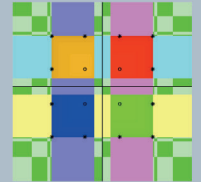
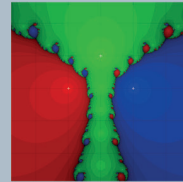
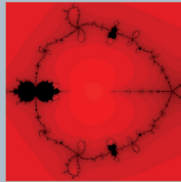
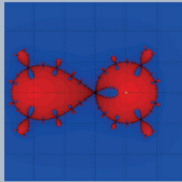
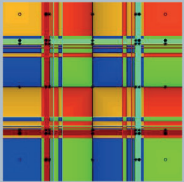




# TESIS DOCTORAL DE JAVIER GARCÍA MAIMÓ

---

## ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO DE FAMILIAS DE MÉTODOS ITERATIVOS PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES Y SU EXTENSIÓN A ESPACIOS DE BANACH



---

Dirigida por: Dra. Alicia Cordero Barbero  
Dra. Maria Penkova Vassileva  
Dr. Juan Ramón Torregrosa Sánchez

---

**ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO DE  
FAMILIAS DE MÉTODOS ITERATIVOS  
PARA LA RESOLUCIÓN DE  
ECUACIONES NO LINEALES Y SU  
EXTENSIÓN A ESPACIOS DE BANACH**

Tesis Doctoral  
Javier García Maimó

Dirigida por  
Dra. Alicia Cordero Barbero  
Dr. Juan Ramón Torregrosa Sánchez  
Dra. Maria Penkova Vassileva

Departamento de Matemática Aplicada  
**Universitat Politècnica de València**

Valencia, octubre de 2017



Alicia Cordero Barbero, profesora Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València, Juan Ramón Torregrosa Sánchez, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de Valencia y la Doctora María Penkova Vassileva, Profesora Investigadora en el Instituto Tecnológico de Santo Domingo (República Dominicana),

HACEN CONSTAR:

Que D. Javier García Maimó, Licenciado en Física por la Universitat de Barcelona, ha realizado, bajo nuestra dirección, el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universitat Politècnica de València.

Asimismo, autorizamos la presentación de este trabajo ante la Universitat Politècnica de València para que cumpla los trámites correspondientes.

Para que así conste a efectos legales, firmamos este documento en Valencia, a 26 de octubre de 2017.

Fdo. Alicia Cordero Barbero

Fdo. María Penkova Vassileva

Fdo. Juan R. Torregrosa Sánchez

---

# Resumen

---

Desde la aparición del método de Newton-Raphson hace más de 300 años los métodos iterativos se han hecho poco menos que imprescindibles en la mayoría de las ramas de la ciencia. El desarrollo de la computación ha permitido resolver problemas de complejidad cada vez mayor, y este hecho ha venido acompañado de la necesidad de disponer de métodos más eficientes y fiables. Varias herramientas de la dinámica discreta se pueden utilizar para realizar un análisis dinámico de métodos y familias de métodos iterativos para la resolución de ecuaciones y sistemas no lineales, con el objetivo de extraer información sobre su estabilidad y clasificarlos.

En esta Tesis Doctoral se diseña una familia biparamétrica de métodos iterativos que contiene los esquemas de Ostrowski y Chun como casos particulares. Se analiza la convergencia de la familia y se extiende para hacerla apta para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Se utilizan y desarrollan herramientas dinámicas para llevar a cabo un estudio escalar y multivariable, y se resuelven problemas aplicados para comprobar los resultados del estudio dinámico. Finalmente, se determina la convergencia semilocal en espacios de Banach del método de Chun.

En el Capítulo 2 se exponen los conceptos básicos a partir de los cuales se van a desarrollar el resto de capítulos. Se transfieren al caso multivariable el método de Newton y su versión libre de derivada, el método de Steffensen, y se van aplicando sobre ellos las herramientas de la dinámica compleja y de la real.

En el Capítulo 3 se realiza un estudio dinámico de la familia de métodos iterativos de King para la resolución de ecuaciones no lineales. Se aplica la familia sobre un polinomio cuadrático genérico, y se seleccionan los miembros que presentan un comportamiento más estable.

En el Capítulo 4 se diseña una familia biparamétrica de métodos iterativos combinando los métodos de Ostrowski y Chun y se hace una extensión de la familia al caso multivariable mediante el uso del operador diferencias divididas. Se realizan pruebas numéricas en problemas académicos y aplicados para confirmar los resultados teóricos.

En el Capítulo 5 se hace un estudio dinámico de la familia biparamétrica de Ostrowski-Chun y se aplican los miembros más estables a la solución de la ecuación de Bratu, mientras que en el Capítulo 6 se hace un estudio dinámico real de la familia en el caso multivariable, y en este caso los miembros más estables se aplican a la resolución de la ecuación de Fischer.

En el Capítulo 7 se prueba la convergencia semilocal del conocido método de Chun, miembro de la familia de Ostrowski-Chun, y se comprueban los resultados obtenidos en la resolución de una ecuación integral de tipo Hammerstein. Finalmente, se presentan las conclusiones y las líneas abiertas de investigación.

---

# Resum

---

Des de l'aparició del mètode de Newton-Raphson fa més de 300 anys els mètodes iteratius s'han fet poc menys que imprescindibles en la majoria de les branques de la ciència. El desenvolupament de la computació ha permès resoldre problemes de complexitat cada vegada més gran, i aquest fet ha vingut acompanyat de la necessitat de disposar de mètodes més eficients i fiables. Diverses eines de la dinàmica discreta es poden utilitzar per realitzar una anàlisi dinàmica de mètodes i famílies de mètodes iteratius per a la resolució d'equacions i sistemes no lineals, amb l'objectiu d'extreure informació sobre la seva estabilitat i classificar-los.

En aquesta tesi doctoral es dissenya una família biparamètrica de mètodes iteratius que conté els esquemes de Ostrowski i Chun com casos particulars. S'analitza la convergència de la família i s'estén per fer-la apta per a la resolució de sistemes d'equacions no lineals. S'utilitzen i desenvolupen eines dinàmiques per dur a terme un estudi escalar i multivariable, i es resolen problemes aplicats per comprovar els resultats de l'estudi dinàmic. Finalment, es determina la convergència semilocal en espais de Banach del mètode de Chun.

En el capítol 2 s'exposen els conceptes bàsics a partir dels quals es desenvoluparan la resta de capítols. Es transfereixen al cas multivariable el mètode de Newton i la seva versió lliure de derivada, el mètode de Steffensen, i es van aplicant sobre ells les eines de la dinàmica complexa i de la real.

En el capítol 3 es realitza un estudi dinàmic de la família de mètodes iteratius de King per a la resolució d'equacions no lineals. S'aplica la família sobre un polinomi quadràtic genèric, i se seleccionen els membres que presenten un comportament més estable.

En el capítol 4 es dissenya una família biparamètrica de mètodes iteratius combinant els mètodes d'Ostrowski i Chun i es fa una extensió de la família al cas multivariable mitjançant l'ús de l'operador diferències dividides. Es realitzen proves numèriques en problemes acadèmics i aplicats per confirmar els resultats teòrics.

En el capítol 5 es fa un estudi dinàmic de la família biparamètrica d'Ostrowski-Chun i s'apliquen els membres més estables a la solució de l'equació de Bratu, mentre que en el capítol 6 es fa un estudi dinàmic real de la família en el cas multivariable, i en aquest cas els membres més estables s'apliquen a la resolució de l'equació de Fischer.

En el capítol 7 es prova la convergència semilocal del conegut mètode de Chun, membre de la família de Ostrowski-Chun, i es comproven els resultats obtinguts en la resolució d'una equació integral de tipus Hammerstein. Finalment, es presenten les conclusions i les línies obertes d'investigació.



---

# Abstract

---

Since the appearance of Newton-Raphson's method more than 300 years ago, iterative methods have become almost unassailable in most branches of science. The development of computing has made it possible to solve problems of increasing complexity, and this has been accompanied by the need for more efficient and reliable methods. Several tools of discrete dynamics can be used to perform a dynamic analysis of methods and families of iterative methods for solving equations and nonlinear systems, with the aim of extracting information about their stability and classifying them.

In this memory a biparametric family of iterative methods is designed that contains the schemes of Ostrowski and Chun as particular cases. The convergence of the family is analyzed and extended to make it suitable for the resolution of systems of nonlinear equations. Dynamic tools are used and developed to carry out a scalar and multivariate study, and problems are solved applied to verify the results of the dynamic study. Finally, the semilocal convergence in Banach spaces of the Chun method is determined.

Chapter 2 sets out the basic concepts from which the rest of the chapters will be developed. The Newton method and its derivative free version, the Steffensen method, are transferred to the multivariable case, and the tools of complex and real dynamics are applied to them.

In the Chapter 3 a dynamic study of King's family of iterative methods is performed for the resolution of nonlinear equations. The family is applied on a generic quadratic polynomial, and members with a more stable behavior are selected.

In the Chapter 4 a biparametric family of iterative methods is designed combining the methods of Ostrowski and Chun and an extension of the family to the multivariable case is done by the use of the operator divided differences. Numerical tests are performed on academic problems and applied to confirm the theoretical results.

In the Chapter 5 a dynamic study of the Ostrowski-Chun biparametric family is made and the most stable members are applied to the solution of the Bratu equation, whereas in Chapter 6 a real dynamic study of the family is made in the multivariable case, and in this case the most stable members apply to the resolution of Fischer's equation.

In the Chapter 7 the semilocal convergence of the well-known method of Chun, member of the Ostrowski-Chun family, is proved, and the results obtained in the resolution of an integral Hammerstein-type equation are proved. Finally, conclusions and open lines of research are presented.

---

– *Si he logrado ver más lejos ha sido porque he subido a hombros de gigantes*

Isaac Newton

## Agradecimientos

---

Esta memoria supone la culminación de un trabajo que se inició en 2012 con una tesis de master. Hasta ese momento, lo único que podía relacionarme, remotamente, con los métodos iterativos era un relativo placer por la programación, relativo porque la mayoría de los trabajos que tuve desde que terminé la carrera de Física en la Universitat de Barcelona no estimulaban precisamente la investigación y la excelencia. Sin embargo, en el viaje que ha significado esta tesis he descubierto el placer, no solo por los métodos numéricos, sino también por la docencia y la investigación.

Hasta el momento de escribir esta tesis han pasado muchas cosas en mi vida personal y profesional, por fortuna casi todas agradables, por eso no puedo empezar esta memoria sino agradeciendo a algunas de las personas que las han hecho posibles.

Por sus atenciones, tengo que agradecer a mis directores, Alicia, Juan Ramón y Maria. Esta tesis no habría existido sin su curiosidad por la investigación y su dedicación. También tengo que agradecer al Instituto Tecnológico de Santo Domingo, que ha sido mi casa estos últimos años, por facilitar las condiciones para que pudiera llevar a buen término este trabajo. También quiero agradecer a mis compañeros del sincrotrón ALBA, fue el trabajo que siempre había soñado, y se comportaron como una familia conmigo. Las buenas experiencias que tuve allí me hicieron creer en mi mismo y seguir buscando nuevas metas. Y por supuesto a mi familia y amigos, especialmente a mis padres, José Luis y María José, que han tenido toda la paciencia del mundo y me han apoyado incondicionalmente, aunque a veces mis decisiones no parecieran las más razonables.

Para todos ellos, mi más profundo agradecimiento.

Santo Domingo, 2017



# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2 Conceptos previos</b>	<b>7</b>
2.1 Métodos iterativos de punto fijo escalares . . . . .	7
2.1.1 Orden de convergencia . . . . .	8
2.1.2 Índices de eficiencia . . . . .	8
2.1.3 El método de Newton-Raphson . . . . .	9
2.1.4 Métodos libres de derivada. El método de Steffensen . . . . .	11
2.1.5 Otros métodos iterativos . . . . .	11
2.2 Conceptos de dinámica compleja . . . . .	12
2.2.1 Puntos fijos . . . . .	13
2.2.2 Planos dinámicos . . . . .	16
2.2.3 Estabilidad de los puntos fijos. Planos de parámetros . . . . .	18
2.3 Métodos para sistemas de ecuaciones no lineales . . . . .	19
2.3.1 Conceptos de la dinámica real . . . . .	21
2.4 Espacios de Banach . . . . .	21
2.4.1 Integral de Riemann . . . . .	22
2.4.2 Teorema de Taylor . . . . .	22
2.4.3 Lema de Banach . . . . .	23
<b>3 Estudio de la dinámica compleja de la familia de King</b>	<b>25</b>
3.1 Objetivos del estudio y operador racional . . . . .	26

3.2	Teorema del Escalado y transformación de Möbius . . . . .	26
3.3	Puntos fijos y críticos . . . . .	27
3.4	Estabilidad de los puntos fijos . . . . .	29
3.4.1	Planos de parámetros . . . . .	31
3.4.2	Planos dinámicos . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Obtención de la familia de Ostrowski-Chun de métodos iterativos</b>	<b>37</b>
4.1	La familia de Ostrowski-Chun de métodos iterativos . . . . .	38
4.2	Extensión a sistemas de ecuaciones no lineales . . . . .	42
4.3	Pruebas numéricas . . . . .	46
4.3.1	Problemas académicos . . . . .	46
4.3.2	Problema de la interacción molecular . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Análisis dinámico de la familia biparamétrica de Ostrowski-Chun</b>	<b>55</b>
5.1	Teorema del escalado y análisis de los puntos fijos y críticos . . . . .	55
5.2	Planos de parámetros . . . . .	60
5.3	Planos dinámicos . . . . .	61
5.4	Solución numérica de la ecuación de Bratu . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Estudio dinámico real de la familia de Ostrowski-Chun</b>	<b>67</b>
6.1	Estudio dinámico de la familia de métodos de Ostrowski-Chun . . . . .	68
6.1.1	Análisis de la estabilidad de los puntos fijos . . . . .	74
6.1.2	Diagramas de bifurcación . . . . .	77
6.2	Planos dinámicos y de convergencia . . . . .	79
6.3	Pruebas numéricas . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Convergencia semilocal del método de Chun</b>	<b>89</b>
7.1	Relaciones de recurrencia . . . . .	89
7.1.1	Resultados preliminares . . . . .	90
7.2	Análisis de la convergencia . . . . .	93
7.3	Aplicaciones . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>99</b>

---

<b>9 Anexos: Rutinas dinámicas en MATLAB</b>	<b>101</b>
9.1 Plano dinámico para el método de Newton . . . . .	101
9.2 Plano dinámico con la transformación de Moebius . . . . .	103
9.3 Plano de parámetros para la familia de King . . . . .	105
9.4 Plano dinámico para la familia de King . . . . .	107
9.5 Implementación del operador diferencia dividida de segundo orden . . . . .	109
9.6 Plano dinámico para la familia OC . . . . .	110
9.7 Plano de parámetros para la familia OC . . . . .	113
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>



---



– ¡Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad!

Albert Einstein

---

## Capítulo 1

# Introducción

---

La no linealidad es parte fundamental de la naturaleza. Aunque la ciencia ha tratado sistemáticamente de simplificar los problemas linealizándolos, son muchos los fenómenos que no se pueden explicar con un modelo lineal. La no linealidad conlleva que la mayoría de los métodos analíticos no sean aplicables, lo que motivó el nacimiento de los métodos iterativos. Se podría pensar que los métodos iterativos aparecieron a partir del auge de la computación a mediados del siglo XX, pero aunque su desarrollo se vio impulsado por el aumento de la capacidad computacional, sus orígenes se remontan a hace más de trescientos años [1].

Diversos problemas no lineales han sido resueltos satisfactoriamente con métodos iterativos. Desde que en 1801 Johann Carl Friedrich Gauss utilizara un método iterativo de punto fijo para la determinación preliminar de la órbita del planeta Ceres, su uso y aplicaciones se han extendido hasta abarcar campos tan diversos como la meteorología ([2],[3]), las reacciones nucleares ([4],[5]) o la robótica ([6],[7]).

Desde el método de Newton-Raphson, la carrera por encontrar métodos iterativos con mayor orden de convergencia no ha terminado. Traub en [12] estableció los fundamentos del diseño de métodos iterativos multipaso, y posteriormente el interés se ha centrado en desarrollar métodos *óptimos*, es decir, que consigan el mayor orden de convergencia posible con el menor número de evaluaciones funcionales.

Pero el hecho de que un método sea óptimo no garantiza su estabilidad, no en vano existen numerosas familias de métodos óptimos, por lo que se hace necesario un criterio más allá del orden de convergencia y la optimalidad para clasificar los distintos esquemas iterativos. El papel de la dinámica de los métodos iterativos es establecer criterios, tanto cualitativos como cuantitativos, que permitan seleccionar los métodos más eficaces desde el punto de vista del conjunto de puntos de partida. La dinámica, que empezó como un estudio de métodos para ecuaciones ya conocidos con problemas académicos, se ha desarrollado de forma notable en los últimos años, añadiendo cada vez más herramientas y extendiéndose al estudio de familias de métodos, tanto para ecuaciones como para sistemas de ecuaciones.

Esta tesis se propone utilizar y desarrollar herramientas dinámicas que permitan el estudio de familias de métodos para ecuaciones no lineales y su transferencia a sistemas de ecuaciones no lineales. Se propone una familia biparamétrica de métodos iterativos que puede ser transferida a sistemas de ecuaciones, y que contiene los métodos de Ostrowski y Chun como casos particulares. Finalmente se determina la convergencia semilocal en espacios de Banach de un método que

forma parte de una de las familias estudiadas, el método de Chun.

En el Capítulo 2 se exponen los conceptos básicos a partir de los cuales se van a desarrollar el resto de capítulos. Se transfieren al caso multivariable el método de Newton y su versión libre de derivada, el método de Steffensen, y se van aplicando sobre ellos las herramientas de la dinámica compleja y de la real.

En el Capítulo 3 se realiza un estudio dinámico de la familia de métodos iterativos de King para la resolución de ecuaciones no lineales. Se aplica la familia sobre un polinomio cuadrático genérico, y se seleccionan los miembros que presentan un comportamiento más estable.

En el Capítulo 4 se diseña una familia biparamétrica de métodos iterativos combinando los métodos de Ostrowski y Chun y se hace una extensión de la familia al caso multivariable mediante el uso del operador diferencias divididas. Se realizan pruebas numéricas en problemas académicos y aplicados para confirmar los resultados teóricos.

En el Capítulo 5 se hace un estudio dinámico de la familia biparamétrica de Ostrowski-Chun y se aplican los miembros más estables a la solución de la ecuación de Bratu, mientras que en el Capítulo 6 se hace un estudio dinámico real de la familia en el caso multivariable, y en este caso los miembros más estables se aplican a la resolución de la ecuación de Fischer.

En el Capítulo 7 se prueba la convergencia semilocal del conocido método de Chun, miembro de la familia de Ostrowski-Chun, y se comprueban los resultados obtenidos en la resolución de una ecuación integral de tipo Hammerstein. Finalmente, se presentan las conclusiones y las líneas abiertas de investigación.

---



– Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, solo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella

Carl Friedrich Gauss

---

## Capítulo 2

# Conceptos previos

---

En este capítulo se van a introducir los conceptos básicos que van a ser el punto de partida de los desarrollos que aparecen en los capítulos siguientes. Partiendo desde los métodos para la resolución de ecuaciones no lineales, los criterios que permiten clasificarlos y la extensión de estos esquemas al caso multivariable. También se van a introducir los conceptos de la dinámica compleja y de la dinámica real que se utilizarán en los Capítulos 3, 4, 5 y 6, y finalmente las herramientas del análisis funcional que permitan extender los métodos a espacios de Banach y probar su convergencia semilocal, como se verá en el caso particular del método de Chun en el Capítulo 7.

## 2.1 Métodos iterativos de punto fijo escalares

Como se ha mencionado en la introducción, la resolución de ecuaciones no lineales juega un importante papel en numerosas ramas de la ciencia y la tecnología, y es además una de las áreas del Análisis Numérico de mayor auge en los últimos años.

El problema a estudiar consiste en encontrar la solución de ecuaciones de la forma  $f(x) = 0$  donde, en general,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{R}$  es el cuerpo de los números reales. La mayoría de esquemas iterativos son *métodos de punto fijo*, es decir, consisten en sustituir una aproximación inicial en el operador correspondiente al método iterativo, para encontrar una nueva estimación de la raíz, y de manera sucesiva sustituir los resultados en el operador, para así obtener una sucesión de iterados que, bajo ciertas condiciones, convergerá al valor de la raíz

$$x_{n+1} = G(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

El operador  $G$  se llama función de punto fijo, y obviamente el valor teórico de la raíz,  $\xi$ , cumplirá que  $\xi = G(\xi)$ , es decir, será un punto fijo de la función  $G$ . Los puntos fijos son los valores de  $x$  que satisfacen la ecuación  $G(x) = x$ . Existen muchas formas de definir la función de punto fijo  $G$ , cada forma de hacerlo dará lugar a un método iterativo diferente. En caso de que la función de punto fijo solamente dependa del iterado inmediatamente anterior se habla de métodos *sin memoria*,  $x_{n+1} = G(x_n)$ , mientras que en caso de que la aproximación actual dependa de varias aproximaciones anteriores se habla de métodos *con memoria*,  $x_{n+1} = G(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)$ . En esta tesis se aborda el estudio de métodos sin memoria.

La convergencia de un método iterativo se puede estudiar de forma local, semilocal o global. Cada una de estas formas depende de si las condiciones se imponen sobre la solución, la aproximación inicial o la función no lineal, respectivamente.

En la convergencia semilocal se puede asegurar que la sucesión formada por los iterados generados por el método iterativo converge hacia la raíz exigiendo ciertas condiciones al operador  $F$  y a las aproximaciones iniciales, mientras que en el caso de la convergencia global se tiene la dificultad de que requiere exigir condiciones no solo sobre el operador  $F$ , sino sobre la raíz de la función, que es desconocida. En el caso de la convergencia local la ausencia de restricciones sobre las estimaciones iniciales hace que este tipo de estudio sea muy particular en cuanto al tipo de operadores a tratar. Más adelante en este capítulo se va a probar la convergencia local de los métodos de Newton y Steffensen.

### 2.1.1 Orden de convergencia

Un concepto muy importante a la hora de estudiar los distintos métodos iterativos es su *orden de convergencia*, que proporciona una medida de la velocidad a la que la sucesión converge hacia la raíz. Si

$$\exists M > 0, k_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tales que } |x_{k+1} - \xi| < M|x_k - \xi|^p, \quad \forall k \geq k_0,$$

entonces  $p$  se llama *orden de convergencia* del método iterativo. De este modo los métodos con mayor orden de convergencia convergen más rápido al valor de la raíz. Si  $p = 1$  y  $0 < M < 1$  se dice que la sucesión converge *linealmente* a la raíz, si  $p = 2$  se dice que la convergencia es cuadrática, y así sucesivamente.

Para diseñar métodos que tengan un orden de convergencia mayor, es necesario utilizar una función de punto fijo más complicada, es decir, con más pasos y más evaluaciones funcionales.

### 2.1.2 Índices de eficiencia

En general, la *eficiencia* de un método no depende solamente del orden de convergencia,  $p$ , sino también del número de evaluaciones funcionales por iteración requeridas,  $d$ . Ostrowski propuso en [8] el siguiente índice de eficiencia para métodos iterativos

$$I = p^{1/d}.$$

Por otra parte, el índice:

$$C = p^{1/(op)},$$

recibe el nombre de *Índice de eficiencia operacional* y fue propuesto por Traub en [9],  $op$  es el número de operaciones (productos/cocientes) en cada iteración.

Kung y Traub en [10] establecen la conocida como **Conjetura de Kung-Traub**: *El orden de convergencia de cualquier método multipaso sin memoria no puede superar  $2^{d-1}$  (llamado orden óptimo), donde  $d$  es el número de evaluaciones funcionales por iteración, con índice de eficiencia  $2^{(d-1)/d}$  (llamado índice óptimo)*



Esta conjetura va a llevar a tratar de diseñar métodos iterativos que sean óptimos siempre que sea posible. Es importante mencionar que para la resolución de sistemas de ecuaciones la conjetura de Kung y Traub no es aplicable y por eso no se va a considerar el que un método sea óptimo, sino el que tenga la menor cantidad de evaluaciones funcionales por iteración<sup>1</sup>.

El orden de convergencia es utilizado para comparar la velocidad a la que convergen a la raíz los diferentes métodos iterativos. Se puede definir un orden de convergencia computacional, que aproxime el orden de convergencia del método considerando la velocidad a la que se acercan a la raíz las aproximaciones sucesivas

$$p \approx \bar{\rho} = \frac{\ln(|x_{k+1} - \xi|)/(|x_k - \xi|)}{\ln(|x_k - \xi|)/(|x_{k-1} - \xi|)},$$

$\bar{\rho}$  fue introducido en [13] y se llama *orden de convergencia computacional* (*Computational order of convergence, COC*)

De la definición de  $\bar{\rho}$  se puede ver que para su cálculo es necesario el conocimiento de la raíz,  $\xi$ . Como es precisamente esa raíz la que se trata de encontrar, esta definición no tiene aplicación práctica más que en casos académicos donde la raíz sea conocida. Cordero y Torregrosa propusieron en [14] una definición que tiene en cuenta los valores de las tres últimas aproximaciones de la raíz para estimar el orden de convergencia, y que en los casos prácticos sirve como aproximación del orden de convergencia de un método

$$p \approx \hat{\rho} = \frac{\ln(|x_{k+1} - x_k|/|x_k - x_{k-1}|)}{\ln(|x_k - x_{k-1}|/|x_{k-1} - x_{k-2}|)},$$

$\hat{\rho}$  se llama *Orden de convergencia computacional aproximado* (*Aproximated computational order of convergence, ACOC*).

### 2.1.3 El método de Newton-Raphson

El método numérico más popular para la resolución de ecuaciones no lineales es el conocido como *método de Newton-Raphson*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

La interpretación geométrica de este método es la siguiente: en cada etapa  $k$ , el valor  $x_{k+1}$  corresponde a la abscisa del punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x_k, f(x_k))$ , como se puede ver en la Figura 2.1. Esta interpretación geométrica justifica que este método reciba también el nombre de *método de la tangente*.

El análisis de la convergencia local del método de Newton se puede llevar a cabo utilizando el desarrollo en serie de Taylor de las funciones que aparecen en la fórmula iterativa (2.2),  $f(x)$  y  $f'(x)$ .

---

<sup>1</sup>De igual forma, la conjetura de Kung y Traub no es aplicable a métodos con memoria

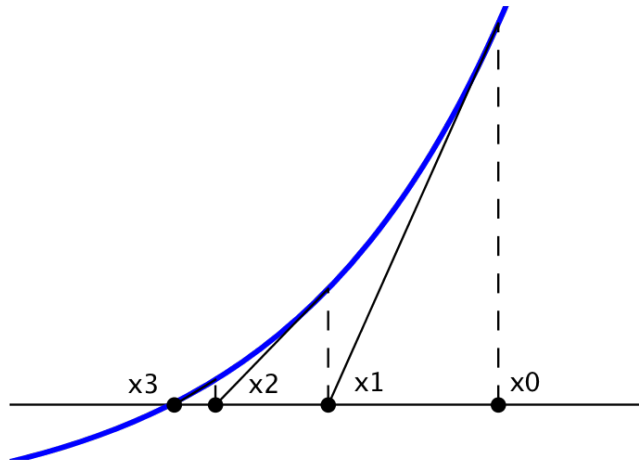


Figura 2.1: Interpretación geométrica del Método de Newton

El desarrollo en serie de Taylor de la función  $f(x)$  alrededor de la raíz,  $\xi$ , evaluado en la aproximación enésima,  $x_n$ , es

$$f(x_n) = f(\xi) + f'(\xi)(x_n - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_n - \xi)^2 + O[(x_n - \xi)^3],$$

al ser  $\xi$  raíz, entonces  $f(\xi) = 0$  y llamando  $e_n = x_n - \xi$  a la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado de la raíz en la iteración  $n$ , es decir, el error en dicha iteración, se obtiene

$$f(x_n) = f'(\xi)e_n + \frac{f''(\xi)}{2}e_n^2 + O[e_n^3].$$

Sacando factor común  $f'(\xi)$

$$f(x_n) = f'(\xi) \left[ e_n + \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} e_n^2 \right] + O[e_n^3].$$

Si ahora se define  $c_2 = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$  y se hace un desarrollo análogo para  $f'(x_n)$

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f'(\xi)(e_n + c_2 e_n^2) + O[e_n^3], \\ f'(x_n) &= f'(\xi)(1 + 2c_2 e_n) + O[e_n^2], \end{aligned}$$

Introduciendo estos desarrollos en la ecuación (2.2) se obtiene la ecuación del error

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O[e_n^3].$$

El primer término que aparece en la ecuación del error es el cuadrático, así que el orden de convergencia del método de Newton es 2. Se trata por tanto de un método óptimo, ya que consigue un orden de convergencia 2 con solamente dos evaluaciones funcionales.

### 2.1.4 Métodos libres de derivada. El método de Steffensen

Los métodos con derivadas no son convenientes en todos los casos, por ejemplo no son aplicables en caso de no existir una función analítica que se pueda derivar, o cuando el cálculo de la derivada sea tedioso. Para resolver ese tipo de problemas es útil disponer de métodos iterativos que utilicen una aproximación de la derivada.

El método de Steffensen [30] es un método óptimo y libre de derivada. Se puede obtener a partir del de Newton, sustituyendo la derivada del denominador por  $\frac{f(x+f(x)) - f(x)}{f(x)}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(w_n) - f(x_n)}, \quad (2.3)$$

donde  $w_n = x_n + f(x_n)$ .

El análisis de su convergencia local se puede realizar siguiendo el mismo procedimiento que en el caso del método de Newton.

El desarrollo en serie de Taylor de las funciones que aparecen en la expresión iterativa (2.3) alrededor de  $\xi$  son

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f'(\xi)(e_n + c_2 e_n^2) + O[e_n^3], \\ f(w_n) &= f'(\xi)(2e_n + 5c_2 e_n^2) + O[e_n^3], \\ f(x_n)^2 &= f'(\xi)(e_n^2) + O[e_n^3], \end{aligned}$$

donde al igual que en el caso de Newton se ha tomado  $e_n = x_n - \xi$  como el error en la iteración  $n$ .

Introduciendo estos desarrollos en la ecuación (2.3) se obtiene la ecuación del error

$$e_{n+1} = 2c_2 e_n^2 + O[e_n^3],$$

y por tanto el método de Steffensen tiene orden de convergencia 2 y es óptimo.

### 2.1.5 Otros métodos iterativos

Diversos autores han propuesto diferentes esquemas iterativos con el propósito de lograr un mayor orden de convergencia, lo que siempre requiere aumentar las evaluaciones funcionales y/o el número de pasos.

El método de Traub [12], un método de orden 3 también conocido como método de Potra-Pták, se obtiene componiendo el esquema de Newton consigo mismo y sustituyendo en el segundo paso la derivada del paso de Newton por la derivada empleada en el primer paso

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k) + f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

El método de Traub fue desarrollado antes de que se hubiera definido el concepto de optimalidad, y no es óptimo. Por otro lado, el primer método de orden de convergencia local cuatro fue diseñado por Ostrowski [8] usando técnicas de interpolación

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

Otros métodos óptimos de orden cuatro que se usarán en esta memoria son el método de Chun [50]

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k) + 2f(y_k)}{f(x_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

y el de Jarratt [38]

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{2f(x_k)}{3f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2} \frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{3f'(y_k) - f'(x_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

Otros métodos libres de derivada de orden 4 son el método LZM [39]

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(z_k) - f(x_k)}, \quad z_k = x_k + f(x_k), \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, z_k] + f[x_k, z_k]}{f[x_k, y_k]^2} f(y_k), \end{aligned}$$

y la familia paramétrica CT4 [40]

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{\gamma f(x_k)^2}{f(z_k) - f(x_k)}, \quad z_k = x_k + \gamma f(x_k), \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{\frac{af(y_k) - bf(z_k)}{y_k - z_k} + \frac{cf(y_k) - df(x_k)}{y_k - x_k}}. \end{aligned}$$

## 2.2 Conceptos de dinámica compleja

El orden de convergencia no es el único criterio a tener en cuenta a la hora de evaluar un método iterativo. La idoneidad de un método depende también de cómo se comporta en función

de las estimaciones iniciales que se tomen, por esa razón es necesario introducir herramientas que permitan hacer un estudio más profundo.

El análisis de la dinámica de un método se está convirtiendo en una tendencia en las publicaciones recientes sobre métodos iterativos, ya que permite clasificar las diferentes fórmulas iterativas, no solamente desde el punto de vista de su orden de convergencia, sino también analizando como se comportan dichas fórmulas en función de la estimación inicial que se tome. Además, proporciona información valiosa acerca de la estabilidad y fiabilidad del método iterativo.

### 2.2.1 Puntos fijos

Un *punto fijo* es aquel que se mantiene invariante por el operador  $G$ . Todas las raíces de una ecuación serán, naturalmente, puntos fijos del operador  $G$ . Sin embargo, pueden aparecer puntos fijos que no correspondan a ninguna raíz, estos puntos se llaman *puntos fijos extraños*. Estos puntos no son deseables desde el punto de vista numérico, porque cuando se tome una estimación inicial que esté cerca de un punto fijo extraño, existe la posibilidad de que el método numérico converja a él, es decir, a un punto que no es una solución. Los puntos fijos extraños aparecen a menudo cuando se analizan los métodos iterativos, y su presencia puede ser una muestra de inestabilidad de dicho método.

Dada una función racional  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definida sobre la esfera de Riemann, la *órbita de un punto*  $z_0$  es la sucesión de puntos  $\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}$  del plano complejo generada por el método iterativo.

En general, se dice que un punto  $z^*$  es *k-periódico* si  $G^k(z^*) = z^*$  y  $G^p(z^*) \neq z^*$  para  $p = 1, 2, \dots, k$ .

Los puntos fijos se pueden clasificar según el comportamiento del operador derivada sobre ellos, así, un punto fijo  $z^*$  puede ser:

- Atractor, si  $|G'(z^*)| < 1$ ;
- Superatractor, si  $|G'(z^*)| = 0$ ;
- Repulsor, si  $|G'(z^*)| > 1$ ; y
- Parabólico o indiferente, si  $|G'(z^*)| = 1$ .

En caso de puntos k-periódicos su estabilidad (su carácter atractor, repulsor...) se puede calcular evaluando  $|G'(x^*)|$  en todos los puntos de la órbita, de manera que la órbita periódica de periodo  $k$  será atractora si  $|G'(z_0^*)G'(z_1^*) \cdots G'(z_k^*)| < 1$ .

El buen funcionamiento de un determinado método iterativo estará comprometido en caso de existir puntos fijos extraños que sean atractores u otro tipo de atractores distintos de las raíces.

La *cuenca de atracción* de un atractor  $z$  es el conjunto de preimágenes de cualquier orden:  $A(z) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z, n \rightarrow \infty\}$ . Las cuencas de atracción son el conjunto de todas las órbitas posibles de un atractor, por tanto indican las regiones de convergencia de un método iterativo. El conjunto de todas las cuencas de atracción se llama *conjunto de Fatou*,  $\mathcal{F}$ , y su complementario en la esfera de Riemann, es decir, la frontera entre las componentes conexas de

las cuencas de atracción, se llama *conjunto de Julia*,  $\mathcal{J}$ . La cuenca de atracción inmediata de un punto fijo  $z^*$  es la componente conexa de  $A(z^*)$  que contiene a  $z^*$ .

Por otro lado, un *punto crítico* de un operador  $G$  es un punto  $z^*$  para el que la derivada de la función de punto fijo se anula, es decir,  $G'(z^*) = 0$ . Los puntos críticos son importantes por el siguiente Teorema de Fatou y Julia (véase [23] y [24]).

**Teorema 2.2.1** (*Fatou-Julia*) *Sea  $R$  una función racional. La cuenca de atracción inmediata de un punto  $k$ -periódico contiene, al menos, un punto crítico.*

Cuando se aplican métodos iterativos sobre polinomios, los puntos fijos correspondientes a las raíces del polinomio son también puntos críticos siempre que el método sea de orden al menos 2. Sin embargo, pueden aparecer puntos críticos que no sean puntos fijos, esos puntos se llaman *puntos críticos libres*.

Para analizar la dinámica de un método es necesario aplicarlo sobre un problema concreto. Una manera natural de abordar el estudio dinámico de un método iterativo es aplicándolo sobre polinomios de bajo grado, funciones no lineales sencillas, para las que es posible obtener expresiones analíticas, y además la solución exacta del problema es conocida. La dinámica discreta se centra en el estudio de operadores racionales, y la mayoría de los métodos de punto fijo que existen en la literatura dan lugar a una función racional cuando se aplican sobre polinomios. Del comportamiento de los métodos aplicados sobre polinomios se pueden sacar conclusiones sobre su desempeño en general.

Las clases de conjugación y el Teorema del Escalado, en los casos en que se cumpla, permiten generalizar el estudio dinámico de manera que abarque a todos los miembros de una clase, en este caso va a permitir extrapolar el comportamiento de un método para cualquier polinomio cuadrático.

**Teorema 2.2.2** (*Teorema del Escalado para el método de Newton*) [18] [22] *Sea  $f(z)$  una función analítica en la esfera de Riemann y  $T(z) = \alpha z + \gamma$  una aplicación afín con  $\alpha \neq 0$ . Si  $g(z) = \lambda(f \circ T)(z)$ , entonces  $(T \circ G_g \circ T^{-1})(z) = G_f(z)$ , es decir,  $G_f$  es analíticamente conjugada a  $G_g$  mediante  $T$ . Donde  $G_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$  y  $G_g(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$  son los operadores correspondientes al método de Newton sobre  $f$  y  $g$  respectivamente.*

### Demostración

Teniendo en cuenta que  $T(x - y) = T(x) - T(y) + \gamma$  y  $g'(z) = \alpha \lambda f'(T(z))$  entonces

$$\begin{aligned} (T \circ G_g \circ T^{-1})(z) &= T(G_g(T^{-1}(z))) = T\left(T^{-1}(z) - \frac{g(T^{-1}(z))}{g'(T^{-1}(z))}\right) \\ &= T\left(T^{-1}(z) - \frac{\lambda f(T(T^{-1}(z)))}{\alpha \lambda f'(T(T^{-1}(z)))}\right) \\ &= T\left(T^{-1}(z) - \frac{f(z)}{\alpha f'(z)}\right) \\ &= z - \frac{f(z)}{f'(z)}, \end{aligned}$$

entonces  $T \circ G_g \circ T^{-1}(z) = G_f(z)$ , es decir,  $G_f$  y  $G_g$  son analíticamente conjugadas mediante  $T(z)$ .  $\square$

En el siguiente resultado se prueba que, en general, el método de Steffensen no cumple el Teorema del Escalado.

**Teorema 2.2.3 (Teorema del Escalado para el método de Steffensen)** [17] *Sea  $f(z)$  una función analítica en la esfera de Riemann y  $T(z) = \alpha z + \gamma$  una aplicación afín con  $\alpha \neq 0$ . Si  $g(z) = \lambda(f \circ T)(z)$ , entonces  $(T \circ G_g \circ T^{-1})(z) = G_f(z)$ , es decir,  $G_f$  es analíticamente conjugada a  $G_g$  mediante  $T$  solamente cuando  $\alpha\lambda = 1$ . Donde  $G_f(z) = z - \frac{(f(z))^2}{f(z+f(z))-f(z)}$  y  $G_g(z) = z - \frac{(g(z))^2}{g(z+g(z))-g(z)}$  son los operadores correspondientes al método de Steffensen sobre  $f$  y  $g$  respectivamente.*

### Demostración

Teniendo en cuenta que  $T(x - y) = T(x) - T(y) + \gamma$  y  $g'(z) = \alpha\lambda f'(T(z))$ , entonces

$$\begin{aligned}
T \circ G_g \circ T^{-1}(z) &= T(G_g(T^{-1}(z))) \\
&= T\left(T^{-1}(z) - \frac{g((T^{-1}(z)))^2}{g(T^{-1}(z) + g(T^{-1}(z))) - g(T^{-1}(z)))}\right) \\
&= \alpha(T^{-1}(z)) - \alpha\left(\frac{\lambda^2(f(z))^2}{g(T^{-1}(z) + \lambda f(z)) - \lambda f(z)}\right) + \gamma \\
&= z - \frac{\alpha\lambda^2(f(z))^2}{g(T^{-1}(z) + \lambda f(z)) - \lambda f(z)} \\
&= z - \frac{\alpha\lambda(f(z))^2}{f(T(T^{-1}(z) + \lambda f(z))) - f(z)} \\
&= z - \frac{\alpha\lambda(f(z))^2}{f(\alpha T^{-1}(z) + \alpha\lambda f(z) + \gamma) - f(z)} \\
&= z - \frac{\alpha\lambda(f(z))^2}{f(z + \alpha\lambda f(z)) - f(z)}
\end{aligned}$$

como  $G_f(z) = z - \frac{(f(z))^2}{f(z+f(z))-f(z)}$  entonces  $T \circ G_g \circ T^{-1}(z) = G_f(z)$ , solamente si  $\alpha\lambda = 1$ , por lo que en general no se cumple el Teorema del Escalado para el método de Steffensen.  $\square$

Por otro lado, cualquier polinomio de segundo grado con raíces simples es conjugado a  $z^2 - c$ , como se prueba en el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.4** *Sea  $p(z) = a_1z^2 + a_2z + a_3$ , con  $a_1 \neq 0$  un polinomio cuadrático genérico con raíces simples, entonces mediante una transformación afín, las raíces de  $p(z)$  se transforman en las raíces de  $q(z) = z^2 - c$ , donde  $c = a_2^2 - 4a_1a_3$ . Esta transformación afín provee una conjugación entre  $\tilde{G}_p$  y  $\tilde{G}_q$ .*

**Demostración:** si  $a_1 \neq 0$  se puede escribir  $p(z)$  como

$$\begin{aligned} p(z) &= a_1 \left( z^2 + \frac{a_2}{a_1} z + \frac{a_3}{a_1} \right) \\ &= a_1 \left( \left( z + \frac{a_2}{2a_1} \right)^2 - \frac{a_2^2}{4a_1^2} + \frac{a_3}{a_1} \right) \\ &= a_1 \left( \left( z + \frac{a_2}{2a_1} \right)^2 - \frac{c^2}{4a_1^2} \right) \\ &= a_1 \left( z + \frac{a_2}{2a_1} - \frac{c}{2a_1} \right) \left( z + \frac{a_2}{2a_1} + \frac{c}{2a_1} \right). \end{aligned}$$

□

Por tanto, se puede utilizar una transformación para generalizar el polinomio de grado 2 en el caso del método de Newton, pero no en el de Steffensen, que requerirá que los problemas se estudien caso a caso. Para el estudio dinámico se usará un polinomio cuadrático genérico  $p_2(z) = z^2 + c$  y la transformación de Möbius:  $h(z) = \frac{z - i\sqrt{c}}{z + i\sqrt{c}}$ , cuyas propiedades son

$$\text{i) } h(\infty) = 1, \quad \text{ii) } h(i\sqrt{c}) = 0, \quad \text{iii) } h(-i\sqrt{c}) = \infty.$$

Blanchard en [16] utilizó esta transformación con el operador racional del método de Newton aplicado a un polinomio. Aplicando el operador del método de Newton,  $N_f = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ , a  $p_2(z)$

$$N_p(z, c) = \frac{z^2 - c}{2z},$$

después de la transformación se obtiene

$$h \circ N_p \circ h^{-1}(z) = z^2,$$

que ya no depende de  $c$ . En efecto, la transformación ha enviado la raíz  $z_1 = i\sqrt{c}$  a  $z = 0$ , y la raíz  $z_2 = -i\sqrt{c}$  a  $z = \infty$ .

## 2.2.2 Planos dinámicos

Una manera de visualizar el concepto de cuencas de atracción es utilizando una herramienta llamada *plano dinámico*. Un plano dinámico se construye definiendo una malla de puntos, cada uno de los cuales se toma como estimación inicial del método iterativo. El eje de abscisas corresponde a la parte real del punto inicial y el de ordenadas a la imaginaria. Si partiendo de la estimación inicial el método iterativo converge a algún cero de la función, se le asignará un determinado color, mientras que si converge a algún punto que no es una raíz de la función, o si simplemente no converge después de un número máximo de iteraciones establecido, se le asignará el color negro.

En la Figura 2.2 se pueden ver las cuencas de atracción de los métodos de Newton y Steffensen aplicados a la función  $f_1(z) = z^2 - 1$ , que tiene dos ceros,  $z_1 = 1$  y  $z_2 = -1$ . En color naranja



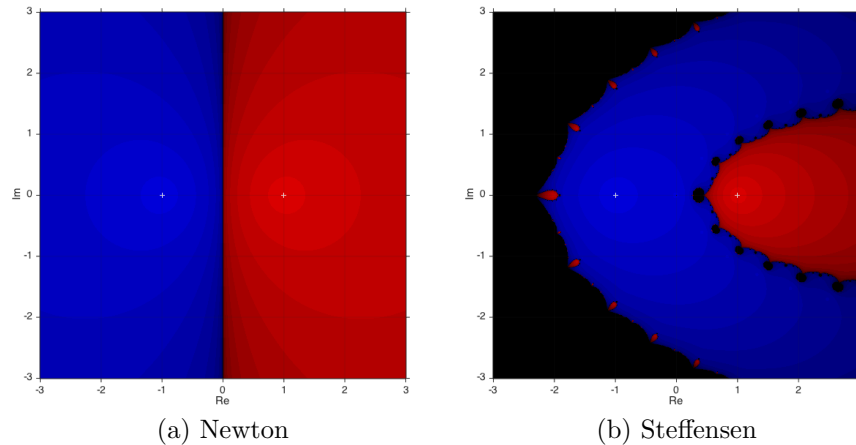


Figura 2.2: Planos dinámicos para  $f_1(z) = z^2 - 1$

se observa la cuenca de atracción de  $z_1$ , y en azul la de  $z_2$ . Estos planos dinámicos se han construido utilizando un programa MATLAB que se puede ver en el Anexo 9.1, se han usado  $500 \times 500$  puntos, un número máximo de iteraciones de 20 y una tolerancia de  $10^{-3}$ .

Aunque los métodos de Newton y Steffensen tienen el mismo orden de convergencia, su comportamiento dinámico no es el mismo, el método de Newton es claramente más estable en este caso, ya que solamente presenta regiones de convergencia a las soluciones.

En la Figura 2.3 se pueden ver los planos dinámicos del método de Newton aplicado al polinomio  $f_2(z) = z^2 - i$  antes y después de la transformación de Möbius. Los planos se han obtenido usando una malla de  $500 \times 500$  puntos, un número máximo de iteraciones de 20 y una tolerancia de  $10^{-3}$ . El programa utilizado para obtener la Figura 3.4b puede verse en el Anexo 9.2.

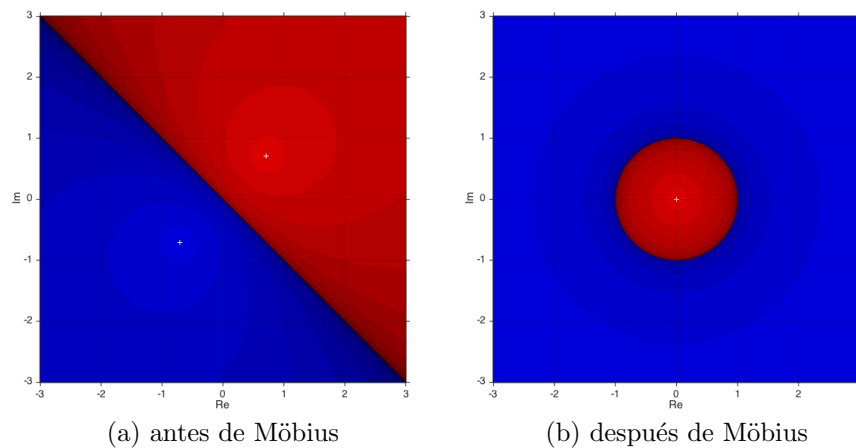


Figura 2.3: Planos dinámicos para  $f_2(z) = z^2 - i$

El efecto de la transformación es "cerrar" sobre sí mismas las cuencas de atracción. El conjunto de Julia asociado es una recta antes de la transformación y se transforma en una circunferencia de radio 1. El disco interior es la cuenca de  $z = 0$ , mientras que la exterior, su complementario en la esfera de Riemann, corresponde a la cuenca de  $z = \infty$ . Además, se puede observar de

manera cualitativa que el método de Newton cumple el Teorema del Escalado, ya que el conjunto de Julia para los dos polinomios cuadráticos que se han estudiado,  $f_1(z)$  y  $f_2(z)$ , tiene la misma forma, una recta que separa las dos cuencas de atracción de las raíces.

### 2.2.3 Estabilidad de los puntos fijos. Planos de parámetros

El *plano de parámetros* es una representación que permite estudiar el comportamiento de los miembros de una familia de métodos iterativos en términos de la dependencia de las estimaciones iniciales y del carácter de los puntos fijos, discriminando aquellos que son especialmente estables. Consiste en iterar la función racional que describe el método en cuestión, tomando como estimación inicial un punto crítico libre, sobre un plano complejo donde se definen los valores posibles de un parámetro, el eje de abscisas corresponde a su parte real y el de ordenadas a su parte imaginaria. Las regiones en negro en el plano corresponden a valores del parámetro para los que el método no converge a una raíz después de un número máximo de iteraciones especificado, mientras que la gradación de colores indica la diferencia entre el número de iteraciones necesarias para llegar a alguna de las raíces.

El método de Newton aplicado a polinomios cuadráticos no presenta puntos críticos libres, por lo que se va a utilizar un polinomio cúbico para dibujar el plano de parámetros correspondiente. En este caso el parámetro que se va a considerar va a estar en el polinomio a estudiar y no en método iterativo.

Se va a estudiar el polinomio  $p_3(z) = (z^2 - 1)(z - c)$ . El operador racional para el método de Newton sobre  $p_3(z)$  es

$$O_p(z, c) = \frac{cz^2 + c - 2z^3}{2cz - 3z^2 + 1}$$

y

$$O'_p(z, c) = \frac{2(z^2 - 1)(c^2 - 4cz + 3z^2)}{(2cz - 3z^2 + 1)^2} \quad (2.4)$$

Los puntos críticos son las soluciones de  $O'_p(z) = 0$ , que son las raíces del polinomio, pero aparece además un punto crítico libre  $z^* = \frac{c}{3}$ . En la Figura 2.4 se puede ver el plano de parámetros generado tomando el crítico  $z^*$  como estimación inicial, y un detalle la zona inestable.

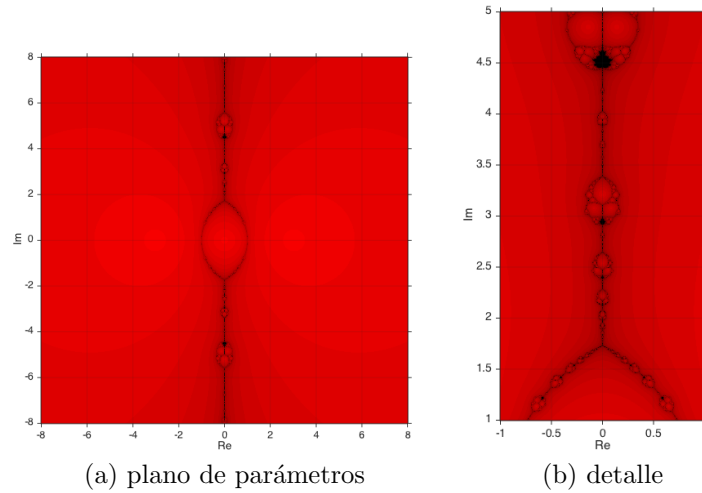


Figura 2.4: Plano de parámetros para el método de Newton sobre  $p_3(z)$

Para confirmar la información del plano de parámetros se van a mostrar planos dinámicos para dos valores diferentes de  $c$ .

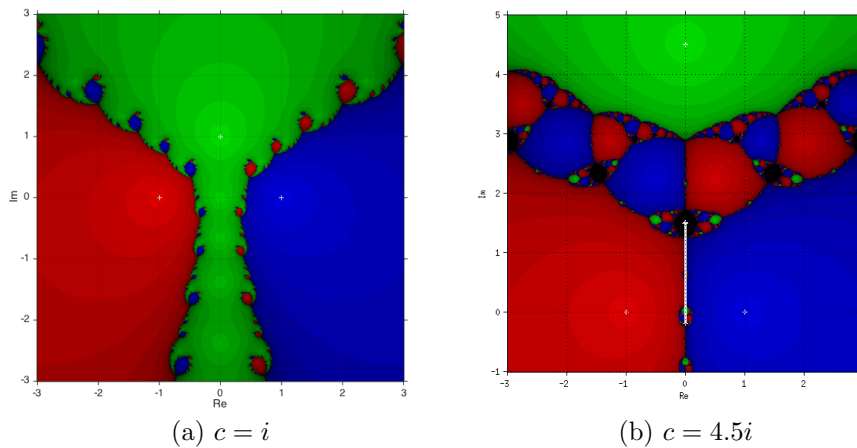


Figura 2.5: Planos dinámicos para el método de Newton sobre  $p_3(z)$

En la Figura 2.5 se puede ver el plano dinámico correspondiente a  $c = i$ , en la zona estable del plano de parámetros, y el correspondiente a  $c = 4.5i$ , en una zona inestable. En la Figura 2.5b se observa, en líneas de color blanco, una órbita periódica de orden 2.

## 2.3 Métodos para sistemas de ecuaciones no lineales

A menudo los modelos que se utilizan para representar los fenómenos físicos no dan lugar solamente a una ecuación no lineal, sino a un sistema de ecuaciones no lineales. En este caso el problema pasa a ser multidimensional, y no todos los métodos iterativos para ecuaciones son adecuados para resolver este problema.

Se va a considerar el problema de encontrar una raíz real de una función  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es decir, una solución  $\bar{x} \in D$  del sistema no lineal  $F(x) = 0$ , de  $n$  ecuaciones con  $n$  variables, siendo  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  las componentes de  $F$ . La solución se puede obtener como el punto fijo de alguna función  $\bar{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante un método iterativo de punto fijo

$$x^{(k+1)} = \bar{G}(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.5)$$

donde  $x^{(0)}$  es la estimación inicial.

Los métodos para resolver ecuaciones no lineales  $f(x) = 0, f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se pueden transferir a sistemas  $F(x) = 0, F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La extensión del método escalar al caso multidimensional requiere reescribir la expresión iterativa de manera que no haya evaluaciones de la función no lineal  $f$  en el denominador, ya que se convertirían en vectores en la extensión a sistemas. Para resolver este problema se puede utilizar el operador diferencias divididas  $[x, y; F]$ , ver [36]. Una vez el método ha sido transferido al caso multivariable, se puede hacer un estudio dinámico para ver si los métodos estables para resolver ecuaciones no lineales también lo son cuando se extienden a sistemas no lineales.

El método de Newton no tiene evaluaciones de la función no lineal en el denominador, solamente de la derivada, que pasará a ser una matriz jacobiana en el caso multidimensional. Por lo que la extensión del método de Newton a sistemas es inmediata

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}). \quad (2.6)$$

En el caso del método de Steffensen esta transferencia inmediata no es posible ya que aparece una evaluación de la función no lineal en el denominador. Una técnica que permite resolver esta dificultad mediante el uso del operador diferencia dividida es la introducida en [21]. En el caso unidimensional el operador diferencia dividida se denota  $f[x, y] = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ .

Tomando la expresión iterativa del método de Steffensen (2.3) y sustituyendo  $f(w) - f(x) = (w - x)f[w, x]$  se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[w_n, x_n]},$$

donde  $w = x + f(x)$ . Mediante el uso de este operador han desaparecido las evaluaciones de la función no lineal en el denominador, y el método es fácilmente transferible a sistemas de ecuaciones.

En el caso multidimensional, el operador diferencia dividida se define como una aplicación  $[\cdot, \cdot; F] : D \times D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$  tal que  $[x, y; F](x - y) = F(x) - F(y), \forall x, y \in D$ . Introduciendo esta notación, se puede escribir el método de Steffensen para sistemas de ecuaciones

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [w^{(k)}, x^{(k)}; F]^{-1}F(x^{(k)}). \quad (2.7)$$

Aunque no siempre es tan obvia como en el caso del método de Steffensen, a menudo es posible reescribir la expresión iterativa en términos del operador diferencia dividida para hacer desaparecer las evaluaciones funcionales en el denominador. En el Capítulo 5 se utilizará este procedimiento para transferir a sistemas de ecuaciones la familia de métodos iterativos de Ostrowski-Chun.

### 2.3.1 Conceptos de la dinámica real

El hecho de que un método tenga un determinado comportamiento dinámico para ecuaciones no garantiza que tenga el mismo comportamiento para sistemas. Para hacer un estudio dinámico de un método para sistemas de ecuaciones es necesario adaptar las herramientas de la dinámica compleja al caso multidimensional, en lo que se conoce como dinámica real.

**Definición 2.3.1** Sea  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función vectorial de punto fijo asociada al método iterativo sobre el sistema polinomial  $p(x)$ . La órbita de un punto  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  se define como el conjunto de imágenes sucesivas de  $x^{(0)}$  a través de  $G(x)$ ,  $\{x^{(0)}, G(x^{(0)}), \dots, G^m(x^{(0)}), \dots\}$ .

De manera análoga al caso escalar,  $x^* \in \mathbb{R}^n$  es un punto fijo de  $G$  si  $G(x^*) = x^*$ , donde  $G$  es ahora un función racional multidimensional.

**Definición 2.3.2** Un punto periódico  $x$  de periodo  $k \geq 1$  es un punto tal que  $G^k(x) = x$  y  $G^{k-p}(x) \neq x$ , para  $p < k$ .

Para comprobar la estabilidad de los puntos fijos o periódicos de operadores no lineales se va a recordar un resultado conocido de la dinámica discreta.

**Teorema 2.3.1** ([71], página 558) Sea  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de tipo  $\mathcal{C}^2$ . Asumiendo que  $x^*$  es un punto  $k$  periódico. Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  los valores propios de  $G'(x^*)$ .

- a) Si todos los valores propios  $\lambda_j$  verifican que  $|\lambda_j| < 1$ , entonces  $x^*$  es atractor.
- b) Si un valor propio  $\lambda_{j_0}$  es tal que  $|\lambda_{j_0}| > 1$ , entonces  $x^*$  es inestable, es decir, repulsor o silla.
- c) Si todos los valores propios  $\lambda_j$  verifican que  $|\lambda_j| > 1$ , entonces  $x^*$  es repulsor.

Los puntos fijos que no son raíces del sistema polinomial  $p(x)$  se llaman *puntos fijos extraños*. Si  $x^*$  es un punto fijo atractor de la función racional multidimensional  $G$ , su cuenca de atracción  $\mathcal{A}(x^*)$  se define como el conjunto de preimágenes de cualquier orden tales que

$$\mathcal{A}(x^*) = \left\{ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : G^m(x^{(0)}) \rightarrow x^*, m \rightarrow \infty \right\}.$$

El conjunto de puntos cuyas órbitas tienden a un punto fijo atractor  $x^*$  se llama *conjunto de Fatou*,  $\mathcal{F}(G)$ , su complementario, el conjunto que contiene los puntos fijos repulsivos y que establece los bordes entre las cuencas de atracción, se llama *conjunto de Julia*,  $\mathcal{J}(G)$

## 2.4 Espacios de Banach

Extender los métodos iterativos a espacios de Banach permite utilizar las herramientas del análisis funcional para demostrar su convergencia semilocal. Combinando técnicas de análisis

funcional y de análisis numérico se pueden abordar numerosos problemas no lineales, como la resolución de ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales o problemas de cálculo variacional.

Una de las técnicas más utilizadas para mostrar la convergencia semilocal de un método en espacios de Banach se llama principio de la mayorante, y fue utilizado por Kantorovich [31] para demostrar la convergencia semilocal del método de Newton en espacios de Banach.

Un espacio de Banach es un espacio normado en el que toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir, un espacio vectorial normado y completo. A continuación se definirán algunos conceptos básicos del cálculo en espacios de Banach, que se pueden ver con más detalle en [32].

### 2.4.1 Integral de Riemann

**Definición 2.4.1** Sea  $F$  definida en un intervalo  $[a, b]$  de un espacio de Banach. Se puede definir la integral como el límite de las sumas

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$$

donde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  y  $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ . Si el límite de las sumas cuando  $n \rightarrow \infty$  existe, se llamará integral de  $F$ , y se denotará  $\int_a^b F(t)dt$

**Teorema 2.4.1** (Teorema fundamental del cálculo) En la situación anterior se puede escribir

$$\int_{x_0}^{x_1} F'(x)dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Este resultado permite acotar la integral de un operador que esté acotado por una función real.

### 2.4.2 Teorema de Taylor

**Teorema 2.4.2** (Teorema de Taylor) Supongamos que  $F$  es un operador diferenciable en la bola  $B(x_0, r)$ ,  $r > 0$ , y que  $F^{(n)}$  es integrable en  $[x_0, x_1]$  con  $x_1 \in B(x_0, r)$ . Entonces

$$F(x_1) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_0)(x_1 - x_0)^k + R_n(x_0, x_1),$$

donde  $R_n$  es el resto integral

$$\begin{aligned} R_n(x_0, x_1) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x_1} F^{(n)}(x)(x_1 - x_0)^{n-1} dx = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x_1} F^{(n)}(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)^n (1-t)^{n-1} dt. \end{aligned}$$

En su forma integral, el desarrollo en serie de Taylor se escribe

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x F^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

En particular, para  $n = 1$ ,  $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x F'(t) dt$ , de forma que

$$\int_{x_0}^x F'(t) dt = F(x) - F(x_0),$$

para  $n = 2$ ,  $F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x F''(t)(x-t) dt$ , por lo que

$$\int_{x_0}^x F''(t)(x-t) dt = F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0),$$

usando las dos últimas expresiones y agrupando

$$\int_{x_0}^x F''(t)(x-t) dt = \int_{x_0}^x (F'(t) - F'(x_0)) dt.$$

### 2.4.3 Lema de Banach

**Lema 2.4.1** (Banach) [33] Sea  $A$  una matriz no singular. Suponiendo que  $B$  es una matriz tal que  $\|A^{-1}\| \|B\| < 1$ . Entonces,  $A+B$  es no singular, y

$$\|(A+B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|}.$$

En caso de que  $A = \mathbb{I}$ , entonces desarrollando en serie de Taylor  $(\mathbb{I} + B)^{-1}$  y despreciando los términos de orden mayor o igual que dos se obtiene  $(\mathbb{I} + B)^{-1} = \mathbb{I} - B$ , por lo que se puede escribir

$$\|(\mathbb{I} - B)\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}, \quad (2.8)$$

siempre que  $\|B\| < 1$ . Este resultado se utilizará en el Capítulo 7.

---



# Estudio de la dinámica compleja de la familia de King

---

En este capítulo se van a utilizar las herramientas introducidas en el Capítulo 2 para realizar un estudio dinámico de la familia de métodos iterativos de cuarto orden de King<sup>1</sup>.

La búsqueda de métodos multipaso fue iniciada por Traub en [12], con el objetivo de desarrollar métodos con un orden de convergencia mayor que el de Newton. Las técnicas empleadas tuvieron una gran influencia en el posterior diseño de métodos multipaso. Esta gran proliferación de nuevos métodos y la conjetura de Kung y Traub [10], motivaron que el interés pasara a centrarse en obtener métodos de alto orden de convergencia que además fueran óptimos.

Un ejemplo de método óptimo es el esquema de Ostrowski, que puede obtenerse como caso particular de algunas familias paramétricas desarrolladas con posterioridad. King en [19] propuso una generalización del esquema Ostrowski usando la aproximación  $f'(y_k) \approx \frac{f(x_k) + \gamma f(y_k)}{f(x_k) + \beta f(y_k)}$  en el segundo paso de una doble composición de Newton, donde  $\beta$  y  $\gamma$  son parámetros libres. De imponer que la familia resultante tenga orden cuatro se obtiene

$$z_{k+1} = y_k - \frac{f(z_k) + (2 + \beta)f(y_k)}{f(z_k) + \beta f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(z_k)},$$

donde  $y_k = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$ .

La familia consta de un primer paso de Newton,  $y_k$ , y depende de un solo parámetro  $\beta$ . Así que existen tantos métodos como posibles valores de  $\beta$ . Todos los métodos de la familia son óptimos y tienen orden de convergencia local 4, para ciertas condiciones sobre la función  $f$  y la aproximación inicial  $z_0$ , como se puede ver en [19]. Cuando  $\beta = -2$  se obtiene el método de Ostrowski [8].

---

<sup>1</sup>Resultados parciales de este capítulo forman parte del artículo *Chaos in King's iterative family* publicado en Applied Mathematics Letters [11] y presentados en el congreso RMSE 2013

### 3.1 Objetivos del estudio y operador racional

En el Capítulo 2 se describen las clases de conjugación para el método de Newton. En [20] los autores describen las clases de conjugación de la familia de métodos de King y hacen un análisis preliminar de su dinámica cuando son aplicados a polinomios de bajo orden. En este capítulo se va a ampliar el análisis caracterizando la estabilidad de los puntos fijos en el caso de polinomios cuadráticos. El Teorema del Escalado permite, que mediante la transformación de Möbius, el estudio dinámico sea válido para cualquier polinomio de segundo grado. El objetivo de este análisis es establecer criterios que permitan seleccionar los miembros de la familia que presenten un comportamiento más estable.

La función de punto fijo asociada a la familia de King es

$$G_{f,\beta}(z) = y - \frac{f(z) + (2 + \beta)f(y)}{f(z) + \beta f(y)} \frac{f(y)}{f'(z)}, \quad (3.1)$$

donde  $y$  es el iterado de Newton  $y = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$

Se va a analizar la estabilidad de los puntos fijos asociados a la familia de King, actuando sobre el polinomio cuadrático genérico  $p(z) = z^2 + c$ .

### 3.2 Teorema del Escalado y transformación de Möbius

El *Teorema del Escalado*, demostrado por Amat et al. en [22] para la familia de King, permite equiparar el comportamiento dinámico de un operador con el asociado a otro, conjugado mediante una aplicación afín.

**Teorema 3.2.1 (Teorema del Escalado)** *Sea  $f(z)$  una función analítica en la esfera de Riemann y  $T(z) = \alpha z + \gamma$  una aplicación afín. Si  $g(z) = \lambda(f \circ T)(z)$ , entonces  $(T \circ G_{g,\beta} \circ T^{-1})(z) = G_{f,\beta}(z)$ , es decir,  $G_{f,\beta}$  es analíticamente conjugada a  $G_{g,\beta}$  mediante  $T$ .*

Por otra parte, el Teorema 2.2.4 garantiza que es posible transformar cualquier polinomio cuadrático en  $z^2 + c$  mediante una transformación afín, que proporciona una conjugación entre  $G_{q,\beta}$  y  $G_{p,\beta}$ .

Aplicando los Teoremas 3.2.1 y 2.2.4 se concluye que para estudiar el comportamiento de la familia de King sobre cualquier polinomio cuadrático, es suficiente hacerlo sobre  $p(z) = z^2 + c$ . Sustituyendo  $f(z)$  por el polinomio  $p(z)$  en el operador definido en (3.1) se obtiene el operador racional

$$G_{\beta,c}(z) = \frac{c^3(2 + \beta) + 3cz^4(10 + \beta) - z^6(10 + 3\beta) + c^2z^2(10 + 7\beta)}{8z^3(-c\beta - z^2(4 + \beta))}, \quad (3.2)$$

que depende de los parámetros  $\beta$  y  $c$ . Para eliminar el parámetro  $c$  se puede utilizar la transformación de Möbius:  $h(z) = \frac{z - i\sqrt{c}}{z + i\sqrt{c}}$ , cuyas propiedades son

$$i)h(\infty) = 1, \quad ii)h(i\sqrt{c}) = 0, \quad iii)h(-i\sqrt{c}) = \infty.$$

La expresión del operador después de la transformación es

$$Op(z, \beta) = \frac{z^4 (5 + z^2 + 2\beta + z(4 + \beta))}{1 + z(4 + \beta) + z^2(5 + 2\beta)}, \quad (3.3)$$

que ya no depende de  $c$ .

### 3.3 Puntos fijos y críticos

Tal y como se introdujo en el Capítulo 2, los puntos fijos del operador  $Op(z)$  son aquellos que cumplen la condición  $Op(z) = z$ , es decir,  $z = 0$  y  $z = \infty$ , que son las raíces del polinomio  $p(z)$  después de la transformación de Möbius. De la expresión del operador es inmediato que  $Op(0) = 0$ , mientras que para probar que  $Op(\infty) = \infty$  se puede construir el operador inverso

$$In(z) = \frac{1}{Op(\frac{1}{z})} = \frac{z^4(5 + z^2 + 2\beta + z(4 + \beta))}{1 + z(4 + \beta) + z^2(5 + 2\beta)}$$

como  $In(0) = 0$ ,  $z = \infty$  es también un punto fijo de  $Op(z)$ . Además aparecen cinco puntos fijos extraños, que son  $z = 1$  y

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{4} \left( A - \sqrt{2} \sqrt{\beta^2 + \beta(B + 4) + 5B + 1} - B \right), \\ z_2 &= \frac{1}{4} \left( A + \sqrt{2} \sqrt{\beta^2 + \beta(B + 4) + 5B + 1} - B \right), \\ z_3 &= \frac{1}{4} \left( A - \sqrt{2} \sqrt{\beta^2 - \beta(B - 4) - 5B + 1} + B \right), \\ z_4 &= \frac{1}{4} \left( A + \sqrt{2} \sqrt{\beta^2 - \beta(B - 4) - 5B + 1} + B \right), \end{aligned}$$

donde  $A = -5 - \beta$ , y  $B = \sqrt{-7 - 2\beta + \beta^2}$ .

El número de puntos fijos extraños y su estabilidad, así como los puntos críticos, dependen del valor del parámetro  $\beta$ . En lo subsiguiente se va a hacer un estudio analítico que considere todas las posibilidades, dado que los valores del parámetro en los que se reduce el número de puntos coincide con los puntos de bifurcación, es decir, los cambios en el comportamiento.

**Lema 3.3.1** *El número de puntos fijos extraños del operador  $Op(z, \beta)$  es 5 excepto en los casos siguientes:*

- i) Si  $\beta = -2$  hay 4 puntos fijos extraños.*
- ii) Si  $\beta = -\frac{10}{3}$  hay 4 puntos fijos extraños.*
- iii) Si  $\beta = 1 \pm 2\sqrt{2}$  hay 3 puntos fijos extraños, dos de ellos dobles.*

iv) Si  $\beta = -\frac{22}{5}$  hay 3 puntos fijos extraños,  $z = 1$  es triple.

### Demostración

i) El operador racional (3.3) para el caso de  $\beta = -2$  es  $Op(z) = z^4$ , y los puntos fijos son la solución de  $z^4 = z$ , es decir, las soluciones de  $z(z-1)(1+z+z^2) = 0$ , por tanto hay tres puntos fijos extraños,  $z = 1$ ,  $z = -\sqrt[3]{-1}$  y  $z = (-1)^{2/3}$ .

ii) El operador racional para  $\beta = -\frac{10}{3}$  es  $Op(z) = -\frac{z^4(5+3z)}{3+5z}$ , y los puntos fijos son la solución de  $\frac{z(3+5z+5z^3+3z^4)}{3+5z} = 0$ , por tanto hay cuatro puntos fijos extraños simples,  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$ , pero  $z = 1$  no es un punto fijo.

Se puede proceder de manera análoga para demostrar iii) y iv).  $\square$

A continuación se van a calcular los puntos críticos del operador. Estos puntos van a tener interés ya que cada cuenca de atracción tiene al menos un punto crítico, por lo que los críticos libres podrían estar en una cuenca de atracción de alguna de las soluciones de la ecuación, o bien estar en la cuenca de algún punto fijo extraño u órbita periódica atractora. En la Sección 3.4.1 se usarán los puntos críticos como punto inicial de la familia de métodos cuando se dibujen planos de parámetros.

**Lema 3.3.2** *Los puntos críticos del operador  $Op(z, \beta)$  son  $z = 0$  y  $z = \infty$  (corresponden a la transformación de Möbius de las raíces del polinomio) y los críticos libres*

$$z^* = -1,$$

$$z_1^* = -\frac{20 + 14\beta + 3\beta^2 + \sqrt{3}\sqrt{\beta(80 + 84\beta + 28\beta^2 + 3\beta^3)}}{20 + 8\beta},$$

$$z_2^* = \frac{-20 - 14\beta - 3\beta^2 + \sqrt{3}\sqrt{\beta(80 + 84\beta + 28\beta^2 + 3\beta^3)}}{20 + 8\beta} = \frac{1}{z_1^*}.$$

excepto en caso de  $\beta = -2$  donde no hay críticos libres, y en caso de  $\beta = -\frac{5}{2}$  y  $\beta = -\frac{10}{3}$  donde solo hay un crítico libre,  $z^* = -1$ .

**Demostración:** Es necesario calcular la derivada del operador  $Op(z, \beta)$  e igualarla a cero

$$Op'(z, \beta) = \frac{2z^3(z+1)^2(10+4\beta+2z^2(5+2\beta)+z(20+14\beta+3\beta^2))}{(1+z(4+\beta)+z^2(5+2\beta))^2} = 0.$$

Sus soluciones son  $z = 0$ ,  $z = \infty$ ,  $z = -1$  y las soluciones de  $10 + 4\beta + 2z^2(5 + 2\beta) + z(20 + 14\beta + 3\beta^2) = 0$ , que son  $z_1^*$  y  $z_2^*$ .  $\square$

Aunque en general existen tres críticos libres, para  $\beta = -2$  el operador derivada se simplifica  $Op'(z) = 4z^3$  y no hay ninguno, mientras que para  $\beta = -\frac{5}{2}$  y  $\beta = -\frac{10}{3}$ , el operador también se simplifica  $Op'(z) = \frac{30z^4(z+1)^2}{(2+3z)^2}$  y  $Op'(z) = -\frac{60z^3(z+1)^2}{(3+5z)^2}$  respectivamente, y solo hay uno, que es  $z = -1$ .  $\square$

### 3.4 Estabilidad de los puntos fijos

La cantidad de puntos fijos extraños no es el aspecto más relevante de un estudio dinámico, sino su estabilidad. Un escenario con puntos fijos extraños atractores no será el más deseable desde el punto de vista de la fiabilidad del método iterativo resultante. Se va a analizar la estabilidad de los puntos fijos del operador en función del valor del parámetro  $\beta$ .

**Teorema 3.4.1** *Los puntos fijos  $z = 0$  y  $z = \infty$  son superatractores independientemente del valor de  $\beta$ , y para  $z = 1$ , excepto en el caso de  $\beta = -\frac{10}{3}$  donde no es un punto fijo, se obtienen los siguientes resultados*

- i) *Atractor si  $|\beta + \frac{226}{55}| < \frac{16}{55}$  en particular superatractor si  $\beta = -4$ .*
- ii) *Parabólico si  $|\beta + \frac{226}{55}| = \frac{16}{55}$ .*
- iii) *Repulsor si  $|\beta + \frac{226}{55}| > \frac{16}{55}$ .*

**Demostración** Como se ha visto en el Capítulo 2, el comportamiento del punto fijo se puede determinar según el valor de la función de estabilidad: será atractor si  $|Op'(z^*, \beta)| < 1$  y repulsor si  $|Op'(z^*, \beta)| > 1$ . Se va a sustituir el punto fijo extraño  $z = 1$  en  $|Op'(z^*, \beta)|$  para comprobar su estabilidad en función del parámetro  $\beta$ .

$$Op'(z, \beta) = \frac{2z^3(z+1)^2(10+4\beta+2z^2(5+2\beta)+z(20+14\beta+3\beta^2))}{(1+z(4+\beta)+z^2(5+2\beta))^2}$$

Es fácil probar que  $Op'(0, \beta) = 0$  para cualquier valor de  $\beta$ . Se puede utilizar un procedimiento similar al aplicado en el inicio de la Sección 3.3 para demostrar que  $Op'(\infty, \beta)$  también es igual a cero para cualquier valor de  $\beta$ , por lo que  $z = 0$  y  $z = \infty$  son superatractores.

Para  $z = 1$  se tiene

$$Op'(1, \beta) = \frac{8(4+\beta)}{10+3\beta},$$

por lo que  $\left| \frac{8(4+\beta)}{10+3\beta} \right| \leq 1$  implica que  $|8(4+\beta)| \leq |10+3\beta|$ ,

considerando  $\beta$  un complejo arbitrario  $a + bi$  y multiplicando por su complejo conjugado ambos lados de la desigualdad

$$(32+8a)^2 + (8b)^2 \leq (10+3a)^2 + (3b)^2,$$

simplificando,

$$924 + 452a + 55a^2 + 55b^2 \leq 0,$$

completando el cuadrado,

$$\left( a + \frac{452}{110} \right)^2 + b^2 \leq \frac{256}{3025}.$$

Por lo tanto  $Op'(0, \beta) \leq 1$  si y solo si  $\left| \beta + \frac{226}{55} \right| \leq \frac{16}{55}$ . □

En el siguiente resultado se puede ver la estabilidad del resto de puntos fijos extraños:  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  y  $z_4$ .

**Teorema 3.4.2** *Los puntos fijos extraños  $z_1$  y  $z_2$  son*

i) *Atractores si  $-1.83917 < \beta < 1 - 2\sqrt{2}$  ó  $1 + 2\sqrt{2} < \beta < 3.96186$ .*

ii) *Parabólicos si  $\beta = 1 \pm 2\sqrt{2}$ ,  $\beta \approx -1.83917$ ,  $\beta \approx 3.96186$ .*

iii) *Repulsores para valores de  $\beta$  diferentes de los anteriores.*

*Mientras que los puntos fijos extraños  $z_3$  y  $z_4$  son*

i) *Atractores si  $-4.97983 < \beta < -\frac{22}{5}$  y superatractores si  $\beta \approx -14.7034$*

ii) *Parabólicos si  $\beta = 1 \pm \sqrt{2 - \frac{22}{5}}$ ,  $\beta \approx -4.97983$  ó  $\beta \approx -\frac{22}{5}$ .*

iii) *Repulsores para valores de  $\beta$  diferentes de los anteriores.*

### Demostración:

No es posible comprobar la estabilidad de los puntos fijos extraños que dependen de  $\beta$  de forma analítica, ya que al sustituirlos en la función de estabilidad aparecen raíces de polinomios de alto grado, pero se puede hacer de forma numérica usando *diagramas de estabilidad*, que son representaciones tridimensionales de las regiones de estabilidad. En las Figuras 3.1a y 3.1b se muestra la región de estabilidad de  $z_1$  y  $z_2$ , y  $z_3$  y  $z_4$ , respectivamente. En el eje  $z$  se representa  $|Op'(z^*, \beta)|$ , mientras que en el plano  $XY$  se tienen las partes reales e imaginarias del parámetro  $\beta$ . Estos diagramas permiten identificar las regiones del plano donde dicho punto fijo extraño es atractor o repulsor.

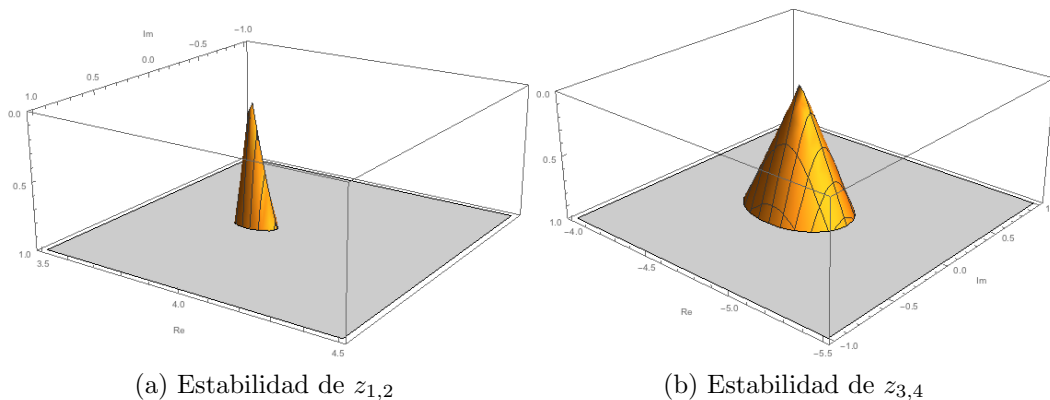


Figura 3.1: Regiones de estabilidad

Los valores para los que  $Op'(z^*, \beta)$  cambia de comportamiento, es decir, es igual a 1 o -1, se han obtenido numéricamente. En la Figura 3.1 se pueden ver regiones en la que los valores del parámetro hacen que la función de estabilidad sea menor que uno, por lo tanto ese punto fijo será atractor para esos valores del parámetro, lo que es una indicación de que el método correspondiente será inestable.  $\square$

### 3.4.1 Planos de parámetros

Los planos de parámetros son una representación que permite determinar de una manera visual qué valores del parámetro darán lugar a métodos estables o inestables.

Para construir un plano de parámetros es necesario tomar como punto inicial un punto crítico libre y aplicar el método iterativo para todos los valores del parámetro definidos en una malla sobre el plano complejo. Se utiliza el color rojo si tras 40 iteraciones el método correspondiente converge a alguna de las raíces del polinomio,  $z = 0$  o  $z = \infty$  tras la transformación de Möbius, y el negro en otro caso.

Utilizando un programa implementado en MATLAB, que tiene como base los algoritmos desarrollados en [25], y que se puede ver en el Anexo 9.3, se ha calculado el plano de parámetros correspondiente a la familia de King actuando sobre el polinomio  $p(z)$ . En la Figura 3.7a se puede ver el plano de parámetros que se obtiene tomando como punto inicial el primer crítico libre,  $z^* = -1$ , y en la Figura 3.7b tomando cualquiera de los críticos libres  $z_1^*$  o  $z_2^*$ , nótese que  $z_2^* = 1/z_1^*$ , por lo que los dos críticos libres no son independientes y dan lugar al mismo plano de parámetros.

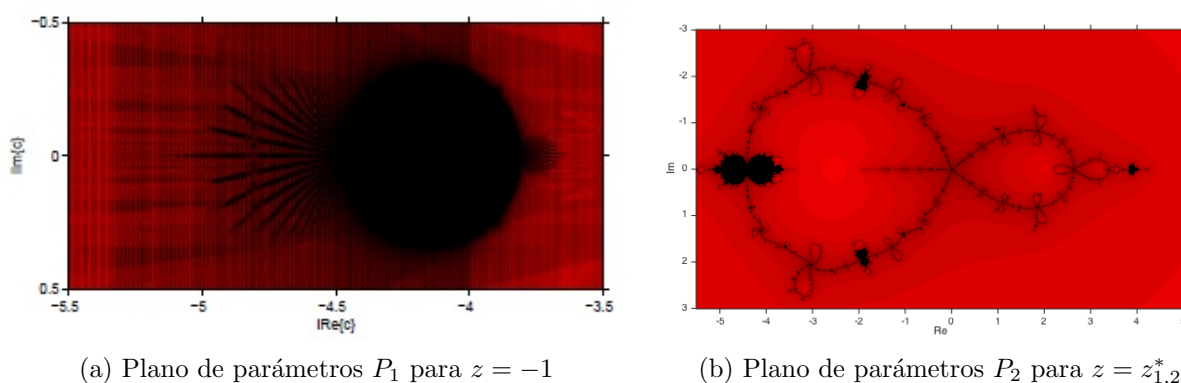


Figura 3.2: Planos de parámetros

Los puntos del plano complejo que aparecen en negro en los planos de parámetros de la Figura 3.2 corresponden a valores del parámetro  $\beta$  cuyo método iterativo asociado no converge a 0 ni a  $\infty$  tomando como estimación inicial un crítico libre. Es decir, métodos iterativos pertenecientes a la familia de King para los cuales hay, al menos, tres cuencas de convergencia. Hay, por tanto, al menos una región de atracción que no corresponde a ninguna de las soluciones. Esto puede ser debido a la existencia de una cuenca de atracción de un punto fijo extraño o bien porque aparezca alguna órbita periódica atractora.

El punto crítico  $z = -1$  es en realidad una preimagen del punto fijo  $z = 1$ , es decir, en realidad

el plano  $P_1$  está mostrando la estabilidad de del punto fijo  $z = 1$ , que además se ve afectada por el error de redondeo. Por lo tanto, en lo sucesivo se va a centrar la atención en el plano  $P_2$ , correspondiente a los puntos críticos  $z_{1,2}^*$  y se van a representar planos dinámicos para algunos valores de  $\beta$ .

En la Figura 3.3 se pueden ver los detalles de la parte izquierda y derecha del plano  $P_2$

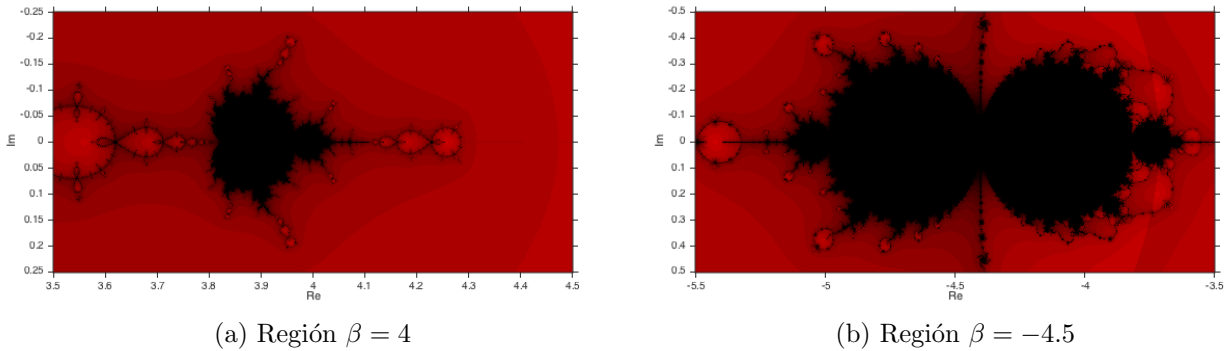


Figura 3.3: Detalle del plano de parámetros  $P_2$

Estos detalles del plano  $P_2$  se corresponden con los diagramas de estabilidad de la Figura 3.1. La Figura 3.3a muestra la región donde los puntos fijos extraños  $z_1$  y  $z_2$  son atractores, mientras que la 3.3b muestra una región donde tanto  $z_3$ ,  $z_4$  y  $z = 1$  son atractores.

### 3.4.2 Planos dinámicos

En esta sección se van a dibujar planos dinámicos que permitan confirmar y ampliar la información obtenida en los planos de parámetros. Se van a escoger valores del parámetro  $\beta$  en diferentes regiones del plano  $P_2$ , algunas estables y otras inestables.

En la Figura 3.4 se pueden ver los planos dinámicos del método de Ostrowski ( $\beta = -2$ ) aplicado a un polinomio antes y después de la transformación de Möbius. Los planos se han obtenido usando una malla de  $500 \times 500$  puntos, un número máximo de iteraciones de 20 y una tolerancia de  $10^{-3}$ . El programa utilizado para obtener la Figura 3.4b puede verse en el Anexo 9.4.



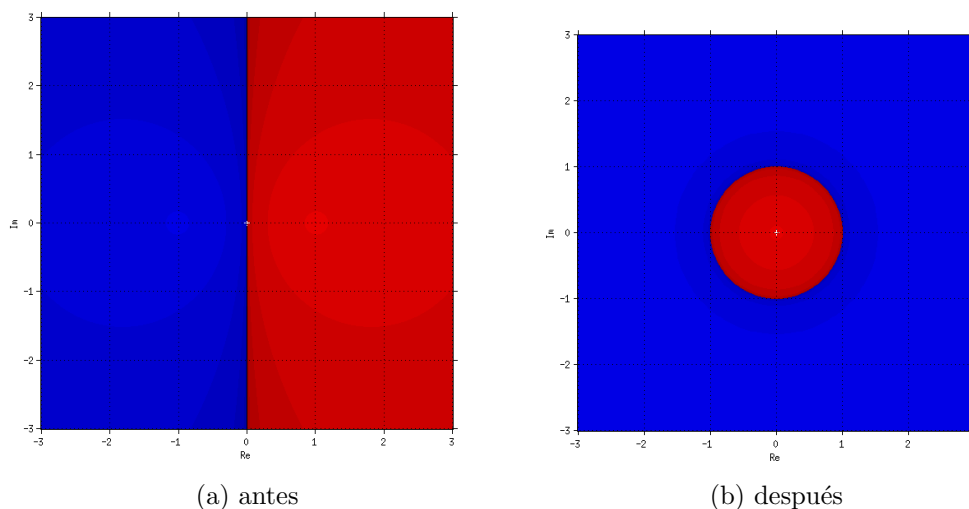


Figura 3.4: Planos dinámicos del método de Ostrowski antes y después de la transformación de Möbius

Después de la transformación de Möbius, las dos raíces de  $p(z)$  son  $z = 0$ , cuenca de color naranja, y  $z = \infty$ , cuenca de color azul. El método de Ostrowski es un miembro especialmente estable de la familia, y sus cuencas de atracción para un polinomio de grado 2 se asemejan a las del método de Newton, que se vieron en el Capítulo 2.

En cambio, para otros métodos se observan puntos de color negro que indican que el método converge hacia un punto fijo que no es una raíz, o hacia una órbita periódica. En el plano dinámico de la Figura 3.5 se pueden ver las cuencas de atracción correspondientes a  $\beta = -4.5$ , en la región del detalle de la Figura 3.3b. Los diferentes iterados se dibujan en color amarillo, se puede ver que tanto los puntos fijos extraños  $z = 1$ ,  $z_3$  y  $z_4$  son atractores.

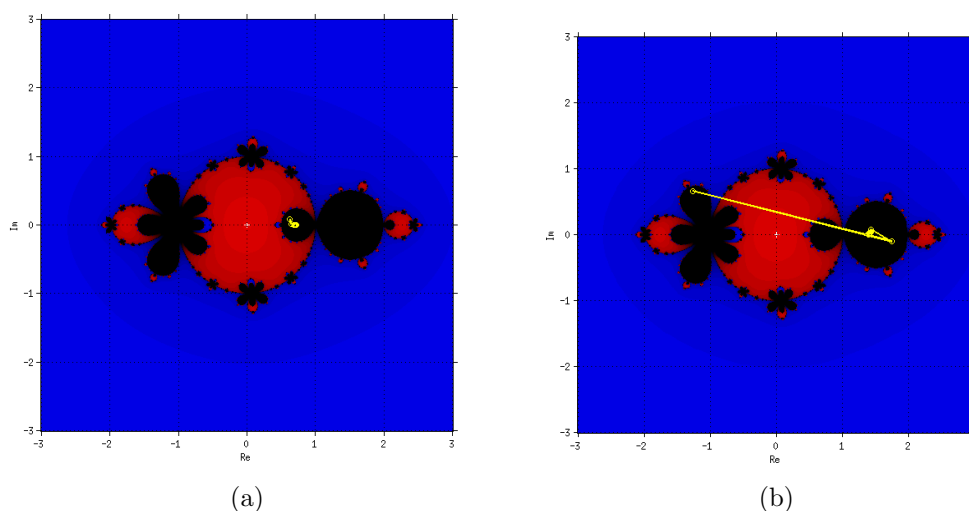


Figura 3.5: Planos dinámicos para  $\beta = -4.5$

En la Figura 3.6 se pueden ver las cuencas de atracción correspondientes a  $\beta = 3.9 + 0.1i$ , en la región del detalle de la Figura 3.3a. En este caso aparece una órbita periódica de periodo

3. El hecho de que aparezca una órbita de periodo 3 es importante porque por el Teorema de Sarkovski, ver [15], se puede probar que existen órbitas periódicas de cualquier otro periodo.

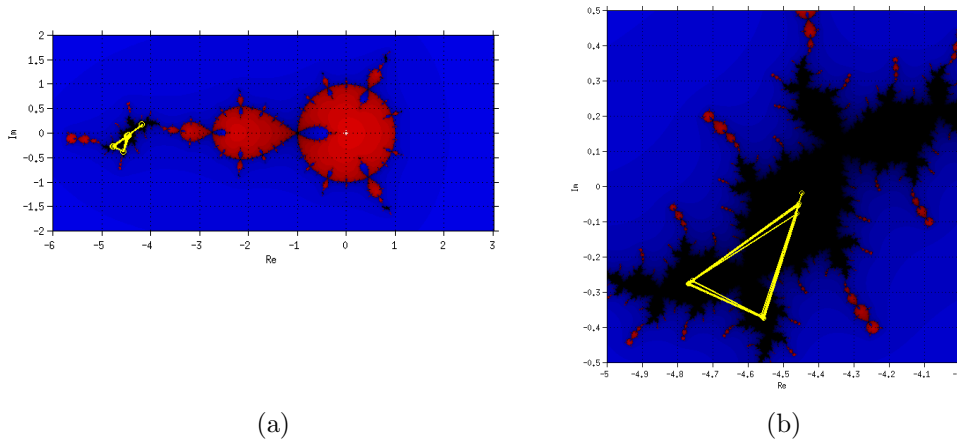


Figura 3.6: Plano dinámico para  $\beta = 3.9 + 0.1i$  y detalle de la órbita periódica

En cambio, escogiendo métodos correspondientes a la zona en rojo del plano de parámetros  $P_2$  se obtiene un comportamiento parecido al del método de Ostrowski.

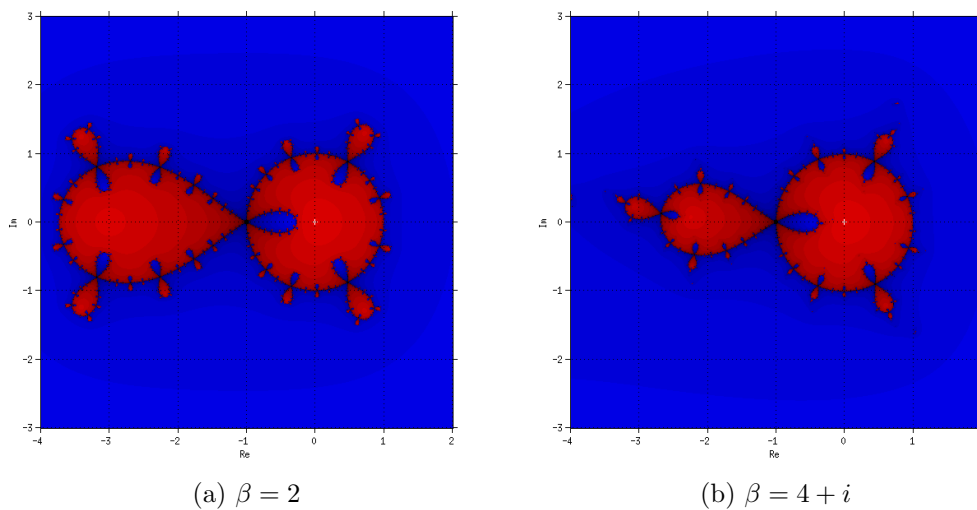


Figura 3.7: Planos dinámicos de miembros estables de la familia

Los planos dinámicos que se muestran en esta sección han sido generados con la rutina que aparece en el Anexo 9.4.

Desde el punto de vista numérico, se han encontrado valores de  $\beta$  que hacen que los métodos asociados sean muy estables cuando se aplican a un polinomio de grado 2. Estables, en este contexto, significa que presentan un plano dinámico sin cuencas de atracción asociadas a puntos

fijos extraños u órbitas periódicas. El mejor rango de valores de  $\beta$  en términos de estabilidad corresponde a las regiones alrededor de  $\beta = -2$  y  $\beta = 2$ . Por tanto, el estudio dinámico ha permitido comprobar que existen diferencias entre el comportamiento de distintos miembros de la familia de King, y que no todos los métodos de la familia son fiables en el caso de polinomios cuadráticos.

---

# Obtención de la familia de Ostrowski-Chun de métodos iterativos

---

El diseño de familias paramétricas utilizando parámetros indeterminados fue utilizado por King en [19] para obtener la familia que se estudió en el Capítulo 3. La técnica consiste en, partiendo de una fórmula iterativa conocida, añadir parámetros y hacer un estudio del orden de convergencia local para encontrar los valores de los parámetros que hacen que este sea máximo.

Por otro lado, los sistemas de ecuaciones no lineales son un problema que a menudo se trata de evitar aproximando el sistema no lineal como un sistema lineal. Sin embargo, esto no siempre es posible y es necesario afrontar el problema directamente. Aunque el diseño de métodos para sistemas no lineales no se ha desarrollado tanto como para ecuaciones, en [42] y [43] los autores diseñan métodos de alto orden para sistemas.

En este capítulo se va a diseñar una familia biparamétrica de métodos para la resolución de ecuaciones no lineales, y posteriormente se va a transformar para hacerla adecuada para resolver sistemas de ecuaciones no lineales<sup>1</sup>. Para diseñar la nueva familia se van a combinar los métodos de Ostrowski y Chun con cuatro parámetros, y mediante un análisis del orden de convergencia, se van a encontrar los valores de los parámetros que hagan que la familia resultante sea de orden cuarto. Este análisis dará como resultado una familia biparamétrica, que se va a extender a sistemas de ecuaciones no lineales usando el operador diferencia dividida.

Finalmente, se van a efectuar pruebas numéricas con problemas académicos y con un problema aplicado, el problema que resulta de modelizar la interacción molecular de una sustancia, para comprobar el orden de convergencia computacional y el desempeño de los métodos propuestos.

---

<sup>1</sup>Resultados parciales de este capítulo forman parte del artículo *Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families* publicado en *Journal of Mathematical Chemistry* [26]

## 4.1 La familia de Ostrowski-Chun de métodos iterativos

Dos métodos iterativos óptimos de orden de convergencia 4 son los métodos de Ostrowski y de Chun, cuyas expresiones iterativas son, respectivamente:

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k) + 2f(y_k)}{f(x_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $y_k$  es el paso de Newton.

Los esquemas tienen las mismas evaluaciones funcionales y una fórmula iterativa muy similar, el de Ostrowski con una combinación de  $f(x_k)$  y  $f(y_k)$  en el denominador, y el de Chun con otra combinación de las mismas funciones en el numerador. Se van a combinar estos métodos para diseñar una nueva familia de métodos iterativos. Usando el método de Newton como predictor, se puede construir una combinación de estos dos esquemas de la forma

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \left[ \frac{f(x_k)}{a_1 f(x_k) + a_2 f(y_k)} + \frac{b_1 f(x_k) + b_2 f(y_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $\alpha, a_1, a_2, b_1$  y  $b_2 \in \mathbb{R}$ . El siguiente teorema va a determinar los valores de los parámetros que hagan que el orden de convergencia sea al menos cuatro.

**Teorema 4.1.1** *Sea  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suficientemente diferenciable en cada punto del intervalo abierto  $I$  tal que  $\xi \in I$  es una raíz simple de la ecuación no lineal  $f(x) = 0$ . Entonces, la sucesión  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  obtenida usando la expresión (4.1) converge a  $\xi$  y el orden de convergencia local es al menos 4 si  $\alpha = 1$ ,  $a_2 = a_1^2(b_2 - 2)$ ,  $b_1 = 1 - \frac{1}{a_1}$  para cualquier  $a_1$  y  $b_2 \in \mathbb{R}$ , con  $a_1 \neq 0$ .*

**Demostración:** Para probar la convergencia local del método iterativo hacia la solución de  $f(x) = 0$  se utiliza el desarrollo en serie de Taylor de la función alrededor de la solución

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f'(\xi)[e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4] + \mathcal{O}[e_k^5] \\ f'(x_k) &= f'(\xi)[1 + 2c_2 e_k + 3c_3 e_k^2 + 4c_4 e_k^3 + 5c_5 e_k^4] + \mathcal{O}[e_k^5], \end{aligned}$$

donde  $e_k = x_k - \xi$  es el error en la iteración  $k$  y  $c_j = \frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(\xi)}{f'(\xi)}$ . Calculando  $\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  y sustituyendo el resultado en el primer paso del método iterativo (4.1)

$$y_k = \xi + (1 - \alpha)e_k + \alpha c_2 e_k^2 - 2\alpha(c_2^2 - c_3)e_k^3 - \alpha(-4c_2^3 + 7c_2 c_3 - 3c_4)e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5].$$

Usando de nuevo el desarrollo en serie de Taylor

$$f(y_k) = f'(\xi) (A_1 e_k + A_2 e_k^2 + A_3 e_k^3 + A_4 e_k^4) + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $A_1 = 1 - \alpha$ ,  $A_2 = (1 - \alpha + \alpha^2) c_2$ ,  $A_3 = -2\alpha^2 c_2^2 + (1 - \alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) c_3$  y  $A_4 = (1 - \alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4) c_4 + 5\alpha^2 c_2^3 - \alpha^2 (10 - 3\alpha) c_2 c_3$ . Sustituyendo  $f(x_k)$ ,  $f'(x_k)$  y  $f(y_k)$  en (4.1) se obtiene la siguiente ecuación del error

$$e_{k+1} = B_1 e_k + B_2 e_k^2 + B_3 e_k^3 + B_4 e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $B_1 = (1 - \alpha) \left( 1 - b_1 - b_2 + b_2 \alpha - \frac{1}{a_1 + a_2 - a_2 \alpha} \right)$ . Si  $\alpha = 1$  entonces  $B_1 = 0$ , y la ecuación del error para la familia de métodos iterativos toma la forma

$$e_{k+1} = B'_2 e_k^2 + B'_3 e_k^3 + B'_4 e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $B'_2 = \left( 1 - \frac{1}{a_1} - b_1 \right) c_2$ . En este caso, si  $b_1 = \frac{a_1 - 1}{a_1}$ , entonces  $B'_2 = 0$ , y la ecuación del error resulta

$$e_{k+1} = B''_3 e_k^3 + B''_4 e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $B''_3 = \frac{(a_2 - a_1^2(-2 + b_2)) c_2^2}{a_1^2}$ . Se puede ver que si  $a_2 = a_1^2(b_2 - 2)$ , entonces  $B''_3 = 0$  y

$$e_{k+1} = ((5 - a_1(b_2 - 2))^2 c_2^3 - c_2 c_3) e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

por lo que el orden de convergencia es al menos cuatro.  $\square$

Sustituyendo los parámetros dependientes la familia biparamétrica resulta

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1}{a_1} \left[ \frac{f(x_k)}{f(x_k) + a_1(b_2 - 2)f(y_k)} + \frac{(a_1 - 1)f(x_k) + a_1 b_2 f(y_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

A continuación se van a analizar algunos casos particulares del esquema (4.2)

1. Si  $b_2 = 2$ , el parámetro  $a_1$  desaparece y el esquema resultante es el método de Chun.
2. Si  $a_1 = 1$ , la fórmula iterativa toma la forma

$$x_{k+1} = y_k - \left[ \frac{f(x_k)}{f(x_k) + (b_2 - 2)f(y_k)} + \frac{b_2 f(y_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}$$

y se tiene una familia uniparamétrica que incluye los métodos originales como casos particulares: (a) si  $b_2 = 2$  aparece el método de Chun y (b) si  $b_2 = 0$ , el de Ostrowski.

3. Para cualquier  $a_1 \neq 0$  y  $b_2 = 0$ , la fórmula iterativa es

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k) - 2(a_1 - 1)f(y_k)}{f(x_k) - 2a_1 f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.$$

Si se define  $-2(a_1 - 1) = \beta$ , entonces  $-2a_1 = \beta - 2$  y se obtiene la familia de King [19]

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k) + \beta f(y_k)}{f(x_k) + (\beta - 2)f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.$$

4. Para cualquier  $a_1 \neq 0$  y  $b_2 = 1$ , la fórmula iterativa resulta

$$x_{k+1} = y_k - \frac{1}{a_1} \left[ \frac{f(x_k)}{f(x_k) - a_1 f(y_k)} + \frac{(a_1 - 1)f(x_k) + a_1 f(y_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.$$

En lo subsiguiente se pretende obtener una familia similar aproximando las derivadas como diferencias divididas preservando el orden de convergencia, esto puede conseguirse mediante la introducción del operador diferencia dividida, usando la técnica descrita en [29].

**Teorema 4.1.2** *Sea  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suficientemente diferenciable en el abierto  $I$ , siendo  $\xi \in I$  una solución simple de la ecuación no lineal  $f(x) = 0$ . Entonces, la sucesión  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  obtenida usando la expresión*

$$y_k = x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}, \tag{4.3}$$

$$x_{k+1} = y_k - \left[ \frac{f(x_k)}{a_1 f(x_k) + a_2 f(y_k)} + \frac{b_1 f(x_k) + b_2 f(y_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]},$$

donde  $z_k = x_k + f(x_k)^2$  y  $f[z_k, x_k] = \frac{f(z_k) - f(x_k)}{z_k - x_k}$ , converge a  $\xi$  con orden de convergencia al menos cuatro si  $\alpha = 1$ ,  $a_2 = a_1^2(b_2 - 2)$ ,  $b_1 = 1 - \frac{1}{a_1}$  y para todo  $a_1$  y  $b_2 \in \mathbb{R}$ , con  $a_1 \neq 0$ . La ecuación del error es

$$e_{k+1} = ((5 - a_1(-2 + b_2))^2 c_2^3 - c_2 c_3 + \gamma c_2^2) e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $e_k = x_k - \xi$ ,  $\gamma = f'(\xi)^2$  y  $c_q = \left(\frac{1}{q!}\right) \frac{f^{(q)}(\xi)}{f'(\xi)}$ ,  $q \geq 2$ .

**Demostración:** Usando el desarrollo en serie de Taylor de la función  $f(x_k)$  alrededor de  $\xi$

$$\begin{aligned} z_k &= e_k + \gamma[e_k^2 + 2c_2 e_k^3 + (c_2^2 + 2c_3)e_k^4 + 2(c_2 c_3 + c_4)e_k^5 + (c_3^2 + 2c_2 c_4 + 2c_5)e_k^6 + \mathcal{O}[e_k^7], \\ f(z_k) &= f'(\xi)[e_k + (c_2 + \gamma)e_k^2 + (c_3 + 4\gamma c_2)e_k^3 + (c_4 + \gamma(5c_2^2 + 5c_3 + \gamma c_2))e_k^4 \\ &\quad + (c_5 + \gamma(2c_2^3 + 12c_2 c_3 + 6c_4 + \gamma(4c_2^2 + 3c_3))e_k^5 + \mathcal{O}[e_k^6], \\ f[z_k, x_k] &= f'(\xi)[1 + 2c_2 e_k + (\gamma c_2 + 3c_3)e_k^2 + (4c_4 + \gamma(2c_2^2 + 3c_3))e_k^3 + \mathcal{O}[e_k^4]. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.3), se obtiene el siguiente resultado para  $y_k$

$$y_k = (1 - \alpha)e_k + \alpha c_2 e_k^2 + \alpha(2c_3 - 2c_2^2 + \gamma c_2)e_k^3 + \alpha(4c_2^3 - 7c_2 c_3 - \gamma c_2^2 + 3c_4 + 3\gamma c_3)e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5].$$

Desarrollando en serie de Taylor de nuevo

$$f(y_k) = f'(\xi)(A_1 e_k + A_2 e_k^2 + A_3 e_k^3 + A_4 e_k^4) + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $A_1 = 1 - \alpha$ ,  $A_2 = (1 - \alpha + \alpha^2)c_2$ ,  $A_3 = \alpha(\gamma - 2\alpha c_2)c_2 + (1 - \alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3)c_3$  y  $A_4 = (1 - \alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4)c_4 + \alpha(3\gamma c_3 + \gamma(1 - 2\alpha)c_2^2 + 5\alpha c_2^3 + \alpha(3\alpha - 10)c_2 c_3)$ . Usando estos resultados se llega a la siguiente ecuación del error para el método iterativo (4.3)

$$e_{k+1} = B_1 e_k + B_2 e_k^2 + B_3 e_k^3 + B_4 e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$



donde  $B_1 = (1 - \alpha) \left( 1 - b_1 - b_2 + b_2\alpha - \frac{1}{a_1 + a_2 - a_2\alpha} \right)$ .

Si  $\alpha = 1$ , entonces  $B_1 = 0$  y la ecuación del error es

$$e_{k+1} = B'_2 e_k^2 + B'_3 e_k^3 + B'_4 e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $B'_2 = \left( 1 - \frac{1}{a_1} - b_1 \right) c_2$ . En este caso, si  $b_1 = \frac{a_1 - 1}{a_1}$ ,  $B'_2 = 0$  y se obtiene para la ecuación del error

$$e_{k+1} = B''_3 e_k^3 + B''_4 e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $B''_3 = \frac{(a_2 - a_1^2(-2 + b_2)) c_2^2}{a_1^2}$ . Se puede ver que si  $a_2 = a_1^2(b_2 - 2)$ , entonces  $B''_3 = 0$  y

$$e_{k+1} = ((5 - a_1(-2 + b_2))^2 c_2^3 - c_2 c_3 - \gamma c_2^2) e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5], \quad (4.4)$$

por lo que el orden de convergencia es al menos cuatro.  $\square$

De manera que la fórmula iterativa para la familia biparamétrica es

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1}{a_1} \left[ \frac{f(x_k)}{f(x_k) + a_1(b_2 - 2)f(y_k)} + \frac{(a_1 - 1)f(x_k) + a_1 b_2 f(y_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Del mismo modo que en el caso de la familia con derivadas, se pueden definir los siguientes casos particulares

1. Si  $b_2 = 2$ , entonces el parámetro  $a_1$  se cancela en la expresión iterativa, lo que corresponde a la versión libre de derivada del método de Chun (CM2).
2. Cuando  $a_1 = 1$ , la fórmula iterativa toma la forma

$$x_{k+1} = y_k - \left[ \frac{f(x_k)}{f(x_k) + (b_2 - 2)f(y_k)} + \frac{b_2 f(y_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}$$

y se tiene una familia uniparamétrica con versiones libres de derivada de los esquemas originales

- (a) si  $b_2 = 2$ , aparece la versión libre de derivada del método de Chun, cuya expresión iterativa es

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k) + 2f(y_k)}{f(x_k)} \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]},$$

- (b) si  $b_2 = 0$ , se obtiene la versión libre de derivada del método de Ostrowski (OM2)

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}.$$

3. Si  $a_1 \neq 0$  y  $b_2 = 0$ , el método iterativo toma la forma

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k) - 2(a_1 - 1)f(y_k)}{f(x_k) - 2a_1f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}.$$

Si se introduce la notación  $-2(a_1 - 1) = \beta$ , entonces  $-2a_1 = \beta - 2$  y se obtiene la versión libre de derivada de la familia de King

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k) + \beta f(y_k)}{f(x_k) + (\beta - 2)f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}.$$

4. Si  $a_1 \neq 0$  y  $b_2 = 1$ , el método iterativo resultante es

$$x_{k+1} = y_k - \frac{1}{a_1} \left[ \frac{f(x_k)}{f(x_k) - a_1f(y_k)} + \frac{(a_1 - 1)f(x_k) + a_1f(y_k)}{f(x_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}.$$

## 4.2 Extensión a sistemas de ecuaciones no lineales

El objetivo de esta sección es obtener una generalización de la familia (4.1) a problemas de más de una variable, preservando el orden de convergencia local. La extensión al caso multivariable requiere reescribir la expresión iterativa de forma que no existan evaluaciones funcionales en el denominador, ya que se convertirán en vectores en el caso de más de una variable. Para este fin se va a usar el operador diferencia dividida, que como se va a ver permite eliminar las evaluaciones funcionales del denominador.

Del primer paso del proceso iterativo  $y_k = x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ,  $f(x_k)$  puede ser expresado como  $f(x_k) = \frac{1}{\alpha}(x_k - y_k)f'(x_k)$ .

Teniendo en cuenta que de la definición del operador diferencia dividida

$$f(y_k) = (y_k - x_k)f[x_k, y_k] + f(x_k),$$

se puede reescribir el cociente  $\frac{f(y_k)}{f(x_k)}$  como

$$\frac{f(y_k)}{f(x_k)} = 1 - \alpha \frac{f[x_k, y_k]}{f'(x_k)}. \quad (4.6)$$

Para eliminar las evaluaciones funcionales del denominador de (4.1) se puede dividir el numerador y el denominador del primer sumando del segundo paso entre  $f(y_k)$  y desarrollar el segundo sumando, de forma que se obtiene

$$x_{k+1} = y_k - \left( \frac{\frac{f(x_k)}{f(y_k)}}{a_1 \frac{f(x_k)}{f(y_k)} + a_2} + b_1 + b_2 \frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)},$$

multiplicando ahora numerador y denominador del primer sumando por  $\frac{f(y)}{f(x)}$ , introduciendo el cociente (4.6) y simplificando

$$x_{k+1} = y_k - \left( \frac{1}{a_1 + a_2 - a_2 \alpha \frac{f[x_k, y_k]}{f'(x_k)}} + b_1 + b_2 - b_2 \alpha \frac{f[x_k, y_k]}{f'(x_k)} \right) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \quad (4.7)$$

De esta forma solamente hay una derivada y un operador diferencia dividida en el denominador, que se convertirán en matrices en el caso multivariable.

Escribiendo la expresión (4.7) en notación de sistemas de ecuaciones, tal y como se ha visto en el Capítulo 2, la familia (4.1) es extensible al caso de varias variables

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= x^{(k)} - \alpha [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - \left( G_1(x^{(k)}, y^{(k)}) + G_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \right) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} G_1(x^{(k)}, y^{(k)}) &= \left[ (a_1 + a_2)I - \alpha a_2 [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]^{-1}, \\ G_2(x^{(k)}, y^{(k)}) &= (b_1 + b_2)I - \alpha b_2 [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F], \end{aligned}$$

y  $[x^{(k)}, y^{(k)}; F]$  denota la matriz del operador diferencia dividida de  $F$  en  $x^{(k)}$  y  $y^{(k)}$ ,  $I$  es la matriz identidad y  $F'(x^{(k)})$  es la matriz Jacobiana del sistema. Para probar el siguiente resultado y por simplicidad se va a usar la notación introducida en [37].

**Teorema 4.2.1** *Sea  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suficientemente diferenciable en el convexo  $\Omega$  y  $\xi \in \Omega$  la solución de  $F(x) = 0$ . Suponiendo que  $F'(x)$  sea continua y no singular en  $\xi$ . Entonces, la sucesión  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  obtenida usando el esquema iterativo (4.8), converge a  $\xi$  con un orden de convergencia de al menos cuatro si  $\alpha = 1$ ,  $a_2 = a_1^2(b_2 - 2)$ ,  $b_1 = 1 - \frac{1}{a_1}$  y para todo  $a_1$  y  $b_2 \in \mathbb{R}$  con  $a_1 \neq 0$ . La ecuación del error es*

$$e_{k+1} = -[(a_1(b_2 - 2)^2 - 5)C_2^3 + C_2C_3]e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $e_k = x^{(k)} - \xi$  y  $C_q = \left( \frac{1}{q!} \right) [F'(\xi)]^{-1} F^{(q)}(\xi)$ ,  $q \geq 2$ .

**Demostración:** Usando el desarrollo en serie de Taylor alrededor de  $\xi$

$$F(x^{(k)}) = F'(\xi)(e_k + C_2e_k^2 + C_3e_k^3 + C_4e_k^4) + \mathcal{O}[e_k^5],$$

$$F'(x^{(k)}) = F'(\xi)(I + 2C_2e_k + 3C_3e_k^2 + 4C_4e_k^3) + \mathcal{O}[e_k^4],$$

y asumiendo

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = (I + X_2e_k + X_3e_k^2 + X_4e_k^3)[F'(\xi)]^{-1} + \mathcal{O}(e_k^4),$$

como  $[F'(x^{(k)})]^{-1} F'(x^{(k)}) = I$ , se obtiene  $X_2 = -2C_2$ ,  $X_3 = 2C_2^2 - 3C_3$  y  $X_4 = -4C_4 + 6C_3C_2 - 4C_2^2 + 6C_2C_3$ . Estas expresiones permiten obtener

$$y^{(k)} = x^{(k)} - \alpha [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) = \xi + (1 - \alpha)e^{(k)} - \alpha(A_2e_k^2 + A_3e_k^3 + A_4e_k^4) + \mathcal{O}[e_k^5], \quad (4.9)$$

donde  $A_2 = -C_2 - X_2$ ,  $A_3 = -C_3 - C_2X_2 - X_3$  y  $A_4 = -C_4 - C_3X_2 - C_2X_3 + X_4$ . Usando (4.9) y el desarrollo en serie de Taylor alrededor de  $\xi$  se obtiene

$$F(y^{(k)}) = F'(\xi)(B_1e_k + B_2e_k^2 + B_3e_k^3 + B_4e_k^4) + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $B_1 = \beta$ ,  $B_2 = (\alpha + \beta^2)C_2$ ,  $B_3 = -\alpha A_3 + 2\alpha\beta C_2A_3 + 3\alpha\beta^2 C_3C_2 + \beta^4 C_4$ ,  $B_4 = -\alpha A_4 + \alpha^2 C_2^3 - 2\alpha\beta C_2A_3 + 3\alpha\beta^2 C_3C_2 - 2 + \beta^4 C_4$  y  $\beta = 1 - \alpha$ . Se calcula el desarrollo en serie de Taylor de  $[x^{(k)}, y^{(k)}; F]$  utilizando (4.9)

$$[x^{(k)}, y^{(k)}; F] = F'(\xi) [I + D_2e_k + D_3e_k^2 + D_4e_k^3] + \mathcal{O}[e_k^4],$$

donde  $D_2 = (2 - \alpha)C_2$ ,  $D_3 = \alpha C_2^2 + (3 - 3\alpha + \alpha^2)C_3$  y  $D_4 = 2\alpha C_2C_3 + \alpha(3 - 2\alpha)C_3C_2 - (4 - 6\alpha + 4\alpha^2 - \alpha^3)C_4$ . Entonces,

$$M = (a_1 + a_2)I - \alpha a_2 [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F] = a_1 + E_2e_k + E_3e_k^2 + E_4e_k^3 + \mathcal{O}[e_k^4],$$

donde  $E_2 = \alpha a_2 C_2$ ,  $E_3 = \alpha C_2^3 + \alpha(\alpha - 3)C_3$  y  $E_4 = 6\alpha C_2C_3 - 2\alpha C_2^3 - 4C_4 + 5\alpha(2 - \alpha)C_3C_2 + (4 - 6\alpha + 4\alpha^2 - \alpha^3)C_3C_4$ . Se obtiene  $G_1(x^{(k)}, y^{(k)})$  como la inversa de la matriz  $M$

$$G_1(x^{(k)}, y^{(k)}) = I + Y_2e_k + Y_3e_k^2 + Y_4e_k^3 + \mathcal{O}[e_k^4],$$

donde  $Y_2 = \frac{\alpha a_2}{a_1} C_2$ ,  $Y_3 = \frac{\alpha a_2}{a_1^2} [(\alpha a_2 - 3)C_2^2 + (\alpha - 3)C_3]$ ,  $Y_4 = \frac{\alpha a_2}{a_1^3} [(8a_1 + 3\alpha a_1 a_2 + 3\alpha a_2 - \alpha^2 a_2^2)C_2^3]$  y

$$G_2(x^{(k)}, y^{(k)}) = b_1 + F_2e_k + F_3e_k^2 + F_4e_k^3 + F_5e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $F_2 = \alpha b_2 C_2$ ,  $F_3 = -\alpha b_2 [3C_2^2 - (\alpha - 3)C_3]$  y  $F_4 = b_2 [\alpha(6 - 4\alpha + \alpha^2)C_4 - 6\alpha(2 - \alpha)C_3C_2 + 4(\alpha + 1)C_2^3 - 6(\alpha + 1)C_2C_3]$ .

De esta forma se obtiene la ecuaci3n del error del m3todo propuesto

$$e_{k+1} = H_1e_k + H_2e_k^2 + H_3e_k^3 + H_4e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $H_1 = \frac{1}{a_1}(1 + a_1(b_1 - 1))(\alpha - 1)$ . Si  $\alpha = 1$ , entonces  $H_1 = 0$  y la ecuaci3n del error toma la forma

$$e_{k+1} = H_2'e_k^2 + H_3'e_k^3 + H_4'e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $H_1' = -\frac{1}{a_1}(1 + a_1(b_1 - 1))C_2$ . Se observa que si  $b_1 = \frac{a_1 - 1}{a_1}$ , entonces  $H_2' = 0$ . Si se introduce este valor de  $b_1$  se obtiene la nueva forma de la ecuaci3n del error

$$e_{k+1} = H_3'''e_k^3 + H_4'''e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5],$$

donde  $H_3''' = \frac{a_2 - a_1^2(b_2 - 2)}{a_1^2} C_2^2$ . Finalmente, si  $a_2 = a_1^2(b_2 - 2)$ , la ecuaci3n del error es

$$e_{k+1} = -[(a_1(b_2 - 2)^2 - 5)C_2^3 + C_2C_3]e_k^4 + \mathcal{O}[e_k^5]$$

por lo que la familia tiene un orden de convergencia de al menos cuatro.  $\square$

Con las suposiciones hechas en el resultado previo el esquema iterativo de la familia bi-param3trica (4.8) resulta

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - G(x^{(k)}, y^{(k)}) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde

$$G(x^{(k)}, y^{(k)}) = \frac{1}{a_1} \left[ (1 + a_1 b_2 - 2a_1)I - a_1(b_2 - 2)[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]^{-1} + \frac{1}{a_1} \left( (a_1 + a_1 b_2 - 1)I - a_1 b_2 [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right),$$

y  $a_1$  y  $b_2$  son parámetros libres, con  $a_1 \neq 0$ .

A continuación se proponen algunos casos particulares

1. Igual que en el caso escalar, si  $b_2 = 2$

$$G(x^{(k)}, y^{(k)}) = 3I - 2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F]$$

y el esquema resultante es la extensión del método de Chun para sistemas de ecuaciones no lineales (CM3).

2. Si  $a_1 = 1$  y  $b_2$  arbitrario

$$G(x^{(k)}, y^{(k)}) = [(b_2 - 1)I - (b_2 - 2)[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F]]^{-1} + b_2 I - b_2 [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F],$$

y se obtiene una familia uniparamétrica. Algunos casos particulares de esta familia son los siguientes

- (a) Si  $b_2 = 2$ , aparece el método de Chun transferido a sistemas de ecuaciones

$$x^{(k+1)} = y^{(k)} - \left( I - 2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}).$$

- (b) Si  $b_2 = 0$ , se obtiene el método de Ostrowski transferido a sistemas de ecuaciones (OM3)

$$x^{(k+1)} = y^{(k)} - \left( -I + 2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right)^{-1} [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}).$$

3. Para cualquier  $a_1 \neq 0$  y  $b_2 = 0$

$$G(x^{(k)}, y^{(k)}) = \frac{a_1 - 1}{a_1} I + \left[ a_1(1 - 2a_1)I + 2a_1^2 [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]^{-1}.$$

4. Para cualquier  $a_1 \neq 0$  y  $b_2 = 1$

$$x^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{1}{a_1} \left[ (1 - a_1)I + a_1 [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]^{-1} [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}) + \frac{1}{a_1} \left[ (2a_1 - 1)I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right] [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}).$$

## 4.3 Pruebas numéricas

Se va a mostrar el comportamiento numérico de los métodos propuestos, primero en varios sistemas de ecuaciones académicos, y posteriormente en un problema de aplicación. En las pruebas se ha utilizado precisión aritmética variable con 4000 dígitos de mantisa para las pruebas con sistemas no lineales, y con 1000 dígitos de mantisa en las pruebas con ecuaciones no lineales. Se ha utilizado el software MATLAB R2013a y el orden de convergencia computacional (ACOC) como aproximación del orden de convergencia

$$\rho = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| / \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|)}.$$

### 4.3.1 Problemas académicos

Se va a comprobar el comportamiento de diferentes miembros de la familia de métodos de Ostrowski-Chun, primero los métodos para ecuaciones con derivadas MA1, MB1 y MC1, posteriormente los métodos para ecuaciones sin derivadas MA2, MB2 y MC2, y finalmente los métodos para sistemas MA3, MB3 y MC3. Todos estos métodos se compararán con métodos conocidos. Las pruebas se realizarán sobre cuatro ecuaciones y cuatro sistemas académicos.

#### 1. Métodos para ecuaciones con derivadas:

$$\text{a) MA1: } a_1 = 2 \text{ y } b_2 = 1, x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2 - 2f(y_k)^2}{f(x_k)[f(x_k) - 2f(y_k)]} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)},$$

$$\text{b) MB1: } a_1 = -1 \text{ y } b_2 = 1, x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2 + 3f(x_k)f(y_k) + 6f(y_k)^2}{f(x_k)[f(x_k) + f(y_k)]} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)},$$

$$\text{c) MC1: } a_1 = -1 \text{ y } b_2 = 4, x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2 - 8f(y_k)^2}{f(x_k)[f(x_k) - 2f(y_k)]} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)},$$

donde  $y_k$  es el paso de Newton. En estas pruebas numéricas se van a comparar los métodos MA1, MB1 y MC1 con los métodos de Newton (NM), de Ostrowski (OM), de Chun (CM) y de Jarratt (JM). En las Tablas 4.1 y 4.2 se muestran los resultados para cada función de prueba,  $x_0$  es la estimación inicial y  $\xi$  es la solución aproximada. Se puede ver que se obtiene un ACOC igual a cuatro para todas las funciones de prueba y para los tres métodos estudiados, como se esperaba.

Tabla 4.1: Funciones de prueba y resultados numéricos para métodos con derivada

$f_1(x) = \sin x - x^2 + 1, x_0 = 1$ y $\xi \approx 1.409624004002596$				
Método	$\rho$	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
NM	2.0000	10	1.867e-273	5.205e-546
JM	4.0000	5	7.315e-139	1.307e-553
OM	4.0000	6	3.774e-196	4.751e-782
CM	4.0000	5	4.093e-139	1.268e-554
MA1	4.0000	5	1.389e-178	5.588e-716
MB1	4.0000	7	2.005e-959	2.697e-2,008
MC1	4.0000	5	3.938e-090	4.497e-358
$f_2(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2, x_0 = 0.8$ y $\xi \approx 0.257530285439861$				
Método	$\rho$	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
NM	2.0000	8	4.472e-190	7.062e-380
JM	4.0000	5	1.756e-258	1.622e-1,033
OM	4.0000	5	7.970e-271	1.909e-1,083
CM	4.0000	5	3.475e-286	3.363e-1,114
MA1	4.0000	5	8.287e-257	9.502e-1,027
MB1	4.0000	6	8.005e-1065	0.0
MC1	4.0000	5	4.385e-266	2.889e-1,064

Tabla 4.2: Funciones de prueba y resultados numéricos para métodos con derivada

$f_3(x) = \cos x - x, x_0 = 1$ y $\xi \approx 0.739085133215161$				
Método	$\rho$	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
NM	2.0000	8	7.118e-167	1.872e-333
JM	4.0000	5	4.214e-296	1.350e-1,183
OM	4.0000	5	1.102e-268	1.693e-1,073
CM	4.0000	5	1.632e-299	2.793e-1,197
MA1	4.0000	5	1.594e-309	1.599e-1,237
MB1	4.0000	6	1.026e-1093	1.349e-2,008
MC1	4.0000	5	2.233e-273	2.409e-1,092
$f_4(x) = \cos x - x \exp x + x^2, x_0 = 0.5$ y $\xi \approx 0.639154096332008$				
Método	$\rho$	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
NM	2.0000	9	1.068e-243	2.168e-486
JM	4.0000	5	4.140e-293	1.019e-1,170
OM	4.0000	5	3.505e-182	7.589e-726
CM	4.0000	5	5.909e-289	4.679e-1,154
MA1	4.0000	5	3.485e-254	1.219e-1,014
MB1	4.0000	5	1.929e-770	1.349e-2,008
MC1	4.0000	5	2.034e-196	6.597e-783

## 2. Métodos para ecuaciones libres de derivadas:

Se van a estudiar los miembros de la familia libre de derivada

- a) **MA2**:  $a_1 = 2$  y  $b_2 = 1$ ,  $x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2 - 2f(y_k)^2}{f(x_k)[f(x_k) - 2f(y_k)]} \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}$ ,
- b) **MB2**:  $a_1 = -1$  y  $b_2 = 1$ ,  $x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2 + 3f(x_k)f(y_k) + 6f(y_k)^2}{f(x_k)[f(x_k) + f(y_k)]} \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}$ ,
- c) **MC2**:  $a_1 = -1$  y  $b_2 = 4$ ,  $x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)^2 - 8f(y_k)^2}{f(x_k)[f(x_k) - 2f(y_k)]} \frac{f(y_k)}{f[z_k, x_k]}$ ,

donde  $y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[z_k, x_k]}$ ,  $f[z_k, x_k] = \frac{f(z_k) - f(x_k)}{z_k - x_k}$  y  $z_k = x_k + f(x_k)^2$ . En este caso se compararán con otros métodos libres de derivada: el método de Steffensen (SM), el LZM, el CT4 (con  $\gamma = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$  y  $d = 0$ ), el método de Ostrowski en su versión libre de derivada (OM2) y el de Chun en su versión libre de derivada (CH2). Los resultados obtenidos se muestran en las Tablas 4.3 y 4.4.

Tabla 4.3: Funciones de prueba y resultados numéricos para los métodos libres de derivada

$f_1(x) = \sin x - x^2 + 1$ , $x_0 = 1$ y $\xi \approx 1.409624004002596$				
Método	$\rho$	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
<b>ST</b>	2.0000	10	3.249e-274	2.615e-547
<b>LZM</b>	4.0000	5	5.953e-239	5.950e-954
<b>CT4</b>	4.0000	5	6.200e-151	1.855e-601
<b>OM2</b>	4.0000	6	5.935e-277	6.793e-1,105
<b>CM2</b>	4.0000	5	1.012e-91	3.771e-364
<b>MA2</b>	4.0000	6	8.754e-246	3.492e-980
<b>MB2</b>	4.0000	6	2.311e-240	5.332e-959
<b>MC2</b>	4.0000	5	3.938e-90	4.497e-358
$f_2(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2$ , $x_0 = 0.8$ y $\xi \approx 0.257530285439861$				
Método	$\rho$	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
<b>ST</b>	2.0000	9	3.979e-175	1.554e-349
<b>LZM</b>	4.0000	5	4.687e-163	6.775e-651
<b>CT4</b>	4.0000	5	1.336e-166	4.202e-665
<b>OM2</b>	-	n.c.	-	-
<b>CM2</b>	4.0000	10	4.367e-111	1.697e-442
<b>MA2</b>	-	n.c.	-	-
<b>MB2</b>	4.0000	5	4.436e-266	3.025e-1,064
<b>MC2</b>	4.0000	5	4.385e-266	2.889e-1,064



Tabla 4.4: Funciones de prueba y resultados numéricos para los métodos libres de derivada

$f_3(x) = \cos x - x$ , $x_0 = 1$ y $\xi \approx 0.739085133215161$				
Método	$\rho$	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
<b>ST</b>	2.0000	8	4.380e-178	4.776e-356
<b>LZM</b>	4.0000	4	1.190e-84	1.460e-338
<b>CT4</b>	4.0000	5	6.809e-309	4.167e-1,235
<b>OM2</b>	4.0000	5	2.492e-238	7.160e-952
<b>CM2</b>	4.0000	5	1.281e-286	3.064e-1,145
<b>MA2</b>	4.0000	5	1.433e-231	8.582e-925
<b>MB2</b>	4.0000	5	1.154e-237	1.717e-1,093
<b>MC2</b>	4.0000	5	2.233e-273	2.409e-1,092
$f_4(x) = \cos x - x \exp x + x^2$ , $x_0 = 0.5$ y $\xi \approx 0.639154096332008$				
Método	$\rho$	Iter	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $
<b>ST</b>	2.0000	9	1.412e-219	5.402e-438
<b>LZM</b>	4.0000	5	1.071e-256	1.266e-1,024
<b>CT4</b>	4.0000	5	1.242e-276	1.671e-1,104
<b>OM2</b>	4.0000	5	2.656e-209	4.187e-834
<b>CM2</b>	4.0000	5	3.987e-220	9.449e-878
<b>MA2</b>	4.0000	5	2.132e-207	1.980e-826
<b>MB2</b>	4.0000	5	3.318e-193	4.676e-770
<b>MC2</b>	4.0000	5	2.034e-196	6.597e-783

También en este caso se obtiene un ACOC igual a cuatro para todas las funciones de prueba y para los tres métodos estudiados.

### 3. Métodos para sistemas:

En el caso multivariable se van a estudiar los métodos de la familia (4.10) correspondientes a los siguientes valores de  $a_1$  y  $b_2$ :

- a) **MA3**:  $a_1 = \frac{5}{4}$  y  $b_2 = 0$
- b) **MB3**:  $a_1 = 1$  y  $b_2 = 1$
- c) **MC3**:  $a_1 = 1$  y  $b_2 = 3$

En estas pruebas numéricas se compara la extensión a sistemas de los métodos de Ostrowski (OM3) y Chun (CM3) y los métodos MA3, MB3 y MC3, con el método de Newton (NM), Jarratt (JM) y Traub (TM) en su versión multivariable. Según se propone en [21], para preservar el orden de convergencia local se usan diferencias divididas simétricas en la implementación del operador diferencia dividida, que se puede ver en el Anexo 9.5.

En las Tablas 4.5 y 4.6 se pueden ver los resultados obtenidos para los miembros de la familia sobre todos los sistemas de prueba, además del ACOC, se muestra también el número de iteraciones necesarias y dos estimaciones del error,  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$  y  $\|F(x^{(k+1)})\|$ . El criterio de parada ha sido que el valor de la función en la aproximación de la raíz o la diferencia entre dos iterados sucesivos sea menor que  $10^{-700}$ .

$F_1(x_1, x_2) = (\exp x_1 \exp x_2 + x_1 \cos x_2, x_1 + x_2 - 1)$ $x^{(0)} = (3, -2)$ y $\xi_1 \approx 3.4675009642402$ , $\xi_2 \approx -2.4675009642402$				
Método	$\rho$	iter	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $
<b>NM</b>	2.0000	9	1.141e-397	4.802e-795
<b>TM</b>	3.0000	6	2.905e-336	5.671e-1008
<b>JM</b>	4.0000	5	5.597e-254	5.671e-1008
<b>OM3</b>	4.0000	5	3.978e-266	5.671e-1008
<b>CM3</b>	4.0000	5	9.701e-261	5.671e-1008
<b>MA3</b>	4.0000	5	3.749e-268	9.301e-1072
<b>MB3</b>	4.0000	5	7.966e-262	3.762e-1046
<b>MC3</b>	4.0000	5	7.972e-262	3.773e-1046

$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_3 + x_4(x_2 + x_3), x_1x_3 + x_4(x_1 + x_3),$ $x_1x_2 + x_4(x_1 + x_2), x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 1), x^{(0)} = (1, 1, 1, -0.5)$ y $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.5773502691896257$ , $\xi_4 = -0.2886751345948129$				
Método	$\rho$	iter	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $
<b>NM</b>	2.0000	11	4.407e-586	3.007e-1008
<b>TM</b>	3.0000	7	3.003e-341	2.835e-1008
<b>JM</b>	4.0000	6	4.407e-586	2.835e-1008
<b>OM3</b>	4.0000	6	4.407e-586	2.835e-1008
<b>CM3</b>	4.0000	6	9.920e-425	0.0
<b>MA3</b>	4.9996	5	7.717e-340	4.202e-1697
<b>MB3</b>	4.0000	6	6.486e-447	1.508e-1785
<b>MC3</b>	4.0000	6	1.555e-442	4.982e-1768

Tabla 4.5: Funciones de prueba y resultados para los sistemas  $F_1$  y  $F_2$

$F_3(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_1 - x_2^2 - 1, -\sin x_1 + x_2),$ $x^{(0)} = (-0.15, -0.15)$ y $\xi_1 \approx -0.8452567390376772, \xi_2 \approx -0.7481414932526368$				
Método	$\rho$	iter	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $
<b>NM</b>	1.9995	11	3.892e-594	0.0
<b>TM</b>	2.9972	7	4.061e-266	6.803e-798
<b>JM</b>	3.9754	6	2.257e-476	5.845e-1008
<b>OM3</b>	3.9874	6	8.591e-480	5.845e-1008
<b>CM3</b>	3.9770	6	2.545e-240	3.598e-960
<b>MA3</b>	3.9831	5	6.832e-184	1.298e-734
<b>MB3</b>	4.0078	6	1.531e-274	2.237e-1096
<b>MC3</b>	4.0097	6	3.831e-244	6.833e-974
$F_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9, x_1x_2x_3 - 1, x_1 + x_2 - x_3^2),$ $x^{(0)} = (2, -1.5, -0.5)$ y $\xi_1 \approx 2.140258122005175, \xi_2 \approx -2.090294642255235,$ $\xi_3 \approx -0.2235251210713019$				
Método	$\rho$	iter	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $
<b>NM</b>	2.0002	11	4.822e-478	3.078e-955
<b>TM</b>	3.0000	8	1.534e-311	3.709e-933
<b>JM</b>	4.0009	6	3.163e-477	4.454e-1007
<b>OM3</b>	4.0010	6	8.695e-479	2.286e-1007
<b>CM3</b>	3.9996	7	2.695e-475	2.273e-1007
<b>MA3</b>	3.9964	6	7.193e-566	2.696e-2008
<b>MB3</b>	3.9998	7	2.890e-628	2.224e-2007
<b>MC3</b>	4.0000	10	3.285e-288	1.729e-1150

Tabla 4.6: Funciones de prueba y resultados para los sistemas  $F_3$  y  $F_4$ 

En general los resultados numéricos confirman los teóricos. Los métodos propuestos tienen igual o mejor desempeño que el de Jarratt, un método también de orden 4. Además, las versiones transferidas a sistemas de los métodos de Ostrowski y Chun también presentan un buen comportamiento.

### 4.3.2 Problema de la interacción molecular

Para abordar el problema de la interacción molecular (ver [34])

$$\begin{aligned}
 u_{xx} + u_{yy} &= u^2, & (x, y) &\in [0, 1] \times [0, 1] \\
 u(x, 0) &= 2x^2 - x + 1, & u(x, 1) &= 2 \\
 u(0, y) &= 2y^2 - y + 1, & u(1, y) &= 2.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

es necesario resolver un problema de valores en la frontera con una ecuación en derivadas parciales de segundo orden. Para estimar su solución de forma numérica se han utilizado diferencias divididas centrales para transformar el problema en un sistema de ecuaciones no lineales, que se resolverá con los métodos que se han propuesto.

El proceso de discretización por diferencias centrales lleva al sistema de ecuaciones no lineal

$$u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 u_{i,j}^2 \quad i = 1, \dots, nx, \quad j = 1, \dots, ny, \quad (4.12)$$

donde  $u_{i,j}$  denota la estimación de las incógnitas  $u(x_i, y_j)$ ,  $x_i = ih$  con  $i = 0, 1, \dots, nx$ ,  $y_j = jk$  y  $j = 0, 1, \dots, ny$ , son los nodos en ambas variables,  $nx$  y  $ny$  son el número de subintervalos, y  $h = \frac{1}{nx}$  y  $k = \frac{1}{ny}$ .

En este caso se fija  $nx = ny = 4$ , por lo que se genera una malla de  $5 \times 5$ . Como las condiciones de contorno proporcionan el valor de las incógnitas en los nodos  $(x_0, y_j)$ ,  $(x_4, y_j)$  para todo  $j$ , y también en  $(x_i, y_0)$ ,  $(x_i, y_4)$  para todo  $i$ , quedan solamente nueve incógnitas, que se pueden renombrar

$$x_1 = u_{1,1}, \quad x_2 = u_{2,1}, \quad x_3 = u_{3,1}, \quad x_4 = u_{1,2}, \quad x_5 = u_{2,2}, \quad x_6 = u_{3,2}, \quad x_7 = u_{1,3}, \quad x_8 = u_{2,3}, \quad x_9 = u_{3,3}.$$

Por lo tanto, el sistema se puede expresar de la forma

$$F(x) = Ax + \phi(x) - b = 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} M & -I & 0 \\ -I & M & -I \\ 0 & -I & M \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \phi(x) = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_9^2)^T,$$

$I$  es la matriz identidad  $3 \times 3$  y  $b = (\frac{7}{4}, 1, \frac{27}{8}, 1, 0, 2, \frac{27}{8}, 2, 4)^T$ . Se va a comprobar el rendimiento de los métodos mediante pruebas numéricas, utilizando aritmética de precisión variable con 1000 dígitos de mantisa y con criterio de parada  $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-700}$  o  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-700}$ . En la Tabla 4.7 se presentan los resultados numéricos para el problema de la interacción molecular (4.12). Se muestran el orden de convergencia computacional, el número de iteraciones, la diferencia entre las dos últimas iteraciones y el valor de la función en la última iteración.

$x^{(0)} = (1, \dots, 1)^T$				
Método	$\rho$	iter	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $
<b>NM</b>	1.9999	9	1.482e-413	6.448e-828
<b>TM</b>	2.9988	6	1.153e-355	2.545e-1007
<b>JM</b>	3.9954	5	1.482e-413	1.976e-1007
<b>OM3</b>	3.9964	5	1.482e-413	1.618e-1007
<b>CM3</b>	3.9959	5	1.998e-353	1.618e-1007
<b>MA3</b>	4.0519	5	5.362e-510	1.707e-2007
<b>MB3</b>	3.9960	5	7.123e-362	1.049e-1449
<b>MC3</b>	3.9960	5	3.110e-362	3.811e-1451

Tabla 4.7: Resultados numéricos para el problema de la interacción molecular

Se puede ver como todos los nuevos métodos convergen a la solución del problema, que aparece en la Tabla 4.8. También se puede observar que el menor error corresponde al método MA3, que duplica el número de dígitos exactos respecto al resto de los métodos.

	$\xi$
$u_{1,1}$	1.0259117...
$u_{2,1}$	1.2097139...
$u_{3,1}$	1.5167030...
$u_{1,2}$	1.2097139...
$u_{2,2}$	1.3877038...
$u_{3,2}$	1.6258725...
$u_{1,3}$	1.5167030...
$u_{2,3}$	1.6258725...
$u_{3,3}$	1.7642995...

Tabla 4.8: Solución aproximada

Los resultados numéricos confirman el orden de convergencia teórico. Se puede concluir que los nuevos métodos iterativos tienen un buen comportamiento al resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales. En el ejemplo de aplicación, los nuevos métodos han mostrado buena estabilidad y precisión en los resultados.

En este capítulo se han presentado dos nuevas familias de métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales, con y sin derivadas. Además, de la primera familia se ha obtenido una clase de métodos iterativos que permiten resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

---

# Análisis dinámico de la familia biparamétrica de Ostrowski-Chun

---

En este capítulo se va a realizar un estudio dinámico de la familia biparamétrica de métodos iterativos de Ostrowski-Chun (OC), definida en el Capítulo 4<sup>1</sup>.

En el Capítulo 3 se estudió la dinámica compleja de una familia uniparamétrica de métodos iterativos, la familia de King. En este capítulo se va a hacer un análisis similar con una familia biparamétrica: se va a estudiar un polinomio genérico de grado 2, ya que como se probará más adelante, la familia de Ostrowski-Chun cumple el Teorema del Escalado, que permite generalizar el comportamiento dinámico de la familia sobre cualquier polinomio cuadrático.

Al tratarse de una familia biparamétrica será necesario adaptar algunas de las herramientas dinámicas que se introdujeron en el Capítulo 3. En particular, en los planos de parámetros y en los diagramas de estabilidad se van a considerar solamente valores reales de los parámetros.

Como se vio en el Capítulo 4, la familia de Ostrowski-Chun puede ser extendida a sistemas de ecuaciones, por lo que finalmente se van a aplicar diferentes miembros de la familia a un problema aplicado, la resolución de la ecuación de Bratu previa discretización, para confirmar los resultados del estudio dinámico.

## 5.1 Teorema del escalado y análisis de los puntos fijos y críticos

Se va a empezar probando que la familia de métodos OC cumple el Teorema del Escalado, posteriormente se hará un estudio analítico de los puntos fijos y de los puntos críticos y se usarán herramientas dinámicas como planos dinámicos y planos de parámetros para confirmar los resultados.

En el Capítulo 4 se diseñó la familia biparamétrica de métodos óptimos

---

<sup>1</sup>Resultados parciales de este capítulo forman parte del artículo *Stability of a fourth order bi-parametric family of iterative methods* publicado en Journal of Computational and Applied Mathematics [72] y presentados en el congreso internacional CMMSE 2015

$$z_{k+1} = y_k - \frac{1}{a_1} \left[ \frac{f(z_k)}{f(z_k) + a_1(b_2 - 2)f(y_k)} + \frac{(a_1 - 1)f(z_k) + a_1 b_2 f(y_k)}{f(z_k)} \right] \frac{f(y_k)}{f'(z_k)},$$

donde  $y_k$  es el paso de Newton. El operador  $\bar{K}_f$  correspondiente a la clase OC es

$$\bar{K}_f = y - \frac{1}{a_1} \left[ \frac{f(z)}{f(z) + a_1(b_2 - 2)f(y)} + \frac{(a_1 - 1)f(z) + a_1 b_2 f(y)}{f(z)} \right] \frac{f(y)}{f'(z)}, \quad (5.1)$$

donde  $y = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$  para  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ .

El Teorema del Escalado permite equiparar el comportamiento dinámico de dos operadores si están relacionados por una transformación afín.

**Teorema 5.1.1 (Teorema del Escalado para la familia de OC)** Sea  $f(z)$  una función analítica en la esfera de Riemann y  $T(z) = \alpha z + \beta$  una transformación afín. Si  $g(z) = (f \circ T)(z)$ , entonces  $(T \circ \bar{K}_g \circ T^{-1})(z) = \bar{K}_f(z)$  para cualquier  $z$ , es decir,  $\bar{K}_f$  es analíticamente conjugada a  $\bar{K}_g$  mediante  $T$ .

**Demostración:** Es necesario demostrar que

$$(T \circ \bar{K}_g \circ T^{-1})(z) = \bar{K}_f(z),$$

es decir,

$$(T \circ \bar{K}_g)(z) = (\bar{K}_f \circ T)(z). \quad (5.2)$$

El lado izquierdo de la ecuación (5.2) resulta

$$(T \circ \bar{K}_g)(z) = \alpha z - \alpha \frac{g(z)}{g'(z)} - \frac{\alpha}{a_1} \left( \frac{g(z)}{g(z) + a_1(b_2 - 1)g(y)} + \frac{(a_1 - 1)g(z) + a_1 b_2 g(y)}{g(z)} \right) \frac{g(y)}{g'(z)} + \beta.$$

Para desarrollar el lado derecho se va a usar que de la definición de  $g$  se tiene

$$g(z) = (f \circ T)(z) = f(\alpha z + \beta). \quad (5.3)$$

Aplicando la regla de la cadena se puede escribir

$$g'(z) = f'(T(z))T'(z) = f'(T(z))\alpha. \quad (5.4)$$

Además,  $y = N_g(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$  es el iterado de Newton. En el Capítulo 2 se ha probado que el método de Newton cumple el Teorema del Escalado, es decir

$$f(N_f \circ T)(z) = f(T \circ N_g)(z) = g(y),$$

por tanto, el lado derecho de (5.2) es

$$(\bar{K}_f \circ T)(z) = \alpha z - \alpha \frac{g(z)}{g'(z)} + \beta - \frac{1}{a_1} \left( \frac{g(z)}{g(z) + a_1(b_2 - 1)g(y)} + \frac{(a_1 - 1)g(z) + a_1 b_2 g(y)}{g(z)} \right) \alpha \frac{g(y)}{g'(z)},$$

que coincide con el lado izquierdo de (5.2), como se pretendía demostrar.  $\square$



Los Teoremas 5.1.1 y 2.2.4 establecen que un polinomio cuadrático puede transformarse mediante una transformación afín sin cambios cualitativos en el comportamiento dinámico del operador asociado, por lo que para estudiar su comportamiento dinámico es suficiente utilizar el polinomio cuadrático  $p(z) = z^2 + c$  sin pérdida de generalidad.

Aplicando el operador (5.1) sobre  $p(z)$  se obtiene la función racional

$$K_{a_1, b_2}(c, z) = \frac{-1}{32z^5 (4z^2 + a_1(b_2 - 2)(c + z^2))} [8z^2 (c^3 + 5c^2z^2 + 15cz^4 - 5z^6) + a_1 (c + z^2) (b_2^2 (c + z^2)^3 - 2b_2 (c^3 + c^2z^2 - 9cz^4 + 7z^6) - 8z^2 (c^2 + 6cz^2 - 3z^4))], \quad (5.5)$$

que depende de  $c$  y de los parámetros de la familia. Considerando la transformación de Möbius

$$h(z) = \frac{z - i\sqrt{c}}{z + i\sqrt{c}}, \quad (5.6)$$

con propiedades

$$\text{i) } h(i\sqrt{c}) = 0, \quad \text{ii) } h(-i\sqrt{c}) = \infty, \quad \text{iii) } h(\infty) = 1.$$

se obtiene la clase de conjugación cuyo representante es  $O_{a_1, b_2}(z) = (h \circ K_{a_1, b_2} \circ h^{-1})(z)$ , donde  $O_{a_1, b_2}(z)$  es igual a

$$\frac{-z^4 ((z+1)^2 (z^2 + 4z + 5) - a_1 (b_2^2 - b_2 (z^3 + 4z^2 + 5z + 4) + 2(z+1)^2 (z+2)))}{z^4 (a_1 (b_2 - 2)^2 - 5) + z^3 (-5a_1 (b_2 - 2) - 14) - 2z^2 (2a_1 (b_2 - 2) + 7) - z (a_1 (b_2 - 2) + 6) - 1}$$

que ya no depende de  $c$ .

Los puntos fijos de  $O_{a_1, b_2}(z)$  son las soluciones de la ecuación  $O_{a_1, b_2}(z) = z$ , es decir:  $z = 0$ ,  $z = \infty$ , que están asociados con las raíces de  $p(z)$ , y los puntos fijos extraños  $z = 1$ ,  $s_1(a_1, b_2)$ ,  $s_2(a_1, b_2)$ ,  $s_3(a_1, b_2)$ ,  $s_4(a_1, b_2)$ ,  $s_5(a_1, b_2)$ ,  $s_6(a_1, b_2)$ , donde los  $s_i$ , dependen de  $a_1$  y  $b_2$ , y son las raíces del polinomio

$$1 + (7 - 2a_1 + a_1 b_2)z + (21 - 10a_1 + 5a_1 b_2)z^2 + (30 - 16a_1 + 6a_1 b_2 + a_1 b_2^2)z^3 + (21 - 10a_1 + 5a_1 b_2)z^4 + (7 - 2a_1 + a_1 b_2)z^5 + z^6.$$

Las dos raíces de  $p(z)$  después de la transformación de Möbius,  $z = 0$  y  $z = \infty$ , son siempre puntos fijos superatractores, ya que el orden de convergencia de la familia es 4, pero la estabilidad de los puntos fijos extraños depende de los valores de  $a_1$  y  $b_2$ .

Para comprobar la estabilidad de los puntos fijos se pueden usar diagramas de estabilidad, mostrados en las Figuras 5.1 y 5.2, que se construyen como una representación tridimensional de  $|O'_{a_1, b_2}(z)|$  en términos de valores reales de  $a_1$  y  $b_2$ .

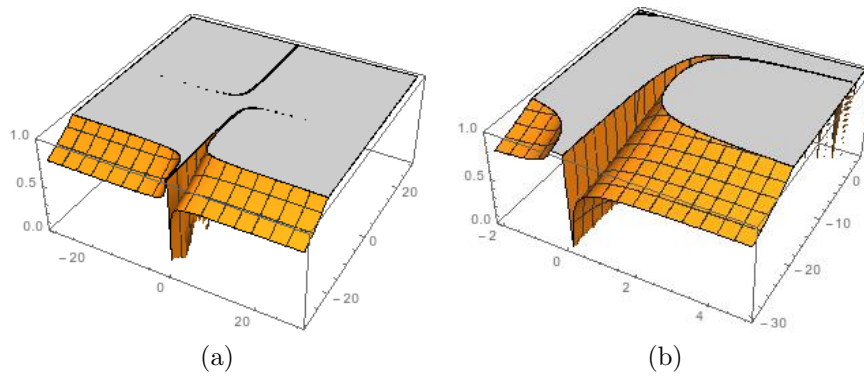


Figura 5.1: Diagrama de estabilidad de  $z = 1$  (a) y detalle (b)

El hecho de que los puntos fijos extraños sean atractores es un comportamiento que no es deseable, ya que el método podría converger a ellos en vez de a una raíz de la ecuación. Para  $z = 1$ , en la Figura 5.1b, y para los otros puntos fijos extraños, en las Figuras 5.2 y 5.3. Se observa que existen combinaciones de parámetros que pueden hacer que todos los puntos fijos extraños sean repulsivos simultáneamente. Se espera que estas combinaciones definan métodos iterativos estables debido a la falta de puntos fijos extraños atractores.

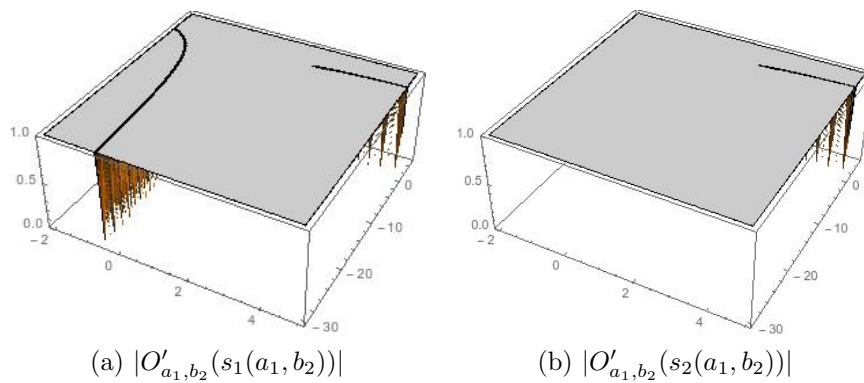


Figura 5.2: Diagramas de estabilidad de los puntos fijos extraños  $s_i(a_1, b_2)$

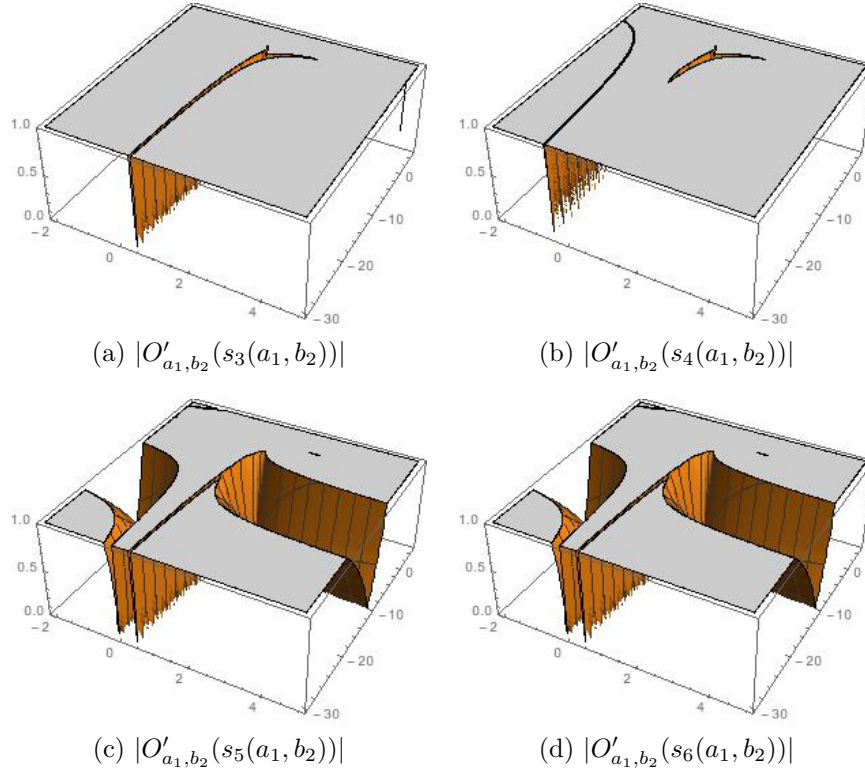


Figura 5.3: Diagramas de estabilidad de los puntos fijos extraños  $s_i(a_1, b_2)$

Es evidente que las raíces del polinomio después de la transformación de Möebius,  $z = 0$  y  $z = \infty$ , son puntos críticos que tienen su propio componente de Fatou, pero existen en la familia otros puntos críticos diferentes de  $z = 0$  y  $z = \infty$ , puntos críticos libres, algunos de ellos dependientes de los valores de los parámetros. Los puntos críticos libres de  $O_{a_1, b_2}(z)$  son  $z = -1$  y

$$cr_{1,2}(a_1, b_2) = \frac{1}{16} \left( \frac{E}{F} - \sqrt{\frac{G}{F^2}} \mp \sqrt{2 \left( \frac{E^2}{F^2} + \frac{-E\sqrt{G/F^2}}{F} + \frac{H}{F} - 64 \right)} \right),$$

$$cr_{3,4}(a_1, b_2) = \frac{1}{16} \left( \frac{E}{F} + \sqrt{\frac{G}{F^2}} \mp \sqrt{2 \left( \frac{E^2}{F^2} + \frac{E\sqrt{G/F^2}}{F} + \frac{H}{F} - 64 \right)} \right),$$

donde  $cr_1(a_1, b_2) = \frac{1}{cr_2(a_1, b_2)}$ ,  $cr_3(a_1, b_2) = \frac{1}{cr_4(a_1, b_2)}$  y

$$E = -3a_1^2(b_2 - 2)^3 - 2a_1(b_2^2 - 24b_2 + 44) + 80,$$

$$F = a_1(b_2 - 2)^2 - 5,$$

$$G = a_1^2(b_2 - 2)^3(9a_1^2(b_2 - 2)^3 + 4a_1(19b_2^2 - 56b_2 + 36) + 196b_2 - 72),$$

$$H = 32(a_1^2(b_2 + 3)(b_2 - 2)^2 + a_1(b_2^2 + 16b_2 - 36) + 30).$$

El comportamiento asintótico de los puntos críticos juega un papel importante en la dinámica del operador, ya que como se vio en el Capítulo 2, hay al menos un punto crítico asociado con cada componente invariante de Fatou. En la próxima sección se construirán los planos de parámetros asociados a los puntos críticos libres independientes.

## 5.2 Planos de parámetros

Como la existencia de las cuencas de convergencia viene determinada por el comportamiento en el límite de los puntos críticos, se van a dibujar planos de parámetros para observar el comportamiento del método cuando la estimación inicial sea un punto crítico. El espacio de parámetros de un punto crítico libre se obtiene haciendo corresponder cada punto del plano de parámetros con valores reales de  $a_1$  y  $b_2$ , de manera que cada punto del plano representa un miembro diferente de la familia de métodos iterativos. Los planos de parámetros de la Figura 5.4 han sido creados usando una versión vectorizada de los programas de MATLAB utilizados en [25], que se puede ver en el Anexo 9.7. Se han usado  $800 \times 800$  combinaciones diferentes de  $a_1$  y  $b_2$ . Los puntos del plano que aparecen en negro corresponden a valores de los parámetros para los que el método iterativo asociado no converge a cero o infinito con una tolerancia de  $10^{-3}$  después de 500 iteraciones, tomando como estimación inicial el punto crítico libre. Los puntos que aparecen en rojo convergen a cero o infinito, es decir, corresponden a métodos estables.

Como  $cr_1(a_1, b_2) = \frac{1}{cr_2(a_1, b_2)}$  y  $cr_3(a_1, b_2) = \frac{1}{cr_4(a_1, b_2)}$ , y el punto crítico  $z = -1$  es una preimagen del punto fijo  $z = 1$ , existen solamente dos puntos críticos libres independientes. En la Figura 5.4 se pueden ver los planos de parámetros para dichos puntos.

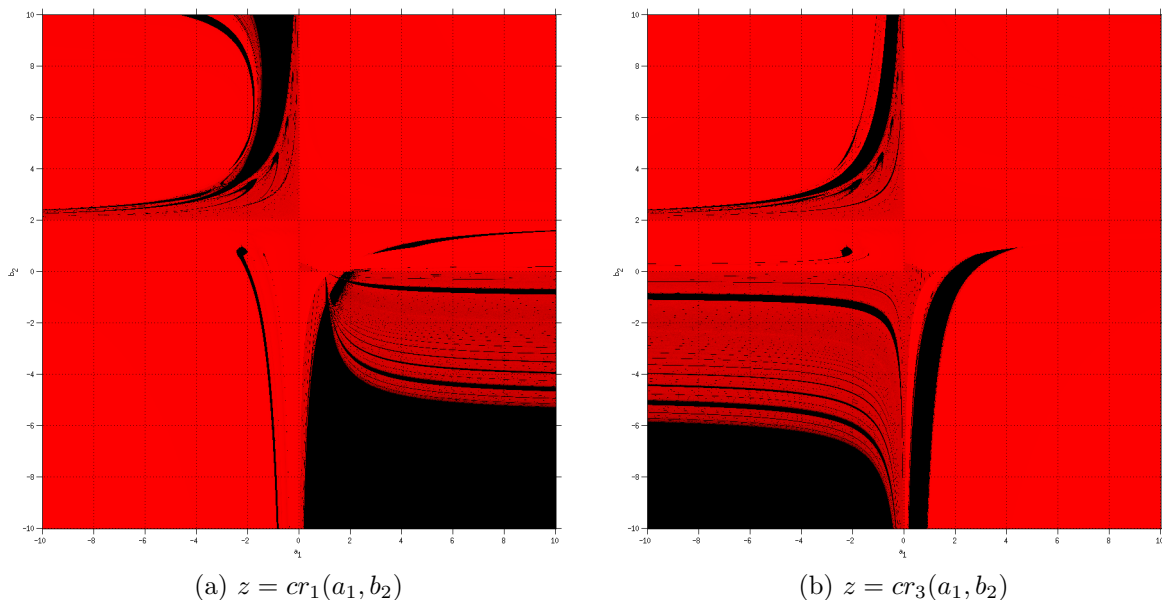


Figura 5.4: Planos de parámetros

Las combinaciones de parámetros que corresponden a las regiones en rojo de los dos planos de parámetros son métodos estables, que conducen a una de las raíces, mientras que las combi-

naciones que corresponden a regiones en negro en alguno de ellos pueden conducir a puntos fijos extraños o a órbitas periódicas. En este sentido, se puede afirmar que es posible encontrar combinaciones estables de los parámetros  $a_1$  y  $b_2$ , por ejemplo en la mayor parte del primer cuadrante de las Figuras 5.4, donde, según los diagramas de estabilidad, no existen puntos fijos extraños atractores.

### 5.3 Planos dinámicos

Los planos dinámicos de las Figuras 5.5 y 5.6 han sido generados usando una malla de  $400 \times 400$  puntos del plano complejo cuyos valores se han usado como estimación inicial, y muestran las cuencas de atracción correspondientes a diferentes elecciones de los parámetros. Se han escogido combinaciones de parámetros tanto en la región en rojo como en la región en negro de la Figura 5.4 para estudiar sus planos dinámicos asociados. En azul aparecen los puntos cuyas órbitas convergen a infinito y en naranja los puntos cuyas órbitas convergen a cero, con una tolerancia de  $10^{-3}$ . Los colores distintos del azul o naranja indican convergencia a puntos fijos extraños, mientras que el color negro indica que no hay convergencia a ningún punto fijo después de al menos 40 iteraciones. Los planos dinámicos de esta sección se han generado con un programa que se puede ver en el Anexo 9.6.

Tras la transformación de Möbius, las dos raíces de  $p(z)$  son  $z = 0$ , en la cuenca naranja, y  $z = \infty$ , en la cuenca azul. Las Figuras 5.5a, 5.5b y 5.5c representan planos dinámicos que corresponden a  $a_1 = 1$  y  $b_2 = 0$  (método de Ostrowski) a  $a_1 = 1$  y  $b_2 = 2$  (método de Chun) y al método  $a_1 = 1$  y  $b_2 = 1$  respectivamente, los tres en el primer cuadrante del plano de parámetros, en estos casos solamente aparecen las cuencas de atracción asociadas con las raíces de  $p(z)$ .

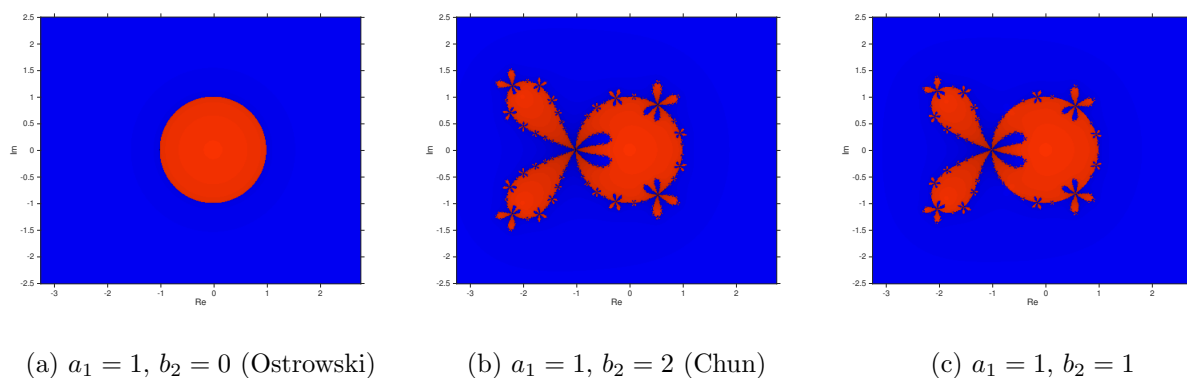


Figura 5.5: Planos dinámicos para elementos estables de la familia

En la Figura 5.6 se han seleccionado métodos en las regiones en negro del plano de parámetros, por ejemplo  $a_1 = -1$ ,  $b_2 = 3$  (Figura 5.6a), donde se observan pequeñas áreas de color negro en la frontera de las dos cuencas de atracción, en este caso el método converge a una órbita periódica de periodo 2. Si se selecciona  $a_1 = 1$  y  $b_2 = -2$  y  $a_1 = -0.75$  y  $b_2 = 8$  en el espacio de parámetros, ambos en la región en negro, se obtienen los planos dinámicos que se muestran en las Figuras 5.6b y 5.6c. En la Figura 5.6b aparecen cinco cuencas de atracción, tres de ellas

corresponden a puntos fijos extraños, mientras que en la Figura 5.6c la cuenca de atracción del punto fijo extraño  $z = 1$  es mayor que las cuencas de las raíces del polinomio.

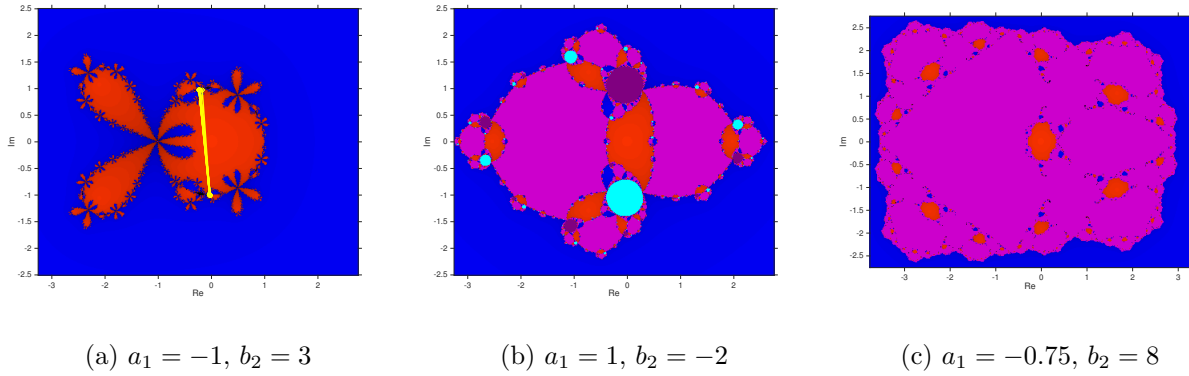


Figura 5.6: Planos dinámicos de elementos inestables de la familia

Una vez terminado el análisis de la estabilidad de la familia sobre polinomios cuadráticos, se va a proceder a probar la validez de los resultados obtenidos con un problema aplicado, la solución de la ecuación de Bratu.

## 5.4 Solución numérica de la ecuación de Bratu

Como se probó en el Capítulo 4, la familia de Ostrowski-Chun puede ser extendida para resolver sistemas de ecuaciones  $F(x) = 0$ , donde  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Esto puede llevarse a cabo expresando

$$\frac{f(y_k)}{f(x_k)} = 1 - \alpha \frac{f[x_k, y_k]}{f'(x_k)},$$

para evitar la evaluación funcional en el denominador. La expresión iterativa resultante es

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= x^{(k)} - \alpha [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - \left( G_1(x^{(k)}, y^{(k)}) + G_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \right) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} G_1(x^{(k)}, y^{(k)}) &= \frac{1}{a_1} \left[ (1 + a_1 b_2 - 2a_1)I - a_1(b_2 - 2)[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]^{-1}, \\ G_2(x^{(k)}, y^{(k)}) &= \frac{1}{a_1} \left[ (a_1 + a_1 b_2 - 1)I - a_1 b_2 [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]. \end{aligned}$$

En esta sección se va a obtener una solución numérica del *problema de Bratu* [28] aplicando diferentes elementos de la familia de OC. La ecuación de Bratu aparece en una gran variedad

de aplicaciones, como por ejemplo el modelo de ignición de motores de combustión interna, la teoría de reacciones químicas, o el modelo de Chandrasekhar de la expansión del universo, entre otros. En el caso unidimensional, el problema de Bratu se reduce a

$$\frac{d^2u}{dx^2} + Ce^u = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (5.7)$$

con las condiciones de contorno

$$u(0) = u(1) = 0,$$

para  $C > 0$ . La solución exacta de (5.7) viene dada por

$$u(x) = 2 \ln \left[ \frac{\cosh \alpha}{\cosh(\alpha(2x - 1))} \right], \quad (5.8)$$

donde  $\alpha$  satisface la ecuación trascendente

$$\cosh \alpha = \frac{4}{\sqrt{2C}} \alpha. \quad (5.9)$$

La solución de (5.9) puede encontrarse usando un método iterativo, por ejemplo el método de Newton.

El problema de Bratu tiene dos soluciones para  $C < C_c$ , aparecen dos ramas, llamadas rama superior y rama inferior. Si  $C = C_c$  (donde  $C_c \approx 3.513830719$ ) solo hay una solución, y si  $C > C_c$  no existe solución. Para resolver la ecuación de Bratu numéricamente, primero se va a usar el método de las diferencias finitas para discretizar el problema, y posteriormente se va a resolver el sistema de ecuaciones resultante utilizando diferentes elementos de la familia OC.

Usando diferencias finitas simétricas, la versión discretizada del problema de Bratu es

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + Ce^{u_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

donde  $h = \frac{1}{n+1}$  es el paso de discretización y  $u_0 = u_{n+1} = 0$ . Las incógnitas de este sistema no lineal son  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que denotan los valores aproximados de la función  $u$  en los puntos  $x_i = 0 + ih$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La discretización (5.10) conduce a un sistema de  $n$  ecuaciones no lineales que se resolverá utilizando diferentes métodos para comparar su comportamiento. Los resultados numéricos obtenidos para tres valores diferentes de  $C$ ,  $n = 10$  y  $u^{(0)} = (0.5, \dots, 0.5)$  como estimación inicial, se muestran en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3. Además del número de iteraciones y el error cometido, se calculará el orden de convergencia computacional (ACOC) de cada método

$$p \approx \hat{p} = \frac{\ln(\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| / \|u^{(k)} - u^{(k-1)}\|)}{\ln(\|u^{(k)} - u^{(k-1)}\| / \|u^{(k-1)} - u^{(k-2)}\|)},$$

donde  $u^{(k)}$  denota el iterado  $k$ -ésimo.

En las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 se resuelve el sistema de ecuaciones de Bratu para diferentes valores de  $C$  con el método de Newton, el de Jarratt, y con diferentes elementos de la familia OC. Se ha usado aritmética de precisión variable con 100 dígitos de mantisa, y un criterio de parada

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < 10^{-25} \text{ ó } \|F(u^{(k+1)})\| < 10^{-25}.$$

Tabla 5.1: Solución de la ecuación de Bratu para  $C = 2.65$ 

Método	$\hat{\rho}$	iter	$\ u^{(k+1)} - u^{(k)}\ $	$\ F(u^{(k+1)})\ $
Newton	1.8501	6	$1.70 \times 10^{-39}$	$3.29 \times 10^{-40}$
Jarratt	3.8089	4	$1.67 \times 10^{-39}$	$4.37 \times 10^{-40}$
Ostrowski	n.c			
Chun	3.7244	4	$1.47 \times 10^{-39}$	$3.25 \times 10^{-40}$
$a_1 = 1, b_2 = 1$	3.7350	4	$1.14 \times 10^{-39}$	$2.57 \times 10^{-40}$
$a_1 = 1, b_2 = -2$	n.c			
$a_1 = -1, b_2 = 3$	3.7155	4	$3.64 \times 10^{-40}$	$4.73 \times 10^{-41}$
$a_1 = -0.75, b_2 = 8$	3.6212	4	$2.67 \times 10^{-39}$	$4.73 \times 10^{-41}$

Para  $C = 2.65$ , el método de Ostrowski y el elemento  $a_1 = 1, b_2 = -2$  no convergen. Para  $C = 3$ , el método de Chun y  $a_1 = -1, b_2 = 3$  no convergen. A medida que  $C$  se aproxima a  $C_c$  la convergencia toma más iteraciones. Para  $C_c = 3.35$  todos los métodos convergen, pero los métodos que han mostrado ser dinámicamente más estables convergen con menos iteraciones.

El método correspondiente a  $a_1 = 1$  y  $b_2 = 1$  parece ser muy estable, ya que converge para los tres valores de  $C$  y obtiene un valor preciso de la raíz, su valor de  $\|F(u^{(k+1)})\|$  está entre el de los mejores métodos.

Tabla 5.2: Solución de la ecuación de Bratu para  $C = 3$ 

Método	$\hat{\rho}$	iter	$\ u^{(k+1)} - u^{(k)}\ $	$\ F(u^{(k+1)})\ $
Newton	1.9997	6	$2.76 \times 10^{-36}$	$2.37 \times 10^{-40}$
Jarratt	3.7798	4	$5.97 \times 10^{-40}$	$2.50 \times 10^{-40}$
Ostrowski	3.7758	4	$3.22 \times 10^{-39}$	$2.39 \times 10^{-40}$
Chun	n.c			
$a_1 = 1, b_2 = 1$	3.6596	4	$1.71 \times 10^{-39}$	$6.58 \times 10^{-40}$
$a_1 = 1, b_2 = -2$	3.4314	4	$2.44 \times 10^{-39}$	$7.13 \times 10^{-40}$
$a_1 = -1, b_2 = 3$	n.c			
$a_1 = -0.75, b_2 = 8$	3.4683	4	$1.35 \times 10^{-38}$	$2.32 \times 10^{-39}$

Tabla 5.3: Solución de la ecuación de Bratu para  $C = 3.35$ 

Method	$\hat{\rho}$	iter	$\ u^{(k+1)} - u^{(k)}\ $	$\ F(u^{(k+1)})\ $
Newton	1.9991	7	$1.33 \times 10^{-37}$	$3.69 \times 10^{-40}$
Jarratt	3.6356	4	$2.27 \times 10^{-35}$	$3.31 \times 10^{-40}$
Ostrowski	3.6349	4	$1.87 \times 10^{-35}$	$2.60 \times 10^{-40}$
Chun	3.3686	4	$4.12 \times 10^{-28}$	$1.97 \times 10^{-40}$
$a_1 = 1, b_2 = 1$	3.4106	4	$2.93 \times 10^{-29}$	$3.27 \times 10^{-40}$
$a_1 = 1, b_2 = -2$	4.0211	5	$1.90 \times 10^{-39}$	$3.40 \times 10^{-40}$
$a_1 = -1, b_2 = 3$	3.3336	4	$4.15 \times 10^{-27}$	$2.63 \times 10^{-40}$
$a_1 = -0.75, b_2 = 8$	3.8996	5	$9.80 \times 10^{-39}$	$6.77 \times 10^{-40}$

Se puede comprobar que, en general, los métodos que mostraron un comportamiento dinámico estable con un polinomio cuadrático han sido eficaces en el caso de la ecuación de Bratu. Se



han comparado los resultados obtenidos de métodos de la familia de Ostrowski-Chun con otros métodos conocidos y se han obtenido resultados similares, incluso en algunos casos mejores. Por ejemplo el método  $a_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$  converge en todos los casos, y el número de iteraciones y el error cometido es igual que los métodos de comparación con el mismo orden de convergencia. En cambio el método de Chun, que había mostrado ser muy estable en el caso de un polinomio cuadrático, no converge para  $C = 3$ , y también se puede observar que métodos que no son eficaces sobre polinomios, por ejemplo el  $a_1 = -0.75$ ,  $b_2 = 8$ , si lo son en caso de la ecuación de Bratu.

Este hecho lleva a plantear la posibilidad de que sean necesarios más elementos, además del estudio de la dinámica compleja, para decidir si un determinado método es eficaz en el caso multidimensional. En el capítulo siguiente se va a llevar a cabo un estudio de la dinámica real de la familia de métodos de Ostrowski-Chun que permita verificar el comportamiento de los métodos cuando el problema a resolver es un sistema de ecuaciones no lineales.

---

# Estudio dinámico real de la familia de Ostrowski-Chun

---

Como se ha visto en las pruebas numéricas del Capítulo 5, el hecho de que un método para ecuaciones muestre un comportamiento estable no garantiza que éste se mantenga en el caso multidimensional. Es necesario llevar a cabo estudios dinámicos que verifiquen el buen comportamiento de los métodos o familias para sistemas de ecuaciones. Las herramientas de dinámica compleja no se pueden utilizar en el caso multidimensional, por lo que es necesario adaptar estas herramientas y utilizar otras de la dinámica real para poder realizar el análisis.

En este capítulo se va a realizar un estudio dinámico real multidimensional de la familia de Ostrowski-Chun <sup>1</sup>. Se estudiarán varios métodos iterativos de la familia de Ostrowski-Chun definida en el Capítulo 4, sobre un sistema de dos polinomios cuadráticos. El hecho de la familia de métodos de Ostrowski-Chun cumpla Teorema del Escalado, va a permitir generalizar los resultados a cualquier sistema de polinomios cuadráticos. Finalmente se verificarán los resultados del estudio con un problema aplicado, la ecuación de Fisher.

Se va a considerar el problema de encontrar una raíz real de una función  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es decir, una solución  $\bar{x} \in D$  del sistema no lineal  $F(x) = 0$ , de  $n$  ecuaciones con  $n$  variables, siendo  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  las componentes de  $F$ . La solución se puede obtener como el punto fijo de alguna función  $\bar{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante un método iterativo de punto fijo

$$x^{(k+1)} = \bar{G}(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.1)$$

donde  $x^{(0)}$  es la estimación inicial.

Como se ha visto previamente, la extensión de un método escalar  $f(x) = 0, f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  al caso multidimensional  $F(x) = 0, F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  requiere reescribir la expresión iterativa de manera que no haya evaluaciones de la función no lineal  $f$  en el denominador, ya que se convertirían en vectores en la extensión a sistemas. Para resolver este problema se puede utilizar el operador diferencias divididas  $[x, y; F]$ , como se ha visto en el Capítulo 4. Una vez el método ha sido transferido al caso multivariable, se puede hacer un estudio dinámico para comprobar si los métodos que mostraron ser estables para resolver ecuaciones no lineales en el Capítulo 5

---

<sup>1</sup>Resultados parciales de este capítulo forman parte del artículo *Multidimensional stability analysis of a family of biparametric iterative methods* publicado en Journal of Mathematical Chemistry [41] y presentados en el congreso internacional CMMSE 2016

también lo son cuando se extienden a sistemas de ecuaciones no lineales, como se puede ver en [70].

En el Capítulo 4 se introduce la familia biparamétrica de métodos iterativos de Ostrowski-Chun, y se transfiere para resolver sistemas de ecuaciones no lineales usando el operador diferencias divididas (4.10). Su expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - G(x^{(k)}, y^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \\ G(x^{(k)}, y^{(k)}) &= \frac{1}{a_1} \left[ (1 + a_1b_2 - 2a_1)I - a_1(b_2 - 2)[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right]^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{a_1} \left( (a_1 + a_1b_2 - 1)I - a_1b_2[F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right), \end{aligned}$$

donde  $y^{(k)}$  es el paso de Newton,  $[x^{(k)}, y^{(k)}; F]$  es el operador diferencia dividida de  $F$  en  $x^{(k)}$  y  $y^{(k)}$ ,  $I$  es la matriz identidad y  $F'(x^{(k)})$  es la matriz jacobiana del sistema.

Se han realizado varios estudios dinámicos usando herramientas de dinámica compleja de métodos escalares para resolver ecuaciones no lineales sobre polinomios de bajo grado, por ejemplo, [68, 69, 20]. Estas técnicas han mostrado ser eficientes para analizar la estabilidad de un método y para seleccionar los elementos más estables de una familia.

En este capítulo se propone un estudio dinámico real multidimensional de la familia de métodos iterativos de Ostrowski-Chun. Se analiza el comportamiento dinámico del método iterativo de punto fijo para sistemas cuando se aplican a una función de  $n$  variables cuyas componentes son polinómicas  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , usando el procedimiento establecido en [70]. Los conceptos básicos de la dinámica real han sido introducidos en el Capítulo 2, se puede consultar [71] para profundizar en ellos.

## 6.1 Estudio dinámico de la familia de métodos de Ostrowski-Chun

En esta sección se aplican los conceptos dinámicos vistos anteriormente a la función racional multidimensional asociada a la familia de métodos de orden cuatro de Ostrowski-Chun. En particular, se va a analizar el comportamiento dinámico de esta familia de métodos actuando sobre el sistema polinomial  $p(x) = 0$ , donde

$$\left. \begin{aligned} p_1(x) &= x_1^2 - 1 \\ p_2(x) &= x_2^2 - 1 \\ &\vdots \\ p_n(x) &= x_n^2 - 1 \end{aligned} \right\}.$$

Aplicando la expresión iterativa de Ostrowski-Chun (4.10) sobre  $p(x)$ , se obtiene el operador racional multidimensional asociado; más adelante se estudiarán sus puntos fijos reales para analizar su estabilidad.

La coordenada  $j$ -ésima de la función racional vectorial asociada a la familia de Ostrowski-Chun

sobre  $p(x)$  es

$$\lambda_j^p(x) = \frac{1}{8x_j^3} \left( \frac{(b_2 - 2)(x_j^2 - 1)^3}{a_1(b_2 - 2)(x_j^2 - 1) + 4x_j^2} - \frac{b_2(x_j^2 - 1)^3 + 4x_j^2 - 12(x_j^2 + 2)x_j^4}{4x_j^2} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

Como los puntos fijos son las soluciones de  $\lambda_j^p(x) = x_j$ , es decir,

$$\frac{1}{8x_j^3} \left( \frac{(b_2 - 2)(x_j^2 - 1)^3}{a_1(b_2 - 2)(x_j^2 - 1) + 4x_j^2} - \frac{b_2(x_j^2 - 1)^3 + 4x_j^2 - 12(x_j^2 + 2)x_j^4}{4x_j^2} \right) = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

o, de manera equivalente,

$$(x_j - 1)(x_j + 1) \left( x_j^6 (a_1 b_2^2 + 18a_1 b_2 - 40a_1 + 88) + x_j^4 (-3a_1 b_2^2 - 18a_1 b_2 + 48a_1 - 32) + x_j^2 (3a_1 b_2^2 - 2a_1 b_2 - 8a_1 + 8) - a_1 b_2^2 + 2a_1 b_2 \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.3)$$

se puede formular el siguiente resultado

**Proposición 6.1.1** *Los puntos fijos de la función vectorial de componentes racionales asociada a la familia de Ostrowski-Chun sobre  $p(x)$  son las  $n$ -tuplas  $(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ , cuyas componentes son las raíces del polinomio*

$$r(x, a_1, b_2) = (x - 1)(x + 1)(x^6 (a_1 b_2^2 + 18a_1 b_2 - 40a_1 + 88) + x^4 (-3a_1 b_2^2 - 18a_1 b_2 + 48a_1 - 32) + x^2 (3a_1 b_2^2 - 2a_1 b_2 - 8a_1 + 8) - a_1 b_2^2 + 2a_1 b_2).$$

Las raíces del sistema  $p(x)$  serán las combinaciones en las que solo aparezca  $x = 1$  y  $x = -1$ , que siempre satisfacen la ecuación  $r(x, a_1, b_2) = 0$ . El resto de combinaciones serán puntos fijos extraños, que dependerán de  $a_1$  y  $b_2$ . Dado que sin contar los dos términos asociados a las raíces  $x = 1$  y  $x = -1$ ,  $r(x, a_1, b_2)$  solo tiene potencias pares, se pueden calcular los puntos fijos extraños usando un cambio de variable  $t = x^2$ , que transforma la expresión en un polinomio de tercer grado

$$p_2(t) = (t - 1)a_1 (2(9t^2 - 1)b_2 + (t - 1)^2 b_2^2 + 8t(1 - 5t)) + 8t(11t^2 - 4t + 1),$$

sus raíces  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  y  $r_{23}$ , se pueden calcular con procedimientos analíticos.

Además, solo estamos interesados en los puntos fijos extraños reales. Dependiendo de los valores de los parámetros pueden existir desde ninguna hasta 6 soluciones reales (además de 1 y -1). Es decir, para  $n = 2$  y si solo una raíz es real aparecen 12 puntos fijos extraños, 32 si dos raíces son reales y 60 en el caso de que todas las raíces sean reales.

La cantidad de puntos fijos extraños reales depende de los valores de  $a_1$  y  $b_2$ . Se ha utilizado el comando *Reduce* del software *Wolfram Mathematica* para analizar las raíces reales de  $r$ , primero en función del valor de  $b_2$ , y posteriormente se estudiará cada caso en función del valor de  $a_1$ .

1. Si  $b_2 < \frac{1}{63}(-820 - 176\sqrt{22})$ , entonces el número de puntos fijos extraños depende de  $a_1$  y también de las raíces  $r_{1j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  de  $p_1(t) = t^4(b_2 - 2)^4(4b_2 - 1) - 2t^3(b_2 - 2)^3(3b_2 + 1) + t^2(b_2 - 2)^2(27b_2^2 - 42b_2 + 11) - 4t(8b_2^2 - 25b_2 + 18) + 28$  y de  $r_{2j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  que son las raíces de  $p_2(t)$ .
  - a) Si  $a_1 < r_{11}$  ó  $a_1 > r_{12}$ , entonces existen seis soluciones reales  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
  - b) Para  $a_1 = r_{11}$  ó  $a_1 = r_{12}$ , hay cuatro soluciones reales  $\pm\sqrt{r_{21}}$  y  $\pm\sqrt{r_{23}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{22}}$ , respectivamente.
  - c) Si  $r_{11} < a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  ó  $0 \leq a_1 < r_{12}$  entonces hay solamente dos soluciones reales,  $\pm\sqrt{r_{21}}$ .
  - d) Cuando  $\frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2} \leq a_1 < 0$ , no hay puntos fijos extraños.
2. Para  $b_2 = \frac{1}{63}(-820 - 176\sqrt{22})$ , se analizarán diferentes casos
  - a) Si  $a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  o  $a_1 > r_{12}$ , entonces existen seis soluciones reales para los puntos fijos extraños,  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
  - b) Si  $a_1 = r_{12}$ , hay cuatro soluciones reales  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}$ .
  - c) Para  $a_1 = \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  o  $0 \leq a_1 < r_{12}$ , hay solamente dos soluciones reales,  $\pm\sqrt{r_{21}}$ .
  - d) Cuando  $\frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2} < a_1 < 0$ , no hay puntos fijos extraños.
3. Para  $\frac{1}{63}(-820 - 176\sqrt{22}) < b_2 < -20$ , existen varias posibilidades
  - a) Si  $a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  ó  $a_1 > r_{12}$ , hay seis soluciones diferentes para los puntos fijos extraños:  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
  - b) Cuando  $a_1 = \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2} \leq a_1 < r_{11}$  ó  $a_1 = r_{12}$ , hay cuatro soluciones reales,  $\pm\sqrt{r_{22}}$  y  $\pm\sqrt{r_{21}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{23}}$ , respectivamente.
  - c) Si  $a_1 = r_{11}$  ó  $0 \leq a_1 < r_{12}$  existen solamente dos soluciones diferentes, estas son  $\pm\sqrt{r_{22}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{21}}$ , respectivamente.
  - d) Para  $r_{11} < a_1 < 0$  no hay puntos fijos extraños.
4. El número de puntos fijos reales para  $b_2 = -20$  depende del parámetro  $a_1$  y de las raíces de los polinomios  $p_3(t) = 4743684t^4 + 314116t^3 - 1409771t^2 + 3718t - 7$  y  $p_2(t)$ , denotados por  $r_{31}$ ,  $r_{32}$  y  $r_{2j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , respectivamente.
  - a) Para  $a_1 > r_{32}$ , hay seis soluciones reales  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
  - b) Si  $a_1 < r_{31}$  ó  $a_1 = r_{32}$ , entonces  $\pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$  o  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}$ , respectivamente, son las soluciones reales para los puntos fijos extraños.
  - c) Cuando  $a_1 = r_{31}$  ó  $0 \leq a_1 < r_{32}$ , hay dos soluciones reales  $\pm\sqrt{r_{22}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{21}}$ , respectivamente.
  - d) Para  $r_{31} < a_1 < 0$  no hay puntos fijos extraños.

5. Si  $b_2$  está en el rango  $-20 < b_2 < -\frac{184}{29}$ , entonces:
- Si  $r_{12} < a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  entonces hay seis soluciones para los puntos fijos extraños,  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
  - Para  $a_1 < r_{11}$  ó  $a_1 > \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , las soluciones reales son  $\pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
  - Cuando  $a_1 = r_{12}$  ó  $a_1 = \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , las soluciones reales son  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}$ .
  - Si  $a_1 = r_{11}$  ó  $0 \leq a_1 < r_{12}$  solo hay dos soluciones reales,  $\pm\sqrt{r_{22}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{21}}$ , respectivamente.
  - Para  $r_{11} < a_1 < 0$ , no hay puntos fijos extraños.
6. Cuando  $b_2 = -\frac{184}{29}$ , de nuevo el número de puntos fijos extraños depende de  $a_1$  y también de la primera raíz del polinomio  $p_4(t) = 602330740t^3 + 563854192t^2 - 11941127t + 170723$ , denotada por  $r_{41}$  y de  $r_{2j}$   $j = 1, 2, 3$  que denota las raíces de  $p_2(t)$ .
- Si  $a_1 < r_{41}$  ó  $a_1 > \frac{841}{1089}$ , entonces las soluciones reales son  $\pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
  - Para  $a_1 = r_{41}$  ó  $0 \leq a_1 \leq \frac{841}{1089}$ , hay solamente dos soluciones reales:  $\pm\sqrt{r_{22}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{21}}$ , respectivamente. En particular, este caso corresponde a la solución  $\pm\sqrt{\frac{23}{59}}$ .
  - Cuando  $r_{41} < a_1 < 0$ , no hay puntos fijos extraños.
7. Si  $-\frac{184}{29} < b_2 < 0$ ,
- Cuando  $a_1 < r_{11}$  ó  $a_1 > \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , las soluciones reales son  $\pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
  - Si  $a_1 = r_{11}$  ó  $a_1 = \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  entonces las únicas soluciones reales son  $\pm\sqrt{r_{22}}$ .
  - Para  $0 \leq a_1 < r_{12}$  ó  $r_{12} \leq a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  hay dos soluciones reales, que se corresponden con  $\pm\sqrt{r_{21}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{23}}$ , respectivamente.
  - Si  $r_{11} < a_1 < 0$ , no hay puntos fijos extraños.
8. Para el caso  $b_2 = 0$ , el número de soluciones reales depende de  $a_1$  y también de las raíces de  $p_2(t)$ , denotadas por  $r_{2j}$   $j = 1, 2, 3$ .
- Si  $a_1 < -1 - \sqrt{2}$  ó  $a_1 > \frac{11}{5}$ , entonces hay seis soluciones reales diferentes:  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$
  - Cuando  $a_1 = -1 - \sqrt{2}$  ó  $1 < a_1 < \frac{11}{5}$ , hay cuatro soluciones reales,  $\pm\sqrt{r_{22}}$  y  $\pm\sqrt{r_{21}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{23}}$ , respectivamente.
  - Si  $-1 - \sqrt{2} < a_1 < -1 + \sqrt{2}$ ,  $-1 + \sqrt{2} \leq a_1 < 1$  ó  $a_1 = \frac{11}{5}$ , entonces las soluciones reales son dos:  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{23}}$  ó  $\pm\sqrt{\frac{3}{23}}$ , respectivamente.

- d) Para  $a_1 = 1$  no hay puntos fijos extraños.
9. Cuando  $0 < b_2 < \frac{1}{90} (33 - 7\sqrt{21})$ , el número de puntos fijos extraños depende la relación entre  $a_1$  y las raíces de  $p_1(t)$  y  $p_2(t)$ , definidos previamente.
- a) Si  $a_1 < r_{11}$  ó  $a_1 > \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , entonces hay 6 soluciones diferentes  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
- b) Para  $a_1 = r_{11}$ ,  $a_1 = \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  ó  $r_{14} < a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , hay 4 soluciones reales:  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}$  en los primeros dos casos, y  $\pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$  en el último.
- c) Si  $r_{11} < a_1 \leq 0$  ó  $a_1 = r_{14}$ , hay solamente 2 soluciones reales,  $\pm\sqrt{r_{21}}$  y  $\pm\sqrt{r_{22}}$  respectivamente.
- d) Cuando  $0 < a_1 < r_{14}$ , no hay puntos fijos extraños.
10. Si  $\frac{1}{90} (33 - 7\sqrt{21}) < b_2 < \frac{4}{63} (44\sqrt{22} - 205)$ , se dan los siguientes casos
- a) Para  $a_1 < r_{11}$  ó  $a_1 > \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , hay 6 soluciones reales:  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
- b) Si  $a_1 = r_{11}$ ,  $a_1 = \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  ó  $r_{12} < a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , hay 4 soluciones reales:  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}$  en los primeros dos casos, y  $\pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$  en el último.
- c) Cuando  $r_{11} < a_1 \leq 0$  ó  $a_1 = r_{12}$ , solo hay dos soluciones reales:  $\pm\sqrt{r_{21}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{22}}$ , respectivamente.
- d) Para  $0 < a_1 < r_{12}$ , no hay puntos fijos extraños.
11. Si  $b_2 = \frac{4}{63} (44\sqrt{22} - 205)$ , aparecen varios casos:
- a) Para  $a_1 < r_{11}$  ó  $a_1 > \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , hay 6 soluciones reales, que son  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
- b) Si  $a_1 = r_{11}$ , hay 4 soluciones reales diferentes:  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}$ .
- c) Cuando  $r_{11} < a_1 \leq 0$  ó  $a_1 = \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , hay solamente 2 soluciones reales  $\pm\sqrt{r_{21}}$ .
- d) Finalmente, si  $0 < a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  no hay puntos fijos extraños.
12. Para valores de  $b_2$  en el intervalo  $\frac{4}{63} (44\sqrt{22} - 205) < b_2 < \frac{1}{4}$ , se analizarán diferentes casos
- a) Si  $a_1 < r_{11}$  ó  $a_1 > r_{12}$ , hay 6 soluciones diferentes,  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
- b) Para  $a_1 = r_{11}$  ó  $a_1 = r_{12}$ , hay 4 soluciones reales  $\pm\sqrt{r_{21}}$  y  $\pm\sqrt{r_{22}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{23}}$ , respectivamente.
- c) Cuando  $r_{11} < a_1 \leq 0$  ó  $\frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2} < a_1 < r_{12}$ , hay solamente dos soluciones reales,  $\pm\sqrt{r_{21}}$ .



- d) Si  $0 < a_1 \leq \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , no hay puntos fijos extraños.
13. Cuando  $b_2 = \frac{1}{4}$ , la relación entre el parámetro  $a_1$  y la primera raíz de  $p_5(t) = 686t^3 + 245t^2 - 1792t + 1024$ , denotada por  $r_{51}$  y las raíces de  $p_2(t)$ , denotadas por  $r_{2j}$   $j = 1, 2, 3$ , es clave en el número de soluciones reales.
- a) Si  $a_1 < r_{51}$  entonces hay 6 soluciones diferentes,  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
- b) Para  $a_1 = r_{51}$  hay 4 soluciones reales  $\pm\sqrt{r_{21}}$  y  $\pm\sqrt{r_{22}}$ .
- c) Cuando  $a_1 < r_{51} \leq 0$  ó  $a_1 > \frac{1408}{567}$ , el número de soluciones reales se reduce a 2:  $\pm\sqrt{r_{21}}$ .
- d) Si  $0 < a_1 \leq \frac{1408}{567}$ , entonces no hay puntos fijos extraños.
14. Si  $\frac{1}{4} < b_2 < \frac{1}{90}(33 + 7\sqrt{21})$ , se analizan los siguientes casos para deducir el número de puntos fijos extraños.
- a) Si  $a_1 < r_{11}, r_{12} < a_1 \leq 0$  ó  $a_1 > \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , hay dos soluciones reales,  $\pm\sqrt{r_{21}}$ .
- b) Para  $a_1 = r_{11}$  ó  $a_1 = r_{12}$ , el número de soluciones es 4,  $\pm\sqrt{r_{21}}$  y  $\pm\sqrt{r_{23}}$  ó  $\pm\sqrt{r_{22}}$ , respectivamente.
- c) Por otro lado, si  $r_{11} < a_1 < r_{12}$  hay 6 soluciones reales:  $\pm\sqrt{r_{21}}, \pm\sqrt{r_{22}}, \pm\sqrt{r_{23}}$ .
- d) Si  $0 < a_1 \leq \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , entonces no hay puntos fijos extraños.
15. Cuando  $\frac{1}{90}(33 + 7\sqrt{21}) \leq b_2 \leq 2$ , el análisis es más sencillo
- a) Para  $b_2 < 2, a_1 \leq 0$  ó  $a_1 > \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , las únicas soluciones reales son  $\pm\sqrt{r_{21}}$ .
- b) Si  $b_2 = 2$  ó si  $b_2 < 2$  y  $0 < a_1 \leq \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$ , no hay puntos fijos extraños.
16. Cuando  $b_2 > 2$ , el número de casos también se reduce:
- a) Si  $a_1 < \frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2}$  ó  $a_1 \geq 0$ , las únicas soluciones reales son  $\pm\sqrt{r_{21}}$ .
- b) Cuando  $\frac{-88}{-40 + 18b_2 + b_2^2} \leq a_1 < 0$  no hay puntos fijos extraños.

Se puede ver como para todos los valores de  $b_2$  existen regiones, definidas por el valor de  $a_1$ , en las que no existen puntos fijos extraños reales.

### 6.1.1 Análisis de la estabilidad de los puntos fijos

Para comprobar la estabilidad de los puntos fijos es necesario calcular la matriz Jacobiana del operador de punto fijo y evaluar sus valores propios en cada punto fijo,

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_n \end{pmatrix}$$

donde

$$J_j = -\frac{(x_j - 1)^3(x_j + 1)^3 s_j}{32x_j^6 (a_1 b_2 x_j^2 - a_1 b_2 - 2a_1 x_j^2 + 2a_1 + 4x_j^2)^2}$$

y

$$s_j = -5a_1^2 b_2^3 + 20a_1^2 b_2^2 - 20a_1^2 b_2 + x_j^2 (4a_1^2 b_2^3 - 4a_1^2 b_2^2 - 32a_1^2 b_2 + 48a_1^2 + 28a_1 b_2^2 - 32a_1 b_2 - 48a_1) + x_j^4 (a_1^2 b_2^3 - 16a_1^2 b_2^2 + 52a_1^2 b_2 - 48a_1^2 + 4a_1 b_2^2 - 96a_1 b_2 + 176a_1 - 160)$$

con valores propios  $\alpha_j = J_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Al evaluar los valores propios en las raíces de  $p(x)$  se obtiene  $J_j(\pm 1) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , por tanto todas las raíces son superatractoras.

El análisis de la estabilidad del resto de puntos fijos es especialmente tediosa, ya que los intervalos (los dominios de los parámetros  $a_1$  y  $b_2$ ) donde los puntos fijos son reales deben tenerse en cuenta. Por simplicidad se estudiará con detalle el caso  $b_2 = 0$  con  $n = 2$ .

Como se estableció en la sección anterior hay al menos seis soluciones para cada componente de los puntos fijos extraños que dependen de  $a_1$ , por lo tanto se deben detallar todos los casos en los que cambia el número de puntos fijos extraños. Para comprobar su estabilidad se dibujarán diagramas de estabilidad en dos dimensiones, que se construyen representando  $|J_j(r_i)|$   $j = 1, 2$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$  en función del parámetro  $a_1$ .

**Teorema 6.1.1** *La estabilidad de los puntos fijos reales del operador vectorial de punto fijo asociado a la familia de Ostrowski-Chun para el caso  $b_2 = 0$  es:*

- i) *Todos los puntos fijos cuyas componentes pertenecen a  $\{\sqrt{r_{22}}, \pm 1\}$  son atractores si  $-1.981 < a_1 < -1.9809$  ó  $0.91415 < a_1 < 0.9196$ .*
- ii) *Los puntos fijos extraños cuyas componentes pertenecen a  $\{\sqrt{r_{23}}, \pm 1\}$  son atractores para  $\frac{11}{5} < a_1 < 2.4899$ .*
- iii) *El resto de puntos fijos extraños son repulsores o silla.*

*Resumiendo, para los valores de  $a_1$  establecidos en los casos i) y ii) en el caso  $n = 2$  hay 12 puntos fijos atractores, 24 repulsores y 24 silla. Para valores de  $a_1$  fuera de esas regiones hay 36 puntos fijos repulsores y 24 silla.*

**Demostración:** Para probar el teorema es necesario dibujar diagramas 2D para las componentes  $r_{2j}$  de los puntos fijos extraños. Es importante notar que  $r_{21} = 0$  y  $J_j(0)$  no están

definidos para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Al no poder evaluarse la jacobiana en esos puntos, su estabilidad se debe deducir del diagrama de bifurcación.

Los diagramas de estabilidad muestran el valor absoluto de  $J_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  evaluado en las componentes de los puntos fijos extraños. Como el operador y sus valores propios solo dependen de  $x_j$  y además tienen simetría par respecto a cada  $x_j$ , se usarán solamente las raíces cuadradas positivas de los ceros de  $p_2(t)$ , es decir,  $\sqrt{r_{21}}$ ,  $\sqrt{r_{22}}$  y  $\sqrt{r_{23}}$ . Esto significa que, para el caso  $n = 2$ , si hay 3 puntos fijos atractores en el primer cuadrante, en total habrá 12 puntos fijos atractores.

La estabilidad de los puntos fijos extraños se debe estudiar teniendo en cuenta todos los diferentes subintervalos donde el número de puntos fijos extraños varía:

- a) Si  $a_1 < -1 - \sqrt{2}$ , ambos puntos satisfacen  $|J_j(\sqrt{r_{2i}})| > 1$  para  $j = 1, 2$ ,  $i = 2, 3$  como se puede ver en la Figura 6.1. El mismo comportamiento se observa para  $\sqrt{r_{22}}$  y  $\sqrt{r_{23}}$  en el intervalo  $1 < a_1 < \frac{11}{5}$ .

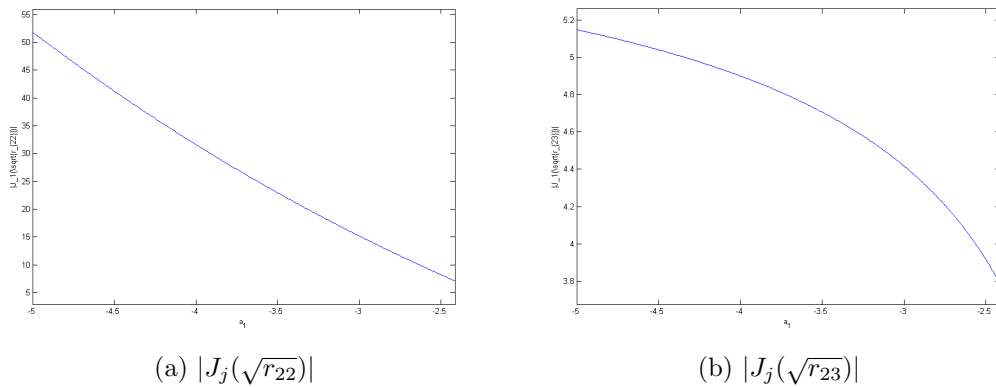


Figura 6.1: Diagramas de estabilidad para  $\sqrt{r_{22}}$  y  $\sqrt{r_{23}}$  con  $b_2 = 0$  y  $a_1 < -1 - \sqrt{2}$

- b) Para  $a_1 > \frac{11}{5}$ , entonces  $|J_j(\sqrt{r_{22}})| > 1$   $j = 1, 2$  mientras  $|J_j(\sqrt{r_{23}})| < 1$  en el intervalo  $\frac{11}{5} < a_1 < 2.4899$ , como se puede ver en la Figura 6.2, esto significa que el punto fijo extraño  $\sqrt{r_{23}}$  es atractor.

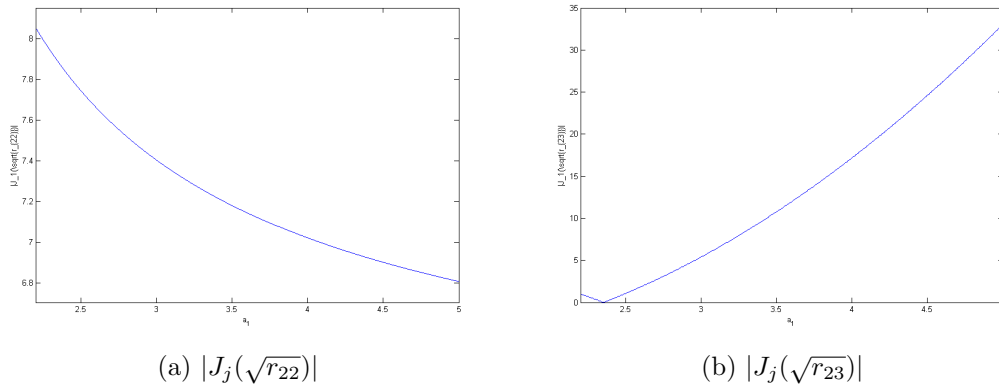


Figura 6.2: Diagramas de estabilidad para  $\sqrt{r_{22}}$  y  $\sqrt{r_{23}}$  con  $b_2 = 0$  y  $a_1 > \frac{11}{5}$

- c) Si  $-1 - \sqrt{2} < a_1 < -1 + \sqrt{2}$ ,  $|J_j(\sqrt{r_{23}})| > 1$  y  $|J_j(\sqrt{r_{22}})| < 1$  en el intervalo  $-1.9809 < a_1 < -1.981$ . Este comportamiento se puede observar en la Figura 6.3, de lo que se deduce que existen valores de  $a_1$  que hacen que  $\sqrt{r_{22}}$  sea atractor.

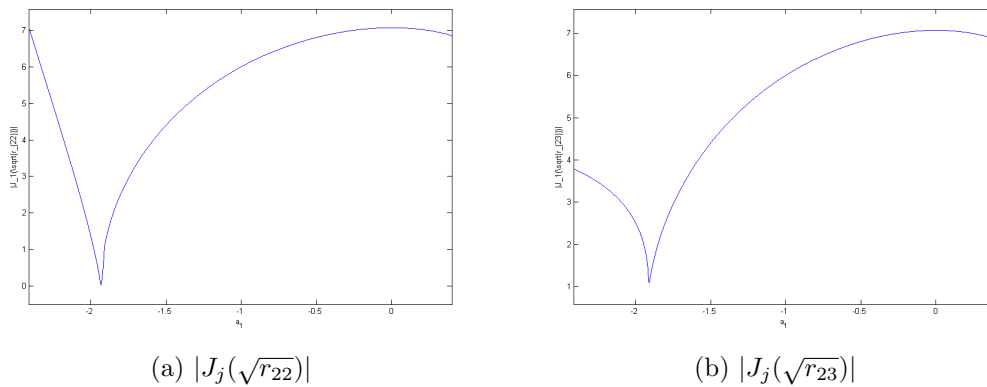


Figura 6.3: Diagramas de estabilidad para  $\sqrt{r_{22}}$  y  $\sqrt{r_{23}}$  con  $b_2 = 0$  y  $-1 - \sqrt{2} < a_1 < -1 + \sqrt{2}$

- d) Cuando  $-1 + \sqrt{2} \leq a_1 < 1$  entonces  $|J_j(\sqrt{r_{23}})| > 1$  y  $|J_j(\sqrt{r_{22}})| < 1$  en el intervalo  $0.91415 < a_1 < 0.9196$  (ver Figura 6.4), por lo que en este caso también existen valores de  $a_1$  que hacen que  $\sqrt{r_{22}}$  sea atractor.

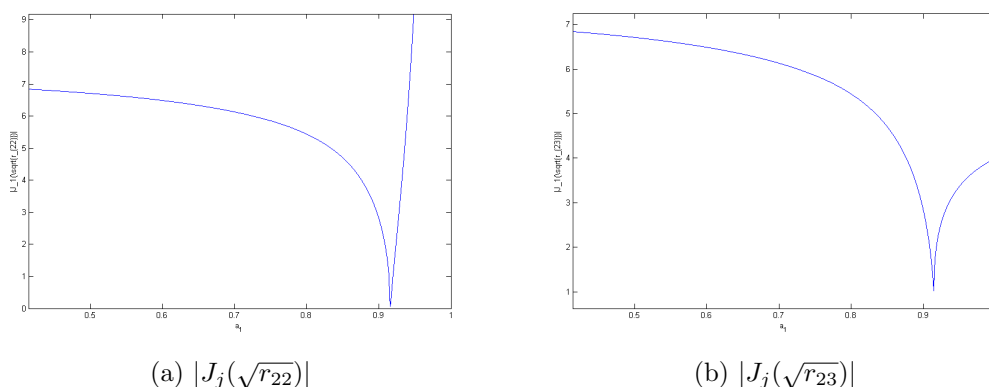


Figura 6.4: Diagramas de estabilidad para  $r_{22}$  y  $r_{23}$  con  $b_2 = 0$  y  $-1 + \sqrt{2} \leq a_1 < 1$

### 6.1.2 Diagramas de bifurcación

Los diagramas de bifurcación muestran los cambios de comportamiento de un método cuando la estimación inicial es cercana a un punto fijo extraño. Para estudiar los fenómenos de bifurcación se usarán diagramas Feigenbaum ([71]) para cada coordenada de la función de punto fijo  $\lambda_j^p(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , usando como estimación inicial cada uno de los puntos fijos extraños, y observando los intervalos del parámetro  $a_1$  para los que ocurren cambios en la estabilidad del método. Debido a las simetrías mencionadas en la sección anterior, es suficiente con representar un diagrama de bifurcación escalar, de una de las componentes de todos los puntos fijos extraños.

Los diagramas Feigenbaum consisten en tomar una partición en 5000 intervalos de una región de valores de  $a_1$ . Para cada uno de los nodos, que corresponde a un valor diferente del parámetro  $a_1$ , se calculan 500 elementos de la órbita de cada punto fijo extraño, de los cuales se representan los últimos 100.

En la sección anterior se analizó la estabilidad de los puntos fijos extraños y en la Figura 6.5 se presentan los diagramas correspondientes a  $r_3 = \sqrt{r_{22}}$ ,  $r_4 = -\sqrt{r_{22}}$ ,  $r_5 = \sqrt{r_{23}}$  y  $r_6 = \sqrt{r_{23}}$   $i = 3, 4, 5, 6$ . La razón por la que los diagramas de  $r_1$  y  $r_2$  no aparecen es que la componente del operador de punto fijo no está definida en  $\pm\sqrt{r_{21}} = 0$ . Sin embargo, su estabilidad puede deducirse del resto de diagramas de bifurcación.

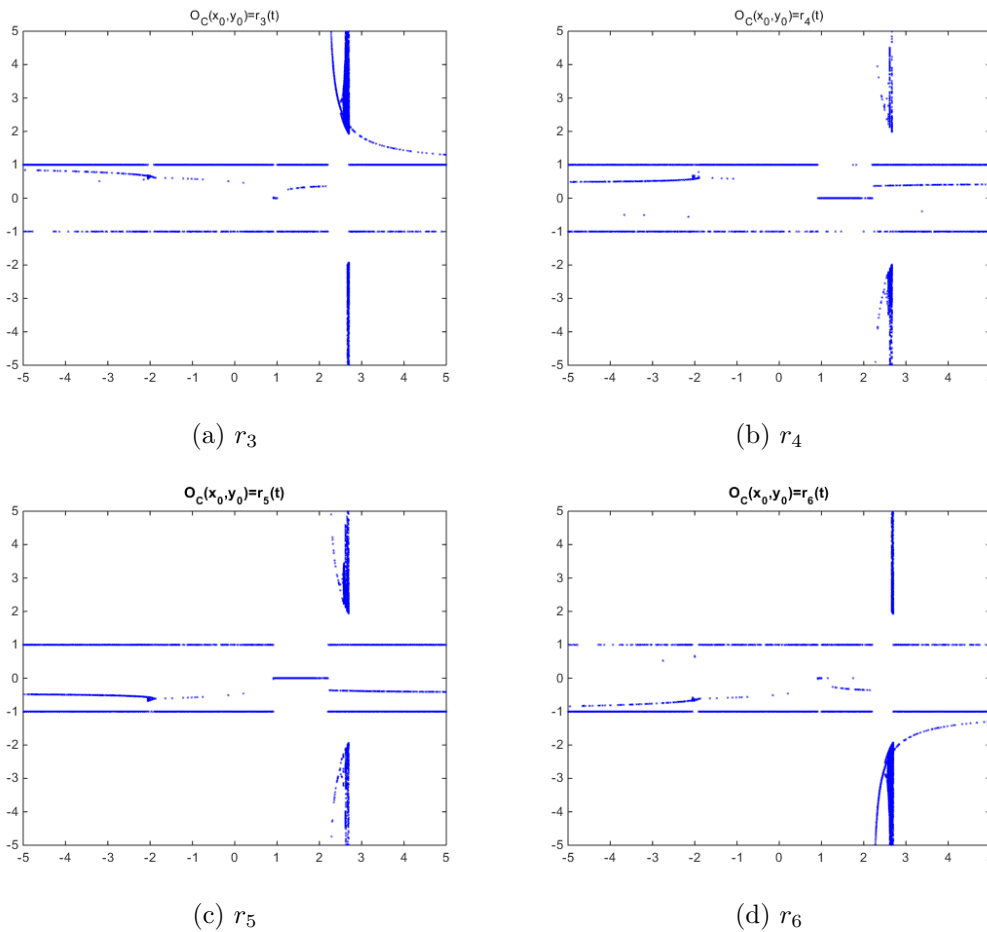


Figura 6.5: Diagramas de bifurcación para  $b_2 = 0$

El eje de abscisas de los diagramas de la Figura 6.5 corresponde a los valores del parámetro  $a_1$  y el de ordenadas muestra los valores de las últimas 100 iteraciones (de un total de 500). Lo primero que se observa es la simetría respecto a  $a_1$ . Los iterados pueden converger a 1 y -1, componentes de las raíces de  $p(x)$ , o hacia los puntos fijos extraños atractores (incluyendo el cero, que es atractor para  $a_1 \in (1, 2)$ ), para valores del parámetro definidos en los intervalos obtenidos en el Teorema 6.1.1, o hacia otras estructuras atractoras.

En la Figura 6.6 se muestran algunos detalles de  $r_4$  y  $r_5$  que aparecen en las Figuras 6.5b y 6.5c. Estos detalles muestran regiones de  $a_1$  que corresponden a los casos b) y c) del estudio de estabilidad de la sección anterior. Se puede observar como, cuando un punto fijo extraño presenta cambios en su estabilidad, aparecen bifurcaciones de periodo 2, que a su vez generan cascadas de órbitas periódicas atractoras de periodo 2,4,8,... Entonces, en las regiones azules, aparece el caos. En la siguiente sección se verá como estas órbitas periódicas también se manifiestan en los planos dinámicos. En las regiones azules también pueden aparecer *atractores extraños*, que también se verán en los planos dinámicos. Un atractor extraño, a diferencia de los puntos fijos extraños y las órbitas periódicas, no consiste en un punto o conjunto de puntos, sino que es un objeto geométrico complejo que aparece para valores muy concretos de los parámetros.

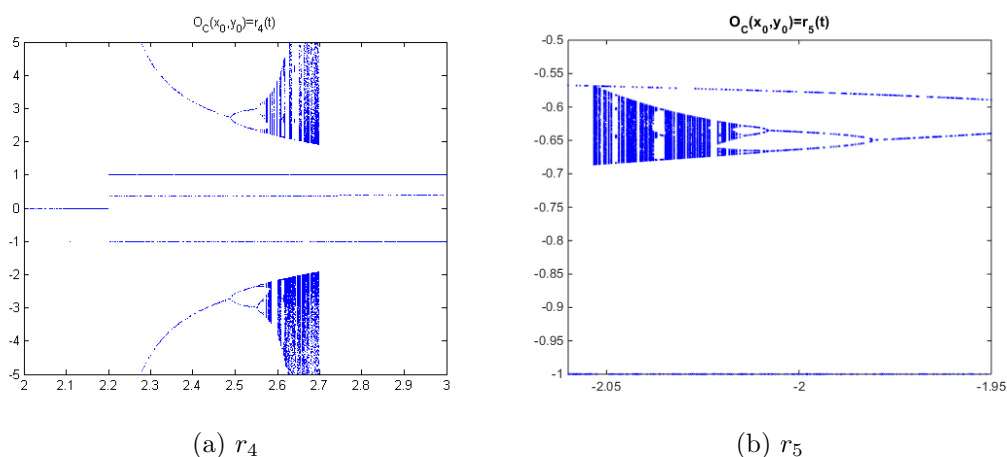


Figura 6.6: Detalle de los diagramas de bifurcación correspondientes a  $r_4$  y  $r_5$

## 6.2 Planos dinámicos y de convergencia

Los planos de convergencia (ver [76]) son útiles para comprobar el comportamiento de una familia de métodos iterativos cerca de puntos fijos extraños. El espacio de convergencia se obtiene asociando cada punto del plano con valores reales de  $a_1$  (eje OX) y  $b_2$  (eje OY). Se han usado  $800 \times 800$  combinaciones diferentes de  $a_1$  y  $b_2$ . Los puntos del plano que se muestran en color negro corresponden a valores de los parámetros para los cuales el método iterativo asociado no converge a la raíz con una tolerancia de  $10^{-3}$  después de 500 iteraciones, tomando como estimación inicial todos los puntos fijos extraños. Los puntos que se muestran en color rojo convergen a una raíz a pesar de haber tomado estimaciones iniciales cerca de todos los puntos fijos extraños.

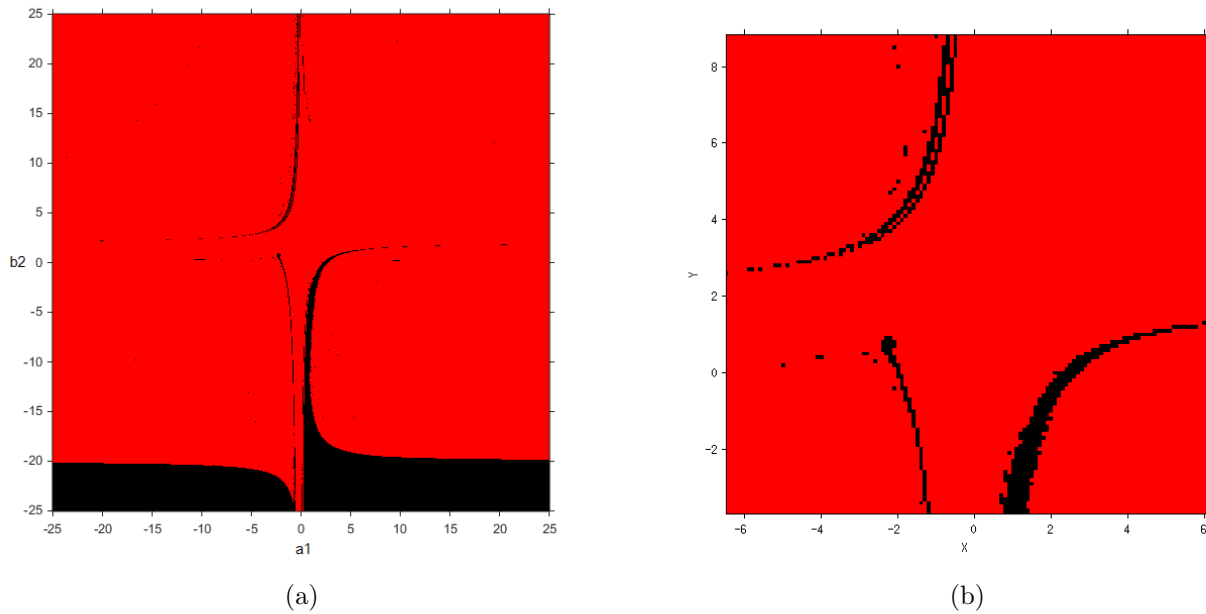


Figura 6.7: Plano de convergencia y detalle de la región central

Los planos dinámicos que se presentan se han obtenido usando  $400 \times 400$  subintervalos, un máximo de iteraciones de 40 y una tolerancia de  $10^{-3}$ , cuando los iterados convergen a un punto fijo.

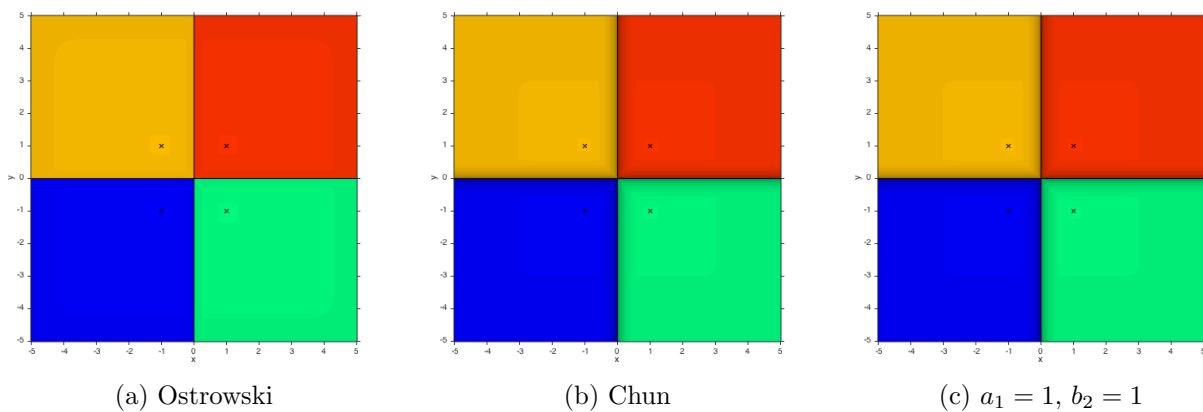


Figura 6.8: Planos dinámicos para métodos estables de la familia de Ostrowski-Chun sobre  $p(x)$

La Figura 6.8 muestra los planos dinámicos para los métodos de Ostrowski, Chun, y el método correspondiente a  $a_1 = 1$  y  $b_2 = 1$  sobre  $p(x)$  para  $n = 2$ . Aparecen cuatro cuencas de atracción, una para cada raíz. Los tres métodos muestran un comportamiento estable, ya que los únicos puntos fijos con cuencas de atracción son las raíces del polinomio.

Otros métodos no muestran un comportamiento estable si algún punto fijo extraño es atractor, como se puede ver en la Figura 6.9, donde se muestran combinaciones de parámetros que presentan puntos fijos extraños atractores.



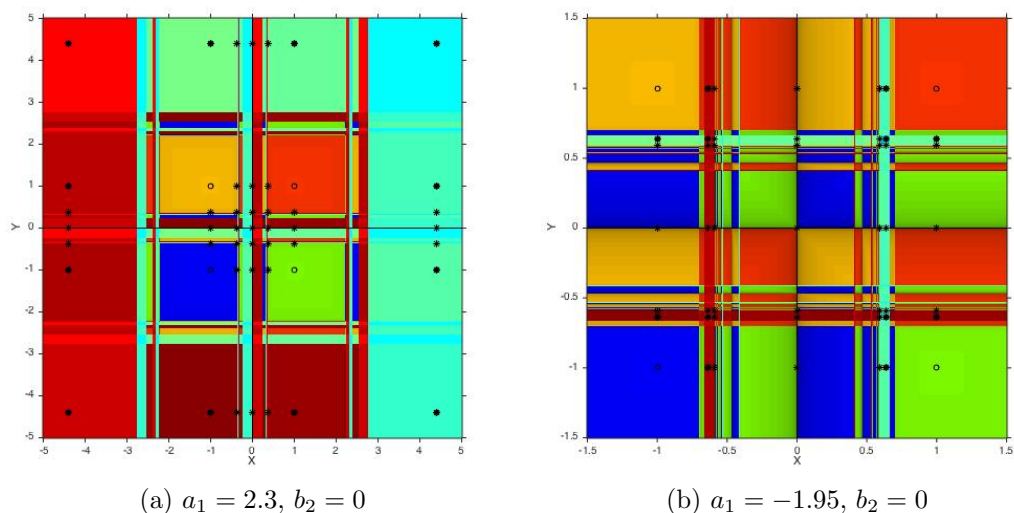


Figura 6.9: Planos dinámicos con puntos fijos extraños atractores

La estabilidad de un método no depende solamente de la existencia de puntos fijos extraños atractores, sino también de la existencia de órbitas periódicas. En la Figura 6.10 se muestra una combinación de parámetros que produce seis órbitas periódicas. En la Figura 6.10b se ha modificado el programa que genera el plano dinámico para pintar en diferentes colores los puntos que convergen a cada una de las órbitas periódicas.

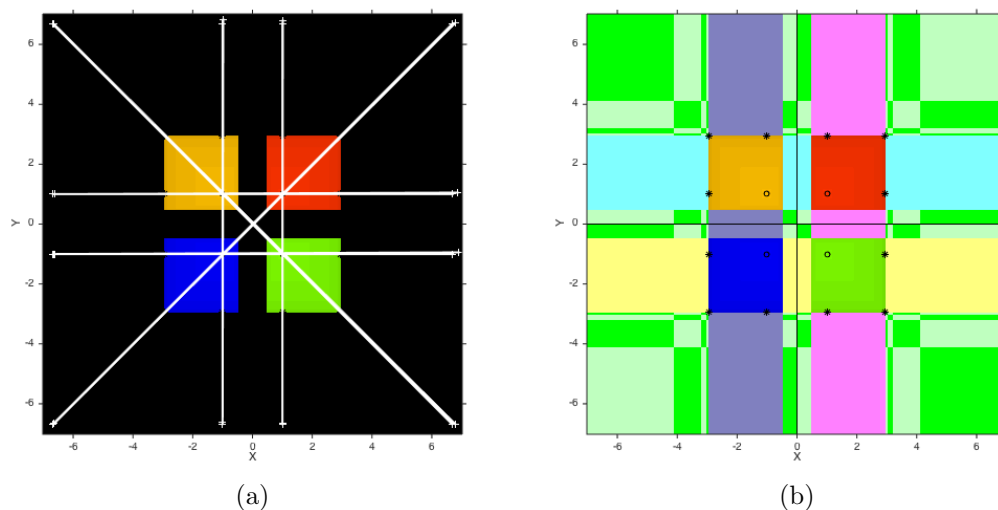


Figura 6.10: Planos dinámicos correspondientes al método  $a_1 = -2.5, b_2 = 3.7$

Para  $b_2 = 0$  los diagramas de bifurcación muestran regiones caóticas en azul, donde pueden aparecer atractores extraños para algunos valores de  $a_1$ . Para visualizar los atractores extraños se usarán gráficos 2-D en los que se fija el valor del parámetro  $a_1$  y se muestra el comportamiento asintótico del método con diferentes estimaciones iniciales. En la Figura 6.11a se muestra un plano dinámico de un método que presenta comportamiento caótico, correspondiente a  $a_1 = 2.59$ ,

se observa como los iterados no convergen a una órbita periódica, sino que se agrupan de manera aparentemente aleatoria en dos extremos del plano.

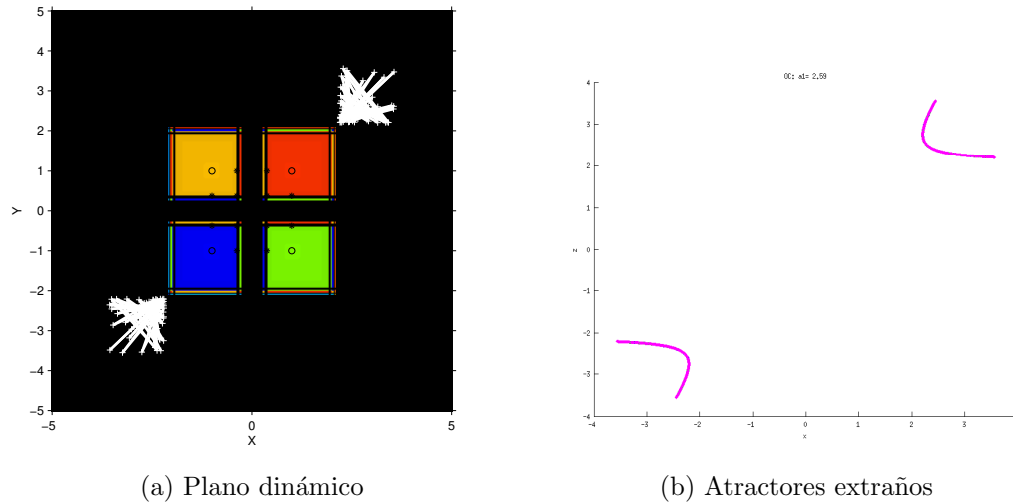


Figura 6.11: Plano dinámico y atractores extraños para el método  $a_1 = 2.59$ ,  $b_2 = 0$

Para obtener más detalles de este elemento caótico, en la Figura 6.11b se muestran las iteraciones del operador multidimensional de punto fijo de la familia para un valor del parámetro  $a_1$  cercano a  $a_1 = 2.5$ , es decir, en una de las regiones caóticas que se han estudiado en la Figura 6.5. La Figura 6.11b se ha obtenido tomando 1000 estimaciones iniciales diferentes en un rectángulo cercano al origen, para un valor fijo de  $a_1$ , y se puede ver como aparecen dos atractores extraños simétricos. La imagen resultante muestra como los puntos fijos extraños que aparecen en los diagramas de bifurcación se convierten en regiones atractoras. Sin embargo, el intervalo de estimaciones iniciales que pertenecen a sus respectivas cuencas de atracción es muy reducido, así como el intervalo de valores reales de  $a_1$  para los que se observa este comportamiento.

## 6.3 Pruebas numéricas

En esta sección se van a aplicar diferentes miembros de la familia propuesta para resolver sistemas de ecuaciones que resultan de aplicar la técnica de las diferencias finitas para resolver el problema de difusión. Se van a usar diferentes miembros de la familia de Ostrowski-Chun, algunos que hayan mostrado un comportamiento estable y otros que hayan mostrado un comportamiento inestable, según los resultados obtenidos hasta el momento en este capítulo.

La ecuación en derivadas parciales

$$u_t = Du_{xx} + ru \left(1 - \frac{u}{k}\right), \quad (6.4)$$

fue propuesta por Fisher [73] como un modelo de difusión en dinámicas poblacionales, donde  $D > 0$  es la constante de difusión,  $r$  es la tasa de crecimiento y  $k$  es la capacidad de carga. En los últimos años la ecuación se ha utilizado como base de una gran cantidad de modelos de distribución espacial de los genes en una población. Esta ecuación tiene también aplicaciones

interesantes en la propagación de las ondas químicas, matemáticas financieras y economía, ya que estima la relación entre el interés nominal y real de las tasas de inflación.

Se va a analizar un caso particular de la ecuación de Fisher, el que corresponde a  $D = k = r = 1$ ,  $x \in [-25, 50]$ , con condiciones de contorno  $u(-25, t) = 1$ ,  $u(50, t) = 0$ ,  $t > 0$ , y condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < -10 \\ 0, & -10 \leq x \leq 10 \\ 1/4, & 10 < x < 20 \\ 0, & x \geq 20 \end{cases}$$

Aplicando un método implícito de diferencias finitas, el problema (6.4) se transforma en una familia de sistemas no lineales, que provee una solución aproximada en un instante  $t_k$  partiendo de la solución en  $t_{k-1}$ . Se va a tomar un paso espacial  $h = 75/nx$  y un paso temporal  $k = T_{max}/nt$ , donde  $nx$  y  $nt$  son el número de  $x$ -subintervalos y  $t$ -subintervalos, respectivamente, y  $T_{max}$  es el tiempo final del estudio. Se ha seleccionado una malla de  $[-25, 50] \times [0, T_{max}]$  con puntos  $(x_i, t_j)$

$$x_i = 0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, nx, \quad t_j = 0 + jk, \quad j = 0, 1, \dots, nt.$$

Se desea estimar la solución del problema (6.4) en esos puntos, transformándolo en varios sistemas no lineales, tantos como el número de nodos temporales  $t_j$ . Para hacer esto, se realizan las siguientes aproximaciones

$$u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x, t - k)}{k},$$

$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2},$$

donde  $u_{i,j}$  es la estimación de la solución en  $(x_i, t_j)$ , sustituyéndola en (6.4) se obtiene el siguiente sistema no lineal

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + u_{i,j} - u_{i,j}^2,$$

para  $i = 1, 2, \dots, nx - 1$  y  $j = 1, 2, \dots, nt$ . Después de varias manipulaciones algebraicas el sistema se transforma en

$$ku_{i+1,j} + (kh^2 - 2k - h^2)u_{i,j} - (kh^2)u_{i,j}^2 + ku_{i-1,j} = -h^2u_{i,j-1},$$

donde  $i = 1, 2, \dots, nx - 1$  y  $j = 1, 2, \dots, nt$ . Para un  $j$  fijo, se tiene el siguiente sistema no lineal de tamaño  $(nx - 1) \times (nx - 1)$ :

$$\begin{aligned} ku_{2,j} + (kh^2 - 2k - h^2)u_{1,j} - kh^2u_{1,j}^2 &= -h^2u_{1,j-1} - k, \\ ku_{i+1,j} + (kh^2 - 2k - h^2)u_{i,j} - kh^2u_{i,j}^2 + ku_{i-1,j} &= -h^2u_{i,j-1}, \quad i = 2, 3, \dots, nx - 2, \\ (kh^2 - 2k - h^2)u_{nx-1,j} - kh^2u_{nx-1,j}^2 + ku_{nx-2,j} &= -h^2u_{1,j-1} - k. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Las incógnitas del sistema son  $u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{nx-1,j}$ , es decir, las aproximaciones de la solución en  $t_j$ . Partiendo de la solución en  $t_{j-1}$ , se va a resolver el sistema para diferentes valores de  $T_{max}$ , usando en cada caso  $nx = 20$  y los métodos M1 ( $a = b = 1$ ), M2 (método de Chun), M3 ( $a = 2.3$ ,  $b = 0$ ) y M4 ( $a = -2.5$ ,  $b = 3.7$ ). Los métodos M3 y M4 se han seleccionado en la

región inestable (negra) del plano de convergencia que se mostró en la sección anterior, mientras que M1 y M2 están en la región estable (roja). Como estimación inicial se usará la solución aproximada del anterior  $t_j$ .

$T_{max} = 0.1$		M1	M2	M3	M4
$nt = 100$	iter	1	2	2	1
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	1.61e-13	3.39e-24	3.68e-22	1.52e-13
	e-time	94.65	171.98	509.57	283.30
$nt = 500$	iter	1	2	nc	1
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	2.57e-16	3.64e-31		2.54e-16
	e-time	464.85	856.44		1405.43
$T_{max} = 0.3$		M1	M2	M3	M4
$nt = 100$	iter	2.01	2	2	2
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	2.21e-29	2.21e-29	1.03e-18	1.88e-29
	e-time	492.92	175.31	513.66	547.91
$nt = 500$	iter	1	1	2	1.002
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	2.23e-18	2.25e-14	1.31e-23	2.12e-14
	e-time	437.80	1221.66	2384.80	1375.31
$T_{max} = 0.5$		M1	M2	M3	M4
$nt = 100$	iter	2.01	2	2	2
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	4.02e-27	3.99e-27	4.32e-17	5.06e-27
	e-time	496.80	554.01	554.01	581.26
$nt = 500$	iter	1.002	2	2	1.0060
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	1.82e-13	5.52e-22	5.52e-22	1.56e-13
	e-time	1322.68	2587.08	2587.08	1502.13

Tabla 6.1: Resultados numéricos para diferentes valores de  $T_{max}$

En las Tablas 6.1 y 6.2 se calcula la solución aproximada en diferentes  $T_{max}$  y se muestra  $\|F(x^{(k+1)})\|$ , el promedio de iteraciones necesarias para resolver los sistemas no lineales que aparecen para cada instante  $t_j$  en el proceso completo y el tiempo transcurrido en segundos, para analizar la estabilidad y consistencia de cada método.

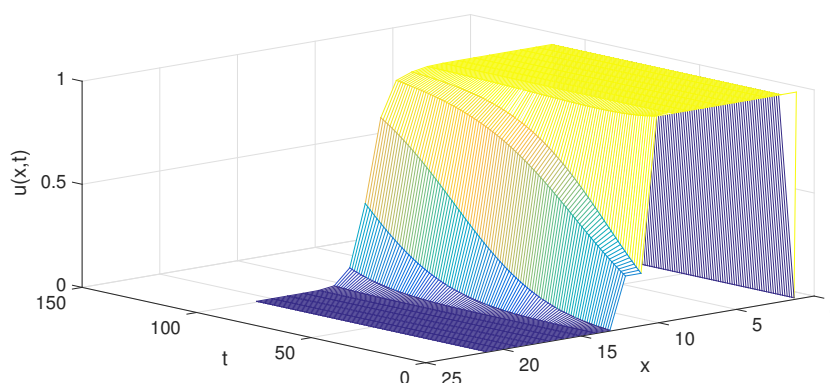
En todos los cálculos se ha usado aritmética de precisión variable con 500 dígitos de mantisa. Para cada valor de  $T_{max}$  se analiza el número de iteraciones necesarias para converger a la solución de manera que se satisfaga  $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-12}$ , donde  $\|\cdot\|$  denota la norma euclídea.

$T_{max} = 0.7$		M1	M2	M3	M4
$nt = 100$	iter	2.0100	2	2	2
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	1.17e-25	1.15e-25	4.95e-16	7.06e-16
$nt = 500$	e-time	540.12	527.59	543.90	495.37
	iter	nc	nc	nc	nc
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	-	-	-	-
	e-time	-	-	-	-
$T_{max} = 1$		M1	M2	M3	M4
$nt = 100$	iter	2.01	2	2	2
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	3.48e-24	3.39e-24	5.83e-15	8.31e-15
$nt = 500$	e-time	519.36	521.74	536.57	509.08
	iter	2.002	2	2	2
	$\ F(x^{(k+1)})\ $	3.75e-31	3.64e-31	7.46e-20	1.07e-19
	e-time	2489.67	2464.47	2631.47	2424.11

Tabla 6.2: Resultados numéricos para diferentes valores de  $T_{max}$ 

Como se puede ver en las Tablas 6.1 y 6.2, no es necesario aumentar el número de subintervalos temporales cuando  $T_{max}$  crece. Es más, debido al alto orden de convergencia de los métodos, el promedio de iteraciones requerido es muy pequeño, así como el valor de  $\|F(x^{(k+1)})\|$ . Por lo que respecta a la estabilidad los métodos, se puede observar que los métodos M1 y M2 tienen comportamientos similares, mientras que M3 y M4 toman mucho más tiempo en converger, cuando lo hacen.

En la Figura 6.12 se muestra la solución aproximada del problema para  $T_{max} = 5$ , tomando  $nt = 100$  y  $nx = 20$ . Se observa que no existe atenuación después de ese tiempo, como se espera del comportamiento de una onda viajera.

Figura 6.12: Gráfica de la solución aproximada para  $t \in [0, 5]$  con  $nt = 100$ 

Este análisis dinámico de la familia de Ostrowski-Chun ha complementado la información cualitativa sobre la estabilidad y confiabilidad de sus elementos que se había obtenido en el Capítulo 5 con el estudio unidimensional. Con este estudio multivariable, se han podido seleccionar de

manera mucho más precisa miembros de la familia con buenas propiedades y evitar los que tienden a ser caóticos o inestables. Se han aplicado elementos de la familia al problema de las ondas viajeras, y se ha observado que los métodos que no mostraron buen comportamiento con un sistema de polinomios de grado dos han tomado más tiempo e iteraciones en converger, cuando lo han hecho. Estos resultados confirman la necesidad de un estudio dinámico multidimensional para analizar los métodos iterativos para sistemas de ecuaciones.

---





# Convergencia semilocal del método de Chun

---

La convergencia semilocal del método de Newton para sistemas fue probada por Kantorovich en [31] utilizando el método de las sucesiones mayorizantes. Rall [34] sugirió una estrategia diferente para probar la convergencia semilocal, basada en relaciones de recurrencia, que consiste en una sucesión de números reales positivos que garantizan la convergencia en un dominio definido.

Ezquerro y Hernández ([77]), Gutiérrez y Hernández ([78], [79]), Parida y Gupta ([80]) y Candela y Marquina ([81], [82]) han utilizado esta idea para probar la convergencia semilocal de varios métodos de distintos órdenes de convergencia. Más recientemente, Amat et al. en [83] han probado la convergencia semilocal de un método de orden 6 para ecuaciones cuadráticas.

La convergencia local del método de Ostrowski fue probada en [27], donde se parte de asumir que las derivadas segunda y tercera de la función estén acotadas para obtener el radio de convergencia alrededor de la raíz y el orden de convergencia del método.

En este capítulo se va a usar la técnica de las relaciones de recurrencia para probar la convergencia semilocal en espacios de Banach del método iterativo de Chun, un método iterativo de cuarto orden que, como se ha visto en el Capítulo 4, puede transferirse al caso multivariable mediante el uso del operador diferencia dividida. Además, es un elemento de la familia de métodos iterativos de la familia de Ostrowski-Chun que ha mostrado ser muy estable tanto en el caso escalar como en el multidimensional.

## 7.1 Relaciones de recurrencia

Sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach y sea  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  un operador no lineal doblemente diferenciable Fréchet en un abierto  $\Omega$ .

El esquema iterativo del método de cuarto orden de Chun para sistemas de ecuaciones es

$$x^{(k+1)} = y^{(k)} - \left(3I - 2\Gamma_k[x^{(k)}, y^{(k)}; F]\right) \Gamma_k F(y^{(k)}), \quad (7.1)$$

donde  $y^{(k)} = x^{(k)} - \Gamma_k F(x^{(k)})$  es el paso de Newton,  $[x, y; F]$  es el operador diferencia dividida, y  $\Gamma_k = [F'(x^{(k)})]^{-1}$ .

Se va a asumir que la inversa de la matriz Jacobiana del sistema en la primera iteración,  $\Gamma_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ , existe en  $x_0 \in \Omega$ , donde  $\mathcal{L}(Y, X)$  es el conjunto de operadores lineales que van de  $Y$  a  $X$ . Aunque todas las expresiones que aparecen en la fórmula iterativa son multivariadas, a partir de este momento, como es habitual en los trabajos sobre convergencia semilocal, se van a utilizar subíndices en lugar de superíndices para hacer la notación menos pesada.

Para demostrar la convergencia semilocal se van a asumir las condiciones de Kantorovich para la convergencia semilocal del método de Newton

- $\|\Gamma_0\| \leq \beta$ ,
- $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$ ,
- $\|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\|$  (condición de Lipschitz),

Para una mayor simplicidad se va a denotar  $a_0 = K\beta\eta$  y a definir la sucesión

$$a_{n+1} = a_n f(a_n)^2 g(a_n), \quad (7.2)$$

y las funciones auxiliares

$$h(x) = x + x^2, \quad (7.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - x(1 + \frac{1}{2}h(x))}, \quad (7.4)$$

y

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\eta} + 1 \right) h(x) + \frac{x}{8} (h(x))^2, \quad (7.5)$$

que jugarán un papel clave en la demostración del resultado principal de este capítulo.

### 7.1.1 Resultados preliminares

La diferencia entre los primeros dos elementos de la sucesión definida en (7.1) es

$$x_1 - x_0 = (y_0 - x_0) - (3I - 2\Gamma_0[x_0, y_0; F])\Gamma_0 F(y_0). \quad (7.6)$$

Desarrollando en serie de Taylor  $F$  alrededor de  $x_0$  y evaluando en  $y_0$

$$F(y_0) = F(x_0) + F'(x_0)(y_0 - x_0) + \int_{x_0}^{y_0} (F'(x) - F'(x_0))dx,$$

donde el término  $F(x_0) + F'(x_0)(y_0 - x_0)$  es igual a cero, ya que se trata del paso de Newton. Mediante el cambio de variable  $x = x_0 + t(y_0 - x_0)$  se obtiene

$$F(y_0) = \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0)) (y_0 - x_0) dt.$$

El operador diferencia dividida se puede expresar de forma integral mediante la fórmula de Genocchi-Hermite  $[x, y; F] = \int_0^1 F'(x + t(y - x))dt$ , véase [36]. Utilizando además la expresión integral de  $F(y_0)$  en (7.6)

$$x_1 - x_0 = (y_0 - x_0) - \left( 3I - 2\Gamma_0 \int_0^1 F'(x_0 + t(y_0 - x_0))dt \right) \\ \Gamma_0 \left( \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt \right),$$

entonces

$$x_1 - x_0 = (y_0 - x_0) - 3\Gamma_0 \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt + \\ + 2\Gamma_0^2 \int_0^1 F'(x_0 + t(y_0 - x_0))dt \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt,$$

sumando y restando  $F'(x_0)$  a la segunda integral se pueden agrupar los términos

$$x_1 - x_0 = (y_0 - x_0) - \Gamma_0 \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt \\ + 2\Gamma_0^2 \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))dt \\ \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt.$$

Tomando la norma de esta última expresión y aplicando la condición de Lipschitz

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|y_0 - x_0\| + \|\Gamma_0\| \frac{K}{2} \|y_0 - x_0\|^2 + 2\|\Gamma_0\|^2 \left[ \frac{K}{2} \|y_0 - x_0\| \right] \frac{K}{2} \|y_0 - x_0\|^2 \\ \leq \eta + \beta \frac{K}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} K^2 \beta^2 \eta^3 = \eta \left( 1 + \frac{1}{2} (a_0 + a_0^2) \right) = \eta \left( 1 + \frac{1}{2} h(a_0) \right),$$

de manera que

$$\|x_1 - x_0\| \leq \eta \left( 1 + \frac{h(a_0)}{2} \right), \quad (7.7)$$

donde  $a_0 = K\beta\eta$  y  $h(x) = x + x^2$ .

Por el lema de Banach (2.8) si  $\|B\| < 1$  entonces  $I - B$  es invertible y  $\|I - B\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$ . Si se toma  $B = \Gamma_0 \Gamma_1^{-1}$

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_1)\| = \|\Gamma_0 F'(x_0) - \Gamma_0 F'(x_1)\| = \|\Gamma_0\| \|F'(x_0) - F'(x_1)\| \\ \leq \beta K \|x_1 - x_0\| = K\beta\eta \left( 1 + \frac{1}{2} (a_0 + a_0^2) \right) = a_0 \left( 1 + \frac{1}{2} h(a_0) \right) < 1,$$

entonces, siempre que  $\|B\| < 1$ , es decir  $a_0(1 + \frac{1}{2}h(a_0)) < 1$ , o lo que es lo mismo  $a_0 < 0.650629$ , el lema de Banach garantiza que  $B^{-1} = \Gamma_1\Gamma_0^{-1}$  existe y

$$\|\Gamma_1\| \leq \frac{1}{1 - a_0(1 + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_0^2)} \|\Gamma_0\| = f(a_0)\|\Gamma_0\|, \quad (7.8)$$

donde  $f(x) = \frac{1}{1 - x(1 + \frac{1}{2}h(x))}$ .

Las siguientes cotas se van a probar por inducción para  $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} (I_n) \quad & \|\Gamma_n\| \leq f(a_{n-1})\|\Gamma_{n-1}\| \\ (II_n) \quad & \|y_n - x_n\| = \|\Gamma_n F(x_n)\| \leq f(a_{n-1})g(a_{n-1})\|y_{n-1} - x_{n-1}\| \\ (III_n) \quad & K\|\Gamma_n\|\|y_n - x_n\| \leq a_n \\ (IV_n) \quad & \|x_n - x_{n-1}\| \leq \left(1 + \frac{1}{2}h(a_{n-1})\right) \|y_{n-1} - x_{n-1}\| \end{aligned}$$

Se va a empezar con  $n = 1$ , por lo que  $(I_1)$  ya se ha probado en (7.8).

$(II_1)$ : se puede desarrollar  $F$  en serie de Taylor alrededor de  $y_0$  y evaluarla en  $x_1$

$$\begin{aligned} F(x_1) &= F(y_0) + F'(y_0)(x_1 - y_0) + \int_{y_0}^{x_1} (F'(x) - F'(y_0))dx \\ &= F(y_0) + (F'(y_0) - F'(x_0))(x_1 - y_0) + F'(x_0)(x_1 - y_0) \\ &\quad + \int_0^1 (F'(y_0 + t(x_1 - y_0)) - F'(y_0))(x_1 - y_0)dt, \end{aligned} \quad (7.9)$$

es necesario calcular  $(x_1 - y_0)$  para poder acotar. Escribiendo los términos de la fórmula iterativa (7.1) en forma integral

$$\begin{aligned} x_1 - y_0 &= -3\Gamma_0 F(y_0) + 2[x_0, y_1; F]\Gamma_0^2 F(y_0) \\ &= -3\Gamma_0 \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt \\ &\quad + 2\Gamma_0^2 \left( \int_0^1 F'(x_0 + t(y_0 - x_0))dt \right) \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt \\ &= -\Gamma_0 \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt \\ &\quad + 2\Gamma_0^2 \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))dt \\ &\quad \int_0^1 (F'(x_0 + t(y_0 - x_0)) - F'(x_0))(y_0 - x_0)dt, \end{aligned}$$

y su norma

$$\|x_1 - y_0\| \leq \frac{1}{2}K\beta\eta^2 + \frac{1}{2}K^2\beta^2\eta^3 = \frac{1}{2}\eta a_0 + \frac{1}{2}\eta a_0^2 = \frac{1}{2}\eta h(a_0). \quad (7.10)$$

Tomando la norma de (7.9) y sustituyendo (7.10)

$$\|F(x_1)\| \leq \frac{1}{2}K\eta^2 + \frac{1}{2}K\eta^2h(a_0) + \frac{1}{2\beta}\eta h(a_0) + \frac{1}{8}K\eta^2(h(a_0))^2,$$

entonces, aplicando  $(I_1)$

$$\begin{aligned} \|y_1 - x_1\| &= \|\Gamma_1 F(x_1)\| = f(a_0)\|\Gamma_0\|\|F(x_1)\| \leq \\ &\leq f(a_0) \left[ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + 1)h(a_0) + \frac{1}{8}a_0(h(a_0))^2 \right] \eta, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|y_1 - x_1\| = f(a_0)g(a_0)\eta \leq f(a_0)g(a_0)\|y_0 - x_0\|,$$

donde

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(x + 1)h(x) + \frac{x}{8}(h(x))^2.$$

$(III_1)$ : usando  $(I_1)$  y  $(II_1)$

$$K\|\Gamma_1\|\|y_1 - x_1\| \leq Kf(a_0)\|\Gamma_0\|f(a_0)g(a_0)\|y_0 - x_0\| = a_0(f(a_0))^2g(a_0) = a_1.$$

$(IV_1)$ : para  $n = 1$  se ha probado en (7.7).

Tomando  $(I_n)$ ,  $(II_n)$ ,  $(III_n)$ ,  $(IV_n)$  como hipótesis inductiva para  $n \geq 1$  se puede probar de manera similar que  $(I_{n+1})$ ,  $(II_{n+1})$ ,  $(III_{n+1})$ ,  $(IV_{n+1})$  también son ciertos y completar la demostración por inducción.

## 7.2 Análisis de la convergencia

Para analizar la convergencia de  $\{x_n\}$  en un espacio de Banach es necesario probar que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy. Para probarlo se van a analizar las propiedades de  $\{a_n\}$  y de las funciones  $h(x)$ ,  $f(x)$  y  $g(x)$ .

**Lema 7.2.1** Sean  $h(x)$ ,  $f(x)$  y  $g(x)$  definidas en (7.3), (7.4) y (7.5). Entonces,

- i)  $f(x)$  es creciente y  $f(x) > 1$  para  $x \in (0, 0.650629)$
- ii)  $h(x)$  y  $g(x)$  son crecientes para  $x \in (0, 0.650629)$

**Lema 7.2.2** Sean  $f(x)$  y  $g(x)$ . Entonces

- i)  $f(a_0)g(a_0) < 1$  para  $a_0 < 0.367826$
- ii)  $f(a_0)^2g(a_0) < 1$  para  $a_0 < 0.300637$
- iii) la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y  $a_n < 0.300637$  para  $n \geq 0$

**Demostración:** De la definición de las funciones  $f, g$  y  $h$  y utilizando un procedimiento gráfico se puede ver que se cumplen (i) y (ii). Como  $f(a_0)^2 g(a_0) < 1$  entonces  $a_n$  es decreciente, por tanto  $a_n < a_0 = 0.300637$ .

**Teorema 7.2.3** Sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach y  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  sea un operador no lineal doblemente diferenciable Fréchet en un abierto  $\Omega$ . Asumiendo que  $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$  existe en  $x_0 \in \Omega$  y haciendo las siguientes suposiciones

- i)  $\|\Gamma_0\| \leq \beta$
- ii)  $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$
- iii)  $\|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\|$

Denotando  $a_0 = K\beta\eta$  y suponiendo que  $0 < a_0 < 0.3$ . Entonces, si  $B(x_0, r\eta) = \{x \in X : \|x - x_0\| < R\eta\} \subset \Omega$  donde  $R = \frac{1 + \frac{1}{2}h(a_0)}{1 - f(a_0)g(a_0)}$ , la sucesión  $\{x_n\}$  definida en (7.1) y empezando en  $x_0$  converge a la solución  $x^*$  de la ecuación  $F(x) = 0$ . En ese caso, tanto la solución como los iterados  $\{x_n\}$  y  $\{y_n\}$  están contenidos en  $B(x_0, R\eta)$  y  $x^*$  es la única solución de  $F(x) = 0$  en  $B = (x_0, \frac{2}{K\beta}R\eta)$

**Demostración:** Aplicando sucesivamente  $(IV_n)$  se puede escribir

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \left(\frac{h(a_n)}{2} + 1\right) \|y_n - x_n\| \\ &\leq \left(\frac{h(a_n)}{2} + 1\right) f(a_{n-1})g(a_{n-1}) \|y_{n-1} - x_{n-1}\| \\ &\leq \dots \leq \left(\frac{h(a_n)}{2} + 1\right) \left[ \prod_{j=0}^{n-1} f(a_j)g(a_j) \right] \|y_0 - x_0\|, \end{aligned} \quad (7.11)$$

entonces

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + \|x_{n+m-1} - x_{n+m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \left(\frac{h(a_{n+m-1})}{2} + 1\right) \eta \prod_{j=0}^{n+m-2} f(a_j)g(a_j) + \left(\frac{h(a_{n+m-2})}{2} + 1\right) \eta \prod_{j=0}^{n+m-3} f(a_j)g(a_j) \\ &+ \dots + \left(\frac{h(a_n)}{2} + 1\right) \eta \prod_{j=0}^{n-1} f(a_j)g(a_j), \end{aligned}$$

como  $h(x)$  es creciente y  $a_n$  decreciente

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \left(\frac{h(a_n)}{2} + 1\right) \eta \sum_{l=0}^{m-1} \left[ \prod_{j=0}^{n+l-1} f(a_j)g(a_j) \right] \\ &\leq \left(\frac{h(a_n)}{2} + 1\right) \eta \sum_{l=0}^{m-1} (f(a_0)g(a_0))^{l+n} \end{aligned}$$

como por los lemas 7.2.1 y 7.2.2,  $f$  y  $g$  son crecientes y  $a_n$  decreciente, se puede aplicar la expresión para la suma parcial de una serie geométrica

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \left( \frac{h(a_0)}{2} + 1 \right) \frac{1 - (f(a_0)g(a_0))^m}{1 - f(a_0)g(a_0)} (f(a_0)g(a_0))^n \eta.$$

Por lo que se concluye que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy si y solo si  $f(a_0)g(a_0) < 1$

Para  $n = 0$

$$\|x_m - x_0\| \leq \left( \frac{h(a_0)}{2} + 1 \right) \frac{1 - (f(a_0)g(a_0))^m}{1 - f(a_0)g(a_0)} \eta \leq R\eta,$$

haciendo  $m \rightarrow \infty$  se obtiene el radio de convergencia  $R = \frac{1 + \frac{1}{2}h(a_0)}{1 - f(a_0)g(a_0)}$ .

Para probar que  $x^*$  es solución de  $F(x) = 0$  se debe empezar acotando  $\|F'(x_n)\|$ ,

$$\begin{aligned} \|F'(x_n)\| &\leq \|F'(x_0)\| + \|F'(x_n) - F'(x_0)\| \\ &\leq \|F'(x_0)\| + K\|x_n - x_0\| \\ &\leq \|F'(x_0)\| + KR\eta. \end{aligned}$$

Entonces de (7.11)

$$\begin{aligned} \|F(x_n)\| &\leq \|F'(x_n)\| \|x_n - x_0\| \\ &\leq \|F'(x_n)\| \left( \frac{h(a_n)}{2} + 1 \right) \left[ \prod_{j=0}^{n-1} f(a_j)g(a_j) \right] \eta \end{aligned}$$

como  $h, f$  y  $g$  son crecientes y  $a_n$  decreciente

$$\|F(x_n)\| \leq \|F'(x_n)\| \left( \frac{h(a_n)}{2} + 1 \right) (f(a_0)g(a_0))^n \eta$$

como  $\|F'(x_n)\|$  está acotada y  $(f(a_0)g(a_0))^n$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , se puede concluir que  $\|F(x_n)\| \rightarrow 0$ . Por la continuidad de  $F$  en  $\Omega_0$ , entonces  $F(x^*) = 0$ .

Finalmente se va a probar la unicidad de  $x^*$  en  $B = (x_0, \frac{2}{K\beta}R\eta) \cap \Omega_0$ . Se va a asumir que  $y^*$  es otra solución de  $F(x) = 0$  en  $B = (x_0, \frac{2}{K\beta}R\eta) \cap \Omega_0$ , y se va a probar que  $x^* = y^*$ . Partiendo del desarrollo en serie de Taylor de  $F$  alrededor de  $x^*$

$$F(x) = F(x^*) + \int_0^1 F'(x^* + t(x - x^*))(x - x^*) dt,$$

y evaluando la serie en  $y^*$

$$F(y^*) = F(x^*) + \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*))(y^* - x^*) dt,$$

de forma que

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = (y^* - x^*) \int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt.$$

Para garantizar que  $(y^* - x^*) = 0$  es necesario demostrar que el operador  $\int_0^1 F'(x^* + t(y^* - x^*)) dt$  es invertible. Aplicando la hipótesis (iii)

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0\| \int_0^1 \|F'(x^* + t(y^* - x^*)) - F'(x_0)\| dt &\leq K\beta \int_0^1 \|x^* + t(y^* - x^*) - x_0\| dt \\ &\leq K\beta \int_0^1 ((1-t)\|x - x_0\| + t\|y^* - x_0\|) dt \\ &< \frac{K\beta}{2} \left( R\eta + \frac{2}{K\beta} - R\eta \right) = 1 \end{aligned}$$

por el lema de Banach el operador es invertible, por tanto  $y^* = x^*$ .  $\square$

## 7.3 Aplicaciones

Se van a comprobar los resultados obtenidos en un problema aplicado, la resolución de una ecuación integral de tipo Hammerstein.

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t)x(t)^2 dt, \quad s \in [0,1], \quad t \in [0,1] \quad (7.12)$$

donde  $x \in C(0,1)$ ,  $t \in [0,1]$  y el núcleo es  $G(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & t \leq s \\ s(1-t), & s \leq t \end{cases}$

Para resolver la ecuación (7.12) se va a transformar en un sistema de ecuaciones no lineales mediante un proceso de discretización. Se puede aproximar la integral que aparece en (7.12) usando la cuadratura de Gauss-Legendre

$$\int_0^1 h(t) dt \approx \sum_{i=1}^m w_i h(t_i) \quad (7.13)$$

donde  $t_i$  y  $w_i$  son los nodos y pesos del polinomio de Gauss-Legendre respectivamente. Denotando la aproximación de  $x(t_i)$  como  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) entonces (7.12) se puede aproximar por el sistema de ecuaciones no lineales

$$x_i = 1 + \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j^2, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.14)$$

donde  $a_{ij} = \begin{cases} w_j t_j (1 - t_i), & j \leq i \\ w_j t_i (1 - t_j), & j > i \end{cases}$

El sistema puede escribirse como

$$\begin{aligned} F(x) &= x - 1 - Av_x, & v_x &= [x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2]^T \\ F'(x) &= I - 2AD(x), & D(x) &= \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$



Se va a utilizar el método de Chun (7.1) para resolver el sistema no lineal.

Tomando  $x_0 = (1.7, 1.7, \dots, 1.7)$ ,  $m = 8$  y la norma máximo se obtiene

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0\| &\leq \beta, & \beta &\approx 1.6550 \\ \|\Gamma_0 F(x_0)\| &\leq \eta, & \eta &\approx 0.6927 \\ \|F'(x) - F'(y)\| &\leq k\|x - y\|, & k &\approx 0.2471 \\ a_0 &= k\beta\eta, & a_0 &\approx 0.2833 \end{aligned}$$

Se cumplen las condiciones de convergencia y en consecuencia se puede aplicar el método al sistema. Además, por el Teorema 7.2.3 se puede garantizar la existencia de la solución en  $B(x_0, 3.3263)$ , y la unicidad en  $B(x_0, 9.3249)$ .

La solución aproximada del sistema (7.14) después de 4 iteraciones del método de Chun y tomando como criterio de parada  $\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty < 10^{-180}$  o  $\|F(x_n)\|_\infty < 10^{-180}$  es

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	1.0122...	1.0584...	1.1181...	1.1598...	1.1598...	1.1181...	1.0584...	1.0122...

Tabla 7.1: Solución numérica de (7.14)

Como era de esperar el método converge a la solución si se cumplen las condiciones de Kantorovich, lo que no significa que el método necesariamente no converja aunque las condiciones no se cumplan. Este tipo de demostraciones de convergencia semilocal que garantizan la existencia y unicidad de la solución bajo unos supuestos son especialmente valiosas en procesos no supervisados que siempre requieren una solución correcta.

---

## Conclusiones y líneas futuras

---

En esta tesis se han introducido los conceptos y herramientas que se utilizan en el estudio de la dinámica de los métodos iterativos. Se ha mostrado la importancia de incluir este estudio, y no solamente el orden de convergencia, a la hora de analizar una familia de métodos iterativos, y también a la hora de establecer criterios para seleccionar los mejores miembros de dicha familia.

También se ha utilizado el operador diferencia dividida para extender métodos de ecuaciones no lineales a sistemas de ecuaciones no lineales, y se ha diseñado y estudiado una familia bi-paramétrica, adaptando cuando ha sido necesario las herramientas de la dinámica compleja.

Además, se ha extendido la familia a sistemas de ecuaciones no lineales y se han utilizado herramientas de la dinámica real al caso multivariable para así hacer posibles estudios dinámicos de métodos para sistemas.

Se han usado casos académicos pero también casos aplicados para probar el buen comportamiento de los métodos propuestos.

Entre las líneas futuras destaca el diseño y estudio dinámico de métodos con memoria.



# Anexos: Rutinas dinámicas en MATLAB

---

## 9.1 Plano dinámico para el método de Newton

```

% plano_dinamico f(x)=x^2-1
clear;
tic
numNodosx = 200; numNodosy = 200;
maxIter   = 20;
tol       = 0.001;

syms x;
f = @(x) x^2-1; % problema a resolver
fp = @(x) 2*x;
r = solve(f(x)==0); % soluciones analiticas
r1 = double(r(1)); r2=double(r(2));

n = @(x) x - f(x)/fp(x);
s = @(x) x - f(x)^2/(f(x + f(x))-f(x));

numPuntos = (numNodosx+1)*(numNodosy+1);
xini= -3; xfin=3; yini= -3; yfin=3;
dx = (xfin-xini)/numNodosx;
dy = (yfin-yini)/numNodosy;
[X,Y] = meshgrid(xini:dx:xfin,yini:dy:yfin);

R=zeros(size(X));G=zeros(size(X));B=zeros(size(X));

[rows,cols] = size(X);

for i=1:rows
    for j=1:cols
        x = complex(X(i,j),Y(i,j));
        iter = 0;
        e = 1000;
        while iter<maxIter && e > tol
            an = x;
            %x = n(x);          % Newton

```

```

        x = s(x);          %Steffensen
        e = abs(an-x);
        iter = iter + 1;
    end
    d1 = abs(r1-x); % distancia a las raices
    d2 = abs(r2-x);
    if d2<tol %convergio a la primera raiz
        R(i,j) = (1-iter/maxIter);
    elseif d1<tol %convergio a la segunda raiz
        B(i,j) = (1-iter/maxIter);
    else % no converge
        R(i,j) = 0;
        G(i,j) = 0;
        B(i,j) = 0;
    end
end
end
I(:, :, 1)=R(:, :);
I(:, :, 2)=G(:, :);
I(:, :, 3)=B(:, :);
figura = imshow(I, 'X', [xini, xfin], 'Y', [yini, yfin]);
xlabel('Re'); ylabel('Im');
hold on, axis on, axis xy, grid
plot(real(r1), imag(r1), 'w+', 'MarkerSize', 5);
plot(real(r2), imag(r2), 'w+', 'MarkerSize', 5);
toc

[punto1, punto2] = ginput(1); % Punto cuya orbita se dibuja
p0 = complex(punto1, punto2);
plot(punto1, punto2, 'w+', 'MarkerSize', 5)

n_lineas = 0;
while (n_lineas<maxIter)
    x = p0;
    x = x - f(x)/fp(x);
    p = x;
    plot(real(p), imag(p), 'w+', 'MarkerSize', 5);
    line([real(p0) real(p)], [imag(p0) imag(p)], ...
        'Color', 'w', 'LineWidth', 2);
    pause(0.2);
    p0 = p;
    n_lineas = n_lineas + 1;
end

```

## 9.2 Plano dinámico con la transformación de Moebius

```

% plano_dinamico f(x)=x^2-1 con la
% transformacion de Moebius
clear;
tic
numNodosx = 500; numNodosy = 500;
maxIter = 20;
tol = 0.001;

% obtencion del operador para el metodo
% de Newton sobre f
syms x c y;
f = x^2-c; % problema a resolver
df = 2*x;
n = simplify(x - f/df);
%fy = simplify(subs(f,x,y));
%op = matlabFunction(n); % operador

% transformacion de Moebius para Newton
h = (x-sqrt(c))/(x+sqrt(c));
hinvs = -sqrt(c)*(1+x)/(x-1);
a = simplify(subs(n,x,hinv));
b = simplify(subs(h,x,a));
op = matlabFunction(b); % operador

numPuntos = (numNodosx+1)*(numNodosy+1);
xini = -3; xfin = 3; yini = -3; yfin = 3;
dx = (xfin-xini)/numNodosx;
dy = (yfin-yini)/numNodosy;
[X,Y] = meshgrid(xini:dx:xfin,yini:dy:yfin);

R=zeros(size(X));G=zeros(size(X));B=zeros(size(X));

[rows,cols] = size(X);
% recorre todos los puntos de la malla
for i=1:rows
    for j=1:cols
        x = complex(X(i,j),Y(i,j));
        iter = 0;
        e = 1000;
        %x = complex(-.2057 ,1.6143);
        while iter<maxIter && e > tol && abs(x)<1000 && ~isnan(x) && ~isinf(x)
            an = x;
            x = op(x); % operador de punto fijo
            e = abs(an-x);
            iter = iter + 1;
        end

        d = abs(x); % distancia a las raices
        if d<tol %convergio a 0
            R(i,j) = (1-iter/maxIter);
        elseif d>1000 %convergio a inf

```

```

        B(i,j) = (1-iter/maxIter);
    else          % no converge a una raiz
        R(i,j) = 0;
        G(i,j) = 0;
        B(i,j) = 0;
    end
end
end
I(:,:,1)=R(:,:,);
I(:,:,2)=G(:,:,);
I(:,:,3)=B(:,:,);
figura = imshow(I,'X',[xini,xfin],'Y',[yini,yfin]);
xlabel('Re'); ylabel('Im');
hold on, axis on, axis xy
plot(0,0,'w+', 'MarkerSize',5);
toc

[punto1,punto2] = ginput(1); % Punto cuya orbita se dibuja
p0 = complex(punto1,punto2);
plot(punto1,punto2,'w+', 'MarkerSize',5)

n_lineas = 0;
while (n_lineas<maxIter)
    x = p0;
    x = op(x);
    p = x;
    plot(real(p),imag(p),'w+', 'MarkerSize',5);
    line([real(p0) real(p)],[imag(p0) imag(p)],...
        'Color','w','LineWidth',2);
    pause(0.2);
    p0 = p;
    n_lineas = n_lineas + 1;
end

```



### 9.3 Plano de parámetros para la familia de King

```

% plano de parametros
clear;
numNodos = 200*200;
maxIter = 20;
tol = 0.001;

% obtencion del operador para el metodo
% de King sobre f
syms x c y beta;
f = x^2-c; % problema a resolver
df = 2*x;
y = simplify(x - f/df);
fy = simplify(subs(f,x,y));
k = simplify(y-((f+(2+beta)*fy)/(f+beta*fy))*(fy/df));
% king

% transformacion de Moebius
h = (x-sqrt(c))/(x+sqrt(c));
hinv = -sqrt(c)*(1+x)/(x-1);
a = simplify(subs(k,x,hinv));
b = simplify(subs(h,x,a));
op = matlabFunction(b); % operador

% obtencion de los criticos
opp = diff(b,x);
c = solve(opp==0);

% definicion de la malla y el numero de puntos
xini= -5.5; xfin=5; yini= -3; yfin=3;
dx=(xfin-xini); dy=(yfin-yini); d=max(dx,dy);
paso = d/ceil(sqrt(numNodos));
x=xini:paso:xfin;
y=yini:paso:yfin;

[X,Y]=meshgrid(x,y);

R=zeros(size(X));
G=zeros(size(X));
B=zeros(size(X));

[rows,cols]=size(X);

for i=1:rows
    for j=1:cols
        beta = complex(X(i,j),Y(i,j));
        iter = 0;
        e = 1000;
        %x0 = -1;
        x0 = -((20 + 14*beta + 3*beta^2 + sqrt(3)* ...
            sqrt(beta*(80 + 84 *beta + 28 *beta^2 + ...
            3 *beta^3)))/(20 + 8 *beta)); % critico libre king
        % itera hasta llegar al maximo de iteraciones o al error

```

```

    % partiendo del critico libre
    raiz_encontrada = 0;
    while iter < maxIter && raiz_encontrada == 0 %%% e > tol
        an = x0;
        x0 = op(beta,x0); % operador de punto fijo
        e = abs(an-x0);
        iter = iter + 1;

        % comprueba si se ha llegado a alguna raiz
        norma = norm(x0);
        if norma < tol || norma > 1000 || isnan(norma)
            raiz_encontrada = 1;
            R(i,j) = 1 - iter / (maxIter + 1);
        end
    end

end

end

I(:, :, 1) = R(:, :);
I(:, :, 2) = G(:, :);
I(:, :, 3) = B(:, :);
imshow(I, 'X', [xini, xfin], 'Y', [yini, yfin]);
xlabel('Re'); ylabel('Im');
hold on
axis on, axis xy, grid

```

## 9.4 Plano dinámico para la familia de King

```

% plano_dinamico f(x)=x^2-1 con la
% transformacion de Moebius para King
clear;
tic
numNodosx = 500; numNodosy = 500;
maxIter = 20;
tol = 0.01;

% obtencion del operador para el metodo
% de King sobre f
syms x c y beta;
f = x^2-c; % problema a resolver
df = 2*x;
y = simplify(x - f/df);
fy = simplify(subs(f,x,y));
k = simplify(y-((f+(2+beta)*fy)/(f+beta*fy))*(fy/df));
% king

% transformacion de Moebius
h = (x-sqrt(c))/(x+sqrt(c));
hinvs = -sqrt(c)*(1+x)/(x-1);
a = simplify(subs(k,x,hinv));
b = simplify(subs(h,x,a));
beta = -4; % metodo en particular
b = simplify(eval(b));
op = matlabFunction(b); % operador

numPuntos = (numNodosx+1)*(numNodosy+1);
xini= -3; xfin=3; yini= -3; yfin=3;
dx = (xfin-xini)/numNodosx;
dy = (yfin-yini)/numNodosy;
[X,Y] = meshgrid(xini:dx:xfin,yini:dy:yfin);

R=zeros(size(X));G=zeros(size(X));B=zeros(size(X));

[rows,cols] = size(X);
% recorre todos los puntos de la malla
for i=1:rows
    for j=1:cols
        x = complex(X(i,j),Y(i,j));
        iter = 0;
        e = 1000;

        while iter<maxIter && e > tol && abs(x)<1000
            an = x;
            x = op(x); % operador de punto fijo
            e = abs(an-x);
            iter = iter + 1;
        end

        d = abs(x); % distancia a las raices
        if d<tol %convergio a 0

```

```

        R(i,j) = (1-iter/maxIter);
    elseif d>1000 %convergio a inf
        B(i,j) = (1-iter/maxIter);
    else % no converge a una raiz
        R(i,j) = 0;
        G(i,j) = 0;
        B(i,j) = 0;
    end
end
end
I(:,:,1)=R(:,:,);
I(:,:,2)=G(:,:,);
I(:,:,3)=B(:,:,);
figura = imshow(I,'X',[xini,xfin],'Y',[yini,yfin]);
xlabel('Re'); ylabel('Im');
hold on, axis on, axis xy
plot(0,0,'w+', 'MarkerSize',5);
toc

[punto1,punto2] = ginput(1); % Punto cuya orbita se dibuja
p0 = complex(punto1,punto2);
plot(punto1,punto2,'w+', 'MarkerSize',5)

n_lineas = 0;
while (n_lineas<maxIter)
    x = p0;
    x = op(x);
    p = x;
    plot(real(p),imag(p),'w+', 'MarkerSize',5);
    line([real(p0) real(p)],[imag(p0) imag(p)],...
        'Color','w', 'LineWidth',2);
    pause(0.2);
    p0 = p;
    n_lineas = n_lineas + 1;
end

```

## 9.5 Implementación del operador diferencia dividida de segundo orden

```
function TDD = divdiff_orden2(fun,X,Y)

    [ p, m ] = size(X'); % m puntos

    TDD =vpa( zeros(m, m));
    for j = 1 : m
        v1=X; v1(1:j)=Y(1:j);
        v2=X; v2(1:j-1)=Y(1:j-1);
        [Fv1,~]=feval(fun,vpa(v1));
        [Fv2,~]=feval(fun,vpa(v2));

        v3=X; v3(j:end)=Y(j:end);
        v4=X; v4(j+1:end)=Y(j+1:end);
        [Fv3,~]=feval(fun,vpa(v3));
        [Fv4,~]=feval(fun,vpa(v4));

        TDD(:,j)=vpa((Fv1(:)-Fv2(:)+Fv3(:)-Fv4(:))/(2*(Y(j)-X(j))));
    end
```

## 9.6 Plano dinámico para la familia OC

```

% plano_dinamico f(x)=x^2-1 con la
% transformacion de Moebius
clear;
tic
numNodosx = 400; numNodosy = 400;
maxIter    = 30;
tol        = 1e-3;

% obtencion del operador para el metodo
% de Newton sobre f
syms x c y;
% metodo en particular
a1=1;b2=2;

f = x^2-c; % problema a resolver
df = 2*x;
y = simplify(x - f/df); % Newton
fy = simplify(subs(f,x,y));
k = simplify(y-(1/a1)*((f/(f+a1*(b2-2)*fy)+...
    ((a1-1)*f+a1*b2*fy)/f))*(fy/df)); %OC

% transformacion de Moebius
h = (x-sqrt(c))/(x+sqrt(c));
hinv = -sqrt(c)*(1+x)/(x-1);
a = simplify(subs(k,x,hinv));
b = simplify(subs(h,x,a));
op = matlabFunction(b); % operador

numPuntos = (numNodosx+1)*(numNodosy+1);
xini= -3.75; xfin=3; yini= -3; yfin=3;
dx = (xfin-xini)/numNodosx;
dy = (yfin-yini)/numNodosy;
[X,Y] = meshgrid(xini:dx:xfin,yini:dy:yfin);

R=zeros(size(X));G=zeros(size(X));B=zeros(size(X));

% hijos
pf = double(solve(op(x)==x));

[rows,cols] = size(X);
% recorre todos los puntos de la malla
for i=1:rows
    for j=1:cols
        x = complex(X(i,j),Y(i,j));
        iter = 0;
        e = 1000;
        while iter<maxIter && (abs(x)>tol && abs(x)<1100) ...
            && ~isnan(x) && ~isinf(x) %EE e > tol
            an = x;
            x = op(x); % operador de punto fijo
            e = abs(an-x);
            iter = iter + 1;
        end
    end
end

```

```

end

% averigua a que punto fijo ha convergido
d = abs(pf-x);
if d>1000 %convergio a inf
    B(i,j) = (1-iter/maxIter);
else
    n = find(d<tol);
    if n==1 % cero
        R(i,j) = (1-iter/maxIter);
    elseif n==2 % 1
        G(i,j) = (1-0.3*iter/maxIter);
        R(i,j) = (1-0.3*iter/maxIter);
    elseif n>3
        G(i,j) = (1-(n/10)*iter/maxIter);
        R(i,j) = (1-(n/10)*iter/maxIter);
    else
        R(i,j) = 0;
        G(i,j) = 0;
        B(i,j) = 0;
    end
end
end

end
end
save('plano.mat','R','G','B','a1','b2','op',...
    'maxIter','xini','xfin','yini','yfin','pf');
I(:,:,1)=R(:,:,);
I(:,:,2)=G(:,:,);
I(:,:,3)=B(:,:,);
figura = imshow(I,'X',[xini,xfin],'Y',[yini,yfin]);
xlabel('Re'); ylabel('Im');
hold on, axis on, axis xy, grid
%plot(0,0,'w+','MarkerSize',5);
toc

for pf1=pf
    plot(real(pf1),imag(pf1),'w+','MarkerSize',5)
end

[punto1,punto2] = ginput(1); % Punto cuya orbita se dibuja
p0 = complex(punto1,punto2);
double(p0)

plot(punto1,punto2,'w+','MarkerSize',5)

n_lineas = 0;
while (n_lineas<maxIter)
    x = p0;
    x = op(x);
    p = x;
    plot(real(p),imag(p),'w+','MarkerSize',5);
    line([real(p0) real(p)],[imag(p0) imag(p)],...
        'Color','w','LineWidth',2);

```

```
    pause(0.2);  
    p0 = p;  
    n_lineas = n_lineas + 1;  
end  
double(p)
```



## 9.7 Plano de parámetros para la familia OC

```

% plano de parametros
tic
clear;
numNodos = 400*400;
maxIter = 40;
tol = 0.001;

% obtencion del operador para la familia
% de OC sobre f
syms x c y a1 b2;
f = x^2-c; % problema a resolver
df = 2*x;
y = simplify(x - f/df);
fy = simplify(subs(f,x,y));
k = simplify(y-(1/a1)*((f/(f+a1*(b2-2)*fy)+...
    ((a1-1)*f+a1*b2*fy)/f))*(fy/df));
% OC

% transformacion de Moebius
h = (x-sqrt(c))/(x+sqrt(c));
hinv = -sqrt(c)*(1+x)/(x-1);
a = simplify(subs(k,x,hinv));
b = simplify(subs(h,x,a));
op = matlabFunction(b); % operador

% obtencion de los criticos
opp = matlabFunction(diff(op,x));
c = solve(opp(a1,b2,x)==0);

% definicion de la malla y el numero de puntos
xini= -10; xfin=10; yini= -10; yfin=10;
dx=(xfin-xini); dy=(yfin-yini); d=max(dx,dy);
paso = d/ceil(sqrt(numNodos));
x=xini:paso:xfin;
y=yini:paso:yfin;

[X,Y]=meshgrid(x,y);

R=zeros(size(X));
G=zeros(size(X));
B=zeros(size(X));

[rows,cols]=size(X);

for i=1:rows
    for j=1:cols
        a1 = X(i,j);
        b2 = Y(i,j);
        iter = 0;
        e = 1000;

        % criticos OC

```

```

N1=80+(-3).*a1.^2.*((-2)+b2).^3+(-2).*a1.*(44+(-24).*b2+b2.^2);
D1=(-5)+a1.*((-2)+b2).^2;
R1=a1.^2.*((-2)+b2).^3.*((-72)+9.*a1.^2.*((-2)+b2).^3+196.*b2...
+4.*a1.*(36+(-56).*b2+19.*b2.^2));
N2=32.*(30+a1.^2.*((-2)+b2).^2.*(3+b2)+a1.*((-36)+16.*b2+b2.^2));
N3=(-80)+3.*a1.^2.*((-2)+b2).^3+2.*a1.*(44+(-24).*b2+b2.^2);

%zc1
xc1=(1/16).*(N1./D1 - sqrt(R1./((D1).^2)) - ...
sqrt(2).*(sqrt(-64 + ((-N1).^2)/((D1).^2)) + ...
N2./D1 + ((N3).*sqrt(R1./((D1).^2)))/D1));
% xc2
xc2=(1/16).*(N1./D1 - sqrt(R1./((D1).^2)) + ...
sqrt(2).*(sqrt(-64 + ((-N1).^2)/((D1).^2)) + ...
N2./D1 + ((N3).*sqrt(R1./((D1).^2)))/D1));
%xc3
xc3=(1/16).*(N1./D1 + sqrt(R1./((D1).^2)) - ...
sqrt(2).*(sqrt(-64 + ((-N1).^2)/((D1).^2)) + ...
N2./D1 + ((N1).*sqrt(R1./((D1).^2)))/D1));
%xc4
xc4=(1/16).*(N1./D1 + sqrt(R1./((D1).^2)) + ...
sqrt(2).*(sqrt(-64 + ((-N1).^2)/((D1).^2)) + ...
N2./D1 + ((N1).*sqrt(R1./((D1).^2)))/D1));

% establece el critico que se usa como estimacion inicial
x0 = xc1;
%syms x;
%xc = double(subs(c(3),[a1,b2],[X(i,j),Y(i,j)]));
%x0 = double(xc);

% itera hasta llegar al maximo de iteraciones o al error
% partiendo del critico libre
raiz_encontrada = 0;
while iter<maxIter && raiz_encontrada==0%0 e > tol
    an = x0;
    x0 = op(a1,b2,x0); % operador de punto fijo
    %x0 = op(X(i,j),Y(i,j),x0); % operador de punto fijo
    e = abs(an-x0);
    iter = iter + 1;

% comprueba si se ha llegado a alguna raiz
norma = norm(x0);
if norma<tol || norma>1000 || isnan(norma)
    raiz_encontrada = 1;
    R(i,j)=1-iter/(maxIter+1);
end
end

end

end

I(:,:,1)=R(:,:,);
I(:,:,2)=G(:,:,);
I(:,:,3)=B(:,:,);
imshow(I,'X',[xini,xfin],'Y',[yini,yfin]);

```

```
xlabel('Re'); ylabel('Im');  
hold on  
axis on, axis xy, grid  
toc
```

---



# Bibliografía

---

- [1] N.Bieanie, K.H.Johnson *Who was '-Raphson'?* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14 (1979), 148-152.
- [2] I.R. Ivic, D.S. Zrnic, T. Yu, *Threshold Calculation for Coherent Detection in Dual - Polarization Weather Radars*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 48(3) (2012) 2198–2215.
- [3] F. Zus, M. Bender, Z. Deng, G. Dick, S. Heise, M. Shang-Guan, J. Wickert, *A methodology to compute GPS slant total delays in a numerical weather model*, Radio Science, 47(2) (2012).
- [4] D.F. Gill, Y.Y. Azmy, *Newton's method for solving k-eigenvalue problems in neutron diffusion theory*, Nuclear Science and Engineering, 167(2) (2011) 141–153.
- [5] G. Hansen, *A Jacobian-free Newton Krylov method for mortar-discretized thermomechanical contact problems*, Journal of Computational Physics 230(17) (2011) 6546–6562.
- [6] I. L. Davies, C. T. Freeman, P. L. Lewin, E. Rogers, D. H. Owens, *Newton Method based Iterative Learning Control of the Upper Limb*, 2008 American Control Conference, Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington, USA, June 11-13, 2008.
- [7] C.H. Ko, J.S. Chen, *Optimal Grasping Manipulation for Multifingered Robots Using Semismooth Newton Method*, Mathematical Problems in Engineering, 2013, Article ID 681710 (2013) 9 pages, doi:10.1155/2013/681710.
- [8] A.M. Ostrowski, *Solution of equations and systems of equations*, Academic Press, New York, 1960.
- [9] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- [10] H.T. Kung, J.F. Traub, *Optimal order of one-point and multipoint iteration*, J. Assoc. Comput. Math. 21 (1974) 643–651.
- [11] A. Cordero, J. García-Maimó, J.R. Torregrosa, M.P. Vassileva, P. Vindel, *Chaos in King's iterative family*, Applied Mathematics Letters 26 (2013) 842–848.
- [12] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1964).
- [13] S.Weerakoon, T.G.I.Fernando, *A variant of Newton's method with Accelerated Third-Order Convergence*, Applied Mathematic Letters 13 (2000) 87-93.

- [14] A. Cordero, J.R. Torregrosa, *Variants of Newton's method using fifth- order quadrature formulas*, Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 686–698.
- [15] R. L. DEVANEY *The Mandelbrot Set, the Farey Tree and the Fibonacci sequence*. Am. Math. Monthly, 106(4) (1999) 289-302.
- [16] P. BLANCHARD *The Dynamics of Newton's method*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 49 (1994) 139-152.
- [17] F. Chicharro, A. Cordero, J.M. Gutiérrez, J.R. Torregrosa *Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations*. Applied Mathematics and Computation 219 (2013) 7023-7035.
- [18] J. Curry, L. Garnet, D. Sullivan. *On the iteration of a rational function: computer experiments with Newton's method*, Comm. Math. Phys. 91 (1983) 267–277.
- [19] R. F. King, *A family of fourth-order methods for nonlinear equations*, SIAM Journal Numerical Analysis 10(5) (1973) 876–879.
- [20] S.Amat, S.Busquier, S.Plaza *Dynamics of the King and Jarratt iterations* Aequationes Math. 69 (2005) 212-223.
- [21] M. Grau-Sánchez, M. Noguera, S. Amat, *On the approximation of derivatives using divided difference operators preserving the local convergence order of iterative methods*, Journal of Computational and Applied Mathematics 237 (2013) 363–372.
- [22] S. Amat, R. Busquier, S. Plaza *Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view*, Scientia, Mathematical Sciences 10 (2004) 3–35.
- [23] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. mat. Fr., 47 (1919) 161–271; 48 (1920), 33–94; 208–314.
- [24] G. Julia, *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, J. Mat. Pur. Appl., 8 (1918), 47–245.
- [25] F. I. CHICHARRO, A. CORDERO, J. R. TORREGROSA *Drawing Dynamical Parameters Planes of Iterative Families and Methods*. The Scientific World Journal, Volume 2013, Article ID 780153, 11 pages.
- [26] A. Cordero, J. García-Maimó, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, *Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families*, Journal of Mathematical Chemistry, 53 (2015) 430–449
- [27] W. Bi, Q. Wu, H. Ren, *Convergence ball and error analysis of Ostrowski-Traub's method*. Appl. Math. J. Chinese, 25(3) (2010) 374–378
- [28] J.P. Boyd, *An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation*. Journal Scientific Computing, 1(2) (1986) 183-206.
- [29] A. Cordero, J. R. Torregrosa, *Low complexity root-finding iteration functions with no derivatives of any order of convergence* Journal of Computational and Applied Mathematics, 275 (2015) 502.515
- [30] J.F. Steffensen, *Remarks on iteration*. Skand. Aktuar Tidskr. 16 (1933) 64-72

- 
- [31] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov *Functional analysis*. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [32] Megginson, Robert E. *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.
- [33] K. Hoffman *Banach Spaces of Analytic Functions*, Dover, 1990.
- [34] L.B. Rall, *Computational solution of nonlinear equations*. Robert E.Krieger Publishing Company, New York, 1969.
- [35] Ortega, J. M. *Numerical Analysis: A Second Course. Classics in Applied Mathematics*, vol. 3. Philadelphia: SIAM. (1990)
- [36] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic, New York, 1970.
- [37] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *A modified Newton Jarratt composition*, Numer.Algorithms, 55 (2010) 87-99.
- [38] P.Jarratt *Some fourth order multipoint methods for solving equations*, Mathematics and Computation, 20 (1966) 434-437.
- [39] Z.Liu, Q.Zheng, P.Zhao *A variant of Steffensens method of fourth-order convergence and its applications*, Appl.Math.Comput, 216 (2010) 1978-1983.
- [40] A. Cordero, J.R. Torregrosa *A class of Steffensens type methods with optimal order of convergence*, Appl.Math.Comput, 217 (2011) 7653-7659.
- [41] A. Cordero, J.G.Maimó, J.R. Torregrosa, M.P. Vassileva, *Multidimensional stability analysis of a family of biparametric iterative methods*, Journal of Mathematical Chemistry, 55 (2016) 1461-1480
- [42] F. Soleymani, T. Lotfi, P. Bakhtiari, *A multi-step class of iterative methods for nonlinear systems*. Optim. Lett. 8 (2014) 1001-1015.
- [43] M. Abad, A. Cordero, J. R. Torregrosa, *A family of seventh-order schemes for solving nonlinear systems*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 57(105) No. 2 (2014) 133-145.
- [44] S. Abbasbandy, *Extended Newton's method for a system of nonlinear equations by modified Adomian decomposition method*, Applied Mathematics and Computation 170 (2005) 648-656.
- [45] I.K. Argyros, A. Cordero, A.A. Magreñan, J.R. Torregrosa, *On the convergence of a damped secant method with modified right-hand side vector*, Applied Mathematics and Computation 252 (2015) 315-323.
- [46] S. Amat, M.A. Hernández-Verón, N. Romero, *Semilocal convergence of a sixth-order iterative method for quadratic equations*, Applied Numerical Mathematics 62 (2012) 833-841.
- [47] S. Artidiello, A. Cordero, J.R. Torregrosa, M.P. Vassileva, *Two weighted eight-order classes of iterative root-finding methods*, International Journal Computer Mathematics 92(9) (2015) 1790-1805.
- [48] E. Babolian, J. Biazar, A.R. Vahidi, *Solution of a system of nonlinear equations by Adomian decomposition method*, Applied Mathematics and Computation 150 (2004) 847-854.
-

- [49] W. Bi, H. Ren, Q. Wu, *Three-step iterative methods with eighth-order convergence for solving nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 255 (2009) 105–112.
- [50] C. Chun, *Construction of Newton-like iterative methods for solving nonlinear equations*, Numerische Mathematik 104 (2006) 297–315.
- [51] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *New modifications of Potra-Pták's method with optimal fourth and eighth orders of convergence*, Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (2010) 2969–2976.
- [52] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *A new technique to obtain derivative-free optimal iterative methods for solving nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 252 (2013) 95–102.
- [53] A. Cordero, J. García-Maimó, J.R. Torregrosa, M.P. Vassileva, *Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families*, Journal of Mathematical Chemistry 53 (2015) 430–449.
- [54] A. Cordero, M.A. Hernández-Verón, N. Romero, J.R. Torregrosa, *Semilocal convergence by using recurrence relations for a fifth-order method in Banach spaces*, Journal of Computational and Applied Mathematics 273 (2015) 205–213.
- [55] A. Cordero, J.L. Hueso, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Generating optimal derivative free iterative methods for nonlinear equations by using polynomial interpolation*, Mathematical and Computer Modelling 57 (2013) 1950–1956.
- [56] A. Cordero, E. Martínez, J.R. Torregrosa, *Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 231 (2009) 541–551.
- [57] A. Cordero, J.R. Torregrosa, *Variants of Newton's method for functions of several variables*, Applied Mathematics and Computation 183 (2006) 199–208.
- [58] A. Cordero, J.R. Torregrosa, P. Vindel, *Dynamics of a family of Chebyshev–Halley type methods*, Applied Mathematics and Computation 219 (2013) 8568–8583.
- [59] M. Frontini, E. Sormani, *Some variant of Newton's method with third-order convergence*, Applied Mathematics and Computation 140 (2003) 419–426.
- [60] Y.H. Geum, Y.I. Kim, *A biparametric family of optimally convergent sixteenth-order multipoint methods with their fourth-step weighting function as a sum of a rational and a generic two-variable function*, Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2011) 3178–3188.
- [61] J.M. Gutiérrez, M.A. Hernández, *A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 55 (1997) 113–130.
- [62] M. Grau, M. Noguera, S. Amat, *On the approximation of derivatives using divided difference operators preserving the local convergence order of iterative methods*, Journal of Computational and Applied Mathematics 237 (2013) 363–372.
- [63] L. Liu, X. Wang, *Eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation 215 (2010) 3449–3454.



- [64] B. Neta, M. Scott, C. Chun, *Basins of attraction for several methods to find simple roots of nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 10548–10556.
- [65] M. Petkovic, B. Neta, L. Petkovic, J. Dzunic, *Multipoint methods for solving nonlinear equations*, Academic Press, Amsterdam, 2013.
- [66] J.R. Sharma, R. Sharma, *A new family of modified Ostrowski's methods with accelerated eighth order convergence*, Numerical Algorithms 54 (2010) 445–458.
- [67] M.P. Vassileva, *Métodos iterativos eficientes para la resolución de sistemas no lineales*, Tesis Doctoral (2011), Universidad Politécnica de Valencia.
- [68] Á. A. Magreñán, *Different anomalies in a Jarratt family of iterative root-finding methods*, Applied Mathematics and Computation, 233 (2014) 29–38.
- [69] B. Neta, C. Chun, M. Scott, *Basins of attraction for optimal eighth order methods to find simple roots of nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation, 227 (2014) 567–592.
- [70] A. Cordero, J.R. Torregrosa, F. Soleymani, *Dynamical analysis of iterative methods for nonlinear systems or how to deal with the dimension?*, Applied Mathematics and Computation, 244 (2014) 398–412.
- [71] R.C. Robinson, *An Introduction to Dynamical Systems, Continuous and Discrete*. American Mathematical Society, Providence (2012)
- [72] A. Cordero, J. García-Maimó, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, *Stability of a fourth order bi-parametric family of iterative methods*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 312 (2017) 94–102.
- [73] R.A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics, 7 (1937) 353–369.
- [74] M. Abad, A. Cordero, J.R. Torregrosa, *A family of seventh-order schemes for solving nonlinear systems*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 57(105) (2014) 133-145.
- [75] D. Budzko, A. Cordero, J.R. Torregrosa, *A new family of iterative methods widening areas of convergence*, Appl. Math. Comput., 252 (2015) 405–417.
- [76] A. Magreñán, *A new tool to study real dynamics: The convergence plane*, Applied Mathematics and Computation, 248 (2014) 215–224.
- [77] J.A. Ezquerro, M.A. Hernández *Recurrence relations for Chebyshev-type methods*, Applied Mathematics Optimization, 41 (2000) 227-236.
- [78] J.R. Gutierrez, M.A. Hernández *Third-order iterative methods for operators with bounded second derivative*, J.Comput. Math. Appl. 82 (1997) 171-183.
- [79] J.R. Gutierrez, M.A. Hernández *Recurrence relations for the super-Halley method*, J.Comput. Math. Appl. 7 (1998) 1-8.
- [80] P.K. Parida, D.K. Gupta *Recurrence relations for a Newton-like method in Banach spaces*, Journal of Computational and Applied Mathematics. 206 (2007) 873-887.
- [81] V. Candela, A. Marquina *Recurrence relations for rational cubic methods I: the Halley method*, Computing, 44 (1990) 169-184.

- [82] V. Candela, A. Marquina *Recurrence relations for rational cubic methods II: the Chebyshev method*, Computing, 45 (1990) 355-367.
- [83] S. Amat, M.A. Hernández, N. Romero *Semilocal convergence of a sixth order iterative method for quadratic equations*, Applied Numerical Mathematics, 62(7) (2012) 833-841.