
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.



Tesis Doctoral

**Identificación y Control Predictivo
Fuzzy T-S en Espacio de Estados. Una
Aproximación al Control No Lineal**

Autor: Sergio García-Nieto Rodríguez

Directores: Miguel Martínez Iranzo
José Vicente Salcedo Romero de Ávila

Valencia, 24 de Marzo de 2010

Gracias a mis *PADRES* por...
...mi niñez, mi educación, mi forma de ser, mi forma de pensar, su cariño...
... ellos lo son *TODO*

Gracias a mis *HERMANOS* por...
...nuestra infancia, nuestras charlas, nuestros proyectos, su amistad...
... ellos lo son *TODO*

Gracias a *MARIA* por...
...su amor, su amistad, su paciencia, su forma de ser...
... ella lo es *TODO*

Agradecimientos

La realización de una tesis doctoral acarrea un esfuerzo muy importante por parte del autor. Sin embargo, siempre hay un conjunto de familiares, amigos, compañeros e instituciones que sufren día a día las alegrías y penas de aquellos que nos hemos encontrado en la tesitura de realizar una tesis doctoral.

En primer lugar, me gustaría agradecer a mis dos directores de tesis Miguel y José Vicente todo el apoyo recibido, tanto desde el punto de vista académico como en el aspecto personal. Sin lugar a duda, Miguel ha sido, es y será un referente de esfuerzo, capacidad, sinceridad y buen hacer. Gracias a él he crecido como científico, docente y persona. Por otra parte, José Vicente ha sido un referente sólido durante el doctorado. Su increíble capacidad y su facilidad para transmitir conocimiento me ha ayudado en los momentos más complicados de la realización de la tesis.

En segundo lugar, me gustaría agradecer el apoyo incondicional que durante todos estos años he encontrado en todos mis compañeros del departamento: Xavier, Javier, Juanma, Ángel, Fátima, David, Javier, Nacho, Samu, etc. En este aspecto, me gustaría destacar especialmente a Kiko y Pepe con los cuales siempre he podido cotejar, criticar y comentar sobre cualquier aspecto profesional y personal. Sin ellos los momentos críticos habrían sido mucho más duros.

En tercer lugar, me gustaría agradecer el soporte recibido desde la Universidad Politécnica de Valencia, la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y el Departamento de Sistemas y Automática de la UPV. Sin el incondicional apoyo de estas instituciones mi tesis no podría haber sido una realidad.

Por último, me gustaría dedicar este trabajo a mi familia, empezando por mis padres que han sido y son los pilares de mi educación y de mi forma de ser. Ellos, con todos sus esfuerzos, han hecho posible que yo haya podido alcanzar un objetivo tan ambicioso como la realización de una tesis doctoral. Por todo ello, quiero agradecerles todos sus esfuerzos y espero que se sientan tan orgullosos de mi como yo lo estoy de ellos. También me gustaría dedicar este trabajo a mis hermanos, David y Pablo, los cuales siempre han estado a mi lado para ayudarme, apoyarme y ser otra parte fundamental de mi vida. Finalmente, quiero dedicarle especialmente esta tesis a María. Ella me aporta desde hace mucho tiempo el equilibrio, la amistad, la comprensión y el amor que toda persona necesita en su vida. Gracias a ella se que podré hacer frente a cualquier reto, proyecto o adversidad.

Índice de contenidos

Resumen	1
---------	---

Resum	3
-------	---

Abstract	5
----------	---

I Introducción	7
----------------	---

1 Motivación y Objetivos	9
--------------------------	---

1.1 Introducción	9
1.2 Antecedentes	10
1.3 Motivación y Objetivos	14
1.4 Control Predictivo como Filosofía de Diseño	17
1.4.1 Predictor	21
1.4.2 Función de coste	23
1.4.3 Optimizador	25

1.5	Evolución del CPBM	26
1.6	Estructura de la Tesis	34
	Bibliografía	36

II Estado del Arte: Modelado e Identificación No Lineal 43

2 Representación de Sistemas No Lineales 45

2.1	Introducción	45
2.2	Modelos en Primeros Principios	46
2.3	Modelos con Redes Neuronales	47
2.3.1	Redes Recurrentes	48
2.4	Modelos de Volterra	49
2.4.1	Modelos de Hammerstein	50
2.4.2	Modelos de Wiener	50
2.5	Red de Modelos Locales	51
2.6	Modelos Lineales de Parametros Variables	53
2.6.1	Dependencia Lineal Fraccional	54
2.6.2	Dependencia Afín	54
2.7	Modelos Borrosos	55
2.7.1	Modelos Lingüísticos	55
2.7.2	Modelos Relacionales	58
2.7.3	Modelos Takagi-Sugeno	58
2.7.3.1	Inferencia de los modelos Takagi-Sugeno	60
2.7.4	Modelos Dinámicos Borrosos	62
2.7.4.1	Espacio de Estados	62
2.7.4.2	Entrada-Salida	63

Bibliografía	64
3 Identificación de Sistemas Borrosos	67
3.1 Introducción	67
3.2 Identificación a partir de ecuaciones no lineales	68
3.2.1 Sectorización de no linealidades	69
3.3 Identificación a partir de datos experimentales	70
3.3.1 Agrupamiento Borroso (Product Space Clustering)	71
3.3.2 Neural Learning	74
Bibliografía	75
4 Aplicación de Modelado e Identificación	77
4.1 Introducción	77
4.2 Aplicación de la Sectorización No Lineal	79
4.3 Aplicación de <i>Product Space Clustering</i>	86
4.3.1 Selección de la estructura	88
4.3.2 Datos de Regresión	91
4.3.3 Agrupación Borrosa	92
4.3.4 Funciones de Pertenencia de los Antecedentes	92
4.3.5 Parámetros de los Consecuentes	94
4.3.6 Implementación	96
4.3.7 Resultados Obtenidos	97
4.4 Conclusiones	98
Bibliografía	100

III Estado del Arte: Control Borroso mediante LMIs 101

5 Control Borroso PDC y Predictivo 103

5.1 Introducción 103

5.2 Controladores Borrosos PDC 104

5.3 Condiciones de Estabilidad 107

 5.3.1 Definición de LMI 108

 5.3.2 LMIs en Ingeniería de Control 109

5.4 Diseño de Controladores Borrosos mediante LMIs 111

 5.4.1 Controlador Borroso PDC Estabilizante 111

 5.4.2 Controlador PDC Óptimo 112

 5.4.3 Otras Especificaciones de diseño 114

 5.4.3.1 Tasa de Convergencia (Decay Rate) 115

 5.4.3.2 Restricciones en la acción de control 116

 5.4.3.3 Restricciones en la salida 117

 5.4.3.4 Independencia del vector de estados inicial 117

5.5 Control Predictivo Borroso 118

 5.5.1 Optimización No Convexa 120

 5.5.2 Optimización Convexa 121

5.6 Conclusiones 123

Bibliografía 124

6 Aplicación Control Borroso Mediante LMIs 127

6.1 Introducción 127

 6.1.1 Modelo Borroso Identificado 128

6.1.2 Validación del Modelo	136
6.2 Controlador Borroso Óptimo	139
6.2.1 Diseño del Controlador mediante LMIs	140
6.3 Validación de Resultados	143
6.4 Conclusiones	147
Bibliografía	148

IV Propuestas en Identificación y Control Predictivo Borroso 149

7 Propuesta para Identificación de Predictores Borrosos	151
--	------------

7.1 Introducción	151
7.2 Descripción conceptual del método	154
7.3 Algoritmo desarrollado	156
7.3.1 Inicialización y selección de los parámetros de diseño	158
7.3.1.1 Datos de identificación	158
7.3.1.2 Estructura del predictor borroso	158
7.3.1.3 Actualización mediante algoritmos genéticos	163
7.3.2 Identificación del Modelo Precursor	163
7.3.3 Respuesta Local del Sistema	167
7.3.4 Respuesta No Local del Sistema	168
7.3.5 Actualización mediante Algoritmos Genéticos	171
7.3.5.1 Definición del Algoritmo Genético Empleado	172
7.3.5.2 Función de Coste	175
7.3.5.3 Coste Computacional	176
7.4 Ejemplo de identificación de un predictor FLAP	176
7.5 Conclusiones	186

Bibliografía	187
8 Control Predictivo Borroso Mediante Predictor FLAP	189
8.1 Introducción	189
8.2 Método de diseño	190
8.3 Ejemplo de diseño	196
8.4 Conclusiones	198
Bibliografía	199
9 Control Predictivo Borroso Forward-Backward	201
9.1 Introducción	201
9.2 Aplicación del Principio de Optimalidad	202
9.2.1 Formulación Matemática	205
9.3 Descripción del algoritmo de diseño	212
9.4 Restricciones en las variables	214
9.4.1 Restricciones en las acciones de control	214
9.4.2 Restricciones en las salidas	219
9.5 Ejemplo de aplicación	219
9.6 Conclusiones	227
Bibliografía	228
V Conclusiones y Bibliografía	229
10 Conclusiones y Trabajo Futuro	231
10.1 Conclusiones y Contribuciones	231

10.2 Trabajos Futuros	234
Bibliografía	235
Resumen Bibliográfico	237

Resumen

Los trabajos en el área de control de finales del siglo de XIX y principios del siglo XX, describían el modelado, análisis y diseño de sistemas lineales empleando herramientas matemáticas bien definidas como el álgebra lineal y el cálculo diferencial. Sin embargo, a mediados de los años 40 comienzan a surgir trabajos que introducen el concepto de sistemas no lineales. A partir de este momento, el interés por el desarrollo de herramientas teóricas para el análisis y diseño de controladores no lineales fue en aumento. La principal causa del rápido desarrollo de esta nueva línea de investigación fue el sector aeroespacial, donde se vivía una desenfrenada carrera por la conquista del espacio. Posteriormente, otros sectores industriales como el automovilístico o el químico también fueron un reclamo para el desarrollo de nuevas técnicas de control no lineal.

En la actualidad, existen diversas metodologías que son empleadas en el análisis y diseño de sistemas de control no lineales. Sin embargo, no existe una teoría generalizada análoga al álgebra lineal y el cálculo diferencial de los sistemas lineales. Por ello, las líneas de investigación que abordan el estudio de procesos no lineales se encuentran en continua evolución, intentando mejorar las herramientas matemáticas existentes y la aplicación en entornos reales.

En primer lugar, la tesis presentada aborda el estudio del estado del arte de algunas de las técnicas más destacadas para el modelado e identificación de sistemas no lineales. El documento de tesis hace especial hincapié en las técnicas de modelado e identificación que emplean modelos borrosos con estructura Takagi-Sugeno (TS), ya que este tipo de modelos serán el punto de partida para las propuestas de diseño planteadas.

Una vez introducidos los modelos borrosos TS, se presenta el estado del arte en el diseño de controladores borrosos denominadas Compensadores Paralelos Distribuidos (PDC) y su aplicación al control predictivo. Asimismo, se describen los fundamentos matemáticos necesarios para la reformulación del problema de diseño de PDC en términos de Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs).

La revisión del estado del arte que se realiza en el documento de tesis, pone de manifiesto la dificultad existente cuando se aborda el diseño de controladores borrosos predictivos. El principal inconveniente es la resolución del problema de optimización que

se plantea al aplicar la filosofía de control predictivo. En particular, el índice cuadrático característico hace uso de un predictor borroso para la incorporación de las predicciones del comportamiento dinámico del proceso. Este hecho dificulta la etapa de optimización del diseño del controlador, dado que los modelos borrosos deben ser resueltos iterativamente cuando son empleados como predictores. Por ello, esta tesis propone dos nuevos métodos de diseño que permiten superar esta restricción en la etapa de optimización.

La primera propuesta que se plantea se basa en la obtención de un nuevo predictor denominado como FLAP (Fuzzy Large Ahead Prediction). Este predictor se obtiene mediante identificación a partir de datos experimentales del proceso real. La principal característica del predictor FLAP que se propone, es la posibilidad de obtener el vector de estados futuros en un horizonte de predicción a partir, únicamente, del vector de estados actuales y del conjunto de acciones de control futuras. Por tanto, el nuevo predictor elimina la necesidad de iterar el modelo borroso cuando es utilizado como modelo de predicción.

Posteriormente, se propone el diseño de un controlador PDC borroso empleando el predictor FLAP, así como la formulación del problema en términos de LMIs. La etapa de diseño del controlador resulta especialmente delicada debido a la necesidad de incluir la minimización de un índice de coste cuadrático y las condiciones de estabilidad en bucle cerrado.

La segunda propuesta que se describe está basada en el principio de optimalidad de Bellman, donde la idea principal es la división del problema de diseño original en un conjunto de problemas de optimización más sencillos, los cuales pueden ser vistos como etapas de decisión desde el punto de vista de la programación dinámica. El algoritmo que permite resolver el problema de diseño planteado se ha denominado Forward-Backward y permite obtener el controlador borroso predictivo de manera iterativa, garantizando la estabilidad del sistema en bucle cerrado y la minimización del índice cuadrático.

Resum

Els treballs en l'àrea de control de finals del segle de XIX i principis del segle XX, descrivien el modelatge, anàlisi i disseny de sistemes lineals utilitzant eines matemàtiques ben definides com l'àlgebra lineal i el càlcul diferencial. No obstant això, a mitjans dels anys 40 comencen a sorgir treballs que introdueixen el concepte de sistemes no lineals. A partir d'aquest moment, l'interès pel desenvolupament d'eines teòriques per a l'anàlisi i disseny de controladors no lineals anà en augment. La principal causa del ràpid desenvolupament d'aquesta nova línia de recerca va ser el sector aeroespacial, on es vivia una desenfrenada cursa per la conquesta de l'espai. Posteriorment, altres sectors industrials com l'automobilístic o el químic també van ser un reclam per al desenvolupament de noves tècniques de control no lineal.

En l'actualitat, hi ha diverses metodologies que són emprades en l'anàlisi i disseny de sistemes de control no lineals. No obstant això, no existeix una teoria generalitzada anàloga a l'àlgebra lineal i el càlcul diferencial dels sistemes lineals. Per això, les línies de recerca que aborden l'estudi de processos no lineals es troben en contínua evolució, intentant millorar les eines matemàtiques existents i l'aplicació en entorns reals.

En primer lloc, la tesi presentada aborda l'estudi de l'estat de l'art d'algunes de les tècniques més destacades per a la modelització i identificació de sistemes no lineals. El document de tesi fa especial èmfasi en les tècniques de modelatge i identificació que fan servir models borrosos amb estructura Takagi-Sugeno (TS), ja que aquest tipus de models seran el punt de partida per a les propostes de disseny plantejades.

Un cop introduïts els models borrosos TS, es presenta l'estat de l'art en el disseny de controladors borrosos anomenats Compensadors Paralels Distribuïts (PDC) i la seva aplicació al control predictiu. Així mateix, es descriuen els fonaments matemàtics necessaris per a la reformulació del problema de disseny de PDC en termes de Desigualtats Matricials Lineals (LMIs).

La revisió de l'estat de l'art que es realitza en el document de tesi, posa de manifest la dificultat existent quan s'aborda el disseny de controladors borrosos predictius. El principal inconvenient és la resolució del problema d'optimització que es planteja en aplicar la filosofia de control predictiu. En particular, l'índex quadràtic característic fa

ús d'un predictor borrós per a la incorporació de les prediccions del comportament dinàmic del procés. Aquest fet dificulta l'etapa d'optimització del disseny del controlador, ja que els models borrosos han de ser resolts iterativament quan són emprats com a predictors. Per això, aquesta tesi proposa dos nous mètodes de disseny que permeten superar aquesta restricció en l'etapa d'optimització.

La primera proposta que es planteja es basa en l'obtenció d'un nou predictor denominat com FLAP (Fuzzy Large Ahead Prediction). Aquest predictor s'obté mitjançant identificació a partir de dades experimentals del procés real.

La principal característica del predictor FLAP que es proposa, és la possibilitat d'obtenir el vector d'estats futurs en un horitzó de predicció a partir, únicament, del vector d'estats actuals i del conjunt d'accions de control futures. Per tant, el nou predictor elimina la necessitat d'iterar el model borrós quan és utilitzat com a model de predicció.

Posteriorment, es proposa el disseny d'un controlador PDC borrós emprant el predictor FLAP, així com la formulació del problema en termes de LMIs. L'etapa de disseny del controlador és especialment delicada a causa de la necessitat d'incloure la minimització d'un índex de cost quadràtic i les condicions d'estabilitat en bucle tancat.

La segona proposta que es descriu està basada en el principi d'optimalitat de Bellman, on la idea principal és la divisió del problema de disseny original en un conjunt de problemes d'optimització més senzills, els quals poden ser vistos com etapes de decisió des del punt de vista de la programació dinàmica. L'algorisme que permet resoldre el problema de disseny plantejat s'ha denominat Forward-Backward i permet obtenir el controlador borrós predictiu de manera iterativa, garantint l'estabilitat del sistema en bucle tancat i la minimització de l'índex quadràtic.

Abstract

The contributions to the field of control systems from the late nineteenth and early twentieth centuries described the main concepts on modeling, analysis and control design of dynamic linear systems based on linear algebra and differential calculus. However, at the mid 40s emerged a new interest on nonlinear systems. That interest contributed to the develop of theoretical tools for analysis and design on nonlinear systems. The main fact of the rapid development of this new field was the space race between United States and the Soviet Union. As well, other industries such as automotive or chemical also were a claim for the development of new nonlinear control techniques.

Nowadays, there are different methodologies that are used in analysis and design of nonlinear control systems. However, there is no generalized theory as in linear control systems. Therefore, there are different research topics focus on the study of nonlinear processes and working on the improvement of existing tools in real environments.

First, the phd document presents an extend state of art in nonlinear modeling and identification. A particular emphasis in modeling techniques and identification based on Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models, since that models will be the starting point in the proposed approach.

Furthermore, state of art presented introduces the design of fuzzy controllers defined as Parallel Distributed Compensators (PDC), its application to predictive control and the mathematical foundation recast the design problem of PDC in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs).

The main drawback, introduced in the state of art, is the resolution of the optimization problem when TS models are used as predictors, since this models must be solved iteratively. Therefore, this thesis proposes two new design methods that can overcome this constraint in the optimization stage.

The first approach is based on obtaining a new predictor defined as FLAP (Large Fuzzy Ahead Prediction). This predictor is obtained using experimental data and identification techniques. The main feature of FLAP predictors is the possibility of obtaining the future state vector in a prediction horizon from the state vector and the future control actions. Therefore, this new predictor do not need to be iterated in the optimization stage.

Afterwards, a PDC fuzzy controller can be designed based on the predictor FLAP. All the problem design is solved in terms of LMIs. The controller design stage is particularly sensitive because of the need to include the minimization of a quadratic cost index and the conditions of closed-loop stability.

The last approach is based on the Bellman optimality principle, where the main idea is to divide the original design problem into a set of simpler optimization problems, which can be assumed as different stages of decision from the the dynamic programming point. The iterative algorithm that solves the design problem has been called Forward-Backward and provide a predictive fuzzy controller that ensures the stability and minimizing the quadratic index of the closed-loop system.

Parte **I**

Introducción

CAPÍTULO 1

Motivación y Objetivos

"La ingeniería de control se define como la disciplina de ingeniería que se centra en el modelado matemático de sistemas de diversa naturaleza, analizando su comportamiento dinámico. Por otro lado, se emplea la teoría de control para el diseño de un controlador que modifique la respuesta dinámica y estática del sistema para un comportamiento deseado". [Wikipedia - The Free Encyclopedia](#)

1.1 Introducción

El tratado titulado *On Governors*, publicado en 1868 por James Clerk Maxwell, es considerado por muchos como el inicio de la disciplina de ingeniería de control, tal y como la conocemos actualmente. Este artículo analizaba matemáticamente las oscilaciones existentes en los reguladores centrífugos. Posteriormente, su colega Edward John Routh, generalizó los resultados de Maxwell para sistemas lineales. Al mismo tiempo y de manera independiente, Adolf Hurwitz en 1877 desarrolló el análisis de estabilidad para sistemas lineales mediante ecuaciones diferenciales. La unión de estos dos trabajos dio origen al teorema *Routh-Hurwitz*, pilar fundamental en la teoría de control clásica. Estas primeras aportaciones teóricas, fueron el sustrato necesario para un rápido desarrollo de la disciplina. Asimismo, el incipiente sector aeronáutico, surgido a principios del siglo XX, unido a la carrera armamentística sustentada por la I y II guerra mundial, propició un rápido desarrollo en el campo de control.

Los trabajos en el área de control de finales del siglo de XIX y principios del siglo XX, describían el modelado, análisis y diseño de sistemas lineales empleando herramientas

1.2 Antecedentes

matemáticas bien definidas como el álgebra lineal y el cálculo diferencial. Sin embargo, a mediados de los años 40 comienzan a surgir trabajos que introducen el concepto de sistemas no lineales. Uno de los primeros ejemplos, es el denominado *Problema de Lur'e*, enunciado por A. I. Lur'e, donde se propone el diseño de una realimentación no lineal. A partir de este momento, el interés por el desarrollo de herramientas teóricas para el análisis y diseño de controladores no lineales fue en aumento. La principal causa del rápido desarrollo de esta nueva línea de investigación fue el sector aeroespacial, donde se vivía una desenfrenada carrera por la conquista del espacio. Posteriormente, otros sectores industriales como el automovilístico o el químico también fueron un reclamo para el desarrollo de nuevas técnicas de control no lineal.

En la actualidad, existen diversas metodologías que son empleadas en el análisis y diseño de sistemas de control no lineales, tal y como se mostrará en el capítulo 3. Sin embargo, no existe una teoría generalizada análoga al álgebra lineal y el cálculo diferencial de los sistemas lineales. Por ello, las líneas de investigación que abordan el estudio de procesos no lineales se encuentran en continua evolución, intentando mejorar las herramientas matemáticas existentes y la aplicación en entornos reales.

El trabajo que se describe en los siguientes capítulos presenta un conjunto de herramientas parcialmente novedosas en el área de la identificación y control de sistemas no lineales, aportando otra alternativa a las ya existentes dentro del ámbito del control de procesos no lineales. Dentro de la multitud de metodologías existentes, se ha partido del estudio de sistemas borrosos como herramienta principal de diseño. Esta elección ha sido fruto de los resultados obtenidos en trabajos previos a la tesis, tal y como se comentará en el apartado 1.2, donde el análisis de distintas posibilidades hizo destacar la teoría de conjuntos borrosos como una de las más prometedoras.

1.2 Antecedentes

El grupo de investigación de *Control Predictivo y Optimización Heurística* de la Universidad Politécnica de Valencia, durante estos últimos años mantiene abierta una línea de investigación encaminado al desarrollo de algoritmos de control capaces de gestionar, con máxima eficiencia, el sistema de carga de los motores turbo diesel actuales. Este proyecto suponía un gran reto desde el punto de vista de control, dado que los motores de combustión interna son sistemas con una elevada complejidad y que a su vez se encuentran en continua evolución. El objetivo de esta rápida evolución es dar respuesta tanto a las nuevas necesidades de los conductores (potencia, bajo consumo, elasticidad de conducción, etc), como a las continuas restricciones de las autoridades competentes en materia medio ambiental [Guzzella & Amstutz 1998].

EL incremento de potencia demandado por los usuarios en los motores diesel actuales, es posible gracias al empleo de grupos turbocompresores [Guzzella & Onder 2004]. El principio de funcionamiento de estos elementos es simple, se emplea parte de la energía de los gases de escape (producto de la combustión) para incrementar la cantidad de aire que se introduce en los cilindros. Esta mayor cantidad de aire permite quemar una mayor cantidad de combustible, consiguiendo mayor potencia y par motor que un motor diesel atmosférico. En general, un turbocompresor está formado por una turbina y un compresor acoplados por un eje común. El objetivo del grupo turbocompresor es incrementar la velocidad de respuesta en la inyección de aire en el colector de admisión, cuando el conductor demanda aceleración a bajas velocidades. Sin embargo, un turbocompresor diseñado para respuestas a bajas velocidades, podría dañar el motor debido a las elevadas presiones que aparecerían en el colector de admisión a velocidades más altas.

Existen distintas propuestas para resolver la aparición de sobrepresiones a altas velocidades. Una posible solución es utilizar una *válvula de descarga* que permita desviar parte de los gases de escape de forma que no circulen a través de la turbina a altas velocidades. Sin embargo, la solución más extendida, es usar una turbina de geometría variable (TGV) [Stefanopoulou *et al.* 2000]. Ésta puede ser modificada para cada velocidad del motor durante el funcionamiento, variando el área de flujo y el ángulo con el que los gases de escape se dirigen a los álabes de la turbina.

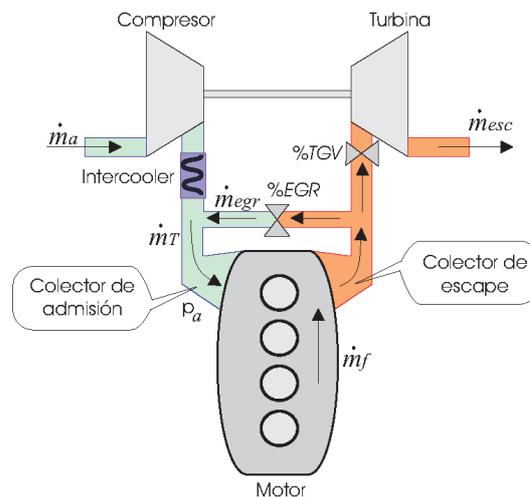


FIGURA 1.1: Esquema de un motor diesel con turbocompresor.

Las restricciones medio ambientales comentadas anteriormente, hacen referencia a las nuevas normativas de emisiones contaminantes existentes. En la actualidad, la normativa más restrictiva es la denominada *Euro 4* [Union 2003]. Ésta consiste (en el caso de motores diesel), en la imposición de una serie de límites de emisión máxima a lo largo

1.2 Antecedentes

de dos tipos de ciclo de test. Uno de los ciclos es el urbano y otro el extra urbano, midiéndose en ambos, diferentes tipos de contaminantes como óxidos de nitrógeno (NO_x) y humos.

Las emisiones de NO_x se presentan cuando la combustión se produce en un entorno con elevadas presiones y altas temperaturas. Sin embargo, la emisión de humos es consecuencia de un entorno antagónico al descrito, es decir, cuando la combustión se produce a bajas presiones y bajas temperaturas.

La solución más generalizada en el sector automovilístico para reducir la emisión de NO_x , es la recirculación de una parte de los gases de escape hacia el colector de admisión. Esta técnica se denomina recirculación de gases de escape (*EGR*), y a nivel tecnológico, se consigue mediante una válvula que conecta los colectores de admisión y escape. El fundamento de esta técnica es la recirculación de los gases de alto calor específico, procedentes de la combustión. Los cuales actúan como gases inertes, disminuyendo la temperatura de la combustión, y por tanto la velocidad de la reacción de formación de NO_x .

El otro elemento fundamental en las normativas medio ambientales es la cantidad de partículas (humos). Este factor depende directamente del ratio aire-fuel (*AFR*) en la combustión. Es decir, dada una cantidad de combustible determinada, habrá que garantizar una cierta cantidad de aire fresco de entrada para que el nivel de humos se mantenga por debajo de cierto límite.

Un primer análisis del problema, pone de manifiesto la contraposición de intereses entre la reducción de humos y de NO_x , ya que que la reducción de humos limita la capacidad de reducir la emisión de NO_x . Por tanto, se debe plantear una solución de compromiso que permita garantizar un comportamiento adecuado de ambos aspectos, pues si se recircula gran cantidad de gases de escape al colector de admisión, entrará menor cantidad de aire fresco, y por tanto, para una misma cantidad de combustible inyectada, disminuirá el ratio *AFR*, con lo que aumentará la cantidad de humo.

Por otra parte, el diseño de sistemas de control para motores diesel presenta una complejidad añadida, ya que no se dispone de sensores capaces de medir *AFR*, NO_x y humos. Por tanto, la cuantificación del comportamiento del sistema se debe realizar mediante otras magnitudes. En general, se emplean las medidas de la presión en el colector de admisión, P_a , y el flujo másico de aire que circula por el compresor, \dot{m}_a . Estas variables son accesibles y están íntimamente relacionadas con el *AFR*, NO_x y humos [Stefanopoulou *et al.* 2000].

Además, existen otras dos variables que afectan en gran medida al comportamiento de este tipo de motores. Por un lado se encuentra el régimen de giro del motor (*RPM*). Esta variable depende de múltiples factores como el par motor generado, par resistente,

la inercia del vehículo, etc. Por otro lado, se encuentra la masa de fuel (\dot{m}_f), es decir, la cantidad de fuel inyectado.

El diseño de sistemas de control basado en modelos para un proceso tan complejo como el descrito anteriormente, donde existen múltiples variables y objetivos confrontados, es un gran desafío desde el punto de vista de control. Por ello, a lo largo de estos últimos años se han probado y desarrollado distintas alternativas en el ámbito del modelo y diseño de sistemas de control para motores diesel. Las distintas alternativas estudiadas hacen uso tanto de técnicas lineales clásicas como metodologías no lineales más modernas. El fruto del minucioso estudio, análisis, modelado y diseño que abordan los distintos aspectos del control en motores turbo diesel ha llevado a los miembros del grupo de investigación (CPOH) a publicar numerosas contribuciones:

- *Caracterización y control de la válvula de recirculación de gases inertes en un motor diesel sobrealimentado.* XXIV Jornadas de Automática, León (Spain), Sept. 2003. E. Pieroni, E. Pérez, X. Blasco, M. Martínez, J. V. Salcedo y J.V. García.
- *Real-time control and simulation of a non-linear model for air management in a turbocharged diesel engine.* FISITA World Automotive Congress. Barcelona (Spain). May 2004. J.V. Salcedo, E. Pieroni, E. Pérez, X. Blasco, M. Martínez y J.V. García.
- *Characterization and control of the air management actuators in a variable geometry turbocharged diesel engine.* FISITA World Automotive Congress. Barcelona (Spain). May 2004. E. Pieroni, E. Pérez, X. Blasco, J.V. Salcedo, M. Martínez y J.M. Luján.
- *Diesel Engine Identification and Predictive Control using Wiener and Hammerstein Models.* Submitted to 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05). E. Pérez Soler, E. Pieroni, X. Blasco y M. Martínez.
- *Modelado no lineal de motores diesel turboalimentados.* In XXVII Jornadas de Automática. Almería (Spain). Septiembre 2006. S. García-Nieto, X. Blasco, M. Martínez y J. Sanchis.
- *Diesel Engine Identification and Predictive Control using Wiener and Hammerstein Models.* In IEEE Conference on Control Applications (CCA), IEEE Computer Aided Control Systems Design Symposium (CACSD) and IEEE International Symposium on Intelligent Control, Munich (Germany), October 2006. E. Pérez, X. Blasco, S. García-Nieto y J. Sanchis.
- *LPV identification of a turbocharged diesel engine.* Applied Numerical Mathematics. Vol. 58, num. 10, pp 1553-1571, 2008. J. Salcedo y M. Martínez.

- *Non-linear Robust Identification: Application to a Thermal Process*. Lecture Notes in Computer Science, 4527, pp. 457 - 466, 2007. J.M. Herrero, X. Blasco, M. Martínez y J.V. Salcedo.
- *Identificación y Control Fuzzy en Motores Diesel Turboalimentados*. In XXVIII Jornadas de Automática Huelva (Spain). Septiembre 2007. S. García-Nieto, J.V. Salcedo, X. Blasco y M. Martínez.
- *Implementación de un Sistema Empotrado para el Control en Tiempo Real de Procesos con Dinámica Rápida*. In XXVIII Jornadas de Automática Huelva (Spain). Septiembre 2007. S. García-Nieto, S. Rodríguez, X. Blasco y J. Sanchis.
- *Nonlinear Predictive Control Based on Local Model Networks for Air Management in Diesel Engines*. Control Engineering Practice. Vol. 16, num. 12, pp. 1399 - 1413, 2008. S. García-Nieto, M. Martínez, X. Blasco y J. Sanchis.
- *LMI approach for air-management in diesel engines using PDC fuzzy controllers*. In 1st. Int. Joint Conference on Computational Intelligence (IJCCI 2009) and Int. Conf. on Evolutionary Computation (ICEC), Madeira (Portugal), October 2009. S. García-Nieto, J. Salcedo, J.M. Herrero y C. Ramos.
- *Sistema de Control Borroso para el Proceso de Renovación de la Carga en Motores Turbodiesel*. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial. Vol 6, Num. 2, pp. 36-48, 2009. S. García-Nieto, J.V. Salcedo, X. Blasco y M. Martínez.
- *Air management in a diesel engine using fuzzy control techniques*. Information Sciences. Vol. 179, num. 19, pp. 3392-3409, 2009. S. García-Nieto, M. Martínez, J.V. Salcedo y D. Lauri.

1.3 Motivación y Objetivos

El trabajo precursor de esta tesis, publicado en 2008 [García-Nieto *et al.* 2008], describe el diseño de un sistema de control no lineal basado en el modelado mediante redes de modelos locales [Murray-Smith *et al.* 1994; Murray-Smith 1994; Murray-Smith & Gollee 1994], y formulación predictiva explícita para la gestión de la renovación de la carga [Bemporad *et al.* 2001]. En las conclusiones de dicho trabajo, se apunta la dificultad existente para conseguir demostrar teóricamente la estabilidad del sistema de control en bucle cerrado. Esta dificultad ha sido una de las motivaciones principales del trabajo que se ha desarrollado en la tesis.

La búsqueda de alternativas que garanticen matemáticamente la estabilidad del conjunto en bucle cerrado, se ha centrado en el estudio de distintas contribuciones realizadas en el ámbito de control en la última década, con el objetivo de encontrar la base

teórica necesaria para poder desarrollar una metodología generalizada que garantice la estabilidad de sistemas de control no lineales y que refleje la filosofía del control predictivo. Esta búsqueda queda reflejada en el estado del arte que se aporta en el documento (capítulos 2, 3 y 5).

Una de las alternativas más destacadas y que presenta mayor número de contribuciones en los últimos años, es el empleo de estructuras borrosas. Ésta se basa en el uso de una descripción lingüística del proceso, en vez de precisar las relaciones matemáticas entre las variables. Los modelos borrosos o *Fuzzy* son útiles para la descripción de los procesos complejos en los que se no se conocen todas las dinámicas involucradas [Babuska 1998].

Un modelo borroso conveniente para la aproximación de una gran cantidad de sistemas dinámicos no lineales es el denominado modelo Takagi-Sugeno (TS). Este tipo de modelo, introducido en [Takagi & Sugeno 1985], puede interpretarse como una aproximación multi-modelo en la cual modelos lineales simples se combinan para describir el comportamiento global del sistema, lo cual permite el análisis y diseño en un marco similar al de los sistemas lineales, con las consiguientes ventajas para asegurar propiedades clásicas, entre otras, de estabilidad y robustez. Además, las características de este tipo de representaciones son similares a las redes de modelos locales empleadas en [García-Nieto *et al.* 2008], donde los resultados obtenidos en el modelado y control de un sistema complejo fueron satisfactorios.

Por otra parte, se pretende emplear datos experimentales para la identificación de los modelos borrosos, a diferencia de un modelado teórico tradicional. Este tipo de técnicas han sido estudiadas por varios autores [Babuska 1998], [Martínez & Herrera 2003] y [Abonyi 2003]. Además, desde el punto de vista de la implementación, los modelos difusos TS son simples y computacionalmente eficientes [Babuska 1998].

Sin embargo, la característica de mayor relevancia, desde el punto de vista de control, es la posibilidad de diseñar controladores borrosos que garantizan la estabilidad del sistema en bucle cerrado y con múltiples exigencias en las especificaciones de diseño, como tiempo de establecimiento, rechazo perturbaciones, optimalidad, etc. Las múltiples posibilidades de diseño se muestran en [Tanaka & Wang 2001], donde el autor realiza una detallada y minuciosa descripción del empleo de modelos borrosos en el modelado y control. Asimismo Tanaka [Tanaka & Wang 2001], describe la formulación de los problemas de diseño mediante Desigualdades Lineales Matriciales (LMIs) [Boyd *et al.* 1987]. Éstas resultan una potente herramienta matemática que garantiza la resolución del problema en tiempo polinomial, así como una alta eficiencia de los algoritmos existentes para su resolución. Por tanto, el trabajo de Tanaka unido a la potencia de cálculo de las LMIs proporciona un marco muy interesante para abordar de manera generalizada el modelado y control de sistemas no lineales.

1.3 Motivación y Objetivos

Una vez se ha fijado el marco teórico de la tesis, el objetivo de la misma es la formulación de controladores predictivos capaces de hacer frente a procesos no lineales empleado los modelos borrosos y las técnicas de diseño propuestas en [Tanaka & Wang 2001].

El planteamiento de una filosofía predictiva para procesos no lineales viene justificada por el empleo masivo del control predictivo como técnica de control avanzado dentro del entorno industrial en su versión lineal, tal y como se indica en [Maciejowski 2002]. Esta técnica ha sido empleada desde mediados de los 70 en la industria petroquímica, pero actualmente se están incrementando las aplicaciones desarrolladas para otro tipo de sectores. Las principales razones de la creciente implantación de esta técnica se describen a continuación:

- Manejabilidad de procesos multivariables.
- Posibilidad de tener en cuenta las restricciones de las variables del sistema.
- Posibilidad de predecir los futuros valores de las variables del sistema.

Sin duda, la característica más importante de las citadas anteriormente, es la referente a las restricciones, ya que éstas se encuentran asociadas directamente con costes económicos, energéticos, etc. Esto hace posible tener en cuenta estos aspectos del proceso en las acciones de control que se proporcionan. Por tanto, parece razonable extender una técnica de amplio calado dentro del sector industrial al ámbito del modelado y control no lineal.

Las propuestas que se describen en el presente documento para poder extender la formulación predictiva al ámbito de sistemas no lineales, empleando el modelado de sistemas borrosos y el diseño mediante LMIs propuesto en [Tanaka & Wang 2001], se describen a continuación:

- Identificación de Modelos Predictivos Borrosos (FLAP)¹: se propone explorar las propiedades de las estructuras borrosas como aproximadores funcionales universales con el objetivo de obtener modelos predictivos a n-pasos sin necesidad de recurrir a estrategias iterativas clásicas. El objetivo es, tal y como se detalla en el capítulo 7, identificar un modelo de predicción borroso a n-pasos con estructura TS de manera directa, ya que generalmente se obtienen modelos de predicción a un paso vista y, posteriormente, se itera a n-pasos para obtener la predicción deseada. Sin embargo, la metodología clásica supone un importante obstáculo cuando se pretenden aplicar las técnicas de diseño introducidas en [Tanaka & Wang 2001]. Por tanto, se

¹FLAP es el acrónimo del anglicismo *Fuzzy Large Ahead Prediction*, cuya traducción es Predicción Borrosa de Horizonte Elevado.

propone la obtención de un modelo borroso que permita predecir el comportamiento dinámico en un horizonte de predicción cualquiera, pudiendo ser utilizado en el diseño de controladores borrosos formulados mediante las técnicas introducidas por Tanaka en [Tanaka & Wang 2001].

- **Control Predictivo Borroso:** se propone la formulación de un controlador borroso con estructura PDC² definido en [Tanaka & Wang 2001]. Para ello, será necesario revisar la formulación original para poder incluir el modelo de predicción propuesto. El objetivo es conseguir un sistema de control predictivo borroso que garantice la estabilidad en bucle cerrado y, que además, pueda satisfacer distintas especificaciones de diseño mediante LMIs.

1.4 Control Predictivo como Filosofía de Diseño

El control predictivo basado en modelos (CPBM) o *Model Predictive Control (MPC)*, más que un controlador concreto es una mezcla de filosofía y metodología para el cálculo de las acciones de control. Se trata además de una técnica comprensible, que en cierto modo, trata de reproducir el comportamiento de un operador experto en el control de un determinado proceso. Los pasos que seguiría un operador experto para conseguir controlar un proceso serían:

1. El operador conoce bien el proceso y por tanto, sería capaz de predecir, con mayor o menor exactitud, cuál será la evolución dinámica de las variables de un proceso si le aplica unas acciones de control determinadas.
2. El mismo operador puede además, decidir si esa evolución es adecuada en comparación a los objetivos que se ha marcado. Es capaz, por tanto, de valorar las distintas combinaciones de las acciones de control en función del grado de cumplimiento de unas especificaciones.
3. Con todo esto, podría decidir cuál es la mejor combinación de acciones de control dentro de un conjunto de posibilidades. El resultado final es que este operador es capaz de obtener cuál debe ser la acción de control que hay que aplicar basándose en los conocimientos que tiene del proceso y en la información pasada y actual de su estado.
4. Para conseguir una mayor calidad en el control, este mismo operador repetiría todos los cálculos cada vez que disponga de información actualizada, bien sean nuevas medidas del estado del proceso, bien conocimientos actualizados acerca del comportamiento del proceso (información nueva del modelo).

²PDC es el acrónimo del anglicismo *Parallel Distributed Compensator*, cuya traducción es Compensador Paralelo Distribuido.

1.4 Control Predictivo como Filosofía de Diseño

Este ejemplo nos da a entender que los primeros controles realizados manualmente por operadores que conocían bien el proceso se podían haber englobado en el área del control predictivo basado en modelos. En definitiva se trata de una metodología muy intuitiva para abordar el control de un proceso y esto ha influido en su difusión a nivel industrial. Para concretar, se entiende que pertenecen a la familia de los controladores CPBM aquellos que comparten las siguientes características:

- Se hace uso explícito de un modelo del proceso en el cálculo de predicciones de la evolución dinámica del proceso.
- La ley de control (conjunto de acciones de control en un horizonte de tiempo) se obtiene de la minimización de una cierta función de coste en la que intervienen las predicciones. La función de coste es la encargada de fijar el comportamiento que se pretende conseguir (especificaciones).
- Se aplica el concepto de horizonte móvil (*receding horizon*): en cada periodo de muestreo se resuelve un problema de optimización diferente, puesto que se incorpora nueva información de la evolución dinámica del proceso.

De las ideas anteriores, se puede deducir la diversidad de estrategias que pueden surgir en base a estas características. Como consecuencia, aparecerán diferentes controladores:

- Según el tipo de modelo del proceso utilizado.
- Según el tipo de función de coste utilizada.
- Según el método de optimización aplicado.

Para clarificar un poco más el concepto del CPBM, se va a describir la metodología común que comparten todos los controladores que hacen uso de las ideas descritas anteriormente (figura 1.2):

1. Haciendo uso del modelo del proceso, para cada instante t , se predicen las H futuras salidas del proceso $\mathbf{y}(k+t|k)$ ³ siendo $t = 1, 2, \dots, H$. El número de predicciones H , recibe el nombre de *horizonte de predicción*. Las salidas se predicen utilizando las salidas y entradas pasadas (información disponible hasta el instante k) y las hipotéticas entradas de control futuras, postuladas en ese mismo instante k .
2. Las futuras acciones de control se calculan de manera que minimicen una determinada función de coste, entre cuyos objetivos se encuentra el mantener lo más cerca

³Es usual encontrar en el ámbito del CPBM, la sintaxis $\mathbf{y}(k+t|k)$ para indicar la predicción de la salida para el instante $k+t$ postulada en el instante k

posible la salida del proceso $\mathbf{y}(k+t|k)$, de una trayectoria de referencia $\omega(k+t)$ que describe cómo se desea guiar dicha salida desde su valor actual $\mathbf{y}(k)$ hasta sus puntos de consigna futuros. La función de coste adopta así generalmente la forma de una función cuadrática de los errores entre la salida predicha y la trayectoria de referencia. También en la mayoría de los casos se suele incluir algún término referente al esfuerzo de control. Además, si la función de coste que se define es cuadrática, el modelo utilizado es lineal y no existen restricciones para ninguna señal implicada, entonces es posible encontrar una solución analítica para el problema de la optimización. En caso contrario, es necesario utilizar, en general, un método numérico de optimización.

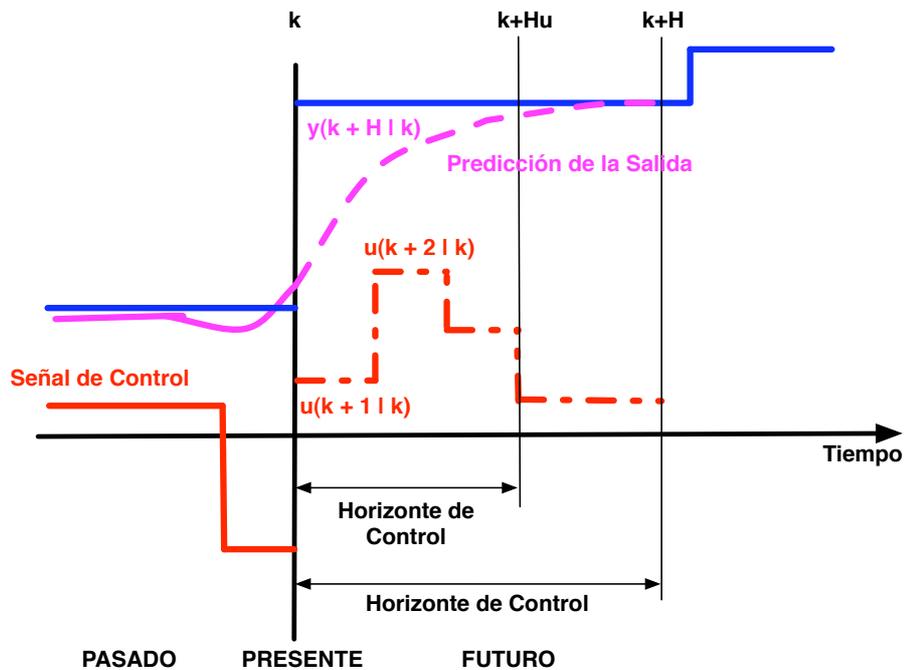
3. Una vez calculada la secuencia de futuras acciones de control que en ese instante hacen óptima la función de coste, se hace uso del concepto denominado *receding horizon*. Solamente se aplica como entrada al proceso $\mathbf{u}(k)$ la primera de ellas, despreciando el resto, puesto que en el siguiente instante $k+1$, la salida $\mathbf{y}(k+1)$ ya es conocida, y utilizando esa nueva información se repiten los pasos 1 y 2, obteniendo de esta forma la señal de control $\mathbf{u}(k+1)$ a aplicar en ese instante (la cual no es igual a la que se había postulado en el instante anterior $\mathbf{u}(k+1|k)$).

El análisis de esta metodología de control muestra que, sea cual sea la implementación que se realice, cualquier control predictivo basado en modelos se puede entender como un problema de optimización en cada periodo de muestreo que consta de tres elementos fundamentales:

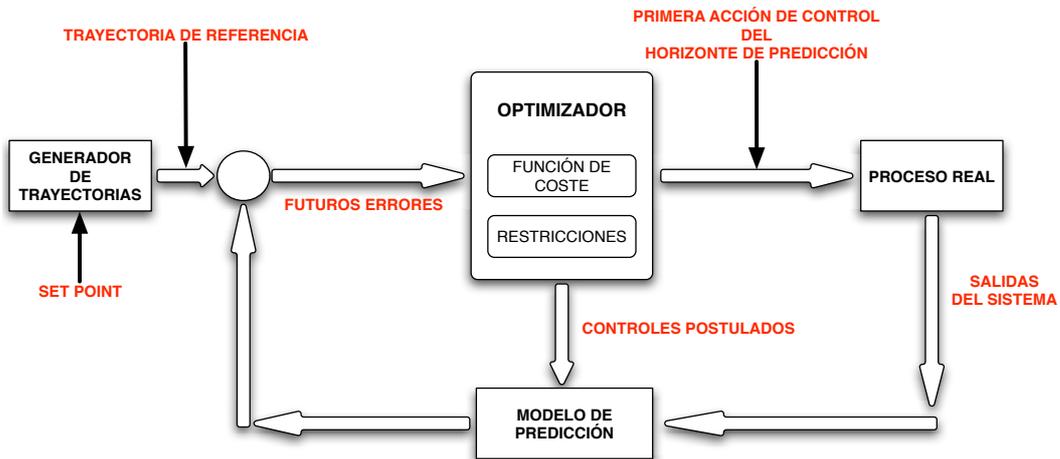
- Un **predictor** basado en el modelo del proceso, encargado de calcular las predicciones de la evolución dinámica del mismo a partir de las medidas de las variables del proceso hasta el instante actual 'k' y unas acciones de control futuras a lo largo del horizonte de predicción.
- Una **función de coste** que asigna un valor a cada predicción y por tanto, a cada ley de control postulada. Este valor trata de mostrar el grado de cumplimiento de las especificaciones estáticas y dinámicas compatibles con las posibles restricciones de funcionamiento.
- Un **optimizador** que debe encontrar el vector de acciones de control que ofrece el mejor valor de la función de coste. Generalmente en este proceso de búsqueda el optimizador realiza postulados de la ley de control e iterativamente trata de acercarse a la ley de control óptima.

Combinando distintas variaciones de estos tres elementos fundamentales se pueden obtener un gran número de controladores que formarían parte de la familia de los controladores predictivos. Para poder plantear cualquier tipo de mejora se debe analizar cada uno de estos tres elementos fundamentales.

1.4 Control Predictivo como Filosofía de Diseño



(a) La predicción de la salida del proceso es la base del control predictivo.



(b) Concepto de horizonte móvil.

FIGURA 1.2: Metodología general del CPBM

1.4.1 Predictor

Este elemento del control predictivo es el que se encarga de calcular las predicciones de las variables que se quieren controlar y debe utilizar para ello un modelo. En general este modelo consta de dos componentes (figura 1.3):

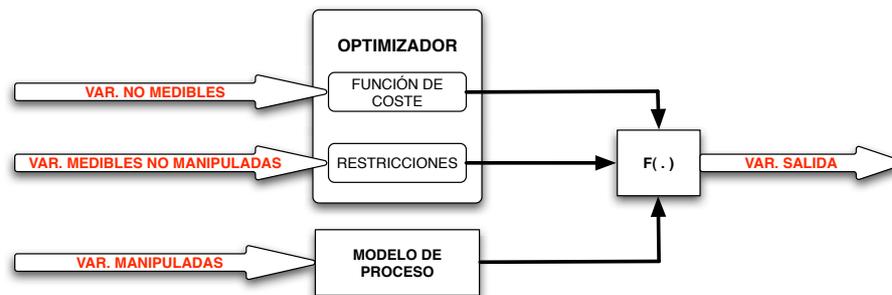


FIGURA 1.3: Estructura general de un modelo.

- **Modelo del proceso** que relaciona todas las variables de entrada que se pueden manipular con las variables de salida que se quieren controlar.
- **Modelo de perturbaciones** que se puede dividir en dos partes. Una que incluye la relación entre variables de entrada medibles, pero no manipulables, con las salidas (modelo de perturbaciones identificable) y otra parte que trata de describir la parte de la salida medida que no es explicada por el resto de modelos (modelo de perturbaciones no identificable).

Estos modelos se combinan a través de una función $f(\cdot)$ para producir un modelo de las variables de salida. Para modelar cada uno de estos componentes existen varias posibilidades:

- Respuesta ante un impulso.
- Respuesta ante un escalón.
- Función de transferencia.
- Representación en espacio de estados.
- Modelos de Volterra.
- Modelos mediante redes neuronales.
- Modelos borrosos.

Las diferencias entre los distintos tipos de modelos son conocidas y son objeto de campos de estudio en los que se describe cómo se obtienen, qué tipo de procesos pueden modelar, cuáles son sus limitaciones y cómo se utilizan para realizar predicciones de la evolución dinámica de las variables de un proceso. El capítulo 2 presenta en detalle algunas de las posibilidades existentes a la hora de modelar procesos no lineales. Asimismo, esta tesis hará uso de los modelos borrosos TS como herramienta de representación para procesos no lineales.

En [Phillips & Parr 1995] se puede encontrar una descripción del modelado mediante respuesta impulsional, función de transferencia y representación en espacio de estados y su utilización en control predictivo está ampliamente descrita en [Camacho & Bordons 1999].

Un ejemplo de utilización de modelos de Volterra en control predictivo se puede encontrar en [Maner *et al.* 1996]. Las redes neuronales son, en algunos casos, una alternativa para el modelado de sistemas no lineales [Chen *et al.* 1990], ejemplos de utilización en control predictivo se encuentran en [Nahas & Seborg 1992], [Zamarreño 1996] y [Liu *et al.* 1998]. En cuanto a los modelos con técnicas fuzzy, es posible encontrar ejemplos en [Espinosa & Vandewalle 1999a] y [Espinosa & Vandewalle 1999b].

Evidentemente, la calidad de la predicción debería ser el factor que marque el tipo de técnica de modelado que se debe utilizar, al menos a nivel teórico. Es natural pensar que, a mayor calidad en las predicciones, más posibilidad se tiene de conseguir un control adecuado. En las aplicaciones prácticas aparecen otros factores como los económicos que pueden determinar, más allá de las cuestiones teóricas, el tipo de modelo seleccionado.

Cualquiera de las técnicas de modelado mencionadas, puede ser utilizada para predecir el efecto que producen las variables manipuladas sobre las variables controladas. Esto es así, puesto que cualquiera de las acciones de control que se postule en el algoritmo de localización del óptimo, puede aplicarse posteriormente al proceso. Por tanto la calidad de la predicción sólo depende de la calidad del modelo. No parece tan evidente utilizar estos modelos para predecir el efecto de las variables no manipulables (medibles o no).

Cuando se tienen variables de entrada no manipulables no se puede saber con certeza qué valores van a tomar en el futuro y por tanto en el horizonte de predicción (intervalo de tiempo en el que se quiere realizar la predicción). El modelo puede ser muy exacto, pero el desconocimiento del valor futuro de estas variables podría producir predicciones de muy baja calidad. En estos casos se debe, al menos, conocer alguna de sus propiedades estadísticas que nos permita realizar una estimación. Si estas variables son medibles se pueden utilizar las medidas para realizar una estimación de mayor calidad (por ejemplo, evaluar la tendencia y extrapolar). La calidad de la predicción, en estos

casos, depende tanto de la calidad del modelo como de la calidad de las estimaciones de las variables no manipulables.

1.4.2 Función de coste

Un índice de funcionamiento responde, en general a una expresión del tipo:

$$I = \int_0^{\infty} f(\mathbf{r}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \dots) dt \quad (1.4-1)$$

El objetivo de esta función es plasmar en una formulación matemática una medida cuantitativa del funcionamiento de un sistema. En la teoría de control aparecen distintos indicadores que tratan de describir la evolución dinámica de un proceso, y se pueden englobar en dos grandes grupos:

- a) Parámetros descriptivos de la evolución temporal de la variable controlada: error en régimen permanente, valor final, tiempo de establecimiento, sobreoscilación, frecuencia de las oscilaciones, tiempo de subida, etc.
- b) Medidas de la desviación de la variable controlada respecto de la referencia (cuadro 1.1). Generalmente se han utilizado integrales de una función del error, siendo los más extendidos en su uso [Marlin 1995]: IAE (integral del valor absoluto del error), ISE (integral del error al cuadrado), ITAE (integral del producto del tiempo por el valor absoluto del error), ITEC (integral del producto del tiempo por el error al cuadrado), etc.

CUADRO 1.1: Principales índices de funcionamiento.

Índice	Expresión
IAE	$\int_0^{\infty} r(t) - y(t) dt$
ISE	$\int_0^{\infty} (r(t) - y(t))^2 dt$
ITAE	$\int_0^{\infty} t r(t) - y(t) dt$
ITEC	$\int_0^{\infty} t(r(t) - y(t))^2 dt$

Entre estas dos opciones, parece claro que es más apropiado para evaluar cómo funciona un sistema, utilizar parámetros del primer grupo, ya que las medidas de tipo integral no reflejan directamente cómo funciona el sistema. Sólo con el valor del índice un operador es incapaz de saber con cierto grado de exactitud como está funcionando el sistema. A esto se une que es más usual especificar el funcionamiento de un proceso exigiendo que el tiempo de establecimiento y la sobreoscilación han de ser menores que unos valores determinados. Sin embargo, con los indicadores de tipo integral se puede incorporar en la evaluación del funcionamiento otro tipo de elementos como, por

1.4 Control Predictivo como Filosofía de Diseño

ejemplo, el valor de la acción de control o ponderaciones de las distintas variables y, adicionalmente, se pueden usar para la evaluación de costes económicos.

En general, no existe una formulación universal que sea válida para todos los problemas de control ya que cada tipo de indicadores tiene sus ventajas e inconvenientes. El índice de funcionamiento más adecuado para un problema concreto depende de los objetivos que se impongan y de las herramientas disponibles.

Una alternativa que trata de combinar los dos tipos de indicadores es la de establecer unas trayectorias de referencia en un índice de tipo integral. En lugar de utilizar una referencia de tipo escalón $\mathbf{r}(t)$, ésta se filtra mediante una función de transferencia ($\mathbf{P}(s)$) que fije la dinámica deseada de bucle cerrado: tiempo de establecimiento, sobreoscilación y régimen permanente, y se utiliza esta nueva respuesta $\omega(t)$ como referencia en un índice de funcionamiento de tipo integral.

$$\omega(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{r}(s) \rightarrow \omega(t) \quad (1.4-2)$$

$$I = \int_0^{\infty} f(\omega(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (1.4-3)$$

La traducción al entorno del control predictivo es directa, ya que operando con señales discretas el índice de coste debe, de alguna forma, imponer el funcionamiento deseado para el proceso introduciendo además nuevas características y parámetros para posibilitar su aplicación al control en línea ya que se debe conseguir que el volumen de los cálculos a realizar sea razonable. Se puede generalizar, por tanto, como función de coste la expresión siguiente:

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{k=H_1}^{H_2} f(\omega(k+t), \mathbf{y}(k+t|k), \mathbf{u}(k+t), \alpha(t), \lambda(t), H_u, k) \quad (1.4-4)$$

donde cada uno de los parámetros tiene un significado:

Horizonte de predicción (H_1, \dots, H_2): intervalo de tiempo en el que se realiza la predicción, debe ser finito para que sea posible su aplicación al control en línea. Un horizonte de predicción infinito o demasiado grande hace que los cálculos de las predicciones no se puedan realizar en línea, salvo que exista una formulación analítica.

Horizonte de control (H_u) : intervalo del horizonte de predicción en el que se permiten variaciones de la variable manipulada. Este parámetro se utiliza para simplificar el problema de optimización, si se reduce el número de variaciones se reduce el número de variables en el problema. Cuando se limita el horizonte de control cabe la posibilidad de realizar distintas estructuraciones de las acciones de control a lo largo del horizonte de predicción.

Factores de ponderación para los errores de predicción ($\alpha(t)$) y para las acciones de control ($\lambda(t)$). Estos factores se utilizan para conseguir distintos efectos en el comportamiento de bucle cerrado. Por ejemplo, mayor influencia del esfuerzo de control respecto a los errores de predicción o menor influencia en el índice de las predicciones más alejadas, o mayor ponderación de unas determinadas variables en detrimento de otras, etc.

Restricciones: puede aparecer además, un conjunto de restricciones adicionales sobre variables de entrada, salida e internas. Estas restricciones pueden ser debidas tanto a limitaciones físicas del proceso como a especificaciones de funcionamiento.

En la mayoría de los casos, la función f es cuadrática debido principalmente a que la minimización de dicho índice sujeto a restricciones lineales es matemáticamente tratable (problema de programación cuadrática QP). Existen otras aproximaciones manejando índices de coste modulares [Genceli & Nikolaou 1993] o con norma infinita [Rao *et al.* 1998] que no resultan tan sencillos de manejar y que, en presencia de restricciones lineales, terminan resolviendo problemas de programación lineal.

1.4.3 Optimizador

Finalmente el control predictivo basado en modelos no es más (ni menos) que un problema de optimización. El objetivo de este elemento está claro, debe conseguir la combinación de acciones de control que optimice la función de coste. La solución ideal es la que resultaría de la optimización analítica fuera de línea, esto implica disponer de una expresión matemática que calcula el óptimo en función de las medidas hasta el instante k . Esto se puede conseguir cuando el modelo es lineal y la función de coste cuadrática sin restricciones. En estos casos, el problema de optimización se resuelve fuera de línea y el análisis del sistema resultante se puede realizar utilizando las herramientas clásicas de la teoría de control. Fuera de este contexto, es decir, con problemas no lineales (bien sea por los modelos utilizados, bien por la aparición de restricciones, etc.), el control predictivo se convierte en un problema de optimización en cada periodo de muestreo con el consiguiente incremento de complejidad (resultando en un controlador no lineal y en un bucle cerrado también no lineal). El método de optimización cobra más protagonismo cuando se pretende aplicar el control predictivo en línea. Por muy bueno que sea el modelo o muy acertada la función de coste, el cuello de botella es la técnica de optimización. Una selección o ajuste inadecuado de esta técnica puede provocar en algunos casos, una pérdida notable de las prestaciones del control puesto que no se localiza correctamente el óptimo.

1.5 Evolución del CPBM

Como ha ocurrido en otros casos, la idea del CPBM ya se vislumbró en los años 60 antes de que se convirtiera en una de las estrategias de control avanzado más utilizada en el control de procesos. Los conceptos teóricos iniciales que pueden asociarse al control predictivo se basan en los trabajos realizados en control óptimo (cuadro 1.2). Utilizando un modelo discreto lineal en espacio de estados se calcula la ley de control minimizando una función cuadrática de los estados y las acciones de control (regulador LQR). Al fijar un índice infinito se podía obtener un controlador consistente en una realimentación del estado [Mosca 1995], [Lemos & Mosca 1985]. Debido a las capacidades limitadas de los ordenadores y al rápido muestreo de los procesos para los que el LQR fue desarrollado (por ejemplo en la industria aeroespacial), el esfuerzo se desvió hacia la obtención de controladores que evitasen realizar la optimización en línea.

Como consecuencia, esta técnica tuvo relativamente poco impacto en la industria de procesos debido a que no contemplaban las no linealidades de los procesos, sus restricciones de funcionamiento, incertidumbres en el modelo y sólo se disponía de un índice cuadrático para medir las prestaciones. Únicamente podía aplicarse en áreas donde se podían conseguir modelos muy exactos y su obtención estaba justificada económicamente (por ejemplo, la industria aeroespacial).

CUADRO 1.2: Breve historia del CPBM.

Algoritmo	Modelo	Índice	Horiz. predicción	Restricciones
LQG (1960)	L, SS	min ISE, I,O	∞	-
IDCOM (1976)	L, FIR	min ISE, O	N	I,O
DMC (1979)	L, FIR	min ISE, I,O,M	N	I,O
QDMC (1983)	L, FIR	min ISE, I,O,M	N	I,O
GPC (1987)	L, FT	min ISE, O,M	N	-
IDCOM-M (1988)	L, FIR	min ISE O min ISE I	N	I,O
SMOC (1988)	L, SS	min ISE, I,O,M	N	I,O
Rawlings and Muske (1993)	L, SS	min ISE, I,O	∞	I,O

Leyenda: (L) Lineal, (SS) Espacio de estados, (FIR) Respuesta impulsional, (FT) Función de transferencia (ISE) Integral Square Error, (I) entrada, (O) Salida, (M) Cambios en la entrada.

Al contrario que otras veces, el CPBM fue desarrollado primero en la industria, bajo varios acrónimos y recetas propias, tratando de resolver los inconvenientes planteados por el LQR antes mencionados, y mucho antes de disponer de un minucioso entendi-

miento de las propiedades teóricas de lo que hoy se entiende como control predictivo. El interés de los investigadores por el CPBM creció a mitad de los años 80, a raíz de unas jornadas organizadas por la empresa petroquímica *Shell* [Prett & Morari 1987]. La industria contribuyó decisivamente en el desarrollo de un control *óptimo* aplicable, apareciendo los primeros controles predictivos basados en modelos. Se trataba de algoritmos de control en los que se podía utilizar modelos más sencillos, las restricciones de funcionamiento se podían tener en cuenta en la formulación y la optimización se realizaba cada periodo de muestreo puesto que se utilizaban horizontes de predicción finitos. Las primeras implementaciones a nivel industrial (IDCOM y DMC), se desarrollaron en paralelo. De estos algoritmos cabría destacar:

- **IDCOM** o *Identification Command* [Richalet *et al.* 1978]. Es el nombre del software desarrollado a partir del algoritmo conocido como *Model Algorithmic Control* (MAC) [Rouhani & Mehra 1982], también referenciado como *Model Predictive Heuristic Control* (MPHC). Sus características más importantes son:

- Modelo lineal por respuesta impulsional.
- Función de coste con un índice cuadrático y horizonte de predicción finito.
- No hace uso del concepto de horizonte de control.
- Especificaciones mediante trayectoria de referencia generadas mediante un sistema de primer orden.
- Se incluye un modelo de perturbaciones:

$$n(k+t|k) = \alpha n(k+t-1|k) + (1-\alpha)[y(k) - y(k|k-1)], \quad 0 \leq \alpha < 1$$

- Restricciones en la entrada y la salida incluidas en la formulación.
 - Optimización mediante un algoritmo iterativo.
- **DMC** o *Dynamic Matrix Control* [Cutler & Ramaker 1980]. Sus principales características son:

- Modelo lineal por respuesta a un escalón.
- Función de coste con un índice cuadrático de los errores futuros y puede incluir términos referentes a las acciones de control.
- Horizonte de predicción finito.
- Utiliza un horizonte de control.
- Especificaciones se fija tratando de seguir un referencia de tipo escalón.
- Se incluye un modelo de perturbaciones:

$$n(k+t|k) = y(k) - y(k|k-1)$$

- La acción de control óptima se obtiene como la solución de un problema de mínimos cuadrados.

A partir de estas dos metodologías se han ido desarrollando con el tiempo, distintas alternativas, tanto a nivel industrial como a nivel teórico, entre las que caben destacar:

- **QDMC** [Garcia & Morshedi 1986]. Basado en el DMC incluye explícitamente las restricciones en las entradas y salidas del proceso. Utiliza programación cuadrática (QP) para la minimización del índice.
- **IDCOM-M** [Grosdidier *et al.* 1988]. También referenciado como HIECON (*Hierarchical constraint control*). Esta basado en el IDCOM, presentando cambios en la función objetivo y en la priorización de las restricciones. Utiliza dos funciones objetivo, primero se optimiza la que evalúa los errores de predicción y, si quedan grados de libertad, se optimiza respecto a las acciones de control. Para simplificar el cálculo sólo se permite un cambio en la variable manipulada.
- **GPC** o *Generalized Predictive Control* [Clarke *et al.* 1987a] [Clarke *et al.* 1987b]:
 - Utiliza modelos basados en funciones de transferencia incluyendo modelo de perturbaciones (modelo CARIMA).
 - El índice es cuadrático e incluye un término de errores de predicción y otro de acciones de control.
 - Utiliza los conceptos de horizonte de predicción y control.
 - La optimización es analítica, por tanto se puede calcular un regulador lineal fuera de línea. Permite implementar un control adaptativo.

El algoritmo de GPC resume muchas de las características de los controladores predictivos para procesos lineales [Clarke & Mohtadi 1989], [Albertos & Ortega 1989], [Ordys & Clarke 1993]. Asimismo, se ha utilizado con restricciones [Chow & Clarke 1994a], [Kuznetsov & Clarke 1994], [Tsang & Clarke 1988], [Camacho 1993] y se ha planteado el control predictivo adaptativo [Clarke 1991]. Algunas de sus aplicaciones industriales se pueden encontrar en [Clarke 1988], [Chow & Clarke 1994b], [Linkens & Mahfouf 1994] y [Rossiter *et al.* 1991].

El entendimiento de las propiedades del CPBM a raíz de investigaciones cruciales realizadas en el ámbito académico [Rawlings & Muske 1993] han permitido que hoy en día exista un marco conceptual y práctico común tanto a investigadores como a ingenieros de control. Son muchas las publicaciones que reflejan el estado del arte a nivel tecnológico y teórico del control predictivo en su tiempo de publicación [Garcia *et al.* 1989], [Keyser 1991], [Muske & Rawlings 1993], [Richalet 1993], [Clarke 1994], [Froisy 1994], [Qin & Badgwell 1997], [Nikolaou 1998], [Morari & Lee 1999], [Rawlings 2000] y [Wang

2004]. La visión que ofrecen respecto al futuro del CPBM en la industria y en la investigación pasa por combinar esta estrategia de control con otras áreas de la ingeniería de control o incluso con otras áreas de conocimiento:

- Control no lineal [Garcia *et al.* 1989].
- Control inteligente (borroso, neural) [Nikolaou 1998].
- Nuevos esquemas de identificación, tanto de procesos como de límites para la incertidumbre [Bemporad *et al.* 1999].
- Mejoras en los métodos de estimación del estado. Alternativas al filtro de Kalman [Qin & Badgwell 1997].
- Monitorización de procesos y diagnóstico de fallos para comprobar el funcionamiento óptimo del controlador predictivo (Control estadístico de procesos o SPC) [Froisy 1994].
- Mejora de las interfaces de usuario y diálogo con el operador [Froisy 1994].
- Integración de niveles en la jerarquía de control [Morari & Lee 1999].

Actualmente existen líneas de investigación en control predictivo bien definidas donde cabría destacar entre otras:

- **Control predictivo estable:** Desde el uso de horizontes infinitos de predicción [Muske & Rawlings 1993], [Zheng & Morari 1995], la utilización de horizontes casi-infinitos [Chen & Allgöwer 1998] y la generalización a horizontes finitos descrita en [Primbs & Nevistic 2000], la formulación del control predictivo en espacio de estados se impone a la de entrada-salida.

En relación con el interés de utilizar modelos en espacio de estados, el trabajo presentado en [Ordys & Clarke 1993] propone un modelo SISO en espacio de estados deducido a partir del modelo CARIMA E/S de Clarke [Clarke *et al.* 1987a]. Los estados en este modelo están constituidos por los valores pasados de la salida, del ruido y de la entrada, siendo la variable de entrada en este modelo el incremento de la acción de control. Se trata pues de un modelo CARIMA aplicable al caso SISO, proponiéndose una generalización del mismo al caso MIMO en [Camacho & Bordons 1999].

Es interesante destacar ciertas referencias, pero ahora orientadas al caso de procesos MIMO, que tratan el diseño de controladores predictivos en espacio de estados. En [Xi 1989] se propone un modelo MIMO en espacio de estados obtenido mediante la realización del modelo de la planta en matrices de transferencia utilizando la forma canónica de observabilidad, tomando como entrada el incremento de la acción

de control. La principal limitación de este modelo es la no consideración de incertidumbres y/o ruidos de medida. En [Kinnaert 1989] se plantea un modelo MIMO en espacio de estados CARIMA⁴ cuya parte determinística es una realización de la matriz de transferencia de la planta, aunque no especifica bien como se modela la parte estocástica, ocurriendo algo parecido en [Chisci *et al.* 1996], aunque en este caso la entrada es directamente la acción de control.

Hay otras referencias que proponen modelos MIMO estocásticos en espacio de estados [Ricker 1990; Lee *et al.* 1994; Bitmead *et al.* 1989], en la primera se propone un modelo estocástico general con varios tipos de perturbaciones (ruidos de medida, perturbaciones aditivas a la acción de control e incertidumbres en el modelo), aunque no queda tampoco clara la forma de seleccionar las matrices asociadas a la parte estocástica. Algo parecido ocurre en la segunda referencia, aunque en este caso los resultados son sólo válidos para plantas estables o a lo sumo con integradores. Esto se debe a que emplea la respuesta ante escalón como información para crear el modelo en espacio de estados. La principal diferencia de este artículo, [Lee *et al.* 1994], con respecto a otros es que sus resultados son aplicables a diferentes metodologías de control predictivo: DMC y GPC. La tercera referencia [Bitmead *et al.* 1989] tampoco detalla la forma de seleccionar la parte estocástica, aunque tiene el interés de reformular el GPC como un controlador LQG.

Más recientemente se han publicado tutoriales sobre control predictivo [Wang 2004; Rawlings 2000] en los que se presenta para el controlador predictivo un modelo en espacio de estados. En [Wang 2004] se propone un modelo de velocidad⁵ que presenta perturbaciones sobre el estado y la salida, y que incorpora en el modelo integradores como consecuencia de su formulación en función de los incrementos de las acciones de control. Este hecho permite que se puedan cancelar perturbaciones, errores de modelado, etc. Sin embargo, esta idea no se explota a la hora de predecir las salidas, ya que no se realiza estimación alguna de las perturbaciones y, por tanto, no se pueden incluir en la predicción. En [Rawlings 2000] se presenta un modelo en espacio de estados que incluye perturbaciones sobre la entrada, el estado y la salida. En su formulación la capacidad de rechazo a perturbaciones y/o errores de modelado se basa en el cálculo de los valores óptimos de la salida, de la entrada y del estado a alcanzar en régimen permanente⁶, con la información disponible sobre las restricciones y la estimación de las perturbaciones.

Los controladores diseñados en espacio de estados requieren el empleo de observadores para la estimación del estado cuando este no es medible (caso general). Según la situación, los autores han planteado diferentes soluciones al problema

⁴Siendo también su entrada el incremento de la acción de control

⁵La entrada al sistema es el incremento de la acción de control

⁶Target Calculation

de la estimación del estado. En algunos artículos no se requiere su uso, así en [Albertos & Ortega 1989] se emplea una reconstrucción del estado basada en el uso de la pseudoinversa de la matriz de observabilidad. En [Camacho & Bordons 1999] los estados propuestos son, por un lado los incrementos de las acciones de control pasados (conocidas), por otro, los valores pasados de las salidas (medidos) y, por último, los valores pasados de las entradas del ruido (estimados), de ahí que no se requiera el uso de un observador. En [Kinnaert 1989] la propia ecuación para la predicción es la utilizada para estimar el estado, y finalmente, en [Kwon *et al.* 1992] no se indica la necesidad de un observador ni la hipótesis de que el estado sea medible. Sin embargo, la mayoría [Scattolini & Schiavoni 1995; Ordys & Clarke 1993; Chisci *et al.* 1996; Ricker 1990; Lee *et al.* 1994; Rawlings 2000] emplea un filtro de Kalman de régimen permanente, argumentando la facilidad de su diseño y la garantía de que los polos del observador se localizan dentro del círculo unidad, como razones para justificar su uso. Sin embargo, hay un par de casos que presentan alternativas diferentes. Así en [Xi 1989] se emplea un observador de rango completo diseñado mediante asignación de polos, con la única limitación de que sus polos han de poseer módulo inferior a la unidad. En [Ling & Lim 1996] se minimiza un índice de coste en cada paso de simulación⁷ para la estimación de los estados.

■ **Control predictivo no lineal:** Otro de los temas actualmente abiertos en control predictivo es el control de procesos no lineales [Qin & Badgwell 1997; Morari & Lee 1997; Magni *et al.* 2001; Rawlings 2000; Kouvaritakis & Cannon 2001]. Existen diferentes alternativas para el diseño del controlador, entre las que se pueden destacar:

- Diseño de controladores predictivos para modelos linealizados en determinados puntos de funcionamiento [Oliveira *et al.* 1999].
- Diseño del controlador empleando modelos que expresan dinámicas lineales sujetas a no linealidades de tipo estático [Genceli & Nikolaou 1995].
- Diseño del controlador mediante un modelo no lineal conocido. Estos modelos suelen derivarse de la aplicación de primeros principios (masa, energía, etc.). La principal dificultad de estos métodos es la selección del algoritmo de optimización a emplear, ya que debe ser capaz de obtener el mínimo global del índice de coste en un problema de optimización que resulta ser no convexo. Por ejemplo, la aplicación de algoritmos genéticos permite resolver de forma eficiente este problema [Onnen *et al.* 1997; Martínez *et al.* 1998].

A partir de este modelo no lineal se pueden plantear diferentes estrategias que garanticen un diseño estable para el controlador:

- Empleo de horizontes casi infinitos [Chen & Allgöwer 1998].

⁷Idea similar al filtro de Kalman

- Empleo de una región terminal [Michalska & Mayne 1993], a la cual debe converger la predicción, y en su interior es aplicado un controlador local. Esta estrategia se conoce con el nombre de controlador predictivo dual.
- Empleo de región terminal y coste terminal [Mayne 2000; Limon *et al.* 2003]. Estas referencias analizan la formulación general del MPC justificando la necesidad de introducir la región terminal y el coste terminal para garantizar la estabilidad.

También se ha analizado la factibilidad de la ley de control cuando hay presentes restricciones sobre estados y acciones de control. Por ejemplo, en [Kerrigan 2000; Limon *et al.* 2005; Cannon *et al.* 2003; Limon *et al.* 2007, 2008] se ha empleado la teoría de conjuntos invariantes para garantizar la existencia de una región de estados iniciales para la cual siempre es resoluble el problema de optimización, mediante la utilización de conjuntos invariantes y de regiones terminales invariantes. La principal dificultad de esta metodología es el cálculo fuera de línea de estos conjuntos.

- **Control predictivo robusto:** En [Qin & Badgwell 1997; Morari & Lee 1997; Rawlings 2000] se destaca la importancia del desarrollo de metodologías de diseño robusto aplicado a control predictivo. Así, en [Qin & Badgwell 1997] se afirma que es necesario desarrollar nuevos esquemas que garanticen robustez teniendo presentes las discrepancias entre modelo y proceso estimadas a partir de las mediciones. Además, sostiene que el diseño robusto es un área en la que la investigación académica puede ayudar. En [Morari & Lee 1997] se realiza una revisión sobre las diferentes metodologías de diseño robusto que se han presentado hasta entonces, de entre los que cabe destacar las aportaciones de [Kothare & Morari 1996] y [Lee & Yu 1997]. La primera cita obtiene una cota superior para el índice de coste, y a partir de esta cota desarrolla un control por realimentación lineal del estado cuya ganancia es variante con el tiempo, la cual es obtenida mediante la resolución de LMIs. La segunda referencia pondera en el índice de coste el error en valor medio en lugar del error de peor caso, siendo necesario añadir una restricción de contracción sobre el estado para que se garantice la estabilidad sobre un determinado conjunto de modelos. [Rawlings 2000] destaca que la mayor parte de los algoritmos que garantizan robustez se caracterizan por exigir una gran carga computacional en línea lo cual limita enormemente su aplicación práctica.

En [Bemporad *et al.* 1999], se resumen otras aproximaciones aparecidas en la literatura del control predictivo con características diferentes a la hora de representar la incertidumbre y la forma de calcular el controlador robusto. Por ejemplo en [Kouvaritakis *et al.* 1997] la incertidumbre se representa como una elipse centrada en el vector de parámetros estimados para una función de transferencia. En

[Badgwell 1997], la incertidumbre en el modelo se parametriza por una lista de posibles plantas y se añaden al problema original restricciones para asegurar la estabilidad robusta. Otra aproximación es la denominada *min-max MPC*, donde [Lee & Yu 1997], presentan una formulación basada en la minimización del peor caso de un índice cuadrático para sistemas con parámetros variables en el tiempo pero acotados. Del mismo modo, [Megias *et al.* 2002] presenta un min-max GPC^∞ donde la incertidumbre se representa de forma politópica. Por otro lado, hay trabajos que diseñan controladores predictivos robustos mediante LMIs (desigualdades lineales matriciales), siendo uno de los pioneros [Kothare *et al.* 1994], cuya línea ha sido desarrollada y ampliada en trabajos posteriores, por ejemplo [Granado *et al.* 2003] o [Rodrigues & Odloak 2003]. Asimismo, existe una gran cantidad de trabajos en que abordan el estudio del control predictivo no lineal robusto, como [Mayne *et al.* 2000], [Kerrigan & Mayne 2002], [Limon *et al.* 2003] o [Limon *et al.* 2004], que emplean diferentes metodologías para garantizar la estabilidad robusta, y que utilizan el concepto crucial de predicción en bucle cerrado [Scockaert & Mayne 1998]. Estas publicaciones tienen como punto de partida [Scockaert *et al.* 1997], trabajo que utiliza incertidumbres aditivas que decaen con el tiempo y la continuidad Lipschitz de la ley de control para garantizar que el índice de coste es una función de Lyapunov que decrece con el tiempo para un cierto grado de incertidumbre. Las metodologías de diseño robusto propuestas se basan en el empleo de los siguientes elementos:

- Uso de regiones de evolución incierta [Limon *et al.* 2004].
 - Conjuntos invariantes robustos [Limon *et al.* 2008].
 - Uso de la estabilidad entrada a estado [Limon *et al.* 2006].
 - Empleo de conjuntos contractivos [Limon *et al.* 2003].
 - Uso de la estrategia que minimiza el peor caso o min-max [Limon *et al.* 2004; Kerrigan & Maciejowski 2008; Necoara *et al.* 2007; Megias *et al.* 2002] que se basan en [Scockaert & Mayne 1998].
- **Control predictivo adaptativo:** Siendo el GPC el algoritmo orientado al control predictivo adaptativo por excelencia [Kinnaert 1989], y a pesar del amplio mercado que tendría un algoritmo CPBM autoajutable, pocas son las aplicaciones reales que incluyen adaptación en línea. El control adaptativo indirecto tiende a ser sustituido por un nuevo paradigma que contempla la integración de la identificación y el control predictivo. En esta aproximación, y debido a los problemas que presenta la identificación en bucle cerrado, se insiste en mantener una excitación persistente en las señales para poder identificar [Genceli & Nikolaou 1996].
 - **Utilización de técnicas de optimización alternativas,** para hacer frente a problemas que se plantean con modelos no lineales, restricciones de funcionamiento y

nuevos índices (problemas no convexos y/o discontinuidades a resolver en tiempo real). Por ejemplo, [Pérez 1995] utiliza la programación dinámica como técnica de optimización, y en [Martínez *et al.* 1996], [Onnen *et al.* 1997] o [Martínez *et al.* 1998] se aplican los algoritmos genéticos o simulated annealing como técnicas de optimización.

1.6 Estructura de la Tesis

El documento de tesis está dividido en cinco partes, a saber:

- **Introducción:**
 - **Objetivos y Motivación:** El capítulo 1 describe detalladamente los principales objetivos de la presente tesis. Asimismo, se introducen los principales motivaciones que han servido de punto de partida para la realización de este trabajo.
- **Estado del Arte: Modelado e Identificación No Lineal.**
 - **Representación de sistemas no lineales:** El capítulo 2 repasa brevemente las principales formulaciones existentes para la representación de sistemas dinámicos, tanto en el ámbito de modelos lineales como no lineales. En particular se introducen los sistemas de borrosos con estructura TS, cuya estructura será empleada en todas las propuestas que se describen en capítulos sucesivos.
 - **Identificación de sistemas borrosos:** El capítulo 3 introduce los principales métodos de identificación a partir de datos experimentales para sistemas borrosos con estructura TS. Estos métodos serán el punto de partida para, posteriormente, plantear un nuevo método de identificación de predictores borrosos.
 - **Aplicación de modelado e Identificación:** El capítulo 4 presenta los resultados que se pueden obtener con las técnicas descritas en el capítulo 3 a partir de datos reales, intentando dar respuestas a problemas de modelado reales. En particular, se plantea el problema de modelado e identificación de distintos subprocesos existentes en motores diesel turboalimentados actuales.
- **Estado del Arte: Control Borroso Mediante LMIs.**
 - **Control borroso PDC y predictivo:** El capítulo 5 introduce algunas de las estructuras de control más actuales en el diseño de controladores borrosos. Asimismo, se muestra la forma de replantear el problema de diseño en términos de inecuaciones matriciales lineales, hecho que posibilita la resolución del problema de diseño de una manera computacionalmente eficiente .

- Aplicación de control borroso mediante LMIs: El capítulo 6 muestra un ejemplo de diseño de controlador borroso para el sistema de renovación de la carga en motores turboalimentados. Dicho diseño se basa en una modificación del modelo obtenido en el capítulo 4 y adaptado para la aplicación de las técnicas de control descritas en este capítulo.
- Propuestas para Identificación y Control Borroso.
 - Propuesta de identificación borrosa: El capítulo 7 describe un nuevo método para la identificación de predictores borrosos con el objetivo de ser empleados en el diseño de sistemas de control predictivo borrosos. Esta propuesta tiene como objetivo superar algunas de las limitaciones existentes actualmente en el diseño e implementación de este tipo de sistema de control. El capítulo describe detalladamente todo el procedimiento de diseño así como un ejemplo completo de implementación.
 - Control predictivo borroso mediante predictor FLAP: El capítulo 8 propone la utilización del predictor descrito en el capítulo 7 con el objetivo de diseñar un sistema de control borroso desde el punto de vista de la filosofía del control predictivo clásica. En este capítulo se aborda todo el desarrollo matemático, así como un pequeño ejemplo de diseño.
 - Control predictivo borroso Forward-Backward: El capítulo 9 introduce una segunda alternativa de diseño de controladores predictivos borrosos. En esta ocasión, el punto de partida de diseño es el principio de optimalidad de Bellman, por lo que no es necesario la utilización del predictor borroso descrito en el apartado 7. De manera análoga a los capítulo 7 y 8, en este capítulo se presenta todo el desarrollo conceptual y matemático así como una aplicación práctica de la metodología.
- Conclusiones y Bibliografía.
 - Conclusiones y trabajos futuros: El último capítulo de la tesis junta un breve resumen de las principales conclusiones del trabajo. Asimismo se presentan las principales líneas para los trabajos futuros de investigación.
 - Resumen Bibliográfico: una recopilación bibliográfica de todas las referencias de la literatura empleadas a lo largo de la tesis.

Bibliografía

- ABONYI, J. 2003. *Fuzzy Model Identification for Control*.
- ALBERTOS, P., & ORTEGA, R. 1989. On Generalized Predictive Control: Two Alternative Formulations. *Automatica*, 25(5), 753-755.
- BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.
- BADGWELL, T. 1997. Robust model predictive control of stable linear systems. *International Journal of Control*, Jan.
- BEMPORAD, A., FERRARI-TRECATE, G., MIGNONE, D., MORARI, M., & F.D.TORRISI. 1999 (Aug). Model predictive control - Ideas for the next generation.
- BEMPORAD, A., MORARI, M., DUA, V., & PISTIKOPOULOS, E. N. 2001. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 38.
- BITMEAD, R., GEVERS, M., & WERTZ, V. 1989. Adaptation and robustness in predictive control. *Decision and Control*, Jan.
- BOYD, A. STEPHEN, GHAOUI, L. EL, FERON, E., & BALAKRISHNAN, V. 1987. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *Book*, 203.
- CAMACHO, E.F. 1993. Constrained Generalized Predictive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2), 327-332.
- CAMACHO, E.F., & BORDONS, C. 1999. *Model predictive control*.
- CANNON, M., DESHMUKH, V., & KOUVARITAKIS, B. 2003. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets. *Automatica*, Jan.
- CHEN, H., & ALLGÖWER, F. 1998. A computationally attractive nonlinear predictive control scheme with guaranteed stability for stable systems. *Accepted for Journal of Process Control*.
- CHEN, S., BILLINGS, S.A., & GRANT, P.M. 1990. Non-linear system identification using neural networks. *Int. J. Control*, 51(6), 1191-1214.
- CHISCI, L., LOMBARDI, A., MOSCA, E., & ROSSITER, J. 1996. State-space approach to stabilizing stochastic predictive control. *International Journal of Control*, Jan.
- CHOW, C.M., & CLARKE, D.W. 1994a. Actuator nonlinearities in predictive control.
- CHOW, C.M., & CLARKE, D.W. 1994b. Actuator nonlinearities in predictive control.
- CLARKE, D.W. 1988. Application of Generalized Predictive Control to Industrial Processes. *IEEE Control Systems Magazine*, 138(Apr), 49-55.

- CLARKE, D.W. 1991. *Adaptive Generalized Predictive Controller*. Tech. rept. OUEL 1879/91.
- CLARKE, D.W. 1994. Advances in Model-Based Predictive Control.
- CLARKE, D.W., & MOHTADI, C. 1989. Properties of Generalized Predictive Control. *Automatica*, **25**(6), 859-875.
- CLARKE, D.W., MOHTADI, C., & TUFFS, P.S. 1987a. Generalized Predictive Control-Part I. *Automatica*, **23**(2), 137-148.
- CLARKE, D.W., MOHTADI, C., & TUFFS, P.S. 1987b. Generalized Predictive Control-Part II. Extensions and Interpretations. *Automatica*, **23**(2), 149-160.
- CUTLER, C.R., & RAMAKER, D.L. 1980. Dynamic Matrix Control - a computer control algorithm.
- ESPINOSA, J., & VANDEWALLE, J. 1999a. Constrained predictive control using fuzzy models. *Submitted to IFSA Congress-99*, Jan.
- ESPINOSA, J., & VANDEWALLE, J. 1999b. The use of convex programming on fuzzy model based predictivecontrol. *Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics*, Jan.
- FROISY, J.B. 1994. Model predictive control: past, present and future. *ISA Transactions*, **33**, 235-243.
- GARCIA, C.E., & MORSHEDI, A.M. 1986. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). *Chemical Eng. Commun.*, **46**, 73-87.
- GARCIA, C.E., PRETT, D.M., & MORARI, M. 1989. Model Predictive Control: Theory and Practice - a Survey. *Automatica*, **25**(3), 355-348.
- GARCÍA-NIETO, S., MARTÍNEZ, M., BLASCO, X., & SANCHIS, J. 2008. Nonlinear predictive control based on local model networks for air management in diesel engines. *Control Engineering Practice*.
- GENCELI, H., & NIKOLAOU, M. 1993. Robust stability analysis of constrained l_1 -norm model predictive control. *AIChE Journal*, Jan.
- GENCELI, H., & NIKOLAOU, M. 1995. Design of robust constrained model-predictive controllers with volterra series. *AIChE Journal*, Jan.
- GENCELI, H., & NIKOLAOU, M. 1996. New approach to constrained predictive control with simultaneous model identification. *AIChE Journal*, Jan.
- GRANADO, E., COLMENARES, W., BERNUSSOU, J., & GARCIA, G. 2003. Linear matrix inequality based model predictive controller. *Control Theory and Applications*, Jan.

- GROSDIDIER, P., FROISY, B., & HAMMANN, M. 1988 (Jun). The IDCOM-M controller.
- GUZZELLA, L., & AMSTUTZ, A. 1998. Control of Diesel Engines. *IEEE Control Systems*.
- GUZZELLA, L., & ONDER, C.H. 2004. *Introduction to Modeling and Control of Internal Combustion Engine Systems*.
- KERRIGAN, A.E.C., & MACIEJOWSKI, J.M. 2008. Feedback Min-max Model Predictive Control Using a Single Linear Program.
- KERRIGAN, E. 2000. Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control. *Tesis Doctoral*, Jan.
- KERRIGAN, E., & MAYNE, D. 2002. Optimal Control of Constrained, Piecewise Affine Systems with Bounded Disturbances. *IEEE Conference on Decision and Control*, Jan.
- KEYSER, R.M.C. DE. 1991. Basic principles of model based predictive control. *1st. European Control Conference*, 1(1), 1753-1758.
- KINNAERT, M. 1989. Adaptive generalized predictive controller for MIMO systems. *International Journal of Control*, Jan.
- KOTHARE, M., BALAKRISHNAN, V., & MORAI, M. 1994. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *American Control Conference*, Jan.
- KOTHARE, V. BALAKRISHNAN M.V., & MORARI, M. 1996. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32, 1361-1379.
- KOUVARITAKIS, B., & CANNON, M. 2001. Nonlinear Predictive Control: Theory and Practice. Jan, 261.
- KOUVARITAKIS, B., ROSSITER, J., & GOSSNER, J. 1997. Improved algorithm for multivariable stable generalised predictive control. *Control Theory and Applications*, Jan.
- KUZNETSOV, A.G., & CLARKE, D.W. 1994. Application of constrained GPC for improving performance of controlled plants.
- KWON, W.H., CHOI, H., BYUN, D., & NOH, S. 1992. Recursive solution of generalized predictive control and its equivalence to receding horizon tracking control. *Automatica(Oxford)*, Jan.
- LEE, J., & YU, Z. 1997. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, Jan.
- LEE, J., MORARI, M., & GARCIA, C. 1994. State-space Interpretation of Model Predictive Control. *Automatica*, Jan.
- LEMO, J.M., & MOSCA, E. 1985. A multipredictor based LQ self-tuning controller.

- LIMON, D., ALAMO, T., & CAMACHO, E. 2003. Robust MPC control based on a contractive sequence of sets. *Decision and Control*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., & CAMACHO, E. 2004. Robust stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties. *16th Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., & CAMACHO, E. 2005. Enlarging the domain of attraction of MPC controllers. *Automatica*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., SALAS, F., & CAMACHO, E.F. 2006. Input to state stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties. *Automatica*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., BRAVO, J., CAMACHO, E.F, & RAMIREZ, D. 2007. Interval Arithmetic in Robust Nonlinear MPC. *Lecture Notes in Control and Information Science*, Jan.
- LIMON, D., ALVARADO, I., ALAMO, T., & CAMACHO, E. 2008. MPC for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, Jan.
- LING, K., & LIM, K. 1996. A. State Space GPC with Extensions to Multirate Control. *Aautomatica*, Jan.
- LINKENS, D.A., & MAHFOUF, M. 1994. Genralized Predictive Control (GPC) in clinical anaesthesia.
- LIU, G.P., KADIRKAMANATHAN, V., & BILLINGS, S.A. 1998. Predictive control for nonlinear systems using neural networks. *Int. J. Control*, 71(6), 1119-1132.
- MACIEJOWSKI, J. M. 2002. *Predictive Control with Constraints*.
- MAGNI, L., NICOLAO, G., MAGNANI, L., & SCATTOLINI, R. 2001. A. stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems. *Automatica*, Jan.
- MANER, B.R., DOYLE, F.J., OGUNNAIKE, B.A., & PEARSON, R.K. 1996. Nonlinear model predictive control of a simulated multivariable polymerizationreactor using second-order volterra models. *Automatica*, 32(9), 1285-1301.
- MARLIN, T.E. 1995. *Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*.
- MARTÍNEZ, J. M., & HERRERA, F. 2003. Estrategia para la Construcción de Modelos Difusos utilizando Clustering y Transformación Ortogonal. *X. Convención Internacional Informática*.
- MARTÍNEZ, M., SENENT, J.S., & BLASCO, F.X. 1996. A. comparative study of classical vs genetic algorithm optimization appliedin GPC controller.

- MARTÍNEZ, M., SENENT, J.S., & BLASCO, F.X. 1998. Generalized predictive control using genetic algorithms (GAGPC). *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **11**(3), 355-368.
- MAYNE, D. 2000. Nonlinear model predictive control: Challenges and opportunities. *Nonlinear Model Predictive Control*, Jan.
- MAYNE, D., RAWLINGS, J., RAO, C., & SCOKAERT, P. 2000. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, Jan.
- MEGIAS, D., SERRANO, J., & DE PRADA, C. 2002. Min-max constrained quasi-infinite horizon model predictive control using linear programming. *Journal of Process Control*, Jan.
- MICHALSKA, H., & MAYNE, D. 1993. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *Automatic Control*, Jan.
- MORARI, M., & LEE, J. H. 1997. Model predictive control: past, present and future.
- MORARI, M., & LEE, J. H. 1999. Model predictive control: past, present and future. *Computers and Chemical Engineering*, Jan.
- MOSCA, E. 1995. *Optimal, Predictive, and Adaptive Control*.
- MURRAY-SMITH, R. 1994. Local Model Networks and Local Learning. *Fuzzy Duisburg*, Jan.
- MURRAY-SMITH, R., & GOLLEE, H. 1994. A constructive learning algorithm for local model networks. *Proc. IEEE Workshop on Computer-intensive methods in control and Signal Processing*, Jan.
- MURRAY-SMITH, R., HUNT, K., & LOHNERT, F. 1994. Constructive learning-industrial perspectives. *Advances in Neural Networks for Control and Systems*, Jan.
- MUSKE, K.R., & RAWLINGS, J.B. 1993. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, **39**(2), 262-287.
- NAHAS, M. A. HESSON E. P., & SEBORG, D. E. 1992. Nonlinear Internal Model Control Strategy for Neural Networks Models. *Computer Chemical Eng*, **16**(12), 1039-1057.
- NECOARA, I., KERRIGAN, E., SCHUTTER, B. DE, & VAN DEN BOOM, T.J.J. 2007. Finite-Horizon Min-Max Control of Max-Plus-Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jan.
- NIKOLAOU, M. 1998. Model Predictive Controllers: A. Critical Synthesis of Theory and Industrial. *citeseer.ist.psu.edu*, Jan.

- OLIVEIRA, MC, BERNUSSOU, J., & GEROMEL, JC. 1999. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & control letters*, Jan.
- ONNEN, C., BALBUSKA, R., KAYMAK, U., SOUSA, J.M., & ISERMANN, H.B. VERBRUGGENAND R. 1997. Genetic algorithms for optimization in predictive control. *Control Engineering Practice*, 5(10), 1363-1372.
- ORDYS, A.W., & CLARKE, D.W. 1993. A state-space description for GPC controllers. *Int. J. Systems Sci.*, 24, 1727-1744.
- PÉREZ, P. 1995. *Aplicación de técnicas de programación dinámica a control predictivo basado en modelos*. Ph.D. thesis.
- PHILLIPS, C. L., & PARR, J. M. 1995. *Signals, systems and transforms*.
- PRETT, D.M., & MORARI, M. 1987. The Shell Process Control Workshop: Shell Workshop Proceedings. Jan, 369.
- PRIMBS, J., & NEVISTIC, V. 2000. A new approach to stability analysis for constrained finitereceding horizon control without end constraints. *Automatic Control*, 45(8), 1507-1512.
- QIN, S., & BADGWELL, T. 1997. An overview of industrial model predictive control technology. *Fifth International Conference on Chemical Process Control*, Jan.
- RAO, C., WRIGHT, S., & RAWLINGS, J. 1998. Application of Interior-Point Methods to Model Predictive Control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Jan.
- RAWLINGS, J., & MUSKE, K. 1993. The stability of constrained receding horizon control. *Automatic Control*, Jan.
- RAWLINGS, JAMES B. 2000. Tutorial overview of model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, Jun, 38-52.
- RICHALET, J. 1993. Industrial Applications of Model Based Predictive Control. *Automatica*, 29(5), 1251-1274.
- RICHALET, J., RAULT, A., TESTUD, J.L., & PAPON, J. 1978. Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes. *Automatica*, 14, 413-428.
- RICKER, N. 1990. Model predictive control with state estimation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Jan.
- RODRIGUES, M., & ODLOAK, D. 2003. An infinite horizon model predictive control for stable and integrating processes. *Computers and Chemical Engineering*, Jan.

- ROSSITER, J.A., KOUVARITAKIS, B., & DUNNETT, R.M. 1991. Application of Generalized Predictive Control to a Boiler Turbine Unit for Electricity Generation. *IEE Proceedings-D*, **138**, 59-67.
- ROUHANI, R., & MEHRA, R.K. 1982. Model Algorithmic Control: Basic properties. *Automatica*, **18**, 401-414.
- SCATTOLINI, R., & SCHIAVONI, N. 1995. A. multirate model-based predictive controller. *Automatic Control*, Jan.
- SCOKAERT, P., RAWLINGS, J., & MEADOWS, E. 1997. Discrete-time stability with perturbations: application to model predictive control. *Automatica (Journal of IFAC)*, Jan.
- SCOKAERT, P.O.M., & MAYNE, D.Q. 1998. Min-Max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(8), 1136-1142.
- STEFANOPOULOU, A.G., KOLMANOVSKY, I., & FREUDENBERG, J.S. 2000. Control of Variable Geometry Turbocharged Diesel Engines for Reduced Emissions. *IEEE Transactions Control Systems Technology*, **8**(4).
- TAKAGI, T., & SUGENO, M. 1985. Fuzzy Identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybern*, **15**, 116-132.
- TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.
- TSANG, T.T.C., & CLARKE, D.W. 1988. Generalized predictive control with input constraints. *IEE Proceedings.*, **135**(Nov), 451-460.
- UNION, EUROPEAN. 2003. Emission Standards: European Union. www.dieselnet.com/standards/eu/ld.html.
- WANG, L. 2004. Discrete model predictive controller design using Laguerre functions. *Journal of Process Control*, Jan.
- XI, Y. 1989. New design method for discrete-time multi-variable predictive controllers. *International Journal of Control*, Jan.
- ZAMARREÑO, J. M. 1996. *Identificación y control predictivo basado en modelos mediante red neuronal en espacio de estados*. Ph.D. thesis.
- ZHENG, A., & MORARI, M. 1995. Stability of model predictive control with mixed constraints. *Automatic Control*, Jan.

Parte **II**

Estado del Arte: Modelado e Identificación No Lineal

CAPÍTULO 2

Representación de Sistemas No Lineales

"Model: Mathematical representation of a process, device, or concept by means of a number of variables which are defined to represent the inputs, outputs, and internal states of the device or process, and a set of equations and inequalities describing the interaction of these variables. A mathematical theory or system together with its axioms".

McGraw-Hill Dictionary.

"Model: Mathematical representation of reality that attempts to explain the behavior of some aspect of it. The mathematical model serves the following purposes: (1) to find an optimal solution to a planning or decision problem; (2) to answer a variety of what-if questions; (3) to establish understandings of the relationships among the input data items within a model; and (4) to attempt to extrapolate past data to derive meaning. Mathematical models include techniques such as Linear Programming (LP) computer simulation, Decision Theory, Regression Analysis, Economic Order Quantity (EOQ) and Break-Even Analysis". *Dictionary of Accounting Terms.*

2.1 Introducción

La obtención de modelos a partir de sistemas reales es imprescindible en prácticamente cualquier disciplina científica. Estos modelos pueden ser empleados para las

tareas de análisis, para conseguir un mejor entendimiento del sistema, pueden ser empleados como predictores o como simuladores del comportamiento del proceso [Nelles 2001]. En ingeniería, los modelos son necesarios para el diseño de nuevos procesos y para el análisis de los ya existentes. Así mismo, se emplean estos modelos en la aplicación de técnicas avanzadas de control, optimización, supervisión, detección y diagnóstico de fallos. Por tanto, la calidad de los modelos es determinante en el resultado final. Pero por desgracia, la obtención de un modelo satisfactorio es siempre una tarea compleja. En consecuencia, existe una creciente demanda en el estudio de nuevos modelos de representación y la identificación de los mismos.

Los sistemas físicos, en general, presentan comportamientos no lineales de difícil representación. La teoría clásica de control aborda el comportamiento de estos sistemas mediante una linealización entorno a un punto de funcionamiento donde se desea que el sistema trabaje. Esta aproximación resulta satisfactoria en muchas ocasiones. Sin embargo, en otras situaciones, el diseño de controles a partir de modelos lineales resulta problemático, ya que los comportamientos no lineales no se tienen en cuenta y afectan de manera negativa e inesperada en los diferentes puntos de funcionamiento. En estas circunstancias es necesario abordar el modelado no lineal de los sistemas reales, con el objetivo de diseñar controladores eficientes. El presente capítulo introduce algunas de las posibles representaciones existentes de modelos no lineales [Camacho & Bordons 2004]. Sin embargo, no hay que olvidar que la primera opción a la hora de seleccionar un modelo de representación siempre debe ser un modelo lineal, ya que si los resultados son satisfactorios, los procesos de diseño posteriores serán considerablemente más sencillos. Por tanto, se debe acudir a representaciones más complejas siempre y cuando los modelos lineales no aporten la precisión deseada.

2.2 Modelos en Primeros Principios

El modelado en primeros principios se basa en la obtención de las ecuaciones diferenciales a partir de la aplicación de los principios físicos que intervienen en el sistema, tal y como se describe en [Froisy & Papastratos 1999]. Normalmente se utilizan los balances másicos, térmicos y energéticos como herramientas fundamentales. La ecuación (2.2-1) muestra la representación general de las ecuaciones diferenciales en espacio de estados.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), t)\end{aligned}\tag{2.2-1}$$

donde

- $x(t)$ vector de las variables de estado
- $u(t)$ vector de entradas
- $y(t)$ vector de salidas

Los principales inconvenientes de este tipo de modelo son los siguientes:

- La obtención de un modelo fiel viene determinado, en gran medida, por el conocimiento que se tenga del proceso. Esto produce que la fase de modelado sea poco metódica y de difícil evaluación.
- El coste computacional es otro factor a tener en cuenta, ya que en la mayoría de casos, un mayor nivel de detalle se traduce en mayor coste computacional.
- La obtención de un modelo de predicción a partir del modelo no lineal resulta complejo, ya que la estructura que presenta este tipo de modelos no siempre es adecuada para la formulación de predictores. Por tanto, en la mayoría de ocasiones es necesaria la utilización de métodos numéricos para obtener las predicciones debido a la carencia de solución analítica.

2.3 Modelos con Redes Neuronales

Una red neuronal es la estructura resultante de la interconexión de unidades de procesamiento básicas (neuronas), cada una de las cuales ejecuta una transformación (no lineal) sobre sus entradas, propagando el resultado hacia otras neuronas de la red.

Una de las grandes ventajas que proporcionan las redes neuronales en el modelado de sistemas, es que no se requiere tener conocimiento del proceso para lograr la obtención de relaciones funcionales entre las entradas y las salidas del sistema. A pesar de que existe una gran cantidad de arquitecturas de redes neuronales y de algoritmos de aprendizaje, para aplicaciones en el área de control se ha utilizado con mayor frecuencia las redes neuronales de arquitectura multicapa hacia adelante y el algoritmo de aprendizaje llamado Retropropagación, las cuales se describen en [Nahas & Seborg 1992].

Existen muchos tipos de redes neuronales (perceptrónicas, redes de Kohonen, redes de Hopfield, Elman, Jordan o Tipo Pineda, etc.) y varios algoritmos de aprendizaje, sin embargo, para modelar la dinámica de la mayoría de los procesos en el campo de control se utiliza la configuración multicapa hacia adelante y las redes neuronales recurrentes.

2.3.1 Redes Recurrentes

Muchas aplicaciones basadas en modelos de predicción requieren una buena predicción de la dinámica del sistema, una forma de lograr este objetivo, es mediante el entrenamiento de una red *feedforward* con valores retardados de la salida alimentados en la capa de entrada. Una representación dinámica mucho más satisfactoria se obtiene al proporcionar retroalimentaciones internas en la red neuronal. Entre este tipo de redes se han desarrollado una gran variedad, siendo las más ampliamente utilizadas las redes tipo Jordan, las cuales realimentan valores pasados de la salida de la red a neuronas en la capa oculta, las redes tipo Elman [Elman 1990] donde los valores pasados de las salidas de las neuronas de la capa oculta se realimentan dentro de estas mismas neuronas. La característica más útil de este tipo de topología es que pueden representar cualquier orden de retrasos implícitamente en vez de explícitamente. Ha sido comprobado que bajo ciertas condiciones las redes recurrentes pueden utilizarse para aproximar a una precisión arbitraria una descripción discreta en variable de estado, según [Nikiforuk & Gupta 1995], [Sontag 1993] y [Pham & Xing 1995].

Una expresión general de estas redes neuronales recurrentes con N neuronas en la capa oculta, esta dado por el siguiente sistema no lineal en tiempo discreto;

$$\begin{aligned} x(k+1) &= -\alpha x(k) + f(A, x(k), B, u(k)) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{2.3-1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^m$ son los vectores de estados, salida y entrada a la red neuronal respectivamente. $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times N}$ son las matrices de pesos de las conexiones asociadas a los vectores de estado, entrada y salida respectivamente. α es una constante que permite controlar el decaimiento del estado y se selecciona dentro del intervalo $1 \geq \alpha \geq -1$ y f es una función no lineal seleccionada apropiadamente.

Elman en [Elman 1990] propone una red recurrente parcial donde las conexiones *feedforward* son modificables y la conexiones recurrentes son fijas. Adicionalmente a las unidades de entrada y salida, la red de Elman tiene una unidad oculta, $x^h(k) \in \mathbb{R}^n$, y una unidad de contexto, $x^c(k) \in \mathbb{R}^n$, como se observa en la figura 2.1.

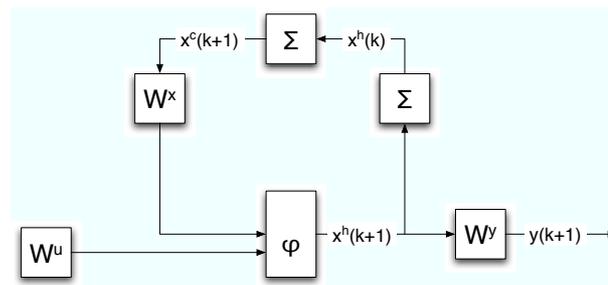


FIGURA 2.1: Red Neuronal Recurrente de Elman (D: retardo)

Las matrices de las interconexiones, $W^x \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $W^u \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $W^y \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ definen respectivamente los pesos de las interconexiones de la capa de contexto oculta, la capa de entrada y la capa de salida oculta.

La dinámica de la red recurrente de Elman está descrita por las ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} s(k+1) &= W^x x^c(k+1) + W^u u(k) \\ x^h(k+1) &= \varphi(s(k+1)) \end{aligned} \quad (2.3-2)$$

donde $\varphi(\cdot)$ es una función de activación:

$$\begin{aligned} x^c(k+1) &= x^h(k) \\ y(k+1) &= W^y x^h(k+1) \end{aligned} \quad (2.3-3)$$

se define

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x^h(k) \\ x^c(k) \end{bmatrix} \quad (2.3-4)$$

Las ecuaciones (2.3-2), (2.3-3) y (2.3-4) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \varphi(\bar{x}(k), u(k), W^x, W^u) \\ y(k+1) &= g(\bar{x}(k+1), W^y) \end{aligned} \quad (2.3-5)$$

Estas ecuaciones pueden interpretarse como un modelo en espacio de estados de la red neuronal, tal y como se señala en [Pham & Xing 1995].

2.4 Modelos de Volterra

Las series de Volterra pueden ser interpretados como una extensión natural de los modelos FIR (respuesta impulso finita), a los modelos FIR no lineales introduciendo los productos cruzados y polinomiales de las series de Taylor. Los modelos Volterra pueden ser obtenidos como una aproximación a otros modelos, o bien directamente indentificados a partir de datos experimentales.

En general los modelos de Volterra discretos se pueden describir según la ecuación (2.4-1), tal y como se introduce en [Camacho & Bordons 2004].

$$y(k) = y_0 + \sum_{i_1=0}^M \cdots \sum_{i_n=0}^M \alpha_n(i_1, \dots, i_n) (u(k-i_1) \cdots u(k-i_n)) \quad (2.4-1)$$

El número de parámetros que definen los modelos de Volterra son normalmente elevados. El orden del modelo se ha de definir en función del tiempo de establecimiento del

modelo, siendo éste entre 10 y 50 veces el periodo de muestreo. Por lo que el número de parámetros del modelo crece rápidamente en función de la relación entre el periodo de muestro y el tiempo de establecimiento. Por otra parte, el orden puede ser reducido usando los modelos paramétricos de Volterra que consideran las salidas pasadas.

$$y(k) = y_0 + \sum_{i=0}^N a_1(i)y(k-i) + \sum_{i=0}^N h_1(i)u(k-i) + \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M h_2(i,j)u(k-i)u(k-j) \quad (2.4-2)$$

Existen dos subclases dentro de la formulación básica que reducen la complejidad de los modelos introducidos. Estos son los modelos de Wiener y Hammerstein que se basan en la combinación de modelos dinámicos lineales y modelos estáticos no lineales.

2.4.1 Modelos de Hammerstein

Los sistemas Hammerstein se basan en un modelo estático no lineal seguido de un modelo lineal como se muestra en [Ikonen & Najim 2002].

$$\begin{aligned} y_j(t) &= \sum_{i=1}^I \left(\frac{B_{ji}(z^{-1})}{A_{ji}(z^{-1})} x_i(t - d_{ji}) \right) \\ x_i(t) &= f_i(\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t) &= [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_m(t)] \end{aligned}$$

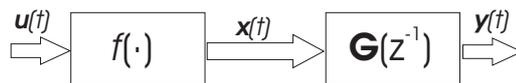


FIGURA 2.2: Modelo Hammerstein.

2.4.2 Modelos de Wiener

Los modelos Wiener se basan en un modelo lineal seguido de otro modelo estático no lineal [Ikonen & Najim 2002].

$$\begin{aligned} y_j(t) &= f_j(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t) &= [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_I(t)] \\ x_i(t) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{B_{ij}(z^{-1})}{A_{ij}(z^{-1})} u_j(t - d_{ij}) \right) \end{aligned}$$

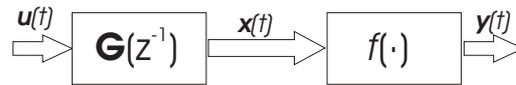


FIGURA 2.3: Modelo Wiener.

2.5 Red de Modelos Locales

La base de esta técnica es la obtención de un modelo global formado por un conjunto de submodelos lineales obtenidos para diferentes puntos de funcionamiento. Los modelos locales se expresan en espacio de estados, siendo completamente independientes entre sí. La Figura 2.4 describe el comportamiento global del sistema a partir de los distintos modelos locales que lo componen.

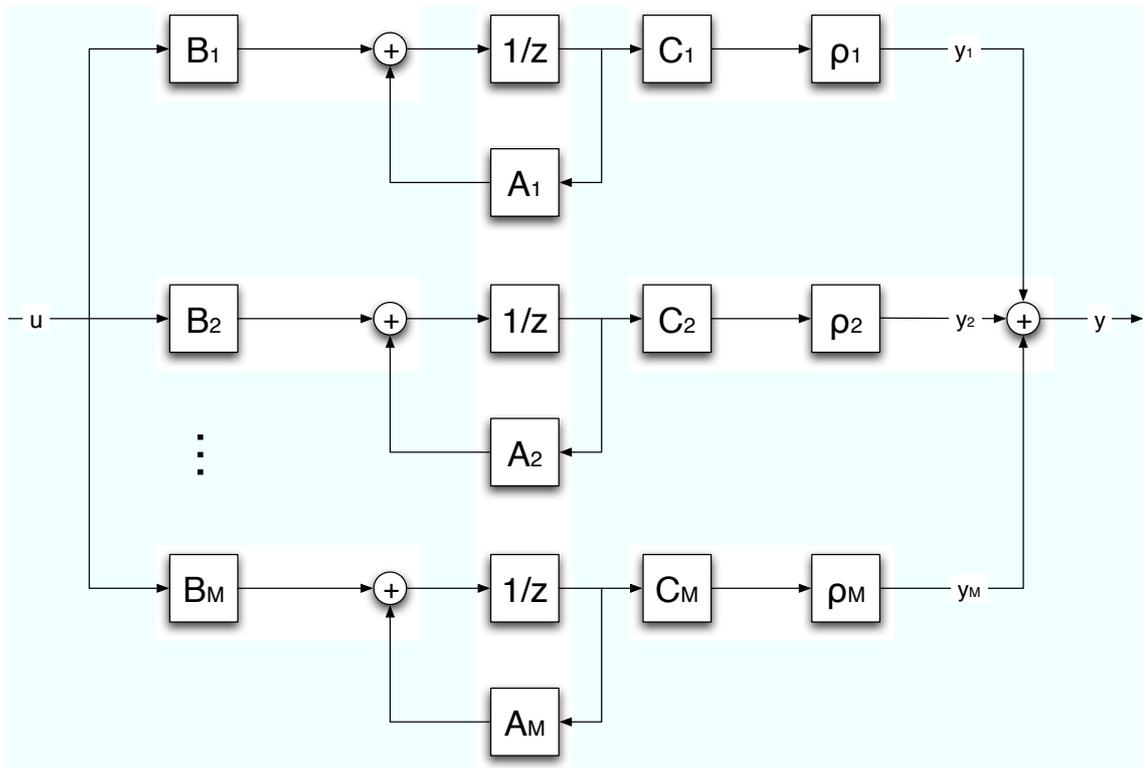


FIGURA 2.4: Red de Modelos Locales en espacio de estados

La definición de cada uno de los modelos locales de la red se obtienen a partir de un punto de funcionamiento determinado. Por tanto, un proceso no lineal complejo puede dividirse en un subconjunto de puntos de funcionamiento para lo cuales se calcula los distintos modelos locales. Tal y como muestra la Figura 2.4, las salidas de cada modelo local son ponderadas por una función, la cual presenta una validez para un ventana determinada. El modelo global del sistema viene expresado por (2.5-1).

$$y(k) = F(\Psi(k), \Phi(k)) = \sum_{i=1}^M f_i(\Psi(k)) \rho_i(\Phi(k)) \quad (2.5-1)$$

Donde los M modelos locales $f_i(\Psi(k))$ son funciones ARX sobre el vector de medidas $\Psi(k)$ y multiplicado por un conjunto de funciones de base $\rho_i(\Phi(k))$ dependientes del punto de funcionamiento. Estas adoptan valores cercanos a 1 cuando el punto de funcionamiento es próximo al utilizado para el cálculo del modelo local f_i ; mientras que para el resto de puntos de funcionamiento el valor es muy próximo a 0.

Las funciones f_i vienen definidas por (2.5-2) y (2.5-3).

$$y_i(k) = f_i(\Psi(k)) = \begin{bmatrix} c_{11_i} & c_{12_i} & \cdots & c_{1n_i} \\ c_{21_i} & c_{22_i} & \cdots & c_{2n_i} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1_i} & c_{m2_i} & \cdots & c_{mn_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_i}(k) \\ x_{2_i}(k) \\ \vdots \\ x_{n_i}(k) \end{bmatrix}, \quad y_i(k) = C_i x_i(k) \quad (2.5-2)$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_{1_i}(k+1) \\ x_{2_i}(k+1) \\ \vdots \\ x_{n_i}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11_i} & a_{12_i} & \cdots & a_{1n_i} \\ a_{21_i} & a_{22_i} & \cdots & a_{2n_i} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1_i} & a_{n2_i} & \cdots & a_{nn_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_i}(k) \\ x_{2_i}(k) \\ \vdots \\ x_{n_i}(k) \end{bmatrix} + \quad (2.5-3)$$

$$+ \begin{bmatrix} b_{11_i} & b_{12_i} & \cdots & b_{1p_i} \\ b_{21_i} & b_{22_i} & \cdots & b_{2p_i} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1_i} & b_{n2_i} & \cdots & b_{np_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1_i}(k) \\ u_{2_i}(k) \\ \vdots \\ u_{p_i}(k) \end{bmatrix}, \quad x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) \quad (2.5-4)$$

Por tanto las salidas de la red de modelos locales se expresan como

$$y(k) = \sum_{i=1}^M C_i^* x_i(k) \quad (2.5-5)$$

donde

$$C_i^* = \begin{bmatrix} \rho_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_i & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11_i} & c_{12_i} & \cdots & c_{1n_i} \\ c_{21_i} & c_{22_i} & \cdots & c_{2n_i} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1_i} & c_{m2_i} & \cdots & c_{mn_i} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (2.5-6)$$

Por último queda definir las funciones de base ρ utilizadas, las cuales se proponen en [Townsend *et al.* 1998], como funciones normalizadas Gaussianas.

$$\rho_i(\Psi(k)) = \frac{\exp(-\frac{\|\Psi_i - c_i\|^2}{2\sigma_i^2})}{\sum_{j=1}^M \exp(-\frac{\|\Psi_i - c_j\|^2}{2\sigma_j^2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (2.5-7)$$

Donde M es la dimensión del vector de puntos de funcionamiento, c_j el centro de la función Gaussiana y σ_j^2 la varianza.

Por tanto, se obtiene un modelo global no lineal continuo a partir de submodelos lineales definidos para un punto de funcionamiento concreto.

2.6 Modelos Lineales de Parametros Variables

Los modelos lineales de parámetros variables con el tiempo (LPV) son un tipo particular de sistemas lineales variables con el tiempo [Salcedo & Martinez 2006]. La ecuación (2.6-1) muestra una clásica representación de los sistemas LPV en espacio de estados.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A(k) &= f_A(\Lambda(k)) \\ B(k) &= f_B(\Lambda(k)) \\ C(k) &= f_C(\Lambda(k)) \\ D(k) &= f_D(\Lambda(k)) \\ \Lambda(k) &= \text{diag}(\lambda_1(k)I_{s_1}, \lambda_2(k)I_{s_2}, \dots, \lambda_j(k)I_{s_j}) \end{aligned} \quad (2.6-1)$$

Las matrices de representación interna que aparecen en (2.6-1) (A , B , C y D), son función de uno o más parámetros variables con el tiempo $\lambda_i(k)$. Donde I_{s_j} la matriz identidad de tamaño s_j . Los parámetros $\lambda_i(k)$ pueden representar, por ejemplo, constantes físicas o señales de salida del sistema. Por tanto, atendiendo a la dependencia funcional que se defina para las matrices de representación, existen múltiples estructuras LPV. En esta sección se van a presentar dos de las estructuras más empleadas en la literatura, como son la dependencia lineal fraccional y la dependencia afin.

2.6.1 Dependencia Lineal Fraccional

Los sistemas LPV donde la dependencia funcional f_* es lineal fraccional (LFR), tal y como se muestran en [Gahoui & Scorletti 1996], [Salcedo & Martinez 2006] o [Dussy & Ghaoui 1997], se definen según (2.6-2). Esta dependencia permite que la función así definida con respecto de los parámetros $\lambda_i(k)$ sea racional. En concreto, es usual utilizar dependencia LFR conjunta para las cuatro matrices de representación, tal y como muestra la ecuación (2.6-3).

$$f_* = M_* + L_* \Lambda k (I - Q_* \Lambda(k))^{-1} R_* \quad (2.6-2)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A(\Lambda(k)) & B(\Lambda(k)) \\ \hline C(\Lambda(k)) & D(\Lambda(k)) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} B_\Lambda \\ \hline D_{y,\Lambda} \end{array} \right) \Lambda(k) (I - D_\Lambda)^{-1} (C_\Lambda \ D_{\Lambda,u}) \quad (2.6-3)$$

Por ejemplo, si la matriz $A(\Lambda(k))$ tiene orden 1 y la matriz $\Lambda(k)$ es de orden 2 con parámetros $\lambda_1(k)$ y $\lambda_2(k)$ la ecuación (2.6-3) se reescribe según (2.6-4).

$$a(\Lambda(k)) = a + (b_{\Lambda,1} \ b_{\Lambda,2}) \begin{pmatrix} \lambda_1(k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(k) \end{pmatrix} \cdot \left(I_2 - d_\Lambda \begin{pmatrix} \lambda_1(k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(k) \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} c_{\Lambda,1} \\ c_{\Lambda,2} \end{pmatrix} \quad (2.6-4)$$

$$a(\Lambda(k)) = a + b_{\Lambda,1} c_{\Lambda,1} \frac{\lambda_1(k)}{1 - d_\Lambda \lambda_1(k)} + b_{\Lambda,2} c_{\Lambda,2} \frac{\lambda_2(k)}{1 - d_\Lambda \lambda_2(k)}$$

La dependencia LFR se reduce a la dependencia afín si la matriz D_Λ es nula, tal y como se puede apreciar si se anula el término d_Λ de la ecuación (2.6-4).

2.6.2 Dependencia Afín

Los sistemas LPV con dependencia afín en los parámetros se definen según la ecuación (2.6-5), tal y como se introduce en [Verdult & Verhaegen 2000, 2002].

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_0 x(k) + [A_1, A_2, \dots, A_j](\lambda(k) \otimes x(k)) + B_0 u(k) + [B_1, B_2, \dots, B_j](\lambda(k) \otimes u(k)) \\ y(k) &= C_0 x(k) + [C_1, C_2, \dots, C_j](\lambda(k) \otimes x(k)) + D_0 u(k) + [B_1, B_2, \dots, D_j](\lambda(k) \otimes u(k)) \end{aligned} \quad (2.6-5)$$

Donde \otimes es el producto de Kronecker y $\lambda(k)$ es el vector de parámetros variables con el tiempo. Los modelos LPV representados mediante la ecuación (2.6-5) pueden ser interpretados como una combinación de modelos lineales ponderados. Donde las funciones

de ponderación vienen definidas por los elementos del vector $\lambda(k)$. Por otra parte, los modelos bilineales resultan una representación particular de los sistemas LPV con dependencia afín en los parámetros. Sustituyendo en la ecuación (2.6-5), el vector de parámetros $\lambda(k)$ por el vector de entradas $u(k)$ e igualando a cero las matrices $[[B_1, B_2, \dots, B_j]$ y $[D_1, D_2, \dots, D_j]$ se obtiene la particularización para sistemas bilineales [Favoreel *et al.* 1999], tal y como muestra la ecuación (2.6-6).

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \otimes x(k) \end{bmatrix} + Bu(k) \\
 y(k) &= C \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \otimes x(k) \end{bmatrix} + Du(k)
 \end{aligned}
 \tag{2.6-6}$$

2.7 Modelos Borrosos

El campo de la ingeniería de sistemas ha adoptado la teoría de la lógica borrosa enunciada por LA. Zadeh en 1965 [Zadeh 1965], como base para desarrollar todo un conjunto de técnicas de modelado, identificación y control. La idea principal del modelado borroso o *Fuzzy*¹, es el uso de una simple descripción lingüística del proceso, en vez de precisar las relaciones matemáticas entre las variables. Los modelos *Fuzzy* son útiles para la descripción de los procesos complejos en los que no se conocen todas las dinámicas involucradas [Babuska 1998]. Las metodologías desarrolladas en el ámbito del modelado pueden ser clasificadas en: sistemas borrosos de regresión lineal [Jajuga 1986], sistemas borrosos basados en estructuras de celdas [Smith *et al.* 1994] y los sistemas basados en reglas [Zadeh 1973]. Estos últimos son los sistemas más empleados debido a su interpretabilidad, se basan en el mapeo del conjunto de variables de entrada sobre el conjunto de variables de salida a través de una colección de reglas *Si-Entonces (If-Then)*. Dependiendo de la estructura de las reglas, existen distintos tipos de modelos borrosos basados en reglas como pueden ser los modelos lingüísticos, los relacionales y los Takagi-Sugeno.

2.7.1 Modelos Lingüísticos

La estructura de las reglas de los modelos lingüísticos presentan la forma descrita en la ecuación (2.7-1).

$$\text{Si } x \text{ Es } A \text{ Entonces } z \text{ Es } B
 \tag{2.7-1}$$

¹ El término Fuzzy y borroso son equivalentes, por tanto serán empleados indistintamente a lo largo de todo el trabajo.

Donde la proposición ' x es A ' es el antecedente de la regla, y la proposición ' z es B ' es el consecuente. Por tanto, x y z son variables lingüísticas definidas como conjuntos borrosos con dominio $X \in R^n$ y $Z \in R^n$ respectivamente. Los términos A y B son conceptos lingüísticos constantes que definen un valor cualitativo del sistema en un punto concreto del espacio de variables, por ejemplo *temperatura alta*, *nivel bajo*, *presión alta*, etc. En consecuencia, los conjuntos borrosos definen de cierta manera un conjunto de *puntos de referencia* en el espacio de variables [Babuska & Verbruggen 1996], definiéndose como conjuntos borrosos de referencia. Las funciones de pertenencia para describir los conjuntos borrosos de referencia se definen como funciones matemáticas paramétricas o como tablas de valores, que se almacenan en una base de datos como parte del sistema borroso. En general, se suelen definir múltiples términos lingüísticos A_i en el dominio de una única variable, denominándose partición borrosa de una variables a la colección de los conjuntos borrosos $[A_1, A_2, \dots, A_M]$. El número de particiones del dominio de la variable depende de la granularidad y por tanto de la precisión de representación del modelo.

Los modelos lingüísticos no asumen ninguna dependencia estructural entre las variables de los antecedentes y los consecuentes. Simplemente son una colección de reglas, donde cada una define un punto en el espacio de variables definido por el producto de las variables de los antecedentes y los consecuentes. La unión de estos puntos borrosos forma el denominado grafo borroso. Por ejemplo, la figura 2.5 muestra un modelo lingüístico con 6 reglas descritas como:

- Si x Es A_1 Entonces z Es B_4
- Si x Es A_2 Entonces z Es B_2
- Si x Es A_3 Entonces z Es B_3
- Si x Es A_4 Entonces z Es B_1
- Si x Es A_5 Entonces z Es B_2
- Si x Es A_6 Entonces z Es B_4

La base de reglas junto con la base de datos de las funciones de pertenencia forman la base de conocimiento del sistema borroso. El mapeo entrada-salida se realiza empleando un mecanismo de inferencia borroso unido a la base de reglas y los conjuntos de referencia definidos, de manera que a partir de un conjunto borroso de entrada se obtiene un conjunto borroso de salida.

Por otra parte, los conjuntos borrosos A y B de la ecuación (2.7-1) son generalmente multidimensionales. Sin embargo, la definición de conjuntos borrosos multivariables y sus respectivas funciones de pertenencia resulta complejo y poco intuitivo. Por ello, el

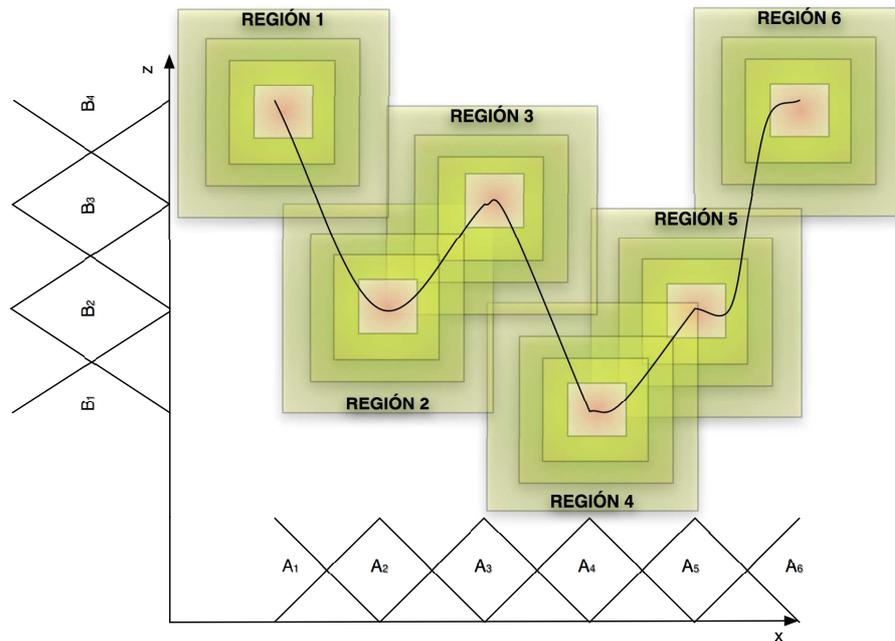


FIGURA 2.5: Grafo Borroso de un modelo lingüístico

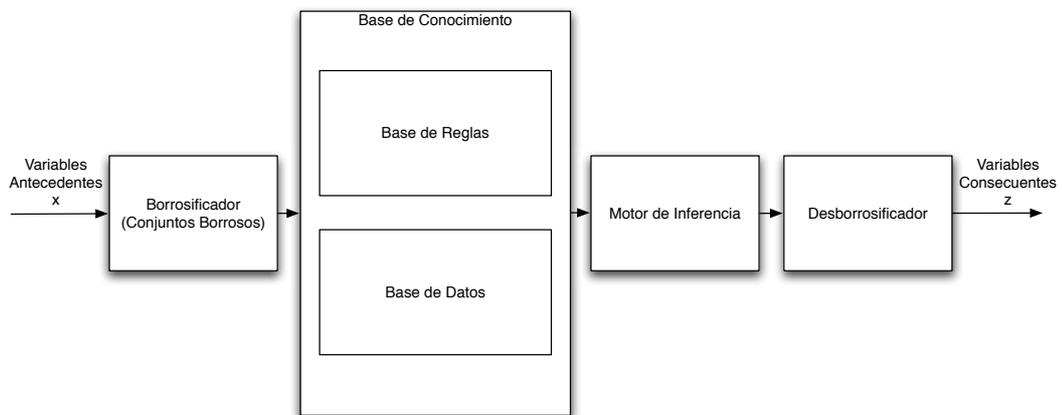


FIGURA 2.6: Esquema general de un sistema borroso

antecedente se suele implementar mediante una composición de conjuntos borrosos univariados combinados mediante conectores lógicos. La ecuación (2.7-2) muestra la estructura resultante empleando los conectores lógicos *y* (*conjunción*) y *o* (*disyunción*).

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } x_1 \text{ Es } A_1 \text{ y } x_2 \text{ Es } A_2 \\
 &\text{Y } \dots x_m \text{ Es } A_m \\
 &\text{O } x_{m+1} \text{ Es } A_{m+1} \text{ o } x_{m+2} \text{ Es } A_{m+2} \\
 &\text{O } \dots x_{m+n} \text{ Es } A_{m+n} \text{ Entonces } \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.7-2}$$

Por tanto, a la vista de la ecuación (2.7-2), la multidimensionalidad del conjunto *A* es el resultado de la intersección de las extensiones cilíndricas de los conjuntos borrosos

univariables A_i . Por tanto, el número de reglas necesarias crece de manera exponencial con el número de variables que intervienen en el antecedente. En cualquier caso, cuando el sistema presenta muchas variables se debe recurrir a una estructuración o jerarquización del problema, con el objetivo de hacer comprensible y abordable el modelo borroso. Por otra parte, existen variantes de los modelos lingüísticos donde los conjuntos borrosos B_i de los consecuentes, son reemplazados por números reales b_i . Simplificando la complejidad del sistema.

2.7.2 Modelos Relacionales

Los modelos relacionales borrosos se caracterizan por la realización de un mapeo de los conjuntos borrosos de entrada A_i hacia los conjuntos borrosos de salida B_i a través de una relación borrosa. Por ejemplo, tal y como se muestra en [Babuska & Verbruggen 1996], definamos un modelo estático con una entrada $x \in X$ y una salida $z \in Z$. Defínase A como un grupo de M conjuntos borrosos en el dominio de X , y B otro grupo de N conjuntos borrosos definidos en el dominio de Z , tal y como muestra la ecuación (2.7-3).

$$\begin{aligned} A &= A_1, A_2, \dots, A_M \\ B &= B_1, B_2, \dots, B_N \end{aligned} \quad (2.7-3)$$

La relación borrosa entre los dos conjuntos A y B , $R : A \rightarrow B$, se define mediante la ecuación (2.7-4). La figura 2.7 presenta de forma gráfica la relación borrosa entre ambos conjuntos.

$$R = [r_{ij}]_{M \times N} \quad (2.7-4)$$

Por tanto, definido el sistema borroso mediante las ecuaciones (2.7-3) y (2.7-4), dado un valor real de la variable x el conjunto borroso $X_p = \mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_M}(x)$ representaría el grado de pertenencia del dato con los términos lingüísticos. Donde, la salida correspondiente sería el conjunto borroso $Z_p = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$, procedente de la composición relacional definida por la ecuación (2.7-5).

$$Z_p = X_p \circ R \quad (2.7-5)$$

2.7.3 Modelos Takagi-Sugeno

Los modelos borrosos Takagi-Sugeno (TS) introducidos en [Takagi & Sugeno 1985], se caracterizan por la generación de regiones borrosas en el espacio de las variables que

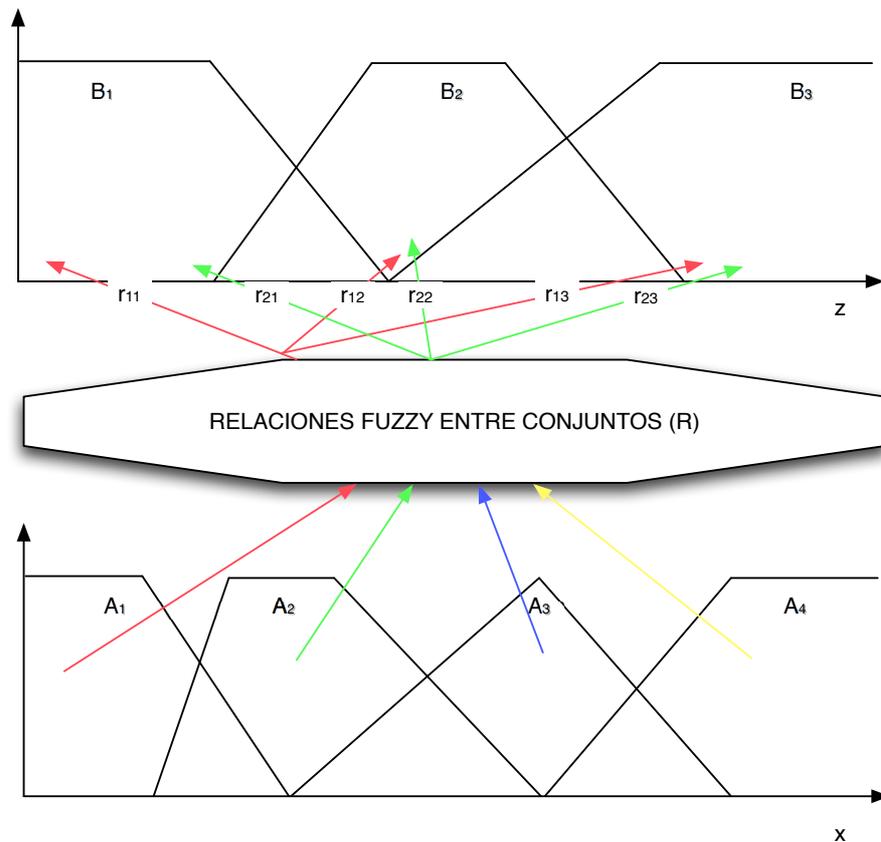


FIGURA 2.7: Definición de relaciones borrosas como método de mapeo entre las entradas y las salidas

aparecen en los antecedentes de las reglas. Por otro lado, los consecuentes de las reglas viene descritos por funciones reales en lugar de proposiciones borrosas. La ecuación (2.7-6) ilustra la estructura de la base de reglas de los modelos TS.

$$\text{Si } x \text{ Es } A_i \text{ Entonces } y_i = f_i(x) \quad (2.7-6)$$

donde

$$y_i = f_i(x) = a_i^T x + b_i \quad (2.7-7)$$

En general, las funciones $f_i(x)$ presentan estructuras afines, tal y como muestra la ecuación (2.7-7), donde a_i es el vector de parámetros y b_i es un escalar. Por tanto, cuando $a_i = 0$ los modelos TS son equivalentes a los modelos lingüísticos donde el consecuente es un número real.

Los modelos TS combinan una descripción global del sistema mediante la base de reglas, y una aproximación local mediante las funciones empleadas en los consecuentes. La figura 2.8 muestra un ejemplo de 3 reglas descritas como:

■ Si x Es A_1 Entonces $y = a_1x + b_1$

- Si x Es A_2 Entonces $y = a_2x + b_2$
- Si x Es A_3 Entonces $y = a_3x + b_3$

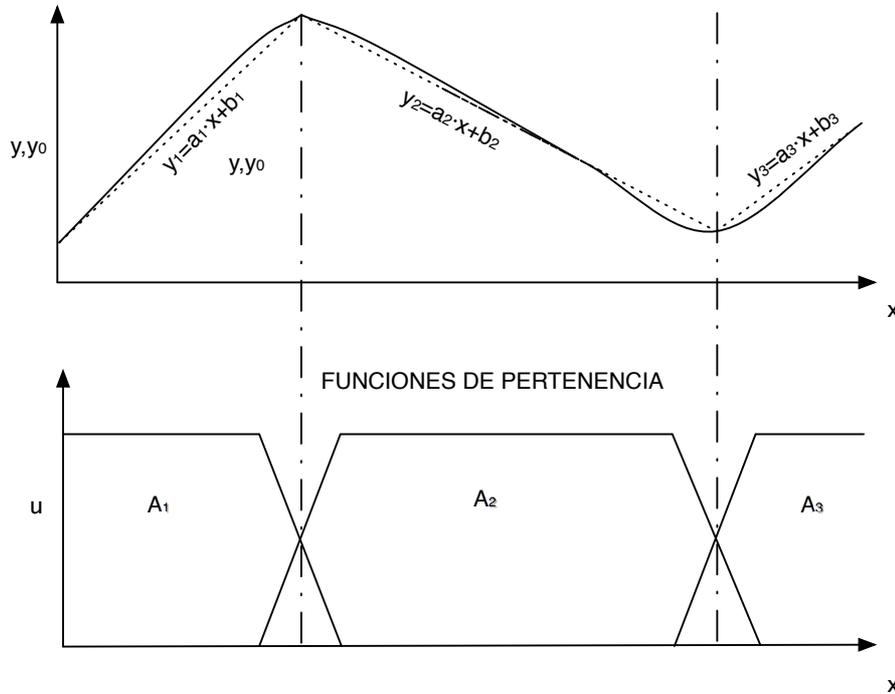


FIGURA 2.8: Descripción modelos Takagi-Sugeno

Una de las ventajas que presentan este tipo de modelos, es la mayor facilidad para la estimación de los parámetros. Así mismo, la obtención de las funciones de pertenencia resulta menos complejo debido a que estos modelos describen regiones borrosas donde las salidas del sistema dependen de las entradas de forma lineal. Por tanto, los parámetros de los consecuentes pueden ser calculados con el uso de métodos estándar como los mínimos cuadrados.

2.7.3.1 Inferencia de los modelos Takagi-Sugeno

La salida del modelo, o lo que es lo mismo, la inferencia y desborrosificación del sistema se obtiene mediante el cálculo de la media ponderada de cada una de las reglas, tal y como se indica en la ecuación (2.7-8).

$$y = \frac{\sum_{i=1}^K \mu_{A_i}(x) y_i}{\sum_{i=1}^K \mu_{A_i}(x)} \quad (2.7-8)$$

Donde K es el número de reglas y μ_{A_i} es el grado de pertenencia del antecedente de cada una de las reglas.

El mecanismo de interpolación descrito en (2.7-8) presenta ciertos comportamientos no deseados [Babuska *et al.* 1994]. Estos pueden aparecer cuando los consecuentes de

las reglas se definen a priori como resultado de obtener un conjunto de modelos lineales en ciertos puntos de funcionamiento del sistema. En estos casos, el comportamiento global del sistema puede no ser el intuitivamente esperado. Por ejemplo, supóngase el modelo TS descrito por la ecuación (2.7-9) e ilustrado en la figura 2.9.

$$\begin{aligned}
 &x \in R \\
 &\text{Regla 1 : Si } x \text{ Es } A_1 \text{ Entonces } y_1 = a_1x + b_1 \\
 &\text{Regla 2 : Si } x \text{ Es } A_2 \text{ Entonces } y_2 = a_2x + b_2
 \end{aligned}
 \tag{2.7-9}$$

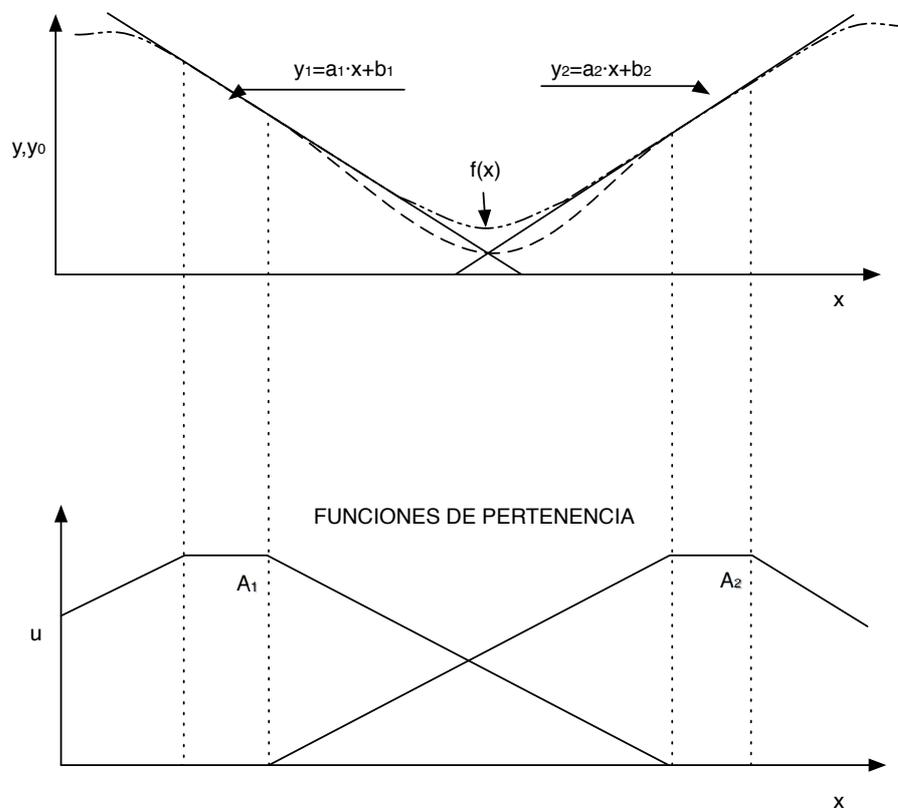


FIGURA 2.9: Transiciones entre modelos locales.

Los conjuntos borrosos de los antecedentes (A_1 y A_2) se definen mediante funciones de pertenencia trapezoidales (figura 2.9). Los modelos de los consecuentes (y_1 e y_2), se asumen como buenos aproximadores de la función global del sistema cuando la variable x tiene un valor de pertenencia cercano a 1 en los antecedentes A_1 y A_2 respectivamente. Sin embargo, en el dominio de la variable x donde se solapan las funciones de pertenencia, la salida del modelo (y) calculada mediante la ecuación (2.7-8) (figura 2.9), difiere significativamente del comportamiento real. Este hecho, que puede disminuir la precisión del modelo, es debido a que el proceso de interpolación (2.7-8) de los modelos TS favorece los consecuentes de la reglas que no son aproximaciones lineales locales del modelo global no lineal, tal y como muestra la figura 2.10.

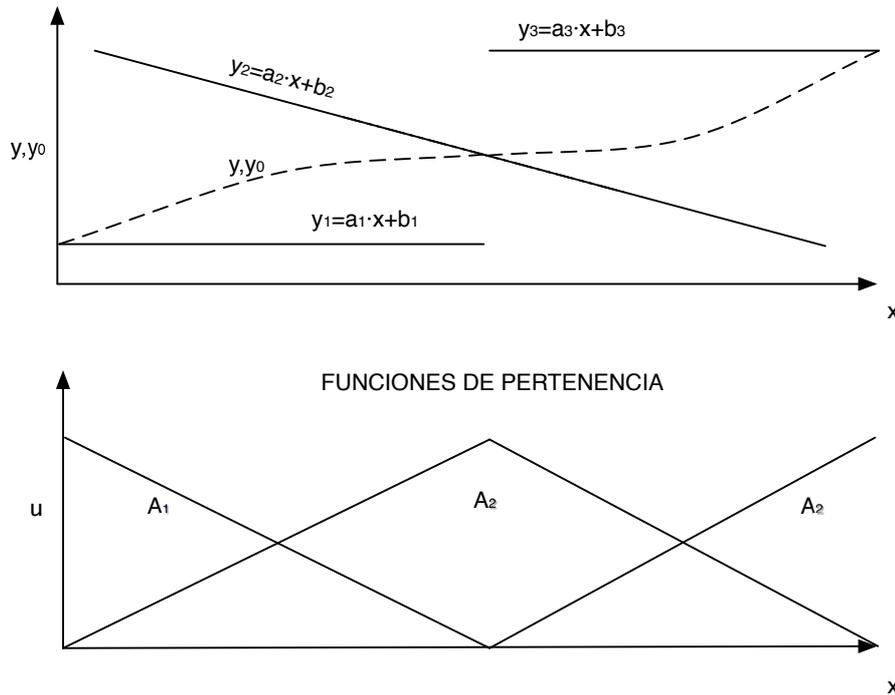


FIGURA 2.10: Aproximación global satisfactoria.

2.7.4 Modelos Dinámicos Borrosos

Existen diferentes opciones para representar un sistema dinámico mediante modelos borrosos, de entre los que cabría destacar los dos casos siguientes.

2.7.4.1 Espacio de Estados

La representación en espacio de estados se caracteriza por el empleo de la función de estados, la cual establece una relación entre el vector y la entrada actual con la variación del vector de estados. En el caso de una representación continua en el dominio temporal, esta variación se traduce en la derivada. Mientras que en el ámbito discreto es el valor del vector de estado en el siguiente periodo de muestreo. Las ecuaciones (2.7-10) y (2.7-11) muestran las representaciones en espacio de estado en el dominio continuo y discreto respectivamente[Tanaka & Wang 2001].

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.7-10}$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \tag{2.7-11}$$

Donde x es el vector de estados, u es vector de entradas del sistema, las matrices A, B, C, D son las matrices que definen el comportamiento del sistemas. El empleo de la representación discreta en espacio de estados en modelos TS, resulta inmediata, tal y como muestra la ecuación (2.7-12).

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{Si} \quad x(k) \text{ Es } M_i \quad \mathbf{Y} \quad u(k) \text{ Es } N_i \\
 &\mathbf{Entonces} \\
 &x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\
 &y(k) = C_i x(k) + D_i u(k)
 \end{aligned}
 \tag{2.7-12}$$

La potencia de esta representación es la capacidad de representación de modelos MIMO (Multiple Input Multiple Output) de manera simple. Por contra, este tipo de representaciones se suelen emplear en modelado TS cuando se tiene un conocimiento previo del proceso, ya que resulta complejo la definición de las variables de estado sin ninguna información previa.

2.7.4.2 Entrada-Salida

Las representaciones en entrada-salida son las más empleadas a la hora de generar modelos borrosos a partir de datos experimentales. Sobre todo, cuando el conocimiento del proceso es escaso o desconocido. En estos casos, la representación más empleada es la NARX (Nonlinear AutoRegressive with eXogenous input)[Sjöberg *et al.* 1994; Chen *et al.* 1991; Brown 1993], donde se establece una relación entre la información del pasado de las entradas y las salidas y la predicción de la salida, tal y como muestra la ecuación (2.7-13).

$$\hat{y}(k+1) = f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n+1), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m+1))
 \tag{2.7-13}$$

Donde n y m definen el orden del sistema. Aplicando esta representación al modelo TS, se obtiene la ecuación (2.7-14).

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{Si} \quad y(k) \text{ es } A_{i,1} \quad \mathbf{Y} \quad y(k-1) \text{ Es } A_{i,2} \quad \dots \quad \mathbf{Y} \quad y(k-n+1) \text{ Es } A_{i,n} \\
 &\mathbf{Y} \quad u(k) \text{ es } B_{i,1} \quad \mathbf{Y} \quad u(k-1) \text{ es } B_{i,2} \quad \dots \quad \mathbf{Y} \quad u(k-m+1) \text{ es } B_{i,m} \\
 &\mathbf{Entonces} \\
 &\hat{y}(k+1) = \sigma_{j=1}^n a_{i,j} y(k-j+1) + \sigma_{j=1}^m b_{i,j} u(k-j+1) + c_i
 \end{aligned}
 \tag{2.7-14}$$

Donde $a_{i,j}, b_{i,j}$ y c_i son los parámetros del consecuentes.

Los modelos NARX de tipo MISO (Multiple Input Single Output), son capaces de representar un gran número de sistemas no lineales discretos [Leontaritis & Billings 1985a],

[Leontaritis & Billings 1985b], [Chen & Billings 1989]. La representación MIMO se obtiene como una descomposición acoplada de modelos MISO[Babuska 1998]. Existen otras posibilidades de representación en entrada-salida, como por ejemplo los modelos NOE (Nonlinear Output Error) o los NARMAX (Nonlinear AutoRegressive Moving Average with exogenous input) [Chen & Billings 1989]. En cualquier caso, la selección de una representación determinada es decisión del diseñador, en función del problema que se aborde, y unido a la experiencia en el proceso.

Una vez se ha seleccionado la representación dinámica del sistema, se debe determinar el orden (m y n) de la misma. Así mismo, si existiesen retardos adicionales entre las entradas y la salida del sistema, también deberían ser definidos en este punto del diseño.

Bibliografía

BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.

BABUSKA, R., & VERBRUGGEN, H.B. 1996. An overview of fuzzy modeling for control. *Control Engineering Practice*, 4(11), 1593-1606.

BABUSKA, R., JAGER, R., & VERBRUGGEN, H.B. 1994. Interpolation issues in Sugeno-Takagi reasoning.

BROWN, M. 1993. Neurofuzzy Adaptive Modelling and Control.

CAMACHO, E.F., & BORDONS, C. 2004. *Model Predictive Control*.

CHEN, S., & BILLINGS, S.A. 1989. Representation of non-linear systems: the NARMAX model. *International Journal of Control*, 49, 1012-1032.

CHEN, S., COWAN, C.F.N., & GRANT, P.M. 1991. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basisfunction networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2(2), 302-309.

DUSSY, S., & GHAOUI, L.E. 1997. Multi-objective bounded control of uncertain nonlinear systems: an inverted pendulum example. *Control of Uncertain Systems with Bounded Inputs*. Springer, Berlin, 55-73.

ELMAN, J. 1990. Finding Structure in Time. *Cognitive Science*, 14, 179-211.

FAVOREEL, W., MOOR, B. DE, & OVERSCHEE, P. VAN. 1999. Subspace identification of bilinear systems subject to white inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(6), 1157-1165.

FROISY, C. HART B., & PAPASTRATOS, S. 1999. Industrial Application of On-Line First Principle Dynamic Models using State. *AIChE*, Nov.

- GAHOUI, L., & SCORLETTI, G. 1996. Control of Rational Systems using Linear-Fractional Representations and Linear Matrix Inequalities. *Automatica*, 32(9), 1273-1284.
- IKONEN, E., & NAJIM, K. 2002. Advanced process identification and control. *Marcel Dekker*.
- JAJUGA, K. 1986. Linear fuzzy regression. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(3), 343-353.
- LEONTARITIS, I.J., & BILLINGS, S. 1985a. Input-output parametric models for non-linear systems- part I: deterministic nonlinear systems. *International Journal of Control*, 41(2), 303-328.
- LEONTARITIS, I.J., & BILLINGS, S. 1985b. Input-output parametric models for non-linear systems- part II: stochastic nonlinear systems. *International Journal of Control*, 41(2), 329-344.
- NAHAS, M. A. HESSON E. P., & SEBORG, D. E. 1992. Nonlinear Internal Model Control Strategy for Neural Networks Models. *Computer Chemical Eng*, 16(12), 1039-1057.
- NELLES, O. 2001. *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*.
- NIKIFORUK, L.J.P.N., & GUPTA, M.M. 1995. Approximation of Discrete Time State Space Trajectories Using Dynamic Recurrent Neural Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(7), 1266-1270.
- PHAM, D., & XING, L. 1995. *Dynamic System Identification Using Elman and Jordan Networks*. Chap. 23, pages 572-591.
- SALCEDO, J., & MARTINEZ, M. 2006. Identificación de Modelos LPV para el Control de Sistemas No Lineales. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 3(3), 92-107.
- SJÖBERG, J., HJALMARSSON, H., & LJUNG, L. 1994. Neural networks in system identification. vol. 2.
- SMITH, S.M., NOKLEBY, B.R., & COMER, D.J. 1994. A computational approach to fuzzy logic controller design and analysis using cell state space methods. *Kandel and Langholz (Eds.), Fuzzy Control Systems*, 398-427.
- SONTAG, E. 1993. Neural Networks for Control. *Essays Control: perspectives in the theory and the its applications*, 339-380.
- TAKAGI, T., & SUGENO, M. 1985. Fuzzy Identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybern*, 15, 116-132.

TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.

TOWNSEND, S., LIGHTBODY, G., BROWN, M., & IRWIN, G. 1998 (Jun). Nonlinear Dynamic Matrix using Local Models.

VERDULT, V., & VERHAEGEN, M. 2000. Identification of multivariable linear parameter-varying systems based on subspace techniques. vol. 2.

VERDULT, V., & VERHAEGEN, M. 2002. Subspace identification of multivariable linear parameter-varying systems. *Automatica*, **38**(5), 805-814.

ZADEH, L.A. 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**(3), 338-353.

ZADEH, L.A. 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **3**, 28-44.

CAPÍTULO 3

Identificación de Sistemas Borrosos

"System Identification: The determination of a mathematical model of a process or system is known as system identification".

Advanced Process Identification and Control. E. Ikonen

"System identification: General term to describe mathematical tools and algorithms that build dynamical models from measured data. A dynamical model in this context is a mathematical description of the dynamic behavior of a system or process".

Wikipedia - The Free Encyclopedia

3.1 Introducción

Los modelos fuzzy presentan la característica de poder combinar información procedentes de distintas fuentes, convirtiendo a este tipo de representación en una herramienta con gran potencial. Las diferentes fuentes de información pueden ser formulaciones en primeros principios, medidas experimentales del proceso, conocimiento procedentes de expertos en la materia, etc. Por tanto, la identificación de modelos fuzzy requiere de la unión de diferentes metodologías procedentes de distintas áreas de conocimiento, como las redes neuronales, el análisis de datos, la minería de datos y técnicas convencionales de identificación. La selección de sistemas Fuzzy como modelos para simulación, predicción, control, etc; presentan dos cuestiones fundamentales en la fase de diseño. En primer lugar, la estructura del modelo Fuzzy, es decir, número de reglas, variables en los antecedentes, variables en los consecuentes, etc. En segundo lugar, la identificación

de los parámetros que componen la estructura seleccionada. Estas dos cuestiones son objeto de investigación, con la finalidad de encontrar tanto la estructura óptima como el mejor método de identificación de los parámetros del sistema. Sin embargo, a la vista del estado del arte actual, parece que tanto la estructura del sistema fuzzy como la identificación de los parámetros dependen de la aplicación y del proceso en cuestión. En general, se pueden clasificar las propuestas existentes en la literatura en dos grandes grupos.

- Identificación a partir de un conjunto de ecuaciones no lineales que describan el comportamiento del proceso.
- Identificación del modelo fuzzy mediante el empleo de información entrada-salida del proceso.

El presente capítulo expondrá las cuestiones más relevantes referentes a las dos líneas principales de trabajo en el campo de la identificación de modelos fuzzy. Señalando las ventajas e inconvenientes de cada metodología.

3.2 Identificación a partir de ecuaciones no lineales

Las técnicas clasificadas dentro de este apartado presentan como característica común el punto de partida en el diseño. Es decir, todas ellas asumen la existencia de un conjunto de ecuaciones no lineales que describen el comportamiento del proceso. Por tanto, parece contradictoria la necesidad de obtener un modelo fuzzy cuando ya se dispone de un modelo adecuado. Sin embargo, estas técnicas son muy empleadas a la hora de reducir la complejidad del modelo con vistas a un posterior diseño del sistema de control. Sin duda, la reducción de la complejidad es su principal ventaja, mientras que la asunción del conocimiento de las ecuaciones que describen el proceso es su mayor inconveniente. Cabe tener en cuenta, que dependiendo del ámbito de aplicación (sistemas mecánicos, industria química, sector aeroespacial, motores térmicos, etc), la obtención de un modelo en primeros principios conlleva una mayor o menor complejidad. Debido a este condicionante, estas técnicas han tenido un mayor impacto en el campo de los sistemas mecánicos y aeronáuticos, donde la obtención de un modelo de estas características presenta mayor viabilidad.

A continuación se describe la sectorización de no linealidades. Ésta es una de las técnicas empleadas en la identificación a partir de sistemas de ecuaciones no lineales.

3.2.1 Sectorización de no linealidades

La técnica de identificación de modelos fuzzy mediante la sectorización de no linealidades (sector nonlinearity), aparece en la literatura por primera vez en [Kawamoto *et al.* 1992], pero es en [Tanaka & Wang 2001] donde es ampliamente desarrollada y analizada. Esta metodología presenta dos vertientes, la sectorización global y la sectorización local, tal y como se muestra a continuación.

Sectorización Global Considérese un sistema no lineal simple, definido como $\dot{x}(t) = f(x(t))$, donde $f(0) = 0$. El objetivo que se persigue es encontrar el área global que satisfaga la ecuación $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1, a_2]x(t)$. La figura 3.1 muestra gráficamente el concepto básico de esta técnica, es decir, la obtención de el conjunto de restricciones lineales que definen el área global o sector global donde se encuentra la función no lineal. La importancia de este método radica en que garantiza una representación exacta de la función mediante el modelo fuzzy obtenido. Sin embargo, en la realidad resulta complejo encontrar los sectores globales de funciones no lineales complejas. Por ello, en la mayoría de ocasiones se emplean la sectorización local.

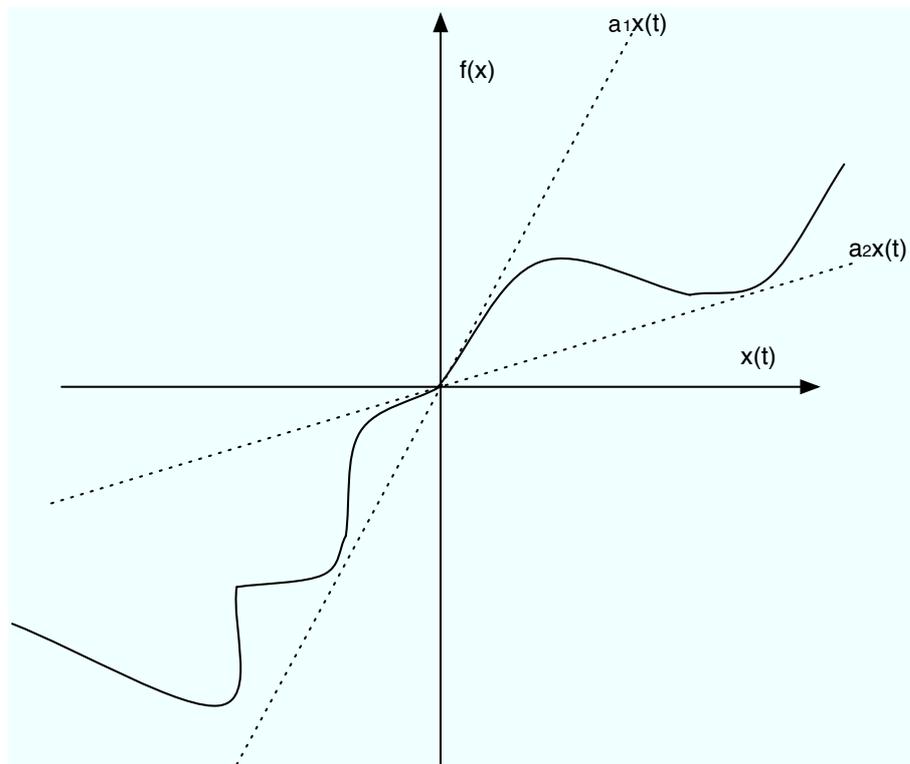


FIGURA 3.1: Sectorización global de una función no lineal.

Sectorización Local En este caso se consideran sectorizaciones locales de las no linealidades, basándose en los límites físicos que presentan las variables del sistema. La figura 3.2 muestra la sectorización local de las no linealidades, la cual se basa en el mis-

mo principio que la global pero con la salvedad de que sólo es válida para un intervalo definido de las variables del sistema. En este caso, el modelo fuzzy obtenido representará con exactitud la no linealidad del sistema que se encuentre dentro del sector local definido por $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1, a_2]x(t)$, y los intervalos de las variables $-d < x(t) < d$.

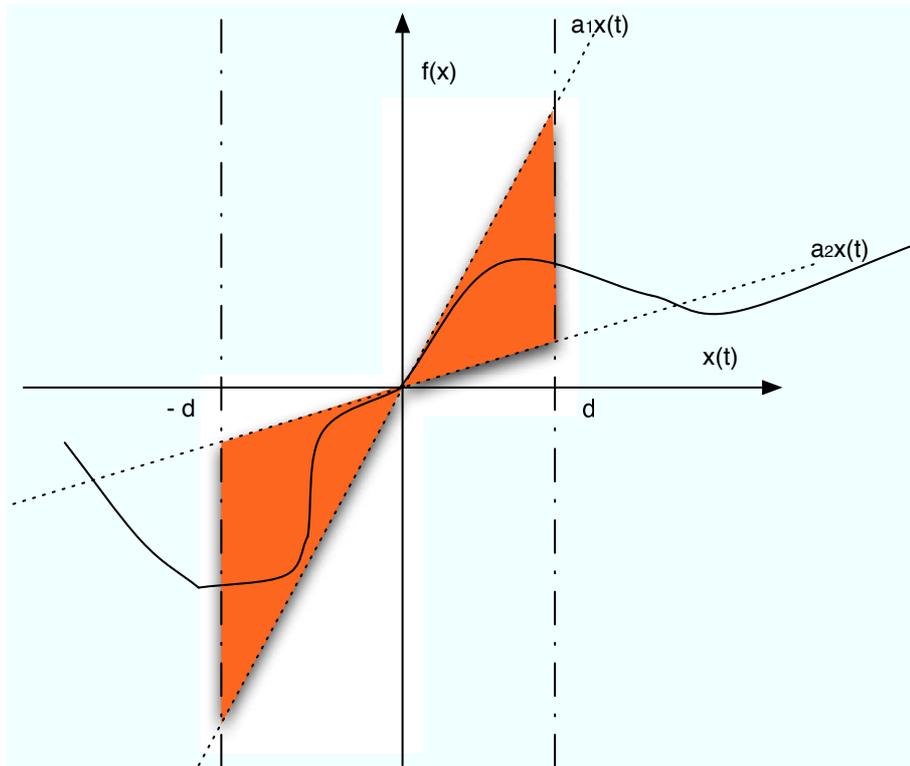


FIGURA 3.2: Sectorización local de una función no lineal.

3.3 Identificación a partir de datos experimentales

Esta sección se centrará en la descripción de técnicas y algoritmos que permiten construir modelos fuzzy a partir de un conjunto de datos experimentales. En general, estas técnicas presentan dos etapas. La primera es la identificación de un conjunto finito de subsistemas, definiendo la estructura del modelo. El segundo paso es la identificación de parámetros de los subsistemas definidos en la etapa anterior. Existen numerosas propuestas en la literatura que abordan este problema, es el caso del fuzzy clustering [Yoshinari *et al.* 1993; Babuska 1998; Zhao *et al.* 1994], los métodos de aprendizaje basados en redes neuronales [Oliveira 1993; Glorennec 1994; Jang 1992], la resolución por mínimos cuadrados ortogonales [Wang 1994], aprendizaje inductivo [Ross 2004] o razonamiento evidencial [Baldwin *et al.* 1995]. Algunas de estas técnicas intentan construir de manera simultánea las reglas del sistema, las funciones de pertenencia y el mapeo entre el conjunto de datos de entrada y el de salida. Las metodologías de diseño que

abordan el problema de manera global son el agrupamiento borroso mediante producto espacial (Product Space Clustering) unido a técnicas de optimización no lineal, y el aprendizaje basado en redes neuronales (neural learning). El resto del capítulo introducirá los conceptos generales de estas dos metodologías globales de diseño.

3.3.1 Agrupamiento Borroso (Product Space Clustering)

Este apartado muestra la filosofía de identificación basada en el empleo de técnicas de agrupamiento borrosas (Fuzzy Clustering). El origen de estas técnicas se encuentran en el reconocimiento de patrones y el análisis masivo de información. El objetivo de estas técnicas es imitar una potente capacidad innata en los humanos, la clasificación y agrupación de información. El ser humano genera de manera continua y subconsciente potentes esquemas de agrupamiento (clustering), los cuales le permiten distinguir, por ejemplo, entre familia, amigos y otras personas. Por tanto, el clustering es la acción de agrupar objetos físicos o abstractos en distintos conjuntos o clases (clusters) en función de la similitud de sus características. Por tanto, un cluster no es más que un grupo de objetos que son más similares entre ellos que a miembros de otros grupos. El campo de la ingeniería ha replicado el proceso de agrupamiento humano desde el punto de vista matemático, donde el término similitud se convierte en una función cuantitativa perfectamente definida. En general, se suelen emplear normas o distancias definidas en el espacio métrico. Ésta puede estar medida entre vectores de datos, o como distancia a vectores de datos prototipo de la clase, los cuales suelen ser conocidos a priori. Por otro lado, este planteamiento matemático, hace necesario que las características de los objetos a agrupar sean valores cuantitativos bien definidos.

El agrupamiento en clusters puede ser borroso, donde la idea básica viene descrita en la figura 3.3. En ésta, se aprecia como los datos son agrupados en dos clusters con prototipos V_1 y V_2 . En este caso particular, se ha empleado la distancia Euclídea como función de similitud.

Las técnicas de agrupamiento borrosas introducen los conceptos de la lógica de conjuntos borrosos en el proceso de agrupamiento. El resultado es un agrupamiento donde los objetos pueden pertenecer a más de un cluster. En general, todos los objetos pertenecen a los distintos clusters con un grado de pertenencia determinado. Los algoritmos de agrupamiento borroso, normalmente, generan dos elementos característicos: la matriz de particionamiento borroso y los prototipos de los clusters [Bezdek 1981]. El primero de ellos es una matriz que contiene el grado de pertenencia de cada objeto a los distintos clusters. En el ejemplo de la figura 3.3, se obtendría una matriz $2 \times N_{datos}$, donde cada elemento μ_{ij} expresaría el grado de pertenencia de los datos $[x_i, z_j]$. En segundo lugar, este tipo de algoritmos proporcionan los prototipos de los clusters que se han obtenido en el proceso de agrupamiento V_i .

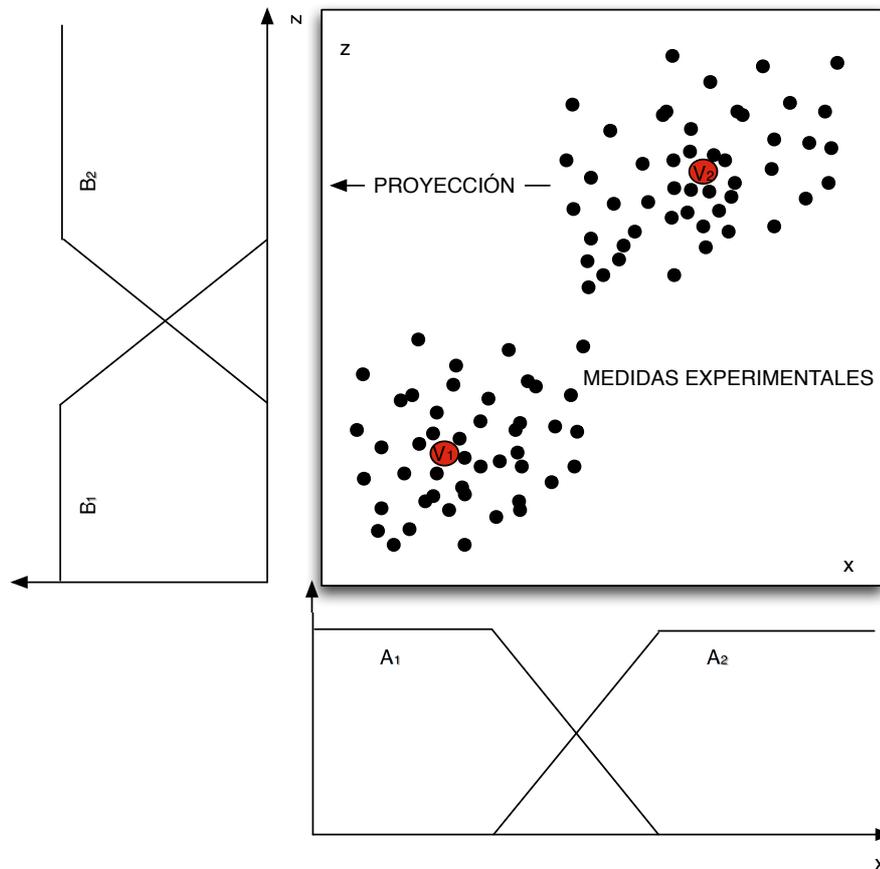


FIGURA 3.3: Interpretación de la base de reglas a partir del agrupamiento fuzzy.

Una vez se ha obtenido el agrupamiento de la información (figura 3.3), se puede extraer la base de reglas del sistema borroso proyectando los clusters en las variables del modelo. Por ejemplo, la figura 3.3 muestra la asociación existente entre los dos clusters y las dos reglas asociadas, las cuales se definen según la ecuación:

$$\begin{aligned}
 &x \in R \\
 &\text{Regla 1 : Si } x \text{ Es } A_1 \text{ Entonces } z \text{ es } B_1 \\
 &\text{Regla 2 : Si } x \text{ Es } A_2 \text{ Entonces } z \text{ es } B_2
 \end{aligned}
 \tag{3.3-1}$$

Por otra parte, las funciones de pertenencia que se obtienen de la proyección de los clusters dependen directamente de la distribución de los datos en el espacio de variables. La aplicación de la proyección de los clusters cuando se trabaja con sistemas dinámicos no produce resultados satisfactorios. Ya que la distribución de los datos no puede ser directamente interpretada debido a los aspectos temporales de las señales. En estos sistemas se debe definir una función de similitud y unos prototipos adecuados. Generalmente, los prototipos se suelen definir como subespacios lineales (rectas, planos, hiperplanos) y la similitud suele ser la distancia cuantificada de los puntos a un ele-

mento que caracterice el subespacio lineal [Bezdek 1981; Babuska & Verbruggen 1996]. Existen propuesta de algoritmos de agrupamiento borroso donde la medida de distancia es adaptativa [Gustafson & Kessel 1979], siendo estos muy empleados e la identificación de sistemas borrosos tipo TS [Babuska *et al.* 1994; Babuska 1998]. La idea principal de estos algoritmos se muestra en la figura 3.4.

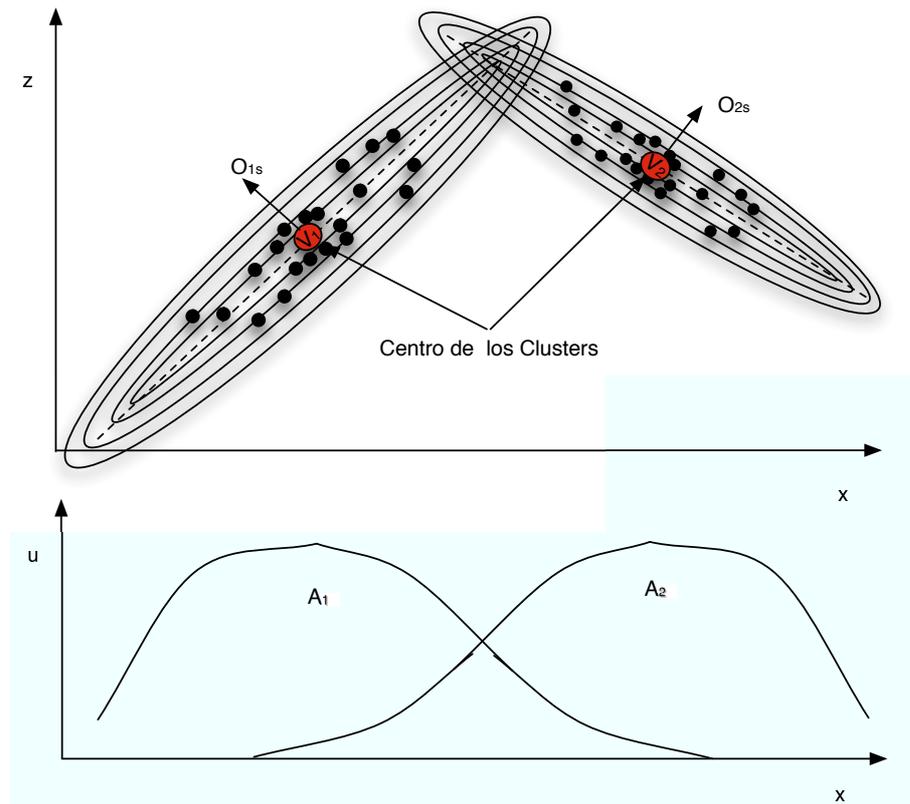


FIGURA 3.4: Agrupamiento borroso hiperelipsoidal.

La forma hiperelipsoidal de los clusters (figura 3.4) viene descrita por la estructura de la matriz de covarianzas de los valores propios. Los vectores propios de ésta matriz determinan la dirección de los ejes de las hiperelipsoides, y la longitud de los mismos viene definida por los valores propios. En conclusión, el vector propio correspondiente al valor propio más pequeño de la matriz (O_{is}), resulta la normal al hiperplano descrito por la matriz, tal y como se observa en la figura 3.4. Se puede emplear la normal descrita con anterioridad junto con las coordenadas del centro de los clusters V_i para definir el hiperplano de manera implícita, tal y como muestra la ecuación (3.3-2) aplicada al ejemplo de la figura 3.4.

$$((x, z) - V_i)O_{is} = 0 \tag{3.3-2}$$

Una vez definidos los clusters mediante la ecuación (3.3-2) se debe abordar la obtención de las funciones de pertenencia de los antecedentes (A_1 y A_2 en la figura 3.4) y los parámetros de las funciones lineales de los consecuentes. Esto definiría completamente el sistema borroso descrito mediante estructura TS. En el caso del ejemplo de la figura 3.4 el sistema borroso resultante sería descrito según (3.3-3).

$$\begin{aligned}
 &x \in R \\
 &\text{Regla 1 : Si } x \text{ Es } A_1 \text{ Entonces } z = a_1x + b_1 \\
 &\text{Regla 2 : Si } x \text{ Es } A_2 \text{ Entonces } z = a_2x + b_2
 \end{aligned} \tag{3.3-3}$$

Las funciones de pertenencia de las reglas se obtienen como proyección de los clusters obtenidos sobre el dominio de la variables de los antecedentes, en el caso del ejemplo sobre la variable x . Por otro lado, la estimación de los parámetros de los consecuentes se determinan, en general, empleando la técnica de mínimos cuadrados con el objetivo de minimizar el error de predicción del modelo global o de cada uno de los subespacios [Babuska & Verbruggen 1996].

3.3.2 Neural Learning

Esta técnica también se suele definir como modelado e identificación neuro-fuzzy [Buckley & Hayashi 1994; Brown 1993]. La propuesta más habitual en este tipo de identificación es la selección de operadores diferenciables para el mecanismo de inferencia (como el producto y la suma), funciones de pertenencia igualmente diferenciables (como funciones Gaussianas), y el empleo de el valor medio ponderado en la defuzificación (como en el modelo Takagi-Sugeno). El esquema de inferencia puede ser representado como una estructura en red, tal y como muestra la la figura 3.5.

Los nodos de la primera capa de la red (figura 3.5), son los encargados de computar el grado pertenencia de las entradas respecto a los conjuntos fuzzy definidos en los antecedentes. Los nodos de multiplicación Π de la segunda capa, representan el operador de conjunción de los antecedentes. Los nodos N y de sumatorio Σ generan la salida del modelo como la media ponderada de la contribución de cada regla, tal y como define la ecuación:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^K \mu_{A_i}(x) y_i}{\sum_{i=1}^K \mu_{A_i}(x)} \tag{3.3-4}$$

El empleo de operadores diferenciales en la estructura seleccionada permite el empleo de técnicas basadas en el gradiente para el ajuste de los parámetros de los consecuentes, como es el caso de la propagación hacia atrás (backpropagation [Sudhakar *et al.* 1993]). En casos particulares, el empleo de una constante como función en el consecuente reduce

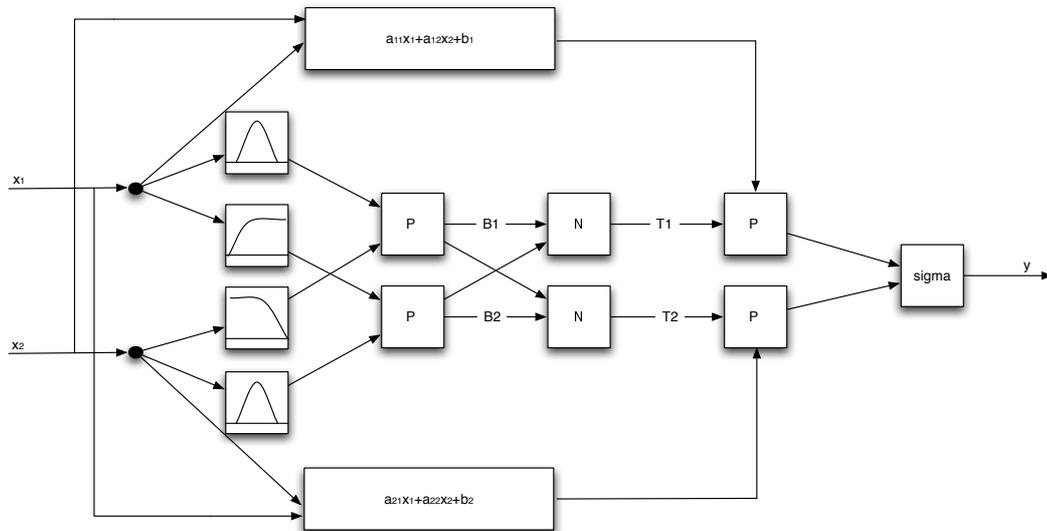


FIGURA 3.5: Transiciones entre modelos locales.

el trabajo de ajuste a la resolución de una simple ecuación algebraica, tal y como muestra la ecuación (3.3-5).

$$y = \sum_{i=1}^K \phi_i(x) b_i \quad (3.3-5)$$

Donde b_i describe los consecuentes, y las funciones $\phi_i(x)$ representa el grado de pertenencia normalizado β_i (figura 3.5) de la entrada x en el antecedente de cada regla. Por otra parte, la fórmula (3.3-5) representa una expansión de las funciones de base, una de las estructuras más habituales para la aproximación de funciones no lineales. Mientras que el ajuste de los parámetros b_i resulta trivial, la estimación de las funciones de base $\phi_i(x)$ resulta una tarea compleja. La solución más general es la utilización de funciones radiales exponenciales ajustadas mediante mínimos cuadrados ortogonales [Wang 1994].

Bibliografía

BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.

BABUSKA, R., & VERBRUGGEN, H.B. 1996. An overview of fuzzy modeling for control. *Control Engineering Practice*, 4(11), 1593-1606.

BABUSKA, R., JAGER, R., & VERBRUGGEN, H.B. 1994. Interpolation issues in Sugeno-Takagi reasoning.

BALDWIN, J.F., MARTIN, T.P., & PILSWORTH, B.W. 1995. *Frial-Fuzzy and Evidential Reasoning in Artificial Intelligence*.

- BEZDEK, J.C. 1981. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*.
- BROWN, M. 1993. Neurofuzzy Adaptive Modelling and Control.
- BUCKLEY, J.J., & HAYASHI, Y. 1994. Fuzzy neural networks: a survey. *Fuzzy Sets and Systems*, **66**(1), 1-13.
- GLORENNEC, P.Y. 1994. Learning Algorithms for Neuro-Fuzzy Networks. *Fuzzy Control Systems*, 4-18.
- GUSTAFSON, DE, & KESSEL, WC. 1979. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. *Proc. IEEE CDC*, **2**, 761-766.
- JANG, J.S.R. 1992. Self-learning fuzzy controllers based on temporal backpropagation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **3**(5), 714-723.
- KAWAMOTO, S., TADA, K., ISHIGAME, A., & TANIGUCHI, T. 1992. An approach to stability analysis of second order fuzzy systems.
- OLIVEIRA, J.V. 1993. Neuron inspired learning rules for fuzzy relational structures. *Fuzzy Sets and Systems*, **57**(1), 41-53.
- ROSS, T.J. 2004. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*.
- SUDHAKAR, R., VENUGOPAL, K.P., & PANDYA, A.S. 1993. An Improved Scheme for Direct Adaptive Control of Dynamical Systems Using Backpropagation Neural Networks. *Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*.
- TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.
- WANG, L.X. 1994. *Adaptative fuzzy systems and control design and stability analysis*. Page 352.
- YOSHINARI, Y., PEDRYCZ, W., & HIROTA, K. 1993. Construction of fuzzy models through clustering techniques. *Fuzzy Sets and Systems*, **54**(2), 157-165.
- ZHAO, J., WERTZ, V., & GOREZ, R. 1994 (Aug). A fuzzy clustering method for the identification of fuzzy models for dynamical systems.

CAPÍTULO 4

Aplicación de Modelado e Identificación

"Applied: Put into practice or a particular use. Example: representative part that demonstrates the character of the whole".

The American Heritage® Dictionary of the English Language

4.1 Introducción

El presente capítulo muestra la aplicación práctica de dos metodologías de identificación descritas en el capítulo 3. En concreto, se muestra la aplicación de la sectorización no lineal (*sector nonlinearity*) [Takagi & Sugeno 1985][Tanaka & Wang 2001], y la agrupación del producto espacial (*product space clustering*) [Babuska 1998]. Asimismo, los ejemplos de aplicación que se presentan, se encuentran enmarcados en el ámbito de la identificación de motores de combustión interna [García-Nieto *et al.* 2008].

Los conceptos básicos sobre motores de combustión interna y las consideraciones pertinentes fueron introducidos en el capítulo 1. A continuación se destacan algunas cuestiones ya enunciadas en dicho capítulo. En particular, la figura 4.1 muestra de manera esquemática los distintos componentes que se pueden encontrar en un motor diesel turboalimentado actual.

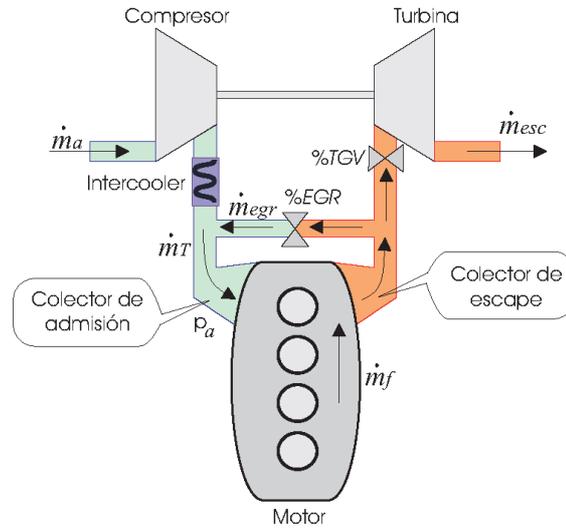


FIGURA 4.1: Esquema de un motor diesel con turbocompresor.

Donde,

$$\dot{m}_a : \text{Flujo Masa de Aire } \left(\frac{Kg}{h} \right)$$

$$\dot{m}_T : \text{Flujo Masa Total en Colector } \left(\frac{Kg}{h} \right)$$

$$\dot{m}_{esc} : \text{Flujo Masa de Escape } \left(\frac{Kg}{h} \right)$$

$$\dot{m}_{egr} : \text{Flujo Masa de EGR } \left(\frac{Kg}{h} \right)$$

$$\dot{m}_f : \text{Flujo Masa de Combustible } \left(\frac{Kg}{h} \right)$$

$$p_a : \text{Presión en Colector (bar)}$$

El diseño de sistemas de control para motores diesel presenta una complejidad añadida, no comentada previamente, que se debe a la carencia de sensores capaces de medir las variables AFR , NO_x y humos [Kao & Moskwa 1995] (véase capítulo 1). Por tanto, la cuantificación del comportamiento del sistema se debe realizar mediante otras magnitudes. En general, se emplean las medidas de la presión en el colector de admisión, P_a , y el flujo másico de aire que circula por el compresor, \dot{m}_a . Estas variables son accesibles y están íntimamente relacionadas con el AFR , NO_x y humos [Stefanopoulou *et al.* 2000].

Por otro lado, existen dos variables que afectan en gran medida al comportamiento de este tipo de motores. Por un lado se encuentra el régimen de giro del motor (ω o RPM). Esta variable se puede considerar como el elemento de unión entre dos aspectos

claramente diferenciados dentro de un vehículo de combustión interna. Es decir, el régimen de giro une el proceso de combustión interna con los elementos mecánicos que intervienen en la obtención del movimiento del vehículo. Por tanto, esta variable es la piedra angular entre el conjunto de reacciones químicas que se producen en los cilindros y el movimiento circular de los neumáticos. Por tanto, resulta evidente la múltiple dependencia del régimen de giro múltiples factores como por ejemplo el par motor generado, par resistente, la inercia del vehículo, los tiempos de inyección, el octanaje del combustible, etc. La segunda variable implicada en el comportamiento de los motores diesel es la masa de fuel (\dot{m}_f), es decir, la cantidad de fuel inyectado dentro del cilindro en cada ciclo del motor. Esta variable interviene de manera directa en la obtención de la potencia del vehículo, así como de manera indirecta en la cantidad de contaminantes que se generan.

Los ejemplos que se presentan a continuación muestran la aplicación de dos técnicas de identificación en la obtención de modelos adecuados, que representen el comportamiento de distintos aspectos de los motores diesel. En el primer ejemplo se presenta, el modelado mediante sectorización no lineal del régimen de giro de un motor diesel [Takagi & Sugeno 1985][Song & Grigoriadis 2003]. Posteriormente, se aborda la identificación mediante agrupación del producto espacial del sistema de renovación de la carga en motores diesel turboalimentados [Babuska 1998; García-Nieto & Martínez 2007; García-Nieto *et al.* 2008].

4.2 Aplicación de la Sectorización No Lineal

El diseño de un sistema de control que gobierne el comportamiento de un proceso complejo, siempre resulta un reto desde cualquier punto de vista. En general, el primer escollo que se presenta es la obtención de un modelo matemático que represente de manera adecuada el comportamiento dinámico del sistema, y que al mismo tiempo sea adecuado para el diseño de un sistema de control.

El presente apartado aborda la aplicación de la sectorización no lineal [Tanaka & Wang 2001], esta técnica se caracteriza por la obtención de un modelo Fuzzy con estructura TS a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Normalmente, abordar el diseño de un sistema de control a partir de un modelo descrito en ecuaciones diferenciales no lineales resulta inviable o muy complejo. Por tanto, la aplicación de la sectorización no lineal puede resultar una técnica interesante, ya que proporciona un modelo simplificado a partir de la representación original. El modelo resultante presenta las características necesarias para ser abordado por un conjunto de técnicas bien definidas y aceptadas en el ámbito de control. Por tanto, esta técnica permite la obtención

de representaciones simplificadas a partir de modelos complejos, haciendo posible el diseño de sistema de control a partir de los modelos simplificados.

El presente apartado presenta la aplicación de la sectorización no lineal a un modelo no lineal que describe el comportamiento del régimen de giro de un motor diesel. El diagrama 4.2 muestra de manera esquemática el conjunto de variables implicadas en el proceso desde el punto de vista de entrada salida.



FIGURA 4.2: Variables Proceso.

Este modelo fue introducido en [Song & Grigoriadis 2003], y viene descrito por las ecuaciones 4.2-1, 4.2-2 y 4.2-3.

El régimen de giro del motor se define a partir de la ecuación de dinámica de rotación del cigüeñal, tal y como muestra la ecuación 4.2-1.

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = T_e(t) - T_f(t) - T_d(t) \quad (4.2-1)$$

donde,

$$\dot{m}_f(t) : \text{Flujo Masa de Combustible} \left(\frac{Kg}{h} \right)$$

$$J : \text{Momento de inercia del motor} (kgm^2), \text{ con valor igual } 3$$

$$\omega(t) : \text{Régimen de giro del motor} (rpm)$$

$$T_e(t) : \text{Par generado por el motor} (Nm)$$

$$T_f(t) : \text{Par de fricción del motor} (Nm)$$

$$T_d(t) : \text{Par de carga del motor} (Nm)$$

El par generado por el motor se asume que es proporcional a la cantidad de fuel inyectado (\dot{m}_f), y dependiente de un retraso variable. Este retraso depende a su vez del régimen de giro, tal y como indica la ecuación 4.2-2.

$$T_e(t) = 5.102\dot{m}_f(t - \tau(\omega)) \quad (4.2-2)$$

$$\tau(\omega) = 0.0029996 + \frac{29.166}{\omega}$$

El par de fricción del motor viene descrito por la ecuación 4.2-3.

$$T_f(t) = \frac{\omega^2(t)}{-0.0106\omega^2(t) + 0.71248\omega(t)\sqrt{\omega(t)} - 1680.5} \quad (4.2-3)$$

El retardo de la señal de fuel inyectado viene descrito por la ecuación 4.2-4. Se ha empleado una aproximación de primer orden en espacio de estados como aproximación del retardo.

$$\frac{d\dot{m}_{f*}(t)}{dt} = \frac{\dot{m}_f(t) - \dot{m}_{f*}(t)}{\tau(\omega)} \quad (4.2-4)$$

El modelo completo en espacio de estados es el resultado de tomar las ecuaciones 4.2-1, 4.2-2, 4.2-3 y 4.2-4, expresando el sistema según la forma compacta 4.2-5.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{d\dot{m}_{f*}(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-\omega(t)}{(-0.0106\omega^2(t)+0.71248\omega(t)\sqrt{\omega(t)}-1680.5)3} & \frac{5.102}{3} \\ 0 & -\frac{\omega(t)}{0.0029996\omega(t)+29.166} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{m}_{f*}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\omega(t)}{0.0029996\omega(t)+29.166} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d(t) \\ \dot{m}_f(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2-5)$$

Las variables del proceso $\omega(t)$ y $\dot{m}_f(t)$, presentan las restricciones que se muestran en la ecuación 4.2-6.

$$\omega(t) \in [700, 2500]rpm \quad (4.2-6)$$

$$\dot{m}_f(t) \in [0, 300]\frac{mm^3}{cilindro}$$

El primer paso para la aplicación de la sectorización no lineal al modelo 4.2-5, es la identificación de los términos no lineales, resultando la expresión 4.2-7. Donde se puede apreciar que la variable $\dot{m}_f(t)$ no se encuentra incluida en ningún término no lineal. Por tanto, los límites de funcionamiento determinados en 4.2-6 no afectarán al modelo.

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{d\dot{m}_{f*}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{z_1(t)}{3} & \frac{5.102}{3} \\ 0 & -z_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{m}_{f*}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & z_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d(t) \\ \dot{m}_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.2-7)$$

El segundo paso es el cálculo de los valores límite de las funciones no lineales:

$$\begin{aligned} \omega(t) = 700 &\Rightarrow \min z_1(t) = 0.110745 & \min z_2(t) = 22.38873 \\ \omega(t) = 2500 &\Rightarrow \max z_1(t) = 0.118318 & \max z_2(t) = 68.185 \end{aligned} \quad (4.2-8)$$

El tercer paso es la obtención de las funciones de pertenencia del dominio de las variables $z_1(t)$ y $z_2(t)$. En este caso, se emplean dos funciones triangulares solapadas un 50% para cada variable, tal y como muestran las figuras 4.3 y 4.4 . Las ecuaciones 4.2-9, 4.2-10 y 4.2-11 muestran el cálculo de las funciones de pertenencia de la variable $z_1(t)$.

$$z_1(t) = M_1(z_1(t))0.118318 + M_2(z_1(t))0.110745 \quad (4.2-9)$$

$$M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) = 1 \quad (4.2-10)$$

$$M_1(z_1(t)) = \frac{z_1(t) - 0.110745}{7.573 \cdot 10^{-3}} \quad M_2(z_1(t)) = \frac{0.118318 - z_1(t)}{7.573 \cdot 10^{-3}} \quad (4.2-11)$$

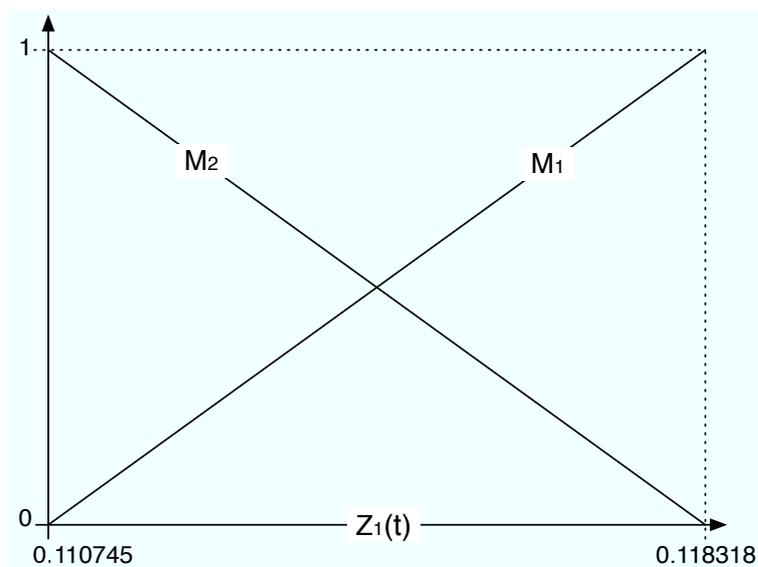


FIGURA 4.3: Funcion de Pertenencia de $z_1(t)$.

Aplicando la misma metodología se obtiene la expresión 4.2-12, correspondiente a la función de pertenencia de la variable $z_2(t)$.

$$N_1(z_2(t)) = \frac{z_2(t) - 22.38873}{45.7927} \quad N_2(z_2(t)) = \frac{68.185 - z_2(t)}{45.7927} \quad (4.2-12)$$

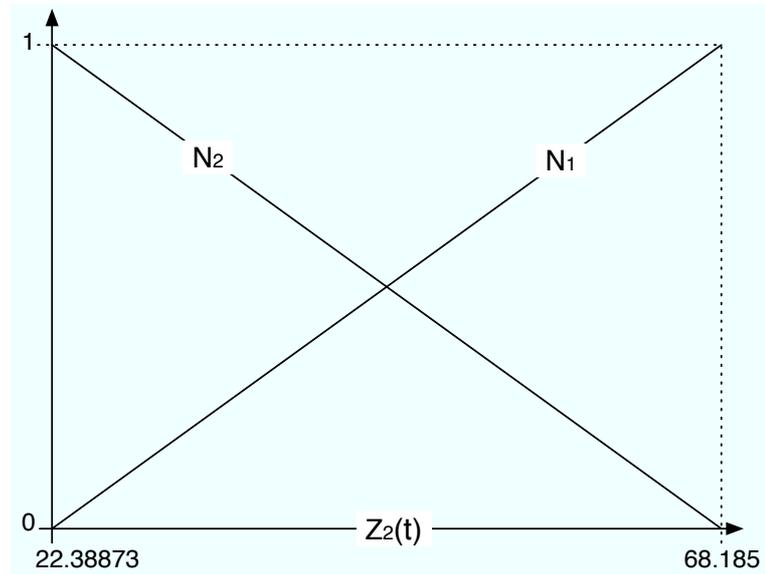


FIGURA 4.4: Funcion de Pertenencia de $z_2(t)$.

Por último, se construye el conjunto de reglas que definen el sistema borroso.

REGLA 1: Si $z_1(t)$ Es Máximo Y $z_2(t)$ Es Mínimo

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{d\dot{m}_{f^*}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03944 & 1.70067 \\ 0 & -22.38873 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{m}_{f^*}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 22.38873 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d(t) \\ \dot{m}_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.2-13)$$

REGLA 2: Si $z_1(t)$ Es Mínimo Y $z_2(t)$ Es Mínimo

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{d\dot{m}_{f^*}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.036915 & 1.70067 \\ 0 & -22.38873 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{m}_{f^*}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 22.38873 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d(t) \\ \dot{m}_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.2-14)$$

REGLA 3: Si $z_1(t)$ Es Máximo Y $z_2(t)$ Es Máximo

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{d\dot{m}_{f^*}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03944 & 1.70067 \\ 0 & -68.185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{m}_{f^*}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 68.185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d(t) \\ \dot{m}_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.2-15)$$

REGLA 4: Si $z_1(t)$ Es Mínimo Y $z_2(t)$ Es Máximo

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{d\dot{m}_{f^*}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.036915 & 1.70067 \\ 0 & -68.185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{m}_{f^*}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 68.185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d(t) \\ \dot{m}_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.2-16)$$

Por último, la figura 4.5 muestra el comportamiento del modelo descrito por la ecuación 4.2-5 en comparación con el modelo borroso implementado con cuatro reglas. La

comparativa se ha realizado aplicando a las entradas $T_d(t)$ y $\dot{m}_f(t)$, señales sinusoidales que provoquen la respuesta del sistema dentro y fuera del rango de diseño. El objetivo es poder observar la validez del modelo borroso dentro y fuera de las condiciones de diseño empleadas.

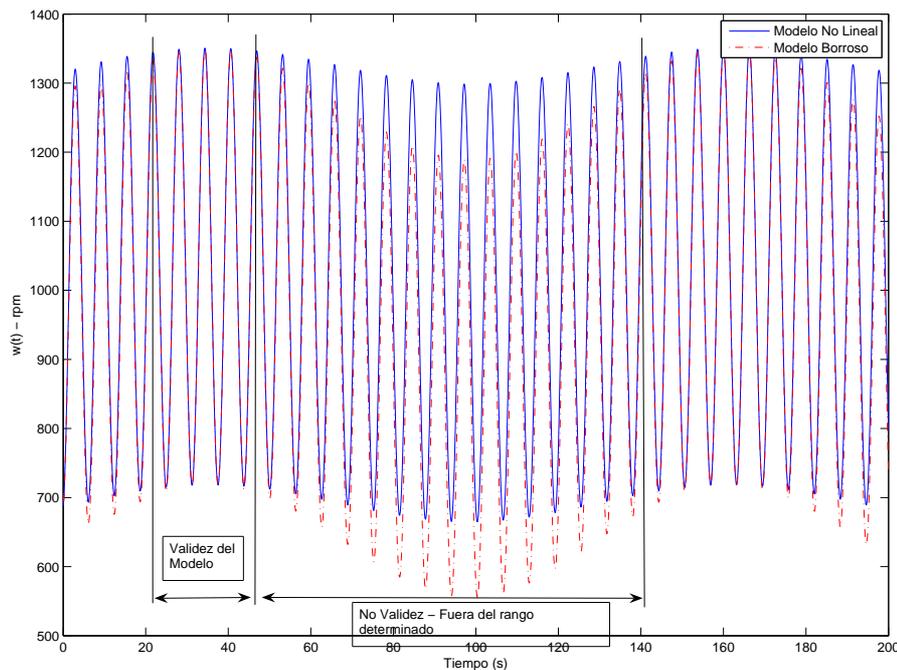


FIGURA 4.5: Respuesta Comparativa Modelo No lineal vs Modelo Borroso.

La figura 4.5 muestra como los dos modelos presentan un comportamiento casi idéntico dentro del rango de validez del modelo borroso, es decir, para $\omega(t) \in [700, 2500]rpm$. Fuera del rango definido, los errores entre ambos modelos son evidentes. Por tanto se puede constatar la validez del modelo borroso siempre y cuando el sistema no trabaje fuera del rango de diseño. En este caso particular, el rango de diseño podría ser aumentado con el objetivo de que el modelo borroso cubriese todo el rango de trabajo real. En consecuencia, el diseño del sistema de control posterior, basado en el modelo borroso descrito podría tener validez en todo el rango de funcionamiento

La identificación por sectorización, a la vista de los resultados, es una herramienta de modelado sencilla y potente que permite obtener un modelo de gran precisión dentro de un rango de validez predeterminado. Por tanto, se podrá abordar la fase de diseño del sistema de control con garantías de éxito, dado que se parte de un modelo preciso y simplificado. Sin embargo, esta técnica de modelado presenta un gran inconveniente en la necesidad de conocer a priori el conjunto de ecuaciones no lineales que describen el proceso, ya que en la mayoría de sistemas complejos resulta difícil la obtención de

dichas ecuaciones. Este hecho limita considerable su aplicación en un amplio espectro de procesos.

Los resultados presentados en la figura 4.5 han sido obtenidos mediante la implementación en *Simulink* (Matlab) de los modelos no lineales descritos en la ecuación 4.2-5 y el sistema borroso. Las figuras 4.6. 4.7 y 4.8, muestran la implementación en *Simulink*.

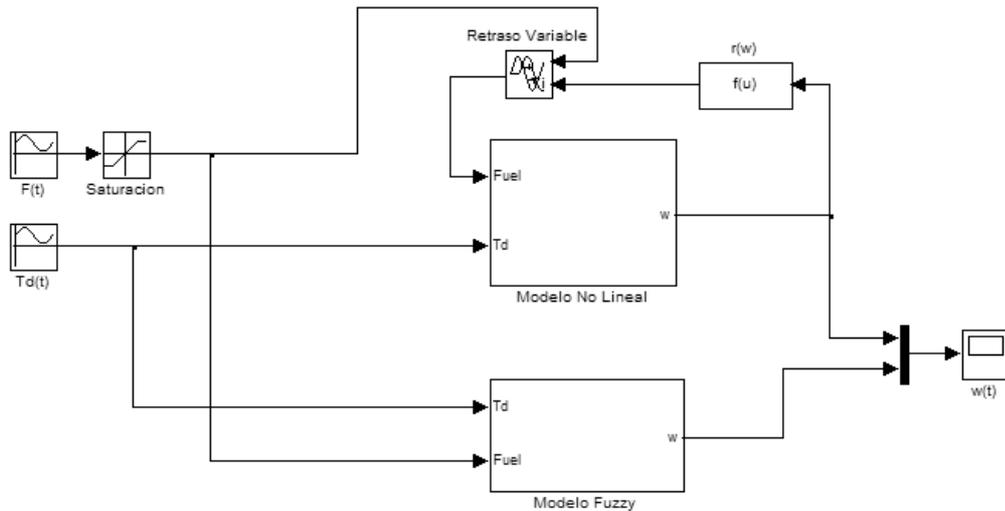


FIGURA 4.6: Comparativa Modelo No lineal vs Modelo Borroso.

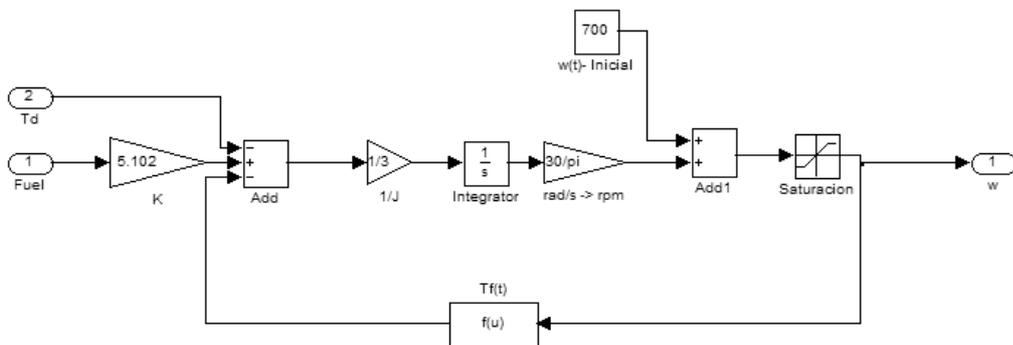


FIGURA 4.7: Modelo No Lineal.

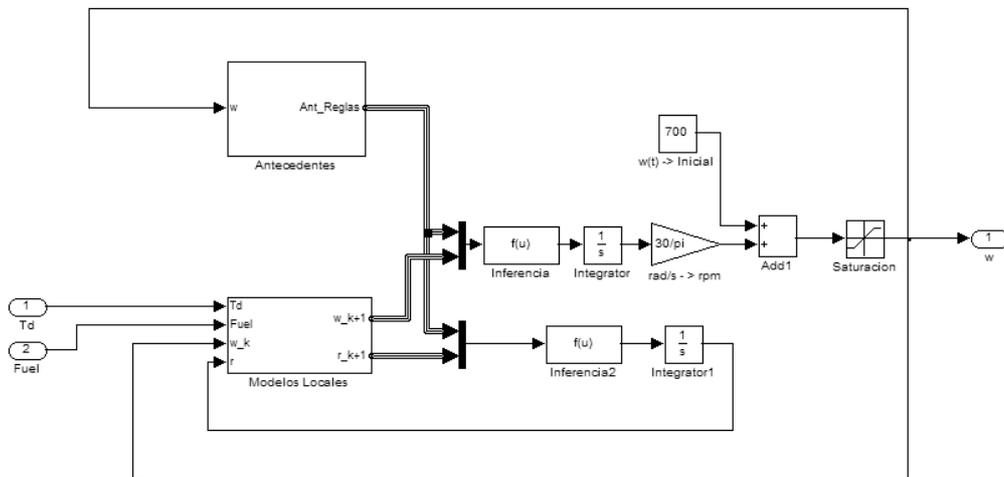


FIGURA 4.8: Modelo Borroso.

4.3 Aplicación de *Product Space Clustering*

La sección anterior muestra la obtención de modelos Fuzzy con estructura Takagi-Sugeno a partir de una descripción física basada en primeros principios del proceso. Por tanto, la sectorización no lineal necesita del conocimiento del conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que describen el sistema [Tanaka & Wang 2001]. Sin embargo, esta información no siempre se encuentra disponible. En muchas ocasiones el sistema es tan complejo y/o desconocido para los ingenieros, que se deben plantear técnicas de identificación a partir de datos experimentales obtenidos del proceso [Babuska 1998][Ljung 1999][Abonyi 2003]. El ejemplo que se describe a continuación plantea este caso, cómo modelar el proceso de renovación de la carga en un motor diesel turboalimentado a partir de datos experimentales [García-Nieto & Martínez 2007]. Por tanto, se asume el desconocimiento de las ecuaciones dinámicas en primeros principios que describen el comportamiento del sistema. Por ello, se hará uso de un conjunto de datos experimentales obtenidos a partir de ensayos realizados en laboratorio. En particular, los datos que se emplean en la identificación provienen de ensayos reales realizados a un vehículo diesel turboalimentado en los laboratorios del *Centro de Motores Térmicos de la Universidad Politécnica de Valencia*. Las características del vehículo empleado se describen a continuación:

- Motor Diesel PSA (Grupo Peugeot-Citröen)
- 1600 cc., 4 cilindros en línea y 2 válvulas/cilindro
- 1000 kg de peso
- Radio de Compresión 18.3:1

- Máxima potencia: 78.75 kW
- Common rail de inyección directa
- Válvula electrónica *EGR*
- Válvula de geometría variable a la entrada de la turbina *VGT*

Los datos experimentales, empleados en este ejemplo, han sido obtenidos sometiendo a un vehículo comercial a los tests de homologación *Euro 4* [Union 2003]. Estos tests se realizan para validar el cumplimiento de la normativa en cuanto a emisiones de contaminantes. A continuación se presenta la respuesta del vehículo descrito anteriormente, sometido al test *Euro 4*. Las figuras 4.9 y 4.10 muestran la respuesta temporal de las principales variables, que intervienen en el proceso de renovación de la carga, al someter al vehículo especificado al test *Euro 4*.

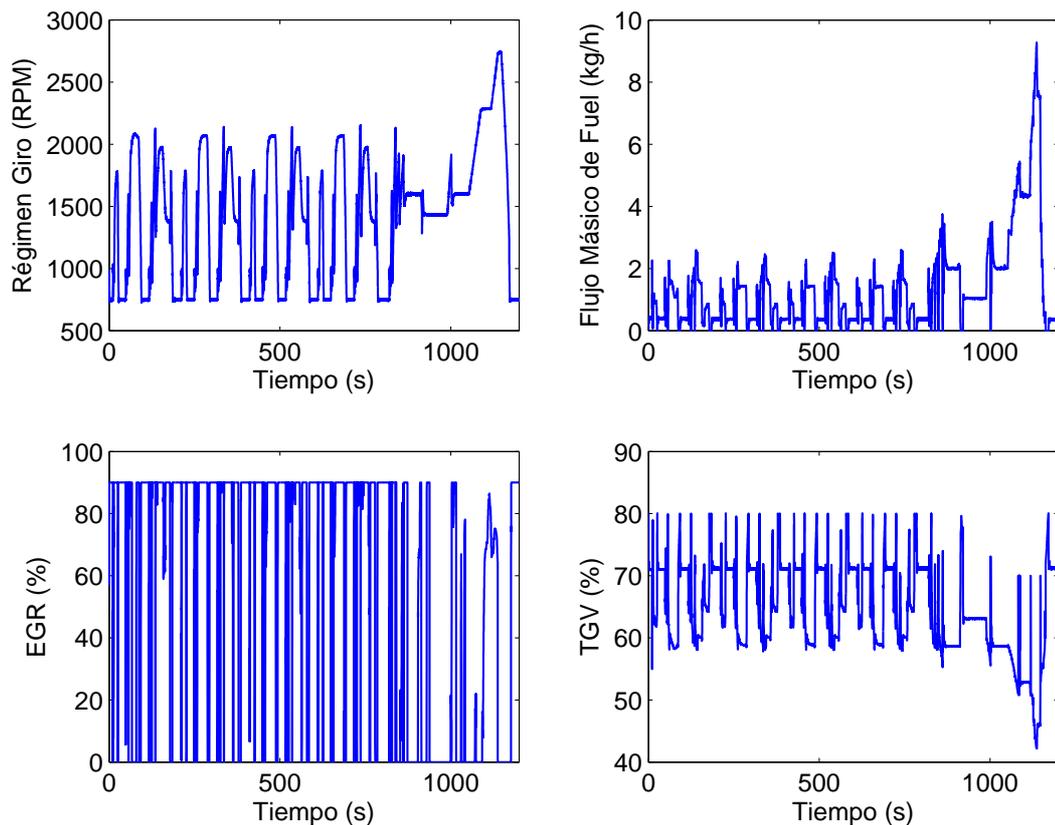


FIGURA 4.9: Variables de Entrada - Renovación de la Carga.

El conjunto de datos experimentales, mostrados en las figuras 4.9 y 4.10, serán el punto de partida para la aplicación del esquema de identificación propuesto en el capítulo 3. Éste consta de 5 pasos fundamentales, tal y como se puede apreciar en el diagrama de la figura 6.1 que resume el proceso de identificación.

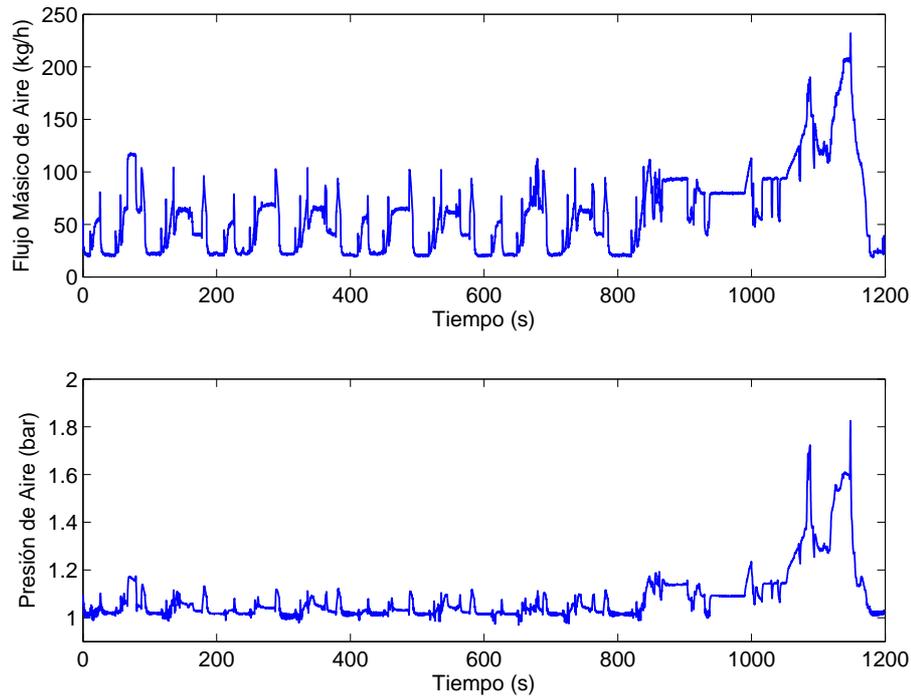


FIGURA 4.10: Variables de Salida - Renovación de la Carga.

4.3.1 Selección de la estructura

El punto de partida para la identificación experimental es la selección de los parámetros fundamentales. Estos fijan la estructura del modelo TS que se obtendrá como resultado del proceso de identificación. Los parámetros a seleccionar son:

- Las variables del modelo. Tanto desde el punto de vista de entrada-salida, como de las variables que intervienen en el antecedente y consecuente de las reglas borrosas.
- La estructura de los consecuentes. Por tanto, la aproximación dinámica de cada modelo local.
- El número de reglas del modelo, las cuales vienen definidas por el número de clusters establecidos. La especificación de un conjunto determinado de reglas determina de manera directa la complejidad y precisión del modelo.

En primer lugar, las variables que intervienen en el proceso de renovación de la carga, desde un punto de vista de entrada-salida, se muestran en el diagrama de la figura 4.12.

En segundo lugar, la estructura de los consecuentes de las reglas TS se definen mediante modelos afines MISO con estructura NARX¹. Donde la ecuación 6.1-1 determina la relación dinámica existente entre las variables de entrada del sistema, valores anteriores y las salidas.

¹ Nonlinear Autoregressive Exogenous Model: $y(k) = F\{y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-m)\}$

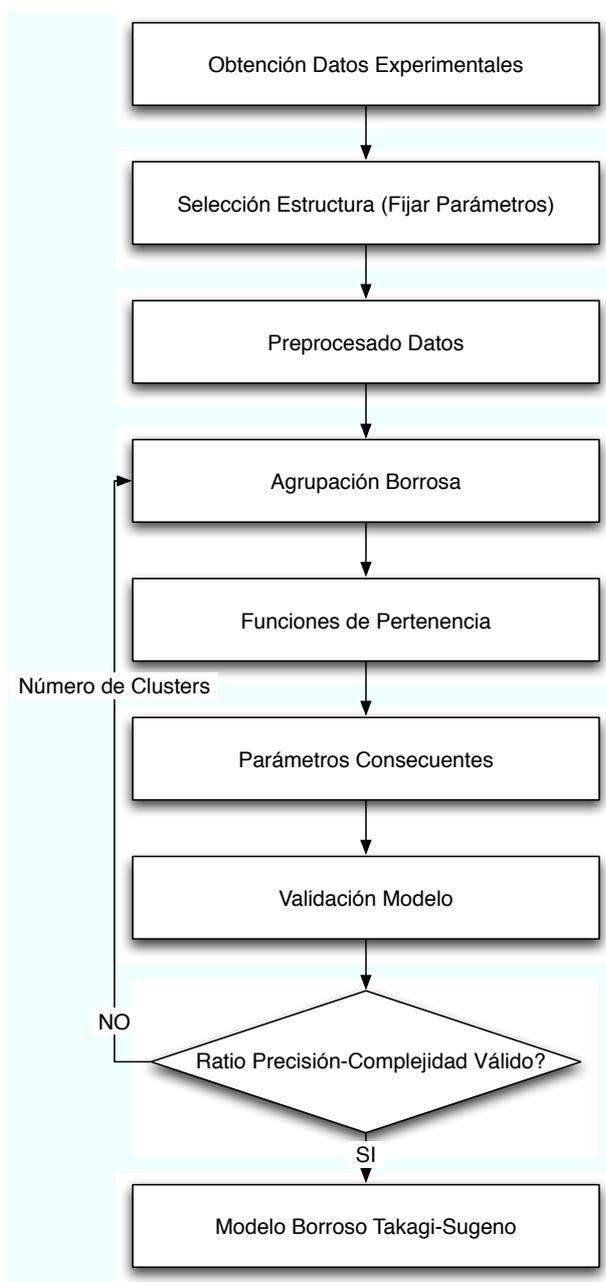


FIGURA 4.11: Etapas del proceso de identificación



FIGURA 4.12: Esquema Variables Renovación de la Carga.

$$\begin{aligned} \dot{m}_a(k) = & a_1\dot{m}_a(k-1) + a_2\dot{m}_a(k-2) + a_3p_a(k-1) + a_4p_a(k-2) + \\ & + b_1RPM(k-1) + b_2\dot{m}_f(k-1) + b_3EGR(k-1) + b_4TGV(k-1) + c_1 \end{aligned} \quad (4.3-1)$$

$$\begin{aligned} p_a(k) = & a_5\dot{m}_a(k-1) + a_6\dot{m}_a(k-2) + a_7p_a(k-1) + a_8p_a(k-2) + \\ & + b_5RPM(k-1) + b_6\dot{m}_f(k-1) + b_7EGR(k-1) + b_8TGV(k-1) + c_2 \end{aligned}$$

Por último, se ha fijado el número de clusters en un valor igual a 3. Es decir, se obtendrán tres reglas TS por cada una de las salidas del modelo. Este valor es el resultado de un proceso iterativo de prueba error, donde el objetivo es encontrar el equilibrio entre precisión y complejidad del modelo. En este caso particular, se ha determinado que 3 reglas proporcionan el mejor ratio precisión-complejidad.

En conclusión, a la vista de los parámetros seleccionados, la estructura de los antecedentes de las reglas serán definidos conforme a las ecuaciones 4.3-2 y 4.3-5.

SALIDA \dot{m}_a

$$\begin{aligned} \text{REGLA 1:} \quad & \mathbf{Si} \quad \dot{m}_a(k-1) \mathbf{Es} \ A_{11} \ \mathbf{Y} \ \dot{m}_a(k-2) \mathbf{Es} \ A_{12} \ \mathbf{Y} \ p_a(k-1) \mathbf{Es} \ A_{13} \ \mathbf{Y} \\ & \mathbf{Y} \ p_a(k-2) \mathbf{Es} \ A_{14} \ \mathbf{Y} \ RPM(k-1) \mathbf{Es} \ A_{15} \ \mathbf{Y} \ \dot{m}_f(k-1) \mathbf{Es} \ A_{16} \ \mathbf{Y} \\ & \mathbf{Y} \ EGR(k-1) \mathbf{Es} \ A_{17} \ \mathbf{Y} \ TGV(k-1) \mathbf{Es} \ A_{18} \ \mathbf{Entonces} \end{aligned} \quad (4.3-2)$$

$$\begin{aligned} \text{REGLA 2:} \quad & \mathbf{Si} \quad \dot{m}_a(k-1) \mathbf{Es} \ A_{21} \ \mathbf{Y} \ \dot{m}_a(k-2) \mathbf{Es} \ A_{22} \ \mathbf{Y} \ p_a(k-1) \mathbf{Es} \ A_{23} \ \mathbf{Y} \\ & \mathbf{Y} \ p_a(k-2) \mathbf{Es} \ A_{24} \ \mathbf{Y} \ RPM(k-1) \mathbf{Es} \ A_{25} \ \mathbf{Y} \ \dot{m}_f(k-1) \mathbf{Es} \ A_{26} \ \mathbf{Y} \quad (4.3-3) \\ & \mathbf{Y} \ EGR(k-1) \mathbf{Es} \ A_{27} \ \mathbf{Y} \ TGV(k-1) \mathbf{Es} \ A_{28} \ \mathbf{Entonces} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{REGLA 3:} \quad & \mathbf{Si} \quad \dot{m}_a(k-1) \mathbf{Es} \ A_{31} \ \mathbf{Y} \ \dot{m}_a(k-2) \mathbf{Es} \ A_{32} \ \mathbf{Y} \ p_a(k-1) \mathbf{Es} \ A_{33} \ \mathbf{Y} \\ & \mathbf{Y} \ p_a(k-2) \mathbf{Es} \ A_{34} \ \mathbf{Y} \ RPM(k-1) \mathbf{Es} \ A_{35} \ \mathbf{Y} \ \dot{m}_f(k-1) \mathbf{Es} \ A_{36} \ \mathbf{Y} \quad (4.3-4) \\ & \mathbf{Y} \ EGR(k-1) \mathbf{Es} \ A_{37} \ \mathbf{Y} \ TGV(k-1) \mathbf{Es} \ A_{38} \ \mathbf{Entonces} \end{aligned}$$

SALIDA p_a

REGLA 4: Si $\dot{m}_a(k-1)$ Es A_{11} Y $\dot{m}_a(k-2)$ Es A_{12} Y $p_a(k-1)$ Es A_{13} Y

Y $p_a(k-2)$ Es A_{14} Y $RPM(k-1)$ Es A_{15} Y $\dot{m}_f(k-1)$ Es A_{16} Y

Y $EGR(k-1)$ Es A_{17} Y $TGV(k-1)$ Es A_{18} **Entonces**

REGLA 5: Si $\dot{m}_a(k-1)$ Es A_{21} Y $\dot{m}_a(k-2)$ Es A_{22} Y $p_a(k-1)$ Es A_{23} Y

Y $p_a(k-2)$ Es A_{24} Y $RPM(k-1)$ Es A_{25} Y $\dot{m}_f(k-1)$ Es A_{26} Y (4.3-6)

Y $EGR(k-1)$ Es A_{27} Y $TGV(k-1)$ Es A_{28} **Entonces**

REGLA 6: Si $\dot{m}_a(k-1)$ Es A_{31} Y $\dot{m}_a(k-2)$ Es A_{32} Y $p_a(k-1)$ Es A_{33} Y

Y $p_a(k-2)$ Es A_{34} Y $RPM(k-1)$ Es A_{35} Y $\dot{m}_f(k-1)$ Es A_{36} Y (4.3-7)

Y $EGR(k-1)$ Es A_{37} Y $TGV(k-1)$ Es A_{38} **Entonces**

4.3.2 Datos de Regresión

Una vez se ha seleccionado la estructura del modelo se debe calcular la matriz Z , a partir de la matriz de regresión X y el vector y de regresores. Las ecuaciones 4.3-8, 4.3-9 y 4.3-10 muestran el vector y , la matriz X y la matriz Z empleados en este caso particular.

$$X^T = \begin{bmatrix} \dot{m}_a(2) & \dot{m}_a(3) & \dots & \dot{m}_a(N-1) \\ \dot{m}_a(1) & \dot{m}_a(2) & & \dot{m}_a(N-2) \\ p_a(2) & p_a(3) & & p_a(N-1) \\ p_a(1) & p_a(2) & & p_a(N-2) \\ RPM(2) & RPM(3) & \ddots & RPM(N-1) \\ \dot{m}_f(2) & \dot{m}_f(3) & & \dot{m}_f(N-1) \\ EGR(2) & EGR(3) & & EGR(N-1) \\ TGV(2) & TGV(3) & \dots & TGV(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.3-8)$$

$$y = \begin{bmatrix} \dot{m}_a(3) & p_a(3) \\ \dot{m}_a(4) & p_a(4) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{m}_a(N) & p_a(N) \end{bmatrix} \quad (4.3-9)$$

$$Z^T = \begin{bmatrix} X & y \end{bmatrix} \quad (4.3-10)$$

4.3.3 Agrupación Borrosa

La matriz Z , obtenida en el apartado anterior, y el número de clusters c deseados, son los dos elementos necesarios para poder generar una agrupación borrosa a partir de los datos experimentales. En particular, se emplea el algoritmo Gustafson-Kessel (GK) [Gustafson & Kessel 1979], el cual proporciona la matriz de partición borrosa (U), la matriz de centros de los clusters (V) y la matriz de covarianzas de los conjuntos borrosos (F).

Las tablas 4.1 y 4.2 muestra la matrices V que representa los centros de los clusters generados para cada uno de los modelos MISO (2 modelos, uno por cada salida).

CUADRO 4.1: Centros de los los clusters para la variables de salida \dot{m}_a

c	$\dot{m}_a(k-1)$	$\dot{m}_a(k-2)$	$p_a(k-1)$	$p_a(k-2)$	$RPM(k-1)$	$\dot{m}_f(k-1)$	$EGR(k-1)$	$TGV(k-1)$
1	27.2	27.3	1.02	1.02	872	0.526	87.5	69.8
2	60.8	60.7	1.06	1.06	1770	1.43	83.1	61.2
3	91.7	91.6	1.15	1.14	1580	1.86	2.46	60.9

CUADRO 4.2: Centros de los clusters para la variable de salida p_a

c	$\dot{m}_a(k-1)$	$\dot{m}_a(k-2)$	$p_a(k-1)$	$p_a(k-2)$	$RPM(k-1)$	$\dot{m}_f(k-1)$	$EGR(k-1)$	$TGV(k-1)$
1	26.0	26.1	1.02	1.02	847	0.499	88.4	70.0
2	61.4	61.4	1.06	1.06	1780	1.43	82.0	61.3
3	91.0	90.9	1.14	1.14	1570	1.82	2.99	61.1

Las matrices F y U no se presentan en este apartado por una cuestión de espacio, ya que la dimensión de estas matrices son del orden del número de datos muestreados.

4.3.4 Funciones de Pertenencia de los Antecedentes

Las funciones de pertenencia de los antecedentes se calculan analíticamente a partir de las matrices F , U y V calculadas en el apartado anterior. El procedimiento de cálculo

se detalla en el capítulo 3. Las figuras 4.13 y 4.14 muestran las funciones de pertenencia obtenidas a partir del proceso de agrupamiento aplicado.

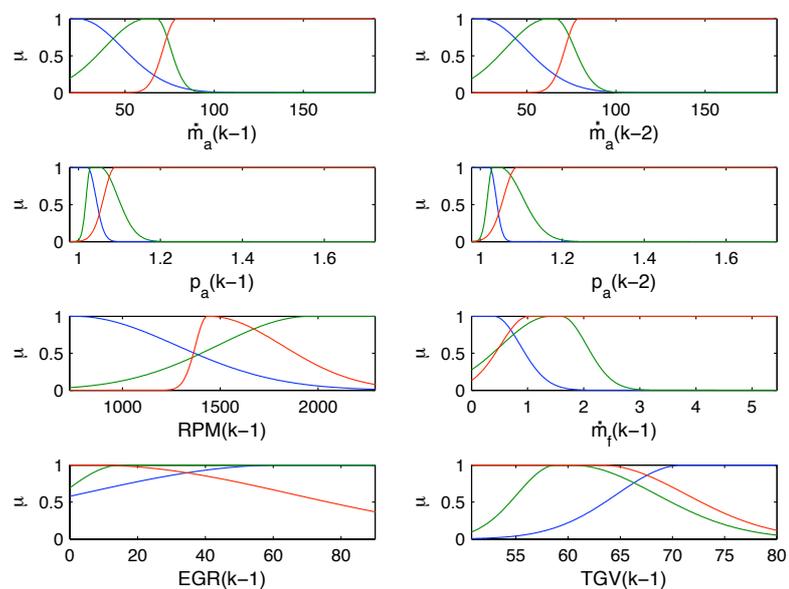


FIGURA 4.13: Funciones de Pertenencia de los Antecedentes de la variable \dot{m}_a .

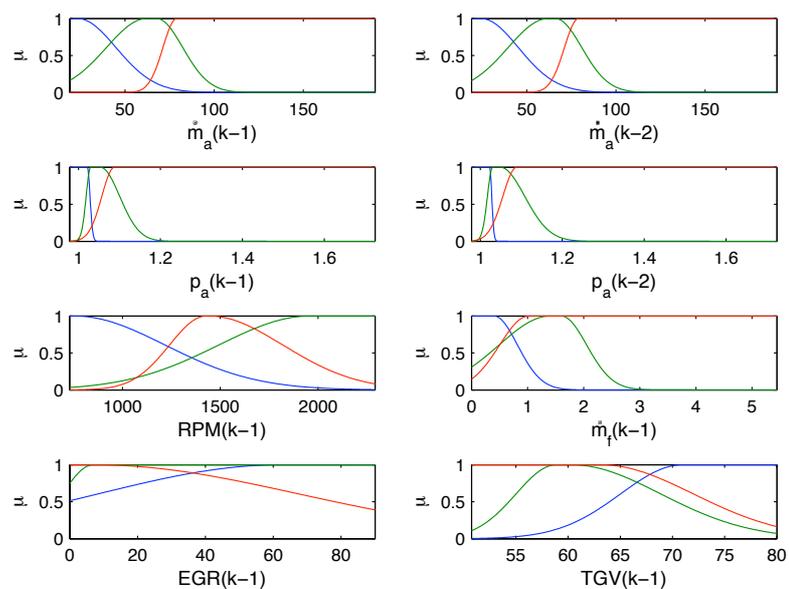


FIGURA 4.14: Funciones de Pertenencia de los Antecedentes de la variable p_a .

4.3.5 Parámetros de los Consecuentes

Los parámetros de los consecuentes descritos en la ecuación 6.1-1 son estimados empleando mínimos cuadrados ponderados [Grewal & Glover 1976]. En particular, se resuelve la ecuación 4.3-11, donde X_e se define como $X_e = [X \ 1]$, W_i se define como una matriz diagonal con dimensión $R^{N \times N}$ y que contiene el grado de pertenencia de μ_{ik} .

$$\Theta_i = [X_e^T W_i X_e]^{-1} X_e^T W_i y \quad (4.3-11)$$

Por tanto, a partir de los datos experimentales y de las funciones de pertenencia obtenidas en el apartado anterior, se obtiene el modelo TS descrito por las ecuaciones 4.3-12, 4.3-15 y las tablas 4.3 y 4.4.

SALIDA \dot{m}_a

REGLA 1 : **Si** $\dot{m}_a(k-1)$ **Es** A_{11} **Y** $\dot{m}_a(k-2)$ **Es** A_{12} **Y** $p_a(k-1)$ **Es** A_{13} **Y**

Y $p_a(k-2)$ **Es** A_{14} **Y** $RPM(k-1)$ **Es** A_{15} **Y** $\dot{m}_f(k-1)$ **Es** A_{16} **Y**

Y $EGR(k-1)$ **Es** A_{17} **Y** $TGV(k-1)$ **Es** A_{18} **Entonces**

$$\begin{aligned} \dot{m}_a(k) = & a_{11}^1 \dot{m}_a(k-1) + a_{12}^1 \dot{m}_a(k-2) + a_{13}^1 p_a(k-1) + a_{14}^1 p_a(k-2) + \\ & + b_{11}^1 RPM(k-1) + b_{12}^1 \dot{m}_f(k-1) + b_{13}^1 EGR(k-1) + b_{14}^1 TG V(k-1) + c_{11}^1 \end{aligned} \quad (4.3-12)$$

REGLA 2 : **Si** $\dot{m}_a(k-1)$ **Es** A_{21} **Y** $\dot{m}_a(k-2)$ **Es** A_{22} **Y** $p_a(k-1)$ **Es** A_{23} **Y**

Y $p_a(k-2)$ **Es** A_{24} **Y** $RPM(k-1)$ **Es** A_{25} **Y** $\dot{m}_f(k-1)$ **Es** A_{26} **Y**

Y $EGR(k-1)$ **Es** A_{27} **Y** $TGV(k-1)$ **Es** A_{28} **Entonces**

$$\begin{aligned} \dot{m}_a(k) = & a_{21}^1 \dot{m}_a(k-1) + a_{22}^1 \dot{m}_a(k-2) + a_{23}^1 p_a(k-1) + a_{24}^1 p_a(k-2) + \\ & + b_{21}^1 RPM(k-1) + b_{22}^1 \dot{m}_f(k-1) + b_{23}^1 EGR(k-1) + b_{24}^1 TG V(k-1) + c_{21}^1 \end{aligned} \quad (4.3-13)$$

REGLA 3 : Si $\dot{m}_a(k-1)$ Es A_{31} Y $\dot{m}_a(k-2)$ Es A_{32} Y $p_a(k-1)$ Es A_{33} Y

$Y p_a(k-2)$ Es A_{34} Y $RPM(k-1)$ Es A_{35} Y $\dot{m}_f(k-1)$ Es A_{36} Y

$Y EGR(k-1)$ Es A_{37} Y $TGV(k-1)$ Es A_{38} **Entonces**

$$\dot{m}_a(k) = a_{31}^1 \dot{m}_a(k-1) + a_{32}^1 \dot{m}_a(k-2) + a_{33}^1 p_a(k-1) + a_{34}^1 p_a(k-2) +$$

$$+ b_{31}^1 RPM(k-1) + b_{32}^1 \dot{m}_f(k-1) + b_{33}^1 EGR(k-1) + b_{34}^1 TGK(k-1) + c_{31}^1 \quad (4.3-14)$$

SALIDA p_a

REGLA 4 : Si $\dot{m}_a(k-1)$ Es A_{11} Y $\dot{m}_a(k-2)$ Es A_{12} Y $p_a(k-1)$ Es A_{13} Y

$Y p_a(k-2)$ Es A_{14} Y $RPM(k-1)$ Es A_{15} Y $\dot{m}_f(k-1)$ Es A_{16} Y

$Y EGR(k-1)$ Es A_{17} Y $TGV(k-1)$ Es A_{18} **Entonces**

$$p_a(k) = a_{11}^2 \dot{m}_a(k-1) + a_{12}^2 \dot{m}_a(k-2) + a_{13}^2 p_a(k-1) + a_{14}^2 p_a(k-2) +$$

$$+ b_{11}^2 RPM(k-1) + b_{12}^2 \dot{m}_f(k-1) + b_{13}^2 EGR(k-1) + b_{14}^2 TGK(k-1) + c_{11}^2 \quad (4.3-15)$$

REGLA 5 : Si $\dot{m}_a(k-1)$ Es A_{21} Y $\dot{m}_a(k-2)$ Es A_{22} Y $p_a(k-1)$ Es A_{23} Y

$Y p_a(k-2)$ Es A_{24} Y $RPM(k-1)$ Es A_{25} Y $\dot{m}_f(k-1)$ Es A_{26} Y

$Y EGR(k-1)$ Es A_{27} Y $TGV(k-1)$ Es A_{28} **Entonces**

$$p_a(k) = a_{21}^2 \dot{m}_a(k-1) + a_{22}^2 \dot{m}_a(k-2) + a_{23}^2 p_a(k-1) + a_{24}^2 p_a(k-2) +$$

$$+ b_{21}^2 RPM(k-1) + b_{22}^2 \dot{m}_f(k-1) + b_{23}^2 EGR(k-1) + b_{24}^2 TGK(k-1) + c_{21}^2 \quad (4.3-16)$$

REGLA 6 : Si $\dot{m}_a(k-1)$ Es A_{31} Y $\dot{m}_a(k-2)$ Es A_{32} Y $p_a(k-1)$ Es A_{33} Y

Y $p_a(k-2)$ Es A_{34} Y $RPM(k-1)$ Es A_{35} Y $\dot{m}_f(k-1)$ Es A_{36} Y

Y $EGR(k-1)$ Es A_{37} Y $TGV(k-1)$ Es A_{38} Entonces

$$p_a(k) = a_{31}^2 \dot{m}_a(k-1) + a_{32}^2 \dot{m}_a(k-2) + a_{33}^2 p_a(k-1) + a_{34}^2 p_a(k-2) +$$

$$+ b_{31}^2 RPM(k-1) + b_{32}^2 \dot{m}_f(k-1) + b_{33}^2 EGR(k-1) + b_{34}^2 TGV(k-1) + c_{31}^2 \quad (4.3-17)$$

CUADRO 4.3: Parámetros de los consecuentes I

	a_{x1}^x	a_{x2}^x	a_{x3}^x	a_{x4}^x
a_{1x}^1	0.698	$-1.15 \cdot 10^{-1}$	2.11	10.7
a_{2x}^1	1.480	$-5.86 \cdot 10^{-1}$	-21.9	24.6
a_{3x}^1	1.480	$-5.32 \cdot 10^{-1}$	86.9	-80.0
a_{1x}^2	$5.95 \cdot 10^{-4}$	$-2.63 \cdot 10^{-4}$	0.114	0.650
a_{2x}^2	$2.91 \cdot 10^{-4}$	$-2.15 \cdot 10^{-4}$	1.290	-0.348
a_{3x}^2	$2.41 \cdot 10^{-4}$	$-1.69 \cdot 10^{-4}$	1.580	-0.612

CUADRO 4.4: Parámetros de los consecuentes II

	b_{x1}^x	b_{x2}^x	b_{x3}^x	b_{x4}^x	c_{x1}^x
$\{b, c\}_{1x}^1$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$6.14 \cdot 10^{-1}$	$-1.08 \cdot 10^{-1}$	$2.28 \cdot 10^{-1}$	-22.30
$\{b, c\}_{2x}^1$	$3.52 \cdot 10^{-3}$	$-2.74 \cdot 10^{-1}$	$-5.02 \cdot 10^{-2}$	$-1.44 \cdot 10^{-1}$	10.70
$\{b, c\}_{3x}^1$	$8.41 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-1}$	$-1.30 \cdot 10^{-2}$	$-9.91 \cdot 10^{-3}$	-4.270
$\{b, c\}_{1x}^2$	$-6.80 \cdot 10^{-6}$	$-1.36 \cdot 10^{-3}$	$-2.01 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	0.23000
$\{b, c\}_{2x}^2$	$-1.79 \cdot 10^{-6}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$	$-4.14 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-6}$	0.06090
$\{b, c\}_{3x}^2$	$-8.65 \cdot 10^{-8}$	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$-1.02 \cdot 10^{-5}$	$2.65 \cdot 10^{-4}$	0.00955

4.3.6 Implementación

Actualmente existen múltiples herramientas software que permiten realizar una implementación adecuada de la técnica de identificación empleada. En este caso, se ha empleado la *Toolbox FMID 4.0* para Matlab, desarrollada por el el Dr. R. Babuska [Babuska 1998]. Esta *Toolbox* proporciona todas las herramientas necesaria para abordar el proceso de identificación con garantías. El anexo III proporciona información detallada de las herramientas incorporados en la *Toolbox*.

4.3.7 Resultados Obtenidos

El último estadio del proceso de identificación es la comprobación de la precisión del modelo borroso obtenido. Para ello se van a realizar dos comprobaciones. En primer lugar, se comparará la respuesta del modelo con el comportamiento real del sistema, empleando el mismo conjunto de datos experimentales que se empleó en el proceso de identificación. En segundo lugar, se comparará proceso y modelo empleando un conjunto de datos experimentales de validación.

Los datos de la segunda comparativa, datos de validación, proceden de otro test *Euro 4* realizado sobre el mismo vehículo. Sin embargo, en este segundo test la masa del vehículo se ha modificado, añadiendo una masa de 100 kg. El objetivo es validar el comportamiento del modelo con este segundo paquete de datos experimentales.

Además de presentar las gráficas referentes a las comparativas de modelo y proceso, se empleará un índice que nos permita cuantificar la calidad del modelo de manera objetiva. El índice seleccionado es el denominado *VAF* (*Variance Accounted For*), que representa la varianza porcentual entre dos señales temporales. Este índice es ampliamente utilizado en la literatura dentro del ámbito de identificación de sistemas dinámicos [Verdult & Verhaegen 2000]. La ecuación 6.1-21 muestra la expresión del índice empleado.

$$VAF = 100\% \left[1 - \frac{\text{var}(y - \hat{y})}{\text{var}(y)} \right] \quad (4.3-18)$$

Donde y e \hat{y} son la salida de proceso y la salida del modelo borroso respectivamente. En el caso monovariable y e \hat{y} serán vectores, mientras que en el caso multivariable vendrán representadas por matrices. Por tanto, la evaluación de la expresión 6.1-21 en el caso de matrices se aplicará a cada columna. Es decir, se comparará dos a dos las salidas correspondientes.

La figura 6.3 muestra la segunda comparativa entre la respuesta del modelo y el proceso, empleando el conjunto de datos de validación.

El cálculo del índice *VAF*, reflejado en la tabla 6.2, permite establecer conclusiones analíticas más allá de la apreciación visual de la gráfica 6.3. Se puede apreciar como el valor del índice de precisión presenta valores superiores al 90% tanto con el conjunto de datos de identificación como el de validación. Por tanto, se puede tener una relativa seguridad de que el modelo es representativo del proceso real.

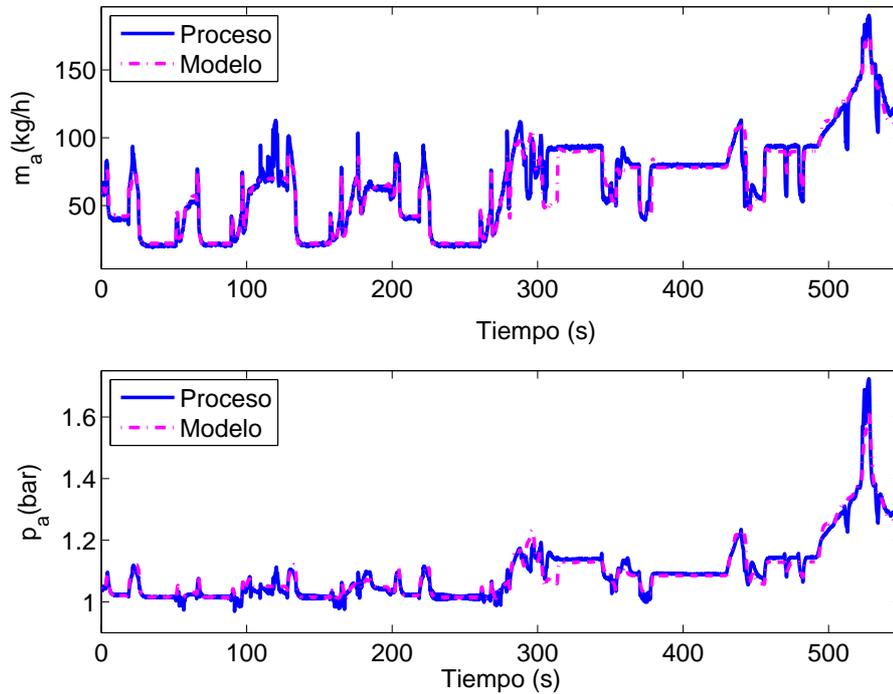


FIGURA 4.15: Comparativa Datos Validación.

CUADRO 4.5: Índice VAF(%) de los experimentos.

	\dot{m}_a	p_a
Dat. Identificación	96.9329	97.2370
Dat. Validación	93.4120	95.1030

4.4 Conclusiones

Los ejemplos de modelado expuestos en este capítulo muestran la aplicabilidad de las técnicas de sectorización no lineal y de la identificación a partir de datos experimentales mediante *product space clustering*, las cuales fueron descritas en el capítulo 3.

Los dos ejemplos presentados en este capítulo abordan el modelado de distintos subprocesos existentes en los motores diesel actuales. El estudio de este tipo de procesos se caracteriza principalmente por la dificultad existente a la hora de obtener modelos matemáticos que representen con suficiente precisión el proceso, y al mismo tiempo sean adecuados para el diseño de sistemas de control. Sin embargo, en el presente capítulo se ha mostrado como es posible abordar el problema obteniendo resultados satisfactorios haciendo uso de metodologías basadas en lógica borrosa.

Las dos técnicas de modelado propuestas se basan en la obtención de modelos borrosos con estructura Takagi-Sugeno en espacio de estados. Sin embargo, la diferencia

fundamental entre las dos técnicas de modelado presentadas es el punto de partida. La primera de ellas, la sectorización de no linealidades, parte de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que describen el comportamiento del proceso. A partir de éstas, se obtiene un modelo borroso con estructura TS válido dentro de un rango determinado, el cual es definido a priori. El modelo resultante presentará idéntico comportamiento que el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales dentro del rango de validez definido. Sin embargo, fuera de dicho rango el modelo borroso diverge del comportamiento del sistema.

La necesidad de un buen conocimiento del proceso mediante ecuaciones en el modelado mediante sectorización no lineal, cosa que no siempre es posible, resulta un gran condicionante. Esto restringe el rango de aplicabilidad de esta técnica, ya que existen multitud de procesos donde la obtención de las ecuaciones fundamentales resulta complejo y tedioso. Por otra parte, el modelado de sistemas mecánicos se presenta como uno de los campos de aplicación idóneos para esta técnica, ya que en este tipo de procesos el conocimiento del comportamiento del sistema es elevado y bien definido desde el punto de vista matemático.

La segunda técnica presentada, el modelado basada en el *product space clustering*, también persigue el objetivo de obtener una representación borrosa con estructura TS del proceso original. Sin embargo, esta técnica tiene como punto de partida conjuntos de datos experimentales procedentes del proceso, siendo radicalmente opuesto a la primera técnica, donde resulta imprescindible conocer el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que describen el sistema. Por tanto, resulta evidente que la aplicabilidad de esta segunda metodología es generalizable a cualquier proceso del cual se puedan obtener datos experimentales, y por tanto a un amplio espectro de procesos.

La cuestión fundamental en esta segunda técnica es el uso de técnicas de agrupación borrosa a partir de las cuales se pueden obtener el conjunto de reglas borrosas del sistema. El conjunto de clusters o grupos definen directamente el número de reglas y por tanto la precisión y complejidad del modelo. Por otra parte, el ejemplo presentado plantea el uso de un índice denominado VAF con el objetivo de comprobar la precisión de los modelos obtenidos. Este índice muestra como el resultado obtenido en el segundo ejemplo presenta una precisión satisfactoria, ya que el comportamiento dinámico del sistema real es representado adecuadamente por el modelo borroso.

Por último, destacar que los modelos obtenidos en los dos ejemplos resultan equivalentes desde el punto de vista estructural, por lo que se pueden emplear las mismas técnicas de diseño de controladores en ambos casos. En conclusión, se han podido obtener modelos aptos para diseñar sistemas de control y que representan satisfactoriamente el comportamiento dinámico de procesos reales de dificultad contrastada y difíciles de manejar con técnicas clásicas de modelado e identificación.

Bibliografía

- ABONYI, J. 2003. *Fuzzy Model Identification for Control*.
- BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.
- GARCÍA-NIETO, J. V. SALCEDO S., & MARTÍNEZ, M. 2007. Identificación y Control Fuzzy en Motores Diesel Turboalimentados. *XXVIII Jornadas de Automática*, Sep.
- GARCÍA-NIETO, S., MARTÍNEZ, M., BLASCO, X., & SANCHIS, J. 2008. Nonlinear predictive control based on local model networks for air management in diesel engines. *Control Engineering Practice*.
- GREWAL, M. S., & GLOVER, K. 1976. Identifiability of Linear and Nonlinear Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Dec.
- GUSTAFSON, DE, & KESSEL, WC. 1979. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. *Proc. IEEE CDC*, 2, 761-766.
- KAO, M., & MOSKWA, J.J. 1995. Turbocharged Diesel Engine Modeling for Nonlinear Engine Control and State Estimation. *Transaction of ASME*, 117(Mar).
- LJUNG, L. 1999. *System Identification. Theory for the user. Second Edition*.
- SONG, Q., & GRIGORIADIS, K.M. 2003 (Jun). Diesel Engine Speed Regulation Using Linear Parameter Varying Control.
- STEFANOPOULOU, A.G., KOLMANOVSKY, I., & FREUDENBERG, J.S. 2000. Control of Variable Geometry Turbocharged Diesel Engines for Reduced Emissions. *IEEE Transactions Control Systems Technology*, 8(4).
- TAKAGI, T., & SUGENO, M. 1985. Fuzzy Identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybern*, 15, 116-132.
- TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.
- UNION, EUROPEAN. 2003. Emission Standards: European Union. www.dieselnet.com/standards/eu/ld.html.
- VERDULT, V., & VERHAEGEN, M. 2000. Identification of multivariable linear parameter-varying systems based on subspace techniques. vol. 2.

Parte **III**

**Estado del Arte: Control Borroso
mediante LMIs**

CAPÍTULO 5

Control Borroso PDC y Predictivo

"La ingeniería de control se define como la disciplina de la ingeniería que se centra en el modelado matemático de sistemas de diversa naturaleza, analizando su comportamiento dinámico. Así mismo, se emplea la teoría de control para el diseño de un controlador que modifique la respuesta dinámica y estática del sistema para un comportamiento deseado".

Wikipedia - The Free Encyclopedia

5.1 Introducción

La posibilidad de representar sistemas no lineales complejos de manera compacta y con relativa precisión ha hecho de los modelos Takagi-Sugeno una herramienta muy empleada, ya que en general, resulta complejo y tedioso la obtención de modelos no lineales. Por ello, el diseño de sistemas de control basados en modelos borrosos TS ha supuesto una línea de investigación muy activa desde la publicación de [Takagi & Sugeno 1985].

En este capítulo se pretende mostrar algunas de las técnicas existentes en la literatura que permiten diseñar sistemas de control empleando modelos TS. En particular, se realizará una descripción partiendo de técnicas de carácter generalista, como puede ser el diseño de controladores PDC¹ descritos en profundidad en en [Tanaka & Sugeno 1992], [Wang *et al.* 1995] y [Kang *et al.* 1998], para concluir con una visión de distintas alternativas para el diseño de controladores predictivos borrosos.

¹PDC es el acrónimo del anglicismo *Parallel Distributed Compensator*.

En primer lugar, como ya se ha indicado, se describe el diseño de controladores borrosos PDC, los cuales presentan una estructura de diseño muy interesante, que permite realizar un estudio exhaustivo y detallado de la estabilidad del conjunto controlador-modelo en bucle cerrado. El estudio y caracterización de la estabilidad de este tipo de sistemas es viable mediante la formulación y resolución de las denominadas LMIs², por ello, también se realiza una breve introducción a los conceptos más interesantes de éstas.

La utilización de una herramienta tan potente como las LMIs abre un abanico de posibilidades muy interesante a la hora de diseñar los sistemas de control borroso con estructura PDC. Una de estas posibilidades es la utilización de índices de coste con el objetivo de obtener leyes de control óptimas respecto algún criterio de diseño.

La última parte del capítulo presentará algunas de las aportaciones existentes en el diseño de controladores borrosos predictivos, con el objetivo de analizar las ventajas e inconvenientes que presentan las distintas alternativas. De este modo, la última parte del capítulo servirá de preámbulo a las aportaciones que se exponen a partir del capítulo 7 de la presente tesis.

5.2 Controladores Borrosos PDC

Una de las metodologías de diseño basada en modelos TS más empleada en la literatura es el diseño de controladores denominados *Compensadores Distribuidos Paralelos* (PDC). Este tipo de controladores fueron enunciados por primera vez en [Sugeno & Kang 1986]. Sin embargo, hasta la publicación de [Tanaka & Sugeno 1992] en 1992, el análisis riguroso de estabilidad del sistema en bucle cerrado empleando un controlador PDC no fue desarrollado. El trabajo citado mejora el proceso de diseño y se describe en detalle las herramientas matemáticas necesarias para el análisis de estabilidad.

El controlador PDC ofrece un procedimiento de diseño bien definido a partir de un modelo TS existente. Evidentemente, el primer paso es obtener dicho modelo borroso del sistema expresado según la ecuación (5.2-1), tal y como se presentó en el capítulo 2

REGLA i :

Si $z_1(k)$ Es M_{i1} Y \dots Y $z_p(k)$ Es M_{ip} Entonces (5.2-1)

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A_i X(k) + B_i U(k) \\ Y(k) &= C_i X(k) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

²LMI es el acrónimo del anglicismo *Linear Matrix Inequalities*.

Donde los M_{ij} definen los conjuntos borrosos de pertenencia de las variables $z_p(k)$, r es el número de reglas del modelo y, las matrices A_i , B_i y C_i definen el modelo en espacio de estados de los consecuentes. Por tanto, la salida de los modelos borrosos TS puede ser inferida según las ecuaciones:

$$X(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))(A_i X(k) + B_i U(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k))(A_i X(k) + B_i U(k)) \quad (5.2-2)$$

$$Y(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))(C_i X(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k))(C_i X(k)) \quad (5.2-3)$$

Donde,

$$\mathbf{z}(k) = [z_1(k) \cdots z_p(k)]$$

$$w_i(\mathbf{z}(k)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(k)) \quad (5.2-4)$$

$$h_i(\mathbf{z}(k)) = \frac{w_i(\mathbf{z}(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))}$$

La ecuación (5.2-1) expresa de manera formal, la capacidad de los modelos borrosos TS de representar la dinámica existente en distintas regiones del espacio de estados mediante el empleo de modelos lineales locales. Aprovechando esta característica, en [Wang *et al.* 1995] se propone el diseño de un controlador para cada uno de los modelos locales que componen el sistema borroso, como metodología para diseñar un controlador global basado en modelos TS. Por tanto, el controlador que se propone (PDC) presenta la misma estructura borrosa que el modelo TS original y con ello el número de reglas, funciones de pertenencia y premisas en los antecedentes. Sin embargo, los consecuentes son modificados, donde originalmente existía un modelo local, ahora se define la ley de control local correspondiente diseñada con el objetivo de gobernar el modelo local pertinente. La figura 5.1 muestra un esquema conceptual del diseño de controladores PDC.

En general, la ley de control que gobierna cada uno de los modelos lineales locales puede presentar cualquier estructura. Sin embargo, en [Tanaka & Wang 2001] se distingue entre controladores PDC y DPDC. Los primeros se caracterizan por tener una estructura clásica de realimentación del vector de estado conocido u observado [Ogata 1998]. Por otra parte, los controladores DPDC presentan leyes de control dinámicas definidas

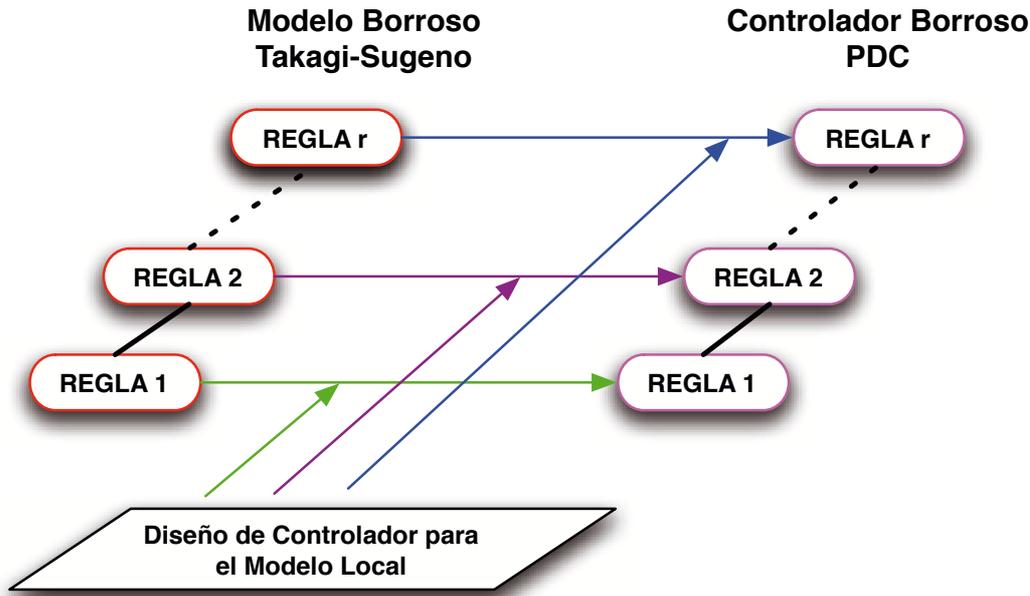


FIGURA 5.1: Diagrama Conceptual para el diseño de controladores PDC.

en espacio de estados y, donde la complejidad puede ser elevada [Tanaka & Wang 2001]. Sin embargo, en este trabajo sólo se utilizarán los controladores PDC, ya que todos los estados son medibles y, dado que, el modelo en espacio de estados que se emplea se obtiene a partir de datos de entrada salida tal y como se describe en el capítulo 3 y 4.

La ecuación (5.2-5) describe la estructura del controlador PDC a partir de un modelo TS en el cual se emplea la de realimentación del estado.

REGLA i :

$$\text{Si } z_1(k) \text{ Es } M_{i1} \text{ Y } \dots \text{ Y } z_p(k) \text{ Es } M_{ip} \text{ Entonces} \quad (5.2-5)$$

$$U(k) = -K_i X(k) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Donde los M_{ij} definen los conjuntos borrosos de pertenencia de las variables $z_p(k)$, r es el número de reglas del modelo y, K_i son las matrices de realimentación del estado en cada regla. Por tanto, la acción de control global del controlador PDC puede ser inferida como:

$$U(k) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))(K_i X(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))} = -\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k))(K_i X(k)) \quad (5.2-6)$$

El objetivo de diseño de este tipo de controladores es obtener el conjunto de ganancias K_i (ver ecuación (5.2-5)) que gobiernen los modelos lineales locales y, a su vez, estabilicen el sistema de manera global. Precisamente, la necesidad de conocer el comportamiento global del sistema en bucle cerrado requiere el estudio de estabilidad del conjunto, tal y como se muestra en la siguiente sección.

5.3 Condiciones de Estabilidad

Las condiciones de estabilidad de los sistemas borrosos han sido estudiadas de manera intensiva a lo largo de la década de los 90, destacan trabajos como [Tanaka & Sugeno 1992], [Kawamoto *et al.* 1992], [Wang *et al.* 1995], [Kang *et al.* 1998] o [Tanaka & Wang 2001].

La extensión de la teoría de Lyapunov [Jankovic *et al.* 2000] al análisis de estabilidad de sistemas borrosos es uno de los métodos más empleados. En [Tanaka & Wang 2001] se emplea este criterio para desarrollar todo el análisis de estabilidad para sistemas TS, que culmina con el teorema 5.3.1, el cual se enuncia a continuación:

TEOREMA 5.3.1 *El punto de equilibrio de un sistema borroso descrito según la ecuación (5.2-1) con acción de control $U(k)=0$ es asintóticamente estable de manera global si existe una matriz P definida positiva común para todos los modelos lineales locales definidos en el modelo TS tal que*

$$A_i^T P A_i + P < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (5.3-1)$$

El siguiente paso es aplicar este resultado de estabilidad cuando se analiza el conjunto modelo proceso-controlador en bucle cerrado. Para ello, se debe emplear el modelo del sistema borroso discreto expresado por las ecuaciones (5.2-2) y (5.2-3), donde $U(k)$ es substituido por la ecuación (5.2-5) característica del controlador PDC discreto, obteniendo la expresión (5.3-2):

$$X(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k)) h_j(z(k)) (A_i - B_i K_j) X(k) \quad (5.3-2)$$

Si se define $A_i - B_i K_j$ como $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ se obtiene la ecuación (5.3-2) como:

$$X(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(k)) G_{ii} X(k) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(k)) h_j(z(k)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} X(k) \quad (5.3-3)$$

Aplicando la condición de estabilidad enunciada en el teorema 5.3.1 a la ecuación (5.3-3) se deriva el teorema 5.3.2.

TEOREMA 5.3.2 *El equilibrio de un sistema borroso descrito según la ecuación (5.3-3) es asintóticamente estable de manera global si existe una matriz P definida positiva común para todos los modelos lineales locales definidos en el modelo TS tal que,*

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0,$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P < 0, \quad (5.3-4)$$

$$i = 1, 2, \dots, r \quad i < j \text{ sujeto a } h_i \cap h_j \neq \emptyset$$

La demostración de los teoremas 5.3.1 y 5.3.2 se encuentra descrita de manera exhaustiva en [Tanaka & Wang 2001]. Asimismo, en dicho trabajo se propone la resolución de las desigualdades propuestas en los teoremas 5.3.1 y 5.3.2 mediante la transformación de las mismas en desigualdades matriciales lineales, conocidas como LMIs. Por ello, el siguiente apartado tratará de describir los conceptos más importantes asociados a esta potente herramienta matemática, así como su empleo en teoría de control.

5.3.1 Definición de LMI

Los problemas de optimización numérica llamados desigualdades matriciales lineales (LMIs) han sido objeto de un intensivo estudio y análisis en la última década [Boyd *et al.* 1987]. La aplicabilidad de esta técnica de optimización es diversa, sin embargo, su gran potencial reside en la capacidad de resolver problemas de optimización convexa complejos en un tiempo polinomial. Este hecho convierte a las LMIs en una herramienta potente y robusta.

Una LMI es una expresión de la forma [Boyd *et al.* 1987]:

$$F(X) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m X_i F_i > 0 \quad (5.3-5)$$

donde $X \in \Re^m$ es el vector de incógnitas y las matrices simétricas $F_i = F_i^T \in \Re^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ vienen dadas. El símbolo $>$ de la desigualdad indica que $F(X)$ es una matriz definida positiva. Por definición, la anterior LMI se denomina estricta, no obstante también se puede considerar LMIs no estrictas utilizando el símbolo \geq en lugar de $>$.

Una de las principales propiedades de las LMIs es que definen un conjunto de restricciones que forman un espacio convexo sobre el vector de incógnita X , es decir, el conjunto $F \triangleq X : F(X) > 0$ es convexo.

Uno de los conceptos matemáticos más utilizados a la hora de expresar ciertas desigualdades en términos de LMIs es el denominado *Complemento de Schur* [Boyd *et al.* 1987], el cual se puede enunciar así:

$$\text{Dada la LMI: } \begin{bmatrix} Q(X) & S(X) \\ S(X)^T & R(X) \end{bmatrix} > 0 \quad (5.3-6)$$

es equivalente a:

$$R(X) > 0, Q(X) - S(X)R(X)^{-1}S(X)^T > 0 \quad (5.3-7)$$

o:

$$Q(X) > 0, R(X) - S(X)^TQ(X)^{-1}S(X) > 0 \quad (5.3-8)$$

El complemento Schur es muy útil cuando se quieren expresar mediante LMIs desigualdades que presentan alguna no linealidad en sus parámetros. Las ecuaciones (5.3-7) y (5.3-8) muestran como manejar dichas no linealidades y obtener una expresión LMI con la estructura matricial de la ecuación (5.3-6).

Por otra parte, las herramientas software existentes para la resolución de LMIs, ya sean problemas de resolubilidad (ecuación (5.3-11)) o de optimización (ecuación (5.3-12)), son variadas. La presente tesis hará uso del *Toolbox YALMIP* que proporciona una interfaz muy intuitiva para la definición de LMIs en el entorno de programación *Matlab*. Asimismo se hará uso de la librería *Sedumi*, la cual implementa un potente algoritmo para la resolución de este tipo de problemas. El software empleado puede ser descargado en las siguientes direcciones web:

- *Matlab de Mathworks*: <http://www.mathworks.com>
- *YALMIP*: <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php>
- *Sedumi*: <http://sedumi.mcmaster.ca/>

5.3.2 LMIs en Ingeniería de Control

La utilización de LMIs dentro del campo de la ingeniería de sistemas y de control ha experimentado una gran aceptación. El éxito de esta metodología reside metodología en la posibilidad de reformular un gran abanico de problemas clásicos de control en términos de LMIs, con la consiguiente capacidad de ser resueltos mediante los potentes algoritmos numéricos existentes basados en métodos de punto interior [Forsgren *et al.* 2002]. Por tanto, la reformulación de problemas de control en un conjunto de desigualdades lineales matriciales, proporciona una resolución numérica eficiente a problemas de control que tienen difícil solución analítica.

Existen dos problemas que destacan significativamente dentro de la resolución de problemas de control mediante LMIs:

■ **Condición de Estabilidad de Lyapunov**

La utilización de LMIs en la resolución de la condición de estabilidad de Lyapunov, planteada mediante inecuaciones en el ámbito de sistemas discretos, es uno de los ejemplos típicos de la aplicación de LMIs en el campo de la ingeniería de control.

El sistema discreto que se considera viene descrito por la ecuación:

$$X(k + 1) = AX(k) \tag{5.3-9}$$

Donde $X(k) \in R$ y la matriz A define el comportamiento dinámico del sistema discreto.

Por otra parte, se supone la existencia de una función escalar continua denominada $V(X(k))$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $V(0) = 0$,
2. $V(X(k)) > 0$ para $X(k) \neq 0$,
3. $\Delta V(X(k)) < 0$ para $X(k) \neq 0$

Si se satisfacen todas las condiciones anteriores, se puede afirmar que el sistema será asintóticamente estable para toda k , donde el punto de equilibrio será el origen. Donde $V(X(k))$ será considerada una función de Lyapunov.

La formulación de la condición de estabilidad mediante LMIs parte de la definición de la función escalar $V(X(k))$ tal y como muestra la ecuación siguiente:

$$V^*(X(k)) = X(k)^T P X(k) \tag{5.3-10}$$

Obviamente la función V^* definida satisface la primera condición. A continuación se establece la inecuación definida en la tercera condición, haciendo uso de la ecuación del sistema discreto (5.3-9).

$$\begin{aligned} \Delta V^*(X(k)) < 0 &\Leftrightarrow V^*(X(k + 1)) - V^*(X(k)) < 0 \\ &= X^T(k)(A^T P A - P)X(k) < 0 \Leftrightarrow A^T P A - P < 0 \end{aligned} \tag{5.3-11}$$

Donde el sistema discreto $X(k + 1) = AX(k)$ es asintóticamente estable *si y sólo si* existe una matriz P definida positiva que verifique la condición anterior. La exigencia de una matriz P definida positiva satisface la segunda condición. Como puede observarse, la desigualdad de la ecuación (5.3-11) puede considerarse como una LMI cuyo vector de incógnitas contiene los elementos no repetidos de la matriz P . Por tanto, si el problema planteado mediante (5.3-11) es resoluble, el sistema discreto $X(k + 1) = AX(k)$ será asintóticamente estable, y viceversa.

■ **Problemas de Optimización**

Otra aplicación usual de las LMIs, muy extendida en el ámbito de ingeniería de

control, es el planteamiento de problemas de optimización asociados a funciones o índices de coste, los cuales pueden expresar desde especificaciones de diseño de los controladores, hasta medidas de calidad o coste económico.

$$\text{Minimizar : } g(X) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.3-12)$$

sujeto a la LMI:

$$F(X) > 0 \quad (5.3-13)$$

si la función $g(X)$ es convexa, dado que la LMI es convexa, el problema de optimización anterior será convexo y, por tanto, tendrá un único mínimo global.

5.4 Diseño de Controladores Borrosos mediante LMIs

La definición de modelos no lineales mediante estructuras borrosas TS, unido al diseño de los correspondientes controladores mediante LMIs, genera un marco de trabajo muy interesante, ya que es posible tratar de manera sistemática los sistemas dinámicos no lineales cuando estos se representan mediante modelos borrosos TS.

A continuación, se presenta el proceso de diseño para obtener controladores PDC que satisfagan distintas especificaciones. En primer lugar, se describe el diseño de un controlador PDC únicamente estabilizante. En segundo lugar, además de estabilizar el sistema en bucle cerrado, el controlador será óptimo con respecto a un índice de coste definido por el diseñador. Por último, se describen otras especificaciones de diseño que pueden ser descritas mediante LMIs y, además, pueden ser empleadas junto con los diseños anteriores.

5.4.1 Controlador Borroso PDC Estabilizante

El diseño de un controlador PDC estabilizante persigue la obtención del conjunto de matrices de realimentación K_i para cada uno de los subsistemas lineales definidos en la ecuación (5.2-3) y, que además, satisfaga la condición de estabilidad impuesta mediante el teorema 5.3.2. Por ello, además de obtener las matrices K_i , se debe obtener la matriz P que sea común a todos los subsistemas. La obtención de las distintas matrices incógnita del problema de estabilidad se realizará planteando un conjunto de LMIs, siguiendo los pasos descritos en el apartado anterior e introducidos en [Tanaka & Wang 2001].

En primer lugar, se debe analizar la dependencia con respecto a las variables K_i y P_i de la ecuación (5.3-4) del teorema 5.3.2. Dicha dependencia determina un espacio no

convexo que no puede ser expresado mediante LMIs. Por ello, se debe introducir nuevas variables con el objetivo de obtener un problema que si pueda ser expresado mediante un conjunto de LMIs. En primer lugar, se define $F = P^{-1}$ y se multiplica a ambos lados de la ecuación (5.3-4) por F , pudiendo reescribir las condiciones de estabilidad como:

$$F(A_i - B_i K_i)^T F^{-1}(A_i - B_i K_i)F - F < 0, \quad (5.4-1)$$

$$F \left(\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right)^T F^{-1} \left(\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right) F - F \leq 0$$

A continuación, se define $M_i = K_i F$, donde $K_i = M_i F^{-1}$ para $F > 0$. Si se sustituye en la ecuación (5.4-1) se obtiene:

$$F - (A_i F - B_i M_i)^T F^{-1}(A_i F - B_i M_i) > 0, \quad (5.4-2)$$

$$F - F \left(\frac{A_i F - B_i M_j + A_j F - B_j M_i}{2} \right)^T F^{-1} \left(\frac{A_i F - B_i M_j + A_j F - B_j M_i}{2} \right) F \geq 0$$

Las nuevas condiciones definidas por las ecuación (5.4-2) pese a ser no lineales, sí definen un espacio convexo, y pueden ser expresadas mediante LMIs gracias al complemento Schur, tal y como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} F & F A_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i F - B_i M_i & F \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5.4-3)$$

$$\begin{bmatrix} F & \left(\frac{A_i F + A_j F - B_i M_j - B_j M_i}{2} \right)^T \\ \left(\frac{A_i F + A_j F - B_i M_j - B_j M_i}{2} \right) & F \end{bmatrix} \geq 0, \quad i < j, \text{ sujeto a } h_i \cap h_j \neq \emptyset \quad (5.4-4)$$

Por tanto, el diseño de un controlador PDC estabilizante pasa por resolver las LMIs descritas en las ecuaciones (5.4-3) y (5.4-4), con el objetivo de encontrar una $F > 0$ y las matrices M_i para $i = 1, 2, \dots, r$.

5.4.2 Controlador PDC Óptimo

El diseño de sistemas de control basados en la optimización de índices es una técnica bien conocida y con un amplio espectro de aplicación. El principal atractivo de esta técnica reside en la posibilidad de obtener un controlador óptimo respecto a cierto criterio, garantizando al mismo tiempo la estabilidad del sistema en bucle cerrado. Los criterios empleados para el diseño pueden ser muy diversos, desde comportamientos en la respuesta dinámica del sistema, hasta la formulación de índices que expresen algún tipo de coste económico o energético.

Los primeros diseños de controladores óptimos hacen referencia a la resolución de la ecuación algebraica de Riccati [Molinari 1975; Ogata 1998], donde los modelos empleados tienen estructura lineal. Sin embargo, la generalización de esta técnica para sistemas no lineales no resulta sencillo, ya que para estos sistemas el diseño del controlador óptimo pasa por la resolución de ecuaciones no lineales en derivadas parciales. Actualmente, existe un gran interés en el desarrollo de nuevos métodos numéricos que permitan resolver este tipo de ecuaciones, sin embargo, sigue resultando complicado obtener resultados satisfactorios.

Una posible vía a la generalización del diseño óptimo en sistemas no lineales son las propuestas descritas en [Li *et al.* 2000] y [Tanaka & Wang 2001], donde el sistema se representa mediante modelos TS (ecuaciones (5.2-1), (5.2-2) y (5.2-3)). La idea principal que subyace en esta propuesta, es el diseño de un controlador PDC (ecuación (5.2-5)) a partir del modelo TS del sistema y basado en la resolución de un problema de optimización definido mediante un índice, generalmente cuadrático, cuya minimización proporciona una cota superior al problema [Li *et al.* 2000]. La ventaja de este planteamiento es la posibilidad de expresar el problema mediante LMIs, garantizando la resolución del problema en tiempo polinomial [Boyd *et al.* 1987].

Por ejemplo, se puede plantear la minimización de un índice cuadrático de tipo LQR, expresado mediante la ecuación (5.4-5).

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)^T Q X(k) + U(k)^T R U(k) \quad (5.4-5)$$

sujeto a la dinámica del proceso:

$$X(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) A_i X(k) + B_i U(k) \quad (5.4-6)$$

Para el diseño del controlador borroso discreto óptimo pertinente, se puede plantear un conjunto de LMIs que definen el problema de optimización, empleando una versión simplificada del teorema 25 introducido en [Tanaka & Wang 2001], cuyo enunciado es:

TEOREMA 5.4.1 *Las matrices de realimentación que minimizan una cota superior del índice de coste (5.4-5) para el sistema definido por la ecuación (5.4-6), pueden ser obtenidas resolviendo un problema de minimización sujeto a LMIs. En concreto, se garantiza que $J < X^T(0) P X(0) < \gamma$ al resolver el siguiente problema de minimización,*

$$\underset{F, M_1, \dots, M_r}{\text{Minimizar}} \quad \gamma \quad (5.4-7)$$

Sujeto a:

$$F > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & X^T(0) \\ X(0) & F \end{bmatrix} > 0, \quad (5.4-8)$$

$$\begin{bmatrix} Aux_1 & FC_i^T & -M_i^T \\ C_i F & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5.4-9)$$

$$\begin{bmatrix} Aux_2 & FC_i^T & -M_j^T & FC_j^T & -M_i^T \\ C_i F & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -M_j & 0 & -R^{-1} & 0 & 0 \\ C_j F & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i > j \text{ s.a. } h_i \cap h_j \neq \emptyset \quad (5.4-10)$$

Donde,

$$Aux_1 = \begin{bmatrix} F & FA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i F - B_i M_i & F \end{bmatrix} \quad (5.4-11)$$

$$Aux_2 = \begin{bmatrix} F & G_{ij}^T \\ G_{ij} & F \end{bmatrix}, \quad (5.4-12)$$

$$G_{ij} = \frac{(A_i F + A_j F - B_i M_j - B_j M_i)}{2} \quad (5.4-13)$$

Las matrices de realimentación del estado se extraen a partir de la solución de las LMIs como

$$K_i = M_i F^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5.4-14)$$

donde las matrices Q y R representan las matrices de ponderación de los vectores de estado y acciones de control respectivamente. La demostración matemática del teorema 6.2.1 se detalla en [Li *et al.* 2000], [Tanaka & Wang 2001] y [Zhang *et al.* 2004].

5.4.3 Otras Especificaciones de diseño

El diseño de sistemas de control mediante LMIs permite una gran flexibilidad a la hora de imponer especificaciones de diseño, de hecho, a priori se pueden exigir tantas especificaciones como se deseen, siempre y cuando éstas se formulen mediante LMIs, pudiendo

incorporar la nueva expresión matricial al conjunto ya existente. Sin embargo, no cabe duda, que cuanto mayores exigencias se planteen en el diseño mayor requerimiento computacional existirá, asimismo la probabilidad de obtener una solución factible será menor.

A continuación se describen algunas de las posibles especificaciones de diseño que son habituales en el diseño de sistemas borrosos mediante LMIs, todas ellas se encuentran descritas y justificadas matemáticamente en [Tanaka & Wang 2001].

5.4.3.1 Tasa de Convergencia (Decay Rate)

La tasa de convergencia, conocido en la literatura anglosajona como Decay Rate, se basa en el planteamiento de un problema de optimización conocido como *the largest Lyapunov exponent*. La minimización de la tasa de convergencia que se plantea en dicho problema de optimización, permite controlar cualitativamente el tiempo de respuesta del sistema en bucle cerrado. El punto de partida del diseño es la obtención de un controlador fuzzy PDC que garantice la estabilidad del sistema, tal y como se indica en el teorema 10 introducido en [Tanaka & Wang 2001]. A continuación se exige que la función de Lyapunov satisfaga la ecuación (5.4-15) para todas las trayectorias del sistema.

$$\Delta V(k) \leq (\alpha^2 - 1)V(k), \quad \alpha < 1, \quad \Rightarrow V(k+1) \leq \alpha^2 V(k), \quad (5.4-15)$$

La condición reflejada en la ecuación (5.4-15) muestra como se fuerza el cumplimiento de la condición de estabilidad con un descenso geométrico de la función de Lyapunov $V(K)$. Asimismo, dicha condición puede ser traducida en términos de LMIs, dando lugar al teorema 5.4.2.

TEOREMA 5.4.2 *El sistema borroso discreto expresado mediante las ecuaciones (5.2-2) y (5.2-3), en bucle cerrado con el controlador PDC de la ecuación (5.2-5), es asintóticamente estable de manera global y garantiza un decay rate menor o igual que α^2 , si existe una matriz P definida positiva, común a todos los subsistemas que verifique:*

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P G_{ii} - \alpha^2 P < 0, \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) - \alpha^2 P \leq 0, \quad i < j \text{ s.a } h_i \cap h_j \neq 0 \end{aligned} \quad (5.4-16)$$

donde,

$$\begin{aligned} \alpha < 1, \quad G_{ii} = A_i - B_i K_i, \\ G_{ij} = A_i - B_i K_j, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 2, 3, \dots, r \end{aligned} \quad (5.4-17)$$

Si se desea minimizar el decay rate (α^2), y a la vista del teorema 5.4.2, es necesario resolver un problema generalizado de minimización de valores propios (GEVP)

[Tanaka & Wang 2001], dado el producto entre las variables α^2 y P . Sin embargo, la relación entre estas dos variables no establece la necesidad de resolver un problema BMI³, ya que en realidad este tipo de problemas de minimización se definen como quasi-convexo [Boyd *et al.* 1987] y pueden ser resueltos iterativamente. Por ejemplo, se puede emplear un método clásico como el de la bisección, teniendo que resolver el conjunto de LMIs pertinente en cada iteración.

A continuación las ecuaciones (5.4-18), (5.4-19) y (5.4-20), muestran el problema de minimización del Decay Rate siguiendo un método similar al aparatado 5.4.1.

$$\underset{F, M_1, \dots, M_r}{\text{Minimizar}} \beta \quad (5.4-18)$$

Sujeto a:

$$F > 0, \quad \begin{bmatrix} \beta F & FA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i F - B_i M_i & F \end{bmatrix} > 0, \quad (5.4-19)$$

$$\begin{bmatrix} \beta F & \left\{ \frac{A_i F + A_j F - B_i M_j - B_j M_i}{2} \right\}^T \\ \left\{ \frac{A_i F + A_j F - B_i M_j - B_j M_i}{2} \right\} & F \end{bmatrix} < 0, \quad (5.4-20)$$

$i > j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \phi$

donde,

$$\beta = \alpha^2, \quad P = F^{-1}, \quad M_i = K_i F \quad (5.4-21)$$

Las matrices de realimentación se obtienen con la siguiente expresión:

$$K_i = M_i F^{-1} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5.4-22)$$

Otra posible opción de diseño, sería no plantear la minimización de β y que el diseñador establezca un valor determinado entre 0 y 1. Asimismo, cabría la opción de un ajuste por prueba y error por parte del diseñador, de manera que se podría ajustar el Decay Rate deseado de manera manual.

5.4.3.2 Restricciones en la acción de control

Las restricciones en las acciones de control resulta una especificación de diseño muy interesante, ya que los actuadores reales que se emplean en los sistema de control, presentan rangos de actuación finitos. Por tanto, poder tener en cuenta estas limitaciones

³BMI: Bilinear Matrix Inequalities.

en la etapa de diseño del controlador resulta una gran ventaja. Esta especificación también puede ser expresada mediante LMIs, por lo que se puede emplear de forma aditiva a cualquiera de los diseños presentados hasta el momento. El teorema 5.4.3 enunciado en [Tanaka & Wang 2001] incorpora tal especificación.

TEOREMA 5.4.3 *Supóngase que el vector de estados iniciales $X(0)$ es conocido. La restricción de la acción de control se define como $\|U(k)\|_2 \leq \mu$ para todo $k \geq 0$, donde su representación mediante LMIs es,*

$$\begin{bmatrix} 1 & X(0)^T \\ X(0) & F \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.4-23)$$

$$\begin{bmatrix} F & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.4-24)$$

donde $F = P^{-1}$ and $M_i = K_i F$

5.4.3.3 Restricciones en la salida

La definición de restricciones en las variables de salida puede ser interesante para limitar el sistema dentro de puntos de seguridad o que garanticen ciertos niveles de coste energético o económico. Por ello, siguiendo el planteamiento propuesto en el teorema 5.4.3 se deduce el teorema 5.4.4 [Tanaka & Wang 2001].

TEOREMA 5.4.4 *Supóngase que el vector de estados iniciales $X(0)$ es conocido. La restricción de la acción de control se define como $\|Y(k)\|_2 \leq \lambda$ para todo $k \geq 0$, donde su representación mediante LMIs es,*

$$\begin{bmatrix} 1 & X(0)^T \\ X(0) & F \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.4-25)$$

$$\begin{bmatrix} F & FC_i^T \\ C_i F & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.4-26)$$

donde $F = P^{-1}$

5.4.3.4 Independencia del vector de estados inicial

La limitación de la formulación de las restricciones en las acciones de control y en las salidas, es la dependencia con respecto al vector de estados iniciales del sistema. En principio, el controlador que se calcula empleando los teoremas 5.4.3 y 5.4.4 debe ser

recalculado siempre que el vector de estados iniciales se modifique. Por tanto, resulta interesante añadir una nueva restricción que independice el controlador respecto de un vector de estados iniciales particular. El teorema 5.4.5 intenta dar respuesta a dicha cuestión fijando un conjunto al cual pertenece el vector de estados iniciales.

TEOREMA 5.4.5 *Asúmase que $\|X(0)\| \leq \Phi$, donde el vector de estados iniciales $X(0)$ es desconocido y, donde el límite superior del mismo es conocido y de valor Φ . En estas circunstancias se puede garantizar que,*

$$X(0)^T F^{-1} X(0) \leq 1 \quad (5.4-27)$$

Si

$$\Phi^2 \leq F \quad (5.4-28)$$

donde $F = P^{-1}$

La ecuación (5.4-27) del teorema 5.4.5 es equivalente a las LMIs determinadas en las ecuaciones (5.4-23) y (5.4-25) y, por tanto, dicha condición puede ser sustituida por la LMI (5.4-28).

5.5 Control Predictivo Borroso

La filosofía del control predictivo puede ser resumida en tres conceptos [Babuska 1998], [Cutler & Ramaker 1980], [Camacho & Bordons 2004], [Clarke *et al.* 1987a], [Richalet 1993], [Clarke *et al.* 1987b], tal y como se describe en el capítulo 1:

- Se emplea un modelo matemático para la predicción de la futura salida discreta del proceso sobre un horizonte de predicción determinado.
- Se calcula la secuencia de acciones de control futuras sobre un horizonte de control que satisfacen la minimización de un índice de coste definido por el diseñador.
- Únicamente la primera acción de control calculada en el proceso de optimización será aplicada al proceso, en el siguiente instante de muestreo se repetirán los tres pasos descritos. Este tipo de actuación se conoce como horizonte móvil.

La metodología de control predictivo empleaba, inicialmente, modelos dinámicos lineales como predictores. Sin embargo no existe ninguna restricción aparente en utilizar modelos no lineales que puedan representar con mayor fiabilidad los sistemas reales, los cuales suelen presentar una naturaleza no lineal. El objetivo es aprovechar las ventajas implícitas en el control predictivo, unido a la posibilidad de representar de manera más precisa el comportamiento dinámico del sistema.

En las últimas décadas, conceptos relacionados al modelado de sistemas dinámicos no lineales mediante sistemas borrosos TS han sido incorporados al control predictivo, dando lugar al control predictivo borroso [Babuska 1998], [Abonyi 2003], [Zhang *et al.* 2007]. Sin embargo, la utilización de este término puede llevar a equivocación, dado que en la literatura se pueden distinguir, al menos, tres definiciones distintas para el concepto de control predictivo borroso [Roubos *et al.* 1999], tal y como muestra la figura 5.2.

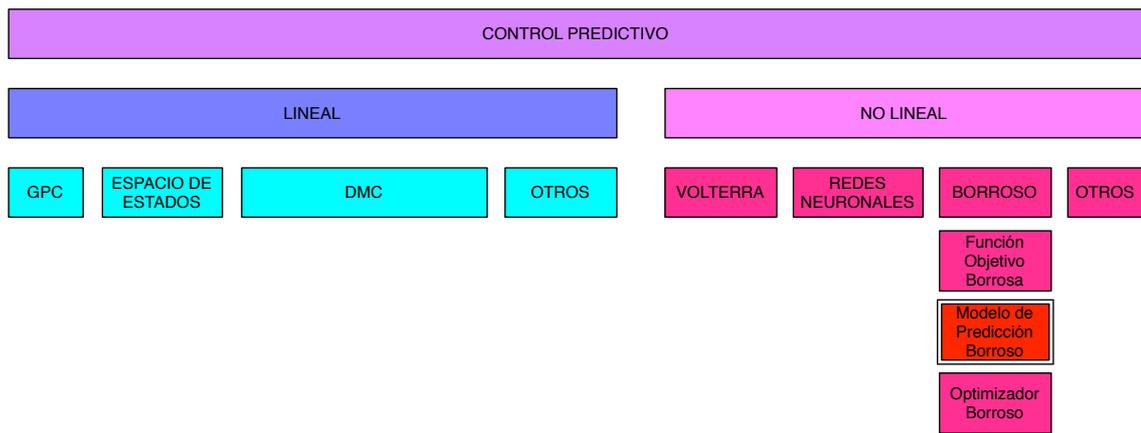


FIGURA 5.2: Alternativas existentes en la literatura basadas en el concepto de Control Predictivo.

La primera acepción empleada para el concepto de control predictivo borroso, son aquellas técnicas que emplean modelos borrosos para calcular la predicción de las salidas en el horizonte de predicción establecido [de~Oliveira & Lemos 1995; Sousa *et al.* 1999]. En segundo lugar, el control predictivo borroso también hace referencia a las metodologías que emplean restricciones e índices de coste mediante conjuntos borrosos. Generalmente, se emplean modelos lineales para la predicción del horizonte [Sousa *et al.* 1996]. Por último, las técnicas que emplean optimizadores borrosos también se suelen definir como estrategias de control predictivo borroso [Lu *et al.* 1996]. La característica principal de los optimizadores borrosos reside en que el proceso de optimización se encuentra controlado por un conjunto de reglas borrosas, de manera que se pueden incluir todo un conjunto de "decisiones" que sería difícil de generar con otros métodos de optimización.

El presente trabajo se empleará la primera acepción del término y, en particular, aquellas metodologías que emplean modelos borroso TS como representación de los procesos no lineales. Por ello, centrando el estudio en este último grupo, se pueden clasificar las distintas propuestas que se encuentran en la literatura de la siguiente manera.

- Técnicas Basadas en Optimización Convexa.
- Técnicas Basadas en Optimización No Convexa.

Obviamente, en ambos casos se dispone de un modelo del proceso expresado mediante un sistema borroso TS, un conjunto de restricciones (definidas en los estados, acciones de control y salidas), y un índice de coste el cual se pretende minimizar. Sin embargo, cada propuesta presenta diferencias en el desarrollo del modelo de predicción y la etapa posterior de optimización. No cabe duda, que resulta complicado determinar que técnicas son mejores que otras, ya que todas presentan ventajas e inconvenientes, tal y como se detallará a continuación.

5.5.1 Optimización No Convexa

Las técnicas que plantean la resolución de problemas no convexos en la etapa de optimización, se basan en la utilización del modelo TS como predictor de manera directa en el proceso de optimización. El principal inconveniente de este tipo de técnicas reside, precisamente, en la necesidad de resolver un problema de optimización no convexa en cada periodo de muestreo. En general, el cálculo del óptimo en este tipo de problemas resulta complejo y, además, con una baja probabilidad en alcanzar el óptimo global. Además, los algoritmos capaces de resolver optimizaciones no convexas presentan un elevado consumo computacional, por lo que resulta complicado emplear estas estrategias en sistemas con necesidades de tiempo real o con dinámicas rápidas.

Una posible solución al problema de optimización no convexa que se plantea es la utilización de Programación Cuadrática Secuencial (SQP) [Camacho & Bordons 2004]. Esta propuesta es una extensión de los métodos de tipo Newton para alcanzar la solución definida mediante las condiciones Karush-Kuhn-Tucker (KKT) del problema de optimización. En principio, este método garantiza la convergencia y, puede ser capaz de superar los condicionamientos numéricos debidos a los estados iniciales, así como las fuertes no linealidades. El SQP es una técnica iterativa, en cada paso se realiza una aproximación lineal de las restricciones y se reemplaza el problema de optimización por una aproximación cuadrática equivalente. Sin embargo, la aplicación práctica de este método presenta numerosos problemas derivados de la falta de factibilidad y condicionamiento numérico, los cuales han provocado que muchos autores propongan modificaciones sobre el planteamiento original con el objetivo de mejorar el comportamiento del algoritmo [Biegler 1998].

Otros métodos muy empleados en el caso de problemas de optimización no convexa son los denominados algoritmos de búsqueda estructurada, un ejemplo de este tipo de métodos es el Branch-and-Bound (B&B) [Lawler & Wood 1966; Mitten 1970]. Esta técnica se basa en el hecho de que únicamente un reducido grupo de posibles soluciones deben ser evaluadas, ya que el resto de posibilidades son eliminadas tras aplicar las restricciones existentes en el problema de optimización. El B&B se basa en la aplicación recursiva

de dos operaciones básicas, la ramificación (*branching*) y la limitación (*bounding*). La primera hace referencia a la división en subconjuntos de posibles soluciones, a continuación, se aplica la limitación que elimina aquellos subconjuntos que no satisfacen las restricciones y por tanto no pueden contener la solución. Existen en la literatura múltiples variaciones del algoritmo original [Brucker *et al.* 1999; Leyffer 2001; Somol *et al.* 2004] que persiguen superar las principales limitaciones que presentan este tipo de algoritmos, como son el aumento exponencial del coste computacional en función de las variables a optimizar, y la limitación de tener que emplear variables discretas en los antecedentes de las reglas borrosas [Babuska 1998].

5.5.2 Optimización Convexa

Esta tesis se centrará en aquellos métodos que emplean los modelos TS borrosos para calcular las predicciones del proceso, pero que sin embargo, son expresados de tal manera que requieren la resolución de un problema de optimización convexo. Uno de las primeras propuestas en esta línea fue la linealización del modelo TS, pudiendo emplear posteriormente un algoritmo de optimización clásico como por ejemplo Programación Cuadrática (QP). En general, estas técnicas obtienen acciones de control subóptimas ya que se realiza una simplificación del problema original.

La técnica que destaca dentro de las metodologías que emplean algún tipo de linealización del modelo TS es la descrita en [Babuska 1998]. La idea básica es la utilización de modelos borrosos donde las acciones de control a calcular no aparezcan en los antecedentes de las reglas, este tipo de modelos se denominan modelos afines. La ecuación (5.5-1) ilustra la estructura de los modelos borrosos afines en formulación entrada-salida:

REGLA i :

Si $Y(k)$ **Es** My_{i1} $Y \cdots Y(k - n_y + 1)$ **Es** My_{in_y}
 $Y U(k - 1)$ **Es** Mu_{i1} $Y \cdots Y U(k - n_u + 1)$ **Es** Mu_{in_u} **Entonces** (5.5-1)

$$Y(k+1) = \sum_{j=1}^{n_y} a_{ij} Y(k-j+1) + \sum_{j=1}^{n_u} b_{ij} U(k-j+1) + c_i$$

$i = 1, 2, \dots, r$

Si se aplica la expresión de desborrosificación [Takagi & Sugeno 1985], la expresión de la salida $Y(k+1)$ puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 Y(k+1) = & \sum_{j=1}^{n_y} \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i(Y(k), \dots, U(k-n_u+1)) a_{ij} \right) Y(k-j+1) + \\
 & + \sum_{j=1}^{n_u} \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i(Y(k), \dots, U(k-n_u+1)) b_{ij} \right) U(k-j+1) + \\
 & + \sum_{i=1}^r \lambda_i(Y(k), \dots, U(k-n_u+1)) a_{ij} c_i
 \end{aligned} \tag{5.5-2}$$

La ecuación (5.5-2) resultante es un caso especial de expresión no lineal con estructura afín de la forma:

$$\begin{aligned}
 Y(k+1) = & g(Y(k), \dots, U(k-1), \dots, U(k-n_u+1)) + \\
 & + h(Y(k), \dots, U(k-1), \dots, U(k-n_u+1))U(k)
 \end{aligned} \tag{5.5-3}$$

La ventaja de los modelos afines borrosos con estructura semejante a la representada en la ecuación (5.5-3), es la posibilidad de emplear ciertas técnicas de linealización, enunciadas en [Na *et al.* 2007], que garantizan la obtención de una linealización exacta y global del sistema mediante una realimentación no lineal estática. Una vez linealizado el modelo borroso es posible plantear la resolución del problema de optimización convexo mediante técnicas clásicas, como por ejemplo programación cuadrática (QP).

En los últimos años, se han propuesto algunas alternativas de diseño donde no resulta necesaria la linealización de los modelos TS y, al mismo tiempo, el problema de optimización que se plantea es de tipo convexo. Una de las propuestas actuales más interesante es el trabajo presentado [Zhang *et al.* 2007], donde se propone un diseño basado en dos etapas. En primer lugar, se calcula fuera de línea una restricción terminal y un conjunto de desigualdades que garantizan la estabilidad del diseño a partir de la definición de un índice de horizonte infinito, tal y como muestra la ecuación (5.5-4).

$$\begin{aligned}
 J_0^\infty = & \sum_{i=0}^{\infty} L(X(k+i|k), U(k+i|k)) = \\
 = & \sum_{i=0}^{\infty} L(X(k+i|k), U(k+i|k)) + \sum_{i=0}^{H-1} L(X(k+i|k), U(k+i|k))
 \end{aligned} \tag{5.5-4}$$

Donde $X(k+i|k)$ y $U(k+i|k)$ hacen referencia a los estados y acciones de control futuros, respectivamente, predichos en el instante k , empleando el modelo borroso TS descrito por las ecuaciones (5.2-2) y (5.2-3). Por otro lado, H hace referencia al horizonte de control propuesto (ver capítulo 1) y, $L(X(k+i|k), U(k+i|k)) = X(k+i|k)^T Q X(k+i|k) + U(k+i|k)^T R U(k+i|k)$.

A continuación se define una función cuadrática de la forma $V(X(k+i|k)) = X(k+i|k)^T P X(k+i|k)$ y se supone que debe satisfacer la desigualdad de estabilidad siguiente:

$$V(X(k+i+1|k)) - V(X(k+i|k)) \leq L(X(k+i|k), U(k+i|k)) \leq 0 \quad (5.5-5)$$

Si se particulariza la expresión anterior para $i \in [H, \infty]$, exigiendo que $X(\infty|k) = 0$ se establece que:

$$\sum_{i=H}^{\infty} L(X(k+i|k), U(k+i|k)) \leq V(X(k+H|k)) = X(k+H|k)^T P(k+H) X(k+H|k) \quad (5.5-6)$$

Si se sustituye la expresión en se obtiene que

$$J_0^\infty(k) \leq \sum_{i=0}^{H-1} L(X(k+i|k), U(k+i|k)) + X(k+H|k)^T P(k+H) X(k+H|k) =: \underline{J}(X(k), U(k)) \quad (5.5-7)$$

Donde $\underline{J}(X(k), U(k))$ es un límite superior para J_0^∞ . Por tanto, se puede plantear el problema de optimización equivalente que consiste en encontrar la secuencia de control que minimiza $\underline{J}(X(k), U(k))$. Por otro lado, se establece la restricción terminal como $U(k+i|k) = K_s X(k+i|k)$, $i \geq H$ que satisface $X(k+H-1|k)^T P(k+H-1) X(k+H-1|k)$ y consigue $X(\infty|k) = 0$.

La segunda fase del diseño persigue la resolución del problema de optimización que se plantea en el último estadio de la fase anterior. Es decir, encontrar la secuencia óptima de acciones de control que minimiza $\underline{J}(X(k), U(k))$. La propuesta que se encuentra descrita en [Zhang *et al.* 2007] para este problema, es la resolución mediante programación cuadrática (algoritmo QP) en cada periodo de muestreo, tal y como se haría con un controlador predictivo lineal estándar. Sin embargo, es precisamente en este punto, donde el método propuesto en [Zhang *et al.* 2007] puede presentar ciertos problemas debidos al modelo de predicción. Este inconveniente vien determinado por la formulación que se realiza del modelo de predicción a partir del modelo TS identificado, ya que no se contemplan las variaciones de los valores de las funciones de pertenencia a lo largo del horizonte de predicción. Este hecho determina que la secuencia de control que se calcula mediante el QP no será óptima respecto al modelo original, si no una simplificación del mismo.

5.6 Conclusiones

Se han descrito algunos de los conceptos básicos en el diseño de borrosos empleando modelos TS. En primer lugar, se ha presentado las ideas fundamentales del diseño de controladores PDC que, como se han comentado, presentan unas características muy

adecuadas para conseguir controladores no lineales capaces de garantizar la estabilidad del sistema en bucle cerrado [Tanaka & Wang 2001]. Además, se han introducido los conceptos necesarios para emplear las potentes LMIs en el proceso de diseño y análisis.

En segundo lugar, se han repasado algunas de las aportaciones más relevantes en la literatura referentes al diseño de controladores predictivos borrosos. Asimismo, se han diferenciado entre las distintas acepciones que presenta dicho término y se ha establecido que se empleará en el resto del trabajo. Por tanto, el concepto de controlador predictivo borroso que se empleará, hace referencia a aquellos controladores que emplean modelos TS como predictores y además plantean la resolución de problemas de optimización convexos para calcular la ley de control.

Bibliografía

ABONYI, J. 2003. *Fuzzy Model Identification for Control*.

BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.

BIEGLER, L.T. 1998 (Jun). Efficient solution of Dynamic optimization and NMPC problems.

BOYD, A. STEPHEN, GHAOUI, L. EL, FERON, E., & BALAKRISHNAN, V. 1987. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *Book*, 203.

BRUCKER, P., HILBIG, T., & HURINK, J. 1999. A branch and bound algorithm for a single-machine scheduling problem with positive and negative time. *Discrete Applied Mathematics*, Jan.

CAMACHO, E.F., & BORDONS, C. 2004. *Model Predictive Control*.

CLARKE, D.W., MOHTADI, C., & TUFFS, P.S. 1987a. Generalized Predictive Control-Part I. *Automatica*, 23(2), 137-148.

CLARKE, D.W., MOHTADI, C., & TUFFS, P.S. 1987b. Generalized Predictive Control-Part II. Extensions and Interpretations. *Automatica*, 23(2), 149-160.

CUTLER, C.R., & RAMAKER, D.L. 1980. Dynamic Matrix Control - a computer control algorithm.

DE OLIVEIRA, J., & LEMOS, J. 1995. Long-range predictive adaptive fuzzy relational control. *Fuzzy Sets and Systems*, Jan.

FORSQREN, A., GILL, P., & WRIGHT, M. 2002. Interior methods for nonlinear optimization. *SIAM Review*, Jan.

- JANKOVIC, M., JANKOVIC, M., & KOLMANOVSKY, I. 2000. Constructive Lyapunov Control Design for Turbocharged Diesel Engines. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(Mar).
- KANG, G., LEE, W., & SUGENO, M. 1998. Stability analysis of TSK fuzzy systems. *Fuzzy Systems Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*, 1(Apr), 555 - 560.
- KAWAMOTO, S., TADA, K., ISHIGAME, A., & TANIGUCHI, T. 1992. An approach to stability analysis of second order fuzzy systems.
- LAWLER, E., & WOOD, D. 1966. Branch-and-bound methods: A. survey. *Operations Research*, Jan.
- LEYFFER, S. 2001. Integrating SQP and Branch-and-Bound for Mixed Integer Nonlinear Programming. *Computational Optimization and Applications*, Jan.
- LI, J., HONG, Y., WANG, H., BUSHNELL, L., & TANAKA, K. 2000. A fuzzy logic approach to optimal control of nonlinear systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, Jan.
- LU, Y., HE, M., & XU, C. 1996. Fuzzy modeling and expert optimization control for industrial processes. *Control Systems Technology*, Jan.
- MITTEN, L. 1970. Branch-and-bound methods: General formulation and properties. *Operations Research*, Jan.
- MOLINARI, B. 1975. The stabilizing solution of the discrete algebraic riccati equation. *Automatic Control*, Jan.
- NA, W., GOU, B., & DIONG, B. 2007. Nonlinear Control of PEM Fuel Cells by Exact Linearization. *Industry Applications*, Jan.
- OGATA, K. 1998. *Ingeniería de Control Moderna*.
- RICHALET, J. 1993. Industrial Applications of Model Based Predictive Control. *Automatica*, 29(5), 1251-1274.
- ROUBOS, J., MOLLOV, S., BABUSKA, R., & VERBRUGGEN, H. 1999. Fuzzy model-based predictive control using Takagi-Sugeno models. *International Journal of Approximate Reasoning*, Jan.
- SOMOL, P., PUDIL, P., & KITTLER, J. 2004. Fast Branch & Bound Algorithms for Optimal Feature Selection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Jan.
- SOUSA, J., SETNES, M., BAPTISTA, L., & DA COSTA, J. SA. 1999. Model predictive algorithms based on fuzzy discrete alternatives. *Fuzzy Systems Conference Proceedings, 1999. FUZZ-IEEE '99. 1999 IEEE International*, 1(Jul), 228 - 233 vol.1.

- SOUSA, J.M, BABUSKA, R., BRUIJN, P., & VERBRUGGEN, H.B. 1996. Comparison of conventional and fuzzy predictive control. *Fuzzy Systems, 1996., Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on*, 3, 1782-1787 vol.3.
- SUGENO, M., & KANG, G. T. 1986. Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator. *Fuzzy Sets Systems*, 18(3), 329-345.
- TAKAGI, T., & SUGENO, M. 1985. Fuzzy Identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybern*, 15, 116-132.
- TANAKA, K., & SUGENO, M. 1992. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets Systems*, 45(2), 135-156.
- TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.
- WANG, H., TANAKA, K., & GRIFFIN, M. 1995. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *Fuzzy Systems, 1995. International Joint Conference of the Fourth IEEE International Conference on Fuzzy Systems and The Second International Fuzzy Engineering Symposium., Proceedings of 1995 IEEE International Conference on*, 2(Feb), 531 - 538 vol.2.
- ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007. Stable Model Predictive Control of Fuzzy Affine Systems with Input and State Constraints. *Fuzzy Systems Conference, 2007. FUZZ-IEEE 2007. IEEE International*, Jun, 1 - 6.
- ZHANG, X., CHENG, Z., & LIU, Q. 2004. A fuzzy logic approach to optimal control of nonlinear time-delay systems. *Intelligent Control and Automation, 2004. WCICA 2004. Fifth World Congress on*, 1, 902- 906 Vol.1.

CAPÍTULO 6

Aplicación Control Borroso Mediante LMIs

"Applied: Put into practice or a particular use. Example: representative part that demonstrates the character of the whole".

The American Heritage® Dictionary of the English Language

6.1 Introducción

Este capítulo presenta un ejemplo de diseño de un controlador borroso a partir de la teoría introducida en el capítulo 5. El ejemplo que se presenta se basa en el diseño del sistema de control para el proceso de renovación de la carga de motores turbo alimentados, dicho proceso fue descrito en detalle en el capítulo 1 e identificado mediante técnicas borrosas en el capítulo 4. De hecho, el modelo obtenido en el capítulo 4 será modificado ligeramente con el objetivo de presentar un nuevo modelo del sistema con una representación en espacio de estados. Esta modificación en la representación es necesaria para poder aplicar las técnicas borrosas de diseño de manera satisfactoria.

Tras la reformulación del modelo, se plantea el diseño de un controlador borroso óptimo basado en la estructura PDC introducida en [Sugeno & Kang 1986] y ampliamente desarrollada en [Tanaka & Wang 2001]. La idea fundamental de esta técnica es el diseño de un controlador local para cada uno de los modelos locales que se describen en los consecuentes del modelo borroso. Sin embargo, un diseño específico de cada controlador

no puede garantizar la estabilidad del sistema de manera global. En respuesta a esta necesidad y basado en los trabajos presentados en [Tanaka & Wang 2001], se propone el diseño de los parámetros de los controladores locales como la solución de un problema de minimización sujeto a LMIs.

6.1.1 Modelo Borroso Identificado

La metodología de identificación presentada en 3 se basa en los trabajos presentados en [Babuska & Verbruggen 1996] y [Babuska 1998]. Este método aplica técnicas de agrupación borrosa sobre el espacio de variables [Gustafson & Kessel 1979], [Zhao *et al.* 1994] y [Martínez & Herrera 2003]. El objetivo es la identificación de subespacios con características similares que dan lugar a un conjunto de submodelos lineales. A su vez, dichos submodelos forman parte de un modelo no lineal global mediante el empleo de un número determinado de reglas borrosas. Las funciones de pertenencia de los antecedentes de las reglas son extraídas directamente de la proyección de la matriz de pertenencia procedente del agrupamiento sobre el plano de cada una de las variables que compone el término de los antecedentes. La figura 6.1 muestra de manera esquemática, las distintas etapas que componen el método de identificación propuesto en [Babuska 1998].

En este capítulo se propone una simplificación del método original basado en el empleo de funciones de transferencia y, permite obtener una representación en espacio de estados. El método de Babuska propone que los consecuentes de las reglas sean modelos MISO (Múltiple Entrada Salida Única) con estructura NARX¹. Es decir, que en un consecuente sólo se pueda describir el comportamiento dinámico de una salida. Sin embargo, este tipo de estructura no resulta apropiada cuando se decide diseñar controladores empleando las técnicas descritas en [Tanaka & Wang 2001], basadas en empleo de modelos borrosos T-S, donde los consecuentes vienen descritos mediante representación interna (espacio de estados).

¹ Modelo No Lineal Autorregresivo con variables Exógenas: $y(k) = F\{y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-m)\}$

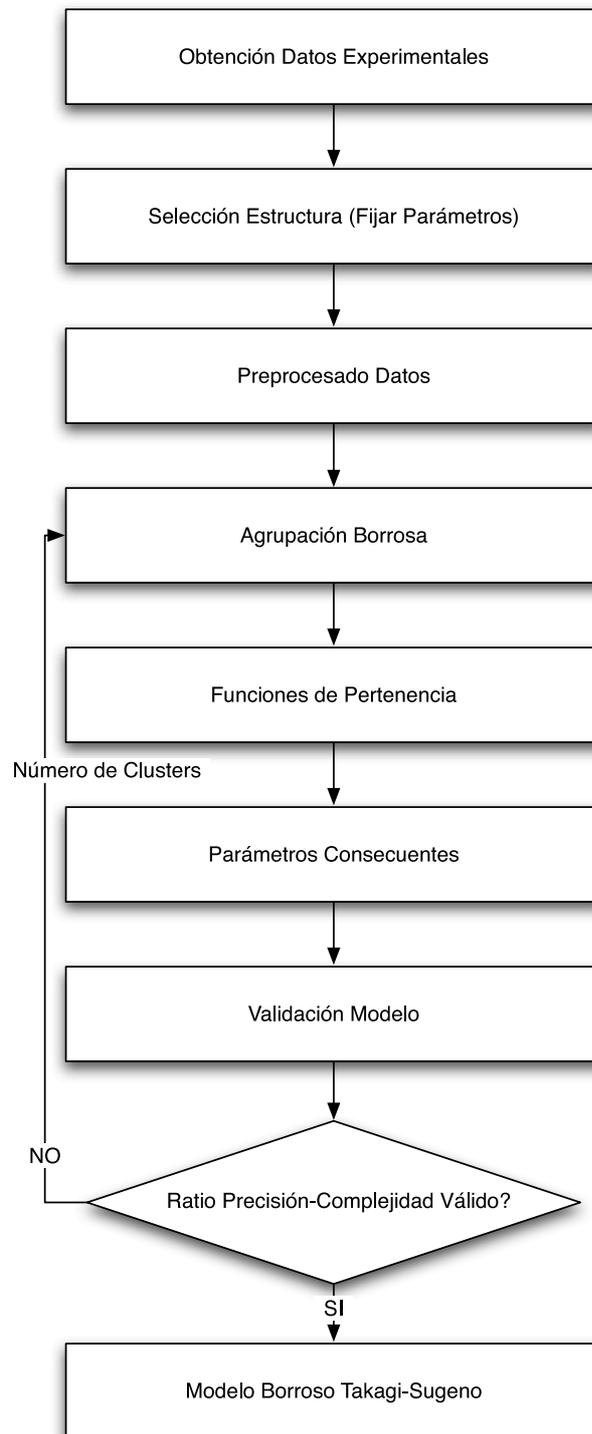


FIGURA 6.1: Etapas del proceso de identificación

La cuestión determinante, que diferencia el método de identificación de Babuska y el empleado en este artículo, es la selección de la estructura de los consecuentes. En el método original, cada salida del sistema puede tener una estructura NARX diferente del

resto de salidas del proceso, mientras que el empleo de una representación en espacio de estados, requiere que todas las salidas presenten la misma estructura, de manera que la representación global pueda ser expresada de manera matricial. Por ejemplo, para el caso del sistema de renovación de la carga se propone:

$$\begin{aligned} \dot{m}_a(k+1) = F\{\dot{m}_a(k), \dot{m}_a(k-1), p_a(k), p_a(k-1), RPM(k), \\ \dot{m}_f(k), EGR(k-1), TGV(k-1)\} \end{aligned} \quad (6.1-1)$$

$$\begin{aligned} p_a(k+1) = F\{\dot{m}_a(k), \dot{m}_a(k-1), p_a(k), p_a(k-1), RPM(k), \\ \dot{m}_f(k), EGR(k-1), TGV(k-1)\} \end{aligned} \quad (6.1-2)$$

La aplicación de esta restricción en el planteamiento de la estructura de los consecuentes, produce que el espacio de variables donde se realiza la agrupación sea el mismo en todas las salidas. Es decir, si se define una estructura dinámica distinta para cada una de las salidas de los modelos, el espacio de variables donde se realice la agrupación será muy distinto y, por tanto el conjunto de reglas y funciones de pertenencia también. Sin embargo, si todas las salidas son definidas mediante la misma estructura, el espacio de agrupamiento será similar. Por tanto, se podrá establecer un conjunto de reglas y funciones de pertenencia comunes. Asimismo, se podrá expresar el conjunto de todas las salidas mediante una estructura matricial clásica en espacio de estados, tal y como muestran en las ecuaciones (6.1-5), (6.1-6) y (6.1-7). La representación mediante espacio de estados propuesta, emplea los incrementos de las variables *EGR* y *TGV* como las acciones de control del sistema. Esta modificación respecto al esquema original hace posible el empleo de toda la metodología descrita en [Tanaka & Wang 2001], ya que como se apunta en el capítulo 2 de dicha referencia y se desarrolla exhaustivamente en [Tanaka & Sugeno 1992]; las acciones de control no deben aparecer en los antecedentes de la reglas borrosas para evitar un complejo proceso de desborrosificación que haría inviable los resultados propuestos en [Tanaka & Wang 2001].

El punto de partida para aplicar la metodología de identificación es el conjunto de datos experimentales. A partir de estos, se aplican las distintas etapas definidas en la figura 6.1, donde la estructura de los consecuentes será la determinada en la ecuación (6.1-1). Sin embargo, resulta recomendable un preprocesado de los datos con el objetivo de normalizar los rango de las variables del proceso entre -1 y 1 . El cuadro 6.1 muestra los rangos reales de las señales y las funciones de conversión empleadas.

La aplicación de las distintas etapas que constituyen la metodología de identificación que se muestran en la figura 6.1, junto con un proceso iterativo de prueba y error, permiten establecer el mejor ratio entre precisión del modelo y complejidad. El resultado es la definición de 3 únicas clases en el proceso de agrupación borrosa y, por tanto, se obtendrán un modelo borroso con estructura T-S de 3 reglas [Takagi & Sugeno 1985]. Sin

CUADRO 6.1: Normalización de las Variables.

Variable	Rango Real	Normalización - $f_n(x)$
\dot{m}_a	[0, 250] (<i>kg/h</i>)	$= 0.008 \cdot \dot{m}_a - 1$
p_a	[0.9, 2] (<i>bar</i>)	$= 1.818 \cdot p_a - 2.64$
<i>RPM</i>	[720, 3000] (<i>rpm</i>)	$= 0.001 \cdot RPM - 1.63$
\dot{m}_f	[0.9, 2] (<i>kg/h</i>)	$= 0.167 \cdot \dot{m}_f - 1$
<i>EGR</i>	[0, 100] (%)	$= 0.02 \cdot EGR - 1$
<i>TGV</i>	[0, 100] (%)	$= 0.02 \cdot TGV - 1$

embargo, en el método original de Babuska los consecuentes de cada una de las reglas son expresados mediante expresiones Entrada-Salida, con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{m}_a(k+1) = & a_1\dot{m}_a(k) + a_2\dot{m}_a(k-1) + a_3p_a(k) + a_4p_a(k-1) \\ & + b_1RPM(k) + b_2\dot{m}_f(k) + b_3EGR(k) + b_4TGV(k) + c_1 \end{aligned} \quad (6.1-3)$$

$$\begin{aligned} p_a(k) = & a_5\dot{m}_a(k) + a_6\dot{m}_a(k-1) + a_7p_a(k) + a_8p_a(k-1) \\ & + b_5RPM(k) + b_6\dot{m}_f(k) + b_7EGR(k) + b_8TGV(k) + c_2 \end{aligned} \quad (6.1-4)$$

Mientras que en el método propuesto, los consecuentes se expresan mediante representación en espacios de estados. Esta transformación de Entrada-Salida a representación interna, se consigue aplicando la forma canónica controlable [Ogata 1998], obteniendo el modelo T-S de 3 reglas siguiente:

REGLA 1 :

Si $\dot{m}_a(k)$ **Es** D_1 **Y** $\dot{m}_a(k-1)$ **Es** E_1 **Y** $p_a(k)$ **Es** F_1 **Y** $p_a(k-1)$ **Es** J_1 **Y**

$$RPM(k) \text{ Es } L_1 \text{ Y } \dot{m}_f(k) \text{ Es } M_1 \text{ Y } EGR(k-1) \text{ Es } N_1 \text{ Y } TGV(k-1) \text{ Es } Z_1 \quad (6.1-5)$$

Entonces

$$\begin{aligned} X'(k+1) &= A'_1 X'(k) + B'_1 U'(k) + \Psi_1 W(k) \\ Y(k) &= C'_1 X'(k) \end{aligned}$$

REGLA 2 :

Si $\dot{m}_a(k)$ Es D_2 Y $\dot{m}_a(k-1)$ Es E_2 Y $p_a(k)$ Es F_2 Y $p_a(k-1)$ Es J_2 Y

$RPM(k)$ Es L_2 Y $\dot{m}_f(k)$ Es M_2 Y $EGR(k-1)$ Es N_2 Y $TGV(k-1)$ Es Z_2 (6.1-6)

Entonces

$$\begin{aligned} X'(k+1) &= A'_2 X'(k) + B'_2 U'(k) + \Psi_2 W(k) \\ Y(k) &= C'_2 X'(k) \end{aligned}$$

REGLA 3 :

Si $\dot{m}_a(k)$ Es D_3 Y $\dot{m}_a(k-1)$ Es E_3 Y $p_a(k)$ Es F_3 Y $p_a(k-1)$ Es J_3 Y

$RPM(k)$ Es L_3 Y $\dot{m}_f(k)$ Es M_3 Y $EGR(k-1)$ Es N_3 Y $TGV(k-1)$ Es Z_3 (6.1-7)

Entonces

$$\begin{aligned} X'_3(k+1) &= A'_3 X'(k) + B'_3 U'(k) + \Psi_3 W(k) \\ Y(k) &= C'_3 X'(k) \end{aligned}$$

Donde

$$X'(k) = \begin{bmatrix} \dot{m}_a(k-1) \\ \dot{m}_a(k) \\ p_a(k-1) \\ p_a(k) \end{bmatrix} \quad U'(k) = \begin{bmatrix} EGR(k) \\ TG V(k) \end{bmatrix} \quad (6.1-8)$$

$$W(k) = \begin{bmatrix} RPM(k) \\ \dot{m}_f(k) \\ 1 \end{bmatrix} \quad Y(k) = \begin{bmatrix} \dot{m}_a(k) \\ p_a(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}(k) = [X'(k) \quad U'(k)] \quad (6.1-9)$$

$$\begin{aligned} w_i &= D_i(\dot{m}_a(k)) \cdot E_i(\dot{m}_a(k-1)) \cdot F_i(p_a(k)) \cdot J_i(p_a(k-1)) \cdot L_i(RPM(k)) \\ &\quad \cdot M_i(\dot{m}_f(k)) \cdot N_i(EGR(k)) \cdot Z_i(TGV(k)) \end{aligned} \quad (6.1-10)$$

Sin embargo, los consecuentes descritos por las ecuaciones (6.1-5), (6.1-6) y (6.1-7) no pueden ser empleados directamente para el diseño de los controladores con estructura PDC. Esto es debido a que el vector de las acciones de control $U'(k)$ aparece directamente en los antecedentes de las reglas borrosas (ecuación (6.1-9)), hecho que complica enormemente el proceso de desborrosificación del controlador borroso [Tanaka & Wang 2001]. Este problema, que ya fue apuntado en la introducción, se ha resuelto modificando la representación en espacio de estados sustituyendo las variables controladas $EGR(k)$ y $TGV(k)$ por los incrementos de dichas variables, tal y como muestra a continuación:

$$\begin{aligned} X'(k+1) &= A'_i X'(k) + B'_i U'(k) + \Psi_i W(k) \\ &= A'_i X'(k) + B'_i \Delta U'(k) + B'_i U'(k-1) + \Psi_i W(k) \end{aligned} \quad (6.1-11)$$

Donde,

$$U'(k) = \Delta U'(k) + U'(k-1) \quad (6.1-12)$$

Aplicando la ecuación (6.1-11) a los consecuentes de las reglas (6.1-5), (6.1-6) y (6.1-7), se obtiene un modelo borroso donde los antecedentes de las reglas no varían y los consecuentes vienen descritos por las ecuaciones (6.1-13), (6.1-14) y (6.1-15).

CONSECUENTE REGLA 1 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X'(k+1) \\ U'(k) \end{bmatrix}}_{X(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A'_1 & B'_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} X'(k) \\ U'(k-1) \end{bmatrix}}_{X(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B'_1 \\ I \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta U'(k) \end{bmatrix}}_{U(k)} + \Psi_1 W(k) \quad (6.1-13)$$

$$Y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C'_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{bmatrix} X'(k) \\ U'(k-1) \end{bmatrix}}_{X(k)}$$

CONSECUENTE REGLA 2 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X'(k+1) \\ U'(k) \end{bmatrix}}_{X(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A'_2 & B'_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{bmatrix} X'(k) \\ U'(k-1) \end{bmatrix}}_{X(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B'_2 \\ I \end{bmatrix}}_{B_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta U'(k) \end{bmatrix}}_{U(k)} + \Psi_2 W(k) \quad (6.1-14)$$

$$Y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C'_2 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2} \underbrace{\begin{bmatrix} X'(k) \\ U'(k-1) \end{bmatrix}}_{X(k)}$$

CONSECUENTE REGLA 3 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X'(k+1) \\ U'(k) \end{bmatrix}}_{X(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A'_3 & B'_3 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{A_3} \underbrace{\begin{bmatrix} X'(k) \\ U'(k-1) \end{bmatrix}}_{X(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B'_3 \\ I \end{bmatrix}}_{B_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta U'(k) \end{bmatrix}}_{U(k)} + \Psi_3 W(k) \quad (6.1-15)$$

$$Y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C'_3 & 0 \end{bmatrix}}_{C_3} \underbrace{\begin{bmatrix} X'(k) \\ U'(k-1) \end{bmatrix}}_{X(k)}$$

Donde,

$$X(k) = \begin{bmatrix} \dot{m}_a(k-1) \\ \dot{m}_a(k) \\ p_a(k-1) \\ p_a(k) \\ EGR(k-1) \\ TGV(k-1) \end{bmatrix} \quad U(k) = \begin{bmatrix} \Delta EGR(k) \\ \Delta TGV(k) \end{bmatrix} \quad (6.1-16)$$

$$W(k) = \begin{bmatrix} RPM(k) \\ \dot{m}_f(k) \\ 1 \end{bmatrix} \quad Y(k) = \begin{bmatrix} \dot{m}_a(k) \\ p_a(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}(k) = X(k) \quad (6.1-17)$$

A la vista de los nuevos consecuentes, el controlador borroso diseñado a partir del modelo planteado, no presentará problemas de desborrosificación. Asimismo, se han empleado las variables $\dot{m}_f(k)$ y $RPM(k)$ como perturbaciones medibles dentro del modelo borroso, tal y como se puede apreciar en el vector $W(k)$. A continuación se muestran algunos de los datos numéricos que no se han podido presentar en el texto por falta de espacio.

Modelo del consecuente de la regla 1, ecuación (6.1-5):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1647 & 0.8911 & -0.0049 & -0.0371 & -0.0279 & 0.1219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0522 & 0.1016 & 0.7063 & 0.0855 & -0.0027 & 0.0305 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Psi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1075 & 0.0596 & -0.1282 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0024 & 0.0005 & -0.1365 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.1-18}$$

Modelo del consecuente de la regla 2, ecuación (6.1-6):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5445 & 1.4793 & -0.2511 & 0.2831 & -0.0082 & -0.0088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0201 & 0.0272 & -0.6058 & 1.5700 & -0.0024 & 0.0415 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.0262 & 0.0059 & 0.0042 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0044 & 0.0327 & -0.0042 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.1-19}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo del consecuente de la regla 3, ecuación (6.1-7):

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6235 & 1.5663 & -0.0448 & 0.0691 & -0.0100 & -0.0128 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.0760 & 0.1241 & -0.1426 & 1.0824 & -0.0009 & 0.0160 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Psi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.0198 & -0.0013 & -0.0052 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0060 & 0.0198 & -0.0132 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1-20)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las funciones de pertenencia de los antecedentes de las ecuaciones (6.1-5), (6.1-6), (6.1-7), (6.2-15), (6.2-16) y (6.2-17) en la figura 6.2.

6.1.2 Validación del Modelo

El modelo borroso obtenido será validado mediante un segundo conjunto de datos, procedentes de otro test *Euro 4* realizado sobre el mismo vehículo. Sin embargo, en este segundo test la masa del vehículo se ha modificado, añadiendo una masa extra de 100 kg. El objetivo es validar el comportamiento del modelo con este segundo paquete de datos experimentales.

Además de presentar las gráficas referentes a las comparativas de modelo y proceso, se empleará un índice que permita cuantificar la calidad del modelo con mayor objetividad. El índice seleccionado es el denominado *VAF* (Varianza Considerada), que representa la varianza en porcentaje entre dos señales temporales. Este índice, el cual se define mediante la ecuación (6.1-21), es ampliamente utilizado en la literatura dentro del ámbito de identificación de sistemas dinámicos [Verdult & Verhaegen 2000]. Cuando el valor del índice es más cercano al 100%, mayor es la precisión del modelo identificado respecto al comportamiento real del proceso.

$$VAF(y, \hat{y}) = 100\% \left[1 - \frac{var(y - \hat{y})}{var(y)} \right] \quad (6.1-21)$$

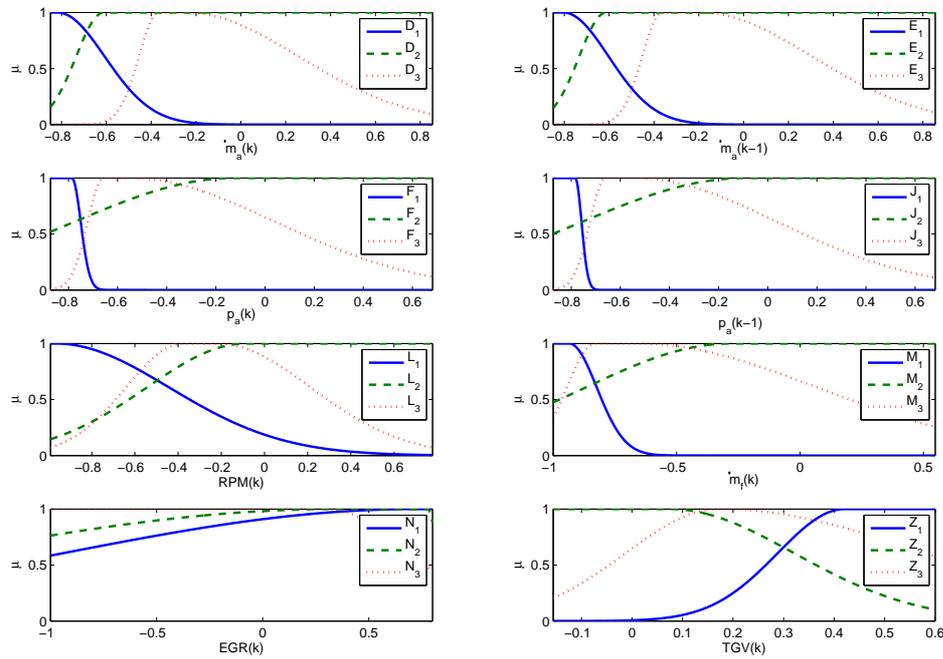


FIGURA 6.2: Funciones de pertenencia.

Donde y e \hat{y} serán vectores en el caso mono variable y matrices en el caso multivariable. Por tanto, la evaluación del índice en el caso de matrices se define como la aplicación de la ecuación (6.1-21) para cada una de las columnas de la matriz y , analizada respecto a su columna correspondiente en la matriz \hat{y} . Por tanto, dadas dos matrices y e \hat{y} se calculará como

$$VAF(y(N, 1), \hat{y}(N, 1)), \dots, VAF(y(N, p), \hat{y}(N, p)) \quad (6.1-22)$$

La figura 6.3 muestra la validación del modelo borroso de 3 reglas frente al proceso real, empleando el segundo conjunto de datos.

El cálculo del índice VAF , reflejado en el cuadro 6.2, permite establecer conclusiones cuantitativas y analíticas, más allá de la apreciación visual de la gráfica 6.3.

CUADRO 6.2: Valores índice $VAF(\%)$.

	\dot{m}_a	p_a
Dat. Identificación	93.4120	95.1030
Dat. Validación	96.9329	97.2370

En primer lugar, se puede observar como el valor del índice de precisión presenta valores superiores al 90 % en ambos experimentos (identificación y validación). Por tanto, el modelo identificado puede representar con cierta garantías el comportamiento del

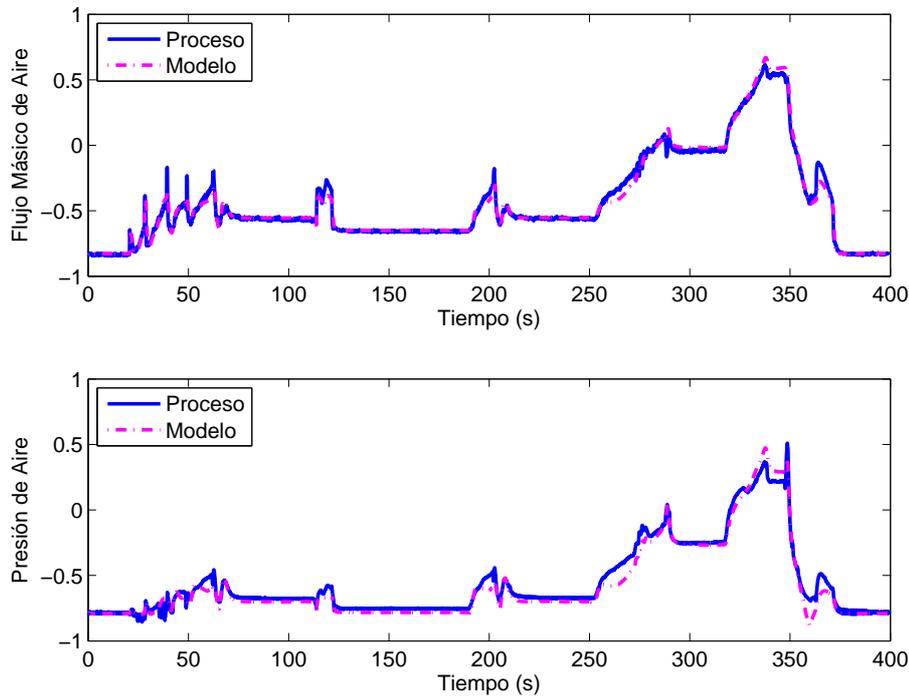


FIGURA 6.3: Validación - Real (Sólido) vs Modelo Identificado (Discontinua).

proceso real. En segundo lugar, el valor del VAF es ligeramente superior en la validación. Esta cuestión resulta sorprendente², ya que en general, la respuesta de un modelo ante un paquete de datos de validación suele ser peor que ante los datos de identificación. Una posible respuesta a este resultado se basa en el análisis de los datos que se muestran en la figura 6.4. Ésta muestra como los datos de validación presentan un respuesta dinámica con transiciones suaves, es decir, no existen saltos bruscos en el comportamiento. Sin embargo, los datos de identificación presentan variaciones abruptas puntualmente, destacadas en la figura 6.4. Estas variaciones se deben en gran medida al efecto del cambio de marchas manual, en particular al tiempo empleado en la modificación de una marcha.

Realizar un cambio de marcha de manera lenta (tiempo consumido elevado), provoca una disminución muy significativa de la \dot{m}_a . Esta disminución es consecuencia de un flujo de fuel prácticamente nulo, ya que en el proceso de cambio de una marcha el conductor levanta el pie del acelerador. Esta circunstancia da lugar a un descenso brusco de las variables del proceso y, por tanto, que dichas variables alcancen valores muy distintos a los que presentaban en el instante previo a la modificación de la marcha del vehículo.

²Los resultados de identificación y validación presentados en el artículo pueden resultar sorprendente, pero analizando los datos que aparecen en la figura 6.4 se puede encontrar una respuesta razonable, tal y como se comenta en el texto.

La figura 6.4 muestra como los datos de validación (ventana inferior) presentan un respuesta dinámica con cambios suaves, es decir los estados del proceso tienen un recorrido pequeño en el dominio no lineal de dicho proceso. Sin embargo, los datos de identificación (ventana superior) presentan cambios mucho mayores y bruscos, debidos al aumento del tiempo consumido en el cambio de una marcha. Esta circunstancia provoca un recorrido de los estados en el dominio no lineal mucho mayor, hecho que parece ser la causa objetiva del mejor dato de VAF para la validación.

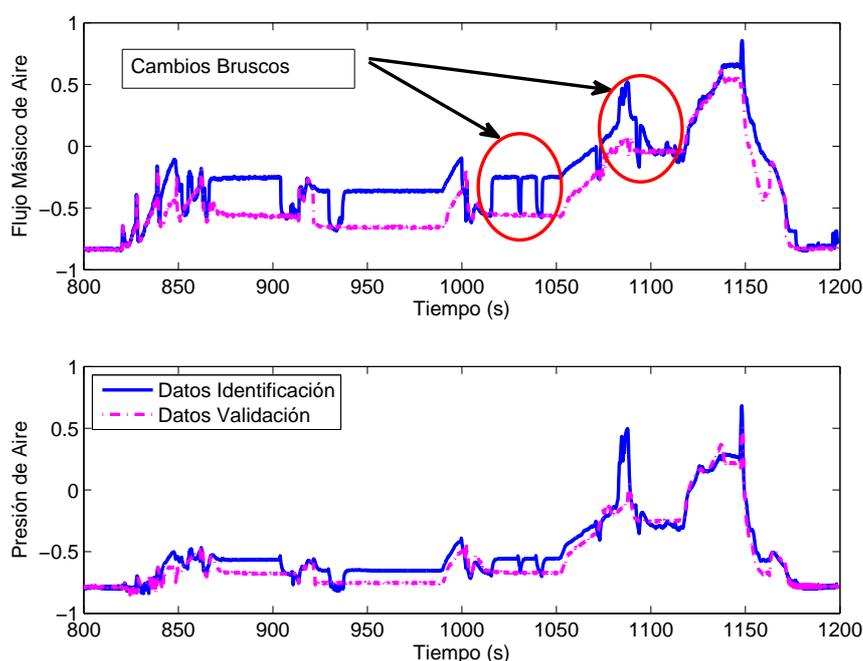


FIGURA 6.4: Comparación de los dos conjuntos de datos experimentales empleados (no son simulaciones basadas en el modelo borroso).

6.2 Controlador Borroso Óptimo

La metodología de diseño que se propone en esta sección, se basa en los trabajos presentados en [Takagi & Sugeno 1985] y [Tanaka & Wang 2001]. El objetivo es la obtención de un controlador no lineal con estructura borrosa T-S que minimiza un índice cuadrático de tipo LQR y, al mismo tiempo, garantice estabilidad según la teoría de Lyapunov [Branicky 1998].

El controlador óptimo borroso se diseña mediante la resolución de un problema de optimización donde el objetivo es minimizar una cota superior del índice de coste cuadrático, tal y como se mostró en el apartado 5.4.2 del capítulo 5. Este planteamiento

presenta la gran ventaja de poder ser expresado en términos de LMIs, lo cual garantiza su resolución en tiempo polinomial mediante algoritmos muy eficientes al tratarse de un problema convexo [Boyd *et al.* 1987].

6.2.1 Diseño del Controlador mediante LMIs

El controlador T-S que se plantea debe minimizar el siguiente índice de tipo LQR,

$$J = \sum_0^{\infty} X^T Q X + U^T R U \quad (6.2-1)$$

sujeto a la dinámica del proceso³:

$$X(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) A_i X(k) + B_i U(k) \quad (6.2-2)$$

En primer lugar se amplían los modelos en espacio de estados de los consecuentes de las ecuaciones (6.1-5), (6.1-6) y (6.1-7), incluyendo 2 integradores. El objetivo de esta modificación del modelo original es eliminar el error en régimen permanente de la \dot{m}_a y p_a en el seguimiento de referencias local. La ecuación (6.2-3) muestra la estructura del modelo ampliado para abordar el problema de seguimiento de referencias.

$$A_i^* = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad B_i^* = \begin{bmatrix} B_i \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.2-3)$$

$$C_i^* = \begin{bmatrix} C_i & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

En segundo lugar, se realiza el diseño óptimo mediante LMIs empleando una versión simplificada del teorema 25 introducido en [Tanaka & Wang 2001] y descrito en el capítulo 5, cuyo enunciado es:

TEOREMA 6.2.1 *Las matrices de realimentación que minimizan una cota superior del índice de coste pueden ser obtenidas resolviendo un problema de minimización sujeto a LMIs. En concreto, se garantiza que $J < X^T(0) P X(0) < \gamma$ al resolver el siguiente problema de minimización,*

$$\underset{F, M_1, \dots, M_r}{\text{Minimizar}} \quad \gamma \quad (6.2-4)$$

³La ecuación (6.2-2) muestra el modelo dinámico empleado en el diseño del controlador LQR. Se puede observar como no se ha tenido en cuenta la dinámica de las perturbaciones, tal y como se anticipó en la introducción.

Sujeto a:

$$F > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & X^T(0) \\ X(0) & F \end{bmatrix} > 0, \quad (6.2-5)$$

$$U_{ii} < 0 \quad (6.2-6)$$

$$V_{ij} < 0, \quad i > j \text{ s.a. } h_i \cap h_j \neq \phi \quad (6.2-7)$$

Donde,

$$\begin{bmatrix} Aux_1 & FC_i^{*T} & -M_i^T \\ C_i^*F & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}_{U_{ii}} \quad (6.2-8)$$

$$\begin{bmatrix} Aux_2 & FC_i^{*T} & -M_j^T & FC_j^{*T} & -M_i^T \\ C_i^*F & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -M_j & 0 & -R^{-1} & 0 & 0 \\ C_j^*F & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}_{V_{ij}} \quad (6.2-9)$$

$$\begin{bmatrix} F & FA_i^{*T} - M_i^T B_i^{*T} \\ A_i^*F - B_i^*M_i & F \end{bmatrix}_{Aux_1} \quad (6.2-10)$$

$$\begin{bmatrix} F & G_{ij}^T \\ G_{ij} & F \end{bmatrix}_{Aux_2}, \quad (6.2-11)$$

$$G_{ij} = \frac{(A_i^*F + A_j^*F - B_i^*M_j - B_j^*M_i)}{2}$$

Las matrices de realimentación del estado se extraen a partir de la solución de las LMIs como

$$K_i = M_i F^{-1} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6.2-12)$$

El método de diseño basado en LMIs que se ha presentado en el teorema 6.2.1, se ha aplicado al modelo identificado (ecuaciones (6.1-5), (6.1-6) y (6.1-7)), donde las matrices de ponderación Q y R empleadas en el diseño se presentan a continuación:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (6.2-13)$$

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

La resolución de las LMIs se ha realizado mediante el empleo de la Toolbox *YALMIP* [Lofberg 2004] para *MatLab* y la *LMIToolbox*. El resultado es la obtención de tres matrices de realimentación del estado, tal y como muestra la ecuación (6.2-14),

$$K_1^T = \begin{bmatrix} 2.2471 & -0.0372 \\ -9.2847 & -0.9759 \\ 6.5575 & 3.1015 \\ -1.0573 & 1.7763 \\ 1.3905 & 0.0495 \\ -1.6831 & 0.9800 \\ 2.5502 & 0.4526 \\ -0.6747 & -0.6170 \end{bmatrix} \quad K_2^T = \begin{bmatrix} 8.7726 & 0.5316 \\ -19.6217 & -1.9687 \\ -1.4572 & -2.3804 \\ 7.3364 & 7.9389 \\ 1.0714 & 0.0291 \\ 0.5619 & 1.1749 \\ 2.5526 & 0.4543 \\ -0.6759 & -0.6179 \end{bmatrix} \quad (6.2-14)$$

$$K_3^T = \begin{bmatrix} 9.5522 & 0.3713 \\ -20.1545 & -1.6329 \\ -0.5848 & -0.5781 \\ 6.3629 & 6.0317 \\ 1.1137 & 0.0374 \\ 0.3925 & 1.0669 \\ 2.5518 & 0.4528 \\ -0.6755 & -0.6172 \end{bmatrix}$$

El controlador global del sistema presenta una estructura equivalente a la del modelo identificado en el número de reglas, antecedentes y funciones de pertenencia. Sin embargo, los consecuentes de las reglas pasan a ser los controladores calculados individualmente en la sección anterior. Las ecuaciones (6.2-15), (6.2-16) y (6.2-17) muestran el sistema de control diseñado.

REGLA 1 :

Si $\dot{m}_a(k)$ **Es** D_1 **Y** $\dot{m}_a(k-2)$ **Es** E_1 **Y** $p_a(k-1)$ **Es** F_1 **Y** $p_a(k-2)$ **Es** J_1 **Y**

$RPM(k-1)$ **Es** L_1 **Y** $\dot{m}_f(k-1)$ **Es** M_1 **Y** $EGR(k-1)$ **Es** N_1 **Y** $TGV(k-1)$ **Es** Z_1

Entonces

$$U(k) = -K_1 X(k) \tag{6.2-15}$$

REGLA 2 :

Si $\dot{m}_a(k)$ **Es** D_2 **Y** $\dot{m}_a(k-2)$ **Es** E_2 **Y** $p_a(k-1)$ **Es** F_2 **Y** $p_a(k-2)$ **Es** J_2 **Y**

$RPM(k-1)$ **Es** L_2 **Y** $\dot{m}_f(k-1)$ **Es** M_2 **Y** $EGR(k-1)$ **Es** N_2 **Y** $TGV(k-1)$ **Es** Z_2

Entonces

$$U(k) = -K_2 X(k) \tag{6.2-16}$$

REGLA 3 :

Si $\dot{m}_a(k)$ **Es** D_3 **Y** $\dot{m}_a(k-2)$ **Es** E_3 **Y** $p_a(k-1)$ **Es** F_3 **Y** $p_a(k-2)$ **Es** J_3 **Y**

$RPM(k-1)$ **Es** L_3 **Y** $\dot{m}_f(k-1)$ **Es** M_3 **Y** $EGR(k-1)$ **Es** N_3 **Y** $TGV(k-1)$ **Es** Z_3

Entonces

$$U(k) = -K_3 X(k) \tag{6.2-17}$$

6.3 Validación de Resultados

Tras el diseño del controlador en el epígrafe anterior, es preciso proceder a su validación. Esta cuestión no es fácil, debido a un importante inconveniente que está asociado

a la imposibilidad de implementar el diseño realizado, relativo al control de Renovación de la Carga, en la Unidad Electrónica de Control (ECU) que equipan los vehículos. Dichas unidades no son accesibles de forma directa, pues están protegidas por los fabricantes, y en consecuencia no es posible sustituir la parte correspondiente a dicho control por el nuevo control desarrollado⁴, lo que nos lleva a la imposibilidad de realizar experiencias con el motor real y su ECU. Sin embargo, con la identificación borrosa del proceso de Renovación de la Carga se ha conseguido un modelo no lineal que se adapta al comportamiento de proceso de una forma muy razonable y en todo el rango de funcionamiento, de manera que la validación puede justificarse en simulación. Por lo tanto, para validar los resultados de este diseño, que como se acaba de comentar, correspondería a una parte del diseño de control global, es necesario aislar el subproceso de Renovación de la Carga del resto del proceso y generar una condiciones realistas de prueba que permitan inferir que los resultados que se obtienen son coherentes, comparables y en su caso mejorados, con los que de forma global se han obtenido con el proceso real y la ECU comercial. En este sentido, cuando se analizan los resultados del control global de un motor con la ECU comercial ante el Test Euro 4 (ver figura 6.5) se observa que, respecto al proceso de Renovación de la Carga, éste viene caracterizado por unos perfiles de \dot{m}_a , p_a , \dot{m}_f y RPM determinados (figuras 4.9 y 4.10 del capítulo 4), que aseguran la consecución de los objetivos del citado Test. En particular, las velocidades lineales y par motor correspondientes, además y respecto a las especificaciones a cumplir, es sabido que la ECU comercial establece un control de referencia variable de la \dot{m}_a (relacionado con la \dot{m}_f a través de la relación aire fuel-AFR (control de ratio)) y sujeto a que p_a se mantenga dentro de un rango de funcionamiento adecuado. Por ello, la solución adoptada viene reflejada en la figura 6.6, en la que se ha aislado el proceso de renovación de la carga estableciendo una referencia de \dot{m}_a igual a la obtenida como salida en las pruebas reales y una referencia de p_a por debajo de la obtenida en dichas pruebas. Con este enfoque es posible valorar si el controlador diseñado es comparable al subcontrolador de la ECU que se dedica al proceso de renovación de la carga y en su caso si se ha producido alguna mejora (figura 6.8).

Los resultados de simulación en bucle cerrado se presentan en las figuras 6.7, 6.8 y 6.9. La figura 6.7 muestra como la respuesta de la \dot{m}_a consigue seguir de manera razonable la referencia establecida. Por tanto, el comportamiento mecánico será similar al que se produce cuando la ECU gestiona el proceso. Por otra parte, se puede observar como la p_a es capaz de seguir el perfil de presiones determinado. Asimismo, la figura 6.8 muestra como la respuesta de la presión de aire de la ECU es mayor, hecho que puede favorecer una mayor producción de NO_x en comparación con presiones más bajas, como es el caso de la respuesta obtenida con el controlador borroso. En particular, se puede

⁴Las ECU incorporan otros controles y funciones adicionales al de Renovación de la Carga, pero indispensables para el funcionamiento global del vehículo

VEHÍCULO SOMETIDO A TEST EURO 4

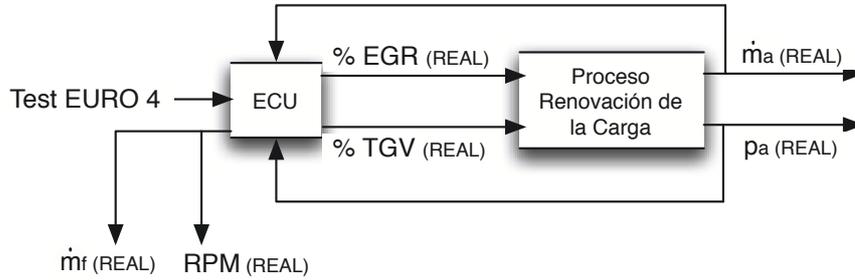


FIGURA 6.5: Control del Proceso de Renovación de la Carga en ECUs Comerciales.

SIMULACIÓN Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS

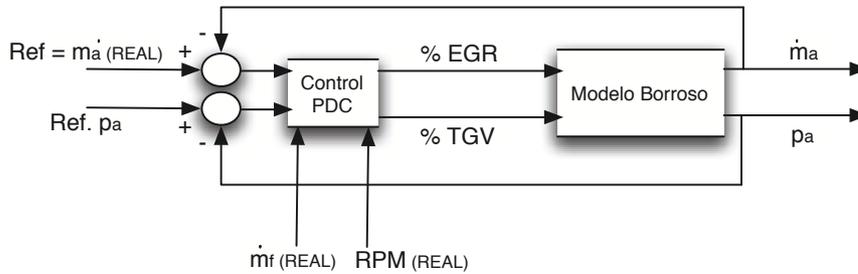


FIGURA 6.6: Control del Proceso de Renovación de la Carga Propuesto.

observar como con demandas de \dot{m}_a bajas la p_a del controlador borroso se mantiene en valores cercanos a la atmosférica, mientras que la ECU proporciona valores de presión de aire mayores.

La figura 6.9 muestra como las acciones de control *EGR* y *TGV*, propuestas por el controlador borroso T-S diseñado, presentan menor número de transiciones entre los valores de saturación de las válvulas. Este hecho podría ser determinante en la vida útil del accionador, ya que una continua conmutación entre los valores de saturación resulta perjudicial para los elementos mecánicos.

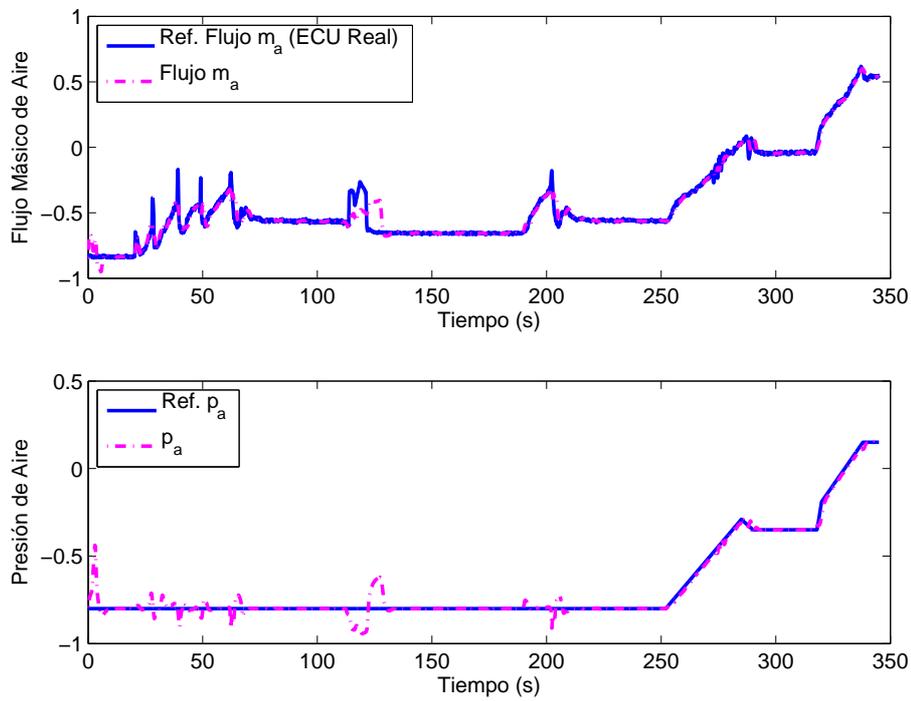


FIGURA 6.7: Respuesta de \dot{m}_a y p_a .

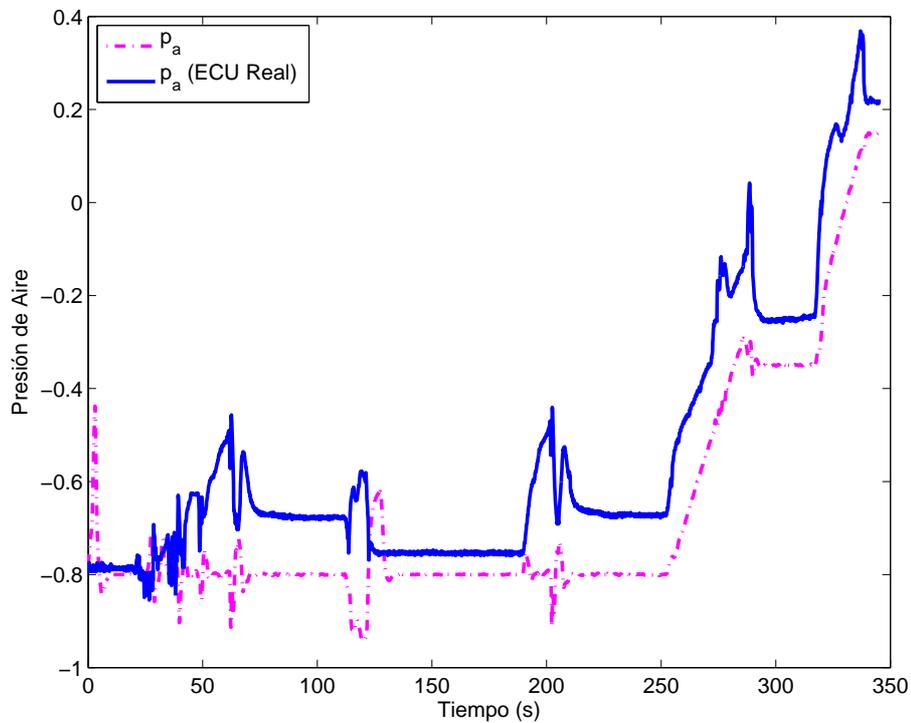


FIGURA 6.8: Comparativa de p_a obtenida con el diseño propuesto y empleando una ECU comercial.

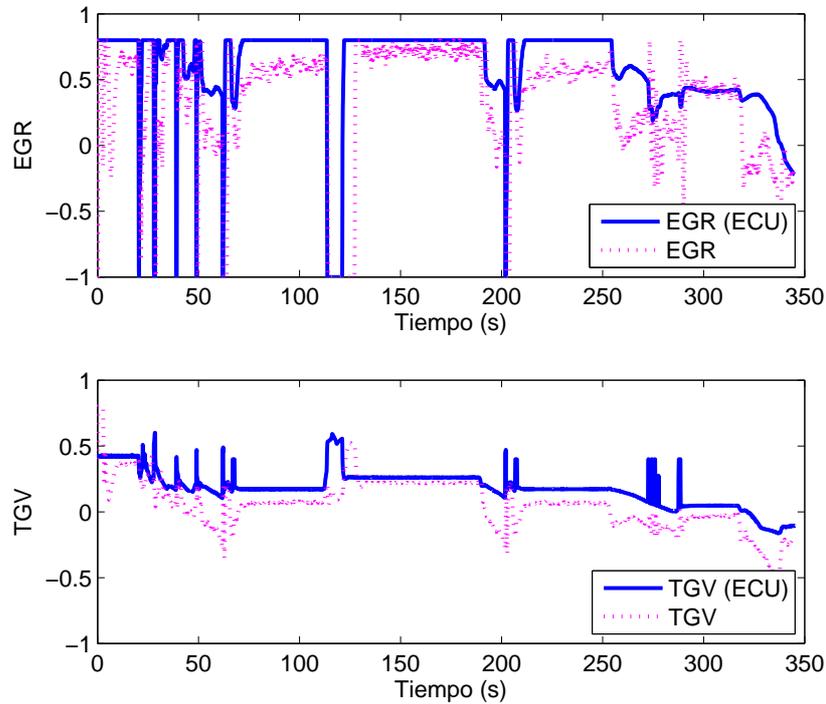


FIGURA 6.9: Acciones de control EGR y TGV.

6.4 Conclusiones

En este capítulo se ha mostrado el proceso completo de diseño de un sistema de control para la gestión del proceso de renovación de la carga de un motor diesel turboalimentado. En primer lugar, se ha presentado una modificación de la metodología de identificación introducida en el capítulo 3, que representa de manera satisfactoria el comportamiento real del sistema. La ventaja de la propuesta introducida es la obtención de un modelo borroso T-S donde los consecuentes son representaciones en espacio de estados MIMO. Por el contrario, el método original de Babuska emplea funciones de transferencia MISO en los consecuentes, los cuales no resultan apropiados en el diseño de controladores según las técnicas de diseño planteadas en [Tanaka & Wang 2001].

En segundo lugar, se ha presentado el diseño de un controlador borroso óptimo y estabilizante. El controlador óptimo borroso se diseña mediante la resolución de un problema de optimización donde el objetivo es minimizar una cota superior del índice de coste cuadrático. Este planteamiento presenta la gran ventaja de poder ser expresado en términos de LMIs, lo cual garantiza su resolución en tiempo polinomial mediante algoritmos muy eficientes, al tratarse de un problema convexo [Boyd *et al.* 1987].

En tercer lugar, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en simulación, el diseño presentado en este artículo permite el control de la p_a que reducirá la proliferación de NO_x .

Bibliografía

- BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.
- BABUSKA, R., & VERBRUGGEN, H.B. 1996. An overview of fuzzy modeling for control. *Control Engineering Practice*, 4(11), 1593-1606.
- BOYD, A. STEPHEN, GHAOUI, L. EL, FERON, E., & BALAKRISHNAN, V. 1987. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *Book*, 203.
- BRANICKY, M.S. 1998. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4), 475-482.
- GUSTAFSON, DE, & KESSEL, WC. 1979. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. *Proc. IEEE CDC*, 2, 761-766.
- LOFBERG, J. 2004. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Computer Aided Control Systems Design*, Jan.
- MARTÍNEZ, J. M., & HERRERA, F. 2003. Estrategia para la Construcción de Modelos Difusos utilizando Clustering y Transformación Ortogonal. *X. Convención Internacional Informática*.
- OGATA, K. 1998. *Ingeniería de Control Moderna*.
- SUGENO, M., & KANG, G. T. 1986. Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator. *Fuzzy Sets Systems*, 18(3), 329-345.
- TAKAGI, T., & SUGENO, M. 1985. Fuzzy Identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybern*, 15, 116-132.
- TANAKA, K., & SUGENO, M. 1992. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets Systems*, 45(2), 135-156.
- TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.
- VERDULT, V., & VERHAEGEN, M. 2000. Identification of multivariable linear parameter-varying systems based on subspace techniques. vol. 2.
- ZHAO, J., WERTZ, V., & GOREZ, R. 1994 (Aug). A fuzzy clustering method for the identification of fuzzy models for dynamical systems.

Parte **IV**

Propuestas en Identificación y Control Predictivo Borroso

CAPÍTULO 7

Propuesta para Identificación de Predictores Borrosos

"Prediction: A statement foretelling the possible outcome(s) of an event, process, or experiment. A prediction is based on observations, experience, and scientific reasoning."

Science Handbook

7.1 Introducción

El capítulo 1 describía en detalle las principales características del diseño de controladores MPC, donde se destacaban tres elementos fundamentales en la filosofía de control predictivo: el predictor o modelo de predicción, la función de coste y el optimizador. Estos tres elementos han sido objeto de estudio en numerosas propuestas dentro de la literatura del área, tal y como se mostró en el capítulo 5. Obviamente, un pequeño avance o sofisticación de cualquiera de estos elementos, supone una mejora considerable en el comportamiento global del sistema de control predictivo, hecho que justifica el intenso estudio de nuevos modelos de predicción, optimizadores, etc. Siguiendo esta motivación, el presente capítulo describe una nueva propuesta para la identificación del predictor, en particular, se describirá una nueva metodología para la obtención de predictores borrosos con estructura TS.

Una de las alternativas que mayor interés ha suscitado en el área de identificación de sistemas dinámicos, dado el gran número de publicaciones que se pueden encontrar y los satisfactorios resultados que se han obtenido [Babuska 1998], es la utilización de modelos borrosos como representantes de los procesos no lineales reales que se pretenden controlar. Sin embargo, todavía no existe una metodología ampliamente aceptada en la obtención predictores borrosos con el objetivo de ser empleados en el diseño de controladores predictivos. La principal desventaja que se suele presentar al emplear sistemas borrosos como predictor, es el elevado coste computacional que se produce cuando dichos modelos son empleados dentro del optimizador.

Una de las aportaciones más recientes y que plantea una solución óptima y con una carga computacional asequible, son los trabajos presentados en [Zhang *et al.* 2006], [Zhang *et al.* 2007b], [Zhang & Feng 2007], [Zhang *et al.* 2007a] y [Zhang *et al.* 2007c]. En todos ellos, tal y como se mostró en el capítulo 5 apartado 5.5.2, se plantea la resolución de un problema de optimización expresado en términos de LMIs, donde se hace uso de un predictor obtenido a partir de una descripción del proceso no lineal mediante un modelo borroso con estructura Takagi-Sugeno (TS). El concepto básico en los trabajos anteriormente citados, si se analiza detenidamente la propuesta descrita en [Zhang *et al.* 2007b], es el planteamiento de la extensión de los predictores lineales basados en modelos en espacio de estados [Camacho & Bordons 2004] al ámbito de los sistemas borrosos. Es decir, los modelos locales descritos en los consecuentes son ampliados a lo largo del horizonte de predicción y control. Para clarificar esta cuestión, se debe recordar cómo se pueden obtener estos predictores en el ámbito lineal, por ejemplo siguiendo la notación descrita en [Maciejowski 2002], donde el punto de partida es un modelo lineal expresado en representación interna:

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad (7.1-1)$$

El modelo de predicción se obtiene aplicando recursivamente la ecuación de estados, tal y como se muestra en la ecuación (7.1-2),

$$X(k+2) = AX(k+1) + BU(k+1) \quad (7.1-2)$$

aplicando la ecuación (7.1-1),

$$\begin{aligned} X(k+2|k) &= A[AX(k) + BU(k)] + BU(k+1) \\ X(k+2|k) &= A^2X(k) + ABU(k) + BU(k+1) \end{aligned} \quad (7.1-3)$$

Siguiendo la formulación de la ecuación (7.1-3) se puede obtener un modelo de predicción que únicamente depende del vector de estados en el instante k y de las acciones de control futuras, tal y como muestra la ecuación (7.1-4).

$$\begin{bmatrix} X(k+1|k) \\ X(k+2|k) \\ \vdots \\ X(k+H|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^H \end{bmatrix} X(k) + \quad (7.1-4)$$

$$\begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB+B & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H-1} A^i B & \sum_{i=0}^{H-2} A^i B & \cdots & C \sum_{i=0}^{H-H_u} A^i B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(k|k) \\ U(k+1|k) \\ \vdots \\ U(k+H_u|k) \end{bmatrix}$$

Donde H es el horizonte de predicción y H_u es el horizonte de control.

El trabajo publicado en [Zhang *et al.* 2007b] aplica la idea subyacente en las ecuaciones (7.1-3) y (7.1-4), a un modelo borroso TS expresado mediante la ecuación (7.1-5).

$$X(k+1) = A(\mu)X(k) + B(\mu)U(k) + b(\mu) \quad (7.1-5)$$

donde $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_N)$ y,

$$A(\mu) = \sum_l^N \mu_l A_l, \quad B(\mu) = \sum_l^N \mu_l B_l, \quad b(\mu) = \sum_l^N \mu_l b_l \quad (7.1-6)$$

En otras palabras, en [Zhang *et al.* 2007b] se propone la obtención de un modelo de predicción local para cada uno de los consecuentes del modelo borroso TS, tal y como se expresa en la ecuación (7.1-7) extraída de [Zhang *et al.* 2006], [Zhang *et al.* 2007b], [Zhang & Feng 2007], [Zhang *et al.* 2007a] y [Zhang *et al.* 2007c]. Sin embargo, el modelo de predicción descrito en (7.1-7) depende de los valores de pertenencia futuros de μ , lo que supone un claro inconveniente, ya que la obtención de la predicción de los estados y de las acciones de control futuras únicamente es posible mediante un proceso iterativo. Obviamente, la utilización de un modelo con estas características en la etapa de optimización plantea la necesidad de resolver un problema de optimización no convexo. Sin embargo, se puede plantear una simplificación de este modelo asumiendo que todos los valores futuros de los valores de pertenencia son contantes e iguales al del instante k . Esta simplificación asume que el sistema no va a variar significativamente el punto de funcionamiento dentro del horizonte de predicción, por lo que los valores de pertenencia se mantendrían relativamente acotados.

$$\begin{bmatrix} X(k+1|k) \\ X(k+2|k) \\ \vdots \\ X(k+H|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\mu) \\ A^2(\mu) \\ \vdots \\ A^H(\mu) \end{bmatrix} X(k) + \quad (7.1-7)$$

$$\begin{bmatrix} B(\mu) & 0 & \dots & 0 \\ A(\mu)B(\mu) + B(\mu) & B(\mu) & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H-1} A^i(\mu)B(\mu) & \sum_{i=0}^{H-2} A(\mu)^i B(\mu) & \dots & C \sum_{i=0}^{H-H_u} A^i(\mu)B(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(k|k) \\ U(k+1|k) \\ \vdots \\ U(k+H_u|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b(\mu) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H-1} A^i(\mu)b(\mu) \end{bmatrix}$$

Las siguientes secciones tratan de describir una nueva propuesta de predictor que elimina la necesidad de asumir valores constantes de μ durante todo el horizonte de predicción.

7.2 Descripción conceptual del método

La idea básica es explotar la capacidad de los modelos borrosos como aproximadores universales de sistemas no lineales. El objetivo es obtener un predictor que proporcione el vector de estados futuros a lo largo de un horizonte de predicción, a partir del vector de estados actuales y del conjunto de acciones de control futuras. Además, este predictor no debe ser iterativo, es decir, dado un conjunto de estados actual y un conjunto de acciones de control no debe ser necesario la iteración del modelo a lo largo del horizonte de predicción para poder conocer el vector de estados futuros completo.

El punto de partida para este nuevo predictor, definido como modelo FLAP (Fuzzy Large Ahead Prediction), es la definición de dos términos dentro del predictor. En primer término se define como la respuesta local del sistema, es decir, este término asume que la respuesta local del sistema, dentro del horizonte de predicción, se produce dentro de un entorno relativamente cercano al vector de estado del instante actual. Este primer término del predictor se obtiene a partir del modelo borroso a un paso de predicción, definido como modelo borroso precursor. Por ello, se asumirá constante el valor de las funciones de pertenencia dentro de todo el horizonte de predicción. No cabe duda que, de manera similar a la propuesta introducida en [Zhang *et al.* 2007b], la validez de la hipótesis de trabajo depende directamente de la respuesta del sistema dinámico, por tanto, el grado de precisión del predictor resultante será diferente en cada caso particular.

La respuesta local del sistema se obtiene de manera similar a la descrita en la ecuación (7.1-7) a partir del concepto de predictores lineales (ecuaciones (7.1-1)-(7.1-4)). Por

otro lado, el modelo borroso precursor de la respuesta local, descrito en [Zhang *et al.* 2007b] mediante la ecuación (7.1-5), será identificado a partir de un conjunto de datos experimentales obtenidos del sistema real. En particular, se emplea una modificación del método de identificación descrito en [Babuska 1998], el cual fue introducido en el capítulo 3. La validez de la metodología propuesta en [Babuska 1998] ha quedado contrastado en la literatura en numerosas contribuciones como [Babuska 1998], [Abonyi 2003], [García-Nieto *et al.* 2009] o [Díez *et al.* 2004], por lo que la validez de este tipo de técnicas se encuentra respaldada.

El segundo término a considerar se encarga de expresar matemáticamente cómo afectan las variaciones en el vector de estado en entornos lejanos al valor del mismo en el instante actual y, por ello, se define como la respuesta no local. Al contrario que la respuesta local, este término no asume constantes las funciones de pertenencia del modelo borroso.

La respuesta no local se obtiene a partir del cálculo del error entre la respuesta local calculada y la respuesta repuesta real del sistema. Por tanto, se emplea la señal error calculada como un nuevo conjunto de datos a partir de los cuales se obtendrán los parámetros del término de la respuesta no local. A continuación, la figura 7.1 muestra un diagrama resumen que recoge de manera esquemática los dos términos del predictor y la relación entre ellos.

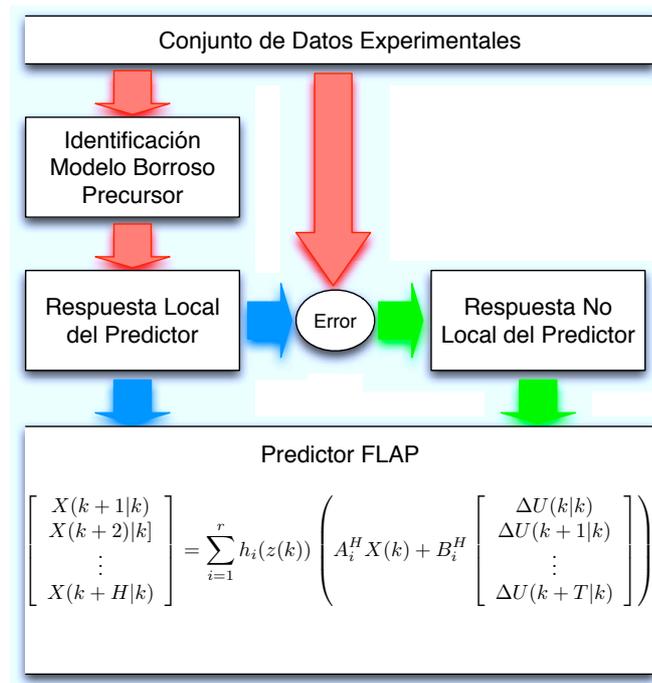


FIGURA 7.1: Respuesta local y no local del predictor borroso propuesto.

La obtención del predictor esquematizado en la figura 7.1 se ha llevado a cabo mediante la implementación del algoritmo que se detallará en los apartados sucesivos. Sin embargo, no se debe olvidar que el objetivo debe ser la obtención de un modelo de predicción capaz de ser empleado para el diseño de controladores predictivos y, por tanto, siempre se debe tener en cuenta el delicado equilibrio existente entre precisión y complejidad computacional, ya que si se contase con una capacidad de cómputo ilimitada no cabe duda que la mejor alternativa sería la iteración del modelo precursor identificado.

7.3 Algoritmo desarrollado

El algoritmo que se detalla a continuación y que proporciona los modelos de predicción definidos como modelos FLAP, presenta una estructura similar a otros algoritmos existentes destinados a la identificación de modelos borrosos a partir de datos experimentales, tal y como se mostró en el capítulo 3 [Babuska 1998], [Abonyi 2003], [García-Nieto *et al.* 2009]. Sin embargo, el hecho novedoso del algoritmo es la capacidad de obtener el vector completo de predicción dentro de un horizonte de predicción. Generalmente, tal y como ya se apuntó en la introducción, los modelos borrosos que se pueden obtener a partir de datos experimentales permiten conocer únicamente el comportamiento del vector de estados en el instante $(k + 1)$, posteriormente se emplea este modelo en alguno proceso de iterativo para obtener todo el horizonte de predicción. Sin embargo, el algoritmo que se presenta a continuación, obtiene de manera directa la relación de todo el vector de estados futuros, pudiendo obviar el proceso iterativo que complica el posterior diseño del sistema de control.

El algoritmo que se presenta consta de 6 etapas fundamentales, tal y como se pueden observar de manera esquemática en la figura 7.2, las cuales se listan a continuación:

- *Etapas de inicialización y selección de los parámetros de diseño*
- *Etapas de identificación del modelo precursor*
- *Etapas de obtención de la respuesta local*
- *Etapas de obtención de la respuesta no local*
- *Etapas de validación del predictor*
- *Etapas de actualización mediante algoritmos genéticos*

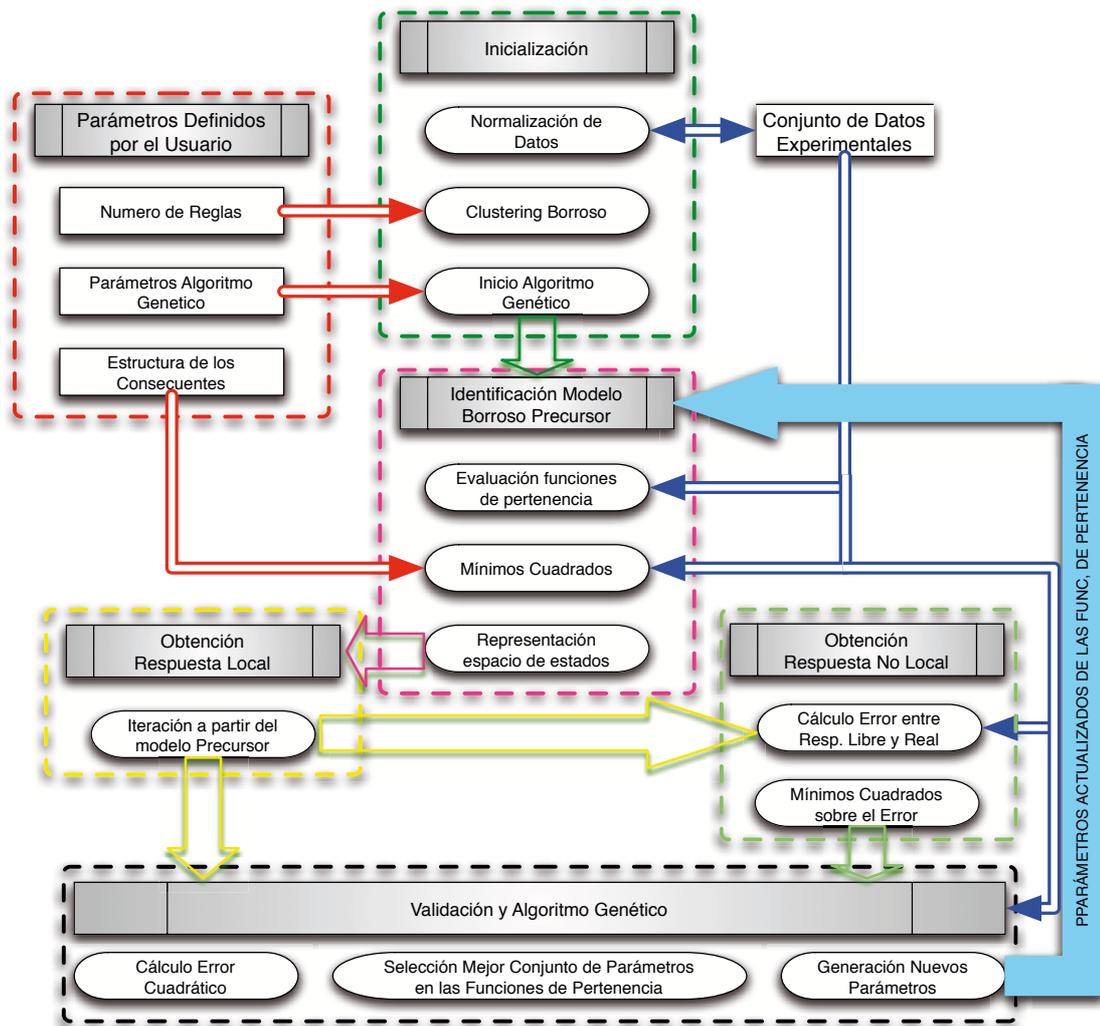


FIGURA 7.2: Esquema conceptual del algoritmo propuesto.

A continuación se detallarán cada una de las etapas de diseño incluidas en el algoritmo de identificación así como la conexión existente entre ellas.

7.3.1 Inicialización y selección de los parámetros de diseño

El algoritmo que se presenta contiene principalmente tres elementos que deben ser inicializados y/o configurados: los datos de identificación, la estructura del predictor borroso y el algoritmo genético empleado en la etapa de optimización.

7.3.1.1 Datos de identificación

Los datos experimentales empleados en el proceso de identificación son previamente normalizados y divididos en tres subconjuntos. La normalización a la que son sometidos los datos produce un nuevo conjunto de datos experimentales donde todos los valores de las señales se encuentran contenidos entre 0 y 1. Esta normalización mejora la precisión del algoritmo y reduce algunos problemas computacionales derivados del condicionamiento numérico [Abonyi 2003].

Por otra parte, el conjunto inicial de datos es dividido en 3 subconjuntos los cuales serán empleados de manera única en las distintas etapas de obtención del modelo precursor, obtención del modelo no local y optimización-validación. El hecho de emplear conjuntos distintos de datos en cada una de las etapas aumenta la robustez del algoritmo y una disminución de las posibles sobreparametrizaciones.

7.3.1.2 Estructura del predictor borroso

La estructura del predictor se compone de los términos estándar de los modelos borrosos TS descritos en el apartado 2.7.3 del capítulo 2, los cuales se detallan a continuación:

1. El número de reglas del predictor deben ser configuradas por el diseñador, ya que el algoritmo no es capaz de determinar de manera autónoma el número de reglas necesarias para el predictor. Dichas reglas presenta la estructura de antecedente-consecuente ya indicada en apartados anteriores:

REGLA i :

Si $z_1(k)$ **Es** M_{i1} **Y** \cdots **Y** $z_p(k)$ **Es** M_{ip} **Entonces** (7.3-1)

$$X(k+1) = A_i X(k) + B_i U(k)$$

$$Y(k) = C_i X(k) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Donde los M_{ij} definen los conjuntos borrosos de pertenencia de las variables $z_p(k)$, r es el número de reglas del modelo y, las matrices A_i , B_i y C_i definen el modelo en espacio de estados de los consecuentes. Por tanto, la salida de los modelos borrosos T-S puede ser inferida según las ecuaciones:

$$X(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))(A_i X(k) + B_i U(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k))(A_i X(k) + B_i U(k)) \quad (7.3-2)$$

$$Y(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))(C_i X(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k))(C_i X(k)) \quad (7.3-3)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= [z_1(k) \cdots z_p(k)] \\ w_i(\mathbf{z}(k)) &= \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(k)) \\ h_i(\mathbf{z}(k)) &= \frac{w_i(\mathbf{z}(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(k))} \end{aligned} \quad (7.3-4)$$

Donde h_i es equivalente al término μ descrito empleado en la descripción del predictor de Zhang.

Por tanto, el número de reglas r del modelo debe ser definido en la etapa de inicialización por el diseñador, de manera que el modelo a identificar consta de un conjunto fijo de reglas. Este hecho introduce un factor iterativo claro, ya que si el resultado final (una vez concluido el proceso de identificación completo) no es satisfactorio, el diseñador puede reajustar este parámetro para conseguir un resultado más adecuado.

2. Las variables de decisión de los antecedentes $z_p(k)$ es otro conjunto de variables que deben ser seleccionadas por el diseñador. Normalmente, el conjunto de las variables de decisión son un subconjunto del vector de estados del modelo del consecuente. Sin embargo, es posible utilizar variables que no se encuentran en dicho vector o incluso una combinación de las mismas. Estas variables son las encargadas de definir la zona de validez de los modelos locales expresados en los consecuentes y son, por tanto, un factor determinante en la obtención de un modelo que exprese de manera fidedigna el comportamiento del proceso real.
3. Las funciones de pertenencia $M_{ip}(k)$ presentan una estructura fija, dichas funciones se definen matemáticamente mediante la siguiente función no lineal:

$$M_{ip}(k) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_p(k) - M_{ip}^c}{M_{ip}^\sigma}\right)^2\right) \quad (7.3-5)$$

Siendo $M_{ip}(k)$ un función exponencial estándar con centro M_{ip}^c y desviación M_{ip}^σ , tal y como muestra la siguiente figura 7.3, donde se representa la forma de una función exponencial monovariante (una única variable de decisión $z_p(k)$) para una regla p con $M_{ip}^c = 0$ y $M_{ip}^\sigma = 0.5$.

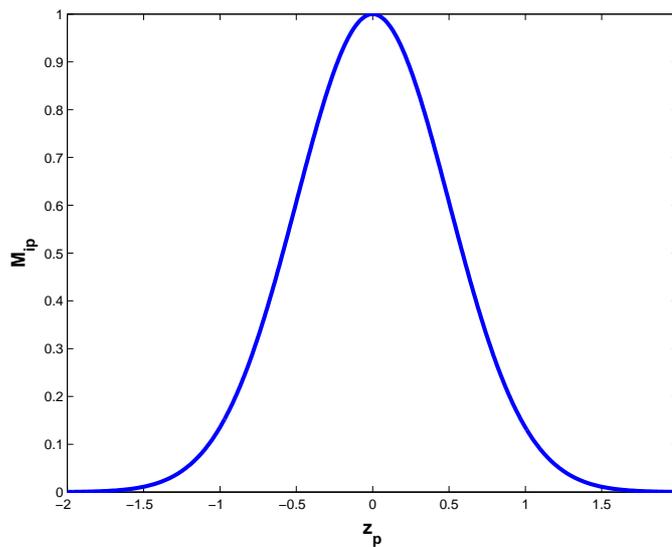


FIGURA 7.3: Representación de la función de pertenencia exponencial monovariante con $M_{ip}^c = 0$ y $M_{ip}^\sigma = 0.5$.

Los parámetros descritos anteriormente M_{ip}^c y M_{ip}^σ deben ser configurados en la etapa de inicialización por el diseñador. Esta inicialización suele ser de tres tipos: aleatoria, distribución uniforme o incluyendo cierto conocimiento del proceso. La distribución aleatoria no es más que la definición de los parámetros de las funciones de pertenencia de manera aleatoria, empleado alguno de los algoritmos de números pseudoaleatorios existentes.

En segundo lugar, la distribución uniforme de las funciones de pertenencia se consigue mediante la inicialización de los centros de las funciones de pertenencia de manera equidistante dentro del rango de las variables de decisión $z_p(k)$. Por último, es posible definir los parámetros de las funciones de pertenencia teniendo en cuenta el conocimiento del proceso que se pretende modelar, en este caso se asignarían los parámetros teniendo en cuenta, por ejemplo, algunos de los puntos de funcionamiento o equilibrio conocidos.

Para poder exponer con mayor claridad las distintas posibilidades de inicialización de las variables de pertenencia, se presenta a continuación un ejemplo que puede clarificar lo expuesto anteriormente. Supóngase que se ha decidido emplear un modelo TS con 3 reglas y donde se han establecido dos variables de decisión $z_{1p}(k)$ y

$z_{2p}(k)$. Por tanto, se deben inicializar los parámetros de 3 funciones de pertenencia para la variable $z_{1p}(k)$ y otras tres para la variable $z_{2p}(k)$. Ahora supongamos que la primera variable de decisión puede tomar un valor real entre $[-1, 1]$ y la segunda entre $[-2, 2]$. A partir de los datos que se han aportado, las tres posibles inicializaciones serían las siguientes:

- a) Inicialización aleatoria: dada la distribución de la variables z_{1p} , se tomarán tres números aleatorios dentro del rango $[-1, 1]$ que definirán M_{ip}^c para cada función de pertenencia. Asimismo se obtendrán otros tres números aleatorios entre $[0, 1]$ que definirán M_{ip}^σ . El procedimiento de inicialización de la variable z_{2p} será exactamente idéntico al descrito anteriormente.
- b) Inicialización uniformemente distribuido: en esta ocasión se tomarán tres centros equidistante dentro del rango de validez de la variable z_{1p} , por ejemplo $[-0.5 \ 0 \ 0.5]$. En este tipo de inicializaciones se suele emplear el mismo parámetro M_{ip}^σ para las tres funciones de pertenencia con un valor igual a 0.5.
- c) Inicialización incorporando el conocimiento del proceso: en este caso, el diseñador es conocedor de ciertos puntos de funcionamiento o equilibrio. Por ejemplo, si se pretende modelar un proceso químico se puede saber el punto de equilibrio del sistema bajo ciertas condiciones, por tanto, si asumimos que las variables z_{1p} y z_{2p} son capaces de definir el estado de equilibrio, se definirán los valores M_{ip}^c y M_{ip}^σ de manera que se encuentren centrados sobre los puntos de funcionamiento conocidos.

Los métodos básicos de inicialización descritos no son restrictivos, de manera que se puede emplear cualquier combinación de los mismos, así como cualquier modificación o nuevo criterio en la inicialización de las funciones de pertenencia.

Por otra parte, los parámetros de diseño de las funciones de pertenencia se encuentran directamente relacionados con el proceso de optimización mediante algoritmos genéticos. De hecho la etapa de optimización se encarga de la búsqueda del conjunto de parámetros óptimos para las funciones de pertenencia, donde el objetivo es obtener un modelo que represente de la manera más adecuada la dinámica del proceso. Por tanto, los valores de inicio de M_{ip}^c y M_{ip}^σ forman parte del conjunto de parámetros necesarios para inicializar la etapa de optimización.

4. El horizonte de predicción y control debe ser determinado en esta primera etapa del diseño. De manera general el valor del horizonte de predicción, definido mediante la variable H , suele ser igual al horizonte de control en los casos que han sido objeto de estudio en este trabajo. Sin embargo, no existe ningún impedimento ni conceptual ni de tipo práctico para que dichos horizontes sean distintos.

5. La estructura del consecuente debe ser seleccionada al inicio del algoritmo, de manera que pueda quedar definido el vector de estados y de acciones de control del modelo local. Sin embargo, la definición de dichos vectores se realiza de manera indirecta, ya que el algoritmo propuesto no identifica directamente la estructura interna del proceso, sino que se realiza una identificación salida-entrada (veáse capítulos 3 y 4) que posteriormente se reformula en representación interna mediante la transformación canónica, tal y como se detallará en el apartado 7.3.2. Por tanto, la estructura que se debe inicializar es el conjunto de relaciones existentes entre las variables de salida, entrada y los valores pasados de las mismas, tal y como se describe en la ecuación (7.3-6).

$$\begin{aligned}
 Y_1(k+1) &= F_1(U_1(k-m), U_2(k-m), \dots, U_{nu}(k-m), U_1(k-m+1), \\
 &U_2(k-m-1), \dots, U_{nu}(k-m+1), \dots, U_1(k), U_2(k), \dots, U_{nu}(k), \\
 &Y_1(k-n), Y_2(k-n), \dots, Y_{ny}(k-n), Y_1(k-n+1), \\
 &Y_2(k-n+1), \dots, Y_{ny}(k-n+1), \dots, Y_1(k), Y_2(k), \dots, Y_{ny}(k)) \\
 \\
 Y_2(k+1) &= F_2(U_1(k-m), U_2(k-m), \dots, U_{nu}(k-m), U_1(k-m+1), \\
 &U_2(k-m-1), \dots, U_{nu}(k-m-1), \dots, U_1(k), U_2(k), \dots, U_{nu}(k), \\
 &Y_1(k-n), Y_2(k-n), \dots, Y_{ny}(k-n), Y_1(k-n+1), \\
 &Y_2(k-n-1), \dots, Y_{ny}(k-n-1), \dots, Y_1(k), Y_2(k), \dots, Y_{ny}(k)) \\
 &\vdots \\
 Y_{ny}(k+1) &= F_3(U_1(k-m), U_2(k-m), \dots, U_{nu}(k-m), U_1(k-m+1), \\
 &U_2(k-m-1), \dots, U_{nu}(k-m-1), \dots, U_1(k), U_2(k), \dots, U_{nu}(k), \\
 &Y_1(k-n), Y_2(k-n), \dots, Y_{ny}(k-n), Y_1(k-n+1), \\
 &Y_2(k-n+1), \dots, Y_{ny}(k-n+1), \dots, Y_1(k), Y_2(k), \dots, Y_{ny}(k))
 \end{aligned} \tag{7.3-6}$$

Donde nu y ny representan el número de entradas y salidas del sistema respectivamente, m y n el número de valores pasados de las entradas y salidas.

La inicialización del algoritmo propuesto necesita la definición de los parámetros m y n para la composición de la estructura que será empleada en el consecuente del modelo TS. Asimismo, algunas de las variables que se emplean en la estructura también deberán ser definidas como las variables de decisión $z_{ip}(k)$. Una de las opciones que permite un compromiso entre el número de variables de decisión y la precisión del modelo es la expuesta en la siguiente ecuación:

$$z_{ip}(k) = [U_1(k), U_2(k), \dots, U_{nu}(k), Y_1(k), Y_2(k), \dots, Y_{ny}(k)] \tag{7.3-7}$$

La estructura del consecuente también se encuentra sujeta a un proceso iterativo de diseño, de manera similar a lo que sucede con el número de reglas. El diseñador

puede modificar esta estructura una vez comprobados los resultados obtenidos en el proceso de identificación, pudiendo modificar la estructura con el objetivo de conseguir una representación adecuada del proceso real.

7.3.1.3 Actualización mediante algoritmos genéticos

La etapa de actualización es el último paso dentro del funcionamiento del algoritmo y, teniendo en cuenta que se ejecuta un algoritmo de optimización basado en algoritmos genéticos, presenta algunos de parámetros de configuración que deben ser definidos en esta primera etapa, los cuales se enumeran a continuación:

- Número de individuos en cada generación
- Número de iteraciones del algoritmo
- Probabilidad de cruce
- Probabilidad de mutación

La descripción de los parámetros enumerados resulta en estos momentos poco adecuado, ya que no se ha especificado el funcionamiento y composición del algoritmo genético empleado ni sus principales características. Por tanto, en el apartado 7.3.5 se describirán con detalle estos elementos, así como sus valores más usuales a la hora de la inicialización.

7.3.2 Identificación del Modelo Precursor

El objetivo de esta etapa del algoritmo es obtener los parámetros de los consecuentes del modelo precursor con estructura TS según las ecuaciones (7.3-1), (7.3-2) y (7.3-3), donde el consecuente de cada una de las reglas describe el comportamiento dinámico local a un paso de predicción. El problema que se plantea para obtención de dichos parámetros es resuelto mediante la técnica de mínimos cuadrados ponderados [Abonyi 2003], por tanto, esta etapa del algoritmo mantiene ciertas similitudes con las técnicas de identificación borrosa introducidas en el capítulo 3.

El punto de partida en esta etapa del algoritmo son el conjunto de datos experimentales procedentes del proceso real, en general dichos datos experimentales se encuentran contenidos en las matrices ψ_y y ψ_u . La primera se define como una matriz ($N \times ny$) y representa el conjunto de salidas del proceso para N instantes de muestreo. Por otro lado, la matriz ψ_u viene determinada por las dimensiones ($N \times nu$) y contiene todas las

entradas del sistema N instantes de muestreo. Por tanto, los datos de partida únicamente hace referencia a la información entrada-salida de cualquier sistema MIMO, tal y como se indicó anteriormente.

A partir de la información contenida en las matrices ψ_y y ψ_u y, teniendo en cuenta la definición de la estructura del consecuente que el diseñador ha establecido en la etapa de inicialización, se unas nuevas matrices de estimación $\hat{\psi}_y$, $\hat{\psi}_u$, $\hat{\psi}_{yu}$ y $\hat{\psi}_z$ que serán empleadas en la identificación de los parámetros de los modelos de los consecuentes. La definición de las matrices de estimación vienen determinada por los valores m y n que establecen el número de información pasada que el modelo debe tener en consideración, pudiendo definirse las nuevas matrices de estimación como:

$$\hat{\psi}_y = \begin{bmatrix} Y_1(k+1) & Y_1(k+2) & \cdots & Y_1(k+N) \\ Y_2(k+1) & Y_2(k+2) & \cdots & Y_2(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ny}(k+1) & Y_{ny}(k+2) & \cdots & Y_{ny}(k+N) \end{bmatrix}^T \quad (7.3-8)$$

$$\hat{\psi}_u = \begin{bmatrix} U_1(k-m) & U_1(k-m+1) & \cdots & U_1(k-m+N-1) \\ U_2(k-m) & U_2(k-m+1) & \cdots & U_2(k-m+N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{nu}(k-m) & U_{nu}(k-m+1) & \cdots & U_{nu}(k-m+N-1) \\ U_1(k-m+1) & U_1(k-m+2) & \cdots & U_1(k-m+N-1) \\ U_2(k-m+1) & U_2(k-m+2) & \cdots & U_2(k-m+N-1) \\ U_{nu}(k-m+1) & U_{nu}(k-m+2) & \cdots & U_{nu}(k-m+N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_1(k) & U_1(k+1) & \cdots & U_1(k+N-1) \\ U_2(k) & U_2(k+1) & \cdots & U_2(k+N-1) \\ U_{nu}(k) & U_{nu}(k+1) & \cdots & U_{nu}(k+N-1) \end{bmatrix}^T \quad (7.3-9)$$

$$\hat{\psi}_{yu} = \begin{bmatrix} Y_1(k-n) & Y_1(k-n+1) & \cdots & Y_1(k-n+N-1) \\ Y_2(k-n) & Y_2(k-n+1) & \cdots & Y_2(k-n+N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ny}(k-n) & Y_{ny}(k-n+1) & \cdots & Y_{ny}(k-n+N-1) \\ Y_1(k-n+1) & Y_1(k-n+2) & \cdots & Y_1(k-n+N-1) \\ Y_2(k-n+1) & Y_2(k-n+2) & \cdots & Y_2(k-n+N-1) \\ Y_{ny}(k-n+1) & Y_{ny}(k-n+2) & \cdots & Y_{ny}(k-n+N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1(k) & Y_1(k+1) & \cdots & Y_1(k+N-1) \\ Y_2(k) & Y_2(k+1) & \cdots & Y_2(k+N-1) \\ Y_{ny}(k) & Y_{ny}(k+1) & \cdots & Y_{ny}(k+N-1) \end{bmatrix}^T \quad (7.3-10)$$

$$\hat{\psi}_z = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_{yu} & \hat{\psi}_u \end{bmatrix} \quad (7.3-11)$$

El siguiente elemento imprescindible para la obtención del modelo precursor es el cálculo de la matriz de pertenencia $\hat{\sigma}_h$, la cual contiene los valores de pertenencia de cada regla para cada uno de los instantes de muestreo. Esta matriz se define según la ecuación (7.3-12) y tiene dimensiones $(N \times r)$ y, su calculo se realiza a partir del vector de decisión $z_{ip}(k)$ (ecuación (7.3-7)) y las funciones de pertenencia establecidas en la etapa de inicialización (ecuación (7.3-5)). Cabe destacar, que la información del vector de decisión y las funciones de pertenencia siempre son conocidas en todas las iteraciones del algoritmo, ya que el ajuste de estas últimas se consigue mediante la etapa de actualización y, por tanto, la matriz de pertenencia siempre podrá ser calculada en cada iteración empleando las funciones de pertenencia ya actualizadas.

$$\hat{\psi}_h = \begin{bmatrix} h_1(k) & h_2(k) & \cdots & h_r(k) \\ h_1(k+1) & h_2(k+1) & \cdots & h_r(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(k+N) & h_2(k+N) & \cdots & h_r(k+N) \end{bmatrix} \quad (7.3-12)$$

Finalmente, se obtiene la matriz $\hat{\Psi}_z$ que contiene la matriz $\hat{\psi}_z$ ponderada por los valores de pertenencia de la matriz $\hat{\psi}_h$, tal y como se define en la ecuación (7.3-13).

$$\hat{\Psi}_z = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_h(k) \otimes \hat{\psi}_z(k) \\ \hat{\psi}_h(k+1) \otimes \hat{\psi}_z(k+1) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_h(k+N-1) \otimes \hat{\psi}_z(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (7.3-13)$$

El operador \otimes denota un producto de Kronecker [Graham 1982], operación aplicada sobre dos matrices de tamaño arbitrario que da como resultado una matriz de tipo bloque.

Una vez se obtienen las matrices $\hat{\Psi}_z$ y $\hat{\psi}_y$, la respuesta estimación del sistema se puede definir como $\hat{\psi}_y = \hat{\Psi}_z \hat{\Theta}$, donde la matriz de parámetros $\hat{\Theta}$ es obtenida mediante la resolución del problema de mínimos cuadrados siguiente:

$$\hat{\Theta} = \left[\hat{\Psi}_z^T \hat{\Psi}_z \right]^{-1} \hat{\Psi}_z^T \hat{\psi}_y \quad (7.3-14)$$

El último paso en esta etapa del algoritmo es conseguir una representación en variables de estado de los consecuentes. Por ello, se debe plantear un vector de estados acorde con la estructura entrada-salida seleccionada y que sea compatible con los parámetros obtenidos en $\hat{\Theta}$. La ecuación (7.3-15) establece la relación entre la representación entrada-salida y el vector de estados a partir de una estructura de consecuente definida.

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_{u_1}(k) \\ X_{u_2}(k) \\ X_y(k) \end{bmatrix} \quad (7.3-15)$$

donde,

$$X_{u_1}(k) = \begin{bmatrix} U_1(k-m) \\ U_2(k-m) \\ \vdots \\ U_{nu}(k-m) \\ \vdots \\ U_1(k-2) \\ U_2(k-2) \\ \vdots \\ U_{nu}(k-2) \end{bmatrix}, \quad X_{u_2}(k) = \begin{bmatrix} U_1(k-1) \\ U_2(k-1) \\ \vdots \\ U_{nu}(k-1) \end{bmatrix}, \quad X_y(k) = \begin{bmatrix} Y_1(k-n) \\ Y_2(k-n) \\ \vdots \\ Y_{ny}(k-n) \\ \vdots \\ Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ \vdots \\ Y_{ny}(k) \end{bmatrix} \quad (7.3-16)$$

Asimismo, el vector de acciones de control que se puede definir según la ecuación (7.3-17) teniendo en consideración que $U(k) = \Delta U(k) + U(k-1)$.

$$X_{\Delta u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta U_1(k) \\ \Delta U_2(k) \\ \vdots \\ \Delta U_{nu}(k) \end{bmatrix} \quad (7.3-17)$$

Las matrices características de la representación en espacio de estados para cada una de las reglas del modelo TS vendrían definidas según las ecuaciones (7.3-18), (7.3-19) y (7.3-20). Los elementos de dichas matrices dependen del conjunto de parámetros identificados $\hat{\Theta}$ y del vector de estados y de acciones de control definidos anteriormente.

$$A_i = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0 \ I] \\ \hat{\Theta}_u^1 & \hat{\Theta}_u^2 + \hat{\Theta}_{\Delta u} & \hat{\Theta}_y \end{bmatrix} \quad (7.3-18)$$

Donde $\hat{\Theta}_u^1$, $\hat{\Theta}_u^2$, $\hat{\Theta}_{\Delta u}$ y $\hat{\Theta}_y$ hacen referencia a los parámetros identificados mediante mínimos cuadrados y almacenados en el vector $\hat{\Theta}$ para cada una de las reglas borrosas. En primer lugar, $\hat{\Theta}_u^1$ es el conjunto de parámetros identificados a partir de la información contenida en el vector de acciones de control pasadas $[U_1(k-m) \cdots U_{ny}(k-2)]$. Por otra parte, $\hat{\Theta}_u^2$ contiene los parámetros obtenidos a partir del vector de acciones de control $(k-1)$, es decir, $[U_1(k-1) \cdots U_{ny}(k-1)]$. El vector $\hat{\Theta}_{\Delta u}$ contiene el conjunto de parámetros identificados para $[U_1(k) \cdots U_{ny}(k)]$. Finalmente, el vector $\hat{\Theta}_y$ responde al conjunto de parámetros obtenidos a partir de la información pasada de las salidas del sistema $[Y_1(k-n) \cdots Y_{ny}(k)]$.

$$B_i = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \hat{\Theta}_{\Delta u} \end{bmatrix} \quad (7.3-19)$$

$$C_i = [0 \ 0 \ I] \quad (7.3-20)$$

La obtención del modelo precursor se realiza en cada una de las iteraciones del algoritmo a partir de los datos experimentales existentes, la estructura del modelo TS y el valor de las funciones de pertenencia definidas y/o actualizadas por el optimizador.

7.3.3 Respuesta Local del Sistema

El término correspondiente a la respuesta local del sistema se obtiene a partir de la metodología descrita en [Zhang *et al.* 2007b] al asumir μ constante (ecuación (7.1-7)). El objetivo es obtener un predictor con la estructura de la ecuación (7.1-7), utilizando las matrices del modelo precursor definidas por las ecuaciones (7.3-18), (7.3-19) y (7.3-20). Por tanto, el resultado de esta etapa del algoritmo es un predictor borroso desarrollado a partir del modelo precursor y que es capaz de describir la dinámica del proceso a H pasos de predicción asumiendo μ constante, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ X(k+2) \\ \vdots \\ X(k+H) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) \left(\hat{A}_i \begin{bmatrix} X_u(k) \\ X_{\Delta u}(k) \\ X_y(k) \end{bmatrix} + \hat{B}_i \begin{bmatrix} \Delta U_1(k) \\ \Delta U_2(k) \\ \vdots \\ \Delta U_{nu}(k) \end{bmatrix} \right) \quad (7.3-21)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1(k+1) \\ \hat{Y}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{Y}_{ny}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{Y}_1(k+H) \\ \hat{Y}_2(k+H) \\ \vdots \\ \hat{Y}_{ny}(k+H) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) \left(\hat{C}_i \begin{bmatrix} X_u(k) \\ X_{\Delta u}(k) \\ X_y(k) \end{bmatrix} \right) \quad (7.3-22)$$

Donde las matrices ampliadas del predictor desarrollado en esta etapa se denominan \hat{A}_i , \hat{B}_i y \hat{C}_i :

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i \\ A_i^2 \\ \vdots \\ A_i^H \end{bmatrix} \quad (7.3-23)$$

$$\hat{B}_i = \begin{bmatrix} B_i & 0 & \cdots & 0 \\ A_i B_i + B_i & B_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{H-1} A_i^j B_i & \sum_{j=0}^{H-2} A_i^j B_i & \cdots & C_i \sum_{j=0}^{H-H_u} A_i^j B_i \end{bmatrix} \quad (7.3-24)$$

$$\hat{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_i \end{bmatrix} \quad (7.3-25)$$

7.3.4 Respuesta No Local del Sistema

La respuesta global del sistema es la parte del modelo encargada de intentar modelar aquella dinámica que el modelo de respuesta local no es capaz de capturar. De hecho, el elemento a partir del cual se calcula la respuesta no local es teniendo en cuenta las discrepancias entre la respuesta local y la real. En otras palabras, se emplea la señal de error generada al comparar la respuesta local y la real para obtener un término "corrector" que sea capaz de añadir comportamientos no incluidos en el término local. Sin embargo, a pesar de ser un término de corrección, la estructura del modelo de respuesta no local,

ecuaciones (7.3-26) y (7.3-27), es similar al modelo de respuesta local mostrado en las ecuaciones (7.3-21) y (7.3-22), donde la única diferencia reside en el vector de salidas, el cual hace referencia a las variables \hat{E} , y que se definen como el error entre el modelo de respuesta local y la salida real del proceso.

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ X(k+2) \\ \vdots \\ X(k+H) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) \left(\hat{A}_i^e \begin{bmatrix} X_u(k) \\ X_{\Delta u}(k) \\ X_y(k) \end{bmatrix} + \hat{B}_i^e \begin{bmatrix} \Delta U_1(k) \\ \Delta U_2(k) \\ \vdots \\ \Delta U_{nu}(k) \end{bmatrix} \right) \quad (7.3-26)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1(k+1) \\ \hat{E}_2(k+1) \\ \vdots \\ \hat{E}_{ny}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{E}_1(k+H) \\ \hat{E}_2(k+H) \\ \vdots \\ \hat{E}_{ny}(k+H) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) \left(\hat{C}_i^e \begin{bmatrix} X_u(k) \\ X_{\Delta u}(k) \\ X_y(k) \end{bmatrix} \right) \quad (7.3-27)$$

El objetivo en esta etapa del algoritmo es la obtención de las matrices de A_i^e , B_i^e y C_i^e que definen el modelo de respuesta no local, basando la identificación de las mismas en la señal de error entre modelo de respuesta local y la respuesta real para todo el horizonte de predicción. Por tanto, la obtención de todos los parámetros de las matrices del modelo se plantea como la resolución de un conjunto H de problemas de mínimos cuadrados ponderados consecutivos. La estrategia de identificación se basa en repetir el proceso de diseño introducido en el apartado 7.3.2.

En primer lugar, se debe obtener la matriz ampliada $\hat{\Psi}_y$ descrita por la ecuación (7.3-28) que presenta los datos experimentales procedentes de las salidas del proceso en una ventana de predicción H .

$$\hat{\Psi}_y = \begin{bmatrix} Y_1(k+1) & Y_1(k+2) & \cdots & Y_1(k+N) \\ Y_2(k+1) & Y_2(k+2) & \cdots & Y_2(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ny}(k+1) & Y_{ny}(k+2) & \cdots & Y_{ny}(k+N) \\ Y_1(k+2) & Y_1(k+3) & \cdots & Y_1(k+N+1) \\ Y_2(k+2) & Y_2(k+3) & \cdots & Y_2(k+N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ny}(k+2) & Y_{ny}(k+3) & \cdots & Y_{ny}(k+N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1(k+H) & Y_1(k+H+1) & \cdots & Y_1(k+N+H-1) \\ Y_2(k+H) & Y_2(k+H+1) & \cdots & Y_2(k+N+H-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ny}(k+H) & Y_{ny}(k+H+1) & \cdots & Y_{ny}(k+N+H-1) \end{bmatrix}^T \quad (7.3-28)$$

Por otro lado, se define la matriz de respuesta local del sistema para todos los instantes de muestreo N que se han obtenido como $\hat{\Psi}_{\hat{y}}$ y, se define el error entre la respuesta local y la del proceso como $\hat{E}_y = \hat{\Psi}_y - \hat{\Psi}_{\hat{y}}$, donde la matriz resultante viene descrita por la ecuación (7.3-29).

$$\hat{E}_y = \begin{bmatrix} Y_1(k+1) - \hat{Y}_1(k+1) & \cdots & Y_1(k+N) - \hat{Y}_1(k+N) \\ Y_2(k+1) - \hat{Y}_2(k+1) & \cdots & Y_2(k+N) - \hat{Y}_2(k+N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ny}(k+1) - \hat{Y}_{ny}(k+1) & \cdots & Y_{ny}(k+N-1) - \hat{Y}_{ny}(k+N) \\ Y_1(k+2) - \hat{Y}_1(k+2) & \cdots & Y_1(k+N-1) - \hat{Y}_1(k+N+1) \\ Y_2(k+2) - \hat{Y}_2(k+2) & \cdots & Y_2(k+N-1) - \hat{Y}_2(k+N+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ny}(k+2) - \hat{Y}_{ny}(k+2) & \cdots & Y_{ny}(k+N-1) - \hat{Y}_{ny}(k+N+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1(k+H) - \hat{Y}_1(k+H) & \cdots & Y_1(k+N-H+1) - \hat{Y}_1(k+N+H-1) \\ Y_2(k+H) - \hat{Y}_2(k+H) & \cdots & Y_2(k+N-H+1) - \hat{Y}_2(k+N+H-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ny}(k+H) - \hat{Y}_{ny}(k+H) & \cdots & Y_{ny}(k+N-H+1) - \hat{Y}_{ny}(k+N+H-1) \end{bmatrix}^T \quad (7.3-29)$$

Por tanto, a partir de la matrices \hat{E}_y y $\hat{\Psi}_z$ se puede obtener el conjunto de parámetros $\hat{\Theta}_e$ de los modelos no locales mediante la resolución de un conjunto de problemas de mínimos cuadrados, tal y como se muestra a continuación:

PARA $j = 2$ HASTA $j = H$, RESUÉLVASE:

$$\hat{E}_y(j) = \hat{\Psi}_z \hat{\Theta}_e(j) \rightarrow \hat{\Theta}_e(j) = \left[\hat{\Psi}_z^T(j) \hat{\Psi}_z(j) \right]^{-1} \hat{\Psi}_z(j)^T \hat{E}_y(j) \quad (7.3-30)$$

Donde $\hat{E}_y(j)$ es la submatriz que contiene las $j \cdot ny$ primeras columnas de la matriz \hat{E}_y . Por otra parte, $\hat{\Psi}_z(j)$ se define como $[\hat{\Psi}_z \ \hat{\Psi}_u(j)]$ donde $\hat{\Psi}_u(j)$ es la submatriz compuesta por las $j \cdot nu$ primeras columnas de matriz $\hat{\Psi}_u$ descrita en la ecuación (7.3-31).

$$\hat{\Psi}_u = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_h(k+1) \otimes \hat{\Psi}_u(k+1) \\ \hat{\psi}_h(k+2) \otimes \hat{\Psi}_u(k+2) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_h(k+N-1) \otimes \hat{\Psi}_u(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (7.3-31)$$

siendo $\hat{\Psi}_u(k+1)$,

$$\hat{\Psi}_u(k+1) = \begin{bmatrix} U_1(k+1) & \cdots & U_{nu}(k+1) & \cdots & U_1(k+H-1) & \cdots & U_{nu}(k+H-1) \end{bmatrix} \quad (7.3-32)$$

La resolución del conjunto de problemas de mínimos cuadrados planteados a lo largo del horizonte de predicción, proporciona la completa definición de las matrices A_i^e , B_i^e y C_i^e que se plateaban como objetivo en esta etapa de algoritmo. Por tanto, tras este paso se obtiene un predictor borroso compuesto por la suma de la respuesta local y la no local o, lo que es lo mismo, la suma de los parámetros identificados en cada una de las dos etapas.

7.3.5 Actualización mediante Algoritmos Genéticos

La etapa de optimización tiene como objetivo la obtención del conjunto de parámetros M_{ip}^c y M_{ip}^σ de las funciones de pertenencia que minimizan el error absoluto entre el predictor y la respuesta real. Teniendo en cuenta que el problema de minimización que se plantea es no convexo y naturaleza no lineal, el tipo de técnicas de optimización que pueden ser empleadas con éxito es reducido. Dentro de este grupo, los algoritmos genéticos han demostrado su capacidad de resolución en problemas de optimización que cumplen las características anteriormente mencionadas. Sin embargo, la gran desventaja que presenta esta técnica es el alto coste computacional, siendo habitual el uso de plataformas específicas como clusters de computación o mainframes.

7.3.5.1 Definición del Algoritmo Genético Empleado

Un algoritmo genético (GA) es una técnica de optimización que realiza la búsqueda de la solución del problema de optimización imitando los mecanismos de evolución de las especies [Goldberg 1989], [Holland 1975]. En este tipo de algoritmos, un conjunto de individuos (que llamaremos población) cambia de generación en generación sufriendo un proceso de evolución adaptándose cada vez mejor al entorno.

En un problema de optimización, disponemos de una función a optimizar (maximizar o minimizar) y una zona donde buscar el óptimo (espacio de búsqueda), a cada punto del espacio de búsqueda le corresponde un valor de la función anterior, el objetivo es encontrar el punto que optimice (minimice o maximice) dicha función.

Trasladado el problema de optimización a un GA, los distintos puntos del espacio de búsqueda se identifican con los posibles individuos distintos de una población. Como ocurre con la genética natural, cada individuo se caracteriza por su o sus cromosomas, en el problema de optimización el cromosoma de un individuo está constituido por las coordenadas del punto en el espacio de búsqueda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Siguiendo con el símil, cada una de las coordenadas correspondería a un gen.

El valor de la función de coste de un individuo (un punto del espacio) debe interpretarse como el grado de adaptación al entorno de dicho individuo. Por ejemplo, si el problema consiste en encontrar el mínimo de una función $J(\mathbf{x})$, se entiende que un individuo está mejor adaptado al entorno que otro si el valor de la función para ese individuo es menor.

Una vez establecidas, por una parte, las relaciones entre individuos (sus cromosomas) y los puntos del espacio de búsqueda, y por otra parte, el grado de adaptación al entorno y la función a minimizar, queda por describir como se produce la evolución de una población.

Para ello se plantean distintos tipos de operaciones sobre la población, lo que se conoce como operadores genéticos. El mecanismo general de funcionamiento de un GA se podría resumir como sigue:

A partir de una población inicial (normalmente generada de forma aleatoria), se producen los siguientes pasos para generar la siguiente generación:

1. Se seleccionan unos individuos para la siguiente generación. La selección se realiza en función de su nivel de adaptación (valor de su función de coste). Aquellos individuos que tiene un valor $J(\mathbf{x})$ más bajo tienen mayor probabilidad de ser elegidos. Obviamente, en un problema de minimización menor valor de la función a optimizar indica que el individuo es mejor. Para el caso de problemas de maximización, los razonamientos son los contrarios.

2. Se producen cruces entre individuos de la nueva generación que consisten en un intercambio de genes entre cromosomas (es decir, intercambio de coordenadas entre puntos). La tasa de individuos que se cruzan se ajusta con la probabilidad de cruce P_c . Se trata de mezclar los cromosomas de dos individuos de manera que se dispone de un mecanismo para explorar puntos diferentes del espacio de búsqueda. Se considera que este tipo de exploración del espacio de búsqueda es orientada, se basa en la información de los individuos padres y lo que se pretende es extraer las cualidades potenciales que ya existen en la población.
3. Algunos de los individuos de la nueva generación sufren mutaciones que consisten en variaciones aleatorias de los genes (es decir, variaciones aleatorias de las coordenadas de un punto). La probabilidad de mutación se ajusta con el parámetro P_m . Al igual que las operaciones de cruce, la mutación permite explorar zonas diferentes del espacio de búsqueda. Sin embargo, esta exploración no orientada es totalmente aleatoria, pretende desarrollar la capacidad de exploración de zonas que no pueden ser exploradas por los individuos existentes en la población actual.

En este marco general, aparecen diversas variantes en la implementación de los GA; variando el tipo de codificación de los genes, variando los mecanismos de selección, cruce o mutación, incorporando nuevos operadores genéticos [Goldberg 1989], [Michalewicz 1996], etc.

La implementación que se ha realizado en este caso particular presenta las siguientes características:

1. La codificación se realiza con números reales [Michalewicz 1996], cada gen tiene un valor real.
2. La función de coste utilizada para la operación de selección no es directamente $J(\mathbf{x})$. Se realiza una operación de 'ranking' [Blasco 1999 (In Spanish)], [Back 1996] que consiste en ordenar de mayor a menor valor los individuos según su valor $J(\mathbf{x})$. Se cambia el valor de $J(\mathbf{x})$ por su posición en dicha clasificación, cada individuo tiene un nuevo valor $J'(\mathbf{x})$ que corresponde a su número de orden. Con esta operación se consigue que los individuos claramente dominantes no predominen demasiado rápido en la población, agotando prematuramente el algoritmo (este aspecto es especialmente importante en el caso de poblaciones con pocos individuos).

La tabla (7.3-33) muestra un ejemplo del resultado de la operación de ranking para una población de cuatro individuos.

	$J(\mathbf{x})$	$J'(\mathbf{x})$
\mathbf{x}_1	10.51	1
\mathbf{x}_2	0.32	4
\mathbf{x}_3	1.25	3
\mathbf{x}_4	6.21	2

(7.3-33)

3. La operación de selección que se realiza se conoce como *Stochastic Universal Sampling (SUS)* [Baker 1987]. Garantiza que la probabilidad de supervivencia ($P(\mathbf{x}_i)$) de un individuo (\mathbf{x}_i) viene dada por la ecuación (7.3-34).

$$P(\mathbf{x}_i) = \frac{J'(\mathbf{x}_i)}{\sum_{j=1}^{N_{ind}} J'(\mathbf{x}_j)} \quad (7.3-34)$$

Donde N_{ind} es el número de individuos. El algoritmo implementado presenta un número de individuos por defecto igual a 50, obviamente este parámetro puede ser modificado por el diseñador en función de los resultados obtenidos. Sin embargo, los diferentes experimentos que se han realizado en la identificación de procesos, ha resultado satisfactorio con un número de 50 individuos. Asimismo, la población de individuos evolucionan a lo largo de un tiempo finito de iteraciones, las cuales se han fijado en 500 teniendo en cuenta los resultados que se han obtenido de manera experimental.

Según esto, para la población de la tabla (7.3-33) la probabilidad de supervivencia y el número de individuos esperados de cada tipo en la nueva población de 4 individuos, se muestra en la tabla (7.3-35):

	$P(\mathbf{x}_i)$	Num.de individuos esperados
\mathbf{x}_1	0.1	0.4
\mathbf{x}_2	0.4	1.6
\mathbf{x}_3	0.3	1.2
\mathbf{x}_4	0.2	0.8

(7.3-35)

En este ejemplo el operador SUS garantiza 1 individuo de tipo \mathbf{x}_2 y otro de \mathbf{x}_3 los dos restantes pueden ser de cualquier tipo dependiendo del número aleatorio generado para la selección.

4. Para el cruce de los cromosomas se utiliza el operador *intermediate recombination* [Mühlenbein & Schlierkamp-Voosen 1993]. Los individuos hijos (\mathbf{x}'_1 y \mathbf{x}'_2) se obtienen realizando la siguiente operación sobre los individuos padres (\mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha_1)\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}'_2 &= \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + (1 - \alpha_2)\mathbf{x}_1 \\ \alpha_1 &\in [-d, 1 + d] \\ \alpha_2 &\in [-d, 1 + d] \end{aligned}$$

Este cruce se puede realizar sobre todo el cromosoma, o sobre cada uno de los genes por separado. En este segundo caso los parámetros aleatorios $\alpha_{1,2}$ se tienen que generar para cada gen incrementando el coste computacional pero ofreciendo una mayor capacidad de exploración.

En el algoritmo genético implementado se han ajustado:

- los valores aleatorios $\alpha_1 = \alpha_2$, y se generan para cada cromosoma.
- $d = 0$

La probabilidad de cruce se ha ajustado a $P_c = 0.8$.

5. La operación de mutación, variación aleatoria de alguna parte del cromosoma, se produce con una probabilidad de $P_m = 0.1$. El cambio provocado en ese parámetro es generado por una distribución normal, de media el valor del parámetro antes de la mutación y de desviación típica el 20% del rango de búsqueda de ese parámetro. Con esto se consigue que el resultado de la mutación tenga más probabilidad de estar cerca del valor original.

7.3.5.2 Función de Coste

Una vez introducido el algoritmo de optimización que se emplea queda por definir la función de coste J a minimizar. Teniendo en cuenta que el objetivo global es la obtención de un predictor que represente de la manera más fidedigna posible el comportamiento de un sistema real, no es de extrañar que la función de coste se base en la minimización del error entre dicho predictor y la respuesta real, tal y como se muestra en la ecuación (7.3-36).

$$J(M_{ip}^c, M_{ip}^\sigma) = \sum_1^N \|\hat{\Psi}_y - \hat{\Psi}_y^*\| \quad (7.3-36)$$

Donde $\hat{\Psi}_y$ son las salidas del sistema en todo el horizonte de predicción para todas las muestras (ecuación (7.3-28)) obtenidas a partir de los datos experimentales que se utilizan para validación y, $\hat{\Psi}_y^*$ corresponde a la salidas estimadas por el predictor total.

Por tanto, la etapa de optimización tratará de ajustar los valores de las funciones de pertenencia en cada iteración del algoritmo intentando minimizar el valor absoluto del error y , por tanto, intentando ajustar el comportamiento global del sistema.

7.3.5.3 Coste Computacional

La gran desventaja de los algoritmos de optimización basados en genéticos es el alto coste computacional necesario para resolver el problema. Afortunadamente, el avance en el campo de computación paralela y distribuido ha permitido que este tipo de algoritmos puedan ser empleados en la práctica.

Los algoritmos genéticos son excelentes candidatos para emplear técnicas distribuidas de computación, ya que su propia naturaleza es fácilmente paralelizable. Esto es debido a que cada individuo del algoritmo puede ser entendido como un problema individual, de manera que la población de individuos son en realidad un conjunto de *Nind* problemas iguales. Por tanto, no existe ninguna dificultad añadida en computar cada uno de los individuos de manera separada o distribuida. Posteriormente, los resultados de todos los individuos es evaluada y procesada tal y como se ha indicado con anterioridad.

Las opciones de hardware necesario para llevar a cabo una ejecución distribuida en paralelo es amplio, ya que se puede acudir a la utilización de super-computadores, clusters de computación o incluso grandes sistemas grid compuesto por ordenadores estándar conectados mediante una red ethernet. Durante la realización de esta tesis, se ha empleado un cluster de computación formado por ordenadores de sobremesa de características estándar y conectados mediante una red ethernet, donde el componente fundamental ha sido el una herramienta de Matlab denominada *Distributed Toolbox* que permite de manera sencilla la ejecución en paralelo del algoritmo de optimización empleado.

7.4 Ejemplo de identificación de un predictor FLAP

El ejemplo que se propone se basa en la identificación de un sistema mecánico que consta de un péndulo invertido, el cual se encuentra gobernado mediante un motor de continua con reductora, tal y como muestra la figura 8.1. Este sistema mecánico ha sido empleado por distintos autores, como por ejemplo [Kuschewski *et al.* 1993], [Kawamoto 1996] o [Tanaka & Wang 2001], como proceso sobre el cual aplicar nuevas estrategias de identificación y/o control.

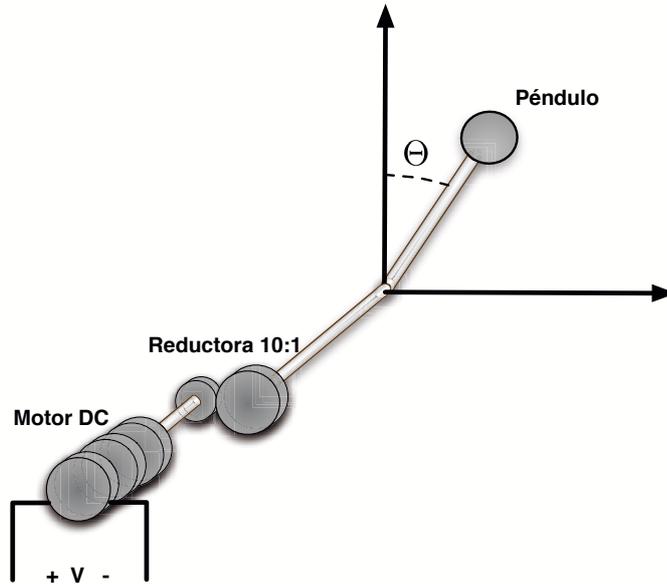


FIGURA 7.4: Representación del péndulo invertido y motor con reductora.

Las ecuaciones de estado no lineales que rigen el comportamiento dinámico del sistema se muestran en la ecuación (7.4-1), donde la variable de estado X_1 describe el ángulo del péndulo, la variable X_2 representa la velocidad angular, mientras que X_3 es la corriente de excitación del motor y U la tensión de alimentación.

El objetivo es obtener un predictor borroso empleando la metodología descrita en los apartados anteriores, a partir de un conjunto de datos experimentales entrada-salida, obtenidos del modelo no lineal descrito en la ecuación (7.4-1).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 9.8\text{sen}(x_1) + x_3 \\ -10x_2 - 10x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \quad (7.4-1)$$

Los parámetros que se han establecido para la identificación del modelo de predicción son los siguientes:

- **Reglas TS:** se han establecido dos reglas TS con el objetivo de capturar el comportamiento del sistema. La decisión del número de reglas a emplear responde principalmente a un proceso iterativo, donde generalmente se empieza utilizando un conjunto reducido de reglas. Si el resultado no resulta satisfactorio se aumenta el número de reglas a emplear.
- **Horizonte de predicción y control:** el horizonte de control y predicción se ha fijado en $H = 10$ de manera que el predictor FLAP debe ser capaz de generar el conjunto de predicciones de la salida desde el instante 1 hasta el 10.

- Variables de decisión:** se han determinado dos variables de decisión para los antecedentes de las reglas TS, la variables $U(k - 1)$ y $Y(k - 1)$. Ambas variables son un subconjunto del vector de estados que se establece a partir de la estructura de los consecuentes que se ha seleccionado, tal y como se muestra en las ecuaciones (7.4-3) y (7.4-4).

$$Y(k + 1) = F(U(k - 1), U(k), Y(k - 1), Y(k)) \quad (7.4-2)$$

$$\begin{bmatrix} U(k) \\ Y(k) \\ \hat{Y}(k + 1) \\ \hline U(k + 1) \\ Y(k + 1) \\ \hat{Y}(k + 2) \\ \hline \vdots \\ \hline U(k + 9) \\ Y(k + 9) \\ \hat{Y}(k + 10) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) \left(\hat{A}_i^H \begin{bmatrix} U(k - 1) \\ Y(k - 1) \\ Y(k) \end{bmatrix} + \hat{B}_i^H [\Delta U(k)] \right) \quad (7.4-3)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}(k + 1) \\ \hat{Y}(k + 2) \\ \vdots \\ \hat{Y}(k + 10) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) \left(\hat{C}_i^H \begin{bmatrix} U(k - 1) \\ Y(k - 1) \\ Y(k) \end{bmatrix} \right) \quad (7.4-4)$$

- Funciones de pertenencia:** las funciones de pertenencia serán definidas según la ecuación (7.3-5). En particular, cada variable de decisión presentará dos funciones de pertenencia, ya que se han establecido dos reglas TS para el modelo de predicción. Los parámetros de inicialización de las funciones de pertenencia son $M_{11}^c = 0.25$, $M_{11}^s = 0.5$, $M_{12}^c = 0.75$, $M_{12}^s = 0.5$, $M_{21}^c = 0.75$, $M_{21}^s = 0.5$, $M_{22}^c = 0.25$ y $M_{22}^s = 0.5$.
- Estructura de los consecuentes:** el sistema a identificar, descrito por la ecuación (7.4-1), es un proceso SISO ya que presenta una salida y una entrada. La estructura que se ha seleccionado para la identificación de dicho proceso a partir del conjunto de datos experimentales se muestra en la ecuación (7.4-2). A partir de dicha estructura, las ecuaciones (7.4-3) y (7.4-4), establecen la representación del predictor, donde los consecuentes vienen definidos mediante representación en espacio de estados.

Los resultados obtenidos tras la identificación se exponen empleando dos elementos de análisis distintos. En primer lugar, las figuras 7.6 a 7.15 muestran los resultados temporales obtenidos, en estas gráficas se muestra de manera comparativa la señal de predicción real, la identificada con el método que se propone y la predicción que se obtendría empleando el método descrito en la introducción e introducido en [Zhang *et al.* 2007b]. En segundo lugar, la figura 7.5 muestra los resultados obtenidos empleando el índice *VAF* (*Variance Accounted For*), el cual fue introducido en el capítulo 4 y definido según la ecuación (6.1-21).

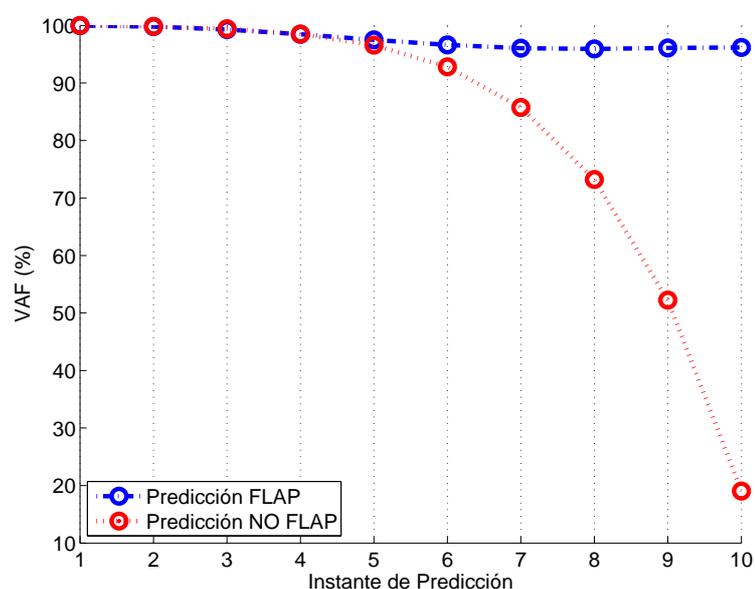


FIGURA 7.5: Evolución del índice *VAF* en cada instante de predicción.

El análisis detenido de los resultados presentados en las distintas figuras permite comprobar como el método propuesto consigue obtener unos resultados de validación aceptables, ya que tanto el comportamiento temporal que se observa en las gráficas, como los valores del índice de precisión *VAF* son satisfactorios. Sin embargo, el resultado de mayor interés es la comparación entre el método descrito en [Zhang *et al.* 2007b] y el propuesto, ya que se observa como a medida que el horizonte de predicción aumenta el comportamiento de ambos métodos diverge sustancialmente. De hecho, el método introducido en [Zhang *et al.* 2007b], pierde precisión de manera exponencial a partir del instante de predicción $H = 5$, mientras que el predictor FLAP consigue mantener un grado de precisión aceptable, tal y como se puede observar en la figura 7.5.

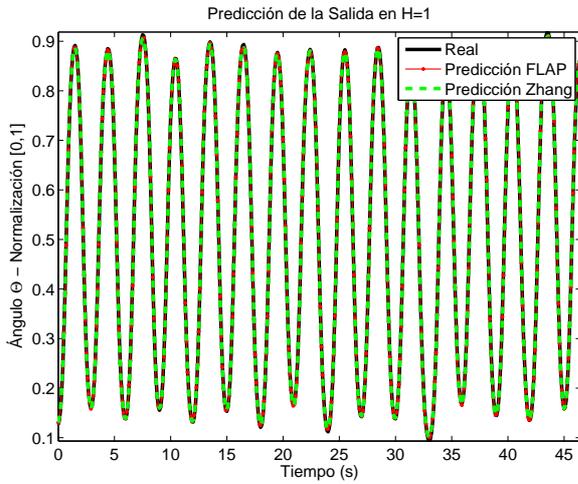


FIGURA 7.6: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 1$.

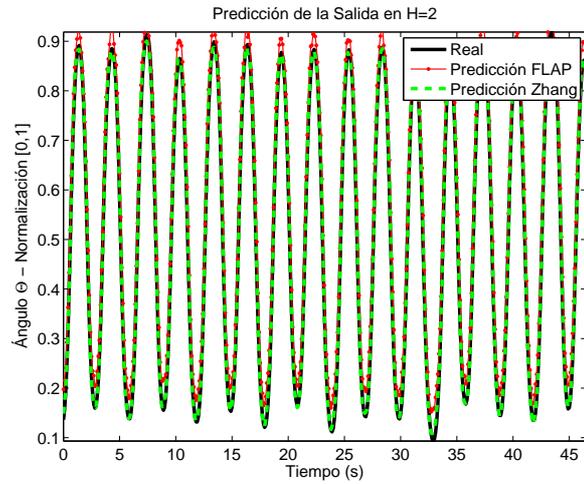


FIGURA 7.7: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 2$.

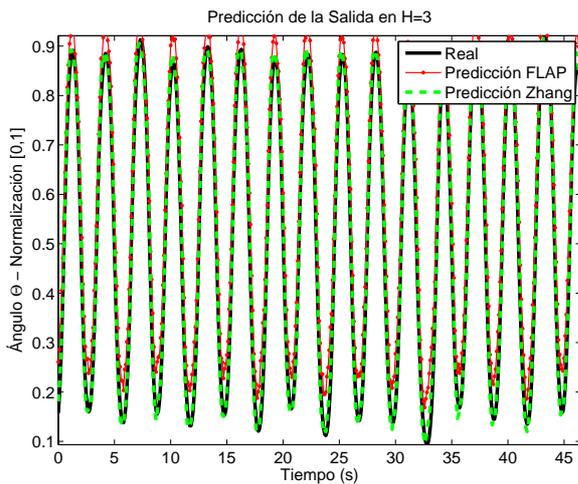


FIGURA 7.8: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 3$.

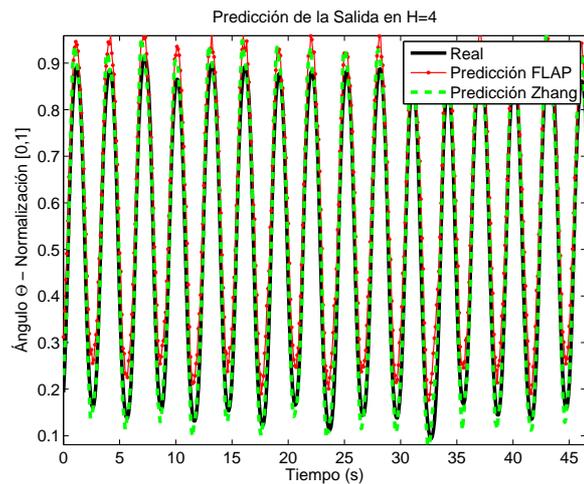


FIGURA 7.9: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 4$.

Las figuras 7.16 y 7.17, donde se pueden observar las funciones de pertenencia obtenidas para las variables de decisión $U(k - 1)$ y $Y(k - 1)$ respectivamente. Cabe recordar que los parámetros de estas funciones de pertenencia son precisamente las variables de

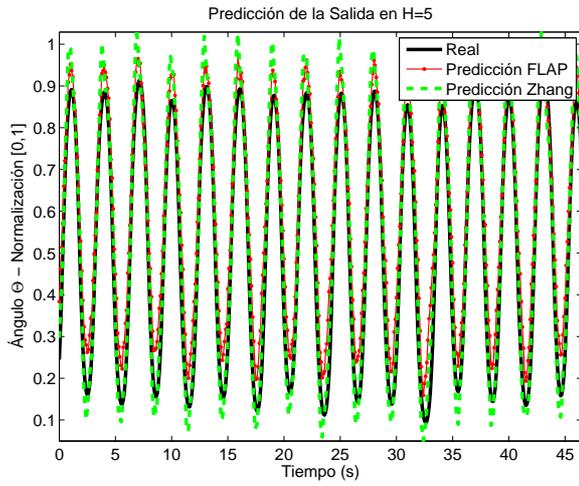


FIGURA 7.10: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 5$.

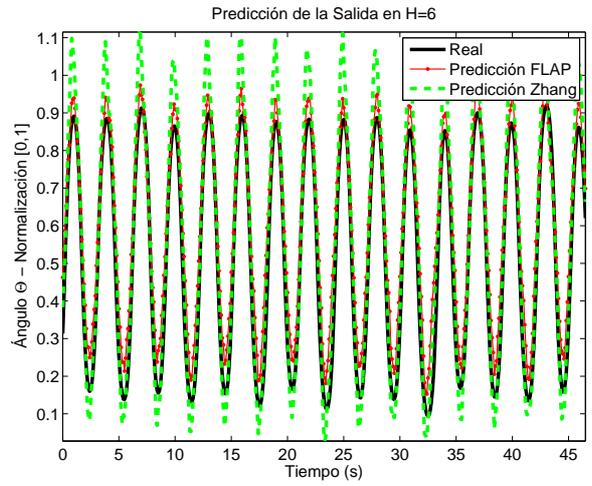


FIGURA 7.11: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 6$.

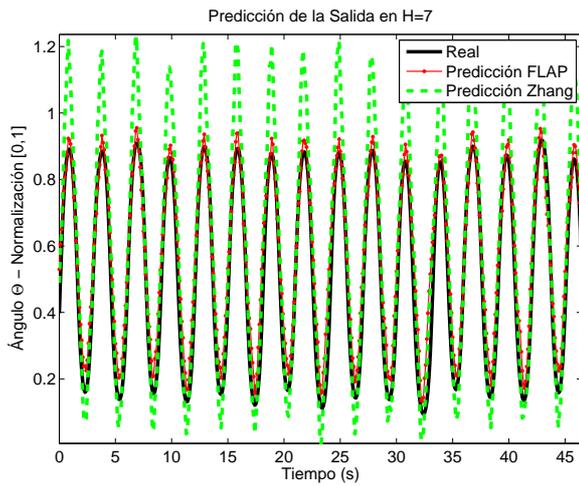


FIGURA 7.12: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 7$.

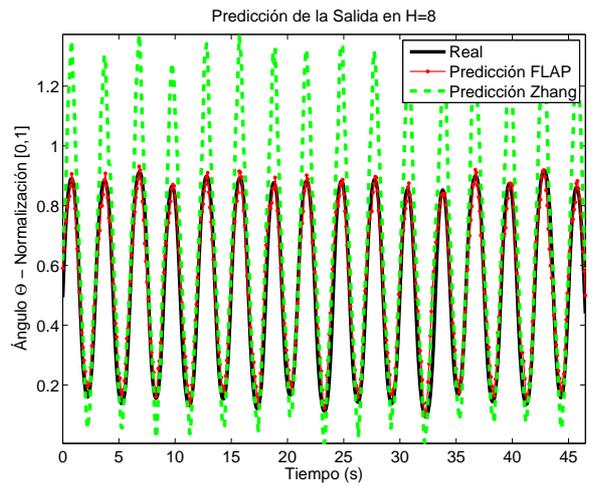


FIGURA 7.13: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 8$.

búsqueda dentro del algoritmo de actualización mediante una optimización basada en algoritmo genético.

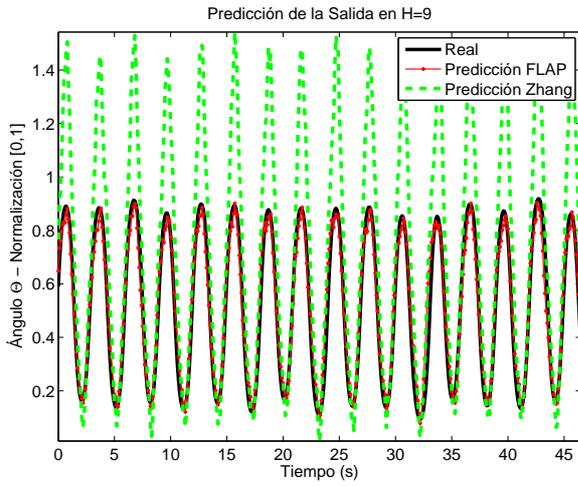


FIGURA 7.14: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 9$.

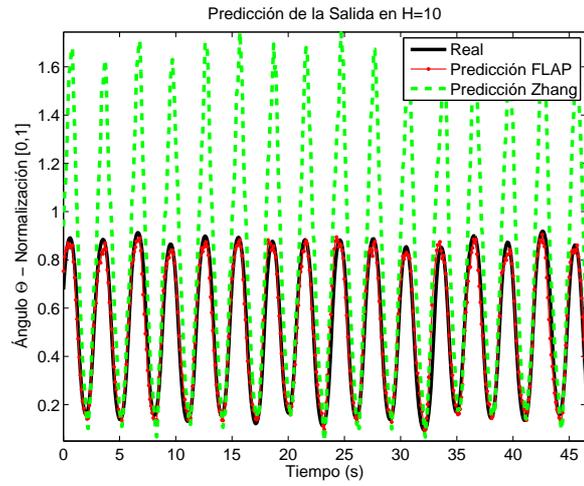


FIGURA 7.15: Comparación de los resultados de identificación en el instante $H = 10$.

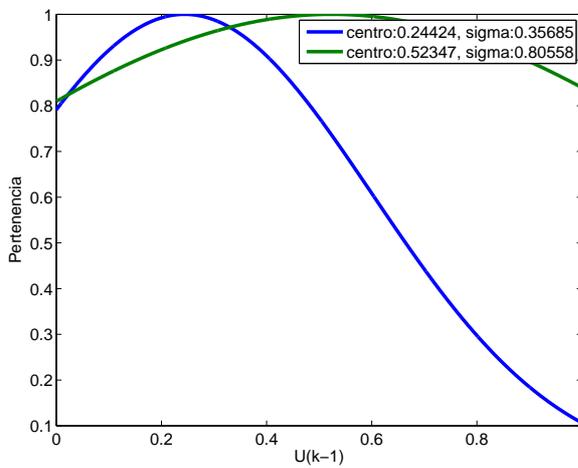


FIGURA 7.16: Funciones de pertenencia de la variable de decisión $U(k - 1)$.

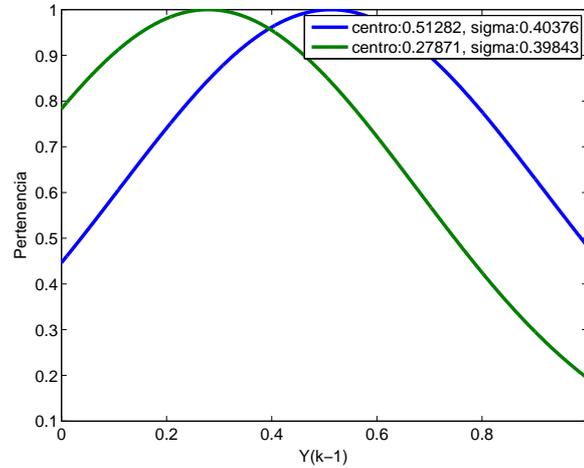


FIGURA 7.17: Funciones de pertenencia de la variable de decisión $Y(k - 1)$.

Por último, se muestran las matrices del modelo de dos reglas obtenidas mediante el algoritmo de identificación introducido en este capítulo.

$$A_1^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0085 & -1.1 & 2.1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.0085 & -1.1 & 2.1 \\ 0.099 & -1.4 & 2.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.027 & -2.4 & 3.4 \\ 0.17 & -1.8 & 2.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.056 & -3.8 & 5 \\ 0.22 & -1.8 & 2.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.098 & -5.5 & 6.8 \\ 0.22 & -1.7 & 2.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.16 & -7.5 & 9 \\ 0.19 & -1.5 & 1.9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.23 & -10 & 12 \\ 0.17 & -1.2 & 1.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.33 & -13 & 15 \\ 0.17 & -1.1 & 1.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.46 & -16 & 19 \\ 0.25 & -0.92 & 1.1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.62 & -21 & 24 \\ 0.39 & -0.77 & 0.92 \end{bmatrix}, (C_1^{10})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.4-5}$$

$$B_1^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.047 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0064 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.029 & -0.061 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.023 & 0.0064 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.17 & 0.088 & 0.0073 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.051 & 0.023 & 0.0064 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.23 & 0.15 & 0.066 & -0.031 & -0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.091 & 0.051 & 0.023 & 0.0064 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0.2 & 0.13 & 0.031 & -0.026 & -0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.091 & 0.051 & 0.023 & 0.0064 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.25 & 0.18 & 0.1 & 0.043 & -0.024 & -0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.22 & 0.15 & 0.091 & 0.051 & 0.023 & 0.0064 & -0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.39 & 0.31 & 0.24 & 0.16 & 0.11 & 0.047 & -0.036 & -0.13 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.32 & 0.22 & 0.15 & 0.091 & 0.051 & 0.023 & 0.0064 & -0.001 & 0 & 0 \\ 0.47 & 0.38 & 0.3 & 0.22 & 0.18 & 0.12 & 0.034 & -0.046 & -0.14 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.44 & 0.32 & 0.22 & 0.15 & 0.091 & 0.051 & 0.023 & 0.0064 & -0.001 & 0 \\ 0.57 & 0.46 & 0.37 & 0.29 & 0.24 & 0.19 & 0.11 & 0.028 & -0.057 & -0.16 \end{bmatrix} \quad (7.4-6)$$

$$A_2^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.034 & -0.96 & 1.9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.034 & -0.96 & 1.9 \\ 0.073 & -1.5 & 2.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -1.8 & 2.7 \\ 0.16 & -1.9 & 2.8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.19 & -2.6 & 3.3 \\ 0.27 & -2 & 2.8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & -3.1 & 3.7 \\ 0.38 & -1.9 & 2.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.43 & -3.5 & 3.8 \\ 0.5 & -1.7 & 2.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.56 & -3.7 & 3.8 \\ 0.61 & -1.5 & 2.1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.69 & -3.6 & 3.6 \\ 0.72 & -1.5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.82 & -3.4 & 3.1 \\ 0.83 & -1.5 & 1.9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.92 & -3 & 2.6 \\ 0.94 & -1.5 & 1.8 \end{bmatrix}, (C_2^{10})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.4-7}$$

$$B_2^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.036 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.042 & 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.11 & 0.04 & 0.015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.11 & 0.042 & 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.22 & 0.11 & 0.036 & 0.014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.21 & 0.11 & 0.042 & 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0.21 & 0.1 & 0.035 & 0.017 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.32 & 0.21 & 0.11 & 0.042 & 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.49 & 0.34 & 0.2 & 0.1 & 0.038 & 0.022 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0.32 & 0.21 & 0.11 & 0.042 & 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.64 & 0.47 & 0.31 & 0.19 & 0.096 & 0.037 & 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.58 & 0.45 & 0.32 & 0.21 & 0.11 & 0.042 & 0.004 & 0 & 0 & 0 \\ 0.77 & 0.61 & 0.44 & 0.3 & 0.18 & 0.09 & 0.049 & 0.053 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.71 & 0.58 & 0.45 & 0.32 & 0.21 & 0.11 & 0.042 & 0.004 & 0 & 0 \\ 0.89 & 0.74 & 0.58 & 0.43 & 0.29 & 0.17 & 0.095 & 0.05 & 0.055 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.83 & 0.71 & 0.58 & 0.45 & 0.32 & 0.21 & 0.11 & 0.042 & 0.004 & 0 \\ 0.98 & 0.86 & 0.72 & 0.57 & 0.43 & 0.29 & 0.18 & 0.091 & 0.047 & 0.036 \end{bmatrix} \quad (7.4-8)$$

7.5 Conclusiones

El objetivo principal de este capítulo era la obtención de un predictor capaz de emplear los modelos borrosos TS sin tener que introducir un coste computacional excesivo y, por tanto, pudiendo ser empleado posteriormente en el diseño de sistema de control predictivo. A partir de la principal alternativa existente en la literatura [Zhang *et al.* 2007b], se han determinado los problemas relacionados con dicha propuesta y se ha planteado una nueva solución que introduce mejoras en el comportamiento del predictor.

La descripción cualitativa y cuantitativa del algoritmo propuesto ha sido desarrollada en los apartados anteriores, definiendo cada uno de los elementos y las interacciones entre los mismos, tal y como se introdujo en las figuras 7.1 y 7.2. Finalmente, se ha presentado la aplicación del algoritmo en un ejemplo sencillo. Los resultados obtenidos han sido comparados con la propuesta de [Zhang *et al.* 2007b], mostrando un mejor comportamiento en todo el horizonte de predicción y unos resultados globales satisfactorios.

Bibliografía

- ABONYI, J. 2003. *Fuzzy Model Identification for Control*.
- BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.
- BACK, T. 1996. *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*. New York: Oxford University Press.
- BAKER, J.E. 1987. *Reducing Bias and Inefficiency in the Selection Algorithms*. Grefenstette, J.J. (ed.) edn. Vol. Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,. Pages 14-21.
- BLASCO, F.X. 1999 (In Spanish). *Model based predictive control using heuristic optimization techniques. Application to non-linear and multivariables proceses*. Ph.D. thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.
- CAMACHO, E.F., & BORDONS, C. 2004. *Model Predictive Control*.
- DÍEZ, J., NAVARRO, J., & SALA, A. 2004. Algoritmos de agrupamiento en la identificación de modelos borrosos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática*, Jan.
- GARCÍA-NIETO, S., SALCEDO, J., MARTÍNEZ, M., & LAURÍ, D. 2009. Air management in a diesel engine using fuzzy control techniques. *Information Sciences*, 179(19), 3392-3409.
- GOLDBERG, D.E. 1989. *Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley.
- GRAHAM, A. 1982. *Kronecker Products and Matrix Calculus: With Applications*. JOHN WILEY & SONS, INC., 605 THIRD AVE., NEW YORK, NY 10158, 1982, 130.
- HOLLAND, J.H. 1975. *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor: The University of Michigan Press.
- KAWAMOTO, S. 1996. Nonlinear control and rigorous stability analysis based on fuzzy system for inverted pendulum. *Fuzzy Systems*, 2(Jan), 1427-1432.

- KUSCHEWSKI, J., HUI, S., & ZAK, S. 1993. Application of feedforward neural networks to dynamical system identification and control. *IEEE Transactions on Control*, **1**(1), 37-49.
- MACIEJOWSKI, J. M. 2002. *Predictive Control with Constraints*.
- MICHALEWICZ, Z. 1996. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. 3rd edition edn. Springer series Artificial Intelligence. Springer.
- MÜHLENBEIN, H., & SCHLIERKAMP-VOOSEN, D. 1993. Predictive models for the Breeder Genetic Algorithm. I. Continuous parameter optimization. *Evolutionary Computation. The MIT Press*, **1**(1), 25-49.
- TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.
- ZHANG, T., & FENG, G. 2007. Output Tracking of Piecewise-Linear Systems via Error Feedback Regulator With Application to Synchronization of Nonlinear Chua's Circuit. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on [Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on]*, **54**(8), 1852 - 1863.
- ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2006. Observer based Fuzzy Integral Model Predictive Control using Piecewise Lyapunov Functions. *Fuzzy Systems, 2006 IEEE International Conference on*, Jan, 299 - 306.
- ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007a. Fuzzy Constrained Min-Max Model Predictive Control Based on Piecewise Lyapunov Functions. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, **15**(4), 686 - 698.
- ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007b. Stable Model Predictive Control of Fuzzy Affine Systems with Input and State Constraints. *Fuzzy Systems Conference, 2007. FUZZ-IEEE 2007. IEEE International*, Jun, 1 - 6.
- ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007c. Terminal Cost Constraint based Stable Fuzzy Model Predictive Control of A. Nonlinear Fluidized Bed Combustion Plant. *Intelligent Control, 2007. ISIC 2007. IEEE 22nd International Symposium on*, Sep, 401 - 406.

CAPÍTULO 8

Control Predictivo Borroso Mediante Predictor FLAP

"Predictive Control: A form of control that predicts what the process status will be at some point in the future and, using this information, modifies control outputs to get the process state to the desired value". [Glossary of Control Engineering Terms](#)

8.1 Introducción

El capítulo 7 introdujo en los apartados 7.1 y 7.2 la principal problemática existente a la hora de diseñar sistemas de control predictivos basados en modelos TS, así como una posible alternativa para superar algunas de las limitaciones existentes en la actualidad. A partir de dicha aportación, los apartados sucesivos describirán cómo emplear el predictor descrito en 7.2 para la obtención de un sistema de control predictivo.

La herramienta fundamental que se empleará en el diseño del controlador es la reformulación del problema en términos de LMIs, a partir de los conceptos introducidos en el capítulo 5. Asimismo, la metodología que se describirá permite el diseño de todo el sistema de control fuera de línea, pudiendo aplicar esta técnica en el diseño de sistemas de control para procesos con dinámicas rápidas o en sistemas de tiempo real.

8.2 Método de diseño

La idea fundamental en el diseño del controlador es la minimización de la cota superior γ del índice de coste definido por la ecuación (8.2-1). Esta propuesta se basa en las aportaciones descritas en [Tanaka & Wang 2001], las cuales fueron introducidas en el apartado 5.4.2.

$$J = \bar{X}^T Q \bar{X} + \Delta \bar{U}^T R \Delta \bar{U} \leq \gamma \quad (8.2-1)$$

Donde \bar{X} se define como $[X(k+1|k) \ X(k+2|k) \ \dots \ X(k+H|k)]^T$ y expresa el conjunto de predicciones de las variables de estado para un horizonte de predicción H . La obtención del vector \bar{X} es factible mediante la ecuación (8.2-2), la cual fue introducida en la figura 7.1 del capítulo 7 del capítulo anterior.

$$\begin{bmatrix} X(k+1|k) \\ X(k+2|k) \\ \vdots \\ X(k+H|k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) \left(A_i^H X(k) + B_i^H \begin{bmatrix} \Delta U(k|k) \\ \Delta U(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta U(k+T|k) \end{bmatrix} \right) \quad (8.2-2)$$

Por otra parte, el vector $\Delta \bar{U}$ se define como $[\Delta U(k|k) \ \Delta u(k+1|k) \ \dots \ \Delta U(k+T|k)]^T$ y hace referencia al conjunto de incrementos de las acciones de control futuras. Sin embargo, a diferencia de los controladores predictivos clásicos [Maciejowski 2002], el vector de acciones de control futuras no vendrá definido como resultado de un proceso de optimización, sino que presentará una estructura de control predefinida. En concreto, se propone la utilización de una ley de control PDC, la cual fue introducida en el apartado 5.2 y que responde a la siguiente ecuación:

REGLA i :

$$\text{Si } z_1(k) \text{ Es } M_{i1} \text{ Y } \dots \text{ Y } z_p(k) \text{ Es } M_{ip} \text{ Entonces} \quad (8.2-3)$$

$$\Delta \bar{U} = -K_i^H X(k) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Donde las ganancias K_i^H se calculan por minimización del índice (8.2-1) sujeto al modelo de predicción (8.2-2) y pudiendo reescribir el índice como:

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \{ X(k)^T (A_i^H)^T Q A_j^H X(k) + \Delta \bar{U}^T (B_i^H)^T Q (B_j^H) \Delta \bar{U} \\
 &\quad + 2X(k)^T (A_i^H)^T Q B_j^H \Delta U + \Delta \bar{U}^T R \Delta \bar{U} \} \leq \gamma \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^r h_i h_j h_m h_s \{ X(k)^T (A_i^H)^T Q A_j^H X(k) \\
 &\quad + X(k)^T (K_i^H)^T (B_j^H)^T Q (B_m^H) K_s^H X(k) - 2X(k)^T (A_i^H)^T Q B_j^H K_s^H X(k) \\
 &\quad + X(k)^T (K_i^H)^T R K_j^H X(k) \} \leq \gamma \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^r h_i h_j h_m h_s \{ X(k)^T [(A_i^H)^T Q A_j^H + (K_i^H)^T ((B_j^H)^T Q B_m^H + R) K_s^H] \\
 &\quad - 2X(k)^T (A_i^H)^T Q B_j^H K_m^H X(k) + X(k)^T (K_i^H)^T R K_j^H X(k) \} \leq \gamma \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^r h_i h_j h_m h_s \left\{ X(k)^T \begin{bmatrix} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \times \left. \begin{bmatrix} (B_j^H)^T Q (B_m^H) + R & -(B_j^H)^T Q \\ -Q (B_j^H) & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_s^H \\ A_s^H \end{bmatrix} X(k) \right\} \leq \gamma
 \end{aligned} \tag{8.2-4}$$

Aplicando el complemento de Schur, introducido en la ecuación (5.3-6) del capítulo 5, se puede reescribir la ecuación (8.2-4) en términos de LMIs:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^r h_i h_j h_m \left[\begin{array}{ccc} \gamma & X(k)^T \begin{bmatrix} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{bmatrix} \Theta_{jm} \\ \Theta_{jm}^T \begin{bmatrix} K_i^H \\ A_i^H \end{bmatrix} X(k) & & \Theta_{jm} \end{array} \right] \geq 0 \tag{8.2-5}$$

donde,

$$\Theta_{jm} = \begin{bmatrix} (B_j^H)^T Q (B_m^H) + R & -(B_j^H)^T Q \\ -Q (B_j^H) & Q \end{bmatrix} \tag{8.2-6}$$

Desarrollando el triple sumatorio de la ecuación (8.2-5) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^r h_i h_j h_m \left[\begin{array}{ccc} \gamma & X(k)^T \begin{bmatrix} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{bmatrix} \Theta_{jm} \\ \Theta_{jm}^T \begin{bmatrix} K_i^H \\ A_i^H \end{bmatrix} X(k) & & \Theta_{jm} \end{array} \right] = \tag{8.2-7}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^r h_i^3 \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{ii}^T \left[\begin{array}{c} K_i^H \\ A_i^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{array} \right] \Theta_{ii} \\ \Theta_{ii} \end{array} \right] \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j \geq i}^r 3h_i^2 h_j \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{ij}^T \left[\begin{array}{c} K_i^H \\ A_i^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{array} \right] \Theta_{ij} \\ \Theta_{ij} \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{ji}^T \left[\begin{array}{c} K_i^H \\ A_i^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{array} \right] \Theta_{ji} \\ \Theta_{ji} \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{ii}^T \left[\begin{array}{c} (K_j^H) \\ A_j^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_j^H)^T & (A_j^H)^T \end{array} \right] \Theta_{ii} \\ \Theta_{ii} \end{array} \right] \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j \geq i}^r h_i 3h_j^2 \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{jj}^T \left[\begin{array}{c} (K_i^H) \\ A_i^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{array} \right] \Theta_{jj} \\ \Theta_{jj} \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{ji}^T \left[\begin{array}{c} K_j^H \\ A_j^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_j^H)^T & (A_j^H)^T \end{array} \right] \Theta_{ji} \\ \Theta_{ji} \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{ij}^T \left[\begin{array}{c} K_j^H \\ A_j^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_j^H)^T & (A_j^H)^T \end{array} \right] \Theta_{ij} \\ \Theta_{ij} \end{array} \right] \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j \geq i}^r \sum_{m \geq j}^r h_i h_j h_m \frac{1}{6} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{jm}^T \left[\begin{array}{c} K_i^H \\ A_i^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{array} \right] \Theta_{jm} \\ \Theta_{jm} \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{6} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{mj}^T \left[\begin{array}{c} K_i^H \\ A_i^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{array} \right] \Theta_{mj} \\ \Theta_{mj} \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{6} \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \Theta_{mi}^T \left[\begin{array}{c} K_j^H \\ A_j^H \end{array} \right] X(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} X(k)^T \left[\begin{array}{cc} (K_j^H)^T & (A_j^H)^T \end{array} \right] \Theta_{mi} \\ \Theta_{mi} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \gamma & X(k)^T \begin{bmatrix} (K_j^H)^T & (A_j^H)^T \end{bmatrix} \Theta_{im} \\ \Theta_{im}^T \begin{bmatrix} K_j^H \\ A_j^H \end{bmatrix} X(k) & \Theta_{im} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \gamma & X(k)^T \begin{bmatrix} (K_m^H)^T & (A_m^H)^T \end{bmatrix} \Theta_{ji} \\ \Theta_{ji}^T \begin{bmatrix} K_m^H \\ A_m^H \end{bmatrix} X(k) & \Theta_{ji} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \gamma & X(k)^T \begin{bmatrix} (K_m^H)^T & (A_m^H)^T \end{bmatrix} \Theta_{ij} \\ \Theta_{ij}^T \begin{bmatrix} K_m^H \\ A_m^H \end{bmatrix} X(k) & \Theta_{ij} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8.2-8)
 \end{aligned}$$

Donde,

$$i = 1, \dots, r, j \geq i \text{ s.a. } h_j \cap h_i \neq 0, m \geq j \text{ s.a. } h_m \cap h_j \neq 0 \quad (8.2-9)$$

Asimismo, si se puede definir la matriz T_{ijm} como:

$$T_{ijm} \triangleq \begin{bmatrix} \gamma & X(k)^T \begin{bmatrix} (K_i^H)^T & (A_i^H)^T \end{bmatrix} \Theta_{jm} \\ \Theta_{jm}^T \begin{bmatrix} K_i^H \\ A_i^H \end{bmatrix} X(k) & \Theta_{jm} \end{bmatrix} \quad (8.2-10)$$

A partir de la definición de la ecuación (8.2-5) y teniendo en cuenta el desarrollo planteado en las ecuaciones (8.2-7)-(8.2-8), el conjunto de LMIs que permiten obtener la cota superior del problema de minimización planteado en la ecuación (8.2-4) son:

$$\gamma > 0,$$

$$T_{iii} > 0,$$

$$\frac{1}{3} (T_{iij} + T_{iji} + T_{jii}) > 0, \quad (8.2-11)$$

$$\frac{1}{3} (T_{jji} + T_{jij} + T_{ijj}) > 0,$$

$$\frac{1}{6} (T_{ijm} + T_{imj} + T_{jmi} + T_{jim} + T_{mji} + T_{mij}) > 0$$

A pesar de que la LMI (8.2-5) minimiza la cota superior del índice (8.2-1), dicha minimización no garantiza la estabilidad del sistema de control en lazo cerrado, ya que

no se ha incorporado explícitamente ninguna condición suficiente que garantice dicha especificación.

La inclusión de la condición de estabilidad se basa en la introducción de restricciones adicionales para la matriz K_i^H , la cual puede ser definida como:

$$K_i^H = \begin{bmatrix} K_i^0 \\ K_i^{H-1} \end{bmatrix} \quad (8.2-12)$$

Esta matriz contiene los coeficientes de las matrices de realimentación para todo el horizonte de predicción, donde K_i^0 hace referencia a los coeficientes de la matriz K_i^H que son empleados en la acción de control $\Delta U(k)$. Asimismo, y dado que se empleará una política de horizonte móvil, la acción de control que se inyectará en el sistema será siempre la calculada a partir de los coeficientes de K_i^p , por lo que la inclusión de la condición de estabilidad (8.2-13) y (8.2-14), relativa al primer instante de predicción, garantiza la estabilidad del sistema en bucle cerrado.

$$\begin{bmatrix} P & P(A_i^0)^T - (K_i^0 P)^T (B_i^0)^T \\ A_i^0 P - B_i^0 K_i^0 P & P \end{bmatrix} > 0, \quad (8.2-13)$$

$$\begin{bmatrix} P & \left(\frac{A_i^0 P + A_j^0 P - B_i^0 K_j^0 P - B_j^0 K_i^0 P}{2} \right)^T \\ \left(\frac{A_i^0 P + A_j^0 P - B_i^0 K_j^0 P - B_j^0 K_i^0 P}{2} \right) & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad (8.2-14)$$

$i = 1, \dots, r, i < j, \text{ sujeto a } h_i \cap h_j \neq \emptyset$

Las ecuaciones (8.2-13) y (8.2-14) son proceden de la aplicación de la condición de estabilidad para sistemas discretos introducida en [Tanaka & Wang 2001] y presentada en el capítulo 5, particularizada para el primer instante de predicción a partir del modelo de predicción (8.2-2). Asimismo, K_i^0 es la submatriz de K_i^H que hace referencia al primer instante de predicción y, donde A_i^0 y B_i^0 son las submatrices contenidas en A_i^H y B_i^H respectivamente que describen el comportamiento del primer instante de predicción.

Sin embargo, las ecuaciones (8.2-13) y (8.2-14) que incluyen la condición de estabilidad de K_i^0 son BMIs, ya que presentan una relación bilineal¹ entre la variables K_i^0 y P , hecho que complica la obtención de una solución al conjunto de inecuaciones.

La solución directa para dar respuesta al nuevo problema que se plantea es la utilización de BMIs (Bilinear Matrix Inequalities). Sin embargo, los problemas con BMIs son, en general, no convexos y no pueden ser resueltos en tiempo polinomial como las LMIs [Goh *et al.* 1996].

Para la resolución de estas BMIs se ha optado por un método alternativo de tipo iterativo denominado *ILMI* descrito en [Salcedo *et al.* 2008]. La idea fundamental de este

¹Función de dos variables que es lineal y homogénea en ambas variables de manera independiente.

método es mantener constante uno de los términos implicados en la bilinealidad (por ejemplo P), pudiendo resolver el conjunto de LMIs resultantes con técnicas numéricas tradicionales. A continuación, se recalcula el término constante empleado en el paso anterior con la nueva información disponible (K_i^0). El objetivo del método es la convergencia de los parámetros incógnita tras un número de iteraciones, pudiendo, en el mejor de los casos, obtener la misma solución que se obtendría resolviendo el problema como una BMI. Cabe destacar que en la mayoría de ocasiones se obtiene una solución del problema más conservativa que en el planteamiento BMI original, aunque satisfaciendo todas las condiciones establecidas.

A continuación se muestra de manera esquemática el algoritmo iterativo empleado para la resolución del problema bilineal planteado.

ALGORITMO ILMI:

- **Paso 1.** Resolución de las ecuaciones (8.2-11) sujeto a la minimización de γ . La γ^* resultante será el mejor valor del índice posible y, por tanto, el valor mínimo que se podrá alcanzar mediante el método iterativo.
- **Paso 2.** Comprobación de la condiciones de estabilidad (8.2-13) y (8.2-14) empleando los valores K_i^0 obtenidos en el **Paso 1**. En caso de satisfacer dicha estabilidad no es necesario seguir con el proceso de diseño, ya que habrían obtenido un conjunto de valores K_i^H que minimizan el índice y satisface la condición de estabilidad para el primer instante de predicción.
- **Paso 3.** Si **Paso 2** no se satisface se deben calcular los valores K_i^0 y P que estabilizan el bucle cerrado empleando las siguientes LMIs (estabilidad de sistemas discretos [Tanaka & Wang 2001]):

$$\begin{bmatrix} F & F(A_i^0)^T - (M_i)^T(B_i^0)^T \\ A_i^0 F - B_i^0 M_i & F \end{bmatrix} > 0, \quad (8.2-15)$$

$$\begin{bmatrix} F & \left(\frac{A_i^0 F + A_j^0 F - B_i^0 M_j - B_j^0 M_i}{2} \right)^T \\ \left(\frac{A_i^0 F + A_j^0 F - B_i^0 M_j - B_j^0 M_i}{2} \right) & F \end{bmatrix} \geq 0, \quad (8.2-16)$$

$$i = 1, \dots, r, \quad i < j, \quad \text{sujeito a } h_i \cap h_j \neq \emptyset$$

donde $i = 1, \dots, r$, $K_i^0 = M_i F^{-1}$ y $P = F^{-1}$.

- **Paso 4.** Calcular el máximo valor de γ a partir de las LMIs (8.2-11) y de los valores de K_i^0 obtenidos en el **Paso 3** y dejando libre K_i^{H-1} .
- **Paso 5.** Obtención de K_i^H que satisface conjuntamente (8.2-13), (8.2-14) y (8.2-11) tomando la matriz P de (8.2-13) y (8.2-14) como constante (empleando el valor obtenido en el **Paso 3**).

- **Paso 6.** Recalcular la matriz P a partir del valor K_i^0 obtenido en el **Paso 5** utilizando (8.2-13) y (8.2-14).
- **Paso 7.** Si la γ calculada en el **Paso 5** es mayor que el valor de γ obtenido en el **Paso 1** se deben repetir los pasos 5-7 hasta que:
 1. Se alcance un número máximo de iteraciones definidas a priori.
 2. La diferencia entre dos γ^* consecutivas sea menor que una tolerancia fijada de antemano.
 3. La diferencia entre el γ calculado y el γ^* sea menor que la tolerancia fijada.

Cabe señalar, que la implementación real del algoritmo hace necesario que la condición del **Paso 7** del algoritmo no sea estrictamente la igualdad. En particular, se emplea una tolerancia (valor a determinar por el diseñador) sobre el valor mínimo obtenido en el **Paso 1**, así como una condición de extinción del algoritmo. Este último término evalúa la diferencia entre los valores de γ de las últimas dos iteraciones de manera que si la diferencia entre ambos es muy pequeña (valor a determinar por el diseñador) provocará el cese de las iteraciones.

Una vez aplicado el método de diseño descrito por algoritmo anterior, se obtienen las matrices de realimentación K_i^H que minimizan el índice cuadrático (8.2-4), donde el subconjunto de matrices de realimentación K_i^0 , referentes al primer instante de predicción, garantizan la estabilidad del sistema en bucle cerrado mediante la satisfacción de las condiciones (8.2-13) y (8.2-14).

8.3 Ejemplo de diseño

En este apartado se mostrará un ejemplo de diseño empleando el mismo proceso que fue identificado en capítulo 7. El proceso introducido en el apartado 7.4 es el sistema mecánico denominado péndulo invertido, el cual se encuentra gobernado mediante un motor de continua con reductora, tal y como muestra la figura 8.1.

En el capítulo 7 se obtuvieron las matrices A_i^H , B_i^H y C_i^H (ecuaciones (7.4-5)-(7.4-8)) a partir del método de identificación de predictores FLAP propuesto. A partir de dichas matrices, se pueden obtener las submatrices descritas en (8.3-1) y (8.3-2), éstas serán las matrices que describen el comportamiento dinámico del sistema para el primer instante de predicción y, por tanto, serán empleadas en la formulación de la condición de estabilidad planteada mediante las ecuaciones (8.2-13) y (8.2-14).

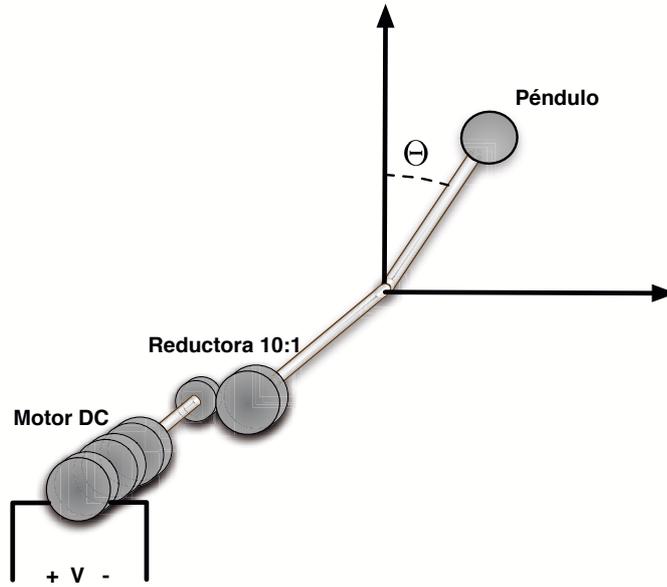


FIGURA 8.1: Representación del péndulo invertido y motor con reductora.

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0085 & -1.1 & 2.1 \end{bmatrix}, B_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.001 \end{bmatrix}, C_1^0 = [0 \ 0 \ 1] \quad (8.3-1)$$

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.034 & -0.96 & 1.9 \end{bmatrix}, B_2^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.004 \end{bmatrix}, C_2^0 = [0 \ 0 \ 1] \quad (8.3-2)$$

El objetivo del diseño de sistema de control borroso predictivo que se propone es la minimización del índice expresado mediante la ecuación (8.2-1). El horizonte de predicción y control que se establecerán como parámetros de diseño serán igual a 10. Las matrices de ponderación Q y R son definidas como matrices identidad, donde R presentará las dimensiones 30×30 y Q será 10×10 .

A partir de las matrices (7.4-5)-(7.4-8), (8.3-1) y (8.3-2), se puede aplicar el algoritmo ILMI que contempla la minimización del índice descrito por la ecuación (8.2-1) y la satisfacción de las condiciones de estabilidad (8.2-13) y (8.2-14). El resultado de dicho algoritmo son las matrices de realimentación K_1^H y K_2^H descritas en la ecuación (8.3-3). Asimismo, las submatrices K_1^0 y K_2^0 , mostradas en las ecuación (8.3-4), son las encargadas de satisfacer la condiciones de estabilidad (8.2-13) y (8.2-14). De hecho, estas dos últimas matrices son las que realmente serán implementadas en el controlador borroso con estructura PDC que conformará el sistema de control del sistema. Asimismo, se presentan a continuación los valores obtenidos para parámetros característicos del algoritmo de diseño:

- El número de iteraciones máximo empleado ha sido de 25.
- La tolerancia empleada para la evaluación de la diferencia de dos valores consecutivos de γ y respecto del valor γ^* es de $1 \cdot 10^{-3}$.
- La γ^* que se obtiene al resolver el **Paso 1** del algoritmo es de 118,8304.
- La γ obtenido mediante la consecución de los **Pasos 5-7** es de 1376,3.

$$K_1^H = \begin{bmatrix} 0.6109 & -16.3645 & 18.5527 \\ 0.1940 & 8.1224 & -9.4111 \\ 0.0596 & 3.6655 & -4.2785 \\ 0.0233 & 1.7650 & -2.0592 \\ 0.0126 & 1.0973 & -1.2220 \\ 0.0157 & 0.7530 & -0.7898 \\ 0.0269 & 0.4662 & -0.4461 \\ 0.0298 & 0.2556 & -0.2038 \\ 0.0249 & 0.0699 & -0.0069 \\ 0.0147 & -0.0852 & 0.1410 \end{bmatrix}, K_2^H = \begin{bmatrix} 2.2741 & -23.9391 & 22.8172 \\ -0.9006 & 16.3141 & -15.1930 \\ -0.3227 & 5.9706 & -5.6502 \\ -0.1052 & 1.9780 & -1.9496 \\ -0.0145 & 0.4874 & -0.5539 \\ 0.0186 & -0.0866 & -0.0047 \\ 0.0145 & -0.1963 & 0.1288 \\ 0.0094 & -0.1983 & 0.1501 \\ 0.0032 & -0.1415 & 0.1121 \\ 0.0006 & -0.0995 & 0.0843 \end{bmatrix} \quad (8.3-3)$$

$$K_1^0 = \begin{bmatrix} 0.6109 & -16.3645 & 18.5527 \end{bmatrix}, K_2^0 = \begin{bmatrix} 2.2741 & -23.9391 & 22.8172 \end{bmatrix} \quad (8.3-4)$$

La figura 8.2 muestra el resultado de simulación empleando el controlador PDC borroso diseñado. La simulación tiene en cuenta el vector de estado inicial del sistema $[\frac{\pi}{8} \ \frac{\pi}{4} \ -10]$, a partir de este estado inicial, el sistema de control consigue estabilizar el sistema minimizando el índice establecido en el diseño previo.

8.4 Conclusiones

El presente capítulo ha introducido una nueva propuesta de control borroso predictivo a partir de la estructura del predictor FLAP introducido en el capítulo 7. La unión de estas dos contribuciones (predictor + controlador borroso predictivo) permite superar las limitaciones de otras propuestas existentes, tal y como se introdujo en el capítulo anterior. Asimismo, esta nueva propuesta satisface tanto la minimización del índice propuesto como la condición de estabilidad para el primer instante de predicción. La satisfacción de dicha condición de estabilidad viene justificada por la aplicación de una política de horizonte móvil, ampliamente utilizada en el entorno de control predictivo.

Por último, todo el diseño del sistema de control se realiza fuera de línea por lo que la implementación real se reduce a la implementación de un controlador PDC borroso,

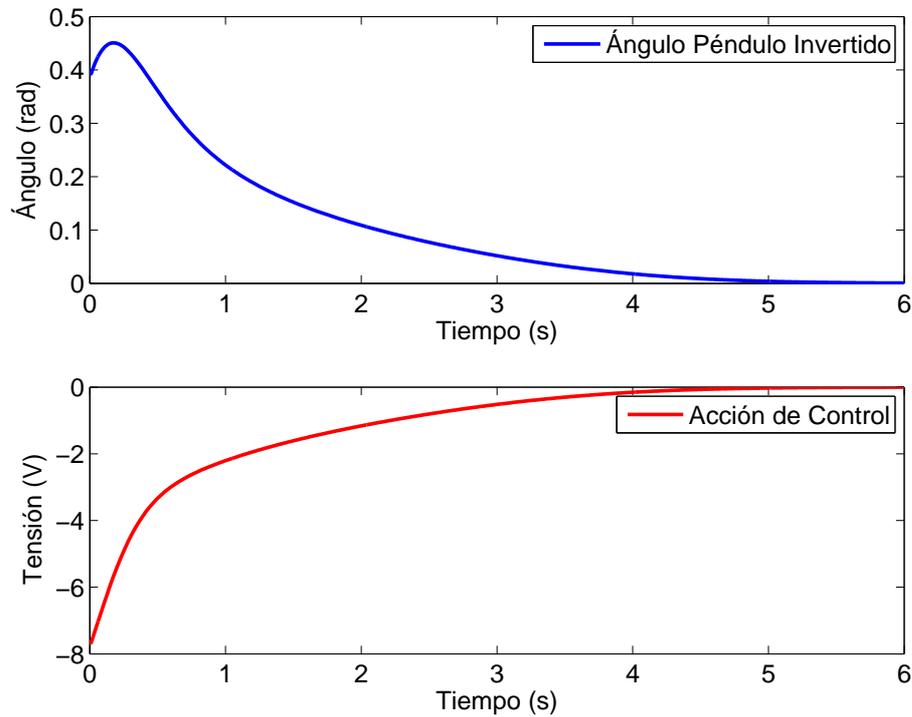


FIGURA 8.2: Resultados de simulación del sistema de control FLAP para el péndulo invertido con reductora.

cuyas matrices de realimentación vienen prefijadas por el diseño de control iterativo previo. Dicho controlador posee, por tanto, un reducido coste computacional en línea, siendo aplicable a procesos con dinámica rápida y aplicaciones de tiempo real.

Bibliografía

GOH, K. G., SAFONOV, M. G., & LY, J. H. 1996. Robust Synthesis Via Bilinear Matrix Inequalities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6, 1079-1095.

MACIEJOWSKI, J. M. 2002. *Predictive Control with Constraints*.

SALCEDO, J., MARTÍNEZ, M., BLASCO, X., & SANCHIS, J. 2008. BIBO stabilisation of Takagi-Sugeno fuzzy systems under persistent perturbations. *IET Control Theory and Applications*, 2(6), 513-523.

TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.

CAPÍTULO 9

Control Predictivo Borroso Forward-Backward

"Optimization: The term optimization, or mathematical programming, refers to the study of problems in which one seeks to minimize or maximize a real function by systematically choosing the values of real or integer variables from within an allowed set".

Wikipedia - The Free Encyclopedia

9.1 Introducción

El apartado 7.1 del capítulo 7, describía las principales limitaciones existentes en la aplicación de la filosofía de control predictivo sobre procesos no lineales representados mediante modelos borrosos TS. Además, se proponía una primera alternativa para resolver algunas de las limitaciones existentes mediante la definición de un nuevo modelo de predicción TS. Por otra parte, en este capítulo se propone una segunda alternativa para afrontar el diseño de controladores predictivos basados en modelos TS.

El objetivo, de manera análoga a la metodología propuesta en el capítulo 8, es el diseño de un controlador borroso con estructura PDC que satisfaga las premisas que se establecen en el diseño de controladores predictivos (véase capítulo 1). Sin embargo, esta segunda propuesta no se basa en la reformulación de un predictor borroso, tal y como se propone en el capítulo 8, y el posterior diseño de un controlador PDC mediante la reformulación del problema en LMIs. En este caso, el enfoque que se basa en la aplicación

del principio de optimalidad de Bellman para obtener de manera recurrente las acciones de control del sistema, utilizando un modelo de predicción TS con predicción a un paso.

9.2 Aplicación del Principio de Optimalidad

Los controladores predictivos tradicionales, en general, se basan en la minimización de un índice de coste, tal y como se describió en el capítulo 1. Dicho problema de optimización se encuentra, en la mayoría de ocasiones, sujeto a un conjunto de restricciones que se definen tanto en las variables de controladas como en las manipuladas. Estas restricciones hacen inviable la resolución del problema de optimización de manera analítica, por lo que es necesario incluir una etapa de optimización numérica que proporcione la secuencia de control que satisface todas o la mayoría de restricciones así como la minimización del índice. Por tanto, este proceso de optimización se basa en la búsqueda de la mejor secuencia de acciones de control entre muchas posibles alternativas. Las acciones de control pueden entenderse como una secuencia de decisiones que nos proporcionan la solución óptima. Por ello, dada una subsecuencia de decisiones, siempre se conoce cual es la decisión que debe tomarse a continuación para obtener la secuencia óptima.

El matemático R. Bellman estudió en profundidad la posibilidad de obtener el conjunto de decisiones óptimas en problemas de programación dinámica. En [Bellman 1957], Bellman enunció el conocido principio de optimalidad:

Una política de decisión óptima tiene la propiedad de que, cualesquiera sean los estados las decisiones iniciales tomadas, las restantes decisiones deben constituir una política óptima con independencia del estado resultante de la primera decisión.

Por tanto, y para que el principio se cumpla, dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima. Contemplar un problema como una secuencia de decisiones equivale a dividirlo en subproblemas de talla inferior, en principio más fácilmente resolubles.

Por ejemplo, se puede aplicar el concepto de optimalidad al problema de la figura 9.1, donde se pretende obtener el camino óptimo entre $a - e$ dentro de un problema de múltiple decisión.

En primer lugar, supóngase que la primera decisión (tomada en a) tiene como resultado el trayecto $a - b$, lo que determina un coste J_{ab} . A continuación, la siguiente decisión es el trayecto de $b - e$ con coste J_{be} . Por tanto, el coste J_{ae}^* entre el punto a y e , que se supone el camino óptimo, se puede expresar como:

$$J_{ae}^* = J_{ab} + J_{be} \quad (9.2-1)$$

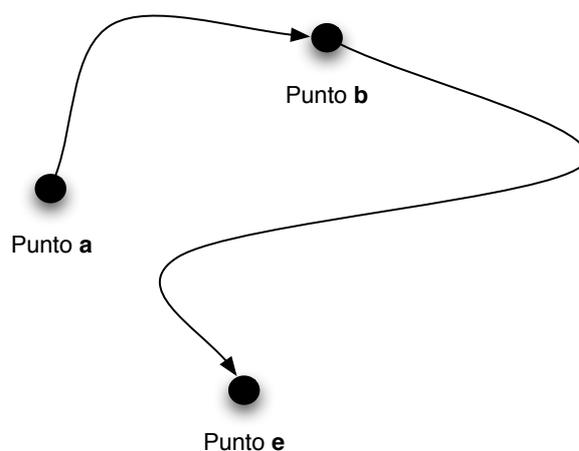


FIGURA 9.1: Trayectoria óptima entre a y e.

Por tanto, tal y como se apuntó anteriormente, si el camino $a-b-e$ es óptimo entre $a-e$, entonces $b-e$ es camino óptimo entre b y e . Para comprobar este principio, supóngase que ahora el camino óptimo entre b y e es a través del punto c , tal y como muestra la figura 9.2.

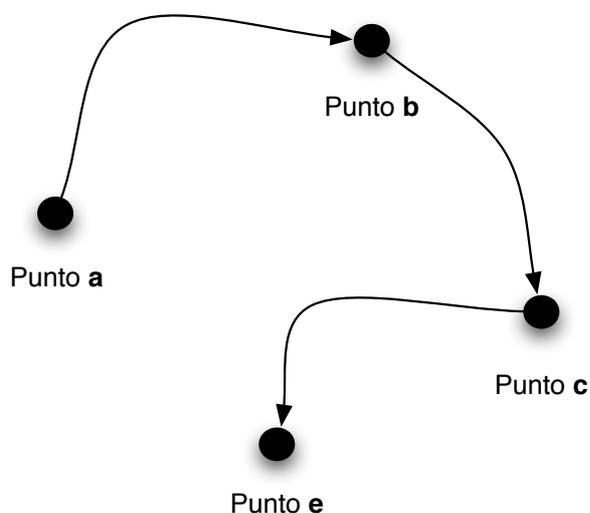


FIGURA 9.2: Trayectoria óptima entre a y e a través del punto c.

Para que se cumpla esta situación se debe satisfacer que $J_{bce} < J_{be}$ y, por tanto,

$$J_{ab} + J_{bce} < J_{ab} + J_{be} = J_{ae}^* \quad (9.2-2)$$

A la vista de (9.2-2) la única manera de satisfacer la inecuación es que el camino $a-b-e$ no sea el óptimo entre a y e .

Este capítulo plantea la extensión del concepto de optimalidad al diseño de controladores predictivos borrosos mediante LMIs. Para poder comprender mejor esta propues-

ta, resulta interesante recordar la formulación del modelo de predicción que se emplea en sistemas lineales expresados mediante espacio de estados (descrito en el apartado 7.1 del capítulo 7). Esta formulación, permite obtener una expresión de la predicción a n pasos en función del vector de estados iniciales y de las acciones de control futuras (ecuación (7.1-4)). En general, este predictor es utilizado en la etapa de optimización para obtener la secuencia óptima de control.

Por otro lado, es posible plantear un predictor con una estructura similar a la expresión (7.1-4) a partir de un modelo borroso TS. En particular, la ecuación (7.1-7) describe un predictor a n pasos con estructura borrosa. Sin embargo, la utilización de un predictor de este tipo complica considerablemente el proceso de optimización necesario para obtener la secuencia de acciones de control óptimas. Esta dificultad añadida se debe a que el problema de optimización resultante se debe resolver mediante algoritmos de optimización no convexa. Asimismo, la posibilidad de reformular la expresión (7.1-7) en términos de LMIs, para plantear la resolución de manera análoga a las propuestas formuladas en [Tanaka & Wang 2001], resulta complejo e incluso poco viable.

Ante la imposibilidad de utilizar la expresión de predicción (7.1-7), se plantea la aplicación del principio de optimalidad de Bellman. El objetivo es intentar dividir el problema de optimización que se plantea en (9.4-1) sujeto a (7.1-7), en un conjunto de subproblemas de optimización más sencillos y, que a través del principio de optimalidad, aseguren la obtención de una solución global óptima, utilizando únicamente un modelo de predicción a un paso. Asimismo, el planteamiento de cada uno de los subproblemas de optimización debe de aceptar ser reformulado en términos de LMIs, ya que es una herramienta que permite, de manera eficiente, trabajar con modelos borrosos TS tal y como se ha visto en capítulos anteriores.

La aplicación del principio de optimalidad al control predictivo que se propone, se basa en dividir el problema de optimización de toda la secuencia de acciones de control en un conjunto de problemas de optimización definidos para cada uno de los instantes de predicción. Es decir, se pasa de calcular todas las acciones de control de manera conjunta a calcular cada acción de manera independiente. A priori, se podría pensar que el cálculo de las acciones de control de manera independiente no aseguran una solución óptima global, sin embargo la aplicación del principio de optimalidad permite asegurar esta cuestión.

El cálculo de la acción de control en cada uno de los instantes de predicción es similar a la metodología que se aplica en el diseño de controladores LQR en espacio de estados, donde se emplea recursivamente la ecuación de Riccati. Sin embargo, en este caso se sustituye la expresión de Riccati por la resolución recursiva de un problema de optimización formulado en términos de LMIs [Tanaka & Wang 2001], tal y como muestra la figura 9.3.

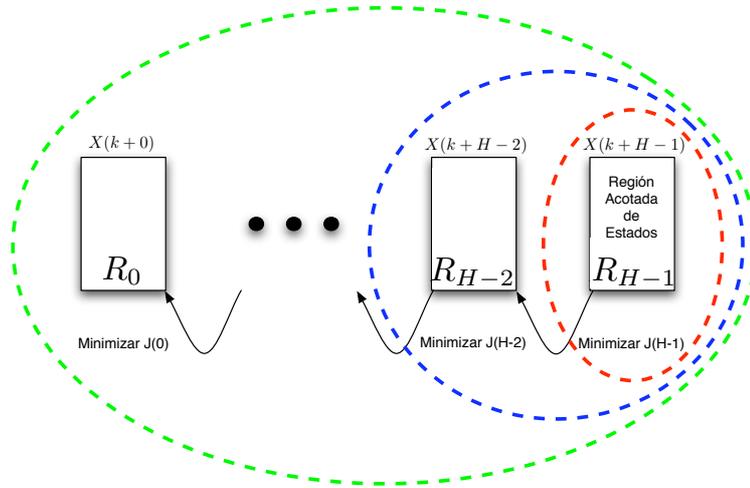


FIGURA 9.3: Concepto de Optimalidad de Bellman en Control Predictivo.

La idea principal que se introduce en la figura 9.3 puede ser expresado matemáticamente por la siguiente ecuación:

$$J(p) = \sum_{j=p}^{H-1} X(k+j)^T Q X(k+j) + U(k+j)^T R U(k+j), \quad p = H-1, \dots, 0 \quad (9.2-3)$$

9.2.1 Formulación Matemática

El planteamiento de diseño se basa en la minimización de un índice de coste de tipo LQR (9.2-4) para cada uno de los instantes de predicción, empleando un controlador con estructura PDC (9.2-7). Además, el problema de minimización se encuentra sujeto a la dinámica del proceso (9.2-6). La definición matemática de este planteamiento se describe a continuación.

Sea el índice de coste,

$$J(p) = \sum_{j=p}^{H-1} X(k+j)^T Q X(k+j) + U(k+j)^T R U(k+j), \quad p = H-1, \dots, 0 \quad (9.2-4)$$

$$\text{Minimizar } J(p) \quad p = H-1, \dots, 0 \quad (9.2-5)$$

sujeto a,

$$X(k+j+1) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) (A_i X(k+j) + B_i U(k+j)) \quad (9.2-6)$$

donde

$$U(k+j) = - \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(k)) K_i(k+j) X(k+j) \quad (9.2-7)$$

La resolución del problema de optimización descrito en (9.2-4) particularizado en un único instante de predicción p (por ejemplo $p = H-1$), puede resolverse mediante

un planteamiento en términos de LMIs, tal y como se describió en el teorema 6.2.1 del capítulo 5:

$$\underset{F, M_1, \dots, M_r}{\text{Minimizar}} \quad \gamma_{H-1} \quad (9.2-8)$$

Sujeto a:

$$F > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{H-1} & X^T(k+H-1) \\ X(k+H-1) & F \end{bmatrix} > 0, \quad (9.2-9)$$

$$\begin{bmatrix} Aux_1 & FC_i^T & -M_i^T \\ C_i F & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (9.2-10)$$

$$\begin{bmatrix} Aux_2 & FC_i^T & -M_j^T & FC_j^T & -M_i^T \\ C_i F & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -M_j & 0 & -R^{-1} & 0 & 0 \\ C_j F & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i > j \text{ s.a. } h_i \cap h_j \neq \phi, \quad i = 1, \dots, r \quad (9.2-11)$$

Donde,

$$Aux_1 = \begin{bmatrix} F & FA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i F - B_i M_i & F \end{bmatrix} \quad (9.2-12)$$

$$Aux_2 = \begin{bmatrix} F & G_{ij}^T \\ G_{ij} & F \end{bmatrix}, \quad (9.2-13)$$

$$G_{ij} = \frac{(A_i F + A_j F - B_i M_j - B_j M_i)}{2} \quad (9.2-14)$$

Las matrices de realimentación del estado se extraen a partir de la solución de las LMIs como

$$K_i(k+H-1) = M_i F^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (9.2-15)$$

El resultado de la resolución del problema de minimización planteado, será el conjunto de matrices de realimentación $K_i(k+H-1)$, $i = 1, \dots, r$. Sin embargo, este planteamiento presenta una dependencia del vector de estados iniciales $X(k+H-1)$ cuando

se formula el problema en términos de LMIs, tal y como se muestra en las ecuaciones (9.2-9)-(9.2-11). Por tanto, es necesario conocer a priori el vector de estados iniciales $X(k+p)$ para resolver numéricamente el problema (figura 9.3).

La dependencia de la resolución del vector de estados iniciales, introduce dos restricciones importantes en el diseño. En primer lugar, el controlador PDC que resulta de la solución del problema planteado en (9.2-8), es válido únicamente para un vector de estados iniciales concreto. Por tanto, si el vector de estados iniciales cambia se debe volver a calcular los parámetros del PDC, lo que se presenta como un inconveniente importante cuando se quiere realizar una implementación real del sistema de control.

La segunda restricción que se introduce hace referencia a la aplicación del principio de optimalidad, ya que para calcular el controlador PDC en un instante de predicción determinado el vector de estados iniciales que es necesario conocer se encuentra determinado por el controlador PDC calculado en el instante anterior, el cual en principio todavía no se ha calculado. Por tanto, parece complicado aplicar una metodología recursiva desde el último instante de predicción hasta el inicial, a la vista de las restricciones que se han descrito. Sin embargo, a continuación se proponen algunas alternativas para superar dichas restricciones.

Una solución a la dependencia del cálculo del controlador PDC respecto del vector de estados iniciales viene descrita en [Tanaka & Wang 2001], donde se propone la delimitación de una región acotada (R_p) en el espacio de estados que contienen todas los posibles valores del vector de estados iniciales para $J(p)$. En [Tanaka & Wang 2001], se define una región R_p como el politopo descrito por el conjunto de sus vértices. Asimismo, dichos vértices se definen como la combinación de los valores máximos y mínimos establecidos para cada variable de estado. Por ejemplo, supóngase un sistema con dos variables de estado X_1 y X_2 , donde la región de posibles estados iniciales vendría definida por el politopo R_0 . Los vértices de dicho politopo se definen a partir de los valores máximos y mínimos de las variables de estado. En este caso particular, los valores de las variables serían $\text{máximo}(X_1) = 2$, $\text{máximo}(X_2) = 1$, $\text{mínimo}(X_1) = -3$ y $\text{mínimo}(X_2) = -6$. Por tanto, la región R_0 vendría definida por los cuatro vértices $v_1(2, 1)$, $v_2(-3, 1)$, $v_3(2, -6)$ y $v_4(-3, -6)$, tal y como se puede observar en la figura 9.4.

La ventaja de emplear la región acotada R_p es que puede ser expresada en términos de LMI, tal y como se muestra en [Tanaka & Wang 2001], donde se concluye la necesidad de incluir una LMI por cada uno de los vértices del politopo. Dicha LMI presenta se define de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{p+1} & v_p^{lT} \\ v_p^l & F \end{bmatrix} > 0, \quad l = 1, \dots, 2^{n_x} \quad (9.2-16)$$

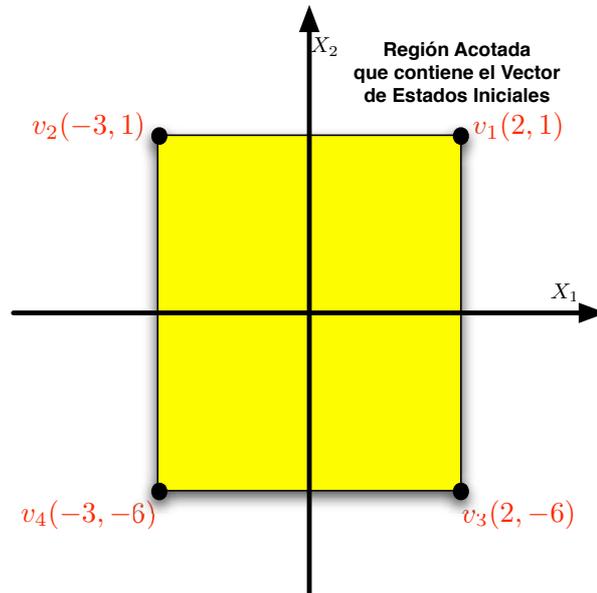


FIGURA 9.4: Región acotada por los vértices del politopo que describe el conjunto de posibles vectores de estados iniciales.

donde n_x es el número de variables de estado del sistema y v_p^l es el vector que representa cada uno de los vértices del politopo.

La definición de las LMIs con estructura (9.2-16) permite sustituir la condición (9.2-11) que depende del valor exacto del vector de estados iniciales por un conjunto de desigualdades que hacen referencia a cada uno de los vértices. Por tanto, el controlador PDC que resulta de la resolución del problema (9.2-11) ya no tendrá el condicionante de ser válido para un único vector de estados iniciales.

En esta tesis se propone emplear una modificación de la definición de la región acotada R_p que se ha descrito anteriormente. En particular, se propone definir la región acotada mediante una hiperesfera de radio r_p que contenga al politopo que se describe con la ecuación (9.2-16). La figura 9.5 ilustra esta idea particularizada en el ejemplo de dos variables de estados que se ha empleado para definir el politopo.

El único parámetro necesario para definir la hiperesfera, siempre y cuando la hiperesfera se encuentre centrada en el origen, es el radio de la misma, el cual se determina, en este caso particular, como el módulo del vector que une el centro del politopo con uno de los vértices. Por ejemplo, en el caso descrito por la figura 9.4, el centro del politopo se encuentra definido en el punto $(-0.5, -2.5)$, por tanto se puede definir el radio como $r_0 = \sqrt{(2 + 0.5)^2 + (1 + 3.5)^2}$, tal y como se aprecia en la figura 9.5.

Para poder emplear esta nueva definición es necesario que pueda ser expresada en términos de LMIs. Para ello, se parte de la ecuación (9.2-17), la cual se define como una función de Lyapunov:

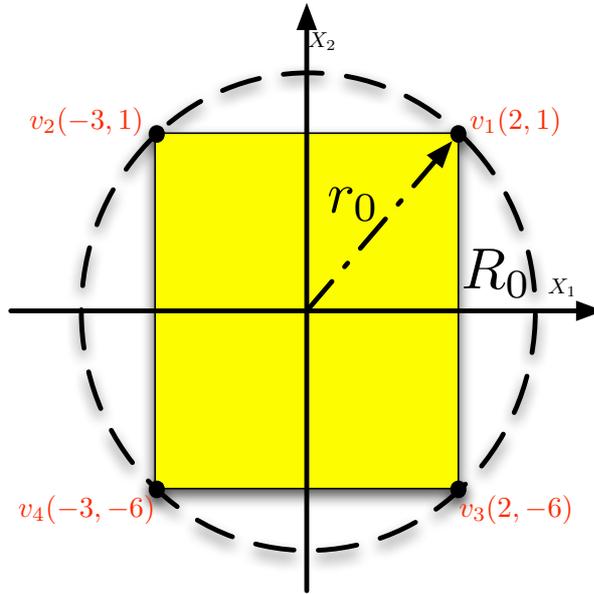


FIGURA 9.5: Región acotada por los vértices del politopo que describe el conjunto de posibles vectores de estados iniciales y la hipérfesfera de radio r_0 .

$$V(X(k+0)) = X^T(k+0)PX(k+0) \quad (9.2-17)$$

donde se satisface la siguiente inecuación:

$$X^T(k+0)PX(k+0) \leq \gamma \quad (9.2-18)$$

Por otra parte, se define la región del espacio contenida por una hipérfesfera de radio r_0 como:

$$X^T(k+0)X(k+0) \leq r_0^2 \quad (9.2-19)$$

Si multiplicamos el término derecho de la ecuación anterior por $\frac{\gamma}{r_0^2}$ se obtiene:

$$X^T(k+0)X(k+0) \leq r_0^2 \frac{\gamma}{r_0^2} \quad (9.2-20)$$

operando,

$$X^T(k+0) \frac{\gamma}{r_0^2} X(k+0) \leq \gamma \quad (9.2-21)$$

Por tanto, atendiendo a la ecuación (9.2-18) y (9.2-21) se puede determinar que:

$$X^T(k+0)F^{-1}X(k+0) < X^T(k+0) \frac{\gamma}{r_0^2} X(k+0) \leq \gamma \quad (9.2-22)$$

donde $F = P^{-1}$ y, donde la ecuación (9.2-22) se satisface si:

$$F^{-1} \leq \frac{\gamma}{r_0^2} I \quad (9.2-23)$$

A partir de la ecuación (9.2-23) y, aplicando el complemento de Schur se obtiene que:

$$\frac{\gamma}{r_0^2}I - IF^{-1}I > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Schur} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{r_0^2}I & I \\ I & F \end{bmatrix} > 0 \quad (9.2-24)$$

Después de este breve desarrollo se obtiene la ecuación (9.2-24) que permite definir la región acotada dentro de una hiperesfera de radio r_0 en términos de LMIs. A partir de esta expresión, es posible sustituir el conjunto de inecuaciones que se derivarían de la ecuación (9.2-16) introducida en [Tanaka & Wang 2001] que establece la región acotada a partir de los vértices del politopo que lo define. Esta propuesta para definir la región acotada mediante una hiperesfera, permite emplear una única LMI para describir el conjunto de posibles vectores de estados iniciales, mientras que con la expresión (9.2-16) era necesario definir una LMI por cada vértice del politopo. Sin embargo, el inconveniente que aparece es que la región acotada mediante una hiperesfera resulta ser más conservativa, ya que es necesario incluir una región acotada mayor a la descrita por el politopo que se encuentra incluido en la misma.

La definición de la LMI (9.2-24) permite superar la dependencia del valor exacto del vector de estados iniciales, dicha restricción se presentó como el primero de los condicionantes a la hora de resolver el problema de optimización descrito en (9.2-8). La otra problemática asociada a la resolución de dicho problema de optimización es la necesidad de conocer las regiones acotadas a priori. Es decir, cuando se quiere aplicar una política de optimalidad basada en el principio de Bellman, se suele iniciar el el proceso de resolución en el último instante de predicción. En este caso particular, el primer problema de optimización que se debe resolver es la obtención del controlador PDC que minimiza el índice de coste evaluado en el último instante de predicción ($H - 1$). Por tanto, para que este problema sea resoluble es necesario conocer el radio de la hiperesfera R_{H-2} que define el conjunto de posibles vectores iniciales. Sin embargo, el radio de ésta no es conocido. Esto sucede en todos los instantes de predicción, por ello, es necesario definir a priori las regiones acotadas R_p para cada uno de los distintos instantes de predicción. En cualquier caso, esto no resulta una tarea sencilla, ya que en cada instante de predicción el conjunto de posibles vectores de estados iniciales depende del instante anterior.

La mejor manera de entender la dependencia entre las distintas regiones acotadas es con un ejemplo. Por ello, supóngase que se desea calcular la región acotada de estados iniciales en el instante $(k + H - 1)$, siendo H el horizonte de predicción. Este punto coincide con el primer fragmento de índice a evaluar si se aplica el principio de optimalidad de manera recursiva. El objetivo en dicho instante es obtener el controlador PDC que proporciona la $U(k + H - 1)$ óptima para el índice (9.2-4). La información que sería necesaria

para poder calcular R_{H-1} es la región R_{H-2} , así como los parámetros del controlador PDC en dicho instante. Si se supone conocida dicha información entonces:

$$X(k+H-1) = \sum_{i=1}^r h_i(A_i - B_i \sum_{j=1}^r h_j K_j(k+H-2))X(k+H-2) \quad (9.2-25)$$

$$X(k+H-1) = M_{ij}(k+H-2)X(k+H-2) \quad (9.2-26)$$

$$M_{ij}(k+H-2) = A_i + B_i K_j(k+H-2) \quad (9.2-27)$$

donde $X(k+H-1) \in R_{H-1}$ y $X(k+H-2|k) \in R_{H-2}$, y donde la región acotada se encuentra contenida en una hiperesfera de radio r_{H-2} . Si se aplica la ecuación (9.2-26) sobre las regiones acotadas que determinan el conjuntos de vectores iniciales en el instante $(k+H-1)$ y $(k+H-2)$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k+H-2))h_j(z(k+H-2)) = 1$, se obtiene la siguiente relación:

$$\|X(k+H-1)\| \leq \|M_{ij}(k+H-2)\| \|X(k+H-2)\| \leq \rho(M(k+H-2)) \|X(k+H-2)\| \quad (9.2-28)$$

$$\rho(M(k+H-2)) \triangleq \max_{ij} \rho(M_{ij}(k+H-2)) \quad (9.2-29)$$

donde $\rho(M_{ij}(k+H-2))$ define el radio espectral de la matriz $M_{ij}(k+H-2)$ que expresa el valor máximo de los autovalores de dicha matriz. Si generalizamos la ecuación (9.2-28) para cualquier instante de predicción se obtiene que:

$$\|R_{p+1}\| \leq \|M(k+p)\| \|R_p\| = \rho(M(k+p)) \|R_p\| \quad (9.2-30)$$

Por tanto:

$$r_{p+1} \leq M(k+p)r_p = \rho(M(k+p))r_p \quad (9.2-31)$$

En el caso de sistemas discretos, la matriz $M_{ij}(k+p)$ siempre contendrá autovalores menores de uno y por tanto $\rho(M_{ij}^p) < 1$. Esto es debido a que la matriz $M_{ij}(k+p)$ describe un sistema discreto realimentado estable, por tanto todos los autovalores de dicho sistema se encuentran dentro del círculo unidad para poder satisfacer el criterio de estabilidad. Por tanto, la ecuación (9.2-28) permite obtener la región acotada de los estados iniciales en un instante a partir la región acotada y las matrices de realimentación del controlador PDC del instante anterior.

La solución que se ha adoptado en esta tesis para obtener las regiones acotadas a priori, es la resolución del problema de optimización descrito en (9.2-4) en cada instante

de predicción, partiendo del instante $(k+0)$ hasta $(k+H-1)$. Por ello, se plantea la realización de una primera iteración que se podría denominar *hacia delante* o *Forward*, donde el punto de partida es la región acotada R_0 y finaliza en la región R_{H-1} . Obviamente, la región R_0 y el r_0 asociado son definidos por el diseñador, en función de las limitaciones que determine apropiadas para cada variable de estado. Una vez se conoce el valor concreto de r_0 es posible resolver el problema de optimización en dicho instante. Acto seguido, se puede obtener la siguiente región acotada R_1 definida mediante el radio r_1 , a partir de la expresión descrita en (9.2-30). Una vez se han definido todas las regiones acotadas desde R_0 hasta R_{H-1} se debe realizar una segunda iteración denominada *hacia atrás* o *Backward*, en esta iteración se aplica el principio de optimalidad para recalcular los controladores PDC, los cuales representan el conjunto de decisiones óptimas desde el último instante de predicción hasta el primero utilizando las regiones calculadas en la etapa denominada *Forward*.

9.3 Descripción del algoritmo de diseño

A continuación se describen detalladamente distintos los pasos que se deben seguir con el objeto de resolver el problema de minimización descrito por la ecuación (9.2-4), sujeto a (9.2-6) y (9.2-7), en cada instante de predicción.

ETAPA FORWARD

- **PASO 1.** Definición de la región inicial R_0 . La obtención de R_0 se consigue mediante la definición del radio r_0 de la hiperesfera que contiene el politopo.
- **PASO 2.** Resolución del problema de minimización definido para $J(0)$ [Tanaka & Wang 2001], reformulado en términos de las LMIs (9.3-2), (9.3-3), (9.3-4) y (9.3-5) planteado en el instante $(k+0)$. El objetivo es obtener las regiones acotadas en los distintos instantes de predicción, aunque no se asegura el principio de optimalidad.

$$\underset{F, M_1, \dots, M_r}{\text{Minimizar}} \quad \gamma_0 \tag{9.3-1}$$

Sujeto a:

$$F > 0, \tag{9.3-2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_0}{r_0^2} I & I \\ I & F \end{bmatrix} > 0 \tag{9.3-3}$$

$$\begin{bmatrix} Aux_1 & FC_i^T & -M_i^T \\ C_i F & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, r \quad (9.3-4)$$

$$\begin{bmatrix} Aux_2 & FC_i^T & -M_j^T & FC_j^T & -M_i^T \\ C_i F & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -M_j & 0 & -R^{-1} & 0 & 0 \\ C_j F & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, i > j \text{ s.a. } h_i \cap h_j \neq \phi, i = 1, \dots, r \quad (9.3-5)$$

Donde,

$$Aux_1 = \begin{bmatrix} F & FA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i F - B_i M_i & F \end{bmatrix} \quad (9.3-6)$$

$$Aux_2 = \begin{bmatrix} F & G_{ij}^T \\ G_{ij} & F \end{bmatrix}, \quad (9.3-7)$$

$$G_{ij} = \frac{(A_i F + A_j F - B_i M_j - B_j M_i)}{2} \quad (9.3-8)$$

$$K_i(k+0) = M_i F_i^{-1} \quad (9.3-9)$$

- PASO 3. Cálculo del radio espectral máximo.

$$\begin{aligned} \max(\rho(M(k+0))) &= \max(\max(\rho(A_i - B_i K_i(k+0))), \max(\rho(A_j - B_j K_j(k+0))), \\ &\quad , \max(\rho(A_i - B_i K_j(k+0))), \\ &\quad i, j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (9.3-10)$$

- PASO 4. Cálculo de la región acotada R_1 a partir de su radio r_1 .

$$r_1 = \max(\rho(M(k+0)))r_0 \quad (9.3-11)$$

- PASO 5. Obtención de las regiones acotadas desde R_2 hasta R_{H-1} . Para ello se deben repetir los pasos 2, 3 y 4 para cada instante de predicción, obteniendo los radios de las hipersferas (r_2 hasta r_{H-1}).

ETAPA BACKWARD

- **PASO 6.** Aplicación del principio de optimalidad de Bellman para obtener las matrices de realimentación del controlador PDC. Resolución del problema de minimización $J(H - 1)$ reformulado en términos de las LMIs (9.3-2), (9.3-3), (9.3-4) y (9.3-5), planteado en el instante $(k + H - 1)$ y minimizando el término γ_{H-1} .
- **PASO 7.** Obtención recursiva de las matrices de realimentación desde el instante $(k + H - 2)$ hasta $(k + 0)$ empleando las regiones acotas obtenidas en los paso 1 a 5. El problema de optimización que se resuelve es el formulado en (9.3-2), (9.3-4) y (9.3-5), donde se sustituye la LMI (9.3-3) por (9.3-12).

$$\begin{bmatrix} (\gamma_p - \gamma_{p+1}) I & I \\ \frac{r_p^2}{I} & F \end{bmatrix} > 0, p = 0, \dots, H - 2 \quad (9.3-12)$$

La aplicación de los 7 pasos descritos proporcionan un controlador PDC para cada uno de los instantes de predicción, dicho controlador minimiza el índice de coste y satisface el principio de optimalidad descrito en el apartado 9.2.

9.4 Restricciones en las variables

Un elemento fundamental en la filosofía de control predictivo es la capacidad de gestionar las restricciones en las distintas variables del proceso. En la mayoría de diseños, dichas restricciones son debidas a las limitaciones físicas existentes o a rangos de seguridad que no deben de ser superados.

La restricciones afectan principalmente a dos tipo de variables. Por una parte, las variables manipuladas o acciones de control, las cuales suelen presentar restricciones *duras* debidas a limitaciones físicas impuestas por los actuadores existente en el proceso real. Por otra parte, también se suelen gestionar las restricciones en las variables controladas o de salida. Generalmente, este tipo de restricciones suelen denominarse de tipo *blandas*, ya que la violación de las mismas está permitido en aquellos casos donde la incorporación de las mismas plantearía la irresolubilidad del problema de optimización.

9.4.1 Restricciones en las acciones de control

El capítulo 5 describía en el apartado 5.4.3.2 la reformulación de las restricciones de las acciones de control en términos de LMIs para sistemas borrosos TS, tal y como se presenta en [Tanaka & Wang 2001]. Las LMIs descritas en las ecuaciones (5.4-23) y (5.4-24) muestran como, de nuevo, la inclusión de este tipo de restricciones se encuentra

sujeta al conocimiento del vector de estados iniciales. La formulación de las LMIs (5.4-23) y (5.4-24) se basa en la definición de la función de Lyapunov descrita en la ecuación (5.3-10), donde se asume que $X^T(k+p)PX(k+p) \leq 1$. Esta hipótesis no resulta válida cuando se desea emplear las LMIs que definen la restricción de las acciones de control, unidas al diseño de un controlador PDC óptimo basado en la minimización del índice descrito en (9.2-4). Ya que el fundamento teórico de dicho problema de diseño, se basa en la obtención de la cota superior definida como $X(k+p)^T PX(k+p) < \gamma_p$. Por tanto, resulta imprescindible reformular este problema con el objetivo de poder incluir las restricciones en las acciones de control junto con la minimización del índice de coste.

El teorema 9.4.1 da respuesta a las necesidades determinadas en el párrafo anterior, y detalla la definición en términos de LMIs que permite obtener el controlador PDC deseado.

TEOREMA 9.4.1 *Las matrices de realimentación que minimizan una cota superior del índice de coste (9.2-4) para el sistema definido por las ecuaciones (9.2-6) y (9.2-7), pueden ser obtenidas resolviendo el problema de maximización sujeto a las LMIs:*

$$\underset{F, M_1, \dots, M_r}{\text{Maximizar}} \nu_p \quad (9.4-1)$$

Sujeto a:

$$F > 0, \quad (9.4-2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\nu_p}{\gamma_p^2} I & \nu_p I \\ I \nu_p & F \end{bmatrix} > 0 \quad (9.4-3)$$

$$\begin{bmatrix} F & M_i^T \\ M_i & \mu^2 \nu_p \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9.4-4)$$

donde $F = P^{-1}$ y $M_i = K_i F$

$$\begin{bmatrix} Au_{x1} & FC_i^T & -M_i^T \\ C_i F & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (9.4-5)$$

$$\begin{bmatrix} Au_{x2} & FC_i^T & -M_j^T & FC_j^T & -M_i^T \\ C_i F & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -M_j & 0 & -R^{-1} & 0 & 0 \\ C_j F & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i > j \text{ s.a. } h_i \cap h_j \neq \phi, \quad i = 1, \dots, r \quad (9.4-6)$$

Donde,

$$Aux_1 = \begin{bmatrix} F & FA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i F - B_i M_i & F \end{bmatrix} \quad (9.4-7)$$

$$Aux_2 = \begin{bmatrix} F & G_{ij}^T \\ G_{ij} & F \end{bmatrix}, \quad (9.4-8)$$

$$G_{ij} = \frac{(A_i F + A_j F - B_i M_j - B_j M_i)}{2} \quad (9.4-9)$$

$$\nu_p = \frac{1}{\gamma_p} \quad (9.4-10)$$

Dichas condiciones garantizan $J < X^T(k+p)PX(k+p) < \gamma_p$ definidas en la ecuación (9.3-1). El vector $X(k+p)$ se supone contenido en una hiperesfera de radio r_p . Y, donde la restricción en las acciones de control $\|U(k)\|_2 \leq \mu$ se cumple para todo k .

Prueba. Se probará en primer lugar la validez de la LMI (9.4-3).

Supóngase que $V(X(k+p)) = X^T(k+p)PX(k+p)$ es una función de Lyapunov y

$$X^T(k+p)PX(k+p) \leq \gamma_p \quad (9.4-11)$$

Por tanto,

$$\gamma_p - X^T(k+p)F^{-1}X(k+p) \geq 0 \quad (9.4-12)$$

donde $F = P^{-1}$. Por otra parte, el vector de estados iniciales $X(k+p)$ es desconocido, sin embargo se supone conocida el radio r_p de la hiperesfera R_p que contiene dicho vector de estados iniciales y que satisface la siguiente inecuación:

$$X^T(k+p)X(k+p) \leq r_p^2 \quad (9.4-13)$$

Si se multiplica el término derecho de la ecuación anterior por $\frac{\gamma_p}{\gamma_p}$ se obtiene:

$$X^T(k+p)X(k+p) \leq r_p^2 \frac{\gamma_p}{\gamma_p} \quad (9.4-14)$$

operando,

$$X^T(k+p) \frac{\gamma_p}{r_p^2} X(k+p) \leq \gamma_p \quad (9.4-15)$$

Por tanto, atendiendo a la ecuación (9.4-11) y (9.4-15) se puede determinar que:

$$X^T(k+p)F^{-1}X(k+p) < X^T(k+p) \frac{\gamma_p}{r_p^2} X(k+p) \leq \gamma_p \quad (9.4-16)$$

donde la ecuación (9.4-16) se satisface si:

$$F^{-1} \leq \frac{\gamma_p}{r_p^2} I \quad (9.4-17)$$

A partir de la ecuación (9.4-17) y, aplicando el complemento de Schur se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_p}{r_p^2} I - IF^{-1}I > 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Schur} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\gamma_p}{r_p^2} I & I \\ I & F \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (9.4-18)$$

Si se multiplica la expresión (9.4-18) a ambos lados por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_p & I \end{bmatrix}$ se obtiene la siguiente LMI

$$\begin{bmatrix} \frac{\nu_p}{r_p^2} I & I\nu_p \\ \nu_p I & F \end{bmatrix} > 0 \quad (9.4-19)$$

donde $\nu_p = \frac{1}{\gamma_p}$.

A continuación se muestra la obtención de (9.4-4) a partir de la restricción definida como $\|U(k+p)\| \leq \mu$ y teniendo en consideración que $K_i = K_i(k+p)$ y $K_j = K_j(k+p)$.

$$U^T(k+p)U(k+p) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))X^T(k+p)K_i^T K_j X(k+p) \leq \mu^2 \quad (9.4-20)$$

Por tanto,

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))X^T(k+p)K_i^T K_j X(k+p) \leq 1 \quad (9.4-21)$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{\gamma_0} X^T(k+p)F^{-1}X(k+p) < \frac{1}{\gamma_p} X^T(k+0)F^{-1}X(k+0) \leq 1, \quad K > 0 \quad (9.4-22)$$

Sustituyendo la expresión (9.4-22) en (9.4-21) se obtiene que

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))X^T(k+p)K_i^T K_j X(k+p) \leq \frac{1}{\gamma_p} X^T(k+p)F^{-1}X(k+p) \quad (9.4-23)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))X^T(k+p) \left(\frac{1}{\mu^2} K_i^T K_j - \frac{1}{\gamma_p} F^{-1} \right) X(k+p) \leq 0 \quad (9.4-24)$$

Si se toma el término izquierdo de la desigualdad de la ecuación (9.4-24) se obtiene que,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))X^T(k+p) \left(\frac{1}{\mu^2}K_i^TK_j + \frac{1}{\mu^2}K_j^TK_i - \frac{2}{\gamma_p}F^{-1} \right) X(k+p) = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))X^T(k+p) \times \\
 & \times \left[\frac{1}{\mu^2}(K_i^TK_i + K_j^TK_j) - \frac{1}{\mu^2}(K_i^TK_j + K_j^TK_i) - \frac{2}{\gamma_p}F^{-1} \right] X(k+p) \quad (9.4-25) \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))X^T(k+p) \left[\frac{1}{\mu^2}(K_i^TK_i + K_j^TK_j) - \frac{2}{\gamma_p}F^{-1} \right] X(k+p) \\
 & = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))X^T(k+p) \left(\frac{1}{\mu^2}K_i^TK_i - \frac{1}{\gamma_p}F^{-1} \right) X(k+p)
 \end{aligned}$$

Si

$$\frac{1}{\mu^2}K_i^TK_i - \frac{1}{\gamma_p}F^{-1} \leq 0, \quad (9.4-26)$$

la ecuación (9.4-24) se cumple. Asimismo, si se define $M_i = K_iF_i$ en la ecuación (9.4-26) se obtiene que

$$\frac{1}{\mu^2}M_i^TM_i - \frac{1}{\gamma_p}F \leq 0, \quad (9.4-27)$$

Por tanto, la LMI presentada en (9.4-4) se obtiene mediante la aplicación del complemento de Schur a la expresión (9.4-27), y donde se define $\nu_p = \frac{1}{\gamma_p}$

$$\begin{bmatrix} F & M_i^T \\ M_i & \mu^2\nu_p \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9.4-28)$$

Por último se hace referencia a las LMIs (9.4-2), (9.4-5), (9.4-6), (9.4-7) y (9.4-8). La prueba matemática de la obtención de estas expresiones se puede encontrar en el teorema 25 [Tanaka & Wang 2001]. La única salvedad existente es que en el teorema 9.4.1 que se ha presentado en este trabajo, se ha planteado un problema de maximización al contrario de la versión original (teorema 25 de [Tanaka & Wang 2001]) donde se plantea un problema de minimización. El objeto de este planteamiento responde a la inclusión de la variable ν_p , cuya relación con la variable γ_p se establece como $\nu_p = \frac{1}{\gamma_p}$. Por tanto, el problema equivalente de minimización de γ_p es el planteamiento de la maximización de

ν_p .

9.4.2 Restricciones en las salidas

El desarrollo matemático necesario para obtener el conjunto de LMIs que describen las restricciones en las variables de salida, es totalmente análogo a la formulación presentada en el apartado anterior. Por tanto, es posible enunciar el teorema 9.4.2 a partir de las ecuaciones (9.4-3) y (9.4-4) expuestas en el teorema 9.4.1. Asimismo, la demostración de 9.4.2 es equivalente a la que se presenta mediante el conjunto de ecuaciones (9.4-21)-(9.4-26).

TEOREMA 9.4.2 *Supóngase que el vector de estados iniciales $X(k+p)$ se encuentra contenido en la región que define una hiperesfera de radio conocido r_p . Las restricciones de las variables de salida, definidas mediante la inecuación $\|Y(k+p)\| \leq \lambda$, se cumplirán para todo $k \geq 0$ si se satisfacen las siguientes LMIs,*

$$\begin{bmatrix} \frac{\nu_p}{r_p^2} I & \nu_p I \\ I \nu_p & F \end{bmatrix} > 0 \quad (9.4-29)$$

$$\begin{bmatrix} F & FC_i^T \\ C_i F & \lambda^2 \nu_p \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9.4-30)$$

donde $F = P^{-1}$, $M_i = K_i(k+p)F$ y $\nu_p = \frac{1}{\gamma_p}$.

El teorema 9.4.2 permite incluir las restricciones de las variables de salida en el problema original de optimización para obtener el conjunto de controladores PDC en cada instante de predicción. Por tanto, si se desea tener en cuenta estas restricciones, únicamente se deberá añadir la ecuación (9.4-30) al resto de LMIs descritas en el teorema 9.4.1.

9.5 Ejemplo de aplicación

A continuación se muestra un ejemplo sencillo de diseño empleando el controlador predictivo borroso que se ha propuesto en los apartados anteriores. Para este ejemplo, se ha seleccionado un modelo borroso con estructura TS que describe el comportamiento de un péndulo invertido, el cual es controlado mediante un motor de corriente continua con caja reductora. Este modelo se encuentra planteado y justificado en [Kawamoto 1996] y fue empleado en los capítulos 7 y 8. Sin embargo, cabe destacar que las ecuaciones del modelo que se emplean en este capítulo son directamente obtenidas mediante la aplicación de la sectorización no lineal (capítulo 3) al conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que definen el comportamiento del sistema mecánico. En cambio, el

modelo de predicción TS empleado en los capítulos 7 y 8 es obtenido mediante identificación a partir de datos experimentales.

El modelo borroso viene descrito en los siguientes términos:

REGLA 1: Si $X_1(t)$ Es M_1

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \dot{X}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9.8 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} U(t) \quad (9.5-1)$$

REGLA 2: Si $X_1(t)$ Es M_2

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \dot{X}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} U(t) \quad (9.5-2)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} \quad (9.5-3)$$

La variable de estado $X_1(t)$ describe el ángulo del péndulo, la variable $X_2(t)$ representa la velocidad angular, mientras que $X_3(t)$ es la corriente de excitación del motor y $U(t)$ la tensión de alimentación. Las funciones de pertenencia M_1 y M_2 se definen como

$$M_1(X_1(t)) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(X_1(t))}{X_1(t)}, & X_1(t) \neq 0, \\ 1, & X_1(t) = 0, \end{cases} \quad (9.5-4)$$

$$M_2(X_1(t)) = 1 - M_1(X_1(t)) \quad (9.5-5)$$

Este modelo borroso representa la dinámica no lineal del proceso de manera exacta cuando la variable de estado $X_1(t)$ se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi]$. El proceso se encuentra representado en el dominio continuo del tiempo, y no resulta válido para el control digital de procesos reales, ya que toda la herramienta matemática que se ha presentado se basa en modelos borrosos TS discretos. Por ello, el primer paso será discretizar el modelo empleando un tiempo de muestro de 0.01s.

REGLA 1: Si $X_1(k)$ Es M_1

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(k) \\ \dot{X}_2(k) \\ \dot{X}_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0 \\ 0.988 & 1 & 0.01 \\ -0.005 & -0.095 & 0.904 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.095 \end{bmatrix} U(k) \quad (9.5-6)$$

REGLA 2: Si $X_1(k)$ Es M_2

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(k) \\ \dot{X}_2(k) \\ \dot{X}_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 1 & 0.01 \\ 0 & -0.095 & 0.904 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.19 \end{bmatrix} U(k) \quad (9.5-7)$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{bmatrix} \quad (9.5-8)$$

Por otro lado, se debe tener en cuenta que la acción de control $U(k)$ se encuentra saturada entre $[-220, 220]$ voltios, limitación impuesta por las características eléctricas del motor de continua. Asimismo, el controlador predictivo que se quiere diseñar presentará un horizonte de predicción de $H = 5$, así como las siguientes matrices de ponderación

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.5-9)$$

$$R = 1$$

Una vez establecidos los parámetros de diseño del controlador, se procede a seguir todos los pasos de diseño que se señalan en el apartado 9.3.

ETAPA FORWARD

- **PASO 1.** Definición de la región inicial R_0 .

$$\begin{aligned} \max(X_1) &= \pi, & \min(X_1) &= -\pi \\ \max(X_2) &= 2\pi, & \min(X_2) &= -2\pi \\ \max(X_3) &= 10, & \min(X_3) &= -10 \end{aligned} \quad (9.5-10)$$

Por tanto los vértices del politopo serán,

$$\begin{aligned} v_1(0) &= (\pi, \pi, 10), & v_2(0) &= (\pi, \pi, -10), & v_3(0) &= (\pi, -\pi, 10), \\ v_4(0) &= (\pi, -\pi, -10), & v_5(0) &= (-\pi, \pi, 10), & v_6(0) &= (-\pi, \pi, -10), \\ v_7(0) &= (-\pi, -\pi, 10), & v_8(0) &= (-\pi, -\pi, -10) \end{aligned} \quad (9.5-11)$$

A continuación se obtiene la esfera que contiene el politopo de la figura 9.6, donde $r_0 = \sqrt{\pi^2 + (2\pi)^2 + 10^2} = 12.221$. La figura 9.7 muestra como la esfera resultante contiene completamente al politopo.

- **PASO 2.** Resolución del problema de optimización reformulado en términos de las LMIs (9.3-2), (9.3-3), (9.3-4) y (9.3-5) planteado en el instante $(k+0)$. El resultado de esta minimización son las matrices de realimentación del controlador PDC_0 .

$$K_1(k) = \begin{bmatrix} 17.646 & 4.6782 & 0.279 \end{bmatrix} \quad (9.5-12)$$

$$K_2(k) = \begin{bmatrix} 5.712 & 3.233 & 0.276 \end{bmatrix}$$

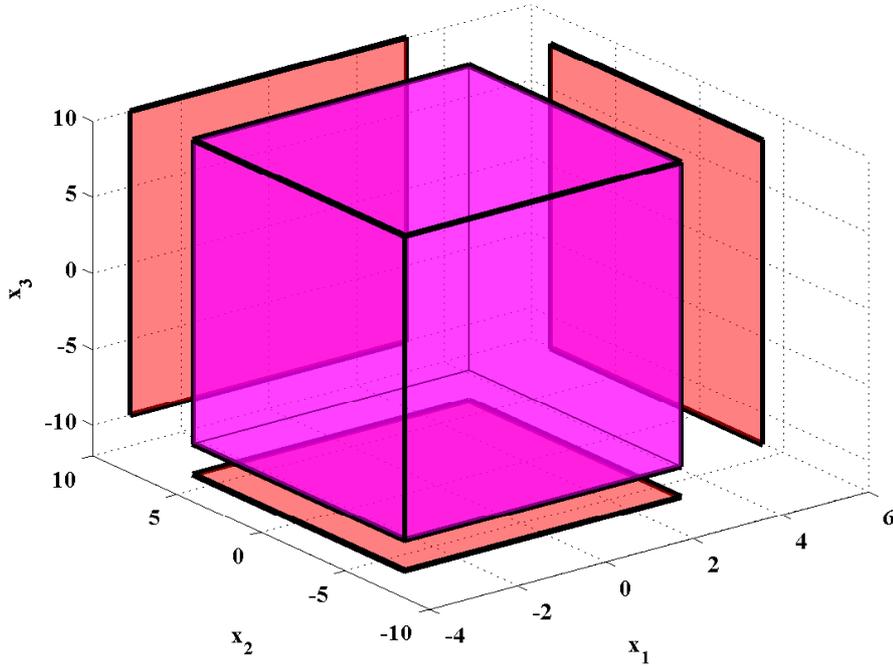


FIGURA 9.6: Obtención del politopo en el espacio de estados.

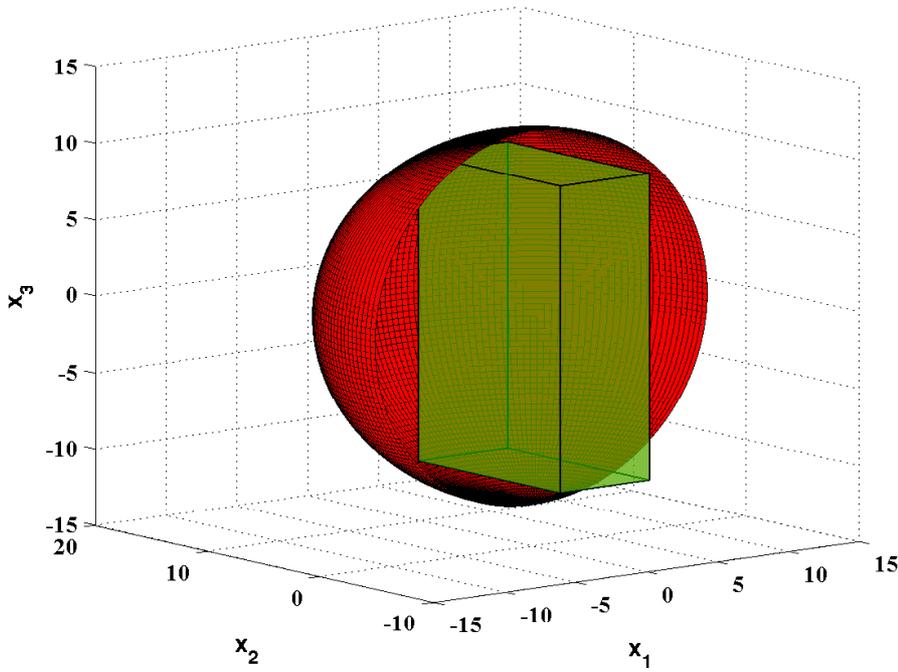


FIGURA 9.7: Obtención de la esfera de radio $r_0 = 12.221$ que contiene al politopo.

- PASO 3. Cálculo del radio espectral máximo.

$$\begin{aligned} \max(\rho(M(k+0))) &= \max(\max(\rho(A_1 - B_1K_1)), \max(\rho(A_2 - B_2K_2))), \\ \max(\rho(A_1 - B_1K_2)) &= 0.979 \end{aligned} \quad (9.5-13)$$

- **PASO 4.** Cálculo de la región acotada R_1 descrito mediante el el radio r_1 de la esfera que la contiene.

$$r_1 = \max(\rho(M(k+0)))r_0 = 11.962 \quad (9.5-14)$$

- **PASO 5.** Obtención de las regiones acotadas desde R_1 hasta R_4 . Para ello, se deben repetir los paso 2, 3 y 4 para cada instante de predicción.

- Instante k+1

- Matrices de realimentación PDC_1 :

$$K_1(k+1) = \begin{bmatrix} 18.018 & 4.765 & 0.280 \end{bmatrix} \quad (9.5-15)$$

$$K_2(k+1) = \begin{bmatrix} 5.658 & 3.273 & 0.284 \end{bmatrix}$$

- Radio espectral $\max(\rho(M(k+1))) = 0.975$, $r_2 = 11.661$.

- Instante k+2

- Matrices de realimentación PDC_2 :

$$K_1(k+2) = \begin{bmatrix} 18.482 & 4.875 & 0.282 \end{bmatrix} \quad (9.5-16)$$

$$K_2(k+2) = \begin{bmatrix} 5.992 & 3.400 & 0.299 \end{bmatrix}$$

- Radio espectral $\max(\rho(M(k+2))) = 0.972$, $r_3 = 11.330$.

- Instante k+3

- Matrices de realimentación PDC_3 :

$$K_1(k+3) = \begin{bmatrix} 18.482 & 4.875 & 0.282 \end{bmatrix} \quad (9.5-17)$$

$$K_2(k+3) = \begin{bmatrix} 5.991 & 3.399 & 0.298 \end{bmatrix}$$

- Radio espectral $\max(\rho(M(k+1))) = 0.971$, $r_4 = 10.999$

- Instante k+4

- Matrices de realimentación PDC_3 :

$$K_1(k+4) = \begin{bmatrix} 19.031 & 5.009 & 0.286 \end{bmatrix} \quad (9.5-18)$$

$$K_2(k+4) = \begin{bmatrix} 6.564 & 3.575 & 0.315 \end{bmatrix}$$

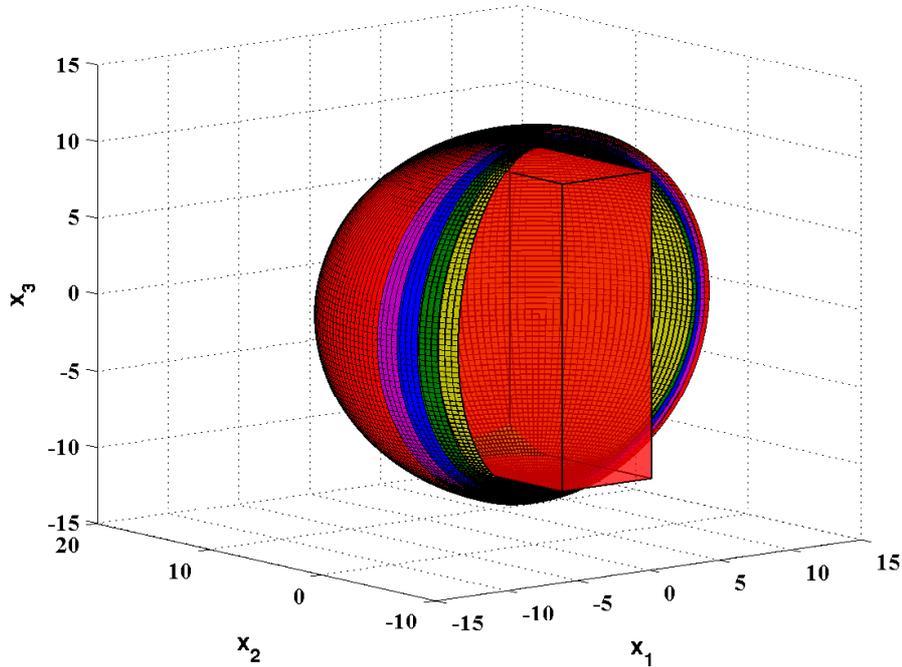


FIGURA 9.8: Regiones acotadas por las hiperesferas que describen el conjunto de posibles vectores de estados iniciales para cada instante de predicción (Roja- R_0 , Magenta- R_1 , Violeta- R_2 , Verde- R_3 , Amarillo- R_4).

El cálculo de los distintos radios espectrales proporciona el conjunto de regiones acotadas para cada instante de predicción. La figura 9.8 muestra las distintas regiones $R_0 - R_4$, donde se puede apreciar como las regiones acotadas obtenidas a partir de la región R_0 se contraen hacia el origen, confirmando la proposición descrita en la ecuación (9.2-28).

ETAPA BACKWARD

- **PASO 6.** Aplicación del principio de optimalidad de Bellman para obtener las matrices de realimentación del controlador PDC. Resolución del problema de optimización reformulado en términos de las LMIs (9.3-2), (9.3-4) y (9.3-5) planteado en el instante $(k + 3)$, donde se sustituye la LMI (9.3-3) por (9.3-12), empleando la cota superior del índice de coste obtenido en el instante $(k + 4)$. El resultado son las nuevas matrices de realimentación del estado del controlador PDC_3 .

$$K_1(k + 3) = \begin{bmatrix} 19.027 & 5.008 & 0.285 \end{bmatrix} \tag{9.5-19}$$

$$K_2(k + 3) = \begin{bmatrix} 6.676 & 3.593 & 0.315 \end{bmatrix}$$

- **PASO 7.** Obtención recursiva de las matrices de realimentación para cada instante de predicción. Repetición del paso 6 hasta el instante $(k + 0)$.

- Instante de $k+2$

- Matrices de realimentación PDC_2 :

$$K_1(k+2) = \begin{bmatrix} 18.476 & 4.873 & 0.282 \end{bmatrix} \quad (9.5-20)$$

$$K_2(k+2) = \begin{bmatrix} 6.380 & 3.473 & 0.300 \end{bmatrix}$$

- Instante $k+1$

- Matrices de realimentación PDC_1 :

$$K_1(k+1) = \begin{bmatrix} 18.005 & 4.759 & 0.280 \end{bmatrix} \quad (9.5-21)$$

$$K_2(k+1) = \begin{bmatrix} 6.273 & 3.394 & 0.290 \end{bmatrix}$$

- Instante $k+0$

- Matrices de realimentación PDC_0 :

$$K_1(k) = \begin{bmatrix} 17.629 & 4.671 & 0.279 \end{bmatrix} \quad (9.5-22)$$

$$K_2(k) = \begin{bmatrix} 6.850 & 3.450 & 0.287 \end{bmatrix}$$

El resultado del proceso de diseño es la obtención de un controlador PDC para cada uno de los 5 instantes de predicción. Asimismo, este controlador cumple el principio de optimalidad de Bellman, y por tanto, es el controlador que proporciona una acción de control óptima de manera global.

En la figura 9.9 el trazo verde, muestra el valor del índice de coste al resolver el problema (9.4-1) en cada uno de los 5 instantes de predicción, correspondiente con los pasos 2, 3 y 4 del algoritmo de diseño, donde el objetivo es obtener las regiones acotadas del espacio de variables que contienen el conjunto de posibles vectores iniciales. Por otra parte, el trazo magenta que se observa en la figura 9.9 muestra la evolución del índice al aplicar el principio de optimalidad de Bellman.

Por último, se adjunta la figura 9.10 donde se muestran los resultados de simulación obtenidos al emplear el controlador predictivo calculado. Los resultados muestran como el controlador consigue estabilizar el ángulo del péndulo invertido partiendo del estado inicial $[-\pi/2 \ \pi \ 10]$. Asimismo, la acción de control no supera en ningún momento los límites establecidos en el diseño.

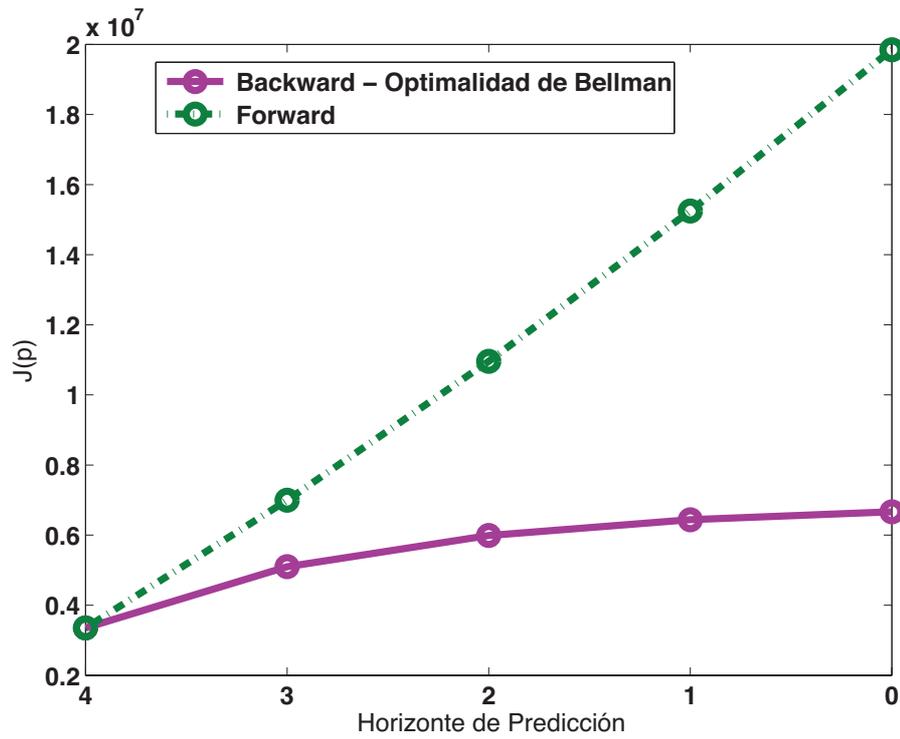


FIGURA 9.9: Evolución del índice de coste acumulado aplicando el principio de optimalidad de Bellman.

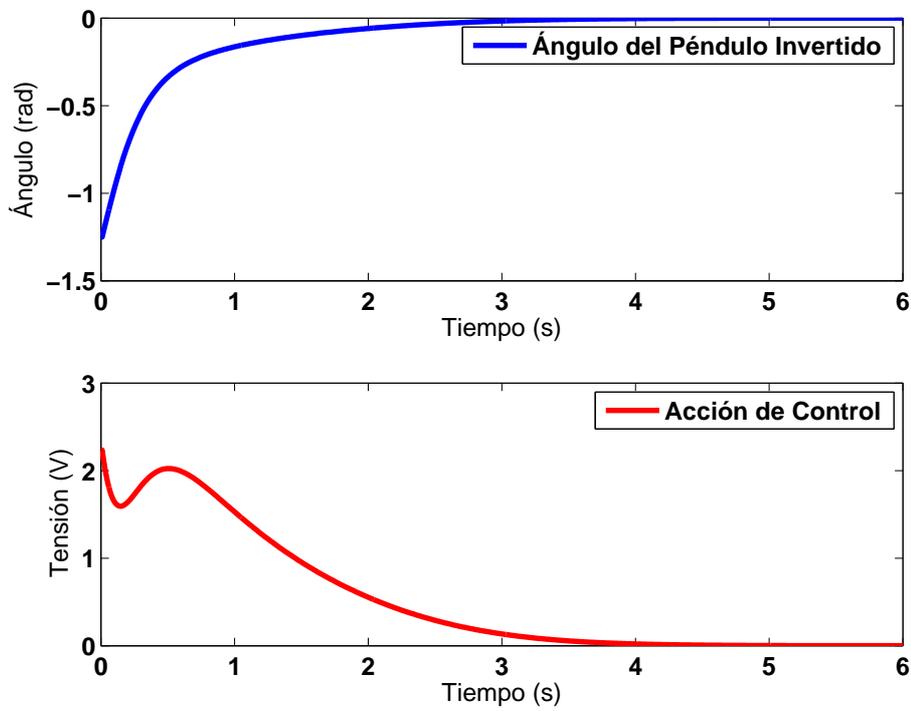


FIGURA 9.10: Respuesta del sistema con el controlador Predictivo borroso.

9.6 Conclusiones

Este capítulo ha descrito una segunda alternativa al diseño de un controlador predictivo borroso a partir de un modelo TS. El objetivo reside en formular un controlador basado en la filosofía de control predictivo sin la necesidad de emplear un predictor con un horizonte de predicción superior a un paso. Para ello, se ha empleado el principio de optimalidad de Bellman, con la intención de dividir el problema global en subproblemas definidos para cada uno de los instantes de predicción. Esta capacidad de dividir el problema inicial en un conjunto de problemas más sencillos permite la utilización del modelo TS inicial como predictor a un paso, pudiendo así, solventar los problemas asociados a la utilización de predictores borrosos que se señalaron en el capítulo 7.

La alternativa descrita presenta una dificultad importante, dada la necesidad de conocer el conjunto de posibles vectores de estados iniciales en cada uno de los instantes de predicción. Por ello, es necesario definir y calcular a priori un conjunto de hiperesferas que definen dichas regiones acotadas. Sin embargo, el cálculo de estas hiperesferas hace necesario una etapa previa de cálculo para obtener de manera numérica el radio que las define. Esta primera etapa de cálculo se resume en las cinco primeras etapas del algoritmo descrito en el apartado 9.3. Una vez se han obtenido los parámetros de las regiones acotadas, se puede proceder al cálculo de las matrices de realimentación del controlador PDC en cada instante de predicción, tal y como se describe en las etapas 6 y 7 del apartado 9.3.

Por otra parte, se ha planteado la inclusión de restricciones tanto en las variables manipuladas como en las controladas. Estas restricciones pueden ser formuladas en términos de LMIs, tal y como se muestra en los teoremas 9.4.1 y 9.4.2, y permiten la reformulación del problema original descrito en (9.3-1).

El resultado final es la obtención de un controlador PDC para cada uno de los instantes de predicción que satisface la optimización del índice de coste en cada instante de predicción, cumple el principio de optimalidad de Bellman y, además, satisface las restricciones en las acciones de control y las salidas. Asimismo, siguiendo la filosofía del control predictivo, se aplicará únicamente las acciones de control calculadas mediante el controlador PDC_0 , ya que se emplea la estrategia del horizonte móvil.

Finalmente, se ha presentado un ejemplo sencillo de aplicación a un modelo borroso ampliamente conocido en la literatura. La finalidad del ejemplo es clarificar los conceptos introducidos a lo largo del capítulo, así como una comprobación práctica de la viabilidad del método de diseño propuesto.

Bibliografía

BELLMAN, R.E. 1957. *Dynamic Programming*. 3rd edition edn. Princeton University Press, Princeton, N.

KAWAMOTO, S. 1996. Nonlinear control and rigorous stability analysis based on fuzzy system for inverted pendulum. *Fuzzy Systems*, 2(Jan), 1427-1432.

TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.

Parte **V**

Conclusiones y Bibliografía

CAPÍTULO 10

Conclusiones y Trabajo Futuro

10.1 Conclusiones y Contribuciones

La principal motivación de esta tesis, tal y como se describió en el capítulo 1, fue la necesidad de afrontar el diseño del sistemas de control para el proceso de renovación de carga en motores turboalimentados. La primera aproximación que se empleo en la resolución del problema dio lugar a la publicación [García-Nieto *et al.* 2008]. Este primer trabajo abordaba el diseño basado en modelos mediante la técnica de modelado descrita como redes de modelos locales (véase capítulo 2). Sin embargo, la dificultad para garantizar matemáticamente la estabilidad del conjunto en bucle cerrado plantearon la necesidad de buscar nuevas herramientas de modelado y diseño más adecuadas para el ámbito de sistemas no lineales.

Una de las alternativas más interesantes que se plantearon para abordar el modelo y diseño de sistema de control no lineal fueron los modelos matemáticos que emplean la lógica borroso. Los capítulos 2 y 3 describen sus principales características estructurales, así como las distintas metodologías para la obtención de modelos borrosos a partir, por ejemplo, de información procedente de expertos, de ecuaciones diferenciales no lineales o, incluso, a partir de datos experimentales obtenidos del proceso real. La aplicación de estas técnicas de modelado borroso al problema original de la gestión de la renovación de la carga en motores tubodiesel fue objeto de publicación en [García-Nieto & Martínez 2007], [García-Nieto *et al.* 2009a], [García-Nieto *et al.* 2009b] y [García-Nieto *et al.* 2009c]. De hecho, el capítulo 4 muestra dos ejemplos de modelado de sistemas borrosos, en el primero se emplea la técnica de sectorización de no linealida-

des, mientras que en el segundo ejemplo se emplean técnicas de identificación borrosas similares a las empleadas en las publicaciones descritas anteriormente.

Una de las cuestiones fundamentales para seleccionar los modelos borrosos, y en particular aquellos con estructura TS, fueron las interesantes opciones de diseño de controladores basados en dichas estructuras. En particular, los distintos desarrollos presentados en [Tanaka & Wang 2001], donde se muestran un amplio conjunto de diseños basados en modelos borrosos TS. Todos ellos presentan un factor común, la utilización de LMIs como herramienta matemática para la resolución del problema de diseño. Esta nueva manera de replantear el problema de diseño en términos de LMIs confiere a esta metodología una gran versatilidad, robustez y amplias posibilidades de diseño. Por todo ello, el capítulo 5 describe el principal aparato matemático para el diseño de sistemas borrosos de control mediante LMIs. En particular, se describe en este capítulo como añadir la condición de estabilidad para el sistema en bucle cerrado dentro del propio diseño del controlador. La posibilidad de incluir la condición de estabilidad dentro del mismo proceso de diseño, hace de esta herramienta una alternativa muy interesante en el diseño de sistemas no lineales, ya que normalmente la inclusión de este tipo de especificaciones resulta complejo y tedioso en el ámbito no lineal.

La aplicación práctica de parte de los conceptos teóricos expuestos en el capítulo 5 son presentados en el capítulo 6. Éste, muestra un ejemplo de diseño completo para la gestión del sistema de renovación de la carga en motores turbodiesel. Los resultados que se muestran permiten comprobar la metodología de diseño, así como la satisfacción de las condiciones de estabilidad que se especifican en la etapa de diseño. Sin embargo, el capítulo 6 es sólo una posible alternativa de diseño, dentro de este contexto, el autor de esta tesis ha publicado distintas alternativas de diseño tales como [García-Nieto & Martínez 2007], [García-Nieto *et al.* 2009a], [García-Nieto *et al.* 2009b] y [García-Nieto *et al.* 2009c].

Sin duda alguna, el trabajo presentado en [García-Nieto *et al.* 2008] puede ser considerado el punto de partida de esta tesis. Sin embargo, a partir de la búsqueda de alternativas para resolver un problema, surge la necesidad de generalizar el problema y buscar propuestas aplicables a cualquier otro proceso no lineal. Por ello, a partir del estado del arte que se describe en los capítulos 2-6 se plantea la posibilidad de extender los conceptos de la filosofía de control predictivo, ya presentes en [García-Nieto *et al.* 2008], al ámbito de controladores borrosos con estructura TS. En este planteamiento ya no se trata de resolver el problema de diseño del sistema de gestión de renovación de la carga, si no de plantear una metodología de diseño general intentando trasladar la filosofía del control predictivo mostrada en el capítulo 1 a controladores borrosos con estructura PDC.

El principal problema que se presenta a la hora de extender la filosofía predictivo a los modelos TS es la obtención del predictor, tal y como se muestra en el capítulo 7. De hecho, existen distintas alternativas para la formación del predictor, destacando los trabajos descritos en [Zhang *et al.* 2006], [Zhang *et al.* 2007b], [Zhang & Feng 2007], [Zhang *et al.* 2007a] y [Zhang *et al.* 2007c], en todos ellos se desprecia el carácter iterativo implícito del modelo de predicción borroso y, por tanto, se asume un error de modelado considerable, tal y como se expone detalladamente en el apartado 7.1 del capítulo 7. Esta tesis plantea dos posibles alternativas al problema de diseño del sistema de control predictivo borroso:

- Los capítulos 7 y 8 plantean la obtención de un modelo de predicción denominado FLAP a partir de datos de identificación del proceso real y el posterior diseño de un controlador PDC empleando dicho predictor. En particular, el capítulo 7 describe detalladamente la obtención de predictores FLAP, cuya principal característica es la posibilidad de obtener el vector de estados futuros en un horizonte de predicción H a partir, únicamente, del vector de estados actuales y del conjunto de acciones de control futuras. Por tanto, los predictores FLAP descritos en el capítulo 7 eliminan las restricciones asociadas con el carácter iterativo de los modelos de predicción estándar empleados en [Zhang *et al.* 2007b]. Posteriormente, el capítulo 8 expone el diseño de un controlador PDC borroso empleando el predictor FLAP, así como la formulación del problema en términos de LMIs.

La etapa de diseño del controlador resulta especialmente delicada debido a la necesidad de incluir la minimización del índice de coste cuadrático típico en sistema de control predictivo y, la condición de estabilidad necesaria para garantizar que el conjunto controlador-proceso sea estable en bucle cerrado. De hecho, estas dos especificaciones introducen una dependencia bilineal en las variables de diseño que debe ser resuelta mediante el algoritmo iterativo *ILMI* descrito en el apartado 9.3 del capítulo 8.

Por último, los capítulos 7 y 8 muestran un ejemplo de diseño completo basado en un proceso no lineal empleado en [Tanaka & Wang 2001] para comprobar la validez de los distintas técnicas de diseño que se proponen en dicho trabajo. De este modo es posible mostrar de forma sencilla las distintas etapas de diseño en un sistema claramente no lineal.

- El capítulo 9 describe la segunda alternativa de diseño predictivo borroso. En este caso, se emplea un enfoque completamente distinto basado en el principio de optimalidad de Bellman. La técnica de diseño propuesta, se basa en la división del problema de diseño original en un conjunto de problemas de optimización más sencillo que pueden ser vistos como etapas de decisión desde el punto de vista de la programación dinámica [Bellman 1957]. Este segundo planteamiento, permite eli-

minar la necesidad de un predictor borroso y trabaja directamente con el modelo TS original eliminando las restricciones que se detallan en el capítulo 7. Sin embargo, la eliminación del modelo de predicción hace necesaria la resolución del problema de diseño de manera iterativa y con una dependencia importante del conjunto espacial de vectores iniciales. Asimismo, al final del capítulo 9 también se muestra un ejemplo de diseño completo, empleando el mismo proceso no lineal que el utilizado en los capítulos 7 y 8.

10.2 Trabajos Futuros

El trabajo realizado en la presente tesis abre un gran abanico de posible líneas futuras de investigación y trabajo dado el amplio espectro de aplicación y modificación de las técnicas que se han presentando en este trabajo. Algunas de las posibles líneas de investigación que se contemplan son:

- Desde el punto de vista del predictor FLAP:
 - Selección automática del número de reglas borrosas mediante algoritmos de clustering [Babuska 1998].
 - Selección automática de la estructura del consecuente en las reglas borrosas [Abonyi 2003].
 - Modificación del algoritmo de actualización basado en optimizadores genéticos, evaluando otros algoritmos de optimización para sistemas no lineales existentes.
- Desde el punto del vista del diseño de controladores empleando predictores FLAP:
 - Utilización de una estructura de controlador distinta al PDC [Tanaka & Wang 2001], de este modo se podría incorporar un mayor grado de libertad al controlador, hecho que, sin duda, complicaría la etapa de diseño considerablemente.
 - Modificación de la resolución del triple sumatorio que se plantea en el apartado 8.2 del capítulo 8. La alternativa utilizada en este trabajo es muy conservativa, por lo que empleando técnicas de resolución como las planteadas en [Sala & Ariño 2007a] y [Sala & Ariño 2007b] se podría obtener un controlador PDC menos conservativo.
 - Análisis del impacto de las matrices de ponderación Q y R en las especificaciones del diseño y de la estabilidad del conjunto en bucle cerrado.
- Desde el punto de vista de controladores borrosos Forward-Backward:

- Inclusión de una etapa de refinamiento"de la cota superior del índice. Esto sería posible mediante la ejecución repetitiva del algoritmo actual hasta encontrar una mejor cota de la solución obtenida.
- Estudio del comportamiento del algoritmo de diseño bajo distintos horizontes de predicción y control.

No cabe duda que cualquiera de los puntos destacados anteriormente supone un nuevo reto desde el punto de vista de investigación. Asimismo, la línea de investigación futura más interesante para el autor, pasa por la implementación real de los sistemas de control propuestos en esta tesis con el objetivo de controlar procesos reales complejos. Sin duda, uno de los retos más importantes a los que uno se enfrenta es la aplicación real de los conceptos teóricos planteados matemáticamente. Por ello, la aplicación directa a procesos de interés sería una ratificación evidente de la viabilidad de las técnicas propuestas en este trabajo.

Bibliografía

ABONYI, J. 2003. *Fuzzy Model Identification for Control*.

BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.

BELLMAN, R.E. 1957. *Dynamic Programming*. 3rd edition edn. Princeton University Press, Princeton, N.

GARCÍA-NIETO, J. V. SALCEDO S., & MARTÍNEZ, M. 2007. Identificación y Control Fuzzy en Motores Diesel Turboalimentados. *XXVIII Jornadas de Automática*, Sep.

GARCÍA-NIETO, S., MARTÍNEZ, M., BLASCO, X., & SANCHIS, J. 2008. Nonlinear predictive control based on local model networks for air management in diesel engines. *Control Engineering Practice*.

GARCÍA-NIETO, S., SALCEDO, J., MARTÍNEZ, M., & LAURÍ, D. 2009a. Air management in a diesel engine using fuzzy control techniques. *Information Sciences*, **179**(19), 3392-3409.

GARCÍA-NIETO, S., SALCEDO, J., HERRERO, J.M., & RAMOS, C. 2009b. Fuzzy Modelling and Control for Air Management in Diesel Engines. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, **6**(2), 36-48.

GARCÍA-NIETO, S., SALCEDO, J., HERRERO, J.M., & RAMOS, C. 2009c. LMI approach for air-management in diesel engines using PDC fuzzy controllers. In *1st. Int. Joint Conference on Computational Intelligence (IJCCI 2009) and Int. Conf. on Evolutionary Computation (ICEC), Madeira (Portugal)*, Oct.

SALA, A., & ARIÑO, C. 2007a. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polyá's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, **158**(24), 2671-2686.

SALA, A., & ARIÑO, C. 2007b. Relaxed stability and performance conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with knowledge on membership function overlap. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, **37**(3), 727-732.

TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.

ZHANG, T., & FENG, G. 2007. Output Tracking of Piecewise-Linear Systems via Error Feedback Regulator With Application to Synchronization of Nonlinear Chua's Circuit. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on [Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on]*, **54**(8), 1852 - 1863.

ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2006. Observer based Fuzzy Integral Model Predictive Control using Piecewise Lyapunov Functions. *Fuzzy Systems, 2006 IEEE International Conference on*, Jan, 299 - 306.

ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007a. Fuzzy Constrained Min-Max Model Predictive Control Based on Piecewise Lyapunov Functions. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, **15**(4), 686 - 698.

ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007b. Stable Model Predictive Control of Fuzzy Affine Systems with Input and State Constraints. *Fuzzy Systems Conference, 2007. FUZZ-IEEE 2007. IEEE International*, Jun, 1 - 6.

ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007c. Terminal Cost Constraint based Stable Fuzzy Model Predictive Control of A. Nonlinear Fluidized Bed Combustion Plant. *Intelligent Control, 2007. ISIC 2007. IEEE 22nd International Symposium on*, Sep, 401 - 406.

Resumen Bibliográfico

ABONYI, J. 2003. *Fuzzy Model Identification for Control*.

ALBERTOS, P., & ORTEGA, R. 1989. On Generalized Predictive Control: Two Alternative Formulations. *Automatica*, 25(5), 753-755.

BABUSKA, R. 1998. *Fuzzy modeling for control*.

BABUSKA, R., & VERBRUGGEN, H.B. 1996. An overview of fuzzy modeling for control. *Control Engineering Practice*, 4(11), 1593-1606.

BABUSKA, R., JAGER, R., & VERBRUGGEN, H.B. 1994. Interpolation issues in Sugeno-Takagi reasoning.

BACK, T. 1996. *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*. New York: Oxford University Press.

BADGWELL, T. 1997. Robust model predictive control of stable linear systems. *International Journal of Control*, Jan.

BAKER, J.E. 1987. *Reducing Bias and Inefficiency in the Selection Algorithms*. Grefenstette, J.J. (ed.) edn. Vol. Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,. Pages 14-21.

BALDWIN, J.F., MARTIN, T.P., & PILSWORTH, B.W. 1995. *Fril-Fuzzy and Evidential Reasoning in Artificial Intelligence*.

BELLMAN, R.E. 1957. *Dynamic Programming*. 3rd edition edn. Princeton University Press, Princeton, N.

BEMPORAD, A., FERRARI-TRECCATE, G., MIGNONE, D., MORARI, M., & F.D.TORRISI. 1999 (Aug). Model predictive control - Ideas for the next generation.

BEMPORAD, A., MORARI, M., DUA, V., & PISTIKOPOULOS, E. N. 2001. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 38.

- BEZDEK, J.C. 1981. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*.
- BIEGLER, L.T. 1998 (Jun). Efficient solution of Dynamic optimization and NMPC problems.
- BITMEAD, R., GEVERS, M., & WERTZ, V. 1989. Adaptation and robustness in predictive control. *Decision and Control*, Jan.
- BLASCO, F.X. 1999 (In Spanish). *Model based predictive control using heuristic optimization techniques. Application to non-linear and multivariable processes*. Ph.D. thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.
- BOYD, A. STEPHEN, GHAOUI, L. EL, FERON, E., & BALAKRISHNAN, V. 1987. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *Book*, 203.
- BRANICKY, M.S. 1998. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4), 475-482.
- BROWN, M. 1993. Neurofuzzy Adaptive Modelling and Control.
- BRUCKER, P., HILBIG, T., & HURINK, J. 1999. A branch and bound algorithm for a single-machine scheduling problem with positive and negative time. *Discrete Applied Mathematics*, Jan.
- BUCKLEY, J.J., & HAYASHI, Y. 1994. Fuzzy neural networks: a survey. *Fuzzy Sets and Systems*, 66(1), 1-13.
- CAMACHO, E.F. 1993. Constrained Generalized Predictive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2), 327-332.
- CAMACHO, E.F., & BORDONS, C. 1999. *Model predictive control*.
- CAMACHO, E.F., & BORDONS, C. 2004. *Model Predictive Control*.
- CANNON, M., DESHMUKH, V., & KOUVARITAKIS, B. 2003. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets. *Automatica*, Jan.
- CHEN, H., & ALLGÖWER, F. 1998. A computationally attractive nonlinear predictive control scheme with guaranteed stability for stable systems. *Accepted for Journal of Process Control*.
- CHEN, S., & BILLINGS, S.A. 1989. Representation of non-linear systems: the NARMAX model. *International Journal of Control*, 49, 1012-1032.
- CHEN, S., BILLINGS, S.A., & GRANT, P.M. 1990. Non-linear system identification using neural networks. *Int. J. Control*, 51(6), 1191-1214.

- CHEN, S., COWAN, C.F.N., & GRANT, P.M. 1991. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basisfunction networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2(2), 302-309.
- CHISCI, L., LOMBARDI, A., MOSCA, E., & ROSSITER, J. 1996. State-space approach to stabilizing stochastic predictive control. *International Journal of Control*, Jan.
- CHOW, C.M., & CLARKE, D.W. 1994a. Actuator nonlinearities in predictive control.
- CHOW, C.M., & CLARKE, D.W. 1994b. Actuator nonlinearities in predictive control.
- CLARKE, D.W. 1988. Application of Generalized Predictive Control to Industrial Processes. *IEEE Control Systems Magazine*, 138(Apr), 49-55.
- CLARKE, D.W. 1991. *Adaptive Generalized Predictive Controller*. Tech. rept. OUEL 1879/91.
- CLARKE, D.W. 1994. Advances in Model-Based Predictive Control.
- CLARKE, D.W., & MOHTADI, C. 1989. Properties of Generalized Predictive Control. *Automatica*, 25(6), 859-875.
- CLARKE, D.W., MOHTADI, C., & TUFFS, P.S. 1987a. Generalized Predictive Control-Part I. *Automatica*, 23(2), 137-148.
- CLARKE, D.W., MOHTADI, C., & TUFFS, P.S. 1987b. Generalized Predictive Control-Part II. Extensions and Interpretations. *Automatica*, 23(2), 149-160.
- CUTLER, C.R., & RAMAKER, D.L. 1980. Dynamic Matrix Control - a computer control algorithm.
- DE OLIVEIRA, J., & LEMOS, J. 1995. Long-range predictive adaptive fuzzy relational control. *Fuzzy Sets and Systems*, Jan.
- DÍEZ, J., NAVARRO, J., & SALA, A. 2004. Algoritmos de agrupamiento en la identificación de modelos borrosos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática*, Jan.
- DUSSY, S., & GHAOUI, L.E. 1997. Multi-objective bounded control of uncertain nonlinear systems: an inverted pendulum example. *Control of Uncertain Systems with Bounded Inputs*. Springer, Berlin, 55-73.
- ELMAN, J. 1990. Finding Structure in Time. *Cognitive Science*, 14, 179-211.
- ESPINOSA, J., & VANDEWALLE, J. 1999a. Constrained predictive control using fuzzy models. *Submitted to IFSA Congress-99*, Jan.
- ESPINOSA, J., & VANDEWALLE, J. 1999b. The use of convex programming on fuzzy model based predictivecontrol. *Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics*, Jan.

- FAVOREEL, W., MOOR, B. DE, & OVERSCHEE, P. VAN. 1999. Subspace identification of bilinear systems subject to white inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(6), 1157-1165.
- FORSQREN, A., GILL, P., & WRIGHT, M. 2002. Interior methods for nonlinear optimization. *SIAM Review*, Jan.
- FROISY, C. HART B., & PAPASTRATOS, S. 1999. Industrial Application of On-Line First Principle Dynamic Models using State. *AIChE*, Nov.
- FROISY, J.B. 1994. Model predictive control: past, present and future. *ISA Transactions*, **33**, 235-243.
- GAHOUI, L., & SCORLETTI, G. 1996. Control of Rational Systems using Linear-Fractional Representations and Linear Matrix Inequalities. *Automatica*, **32**(9), 1273-1284.
- GARCIA, C.E., & MORSHEDI, A.M. 1986. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). *Chemical Eng. Commun.*, **46**, 73-87.
- GARCIA, C.E., PRETT, D.M., & MORARI, M. 1989. Model Predictive Control: Theory and Practice - a Survey. *Automatica*, **25**(3), 355-348.
- GARCÍA-NIETO, J. V. SALCEDO S., & MARTÍNEZ, M. 2007. Identificación y Control Fuzzy en Motores Diesel Turboalimentados. *XXVIII Jornadas de Automática*, Sep.
- GARCÍA-NIETO, S., MARTÍNEZ, M., BLASCO, X., & SANCHIS, J. 2008. Nonlinear predictive control based on local model networks for air management in diesel engines. *Control Engineering Practice*.
- GARCÍA-NIETO, S., SALCEDO, J., MARTÍNEZ, M., & LAURÍ, D. 2009a. Air management in a diesel engine using fuzzy control techniques. *Information Sciences*, **179**(19), 3392-3409.
- GARCÍA-NIETO, S., SALCEDO, J., HERRERO, J.M., & RAMOS, C. 2009b. Fuzzy Modelling and Control for Air Management in Diesel Engines. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, **6**(2), 36-48.
- GARCÍA-NIETO, S., SALCEDO, J., HERRERO, J.M., & RAMOS, C. 2009c. LMI approach for air-management in diesel engines using PDC fuzzy controllers. *In 1st. Int. Joint Conference on Computational Intelligence (IJCCI 2009) and Int. Conf. on Evolutionary Computation (ICEC), Madeira (Portugal)*, Oct.
- GENCELI, H., & NIKOLAOU, M. 1993. Robust stability analysis of constrained l_1 -norm model predictive control. *AIChE Journal*, Jan.
- GENCELI, H., & NIKOLAOU, M. 1995. Design of robust constrained model-predictive controllers with volterra series. *AIChE Journal*, Jan.

- GENCELI, H., & NIKOLAOU, M. 1996. New approach to constrained predictive control with simultaneous model identification. *AIChE Journal*, Jan.
- GLORENNEC, P.Y. 1994. Learning Algorithms for Neuro-Fuzzy Networks. *Fuzzy Control Systems*, 4-18.
- GOLDBERG, D.E. 1989. *Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley.
- GRAHAM, A. 1982. Kronecker Products and Matrix Calculus: With Applications. *JOHN WILEY & SONS, INC., 605 THIRD AVE., NEW YORK, NY 10158, 1982, 130*.
- GRANADO, E., COLMENARES, W., BERNUSSOU, J., & GARCIA, G. 2003. Linear matrix inequality based model predictive controller. *Control Theory and Applications*, Jan.
- GREWAL, M. S., & GLOVER, K. 1976. Identifiability of Linear and Nonlinear Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Dec.
- GROSDIDIER, P., FROISY, B., & HAMMANN, M. 1988 (Jun). The IDCOM-M controller.
- GUSTAFSON, DE, & KESSEL, WC. 1979. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. *Proc. IEEE CDC*, 2, 761-766.
- GUZZELLA, L., & AMSTUTZ, A. 1998. Control of Diesel Engines. *IEEE Control Systems*.
- GUZZELLA, L., & ONDER, C.H. 2004. *Introduction to Modeling and Control of Internal Combustion Engine Systems*.
- HOLLAND, J.H. 1975. *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor: The University of Michigan Press.
- IKONEN, E., & NAJIM, K. 2002. Advanced process identification and control. *Marcel Dekker*.
- JAJUGA, K. 1986. Linear fuzzy regression. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(3), 343-353.
- JANG, J.S.R. 1992. Self-learning fuzzy controllers based on temporal backpropagation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3(5), 714-723.
- JANKOVIC, M., JANKOVIC, M., & KOLMANOVSKY, I. 2000. Constructive Lyapunov Control Design for Turbocharged Diesel Engines. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(Mar).
- KANG, G., LEE, W., & SUGENO, M. 1998. Stability analysis of TSK fuzzy systems. *Fuzzy Systems Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*, 1(Apr), 555 - 560.
- KAO, M., & MOSKWA, J.J. 1995. Turbocharged Diesel Engine Modeling for Nonlinear Engine Control and State Estimation. *Transaction of ASME*, 117(Mar).

- KAWAMOTO, S. 1996. Nonlinear control and rigorous stability analysis based on fuzzy system for inverted pendulum. *Fuzzy Systems*, 2(Jan), 1427-1432.
- KAWAMOTO, S., TADA, K., ISHIGAME, A., & TANIGUCHI, T. 1992. An approach to stability analysis of second order fuzzy systems.
- KERRIGAN, A.E.C., & MACIEJOWSKI, J.M. 2008. Feedback Min-max Model Predictive Control Using a Single Linear Program.
- KERRIGAN, E. 2000. Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control. *Tesis Doctoral*, Jan.
- KERRIGAN, E., & MAYNE, D. 2002. Optimal Control of Constrained, Piecewise Affine Systems with Bounded Disturbances. *IEEE Conference on Decision and Control*, Jan.
- KEYSER, R.M.C. DE. 1991. Basic principles of model based predictive control. *1st. European Control Conference*, 1(1), 1753-1758.
- KINNAERT, M. 1989. Adaptive generalized predictive controller for MIMO systems. *International Journal of Control*, Jan.
- KOTHARE, M., BALAKRISHNAN, V., & MORAI, M. 1994. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *American Control Conference*, Jan.
- KOTHARE, V. BALAKRISHNAN M.V., & MORARI, M. 1996. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32, 1361-1379.
- KOUVARITAKIS, B., & CANNON, M. 2001. Nonlinear Predictive Control: Theory and Practice. Jan, 261.
- KOUVARITAKIS, B., ROSSITER, J., & GOSSNER, J. 1997. Improved algorithm for multivariable stable generalised predictive control. *Control Theory and Applications*, Jan.
- KUSCHEWSKI, J., HUI, S., & ZAK, S. 1993. Application of feedforward neural networks to dynamical system identification and control. *IEEE Transactions on Control*, 1(1), 37-49.
- KUZNETSOV, A.G., & CLARKE, D.W. 1994. Application of constrained GPC for improving performance of controlled plants.
- KWON, W.H., CHOI, H., BYUN, D., & NOH, S. 1992. Recursive solution of generalized predictive control and its equivalence to receding horizon tracking control. *Automatica(Oxford)*, Jan.
- LAWLER, E., & WOOD, D. 1966. Branch-and-bound methods: A. survey. *Operations Research*, Jan.
- LEE, J., & YU, Z. 1997. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, Jan.

- LEE, J., MORARI, M., & GARCIA, C. 1994. State-space Interpretation of Model Predictive Control. *Automatica*, Jan.
- LEMO, J.M., & MOSCA, E. 1985. A multipredictor based LQ self-tuning controller.
- LEONTARITIS, I.J., & BILLINGS, S. 1985a. Input-output parametric models for non-linear systems- part I: deterministic nonlinear systems. *International Journal of Control*, 41(2), 303-328.
- LEONTARITIS, I.J., & BILLINGS, S. 1985b. Input-output parametric models for non-linear systems- part II: stochastic nonlinear systems. *International Journal of Control*, 41(2), 329-344.
- LEYFFER, S. 2001. Integrating SQP and Branch-and-Bound for Mixed Integer Nonlinear Programming. *Computational Optimization and Applications*, Jan.
- LI, J., HONG, Y., WANG, H., BUSHNELL, L., & TANAKA, K. 2000. A fuzzy logic approach to optimal control of nonlinear systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., & CAMACHO, E. 2003. Robust MPC control based on a contractive sequence of sets. *Decision and Control*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., & CAMACHO, E. 2004. Robust stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties. *16th Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., & CAMACHO, E. 2005. Enlarging the domain of attraction of MPC controllers. *Automatica*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., SALAS, F., & CAMACHO, E.F. 2006. Input to state stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties. *Automatica*, Jan.
- LIMON, D., ALAMO, T., BRAVO, J., CAMACHO, E.F. & RAMIREZ, D. 2007. Interval Arithmetic in Robust Nonlinear MPC. *Lecture Notes in Control and Information Science*, Jan.
- LIMON, D., ALVARADO, I., ALAMO, T., & CAMACHO, E. 2008. MPC for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, Jan.
- LING, K., & LIM, K. 1996. A State Space GPC with Extensions to Multirate Control. *Automatica*, Jan.
- LINKENS, D.A., & MAHFOUF, M. 1994. Generalized Predictive Control (GPC) in clinical anaesthesia.
- LIU, G.P., KADIRKAMANATHAN, V., & BILLINGS, S.A. 1998. Predictive control for nonlinear systems using neural networks. *Int. J. Control*, 71(6), 1119-1132.

- LJUNG, L. 1999. *System Identification. Theory for the user. Second Edition.*
- LOFBERG, J. 2004. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Computer Aided Control Systems Design*, Jan.
- LU, Y., HE, M., & XU, C. 1996. Fuzzy modeling and expert optimization control for industrial processes. *Control Systems Technology*, Jan.
- MACIEJOWSKI, J. M. 2002. *Predictive Control with Constraints.*
- MAGNI, L., NICOLAO, G., MAGNANI, L., & SCATTOLINI, R. 2001. A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems. *Automatica*, Jan.
- MANER, B.R., DOYLE, F.J., OGUNNAIKE, B.A., & PEARSON, R.K. 1996. Nonlinear model predictive control of a simulated multivariable polymerization reactor using second-order volterra models. *Automatica*, 32(9), 1285-1301.
- MARLIN, T.E. 1995. *Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance.*
- MARTÍNEZ, J. M., & HERRERA, F. 2003. Estrategia para la Construcción de Modelos Difusos utilizando Clustering y Transformación Ortogonal. *X. Convención Internacional Informática.*
- MARTÍNEZ, M., SENENT, J.S., & BLASCO, F.X. 1996. A comparative study of classical vs genetic algorithm optimization applied in GPC controller.
- MARTÍNEZ, M., SENENT, J.S., & BLASCO, F.X. 1998. Generalized predictive control using genetic algorithms (GAGPC). *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 11(3), 355-368.
- MAYNE, D. 2000. Nonlinear model predictive control: Challenges and opportunities. *Nonlinear Model Predictive Control*, Jan.
- MAYNE, D., RAWLINGS, J., RAO, C., & SCOKAERT, P. 2000. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, Jan.
- MEGIAS, D., SERRANO, J., & DE PRADA, C. 2002. Min-max constrained quasi-infinite horizon model predictive control using linear programming. *Journal of Process Control*, Jan.
- MICHALEWICZ, Z. 1996. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs.* 3rd edition edn. Springer series Artificial Intelligence. Springer.
- MICHALSKA, H., & MAYNE, D. 1993. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *Automatic Control*, Jan.

- MITTEN, L. 1970. Branch-and-bound methods: General formulation and properties. *Operations Research*, Jan.
- MOLINARI, B. 1975. The stabilizing solution of the discrete algebraic riccati equation. *Automatic Control*, Jan.
- MORARI, M., & LEE, J. H. 1997. Model predictive control: past, present and future.
- MORARI, M., & LEE, J. H. 1999. Model predictive control: past, present and future. *Computers and Chemical Engineering*, Jan.
- MOSCA, E. 1995. *Optimal, Predictive, and Adaptive Control*.
- MÜHLENBEIN, H., & SCHLIERKAMP-VOOSEN, D. 1993. Predictive models for the Breeder Genetic Algorithm. I. Continuous parameter optimization. *Evolutionary Computation. The MIT Press*, 1(1), 25-49.
- MURRAY-SMITH, R. 1994. Local Model Networks and Local Learning. *Fuzzy Duisburg*, Jan.
- MURRAY-SMITH, R., & GOLLEE, H. 1994. A constructive learning algorithm for local model networks. *Proc. IEEE Workshop on Computer-intensive methods in control and Signal Processing*, Jan.
- MURRAY-SMITH, R., HUNT, K., & LOHNERT, F. 1994. Constructive learning-industrial perspectives. *Advances in Neural Networks for Control and Systems*, Jan.
- MUSKE, K.R., & RAWLINGS, J.B. 1993. Model predictive control with linear models. *AICHE Journal*, 39(2), 262-287.
- NA, W., GOU, B., & DIONG, B. 2007. Nonlinear Control of PEM Fuel Cells by Exact Linearization. *Industry Applications*, Jan.
- NAHAS, M. A. HESSON E. P., & SEBORG, D. E. 1992. Nonlinear Internal Model Control Strategy for Neural Networks Models. *Computer Chemical Eng*, 16(12), 1039-1057.
- NECOARA, I., KERRIGAN, E., SCHUTTER, B. DE, & VAN DEN BOOM, T.J.J. 2007. Finite-Horizon Min-Max Control of Max-Plus-Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jan.
- NELLES, O. 2001. *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*.
- NIKIFORUK, L.J.P.N., & GUPTA, M.M. 1995. Approximation of Discrete Time State Space Trajectories Using Dynamic Recurrent Neural Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(7), 1266-1270.

NIKOLAOU, M. 1998. Model Predictive Controllers: A. Critical Synthesis of Theory and Industrial. *citeseer.ist.psu.edu*, Jan.

OGATA, K. 1998. *Ingeniería de Control Moderna*.

OLIVEIRA, J.V. 1993. Neuron inspired learning rules for fuzzy relational structures. *Fuzzy Sets and Systems*, 57(1), 41-53.

OLIVEIRA, MC, BERNUSSOU, J., & GEROMEL, JC. 1999. A. new discrete-time robust stability condition. *Systems & control letters*, Jan.

ONNEN, C., BALBUSKA, R., KAYMAK, U., SOUSA, J.M., & ISERMANN, H.B. VERBRUGGENAND R. 1997. Genetic algorithms for optimization in predictive control. *Control Engineering Practice*, 5(10), 1363-1372.

ORDYS, A.W., & CLARKE, D.W. 1993. A. state-space description for GPC controllers. *Int. J. Systems Sci.*, 24, 1727-1744.

PÉREZ, P. 1995. *Aplicación de técnicas de programación dinámica a control predictivo basado en modelos*. Ph.D. thesis.

PHAM, D., & XING, L. 1995. *Dynamic System Identification Using Elman and Jordan Networks*. Chap. 23, pages 572-591.

PHILLIPS, C. L., & PARR, J. M. 1995. *Signals, systems and transforms*.

PRETT, D.M., & MORARI, M. 1987. The Shell Process Control Workshop: Shell Workshop Proceedings. Jan, 369.

PRIMBS, J., & NEVISTIC, V. 2000. A new approach to stability analysis for constrained finitereceding horizon control without end constraints. *Automatic Control*, 45(8), 1507-1512.

QIN, S., & BADGWELL, T. 1997. An overview of industrial model predictive control technology. *Fifth International Conference on Chemical Process Control*, Jan.

RAO, C., WRIGHT, S., & RAWLINGS, J. 1998. Application of Interior-Point Methods to Model Predictive Control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Jan.

RAWLINGS, J., & MUSKE, K. 1993. The stability of constrained receding horizon control. *Automatic Control*, Jan.

RAWLINGS, JAMES B. 2000. Tutorial overview of model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, Jun, 38-52.

RICHALET, J. 1993. Industrial Applications of Model Based Predictive Control. *Automatica*, 29(5), 1251-1274.

- RICHALET, J., RAULT, A., TESTUD, J.L., & PAPON, J. 1978. Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes. *Automatica*, **14**, 413-428.
- RICKER, N. 1990. Model predictive control with state estimation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Jan.
- RODRIGUES, M., & ODLOAK, D. 2003. An infinite horizon model predictive control for stable and integrating processes. *Computers and Chemical Engineering*, Jan.
- ROSS, T.J. 2004. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*.
- ROSSITER, J.A., KOUVARITAKIS, B., & DUNNETT, R.M. 1991. Application of Generalized Predictive Control to a Boiler Turbine Unit for Electricity Generation. *IEE Proceedings-D*, **138**, 59-67.
- ROUBOS, J., MOLLOV, S., BABUSKA, R., & VERBRUGGEN, H. 1999. Fuzzy model-based predictive control using Takagi-Sugeno models. *International Journal of Approximate Reasoning*, Jan.
- ROUHANI, R., & MEHRA, R.K. 1982. Model Algorithmic Control: Basic properties. *Automatica*, **18**, 401-414.
- SALA, A., & ARIÑO, C. 2007a. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, **158**(24), 2671-2686.
- SALA, A., & ARIÑO, C. 2007b. Relaxed stability and performance conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with knowledge on membership function overlap. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, **37**(3), 727-732.
- SALCEDO, J., & MARTINEZ, M. 2006. Identificación de Modelos LPV para el Control de Sistemas No Lineales. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, **3**(3), 92-107.
- SALCEDO, J., MARTÍNEZ, M., BLASCO, X., & SANCHIS, J. 2008. BIBO stabilisation of Takagi-Sugeno fuzzy systems under persistent perturbations. *IET Control Theory and Applications*, **2**(6), 513-523.
- SCATTOLINI, R., & SCHIAVONI, N. 1995. A. multirate model-based predictive controller. *Automatic Control*, Jan.
- SCOKAERT, P., RAWLINGS, J., & MEADOWS, E. 1997. Discrete-time stability with perturbations: application to model predictive control. *Automatica (Journal of IFAC)*, Jan.
- SCOKAERT, P.O.M., & MAYNE, D.Q. 1998. Min-Max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(8), 1136-1142.

SJÖBERG, J., HJALMARSSON, H., & LJUNG, L. 1994. Neural networks in system identification. vol. 2.

SMITH, S.M., NOKLEBY, B.R., & COMER, D.J. 1994. A computational approach to fuzzy logic controller design and analysis using cell state space methods. *Kandel and Langholz (Eds.), Fuzzy Control Systems*, 398-427.

SOMOL, P., PUDIL, P., & KITTLER, J. 2004. Fast Branch & Bound Algorithms for Optimal Feature Selection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Jan.

SONG, Q., & GRIGORIADIS, K.M. 2003 (Jun). Diesel Engine Speed Regulation Using Linear Parameter Varying Control.

SONTAG, E. 1993. Neural Networks for Control. *Essays Control: perspectives in the theory and the its applications*, 339-380.

SOUSA, J., SETNES, M., BAPTISTA, L., & DA COSTA, J. SA. 1999. Model predictive algorithms based on fuzzy discrete alternatives. *Fuzzy Systems Conference Proceedings, 1999. FUZZ-IEEE '99. 1999 IEEE International*, 1(Jul), 228 - 233 vol.1.

SOUSA, J.M, BABUSKA, R., BRUIJN, P., & VERBRUGGEN, H.B. 1996. Comparison of conventional and fuzzy predictive control. *Fuzzy Systems, 1996., Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on*, 3, 1782-1787 vol.3.

STEFANOPOULOU, A.G., KOLMANOVSKY, I., & FREUDENBERG, J.S. 2000. Contro of Variable Geometry Turbocharged Diesel Engines for Reduced Emissions. *IEEE Transactions Control Systems Technology*, 8(4).

SUDHAKAR, R., VENUGOPAL, K.P., & PANDYA, A.S. 1993. An Improved Scheme for Direct Adaptive Control of Dynamical Systems Using Backpropagation Neural Networks. *Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*.

SUGENO, M., & KANG, G. T. 1986. Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator. *Fuzzy Sets Systems*, 18(3), 329-345.

TAKAGI, T., & SUGENO, M. 1985. Fuzzy Identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybern*, 15, 116-132.

TANAKA, K., & SUGENO, M. 1992. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets Systems*, 45(2), 135-156.

TANAKA, K., & WANG, H.O. 2001. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A. Linear Matrix Inequality Approach. *Book*. Decay Rate, muy util.

TOWNSEND, S., LIGHTBODY, G., BROWN, M., & IRWIN, G. 1998 (Jun). Nonlinear Dynamic Matrix using Local Models.

- TSANG, T.T.C., & CLARKE, D.W. 1988. Generalized predictive control with input constraints. *IEE Proceedings.*, 135(Nov), 451-460.
- UNION, EUROPEAN. 2003. Emission Standards: European Union. www.dieselnet.com/standards/eu/ld.html.
- VERDULT, V., & VERHAEGEN, M. 2000. Identification of multivariable linear parameter-varying systems based on subspace techniques. vol. 2.
- VERDULT, V., & VERHAEGEN, M. 2002. Subspace identification of multivariable linear parameter-varying systems. *Automatica*, 38(5), 805-814.
- WANG, H., TANAKA, K., & GRIFFIN, M. 1995. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *Fuzzy Systems, 1995. International Joint Conference of the Fourth IEEE International Conference on Fuzzy Systems and The Second International Fuzzy Engineering Symposium., Proceedings of 1995 IEEE International Conference on*, 2(Feb), 531 - 538 vol.2.
- WANG, L. 2004. Discrete model predictive controller design using Laguerre functions. *Journal of Process Control*, Jan.
- WANG, L.X. 1994. *Adaptative fuzzy systems and control design and stability analysis*. Page 352.
- XI, Y. 1989. New design method for discrete-time multi-variable predictive controllers. *International Journal of Control*, Jan.
- YOSHINARI, Y., PEDRYCZ, W., & HIROTA, K. 1993. Construction of fuzzy models through clustering techniques. *Fuzzy Sets and Systems*, 54(2), 157-165.
- ZADEH, L.A. 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.
- ZADEH, L.A. 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 3, 28-44.
- ZAMARREÑO, J. M. 1996. *Identificación y control predictivo basado en modelos mediante red neuronal en espacio de estados*. Ph.D. thesis.
- ZHANG, T., & FENG, G. 2007. Output Tracking of Piecewise-Linear Systems via Error Feedback Regulator With Application to Synchronization of Nonlinear Chua's Circuit. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on [Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on]*, 54(8), 1852 - 1863.
- ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2006. Observer based Fuzzy Integral Model Predictive Control using Piecewise Lyapunov Functions. *Fuzzy Systems, 2006 IEEE International Conference on*, Jan, 299 - 306.

ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007a. Fuzzy Constrained Min-Max Model Predictive Control Based on Piecewise Lyapunov Functions. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, **15**(4), 686 - 698.

ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007b. Stable Model Predictive Control of Fuzzy Affine Systems with Input and State Constraints. *Fuzzy Systems Conference, 2007. FUZZ-IEEE 2007. IEEE International*, Jun, 1 - 6.

ZHANG, T., FENG, G., & LU, J. 2007c. Terminal Cost Constraint based Stable Fuzzy Model Predictive Control of A. Nonlinear Fluidized Bed Combustion Plant. *Intelligent Control, 2007. ISIC 2007. IEEE 22nd International Symposium on*, Sep, 401 - 406.

ZHANG, X., CHENG, Z., & LIU, Q. 2004. A fuzzy logic approach to optimal control of nonlinear time-delay systems. *Intelligent Control and Automation, 2004. WCICA 2004. Fifth World Congress on*, **1**, 902- 906 Vol.1.

ZHAO, J., WERTZ, V., & GOREZ, R. 1994 (Aug). A fuzzy clustering method for the identification of fuzzy models for dynamical systems.

ZHENG, A., & MORARI, M. 1995. Stability of model predictive control with mixed constraints. *Automatic Control*, Jan.