1 \ddot{q}_1 + c_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_1 (q_1 - q_2) - (F_{s11} + F_{s12} + F_{s21} + F_{s22}) = 0 \quad (4.10)$$

Por último, la ecuación de comportamiento dinámico en el mecanismo de elevación (m_2) se puede escribir de la siguiente manera:

$$m_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2 - c_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_2 q_2 - k_1 (q_1 - q_2) = F_0 + k_2 q_{ref} \quad (4.11)$$

4.1. MODELO LINEALIZADO DEL PANTÓGRAFO.

En la resolución del problema dinámico es posible aplicar la hipótesis de pequeños desplazamientos, dados los pequeños rangos de variación de la posición de las masas del sistema. De este modo, se asume que $\sin \theta = \theta$ y que $\cos \theta = 1$, y dividiendo las ecuaciones (4.5), (4.6), (4.7) y (4.8) por l_p , se obtiene el problema linealizado del comportamiento dinámico:

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{K}_p \mathbf{q}_p = \mathbf{F}_p \quad (4.12)$$

Con:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_p &= [q_1 \quad q_2 \quad q_{p11} \quad q_{p12} \quad q_{p21} \quad q_{p22} \quad \theta]^T \\
 \dot{\mathbf{q}}_p &= [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_{p11} \quad \dot{q}_{p12} \quad \dot{q}_{p21} \quad \dot{q}_{p22} \quad \dot{\theta}]^T \\
 \ddot{\mathbf{q}}_p &= [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_{p11} \quad \ddot{q}_{p12} \quad \ddot{q}_{p21} \quad \ddot{q}_{p22} \quad \ddot{\theta}]^T
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_{p1}}{4} + \frac{J_{p1}}{l_p^2} & \frac{m_{p1}}{4} - \frac{J_{p1}}{l_p^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_{p1}}{4} - \frac{J_{p1}}{l_p^2} & \frac{m_{p1}}{4} + \frac{J_{p1}}{l_p^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{p2}}{4} + \frac{J_{p2}}{l_p^2} & \frac{m_{p2}}{4} - \frac{J_{p2}}{l_p^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_{p2}}{4} - \frac{J_{p2}}{l_p^2} & \frac{m_{p2}}{4} + \frac{J_{p2}}{l_p^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} c_1 + c_{p11} + c_{p12} + c_{p21} + c_{p22} & -c_1 & -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p21} & -c_{p22} & \frac{l_c}{2}(c_{p11} + c_{p12} - c_{p21} - c_{p22}) & 0 \\ -c_1 & c_2 + c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_c}{2}c_{p11} \\ -c_{p11} & 0 & c_{p11} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_c}{2}c_{p12} & \frac{l_c}{2}c_{p21} \\ -c_{p12} & 0 & 0 & c_{p12} & 0 & 0 & \frac{l_c}{2}c_{p22} & \frac{l_c}{2}c_{p22} \\ -c_{p21} & 0 & 0 & 0 & c_{p21} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{p22} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{p22} & 0 & 0 \\ \frac{l_c}{2}(c_{p11} + c_{p12} - c_{p21} - c_{p22}) & 0 & -\frac{l_c}{2}c_{p11} & -\frac{l_c}{2}c_{p12} & \frac{l_c}{2}c_{p21} & \frac{l_c}{2}c_{p22} & \frac{l_c^2}{4}(c_{p11} + c_{p12} + c_{p21} + c_{p22}) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} k_1 + k_{p11} + k_{p12} + k_{p21} + k_{p22} & -k_1 & -k_{p11} & -k_{p12} & -k_{p21} & -k_{p22} & \frac{l_c}{2}(k_{p11} + k_{p12} - k_{p21} - k_{p22}) \\ -k_1 & k_2 + k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{p11} & 0 & k_{p11} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_c}{2}k_{p11} \\ -k_{p12} & 0 & 0 & k_{p12} & 0 & 0 & -\frac{l_c}{2}k_{p12} \\ -k_{p21} & 0 & 0 & 0 & k_{p21} & 0 & \frac{l_c}{2}k_{p21} \\ -k_{p22} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{p22} & \frac{l_c}{2}k_{p22} \\ \frac{l_c}{2}(k_{p11} + k_{p12} - k_{p21} - k_{p22}) & 0 & -\frac{l_c}{2}k_{p11} & -\frac{l_c}{2}k_{p12} & \frac{l_c}{2}k_{p21} & \frac{l_c}{2}k_{p22} & \frac{l_c^2}{4}(k_{p11} + k_{p12} + k_{p21} + k_{p22}) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 + k_2 q_{ref} \\ k_H (q_{c1} - q_{H1}) \left(1 - \frac{y_{c1}}{l_p}\right) \\ k_H (q_{c1} - q_{H1}) \left(\frac{y_{c1}}{l_p}\right) \\ k_H (q_{c2} - q_{H2}) \left(1 - \frac{y_{c2}}{l_p}\right) \\ k_H (q_{c2} - q_{H2}) \left(\frac{y_{c2}}{l_p}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

La inclusión de un mayor número de grados de libertad para modelar el pantógrafo permite una mejor representación de este sistema. No obstante, la identificación de los parámetros del modelo, generalmente obtenidos por análisis modal experimental o por elementos finitos, se complica, siendo la información relativa a los mismos escasa o no divulgada.

Para obtener una respuesta más realista, la complejidad de estos modelos de pantógrafos puede incrementarse incluyendo ciertas no linealidades. Los comportamientos no-lineales más frecuentes son los debidos a elementos de fricción, que pueden producir la detención del movimiento vertical del pantógrafo; los amortiguadores bidireccionales, con diferentes valores de la constante de amortiguamiento para valores ascendentes y valores descendentes; así como la presencia de fuerzas aerodinámicas. Estas no-



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES

MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES



linealidades no han sido contempladas en el presente Trabajo Fin de Máster por no disponer de información de estas características.



5. INTERACCIÓN. MODELO DE CONTACTO.

La problemática asociada al contacto unilateral entre dos sólidos elásticos es revisada en [5], donde se describe la técnica numérica adoptada para resolver el problema de interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria que se expone a continuación.

En el presente trabajo se plantea el método de penalti para obtener la fuerza de contacto entre pantógrafo y catenaria. Para ello, primeramente se evalúa la distancia de interpenetración dz entre ambos sistemas.

$$dz = (q_{cc} - q_H) \quad (5.1)$$

Siendo q_{cc} la altura del punto de contacto en la catenaria y q_H la altura del punto de contacto en el pantógrafo. Si dz es positivo, significa que no hay interacción. Un valor negativo de esta variable, por el contrario, implicaría que el pantógrafo se encuentra por encima del cable de contacto (interpenetración), lo cual no es posible.

En ese caso se aplica un método de penalti, consistente en introducir un resorte artificial k_H entre los dos sistemas para obtener la fuerza repulsiva entre pantógrafo y catenaria que haría ascender al cable de contacto y se opondría a la elevación del pantógrafo (ecuación (5.2)).

$$F_c = \begin{cases} -k_H dz & \text{si } dz < 0 \\ 0 & \text{si } dz > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

5.1. MODELO DE INTERACCIÓN. MÉTODO DE PENALTI.

En el instante t , la interacción pantógrafo-catenaria corresponderá a un elemento finito del cable de contacto definido por sus nodos i y j . A fin de modelar el contacto, se define un elemento que relaciona los grados de

libertad asociados a la catenaria con el que define la posición vertical de la mesilla del pantógrafo.

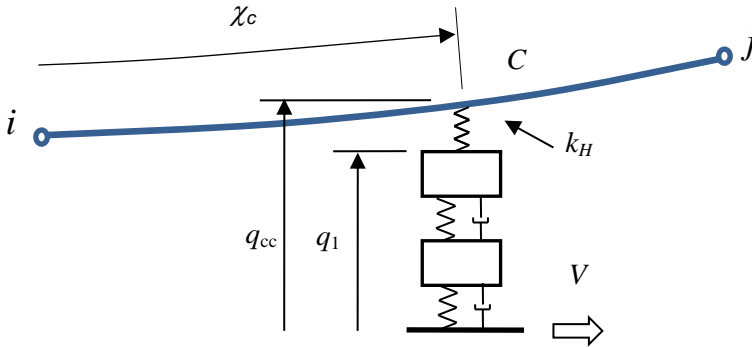


Figura 5.1. Interacción pantógrafo-catenaria.

Suponiendo velocidad constante del vehículo, la posición del pantógrafo y en consecuencia la del punto de contacto a lo largo de la catenaria viene definida por:

$$x_c = x_{c0} + Vt \quad (5.3)$$

Para definir el punto de contacto dentro del elemento finito, es necesario obtener la correspondiente coordenada local χ_c . Considerando la interpolación del elemento cable, se plantea la ecuación:

$$x_c = S_1(\chi_c)q_{i,1} + S_2(\chi_c)q_{i,4} + S_3(\chi_c)q_{j,1} + S_4(\chi_c)q_{j,4} \quad (5.4)$$

Esta expresión corresponde a una ecuación cúbica y su resolución permite evaluar el valor de χ_c . La dinámica asociada a la interacción pantógrafo-catenaria no produce variaciones sustanciales de la posición horizontal de la catenaria. Por este motivo, se supone que el valor de χ_c calculado no se modifica con la dinámica del sistema.

La posición vertical del punto de contacto en la catenaria es:

$$q_{cc} = S_1(\chi_c)q_{i,3} + S_2(\chi_c)q_{i,6} + S_3(\chi_c)q_{j,3} + S_4(\chi_c)q_{j,6} \quad (5.5)$$

Los modelos de pantógrafo de masas y resortes de dos o tres etapas, como el mostrado en el apartado 2.5 presentan un grado de libertad correspondiente a la posición vertical del punto de contacto en el pantógrafo (q_1 en la Figura 5.1). Sin embargo, el modelo desarrollado en el capítulo 4 dispone de dos grados de libertad asociados a cada punto de contacto, por lo que no puede tomarse directamente la posición de dichos grados de libertad.

En el programa desarrollado, cada punto de contacto se trata independientemente de los demás aunque forme parte del mismo pantógrafo. Es decir, para cada uno de ellos se debe evaluar las coordenadas y funciones de forma de la catenaria y del pantógrafo en ese punto. En el desarrollo mostrado a continuación se trata un colector genérico de masa m_p , con los grados de libertad de los extremos de la cabeza expresados como q_{p1} y q_{p2} :

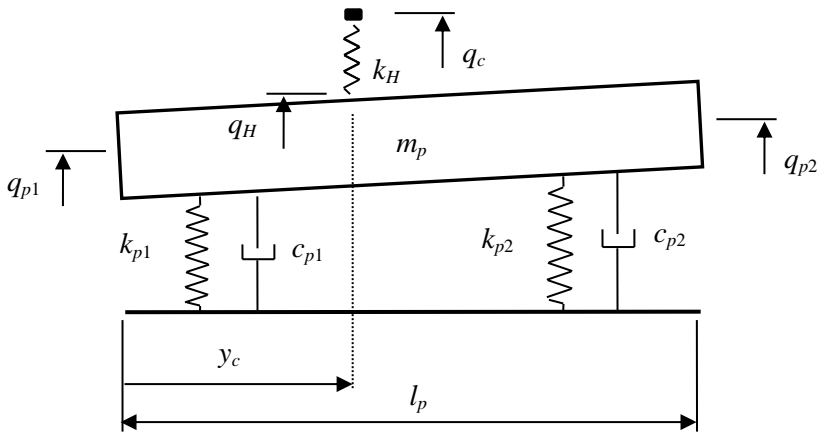


Figura 5.2. Detalle cabeza de pantógrafo con dos grados de libertad asociados al punto de contacto.

En primer lugar, es necesaria la implementación de unas funciones de forma S_{p1} y S_{p2} que relacionen la altura de los extremos de la banda de frotamiento con la altura del punto de contacto en el pantógrafo q_H . Esto se puede conseguir por medio de la distancia horizontal del punto de contacto

y_c medida desde uno de los extremos del colector, y de la distancia entre los extremos l_p :

$$q_H = \left(1 - \frac{y_c}{l_p}\right)q_{p1} + \left(\frac{y_c}{l_p}\right)q_{p2} \quad (5.6)$$

Que se puede expresar como:

$$q_H = S_{p1}(y_c)q_{p1} + S_{p2}(y_c)q_{p2} \quad (5.7)$$

De modo que las funciones de interpolación S_{p1} y S_{p2} y el vector de grados de libertad del punto de contacto del pantógrafo son \mathbf{q}_{cp} :

$$S_{p1} = 1 - \frac{y_c}{l_p}; \quad S_{p2} = \frac{y_c}{l_p}; \quad \mathbf{q}_{cp} = (q_{p1} \quad q_{p2})^T \quad (5.8)$$

Recuérdese que en el modelo básico de masas y resortes el vector de grados de libertad del pantógrafo (\mathbf{q}_{cp}) está formado únicamente por la coordenada q_1 , que coincide con la coordenada q_H definida anteriormente. Además, sólo existe una función de forma S_p , cuyo valor es 1.

La energía de deformación asociada al resorte k_H es:

$$U = \frac{1}{2}k_H(q_{cc} - q_H)^2 \quad (5.9)$$

Para compactar el desarrollo, se define el vector de grados de libertad del elemento de contacto \mathbf{q}_c , que incluye los asociados al elemento cable correspondiente de la catenaria y la coordenada asociada a los grados de libertad del colector del pantógrafo:

$$\mathbf{q}_c = (q_{i,3} \quad q_{i,6} \quad q_{j,3} \quad q_{j,6} \quad \mathbf{q}_{cp})^T = (q_{i,3} \quad q_{i,6} \quad q_{j,3} \quad q_{j,6} \quad q_{p1} \quad q_{p2})^T \quad (5.10)$$

También se define la matriz de funciones de forma \mathbf{S}_c :

$$\mathbf{S}_c = (S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad -S_{p1} \quad -S_{p2})^T \quad (5.11)$$



De esta forma, la energía de deformación del resorte de contacto se puede expresar como:

$$U = \frac{1}{2} k_H (\mathbf{S}_c \mathbf{q}_c)^2 \quad (5.12)$$

El vector de fuerzas elásticas equivalente se obtiene a partir de la derivada de la energía de deformación con respecto a las coordenadas nodales:

$$\mathbf{F}_{el} = k_H \mathbf{S}_c^T \mathbf{S}_c \mathbf{q}_c \quad (5.13)$$

Expresando esta ecuación del siguiente modo:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{K}_c \mathbf{q}_c \quad (5.14)$$

Es posible definir la matriz de rigidez asociada al elemento de contacto en función de las funciones de forma:

$$\mathbf{K}_c(t) = k_H \mathbf{S}_c^T \mathbf{S}_c \quad (5.15)$$

Puesto que las funciones de interpolación varían para cada posición del contacto entre pantógrafo y catenaria, esta matriz dependerá del tiempo.

En la evolución dinámica del contacto, es posible que en ciertos intervalos de tiempo se produzca una separación entre la cabeza de captación del pantógrafo y la catenaria. Este caso es fácilmente detectable evaluando la fuerza de contacto entre ambos.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





6. MÚLTIPLES PANTÓGRAFOS.

En este capítulo se desarrolla una metodología para la simulación de los casos en que varios pantógrafos se encuentren interactuando simultáneamente con la línea aérea de contacto.

El proceso de simulación considerado hasta el momento se basa en el cálculo de la configuración de equilibrio estático de la catenaria con la fuerza del pantógrafo aplicada en el instante $t = 0$ s. A partir de ese momento, el pantógrafo comienza a avanzar a la velocidad de servicio a lo largo del trazado hasta completar la distancia de simulación.

La presencia de más pantógrafos, separados entre sí una distancia constante que suele ser del orden de 200 metros, obligaría a incrementar el número de vanos adicionales para la obtención de la posición inicial de la catenaria debida a las fuerzas aplicadas de todos los pantógrafos, lo que aumentaría el tiempo de cálculo de la integración.

Por este motivo, en el presente trabajo se ha desarrollado una alternativa para simular la interacción entre catenaria y múltiples pantógrafos, consistente en la aplicación de la fuerza de contacto de cada uno de ellos gradualmente a lo largo de una distancia de subida hasta ejercer la fuerza total indicada.

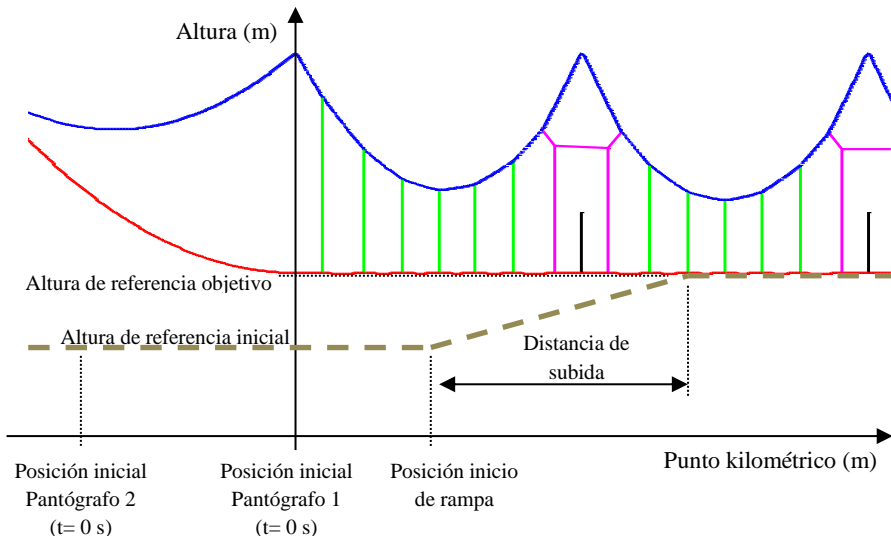


Figura 6.1. Distancia de subida en múltiples pantógrafos.

Con el fin de conseguir este efecto, cada pantógrafo parte de una posición inferior a la altura de la catenaria, en la que no hay contacto, y asciende linealmente hasta alcanzar la altura de referencia objetivo (Figura 6.1). En cada paso de tiempo t se realiza el siguiente procedimiento para cada pantógrafo:

1. Cálculo de la posición del punto de contacto sobre el cable de contacto x_c en función de la velocidad del tren (ver ecuación (5.3)).
2. Determinación del elemento de contacto y la coordenada local del elemento χ_c en el punto de contacto de la catenaria y obtener la posición vertical q_{cc} , definida en la ecuación (5.5).
3. Cálculo de la altura de la masa superior o del punto de contacto sobre el pantógrafo q_H en función de la posición de la rampa de subida (ver Figura 6.1).
4. Obtención de la distancia de interpenetración dz entre los dos sistemas.



$$dz = (q_{cc} - q_H) \quad (6.1)$$

5. Cálculo de la fuerza de contacto por el método de penalti, con una rigidez de contacto k_H .

$$F_c = \begin{cases} -k_H dz & \text{si } dz < 0 \\ 0 & \text{si } dz > 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

6. Cálculo de la fuerza equivalente en nodos del elemento de contacto sobre la catenaria.

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{S}_c F_c \quad (6.3)$$

Donde \mathbf{S}_c es la matriz de funciones de forma del elemento de contacto incluyendo únicamente los términos correspondientes a la catenaria.

7. Ensamblado de la fuerza de contacto sobre la catenaria en el vector de fuerzas internas global.

Como se ha indicado anteriormente, este procedimiento se repite con cada uno de los pantógrafos y en cada instante de tiempo hasta finalizar la simulación.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





7. INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

En el presente capítulo se muestran las ecuaciones del equilibrio dinámico particularizadas para los sistemas catenaria y pantógrafo. En concreto se expone la naturaleza de los términos que figuran en ellas (no linealidad y/o dependencia del tiempo) así como las posibles simplificaciones que se pueden llevar a cabo durante la integración dinámica. A continuación, se aborda el problema de la integración dinámica de las ecuaciones resultantes de la semi-discretización de elementos finitos mediante integración directa por métodos implícitos.

7.1. MODELO DE AMORTIGUAMIENTO.

La estructura de cables que forman el sistema de la catenaria presenta como mecanismos de disipación de energía un amortiguamiento de tipo histerético. Este amortiguamiento es inherente al material y es producido por plasticidad a una escala muy pequeña y otros fenómenos. La energía disipada por ciclo es independiente de la frecuencia de oscilación.

En general, en los problemas estructurales, como es el caso de la catenaria, suele utilizarse un modelo de amortiguamiento de tipo viscoso, ya que el amortiguamiento suele ser lo suficientemente pequeño para que la respuesta se pueda modelar con precisión considerándolo de este tipo. Además, es el tipo de amortiguamiento más sencillo de introducir en las ecuaciones dinámicas del modelo.

En este trabajo se ha empleado la técnica de amortiguamiento proporcional o de Rayleigh, en la que la matriz de amortiguamiento global \mathbf{C} se define como una combinación lineal de las matrices de rigidez y masa del sistema:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (7.1)$$

No obstante, esta técnica hace que el amortiguamiento del sistema sea dependiente de la frecuencia.

7.2. MODELOS DINÁMICOS DEL SISTEMA.

El modelo dinámico de la catenaria corresponde al equilibrio de fuerzas, añadiendo a las planteadas para el caso estático los efectos inerciales y las características disipativas. En el caso considerado pueden expresarse como:

$$\mathbf{M}_{cat}\ddot{\mathbf{q}}_{cat} + \mathbf{C}_{cat}\dot{\mathbf{q}}_{cat} + \mathbf{F}_{el\ cat}(t, \mathbf{q}_{cat}) = \mathbf{F}_{ext\ cat}(t, \mathbf{q}_{cat}) + \mathbf{F}_{g\ cat} \quad (7.2)$$

Los términos inerciales son lineales con la aceleración ya que se han obtenido matrices de masa constantes para los diferentes elementos que constituyen el sistema. Debido a que no es posible modelar con precisión los efectos disipativos (amortiguamiento), se consideran lineales y definidos a través de la matriz de amortiguamiento viscoso \mathbf{C}_{cat} , tal y como se indica en el apartado 7.1, empleando la matriz de rigidez \mathbf{K}_{cat} linealizada. Las fuerzas exteriores corresponden a las gravitatorias (constantes) y a las de interacción con el pantógrafo (si no se considera conjuntamente con la catenaria). En el modelo estático, las fuerzas elásticas son no-lineales con los desplazamientos nodales y están representadas por el vector $\mathbf{F}_{el\ cat}$. Estas no-linealidades provienen del propio modelo desarrollado para los elementos que componen la catenaria (elementos cable y barra) y adicionalmente del posible destensado de péndolas. Se supone unilateralidad en las péndolas, de forma que no se consideran aquellas que para un instante de tiempo presentan fuerzas de compresión.

Para obtener la posición inicial de equilibrio de la catenaria con precisión se han considerado las no-linealidades del sistema. Sin embargo, el estrecho rango de desplazamientos originados por la interacción con el pantógrafo permite aplicar la hipótesis de pequeños desplazamientos y obtener un problema linealizado, que mejora los tiempos de cálculo asociados sin que exista una pérdida de precisión importante, tal y como se vio en el capítulo 4:

$$\mathbf{M}_{cat}\ddot{\mathbf{q}}_{cat} + \mathbf{C}_{cat}\dot{\mathbf{q}}_{cat} + \mathbf{K}_{cat}\mathbf{q}_{cat} = \mathbf{F}_{ext\ cat}(\mathbf{q}_{cat}) \quad (7.3)$$

La matriz de rigidez \mathbf{K}_{cat} corresponde a la matriz tangente, que se definió en la formulación del problema estático. Puesto que se linealiza alrededor de



la posición de equilibrio estático, el vector de fuerzas externas no debe incluir las fuerzas gravitatorias. Las no-linealidades asociadas a la unilateralidad de las péndolas y de la fuerza de contacto a través del vector de fuerzas externas se mantienen en estas ecuaciones.

Teniendo en cuenta el modelo de pantógrafo, definido en el apartado 2.5, y el modelo de contacto en el capítulo 5, el modelo completo del sistema que considera las no-linealidades de la catenaria corresponde a una ecuación del tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{el}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (7.4)$$

El vector \mathbf{q} representa ahora el conjunto de grados de libertad asociados a la catenaria y el pantógrafo y los diferentes vectores y matrices provienen del ensamblado de ambos subsistemas y del elemento de contacto. Las fuerzas elásticas dependen del tiempo debido al elemento de contacto.

En el caso en el que se considere el modelo linealizado de catenaria, se plantea el problema como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, t)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7.5)$$

La matriz $\mathbf{K}(\mathbf{q}, t)$ del sistema proviene del ensamblado de las matrices de rigidez de los modelos de catenaria (matriz tangente), pantógrafo y contacto. Se ha remarcado que depende de la posición del sistema, ya que por una parte debe considerar la no-linealidad asociada a unilateralidad de péndolas y contacto, y por otra que depende del tiempo debido al elemento de contacto.

Separando los vectores de grados de libertad nodales según se traten de grados de libertad asociados a la catenaria o al pantógrafo, y a través del elemento de contacto, se puede mostrar de manera explícita el acoplamiento entre ambos sistemas. De este modo se obtiene para el caso de catenaria lineal (pequeños desplazamientos):

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cat} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{pan} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{cat} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{pan} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cat} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{pan} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{cat} \\ \dot{\mathbf{q}}_{pan} \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cat} & \mathbf{K}_c(t) \\ \mathbf{K}_c(t) & \mathbf{K}_{pan} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{cat} \\ \mathbf{q}_{pan} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{cat}(\mathbf{q}_{cat}, t) \\ \mathbf{F}_{pan} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

En esta ecuación se han considerado las no-linealidades debidas a la unilateralidad de las péndolas en el sistema catenaria como fuerzas externas $\mathbf{F}_{cat}(\mathbf{q}_{cat}, t)$, pues resulta computacionalmente más eficiente y sencillo de implementar. De este modo, la matriz de rigidez del sistema catenaria \mathbf{K}_{cat} es constante e independiente del tiempo.

7.3. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

Conocida la configuración del sistema en un instante t (y en algunos casos de instantes anteriores), los métodos de integración numérica paso a paso permiten calcularla en el instante $t+\Delta t$. En dinámica estructural, el valor de Δt suele mantenerse constante a lo largo de la integración para simplificar el algoritmo. Estos métodos se basan en hacer cumplir las ecuaciones de comportamiento dinámico del sistema en tiempos discretos y una serie de hipótesis relativas a la evolución del sistema entre instantes de tiempo. La precisión en la integración numérica es mayor a medida que Δt es más pequeño, a costa de incrementar el tiempo de cálculo.

El problema de interacción dinámica pantógrafo-catenaria tiene una característica adicional que puede influir en la selección del método: la existencia de unilateralidades en péndolas y en contacto se producirá entre instantes de tiempo de cálculo, con lo que se modelará de forma más adecuada a medida que Δt sea menor y se capture con mayor precisión esta característica. Otro de los fenómenos presentes en este problema es la propagación de ondas y perturbaciones generadas por la carga móvil del pantógrafo en su interacción con el sistema discretizado en elementos finitos.



La presencia de estas perturbaciones hace que pueda ser deseable la introducción de cierta disipación numérica en el algoritmo de integración.

Los algoritmos de integración numérica se pueden clasificar en explícitos e implícitos. Básicamente, las diferencias entre ambos tipos de métodos están relacionadas con la estabilidad y el tiempo de cálculo. En el caso de los algoritmos explícitos, la posición del sistema es explícitamente una función de magnitudes de pasos de integración anteriores, y son condicionalmente estables, lo que significa que existe un tamaño de paso crítico Δt_{cr} de forma que si se utiliza un tamaño de paso $\Delta t > \Delta t_{cr}$ el método se hace inestable, por lo que exige el empleo de incrementos de tiempo pequeños (en ocasiones más por razones de estabilidad que de precisión). En cambio, en los algoritmos implícitos la posición del sistema depende de magnitudes en el propio instante de cálculo. Los métodos implícitos normalmente utilizados son incondicionalmente estables, debiéndose seleccionar el paso de integración únicamente por motivos de precisión.

En general en los métodos explícitos será necesario utilizar un Δt más pequeño que en los implícitos. Es decir, para calcular la evolución del sistema en un tiempo total dado será necesario realizar más pasos mediante un algoritmo explícito. No obstante, el problema a resolver en cada paso de la integración es más simple que en el caso de los implícitos, por lo que el tiempo de cálculo de cada paso de integración es menor. De esta forma, en muchas ocasiones no es posible predecir qué tipo de algoritmo es más conveniente.

En base a estas consideraciones, en [5] se plantea la resolución de un problema sencillo pero con similitudes al problema de interacción pantógrafo-catenaria y con solución analítica conocida, y se analiza mediante un método explícito (Runge-Kutta de cuarto orden) y otros implícitos (Newmark y HHT) con el fin de extraer información cualitativa acerca de la familia de métodos más apropiada para resolver el problema. De este estudio se concluye que los métodos de Newmark y HHT son los más eficaces para resolver el problema planteado.



En los siguientes apartados se presentan dichos esquemas de integración en mayor detalle.

7.3.1. Método de Newmark.

Los métodos de la familia de Newmark son unos de los más empleados tradicionalmente en los problemas de dinámica estructural. En el caso de la resolución de un problema lineal, en la integración temporal se efectúa una predicción y una corrección, mientras que en un sistema no-lineal puede ser necesaria la obtención de la corrección a través de un procedimiento iterativo. La ecuación de equilibrio dinámico puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{F}_{ext} \quad (7.7)$$

Donde $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ es el vector de residuos. El problema se trata pues de resolver el sistema no lineal:

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}^{t+\Delta t}) = 0 \quad (7.8)$$

Utilizando las siguientes predicciones para los desplazamientos, velocidades y aceleraciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_p^{t+\Delta t} &= \mathbf{q}^t + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^t + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{q}}^t \\ \dot{\mathbf{q}}_p^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}^t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}^t \\ \ddot{\mathbf{q}}_p^{t+\Delta t} &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Así, las correcciones a los desplazamientos se obtienen de manera iterativa para k resolviendo el siguiente sistema lineal:

$$\mathbf{K}_I \Delta \mathbf{q}_k = -\mathbf{r}(\Delta \mathbf{q}_k^{t+\Delta t}) \quad (7.10)$$

Donde \mathbf{K}_I es la matriz de iteración del método, expresada como:

$$\mathbf{K}_I(\mathbf{q}) = \mathbf{K}^T + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C}^T + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M}^T \quad (7.11)$$

En cada paso de tiempo y para cada k , la corrección $\Delta\mathbf{q}_k$ se calcula como:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{c,k}^{t+\Delta t} &= \mathbf{q}_{c,k-1}^{t+\Delta t} + \Delta\mathbf{q}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_{c,k}^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}_{c,k-1}^{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\mathbf{q}_k \\ \ddot{\mathbf{q}}_{c,k}^{t+\Delta t} &= \ddot{\mathbf{q}}_{c,k-1}^{t+\Delta t} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta\mathbf{q}_k \end{aligned} \quad (7.12)$$

La iteración dentro de la fase de corrección se realiza hasta que el nuevo residuo es menor que una cierta tolerancia prefijada.

En cuanto a la estabilidad del sistema, se demuestra que los métodos de la familia de Newmark son incondicionalmente estables (en el caso lineal) cuando:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (7.13)$$

Y presentan estabilidad condicional en los siguientes casos:

$$\gamma \geq \frac{1}{2}; \beta < \frac{1}{2}\gamma; \Delta t \leq \frac{\Omega_{cr}}{\omega_{max}} = \frac{\Omega_{cr} T_{min}}{2\pi} \quad (7.14)$$

Donde ω_{max} y su periodo T_{min} corresponden a la frecuencia natural más alta del sistema y Ω_{cr} se define como:

$$\Omega_{cr} = \frac{\xi \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^3 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^2}}{\frac{1}{2} - \beta} \quad (7.15)$$

Siendo ξ la tasa de amortiguamiento del modo de más alta frecuencia. Estos modos de alta frecuencia pueden no ser interesantes en la solución o proceder de oscilaciones de naturaleza no física asociadas a la discretización



de elementos finitos, por lo que podría ser recomendable introducir una cantidad arbitraria de amortiguamiento incrementando el valor de ζ .

7.3.2. Método HHT.

El método propuesto por Hilbert, Hughes y Taylor puede ser considerado como una generalización de los métodos de la familia de Newmark con el objetivo de poder introducir amortiguamiento numérico sin degradar el orden de convergencia de cuadrático a lineal. Este método emplea las aproximaciones de Newmark y la siguiente ecuación discretizada en el tiempo del movimiento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} + (1+\alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^t + (1+\alpha)\mathbf{K}\mathbf{q}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{q}^t = \mathbf{F}_{ext}^{t+(1+\alpha)\Delta t} \quad (7.16)$$

Evidentemente, si $\alpha = 0$ se obtiene de nuevo el método de Newmark. Si los parámetros del método son seleccionados de tal modo que:

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]; \quad \gamma = \frac{1-2\alpha}{2}; \quad \beta = \frac{(1-\alpha^2)}{4} \quad (7.17)$$

El método es incondicionalmente estable y de segundo orden. El amortiguamiento numérico introducido se controla a través del parámetro α , de modo que para $\alpha = 0$ se tiene la regla del trapecio (sin amortiguamiento numérico). Disminuyendo el valor de α se aumenta la cantidad de disipación introducida.



8. ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LOS DIFERENTES MODELOS.

A continuación se realiza un análisis de la influencia de los diferentes elementos y modelos desarrollados en el presente Trabajo Fin de Máster. Para ello, se han llevado a cabo simulaciones con distintos tipos de catenaria y pantógrafos y se han comparado con los resultados obtenidos con el modelo sin considerar dichos elementos.

En concreto, se analizan los efectos estáticos y dinámicos del elemento cable modificado, así como de la representación del conjunto de suspensión en el cable sustentador y del sistema de compensación mecánica. Finalmente, se muestran ejemplos de aplicación con el modelo de pantógrafo de 7 grados de libertad y de dos pantógrafos en contacto simultáneo con la catenaria.

8.1. INFLUENCIA DEL ELEMENTO CABLE MODIFICADO.

8.1.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo AVE.

Para determinar el efecto del elemento cable modificado sobre la posición de equilibrio inicial de los cables se ha analizado la tensión en el cable sustentador para una catenaria con la tipología típica de las líneas de Alta Velocidad Española.

Este tipo de catenaria consiste en dos vanos extremos (el primero y el último) de inicio y final del cantón; dos vanos de transición (el segundo y el penúltimo), en los que uno de los postes no presenta tirantes ni cables Y; y los vanos interiores o centrales, en los cuales sí que aparecen brazos de registro y cables Y. En el poste intermedio se establece un punto fijo, restringiendo el movimiento de la catenaria en dirección vertical y horizontal.

La catenaria del ejemplo está formada por un cantón con 11 postes, separados 65 metros entre sí. La altura del punto de unión del cable sustentador con los postes es de 6.6 metros y la altura deseada para el cable de contacto es de 5.3 metros. El escalonamiento deseado para el cable de contacto es de 0.2 metros en total, y las longitudes de los brazos de registro se han fijado a 1 metro.

Cada vano se compone de 7 péndolas, dispuestas a las siguientes distancias medidas desde el primer poste del vano:

Péndola	1	2	3	4	5	6	7
x (m)	6.00	15.48	24.18	32.5	40.82	49.52	59.00

Tabla 8.1. Posición de las péndolas a lo largo de un vano.

La anchura del cable Y en el cable de contacto y sustentador es, respectivamente, 12 y 18 metros.

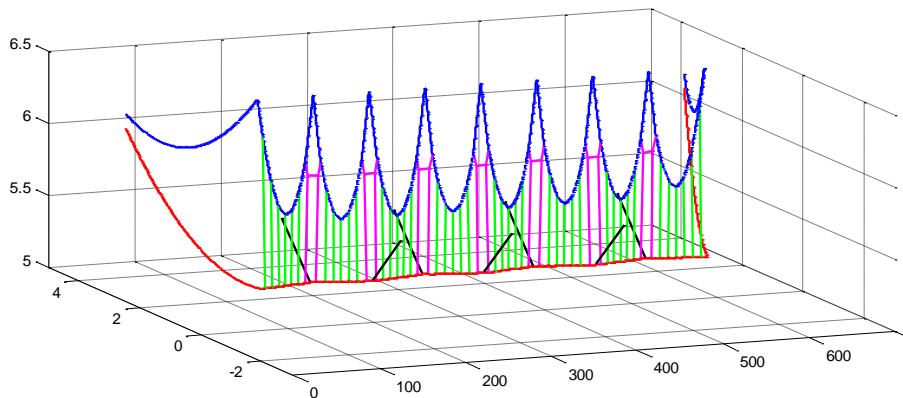


Figura 8.1. Catenaria tipo AVE.

Las propiedades mecánicas de los distintos elementos son las mostradas en la Tabla 8.2:



Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Tensión cable de contacto	31500 N	Tensión cable sustentador	15750 N
Densidad cable de contacto	1.37 kg/m	Densidad cable sustentador	0.86 kg/m
Sección cable de contacto	150 mm ²	Sección cable sustentador	94.8 mm ²
Módulo elástico cable de contacto	1.1 · 10 ¹¹ N/m ²	Módulo elástico cable sustentador	1.1 · 10 ¹¹ N/m ²
Momento de inercia cable de contacto	2.17 · 10 ⁻⁹ m ⁴	Momento de inercia cable sustentador	1.24 · 10 ⁻⁹ m ⁴
Tensión cables Y	3500 N	Densidad cables Y	0.09 kg/m
Sección cables Y	10 mm ²	Módulo elástico cables Y	1.1 · 10 ¹¹ N/m ²
Densidad péndolas	0.09 kg/m	Sección péndolas	10 mm ²
Módulo elástico péndolas	1.1 · 10 ¹¹ N/m ²	Densidad brazo de registro	1 kg/m
Sección brazo de registro	100 mm ²	Módulo elástico péndolas	1.1 · 10 ¹¹ N/m ²
Masa de grifas cable sustentador	0.2125 kg	Masa de grifas cable Y	0.2125 kg
Masa de grifas cable de contacto	0.2125 kg		

Tabla 8.2. Propiedades mecánicas catenaria tipo AVE.

8.1.2. Modelo de pantógrafo.

El modelo de pantógrafo empleado para las simulaciones sobre la catenaria tipo AVE corresponde a un sistema de parámetros concentrados de masas-resortes de 3 etapas como el que se presenta a continuación, con los valores que se definen en la Tabla 8.3.

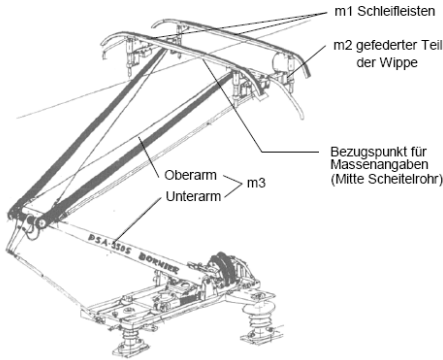


Figura 8.2. Modelo pantógrafo DSA 380 EU.

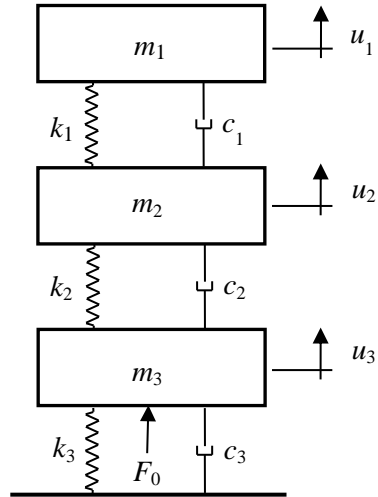


Figura 8.3. Modelo de pantógrafo.

Pantógrafo	
m_1 (kg)	6.6
m_2 (kg)	5.8
m_3 (kg)	5.8
c_1 (Ns/m)	0
c_2 (Ns/m)	0
c_3 (Ns/m)	70
k_1 (N/m)	7000
k_2 (N/m)	14100
k_3 (N/m)	80
F_0 (N)	120

Tabla 8.3. Datos del pantógrafo.

8.1.3. Aplicación del elemento cable modificado.

El elemento cable modificado produce un salto en la tensión de los cables en aquellos puntos de unión con otros elementos. La posición de las péndolas es vertical, por lo que no debe apreciarse los efectos en estos

elementos. Sin embargo, las péndolas del cable Y sí que presentan cierta inclinación en la unión con el cable sustentador. En la Figura 8.4 se ha analiza la tensión en el nodo que conecta elementos cable del hilo sustentador con un elemento barra del cable Y:

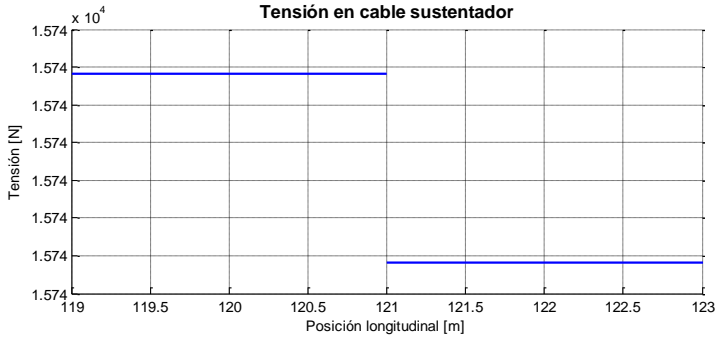


Figura 8.4. Tensión en el cable sustentador considerando el elemento cable modificado.

En la figura anterior se observa el salto de tracción entre los elementos cable unidos por dicho nodo. No obstante, la diferencia en el valor de la tensión es muy pequeña, por lo que no es de esperar que la consideración de este elemento introduzca diferencias sustanciales en la fuerza de contacto inducida por un pantógrafo respecto de la simulación con el elemento cable formulado originalmente:

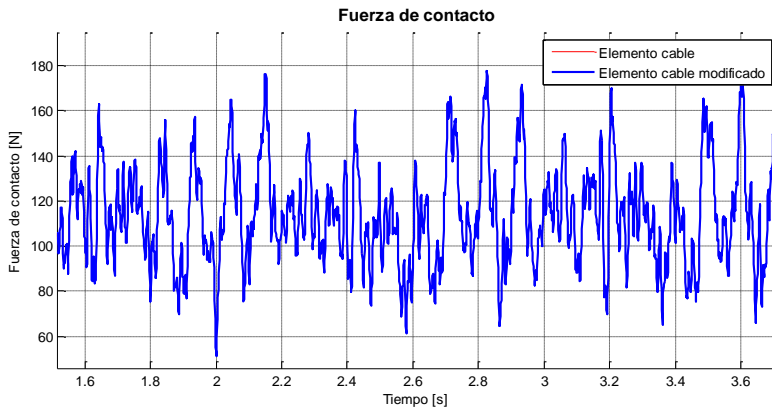


Figura 8.5. Influencia del elemento cable modificado, para una velocidad de 300 km/h.



8.2. INFLUENCIA DEL ELEMENTO SUSPENSIÓN EN CABLE SUSTENTADOR.

8.2.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo AVE.

La catenaria empleada para analizar el efecto del elemento suspensión en el cable sustentador es la descrita en el apartado 8.1.1, tipo AVE, con las mismas características y propiedades mecánicas.

En cuanto a los parámetros del propio elemento, se definen los siguientes valores de rigidez y amortiguamiento:

Parámetro	Valor
Rigidez elemento suspensión	500000 kN/m
Amortiguamiento elemento suspensión	1000 kN·s/m

Tabla 8.4. Propiedades elemento suspensión en cable sustentador.

8.2.2. Modelo de pantógrafo.

El pantógrafo empleado en este apartado para simular el efecto del elemento suspensión es el detallado en la Figura 8.3 y la Tabla 8.3.

8.2.3. Aplicación del elemento suspensión en cable sustentador.

La presencia de un resorte y un amortiguador en el soporte del cable sustentador de cada ménsula modifica la posición de equilibrio inicial de la catenaria, ya que las restricciones de los nodos correspondientes a esos puntos no son las mismas, permitiendo cierto movimiento vertical de dichos elementos.

Se puede comprobar, por ejemplo, que las longitudes de las péndolas son ligeramente diferentes e inferiores respecto al caso sin suspensión, lo que da lugar a una posición diferente del cable sustentador. En la siguiente tabla

aparecen las longitudes de las péndolas centrales de un vano cualquiera de la catenaria tipo AVE, considerando y sin considerar el elemento suspensión:

Péndola	1	2	3	4	5
Longitud sin elemento suspensión (mm)	636.5	478.3	428.6	478.3	636.5
Longitud con elemento suspensión (mm)	633.7	475.6	425.8	475.6	633.7

Tabla 8.5. Comparación longitudes de péndolas considerando y sin considerar el elemento suspensión en cable sustentador.

Dichas diferencias en la posición inicial de los distintos elementos, unidas a la eliminación de la restricción de desplazamientos verticales de los nodos en estos elementos, provocan que la fuerza de contacto inducida por el pantógrafo presente diferencias en comparación a un caso en el que no se considere el elemento suspensión. En la Figura 8.6 se muestra una comparación de ambas simulaciones para una velocidad de 300 km/h.

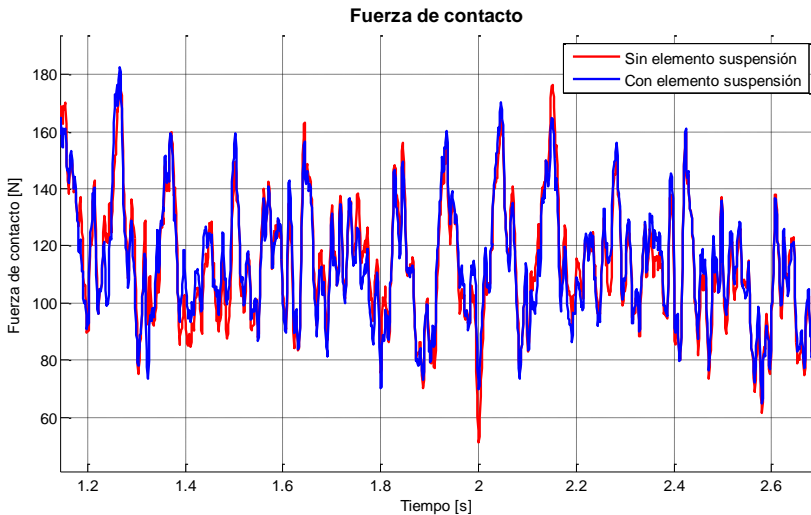


Figura 8.6. Influencia elemento suspensión en cable sustentador.

8.3. INFLUENCIA DEL ELEMENTO MASA DE COMPENSACIÓN.

8.3.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo Norma EN 50318.

Con el fin de determinar el efecto del elemento masa de compensación sobre la fuerza de contacto entre pantógrafo y catenaria se ha utilizado una catenaria con la tipología definida en la Norma EN 50318 [1], en la que se especifican los requisitos funcionales para la validación de los procedimientos de simulación.

Todos los vanos de esta catenaria son iguales, sin cables Y y con las péndolas igualmente distribuidas.

La catenaria del ejemplo está formada por un cantón con 21 postes, separados 55 metros entre sí. La altura del punto de unión del cable sustentador con los postes es de 1.2 metros y la altura deseada para el cable de contacto es de 0 metros. El escalonamiento, tanto para el cable de contacto como para el sustentador, es de 0.4 metros en total, y las longitudes de los brazos de registro se han fijado a 1.216 metros.

Cada vano se compone de 9 péndolas, dispuestas a las siguientes distancias medidas desde el primer poste del vano:

Péndola	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x (m)	4.5	10.25	16.0	21.75	27.5	33.25	39.0	44.75	50.5

Tabla 8.6. Posición de las péndolas a lo largo de un vano.

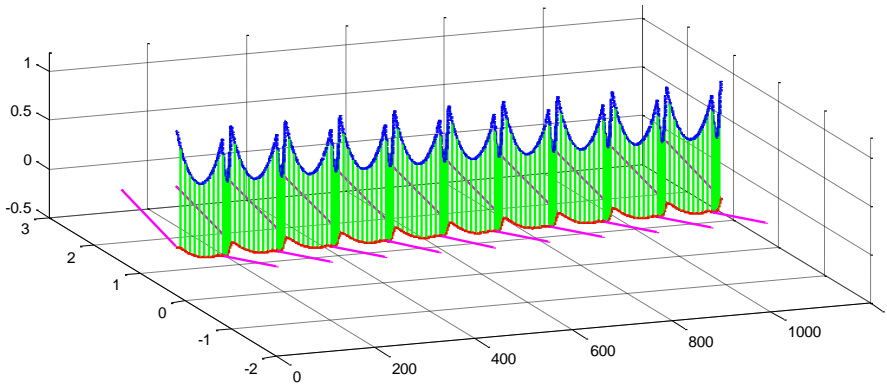


Figura 8.7. Catenaria tipo Norma EN 50318.

Las propiedades mecánicas de los distintos elementos son las mostradas en la Tabla 8.7:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Tensión cable de contacto	22000 N	Tensión cable sustentador	16000 N
Densidad cable de contacto	1.35 kg/m	Densidad cable sustentador	1.08 kg/m
Sección cable de contacto	150 mm ²	Sección cable sustentador	120 mm ²
Módulo elástico cable de contacto	1 · 10 ¹¹ N/m ²	Módulo elástico cable sustentador	9.7 · 10 ¹⁰ N/m ²
Momento de inercia cable de contacto	1.95 · 10 ⁻⁹ m ⁴	Momento de inercia cable sustentador	1.36 · 10 ⁻⁹ m ⁴
Densidad péndolas	0.12 kg/m	Sección péndolas	2 mm ²
Módulo elástico péndolas	1 · 10 ¹¹ N/m ²	Densidad brazo de registro	0.77 kg/m
Sección brazo de registro	0.935 mm ²	Módulo elástico péndolas	8.47 · 10 ¹⁰ N/m ²
Masa de grifas cable de contacto	0.195 kg	Masa de grifas cable sustentador	0.165 kg

Tabla 8.7. Propiedades mecánicas catenaria tipo AVE.

Para incluir en el modelo de elementos finitos los efectos del sistema de compensación mecánica de la catenaria es necesario definir los parámetros de rigidez y radios de poleas de este elemento:

Parámetro	Valor
Rigidez dirección longitudinal del cable	1 N/m
Rigidez dirección perpendicular del cable	1000 N/m
Radio polea contrapeso en cable sustentador	1 m
Radio polea cable en cable sustentador	0.3 m
Radio polea contrapeso en cable de contacto	1 m
Radio polea cable en cable de contacto	0.2 m

Tabla 8.8. Propiedades elemento masa de compensación.

8.3.2. Modelo de pantógrafo.

El modelo de pantógrafo empleado para las simulaciones sobre la catenaria definida en el apartado anterior corresponde nuevamente a un sistema de parámetros concentrados de masas-resortes de 3 etapas como el que se presenta a continuación, con los valores que se definen en la Tabla 8.9.

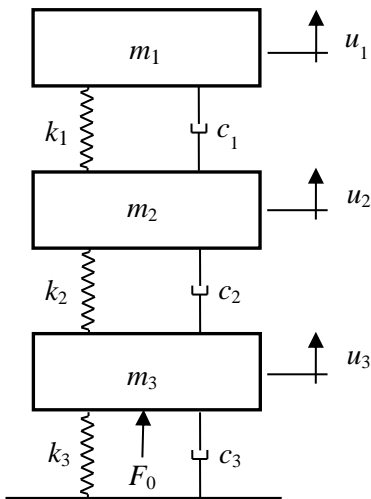


Figura 8.8. Modelo de pantógrafo.

Pantógrafo	
m_1 (kg)	7.5
m_2 (kg)	9
m_3 (kg)	6
c_1 (Ns/m)	45
c_2 (Ns/m)	0.1
c_3 (Ns/m)	100
k_1 (N/m)	7000
k_2 (N/m)	15500
k_3 (N/m)	160
F_0 (N)	127

Tabla 8.9. Datos del pantógrafo.

8.3.3. Aplicación del elemento masa de compensación.

El resorte del elemento masa de compensación se encuentra predeformado en la posición de configuración inicial de la catenaria, de modo que no introduce cambios significativos en la posición de equilibrio estático del resto de elementos del modelo.

Sin embargo, la finalidad del conjunto de compensación mecánica es adecuar la posición de los cables, y en ese sentido la interacción con el pantógrafo sí presenta diferencias respecto al modelo con los nodos extremos del cantón con todos los grados de libertad restringidos.

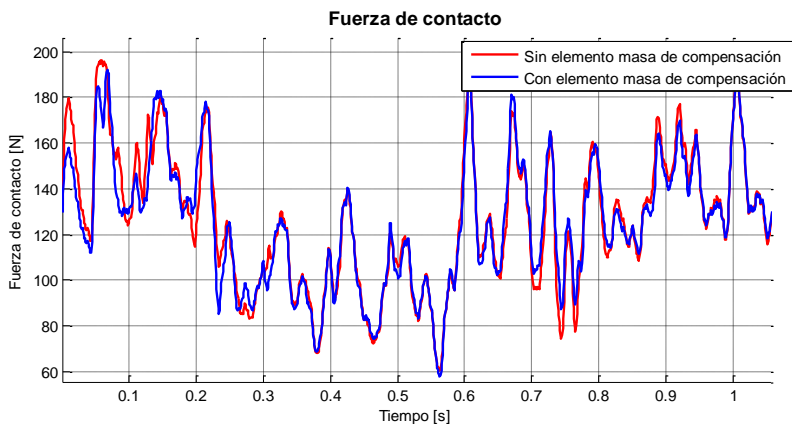


Figura 8.9. Influencia elemento masa de compensación al inicio de la catenaria.

Como puede observarse en la Figura 8.9, el paso del pantógrafo al comienzo de la catenaria produce un movimiento en la dirección longitudinal de los cables, cuyo resultado es una fuerza de contacto entre catenaria y pantógrafo menor si se considera este elemento. La influencia del elemento de compensación va disminuyendo conforme se avanza hacia los vanos centrales, y se vuelve a hacer notoria al aproximarse al final del cable de contacto.

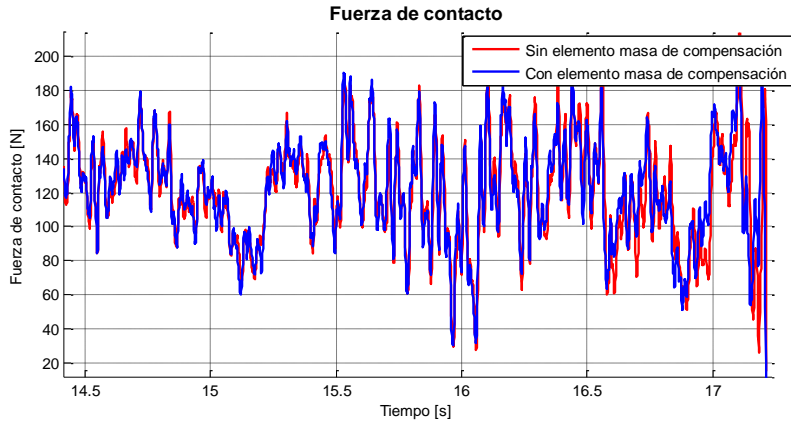


Figura 8.10. Influencia elemento masa de compensación al final de la catenaria.

8.4. APLICACIÓN DEL MODELO DE PANTÓGRAFO CON 7 GRADOS DE LIBERTAD.

8.4.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo Norma EN 50318.

La catenaria empleada para analizar la interacción pantógrafo-catenaria con los distintos modelos de pantógrafos es la descrita en el apartado 8.3.1, tipo Norma, con las mismas características y propiedades mecánicas.

8.4.2. Modelo de pantógrafo.

En la presente sección se han llevado a cabo dos simulaciones dinámicas empleando la misma catenaria, y a una velocidad de avance del pantógrafo de 230 km/h. La primera de ellas se ha realizado con el modelo de tres etapas definido en la Figura 8.8 y la Tabla 8.9.

En la segunda simulación se ha utilizado el modelo de pantógrafo de 7 grados de libertad, con el fin de comparar los resultados entre ambos. Para

ello, se ha asignado a los distintos parámetros del modelo unos valores tales que den lugar a un pantógrafo de características globales equivalentes al sistema de tres masas:

Pantógrafo 3 gdl	
m_1 (kg)	7.5
m_2 (kg)	9
m_3 (kg)	6
c_1 (Ns/m)	45
c_2 (Ns/m)	0.1
c_3 (Ns/m)	100
k_1 (N/m)	7000
k_2 (N/m)	15500
k_3 (N/m)	160
F_0 (N)	127

Tabla 8.10. Datos del pantógrafo de tres grados de libertad.

Pantógrafo 7 gdl	
m_1 (kg)	9
m_2 (kg)	6
m_{p1}, m_{p2} (kg)	3.5
c_1 (Ns/m)	0.1
c_2 (Ns/m)	100
$c_{p11}, c_{p12}, c_{p21}, c_{p22}$ (Ns/m)	11.25
k_1 (N/m)	15500
k_2 (N/m)	160
$k_{p11}, k_{p12}, k_{p21}, k_{p22}$ (N/m)	1750
J (m ⁴)	0.16
J_{p1}, J_{p2} (m ⁴)	0.625
l_p (m)	1
l_c (m)	0.58
F_0 (N)	127

Tabla 8.11. Datos del pantógrafo de siete grados de libertad.

Los valores de longitud de cada banda de frotamiento (l_p), así como la distancia entre ellos (l_c), se han obtenido de la bibliografía citada en el desarrollo del modelo ([10] y [11]).

8.4.3. Comparación de resultados entre los distintos modelos de pantógrafos.

En el pantógrafo de 7 grados de libertad existen dos puntos de contacto con la catenaria, por lo que la fuerza de contacto aparece dividida entre las dos bandas de frotamiento:

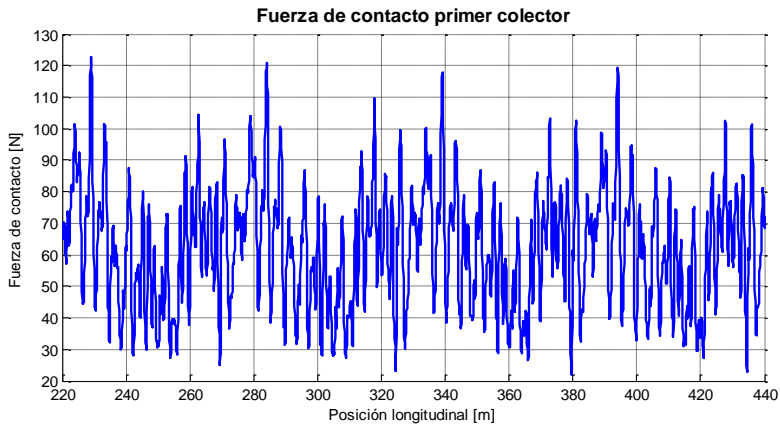


Figura 8.11. Fuerza de contacto de la primera banda de frotamiento.

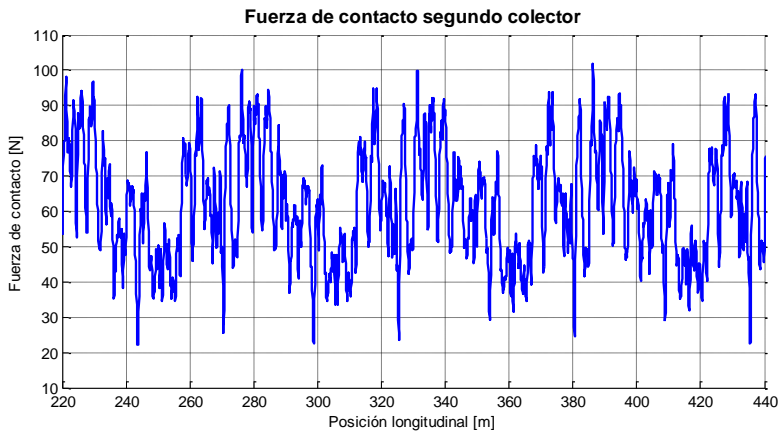


Figura 8.12. Fuerza de contacto de la segunda banda de frotamiento.

La composición de estas dos fuerzas da lugar a la fuerza de contacto total, la cual puede ser comparada con la obtenida con el pantógrafo formado por tres masas, ya que se ha tratado de obtener unas características equivalentes.

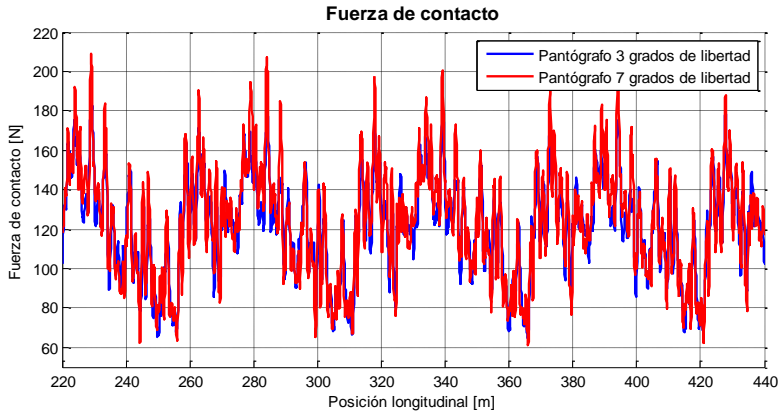


Figura 8.13. Comparación fuerza de contacto con modelos de pantógrafos de 3 y 7 gdl.

A simple vista, en la Figura 8.13 se observan diferencias en los máximos y mínimos de la fuerza de contacto, lo que conduce a la conclusión de que la rotación de los colectores o de la masa que representa la mesilla, así como la presencia de dos contactos en lugar de uno, ejercen cierta influencia en la interacción entre pantógrafo y catenaria.

Para estudiar este caso con mayor detalle, se analiza a continuación la rotación del primer colector a lo largo de cuatro vanos. Según muestra la figura siguiente, el giro máximo en cada sentido coincide con el paso por cada poste, pero el rango de variación no supera el $\pm 1^\circ$. Los pequeños cambios de dirección de la gráfica se deben al paso del colector por cada péndola.

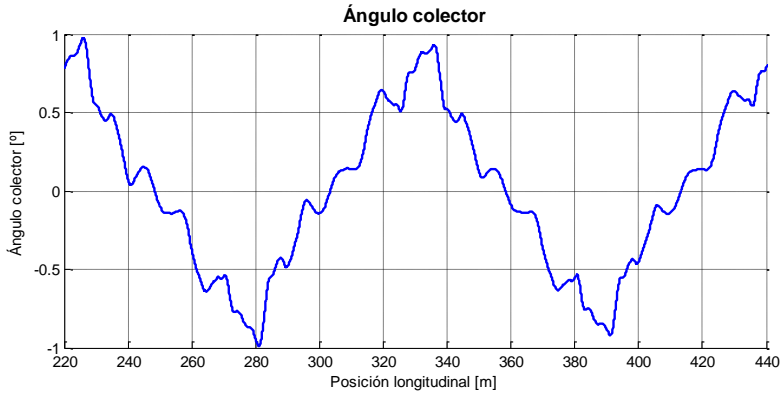


Figura 8.14. Ángulo de rotación del primer colector.

La variación del ángulo girado por el segundo colector presenta el mismo aspecto. Finalmente, se representa la rotación de la mesilla respecto de un eje perpendicular al trazado, a lo largo de los mismos cuatro vanos anteriores.

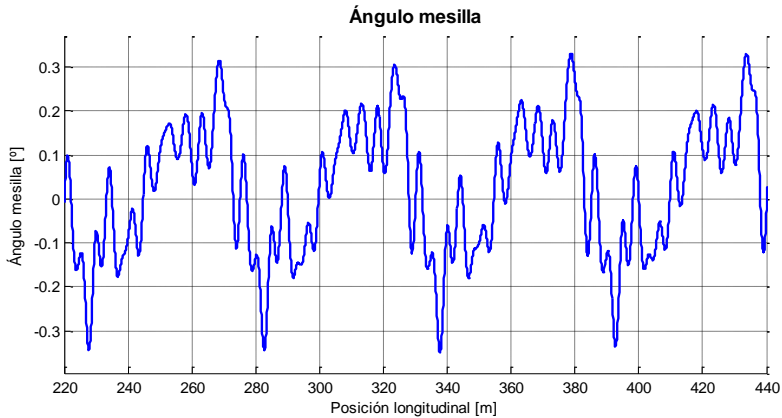


Figura 8.15. Ángulo de rotación de la mesilla.

La amplitud del ángulo girado en este caso es menor que el de los colectores. Dados los reducidos niveles de rotación en este modelo de pantógrafo, se puede concluir que las diferencias en los resultados se deben

mayoritariamente al efecto del primer colector sobre el segundo, ya que éste desplaza el cable conductor y el contacto tiene lugar en una posición distinta a la del primero. Además, esto demuestra que la hipótesis de pequeños desplazamientos para el modelo del pantógrafo puede ser aplicada sin introducir errores considerables en el proceso de simulación.

8.5. APLICACIÓN DE MÚLTIPLES PANTÓGRAFOS.

8.5.1. Descripción de la catenaria de ejemplo: tipo Norma EN 50318 extendida.

En el presente apartado se lleva a cabo la aplicación de la metodología para considerar el contacto de dos pantógrafos con la catenaria. Para ello se ha empleado un modelo de catenaria similar a la definida en la Norma EN 50318, a excepción de que presenta un vano inicial y otro final del cantón, del mismo modo que la catenaria tipo AVE detallada con anterioridad.

Las características geométricas y mecánicas son, por tanto, las indicadas en la sección 8.3.1, con la salvedad de la inclusión de dos postes más para dichos vanos adicionales.

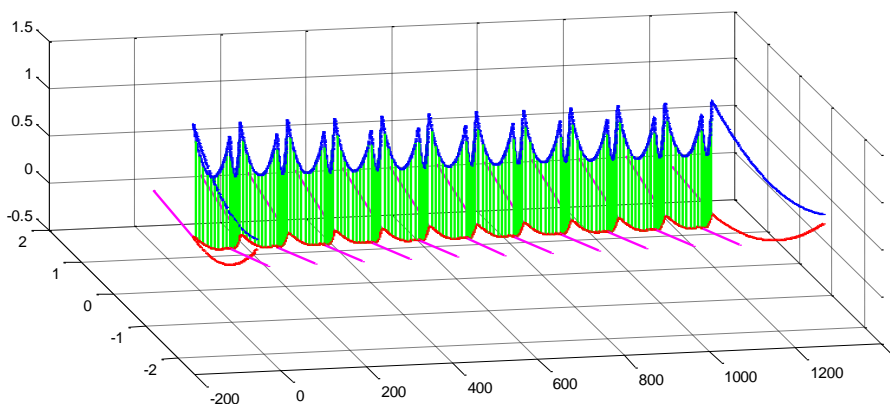


Figura 8.16. Catenaria tipo Norma EN 50318 Extendida.

8.5.2. Modelo de pantógrafo.

Los dos pantógrafos empleados para el análisis de interacción dinámica presentan las características del modelo de tres masas especificado en la Figura 8.8 y la Tabla 8.9. La separación entre ambos es de 200 metros, y la distancia de subida hasta la altura del cable de contacto es de 60 metros en el instante de paso por el primer poste.

8.5.3. Resultados.

A modo de ejemplo de presentación de resultados se muestra a continuación la fuerza de contacto para cada uno de los pantógrafos.

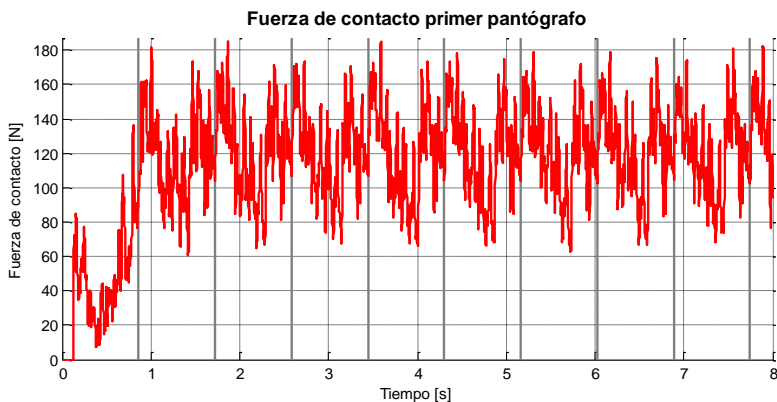


Figura 8.17. Fuerza de contacto del primer pantógrafo.

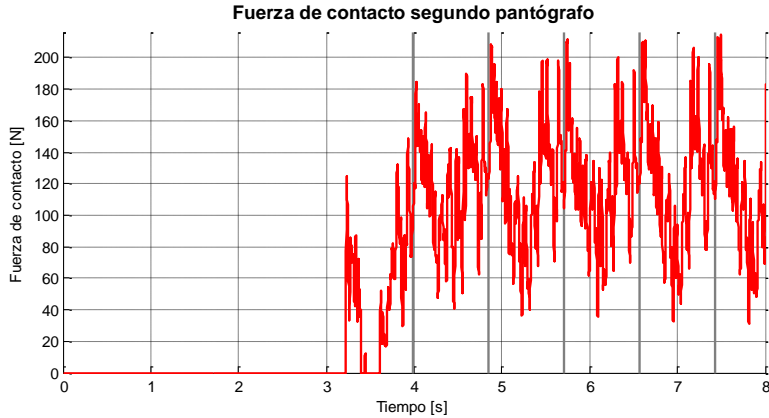


Figura 8.18. Fuerza de contacto del segundo pantógrafo.

En las gráficas obtenidas se observa el aumento gradual de la fuerza de contacto en los instantes de tiempo en que cada pantógrafo pasa por el primer poste. Una vez cada pantógrafo alcanza la altura de referencia objetivo (altura de la catenaria), la fuerza de contacto presenta un aspecto similar a las obtenidas considerando un único pantógrafo.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





9. APLICACIÓN DEL PROGRAMA. CATENARIA DE REFERENCIA.

La importancia de la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria para el correcto funcionamiento de la línea de alta velocidad hace que numerosos equipos de investigación se encuentren dedicados a su estudio. Algunos de ellos, entre los que se encuentra el Centro de Investigación de Tecnología de Vehículos de la Universitat Politècnica de València, han propuesto emplear el software desarrollado por cada uno de ellos para la simulación de una serie de casos, con el fin de comparar los resultados y validar los procesos de simulación.

En primer lugar, se introduce de manera general las diferencias en el planteamiento del problema por parte de cada uno de los códigos implementados. Seguidamente, se describe con detalle los datos geométricos, de material y condiciones de simulación con que se han ejecutado los diferentes análisis para, a continuación, presentar los resultados obtenidos en cada uno de estos casos. Finalmente, se realiza una comparación de los resultados analizando la dispersión entre ellos en aquellos aspectos más significativos.

9.1. INTRODUCCIÓN.

En el proyecto expuesto en el presente capítulo han participado 11 equipos de investigación procedentes de 9 países de Europa y Asia. Obviamente, las herramientas para el estudio del problema de interacción dinámica pantógrafo-catenaria desarrolladas por cada uno de ellos presentan diferencias relativas al modelo de la catenaria, el pantógrafo y el contacto entre ambos.

Para el modelo de la catenaria, la mayoría de equipos han empleado el método de los elementos finitos, aunque algunos de ellos han optado por el método de las diferencias finitas. Todos ellos tienen en cuenta la unilateralidad de las péndolas, pero sólo algunos consideran un modelo



tridimensional de la catenaria. Las diferencias más significativas se encuentran en el modelo de amortiguamiento de la catenaria utilizado por cada grupo de investigación, convirtiéndose en un aspecto influyente en el modelado de la misma.

En cuanto a los modelos utilizados para la representación del pantógrafo, todos los equipos participantes presentan sistemas de masas y resortes de varios grados de libertad. Algunos de ellos ofrecen más posibilidades, como la consideración de flexibilidad en el colector o el empleo de sistemas multicuerpo.

La mayoría de grupos emplean el método de penalti para considerar el contacto entre pantógrafo y catenaria. No obstante, una minoría ha optado por el uso de restricciones y su resolución mediante los multiplicadores de Lagrange.

Por último, las diferencias en el planteamiento del problema también comprenden la elección del método de integración numérica empleado. El método HHT o Newmark son los más utilizados, pero también han sido considerados métodos explícitos como Runge-Kutta, e incluso algunos presentan diferentes algoritmos de integración para el pantógrafo y para la catenaria, lo que resulta muy ventajoso si se considera un modelo multicuerpo del pantógrafo.

9.2. DATOS DE LA CATENARIA Y PANTÓGRAFO Y CASOS DE SIMULACIÓN.

Las características de la catenaria de referencia propuesta son similares a las líneas francesa LN2 e italiana C270 (lo que hace que también sea similar a la catenaria expuesta en la norma EN 50318), con variación de algunos de los parámetros.

9.2.1. Datos de la catenaria.

Los resultados a presentar son los de los 10 vanos centrales. Con el fin de amortiguar posibles perturbaciones debidas a la entrada en contacto al principio o a la reflexión de ondas en los extremos, se han dejado 5 vanos antes y 5 vanos después de los 10 centrales. Es decir, en la entrada de datos del programa se han introducido 21 postes, siendo los vanos situados entre los postes 6 y 16 los de objeto de comparación.

Los datos geométricos de los vanos son los siguientes:

- Longitud del vano L_s : 55 m.
- Altura de los postes H_s : 1.2 m.
- Altura del cable de contacto en los postes: 0 m.
- Altura del cable de contacto en el centro del vano h_c : -55 mm.
- Escalonamiento: ± 200 mm. (Tanto en el cable de contacto como en el sustentador).

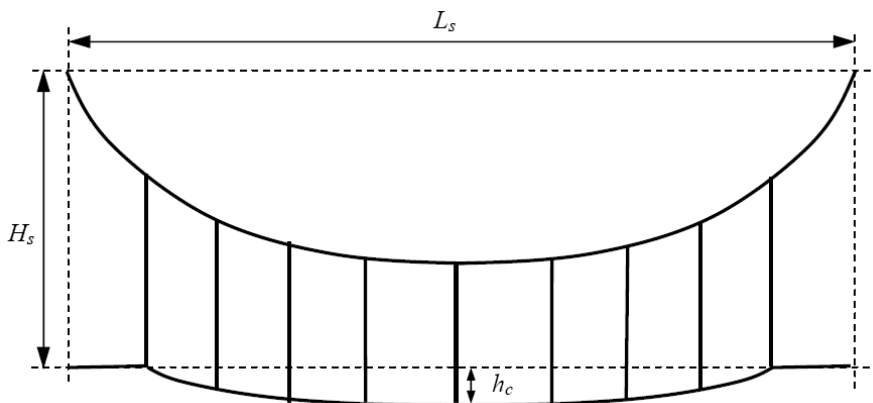


Figura 9.1. Datos geométricos de un vano de la catenaria.

9.2.1.1. Cable de contacto.

Las características del cable de contacto se especifican a continuación:



- Sección A_c : 150 mm^2 .
- Masa por unidad de longitud m_c : 1.35 kg/m .
- Densidad ρ_c : 9000 kg/m^3 .
- Tensión S_c : 22 kN .
- Módulo de Young E_c : $1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.
- Inercia J_c : $1.95 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$.
- Rigidez a flexión $E_c J_c$: 195 Nm^2 .

9.2.1.2. Cable sustentador.

Los datos geométricos y de material asociados al cable sustentador, encargado de soportar el peso del cable de contacto y las péndolas, son los siguientes:

- Sección A_{sust} : 120 mm^2 .
- Masa por unidad de longitud m_{sust} : 1.08 kg/m .
- Densidad ρ_{sust} : 9000 kg/m^3 .
- Tensión S_{sust} : 16 kN .
- Módulo de Young E_{sust} : $9.7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.
- Inercia J_{sust} : $1.3577 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$.
- Rigidez a flexión $E_{sust} J_{sust}$: 131.7 Nm^2 .

Igualmente, es necesario considerar las propiedades de rigidez y amortiguamiento de la ménsula en los puntos de unión con el cable sustentador:

- Rigidez k_w : 500000 kN/m .
- Amortiguamiento c_w : 1000 kNs/m .

9.2.1.3. Péndolas.

Desde el punto de vista de los efectos elásticos, las péndolas han sido modeladas como elementos bilineales cuya tensión es cero cuando están sometidas a compresión. Además, considerando los efectos inerciales, las



péndolas han sido modeladas como una barra con masa uniforme por unidad de longitud, con dos masas concentradas adicionales en los extremos, en representación de las grifas.

A continuación se presentan las características inerciales y de rigidez de estos elementos:

- Sección A_{pen} : 2 mm^2 .
- Masa por unidad de longitud m_{pen} : 0.117 kg/m .
- Densidad ρ_{pen} : 58500 kg/m^3 .
- Módulo de Young E_{pen} : $1.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.
- Rigidez axial $E_{pen} A_{pen}$: 200 kN .
- Masa grifa en cable sustentador M_{gsust} : 0.195 kg .
- Masa grifa en cable de contacto M_{gcont} : 0.165 kg/m .

En cada vano hay 9 péndolas, separadas entre sí 5.75 metros. La distancia entre el poste inicial y la primera péndola, así como la distancia entre la última péndola y el poste final es de 4.5 metros. Es decir, la posición longitudinal de las péndolas a lo largo del vano es:

Péndola	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x (m)	4.5	10.25	16.0	21.75	27.5	33.25	39.0	44.75	50.5

Tabla 9.1. Posición de las péndolas a lo largo de un vano.

Como dato adicional, se introduce la altura del cable de contacto en los puntos de unión con las péndolas:

Péndola	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altura (mm)	0	-24	-41	-52	-55	-52	-41	-24	0

Tabla 9.2. Altura del cable de contacto en los puntos de unión con las péndolas a lo largo de un vano.

Finalmente, también se ha detallado una longitud nominal de las péndolas. Estas longitudes son orientativas, pues el software de simulación las calcula al resolver el problema de configuración estática de la catenaria.

Péndola	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (m)	1.017	0.896	0.810	0.758	0.741	0.758	0.810	0.896	1.017

Tabla 9.3. Longitud nominal de las péndolas a lo largo de un vano.

9.2.1.4. Brazo de registro.

La catenaria dispone de tirantes con las siguientes dimensiones y propiedades:

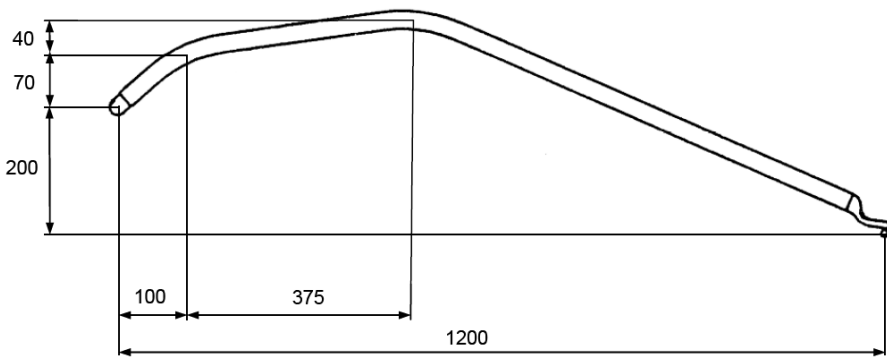


Figura 9.2. Brazo de registro catenaria de referencia.

- Masa por unidad de longitud m_{br} : 0.73 kg/m.
- Rigidez axial $E_{br} A_{br}$: 17000 kN.
- Rigidez a flexión $E_{br} J_{br}$: 1100 Nm².

La longitud total del tirante es la suma de las longitudes de cada tramo:

$$L_{total} = \sqrt{0.1^2 + 0.07^2} + \sqrt{0.375^2 + 0.04^2} + \sqrt{0.725^2 + 0.31^2} = 1.287 \text{ m} \quad (9.1)$$

La masa total del brazo de registro se obtiene entonces mediante el producto de la masa por unidad de longitud por la longitud total del tirante:

$$M_{total} = m_{br} \cdot L_{total} = 0.94 \text{ kg} \quad (9.2)$$

A partir de los datos de las rigideces puede hallarse el radio y el módulo elástico (considerando una barra de sección circular) del tirante, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{br} A_{br} = E \pi r^2 \\ E_{br} J_{br} = E \frac{\pi r^4}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = 2.09 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ r = 0.016 \text{ m} \end{array} \right. \quad (9.3)$$

Por lo que se obtiene el área y momento de inercia del componente:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{br} = \pi r^2 = 813.118 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \\ J_{br} = \frac{\pi r^4}{4} = 52.613 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 \end{array} \right. \quad (9.4)$$

No obstante, en el programa objeto del presente trabajo el brazo de registro está representado por un elemento barra unido por un nodo al cable de contacto y articulado en el otro extremo, por lo que es preciso obtener las propiedades equivalentes del mismo:

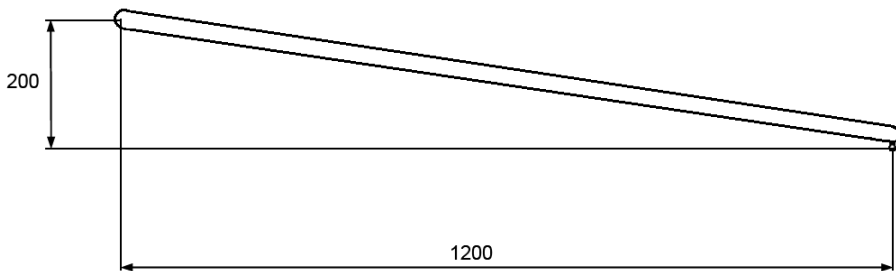


Figura 9.3. Brazo de registro equivalente modelado en el programa de simulación.

La longitud total del brazo equivalente es, por lo tanto:

$$L_{equiv} = \sqrt{1.2^2 + 0.2^2} = 1.216 \text{ m} \quad (9.5)$$

Si se modela por elementos finitos el brazo de registro inicial (con sus propiedades geométricas y mecánicas), y se aplica una fuerza $F=1 \text{ N}$ en el extremo en la dirección longitudinal del nuevo modelo de tirante, se obtiene

un desplazamiento de ese punto y en esa dirección de $x = 1.53 \cdot 10^{-5}$ m. Con este dato puede obtenerse la rigidez que el brazo de registro equivalente debe presentar en su dirección longitudinal:

$$F = kx \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{1}{1.53 \cdot 10^{-5}} = 651678071 \text{ N/m} \quad (9.6)$$

La rigidez axial del brazo y la masa por unidad de longitud pueden calcularse a partir de los datos hallados hasta ahora:

$$\begin{cases} EA_{equiv} = k \cdot L_{equiv} = 7928007 \text{ N} \\ m_{equiv} = \rho A_{equiv} = \frac{M_{total}}{L_{equiv}} = 0.7727 \text{ kg/m} \end{cases} \quad (9.7)$$

Fijando un valor de $E_{equiv} = 8.477 \cdot 10^{10}$ N/m², puede despejarse el área y la densidad del tirante de las ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} A_{equiv} = \frac{EA_{equiv}}{E_{equiv}} = 0.935 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \\ \rho_{equiv} = \frac{m_{equiv}}{A_{equiv}} = 82619194 \text{ kg/m}^3 \end{cases} \quad (9.8)$$

Siendo estos los valores introducidos en la entrada de datos del software desarrollado.

9.2.1.5. Amortiguamiento proporcional.

Por último, la información relativa a la catenaria se completa con los datos sobre el amortiguamiento proporcional de la misma. Como ya se definió en el apartado 7.1; **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, la matriz de amortiguamiento C_S de tipo histerético considerado en la implementación del código se define como una combinación lineal de las matrices de masa M y de rigidez K del sistema:

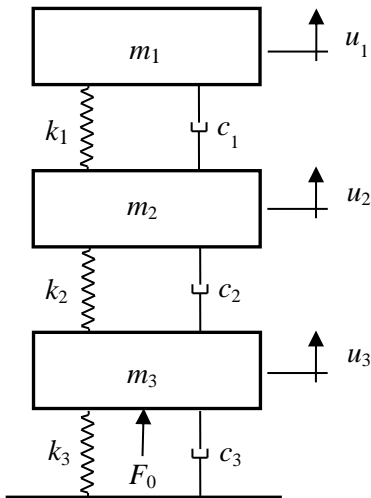
$$C_S = \alpha M + \beta K \quad (9.9)$$

Los valores asignados a las constantes α y β para esta catenaria son:

- $\alpha = 0.0125 \text{ s}^{-1}$.
- $\beta: 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

9.2.2. Datos del pantógrafo.

El modelo de pantógrafo considerado para ejecutar los casos de simulación corresponde a un sistema de masas concentradas y resortes de tres etapas, con los parámetros indicados en la Tabla 9.4:



Pantógrafo	
m_1 (kg)	7.5
m_2 (kg)	9
m_3 (kg)	6
c_1 (Ns/m)	45
c_2 (Ns/m)	0.1
c_3 (Ns/m)	100
k_1 (N/m)	7000
k_2 (N/m)	15500
k_3 (N/m)	160

Tabla 9.4. Datos del pantógrafo.

Figura 9.4. Modelo de pantógrafo.

9.2.3. Casos de simulación.

Los diferentes grupos de investigación han realizado los análisis para los siguientes casos de simulación, de los que se han obtenido los resultados para su posterior comparación:



- Caso 1. Configuración estática no-lineal de la catenaria en 3D.

La resolución de este caso permite hallar las longitudes de péndolas, fuerzas axiales en las mismas, posiciones de los cables de contacto y sustentador, y rigidez de la catenaria aplicando fuerzas de contacto de 100 N y de 200 N.

- Caso 2. Interacción dinámica de la catenaria con un pantógrafo en 2D.

En este apartado se simula la interacción bidimensional entre pantógrafo y catenaria. Se han obtenido las fuerzas de contacto, valores estadísticos, alturas del punto de contacto y elevación del tirante central para las distintas velocidades que se muestran a continuación, aplicando diferentes fuerzas de contacto en cada caso.

Velocidad (km/h)	Fuerza de contacto media (N)
10	100 y 200
230	121
275	143
320	169
365	169

Tabla 9.5. Velocidades y fuerzas de contacto medias para realizar las distintas simulaciones.

Con el fin de obtener estas fuerzas de contacto medias (filtradas a 20 Hz), ha sido necesario aumentar la fuerza aplicada por el pantógrafo para compensar las pérdidas por los resortes y amortiguadores del mismo.

- Caso 3. Interacción dinámica de la catenaria con un pantógrafo en 3D.

Este caso es análogo al anterior, con la salvedad de que en este momento se consideran las tres dimensiones del sistema.



- Caso 4. Interacción dinámica de la catenaria con múltiples pantógrafos en 2D.

Simulación del contacto entre catenaria y dos pantógrafos separados una distancia de 200 metros en el caso bidimensional, para las velocidades de 230, 275, 320 y 365 km/h.

En [16] se realiza un análisis de la influencia en la solución de los distintos parámetros de la malla de elementos finitos y de la integración numérica, especificando los valores para los cuales la solución se puede considerar suficientemente precisa. Para la resolución de todos los casos anteriores se ha empleado un tamaño de elemento $h = 0.50$ m para el modelo de elementos finitos, el algoritmo de integración numérica HHT con el parámetro $\alpha = -0.05$ y una rigidez de contacto $k_H = 50000$ N/m. En cuanto al incremento de tiempo, se ha seleccionado $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ s para las velocidades altas (a partir de $v = 230$ km/h), y $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ s para los casos de $v = 10$ km/h.

9.3. RESULTADOS.

9.3.1. Caso 1. Configuración estática no-lineal de la catenaria en 3D.

En primer lugar, se muestran las fuerzas en péndolas y longitudes obtenidas en el cálculo de la configuración de equilibrio inicial de la catenaria, observándose que son prácticamente los mismos valores que los orientativos de la Tabla 9.3:

Péndola	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fuerza (N)	164.14	50.30	55.30	47.34	55.29	47.34	55.30	50.30	164.14
Longitud (mm)	1026.0	905.7	819.0	769.0	750.6	769.0	819.0	905.7	1026.0

Tabla 9.6. Fuerza y longitud de péndolas en un vano en la posición de equilibrio estático.

Otro aspecto de interés a analizar en el caso de equilibrio estático de la catenaria es la rigidez de la misma en función de una fuerza aplicada constante (100 N y 200 N) a lo largo del cable de contacto de un vano:

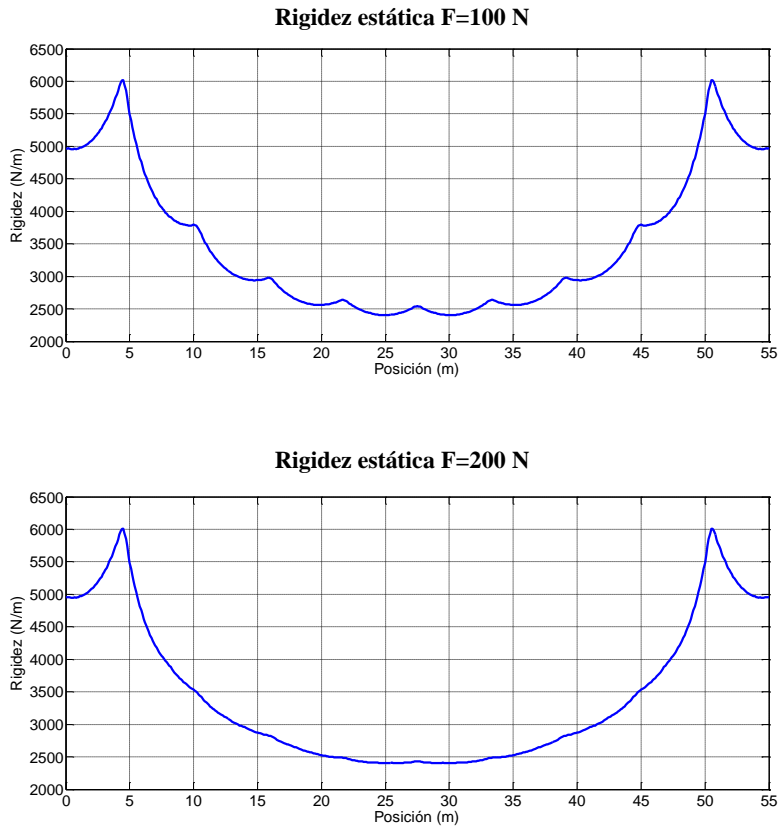


Figura 9.5. Rigidez estática para una fuerza de contacto de 100 N (arriba) y de 200 N (abajo).

A simple vista puede observarse que en el caso de una fuerza aplicada de 200 N las péndolas entran a compresión y dejan de actuar sujetando el cable de contacto, por lo que en estos puntos la rigidez disminuye.

9.3.2. Caso 2. Interacción dinámica de la catenaria con un pantógrafo en 2D.

A lo largo de todo el trabajo se han considerado las tres dimensiones del sistema que forma la catenaria. Con el fin de generar un mallado en 2D y obtener los resultados para este caso de simulación, es preciso realizar algunas modificaciones en los datos presentados en el apartado 9.2.

En primer lugar, la consideración del caso bidimensional requiere eliminar el zig-zag de la catenaria provocado por los brazos de registro, de modo que el valor del escalonamiento es nulo.

En segundo lugar, los tirantes deben situarse en el mismo plano que la catenaria, por lo que han sido tratados como elementos totalmente verticales. Ello implica calcular de nuevo unas propiedades equivalentes que garanticen el mismo comportamiento del brazo de registro.

Mediante un proceso análogo al del apartado 9.2, se obtiene que la rigidez (en este caso en dirección vertical) que debe presentar el tirante es $k = 274.07 \text{ N/m}$. Si la longitud de dicho tirante se considera de $L_{equiv2d} = 1 \text{ m}$ y se toman los datos de masa por unidad de longitud $m_{equiv2d} = 0.7727 \text{ kg/m}$ y módulo elástico $E_{equiv2d} = 0.8477 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ de la sección anterior, el área y la densidad que debe emplearse para realizar los análisis son:

$$\left\{ \begin{array}{l} EA_{equiv2d} = k \cdot L_{equiv2d} = 274.07 \text{ N} \rightarrow A_{equiv2d} = \frac{EA_{equiv2d}}{E_{equiv2d}} = 3.233 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \\ \rho_{equiv2d} = \frac{m_{equiv2d}}{A_{equiv2d}} = 238988479 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right. \quad (9.10)$$

A modo de ejemplo se presentan a continuación los valores estadísticos de la fuerza de contacto para la velocidad de 365 km/h. En la siguiente tabla se muestra el valor medio, la desviación típica, y los máximos y mínimos estadísticos y reales, así como los mismos valores filtrados a 20 Hz:

	Fuerza de contacto	
	v = 365 km/h	
	<i>Sin Filtrar</i>	<i>Filtrada</i>
<i>Med</i>	168.9834	169.0037
<i>Desv</i>	102.6079	62.3614
<i>Max Est</i>	476.8070	356.0879
<i>Min Est</i>	-138.8402	-18.0804
<i>Max Real</i>	427.0889	317.4082
<i>Min Real</i>	0.0000	49.7443

Tabla 9.7. Valores estadísticos caso 2, velocidad 365 km/h.

La evolución temporal de la fuerza de contacto, la posición del cable de contacto y de cada una de las masas del pantógrafo y la elevación del tirante central se representan en las siguientes gráficas:

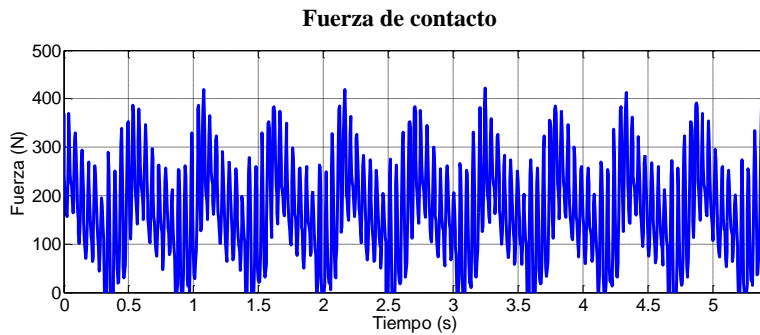


Figura 9.6. Fuerza de contacto caso 2 y velocidad 365 km/h.

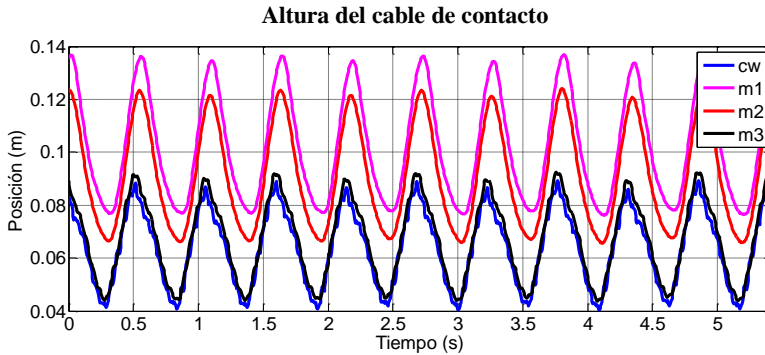


Figura 9.7. Altura del cable de contacto y de las masas del pantógrafo caso 2 y velocidad 365 km/h.



Figura 9.8. Elevación brazo de registro central caso 2 y velocidad 365 km/h.

En la Figura 9.6 se pueden apreciar las pérdidas de contacto entre catenaria y pantógrafo (la fuerza de contacto es cero) en determinados instantes de tiempo.

Adicionalmente, resulta de interés el análisis de la rigidez dinámica para de la catenaria a velocidades de simulación bajas, esto es, evaluar la rigidez de la catenaria cuando el pantógrafo avanza a 10 km/h ejerciendo una fuerza de contacto de 100 N y de 200 N:

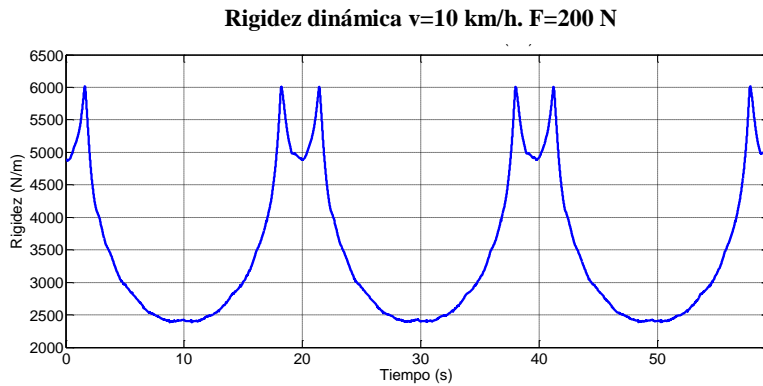
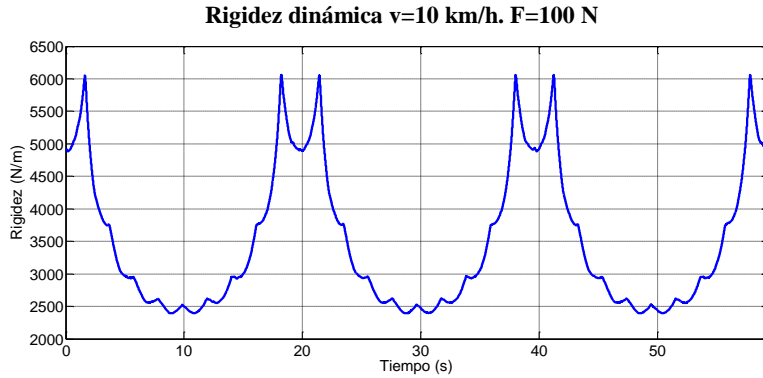


Figura 9.9. Rigidez dinámica para *caso 2* y velocidad 10 km/h, aplicando una fuerza de 100 N (arriba) y 200 N (abajo).

Si se comparan estas gráficas con las de rigidez estática mostradas en el apartado 9.3.1 para un vano, no se observan diferencias significativas entre ambas, por lo que se puede concluir que a la velocidad de 10 km/h el comportamiento es cuasiestático.

9.3.3. Caso 3. Interacción dinámica de la catenaria con un pantógrafo en 3D.

Este caso de simulación considera el modelo tridimensional de la catenaria, en el que se tienen en cuenta la posición real de los brazos de registro y el escalonamiento que le producen al cable de contacto.

De manera análoga al apartado anterior, se presentan las estadísticas y las gráficas de fuerza de contacto, altura del cable de contacto y de las masas del pantógrafo y elevación del brazo de registro en función del tiempo, en este caso para una velocidad de 230 km/h:

Fuerza de contacto		
v = 230 km/h		
	<i>Sin Filtrar</i>	<i>Filtrada</i>
<i>Med</i>	121.0164	121.0050
<i>Desv</i>	24.2227	22.0930
<i>Max Est</i>	193.6845	187.2840
<i>Min Est</i>	48.3483	54.7260
<i>Max Real</i>	178.8377	165.1645
<i>Min Real</i>	64.2309	64.1358

Tabla 9.8. Valores estadísticos caso 3, velocidad 230 km/h.

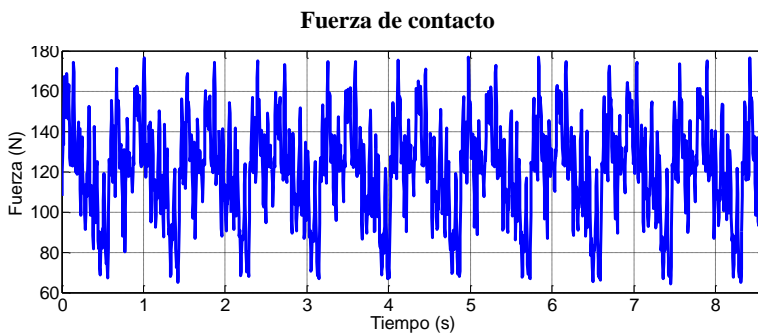


Figura 9.10. Fuerza de contacto caso 3 y velocidad 230 km/h.

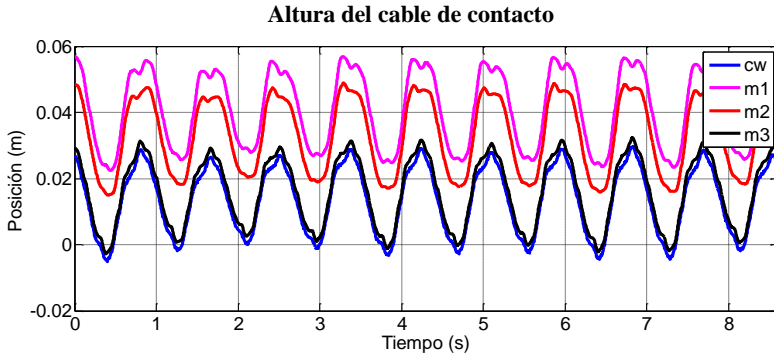


Figura 9.11. Altura del cable de contacto y de las masas del pantógrafo caso 3 y velocidad 230 km/h.



Figura 9.12. Elevación brazo de registro central caso 3 y velocidad 230 km/h.

Si en este caso se obtiene una representación de la rigidez dinámica frente a la posición a esta velocidad, se observa que en estas condiciones el comportamiento del sistema ya no es cuasiestático, pues la curva de rigidez difiere claramente de las expuestas con anterioridad:

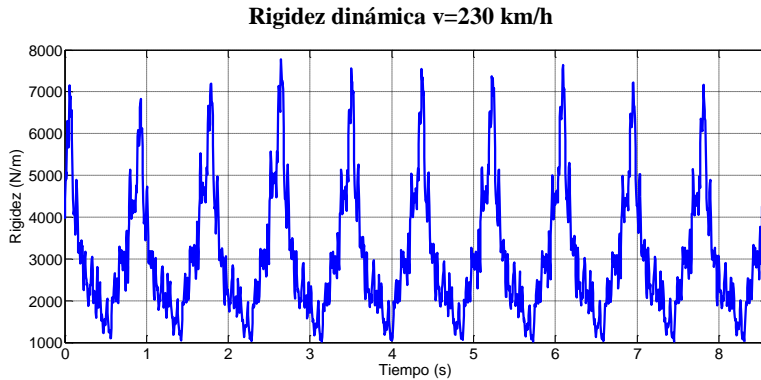


Figura 9.13. Rigidez dinámica caso 3 y velocidad 230 km/h.

9.3.4. Caso 4. Interacción dinámica de la catenaria con múltiples pantógrafos en 2D.

Por último, se ejecutan diferentes casos de simulación con dos pantógrafos, separados entre sí una distancia de 200 metros. Para ello se ha empleado la metodología detallada en el capítulo 0, en la que los pantógrafos parten de una posición inferior a la altura del cable de contacto y ascienden progresivamente hasta entrar en contacto con la catenaria.

En esta ocasión, los resultados relativos a fuerza de contacto y alturas de catenaria y masas de cada uno de los pantógrafos, así como la elevación del tirante, se muestran para una velocidad de 275 km/h:

	Fuerza de contacto Pantógrafo 1		Fuerza de contacto Pantógrafo 2	
	v = 230 km/h		v = 230 km/h	
	<i>Sin Filtrar</i>	<i>Filtrada</i>	<i>Sin Filtrar</i>	<i>Filtrada</i>
<i>Med</i>	120.9922	121.0086	120.9866	121.0030
<i>Desv</i>	28.1280	26.1300	37.0060	34.3939
<i>Max Est</i>	205.3764	199.3987	232.0047	224.1848
<i>Min Est</i>	36.6081	42.6185	9.9684	17.8212
<i>Max Real</i>	187.3994	170.0703	216.4068	200.1418
<i>Min Real</i>	59.6550	63.0455	36.2153	48.9553

Tabla 9.9. Valores estadísticos caso 4, velocidad 275 km/h.

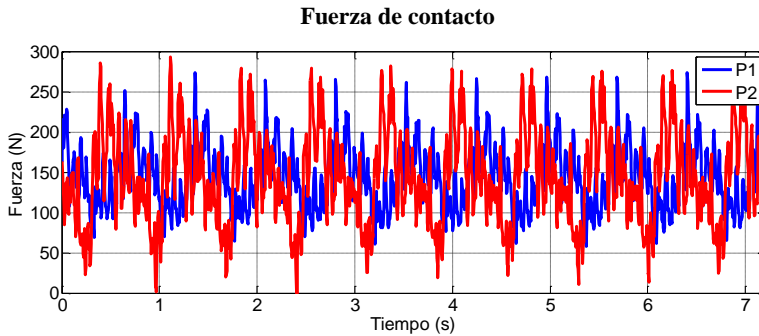


Figura 9.14. Fuerza de contacto del primer pantógrafo (azul) y del segundo pantógrafo (rojo) caso 4 y velocidad 275 km/h.

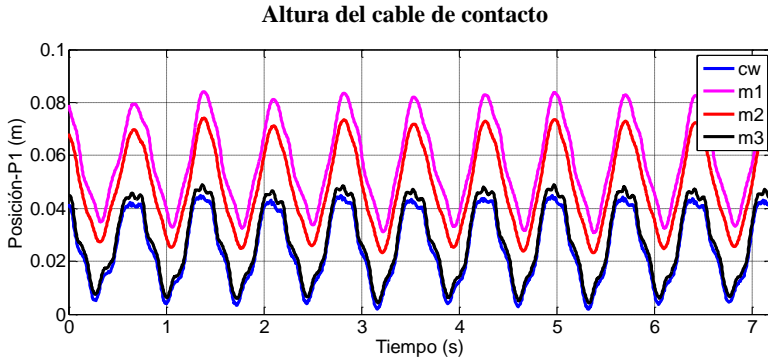


Figura 9.15. Altura del cable de contacto y de las masas del primer pantógrafo *caso 4* y velocidad 275 km/h.

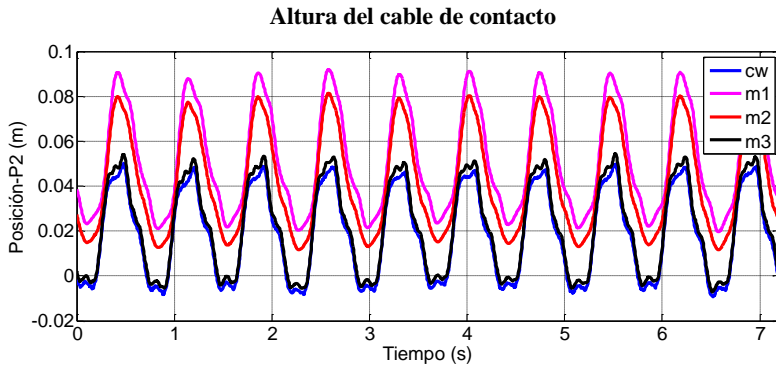


Figura 9.16. Altura del cable de contacto y de las masas del segundo pantógrafo *caso 4* y velocidad 275 km/h.

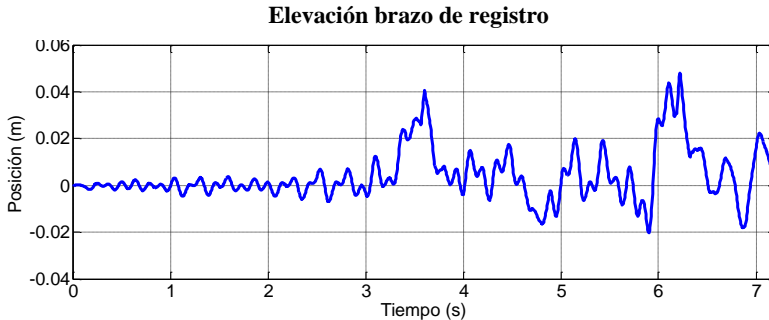


Figura 9.17. Elevación brazo de registro central *caso 4* y velocidad 275 km/h.

9.4. COMPARATIVA CON OTROS GRUPOS DE INVESTIGACIÓN.

A continuación se presentan los resultados y las comparaciones en aquellos aspectos más significativos de los grupos participantes en este proyecto. Los resultados se muestran de forma anónima, identificando cada equipo de investigación por las letras “A”, “B”, etc...

Para empezar, en las siguientes figuras se observa la fuerza de contacto y la altura del punto de contacto en función del trazado, así como la historia temporal de la elevación del brazo de registro situado en el poste sexto de los diez vanos centrales del análisis, para el *caso 2* y la velocidad de 320 km/h. En la Figura 9.18, las líneas discontinuas verticales corresponden a la posición de los postes, por lo que se están representando únicamente el paso del pantógrafo por 3 vanos de la catenaria. El elevado número de líneas en la figura dificultan la evaluación de los resultados, pero no se detectan diferencias considerables entre los resultados.

En la representación de la elevación del brazo de registro (Figura 9.19) se percibe un desfase en los resultados del grupo “H”, que probablemente sea debido a un problema en la sincronización de los resultados. Además, en todos los casos se aprecia que la catenaria comienza a oscilar antes del paso del pantógrafo, lo que puede explicarse considerando el efecto de las ondas

emitidas por el pantógrafo que se propagan por delante del mismo en el cable de contacto. Sin embargo, el nivel de vibración generado por estas ondas no es el mismo para todos los grupos de investigación. Las razones de estas desigualdades pueden deberse a diferencias en el modelo estructural de la catenaria (por ejemplo número o tipo de elementos finitos empleados) o en el modelo de amortiguamiento del sistema. No obstante, el valor máximo de la elevación del cable de contacto en el tirante, aproximadamente correspondiente al instante de paso del pantógrafo, sí es muy parecido entre todos los códigos de simulación.

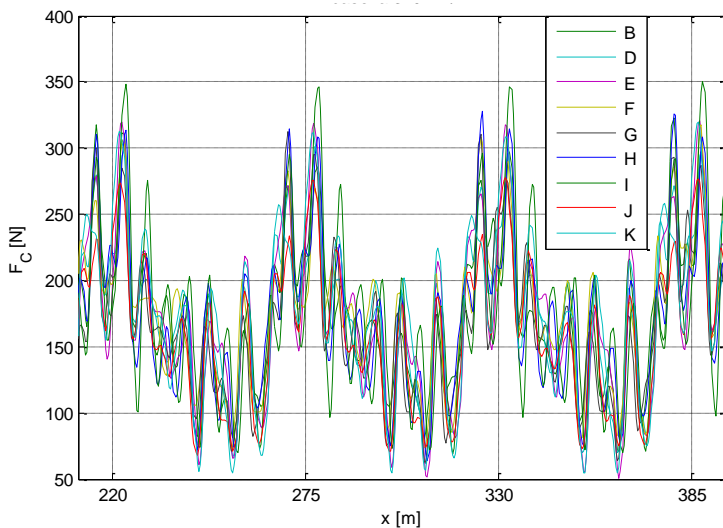


Figura 9.18. Comparación fuerza de contacto caso 2 y velocidad 320 km/h.

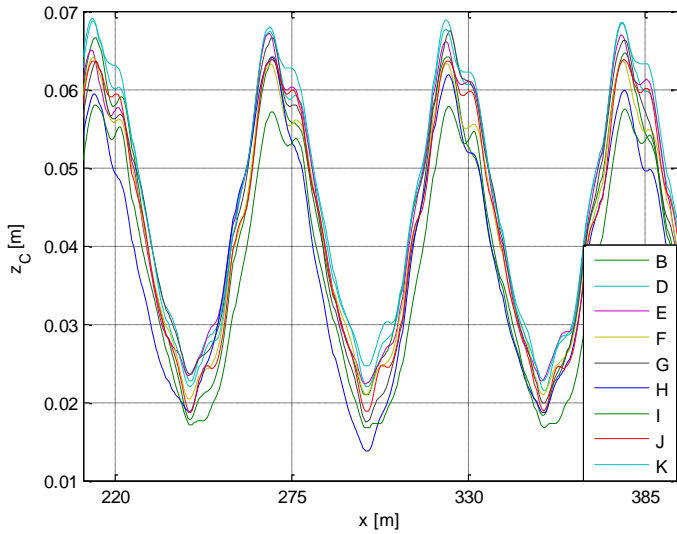


Figura 9.19. Comparación altura del cable de contacto *caso 2* y velocidad 320 km/h.

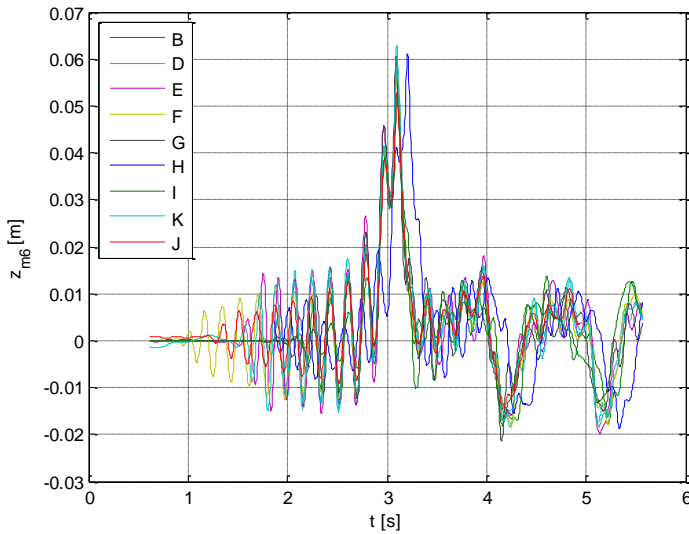


Figura 9.20. Comparación elevación brazo de registro central *caso 2* y velocidad 320 km/h.



Para realizar un análisis más preciso de la dispersión de los resultados proporcionados por los diferentes grupos de investigación, se han considerado los siguientes parámetros estadísticos representativos de la fuerza de contacto:

1. Valor medio de la fuerza de contacto;
2. Desviación estándar de la fuerza de contacto;
3. Valor máximo de la fuerza de contacto;
4. Valor mínimo de la fuerza de contacto;
5. Desviación estándar de la fuerza de contacto filtrada al siguiente rango de frecuencias:
 - a. 0-2Hz (efectos paso por vano);
 - b. 0-5Hz (paso por vano y segundo y tercer armónico);
 - c. 5-20 Hz (paso por péndola);
6. Amplitud pico-pico de la altura del punto de contacto;
7. Elevación máxima del cable de contacto en el brazo de registro central.

Con el objeto de cuantificar la disparidad de los resultados para cada uno de los parámetros anteriores, se ha eliminado el valor más grande y el más pequeño de los resultados y se ha calculado un porcentaje de dispersión Δ como la diferencia del valor máximo y el valor mínimo de los resultados, dividiéndola por el valor medio:

$$\Delta = \frac{\max - \min}{avg} \times 100 \quad (9.11)$$

En la Figura 9.21 se observan los resultados de este análisis para el *caso 2*, representados por los parámetros 2) y 4) (desviación estándar y valor mínimo de la fuerza de contacto respectivamente), para la velocidad de 320 km/h. La línea roja de dicha gráfica corresponde a los valores medios de dichas variables. En la Tabla 9.10 se resume los valores de dispersión de todos los indicadores estadísticos para todas las velocidades del mismo caso de simulación.

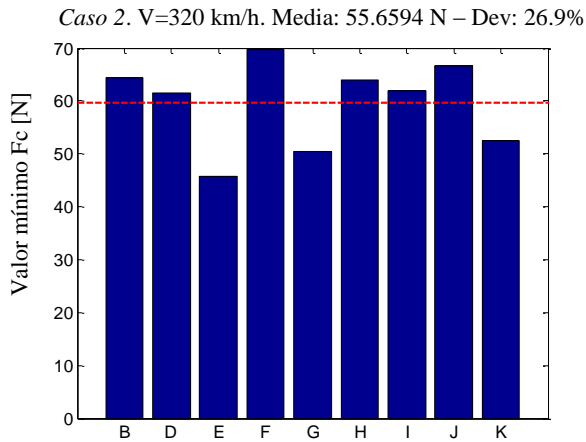
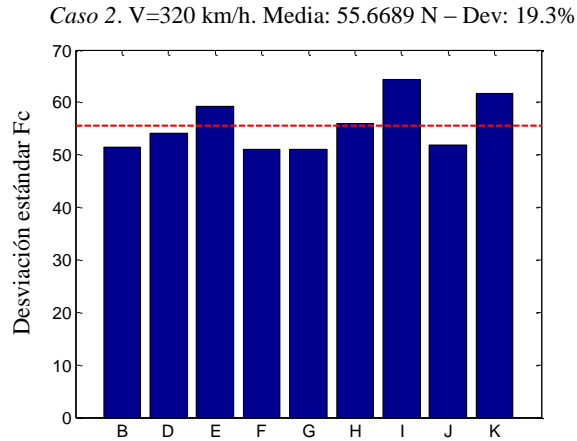


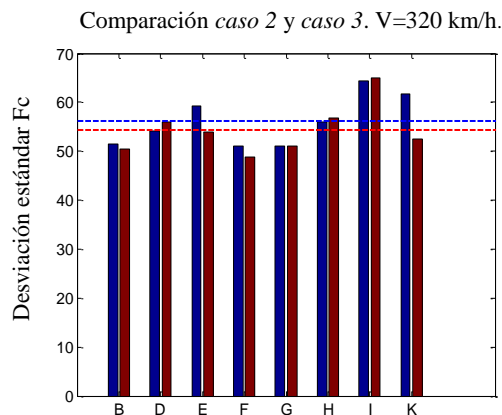
Figura 9.21. Comparación desviación estándar y valor mínimo de la fuerza de contacto para el caso 2 y velocidad 320 km/h. Las líneas horizontales representan el valor medio.

		230 km/h	275 km/h	320 km/h	365 km/h
1	Valor medio de la fuerza de contacto	3.5	3.9	4.7	6.2
2	Desviación estándar de la fuerza de contacto	14.3	19.7	19.3	7.7
3	Valor máximo de la fuerza de contacto	12.1	7.8	7.9	21.6
4	Valor mínimo de la fuerza de contacto	14.5	17.9	26.9	90.3
5a	Desviación estándar de la fuerza de contacto filtrada 0-2Hz	6.7	6.0	5.5	6.3
5b	Desviación estándar de la fuerza de contacto filtrada 0-5 Hz	9.5	5.9	4.3	9.3
5c	Desviación estándar de la fuerza de contacto filtrada 5-10 Hz	39.2	41.8	38.9	62.4
6	Amplitud pico-a-pico de la altura del punto de contacto	8.2	20.8	13.1	4.7
7	Elevación máxima brazo de registro central	16.3	14.3	14.1	12.0

Tabla 9.10. Porcentaje de dispersión de los parámetros estadísticos para el caso 2 y todas las velocidades.

En la Tabla 9.10 se observa que la dispersión de la fuerza de contacto y de la desviación estándar filtrada a baja frecuencia (parámetros 1), 5a) y 5b)) se encuentra generalmente por debajo del 6%, y siempre por debajo de 10%. En cuanto a la desviación estándar, la dispersión es en todo momento inferior al 20%, lo que supone la mitad de la tolerancia de $\pm 20\%$ permitida en la norma EN 50318. Finalmente, los parámetros relativos a la interacción pantógrafo-catenaria en el rango de alta frecuencia (valor mínimo de la fuerza de contacto y desviación estándar filtrada en el rango de 5-20 Hz) muestran que los valores máximos están alrededor de 90% y 62% respectivamente para la velocidad de 365 km/h. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que esta velocidad corresponde aproximadamente al 80% de la velocidad de propagación de las ondas en el cable de contacto, y superior a una hipotética velocidad de diseño para el tipo de catenaria considerada.

Por otro lado, en la Figura 9.22 se compara la desviación estándar y el valor mínimo de la fuerza de contacto obtenidos considerando los modelos de la catenaria en 2D y 3D para cada uno de los equipos de investigación. Con esto, se pretende analizar la sensibilidad de los resultados en referencia al modelo de catenaria empleado. En la mayoría de códigos de simulación, no existen grandes diferencias en términos de la desviación estándar de la fuerza de contacto, lo que podría indicar que los modelos bidimensional y tridimensional no influyen considerablemente en los resultados. Sin embargo, si se considera el valor mínimo de la fuerza de contacto se aprecian distinciones que permitirían concluir que el modelo tridimensional resulta más adecuado para el estudio de problemas en que esta variable sea de interés, como puede ser el análisis de arcos eléctricos o desgaste en el cable de contacto y en los colectores.



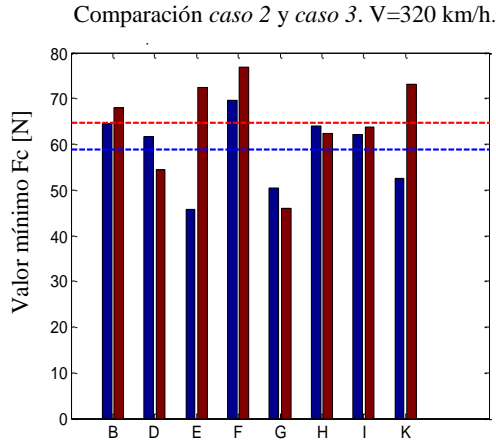


Figura 9.22. Comparación desviación estándar y valor mínimo de la fuerza de contacto para los casos 2 (azul) y 3 (rojo) y velocidad 320 km/h. Las líneas horizontales representan los valores medios para cada caso.

Por último, la Figura 9.23 muestra los mismos indicadores estadísticos anteriores para el caso 2 y para el primer pantógrafo en el caso 4. La finalidad de esta comparación es evaluar el efecto del segundo pantógrafo sobre el primero, si es que existe tal efecto. A la vista de los resultados en las gráficas, las pequeñas diferencias entre ambos casos conducen a la conclusión de que el pantógrafo posterior ejerce una escasa influencia sobre el de cabeza.

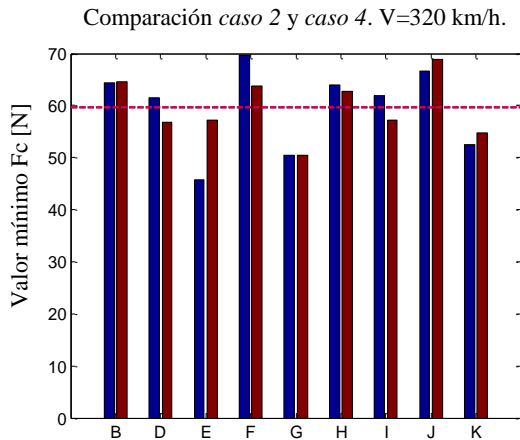
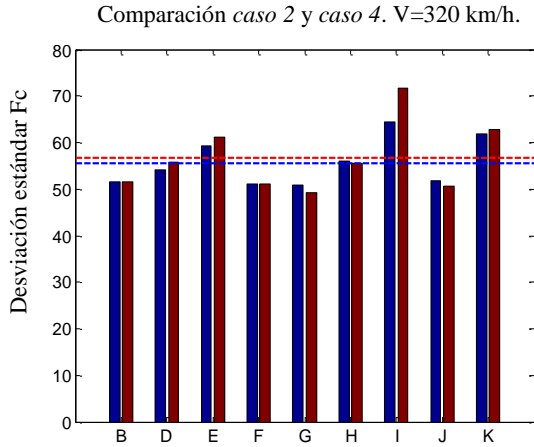


Figura 9.23. Comparación desviación estándar y valor mínimo de la fuerza de contacto para los casos 2 (azul) y el primer pantógrafo del caso 4 (rojo) y velocidad 320 km/h. Las líneas horizontales representan los valores medios para cada caso.

9.5. CONCLUSIONES.

En el presente capítulo se han ejecutado unos casos de simulación de referencia con el fin de comparar los resultados obtenidos con los códigos implementados por otros grupos de investigación. Pese a diferencias en la



formulación del método y a la gestión de las no-linealidades del modelo por parte de cada uno de ellos, puede concluirse que los principios básicos para la simulación de la interacción dinámica pantógrafo-catenaria se encuentran sólidamente establecidos en todos los casos.

El porcentaje de dispersión en la mayoría de parámetros estadísticos de la fuerza de contacto se encuentra dentro del rango del 20% o inferiores, nivel que se considera aceptable. No obstante, en el rango de frecuencia de 5-20 Hz para velocidades altas se observan mayores índices de dispersión, como el valor mínimo de la fuerza de contacto o la desviación estándar filtrada a estas frecuencias. Sería necesario un análisis en profundidad de los procedimientos de simulación en estos casos con el objeto de unificar los resultados de todos los equipos de investigación.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE MATERIALES
MÁSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES





10. CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Una vez desarrollado el modelo de los diferentes elementos incorporados al código de simulación de la interacción dinámica ente catenaria y pantógrafo, en el presente capítulo se exponen las conclusiones extraídas de los capítulos anteriores y se enumeran posibles desarrollos futuros que continúen la línea de investigación en la que se enmarca el Trabajo Fin de Máster aquí presentado.

10.1. CONCLUSIONES.

A continuación se resumen los aspectos más relevantes que se han encontrado a lo largo del desarrollo del presente trabajo:

- Se ha extendido el código implementado para el estudio del problema de interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria en líneas de alta velocidad, con el fin de obtener un modelo tridimensional que permite simular los efectos de diferentes componentes de la catenaria.
- La formulación del elemento cable ha sido modificada para considerar la no continuidad que se produce cuando existen conexiones con otros elementos. Pese al salto de tracción originado en el cable sustentador, este elemento no produce diferencias en la fuerza de contacto entre catenaria y pantógrafo.
- Se ha desarrollado el elemento suspensión para modelar el conjunto de piezas de soporte del cable sustentador sobre la ménsula mediante un resorte y un amortiguador. La longitud de las péndolas considerando este elemento se reduce, lo que da lugar a valores ligeramente diferentes en la fuerza de contacto.
- El sistema de compensación mecánica se ha representado mediante el elemento masa de compensación, consistente en una masa equivalente, un resorte en la dirección longitudinal del cable y otros en las direcciones perpendiculares. La fuerza de contacto disminuye incorporando este modelo, observándose las mayores diferencias en las zonas de inicio y final del cantón.



- Se ha desarrollado un modelo de pantógrafo con siete grados de libertad, incorporando rotaciones en la mesilla y en las bandas de frotamiento y dos puntos de contacto. La presencia de estos dos puntos de interacción con la catenaria da lugar a diferencias en la fuerza de contacto respecto del modelo básico de tres grados de libertad, aunque el rango de rotación de las masas se puede considerar despreciable.
- El modelo de interacción, basado en el método de penalti, ha sido adaptado para considerar modelos de pantógrafos con más de un grado de libertad asociado a un punto de contacto con la catenaria.
- Se ha desarrollado una nueva metodología para el inicio de la simulación de la interacción entre catenaria y más de un pantógrafo, basado en una distancia de subida de los mismos hasta alcanzar el contacto, de modo que la fuerza de contacto sobre el cable aumenta gradualmente.
- El código obtenido se ha utilizado para ejecutar diferentes casos de interacción pantógrafo-catenaria, cuyos resultados han sido comparados con los obtenidos por otros equipos de investigación para validar el procedimiento de simulación.

10.2.DESARROLLOS FUTUROS.

El modelo de interacción dinámica pantógrafo-catenaria queda abierto a nuevos desarrollos que permitan un mayor perfeccionamiento del mismo y la adición de nuevas funcionalidades. Algunos de ellos pueden ser:

- Modelado de transición entre diferentes cantones.
- Implementación de modelos de pantógrafos más sofisticados, que incluyan no-linealidades como elementos de fricción, amortiguadores bidireccionales o fuerzas aerodinámicas, así como modelos multicuerpo.
- Validación del procedimiento de integración a través de resultados experimentales medidos sobre una línea real.



11. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1]. European Committee for Electrotechnical Standardization EN 50318:2002: “*Aplicaciones ferroviarias – Sistemas de captación de corriente – Validación de la simulación de la interacción dinámica entre el pantógrafo y las líneas aéreas de contacto*”. (2002).
- [2]. Labergri, F.: “*Modélisation du comportement dynamique du système pantographe-caténaire*”. Tesis Doctoral, Ecole Centrale de Lyon (2000).
- [3]. Poetsch, G., Evans, J., Meisinger, R., Kortüm, W. and Krabacher, W.: “*Pantograph/Catenary Dynamics and Control*”. Vehicle System Dynamics, 28 (1997).
- [4]. Vidal, V.: “*Modelado mediante elementos finitos de configuración inicial de catenarias de ferrocarril*”. Tesis de Máster. Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universitat Politècnica de València (2011).
- [5]. Mora, H.: “*Modelado de la interacción dinámica pantógrafo-catenaria*”. Tesis de Máster. Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universitat Politècnica de València (2011).
- [6]. Seo, J.-H., Kim, S.-W., Il-Ho-Jung, Park, T.-W., Jin, Mok, Y., Young-Guk Kim, Y.-G., Chai, J.-B.: “*Dynamic analysis of a pantograph-catenary system using absolute nodal coordinates*”. Vehicle System Dynamics, Supplement 44 (2006).
- [7]. “*Línea aérea de contacto: Componentes Básicos y Puntos Críticos*”, Dirección Técnica de Mantenimiento e Infraestructura, RENFE (2004).
- [8]. Collina, A., Bruni, S.: “*Numerical Simulation of Pantograph – Overhead Equipment Interaction*”. Vehicle System Dynamics, 38 (2002).



- [9]. Cho, Y. H.: “*Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper*”. Journal of Sound and Vibration 315 (2008).
- [10]. Zhang, W., Liu, Y., Mei, G.: “*Evaluation of the coupled dynamical response of a pantograph-catenary system: contact force and stresses*”. Vehicle System Dynamics, 44 (2006).
- [11]. Benet, J.: “*An efficient method for the mechanical study of pantograph-catenary interaction*”. Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, Paper 3, Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland (2010).
- [12]. Collina, A., Lo Conte, A., Carnevale, M.: “*Effect of deformable modes in pantograph-catenary dynamic interaction*”. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit (2009).
- [13]. Pombo, J., Ambrósio, J., Pereira, M.: “*Influence of pantograph components on the contact quality of the overhead system for high speed trains*”. Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, Paper 1, Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland (2010).
- [14]. Bobillot, A., Massat, J.P., Mentel, J.P.: “*Design of Pantograph-Catenary Systems by Simulation*”. Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, Paper 2, Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland (2010).
- [15]. M., Boccione et al.: “*Pantograph aerodynamic effects on the pantograph-catenary interaction*”. Vehicle System Dynamics, 44 Supplement (2006).
- [16]. Gómez, J.: “*Simulación dinámica de la interacción pantógrafo-catenaria mediante elementos finitos*”. Proyecto Final de Carrera. Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universitat Politècnica de València (2012).