



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# TRABAJO FINAL DE MÁSTER EN DIRECCIÓN FINANCIERA Y FISCAL (MDFE)

## DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE PROBABILIDADES DE BENEFICIOS PARA ESTRATEGIAS ESPECULATIVAS CON PRODUCTOS FINANCIEROS DERIVADOS SINTÉTICOS TIPO “BULL/BEAR SPREAD”: TEORÍA Y APLICACIONES

---

VALIDACIÓN Y APLICACIÓN PARA UNA ACCIÓN DE  
REPSOL S.A.

**AUTOR: GABRIEL RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ**

**DIRECTOR: Dr. JUAN CARLOS CORTÉS LÓPEZ**

**CURSO: 2017-2018**

## INDICE

INDICE FIGURAS.....	4
INDICE GRÁFICOS .....	6
INDICE TABLAS.....	7
Resumen del Trabajo Final de Máster .....	11
Objetivos del Trabajo Final de Máster.....	13
Capítulo 1: Preliminares Financieros .....	15
1.1. Los Mercados Financieros .....	15
1.2. Relación entre la Bolsa y la Economía .....	17
1.3. Efecto de las Variables Macroeconómicas en la Bolsa.....	18
1.4. Índices Bursátiles como un Barómetro de la Economía .....	20
1.5. IBEX-35 .....	21
1.6. Repsol S.A.....	22
1.6.1. Historia Repsol .....	23
1.6.2. Modelo de Negocio .....	26
1.6.3. Repsol en el Mercado Bursátil .....	29
1.6.4. Retribución a los Accionistas.....	30
Capítulo 2: Opciones sobre Acciones ( <i>Stocks Options</i> ) .....	33
2.1. Contratos de Opciones Financieros .....	33
2.2. El Rol Financiero de los Contratos de Opciones .....	35
2.3. Diagramas de Pago de las Opciones.....	37
Capítulo 3: Estrategias Especulativas con Opciones Financieras ( <i>Spreads</i> ).....	45
3.1. Diferencial Alcista ( <i>Bull Spread</i> ) .....	45
3.1.1. Diferencial Alcista de Compra o <i>Call Bull Spread</i> .....	46
3.1.2. Diferencial Alcista de Venta o <i>Put Bull Spread</i> .....	48
3.2. Diferencial Bajista ( <i>Bear Spreads</i> ) .....	51
3.2.1. Diferencial Bajista de Compra o <i>Call Bear Spread</i> .....	51

3.2.2. Diferencial Bajista de Venta o Put Bear Spread .....	53
Capítulo 4: Preliminares Estocásticos: una Introducción del Movimiento Browniano .....	57
4.1. El Movimiento Browniano o Proceso de Wiener .....	57
4.2. Propiedades Estocásticas del Movimiento Browniano .....	59
4.3. Simulación del Movimiento Browniano .....	61
4.4. El Cálculo de Itô .....	63
4.4.1. La Integral de Itô .....	64
4.4.2. Propiedades de la Integral de Itô .....	68
Capítulo 5: Modelo Estocástico Log-Normal .....	71
5.1. Motivación de un Modelo Estocástico para un Subyacente en Condiciones de Certidumbre .....	72
5.2. Motivación del Modelo Estocástico para un Subyacente Cotizado: El Modelo Log-Normal .....	73
5.3. Solución del Modelo Log-Normal .....	75
5.3.1. Primer Enfoque: Solución del Modelo Log-Normal sin el Cálculo de Itô .....	75
5.3.2. Segundo Enfoque: Solución del Modelo Log-Normal Mediante el Cálculo de Itô .....	78
5.4. Propiedades Estadísticas del Proceso Estocástico Solución del Modelo Log-Normal .....	80
5.5. Calibración de los Parámetros del Modelo Log-Normal .....	82
5.5.1. Método de Momentos .....	82
5.5.2. Método de Máxima Verosimilitud .....	84
5.6. Validación del Modelo Log-Normal .....	90
5.6.1. Medidas de Bondad de Ajuste .....	90
5.6.2. Validación por Intervalos de Confianza .....	91
5.6.3. Gráficos Comparativos .....	93
Capítulo 6: La Fórmula de Black-Scholes para Valorar Opciones Europeas .....	95
6.1. Aplicación de Black-Scholes para Calcular la Prima de una Opción de Compra <i>Call</i> .....	96
6.2. Aplicación de Black-Scholes para Calcular la Prima de una Opción de Venta <i>Put</i> , a través de la Paridad Put/Call .....	98
Capítulo 7: Aplicación del Modelo Log-Normal .....	101
7.1. Estimación de los Parámetros del Modelo Log-Normal .....	103

7.1.1. Estimación de Parámetros con el Método de los Momentos .....	103
7.1.2. Estimación de Parámetros con el Método de Máxima Verosimilitud.....	105
7.2. Validación del Modelo Log-Normal.....	108
7.2.1. Validación de los Parámetros a través del Método de los Momentos .....	108
7.2.2. Validación de los Parámetros del Método de Máxima Verosimilitud.....	115
Capítulo 8: Determinación de las Posibilidades de Beneficio con Estrategias Especulativas Mediante Opciones Financieras de Tipo Diferencial de Precios .....	123
8.1. Determinación de la Probabilidad de Beneficio con una Estrategia de Inversión Tipo diferencial de Precios Alcista ( <i>Bull Spread</i> ). Estudio Teórico .....	124
8.1.1. Call Bull Spread.....	124
8.1.2. Put Bull Spread .....	126
8.2. Determinación de la probabilidad de beneficio con una estrategia de inversión tipo Diferencial de Precio Bajista ( <i>Bear Spread</i> ). Estudio teórico. ....	128
8.2.1. Call Bear Spread .....	128
8.2.2. Put Bear Spread.....	130
8.3. Presentación de los escenarios .....	132
8.4. Determinación de la probabilidad de beneficio con una estrategia de inversión tipo Diferencial Alcista de Compra ( <i>Call Bull Spread</i> ). Estudio práctico.....	137
Capítulo 9: Conclusiones Finales .....	155
Bibliografía.....	159
Anexo. ....	161

## INDICE FIGURAS

Figura 1.6.1: Países donde está presente Repsol S.A. ....	26
Figura 1.6.2: Principales actividades de Upstream de Repsol S.A. ....	27
Figura 1.6.3: Principales actividades de Downstream de Repsol S.A. ....	28
Figura 1.6.4: Entidades que integran el Grupo Repsol S.A. ....	29
Figura 2.3.1: Diagramas de beneficios brutos o <i>pay-off</i> para posiciones cortas y largas de opción de compra y de venta al vencimiento $T$ . ....	38
Figura 2.3.2: Función de beneficios/perdidas ( $B/P$ ) de una posición corta ( $C$ ) y de una posición larga ( $L$ ) de una opción <i>Call</i> ( $C$ ) y de una opción de venta <i>Put</i> ( $P$ ) de primas $C$ y $P$ , respectivamente, precio de ejercicio $K$ y vencimiento $T$ . ....	39
Figura 2.3.3: Representación gráfica de las funciones de beneficios/pérdidas dadas en la Figura 2.3.2. .	40
Figura 3.1.1: Representación gráfica de las funciones beneficios/pérdidas de las funciones de las funciones de la ecuación (3.1.1). ....	47
Figura 3.1.2: Representación gráfica de las funciones beneficios/pérdidas de las funciones de las funciones de la ecuación (3.1.2). ....	50
Figura 3.2.1: Representación gráfica de las funciones beneficios/pérdidas de las funciones de las funciones de la ecuación (3.2.1). ....	53
Figura 3.2.2: Representación gráfica de las funciones beneficios/pérdidas de las funciones de las funciones de la ecuación 3.2.2. ....	55
Figura 5.1.1: Capitalización a interés compuesto continuo. ....	72
Figura 6.2.1: Composición de las Cartera A y B. ....	99
Figura 6.2.2: Comportamiento de las Carteras en el instante final o de ejercicio $T$ . ....	100
Figura 7.1.1: Estimación de parámetros del Modelo Log-Normal mediante el método de máxima verosimilitud y la macro Solver de Excel®. ....	106
Figura 7.1.2: Obtención de los parámetros por el método de máxima verosimilitud. ....	107
Figura 7.2.1: Cálculo medidas bondad de ajuste: RSME y MAPE utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos. ....	111
Figura 8.1.1: Representación gráfica del plano que determina la relación de los parámetros ( $K_1, C_1, C_2$ )	

---

de una <i>Bull Spread</i> para que haya una probabilidad de beneficio superior a 0 con esta inversión. ....	126
Figura 8.3.1: Cálculo del precio de ejercicio ( $K_2$ ) de la segunda <i>Call</i> para el primer escenario (intermedio). ....	133
Figura 8.3.3: Cálculo del precio de ejercicio ( $K_2$ ) de la segunda opción de compra <i>Call</i> para el tercer escenario (optimista).....	135

## INDICE GRÁFICOS

Gráfico 1.6.1: Evolución del precio de las acciones de Repsol S.A en los últimos 16 años. ....	30
Gráfico 1.6.2: Retribución anual (€) de Repsol S.A. ....	31
Gráfico 4.3.1: Simulación del Movimiento Browniano sobre la ventana temporal [0,1]. ....	62
Gráfico 7.0.1: Evolución de las cotizaciones de la acción de Repsol S.A. ....	103
Gráfico 7.2.1. I.C (95%) para la acción Repsol S.A. vía la calibración de parámetros mediante el método de los momentos. ....	115
Gráfico 7.2.2. I.C (95%) para la acción Repsol S.A. vía la calibración de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud. ....	121

## INDICE TABLAS

Tabla 1.5.1: Empresas que forman parte del IBEX-35. ....	21
Tabla 2.1.1: Derechos/Obligaciones y posiciones del tenedor y el vendedor de una opción <i>Call</i> y de una opción <i>Put</i> . ....	35
Tabla 2.1.2: Detalle de las características de los contratos <i>Call</i> y <i>Put</i> . ....	35
Tabla 2.3.1: Terminología para opciones <i>Call</i> y <i>Put</i> europeas a vencimiento, en función de si hay ejercicio o no de la opción. ....	37
Tabla 4.3.1: Media y varianza del Movimiento Browniano. ....	61
Tabla 7.0.1: Cotizaciones de Repsol S.A. ....	102
Tabla 7.1.1: Log-cotizaciones durante el periodo objeto de análisis. ....	105
Tabla 7.1.2: Media y varianza de los Log-retornos. ....	105
Tabla 7.1.3: Parámetros $\mu$ y $\sigma$ para el método de los momentos. ....	105
Tabla 7.1.4: Parámetros $\mu$ y $\sigma$ para el método de máxima verosimilitud. ....	107
Tabla 7.2.1: Cálculo de la media y varianza/desviación típica teórica de la acción de Repsol S.A. utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos. ....	110
Tabla 7.2.2: Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos. ....	114
Tabla 7.2.3: Cálculo de la media y varianza/desviación típica teórica de la acción de Repsol S.A. utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud. ....	117
Tabla 7.2.4: Error porcentual medio (MAPE) y error cuadrático medio para el método de máxima verosimilitud. ....	118
Tabla 7.2.5: Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud. ....	120
Tabla 8.4.1: Resultados de las inversiones para una <i>Call Bull Spread</i> ....	140
Tabla 8.4.2: Valores a tener en cuenta para poder aplicar la fórmula de Black-Scholes ....	140
Tabla 8.4.3: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las opciones de compra <i>Calls</i> en el escenario "Promedio" ....	141
Tabla 8.4.4: Resultado de la estrategia de inversión "Promedio" ....	141
Tabla 8.4.5: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> en el	

escenario “Promedio” primer caso .....	142
Tabla 8.4.6: Resultado de la estrategia de inversión “Promedio” primer caso .....	142
Tabla 8.4.7: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> en el escenario “Promedio” cuarto caso.....	143
Tabla 8.4.8: Resultado de la estrategia de inversión “Promedio” cuarto caso .....	143
Tabla 8.4.9: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las opciones de compra <i>Calls</i> en el escenario “Pesimista” .....	144
Tabla 8.4.10: Resultado de la estrategia de inversión “Pesimista” .....	144
Tabla 8.4.11: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> en el escenario “Pesimista” cuarto caso .....	145
Tabla 8.4.12: Resultado de la estrategia de inversión “Pesimista” cuarto caso.....	145
Tabla 8.4.13: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las opciones de compra <i>Calls</i> en el escenario “Optimista” .....	146
Tabla 8.4.14: Resultado de la estrategia de inversión “Optimista” .....	146
Tabla 8.4.15: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> en el escenario “Optimista” primer caso .....	147
Tabla 8.4.16: Resultado de la estrategia de inversión “Optimista” primer caso.....	147
Tabla 8.4.17: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> en el escenario “Optimista” tercer caso.....	148
Tabla 8.4.18: Resultado de la estrategia de inversión “Optimista” tercer caso .....	148
Tabla 8.4.19: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> en el escenario “Optimista” tercer caso .....	149
Tabla 8.4.20: Resultado de la estrategia de inversión “Optimista” tercer caso .....	149
Tabla 8.4.21: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> en el escenario “Optimista” cuarto caso.....	150
Tabla 8.4.22: Resultado de la estrategia de inversión “Optimista” cuarto caso .....	150
Tabla 8.4.23: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las opciones de compra <i>Calls</i> en el escenario “Pesimista total” .....	151
Tabla 8.4.24: Resultado de la estrategia de inversión “Pesimista total” .....	151
Tabla 8.4.25: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> en el	

---

escenario “Pesimista total” cuarto caso.....	152
Tabla 8.4.26: Resultado de la estrategia de inversión “Pesimista total” cuarto caso .....	152
Tabla 8.4.27: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las <i>Calls</i> para la estrategia de inversión “Optimista total” .....	153
Tabla 8.4.28: Resultado de la estrategia de inversión “Optimista total” .....	153



# Resumen del Trabajo

## Final de Máster

La principal dificultad de los mercados financieros es poder predecir el valor futuro que alcanzarán los subyacentes cotizados (por ejemplo, una acción), ya sea en un espacio corto de tiempo (minutos) o más a largo plazo (meses). Al no conocerse en ningún momento el precio futuro de los subyacentes, aparece el riesgo de obtener pérdidas al realizar nuestras inversiones.

Para poder mitigar el riesgo de los inversores, en el presente Trabajo Final de Máster, se estudiarán las estrategias especulativas con productos financieros derivados sintéticos tipo *Bull/Bear Spreads*, con el fin de diseñar estrategias que proporcionen, con cierta probabilidad prefijada, beneficios al vencimiento de la inversión. Para poder alcanzar el objetivo principal del presente trabajo previamente se tendrán que estudiar y desarrollar algunos conceptos matemáticos y financieros.

La dinámica del precio de un subyacente a lo largo del tiempo se describirá a partir de un modelo matemático cuya solución está dada en términos de un proceso estocástico, ya que el precio del subyacente depende de un gran número de factores cuya naturaleza es intrínsecamente incierta. En la actualidad, existen muchos modelos matemáticos que se han propuesto para estimar el precio de un subyacente cotizado, y concretamente en el presente trabajo utilizaremos el Modelo Log-Normal. Este modelo se basa en ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô.

El Modelo Log-Normal es un proceso estocástico que depende de dos parámetros: la tendencia ( $\mu$ ) y la volatilidad local o difusión ( $\sigma$ ), los cuales deben que calibrarse a través de cotizaciones históricas del subyacente objeto de modelización. Para calibrarlos, en el presente trabajo se utilizarán dos métodos estadísticos, el Método de los Momentos Estadísticos y el Método de Máxima Verosimilitud.

Además del Modelo Log-Normal, también será necesario presentar la fórmula de Black-Scholes, la cual permite calcular las primas de las opciones de compra y de venta de tipo europeo. Con ello dispondremos de las herramientas adecuadas para estudiar las estrategias de tipo diferencial Alcista (*Bull Spread*) y Bajista (*Bear Spread*), las cuales se forman con la compra-venta de opciones de compra (*Call*) y de venta (*Put*).

Las opciones financieras de compra (*Call*) y de venta (*Put*) son derivados financieros que combinados entre si ofrecen al inversor la posibilidad de crear multitud de estrategias de inversión. El presente trabajo se centra en investigar las estrategias especulativas vía opciones financieras de tipo diferencial de precios alcista (*Bull Spread*) y bajista (*Bear Spread*). Primero se estudiará de forma teórica, cómo definir las estrategias inversoras de tipo diferencial de precios (*Spreads*) que permitan obtener beneficios al vencimiento con una probabilidad prefijada. Después, se realizará un estudio práctico a través de una acción y opciones de compra y de venta de la compañía del IBEX-35 Repsol S.A. con el fin de ver cómo se lleva a la práctica los resultados teóricos. Para lograrlo, se crearán cinco escenarios distintos de inversión. Además, se realizará un análisis de sensibilidad del diferencial entre el precio de ejercicio de las opciones con el fin de encontrar algún valor crítico, es decir, si existe algún diferencial a partir del cual se pase de obtener beneficios a pérdidas (o viceversa).

El estudio práctico se realizará de forma detallada para una estrategia de precios tipo diferencial de precios alcista compuesta por opciones de compra *Call* (*Call Bull Spread*). Para realizar el estudio práctico utilizaremos los parámetros estimados por el método de máxima verosimilitud (por tener mejores medidas de bondad de ajuste que la estimación vía el método de momentos estadísticos) y la fórmula de Black-Scholes. Los cálculos se realizarán a través de una hoja de cálculo que nos ofrece Microsoft Excel<sup>®</sup>. La principal ventaja del estudio práctico es que nos permite ver en qué situaciones obtendremos beneficios, es decir, si es mejor operar con opciones de compra con precios de ejercicios bajos, o por el contrario es mejor que el precio de ejercicio de las opciones sea elevado.

# Objetivos del Trabajo

## Final de Máster

El principal objetivo del presente trabajo es determinar estrategias inversoras, basadas en Opciones Financieras, de tipo Diferenciales de Precios Alcista (*Bull Spread*) y Bajista (*Bear Spread*), con el subyacente de Repsol S.A., que proporcionen beneficios con una probabilidad prefijada. Para lograrlo se aplicarán técnicas matemáticas, como el Modelo Log-Normal que modeliza la dinámica de un subyacente cotizado y la fórmula de Black-Scholes que determina los precios de las opciones de compra *Call* y de venta *Put* de tipo europeo. Para comprobar la utilidad práctica de este trabajo, al final, simularemos diferentes escenarios de inversión para ver en cuáles obtenemos beneficios.

Los objetivos que se han fijado para poder desarrollar el presente trabajo son los siguientes:

- Estudiar las principales características de las opciones financieras (*Stock Options*).
- Estudiar las técnicas estocásticas necesarias correspondientes al Cálculo de Itô, con el fin de poder aplicar el Modelo Log-Normal.
- Comprender el desarrollo del Modelo estocástico Log-Normal y además, conocer sus principales propiedades estadísticas.
- Estimar los parámetros del Modelo Log-Normal a partir de una muestra de datos históricos reales.

- Validar los parámetros estimados a través de las medidas de Bondad de Ajuste, Intervalos de Confianza y Gráficos, con el fin de ver qué método de estimación posee un menor error.
- Determinar las características de una inversión basada en una estrategia especulativa de tipo diferenciales de precios (*Spreads*) que arroje beneficios con una probabilidad prefijada.
- Aplicar los resultados teóricos a escenarios de inversión diferentes para ver la aplicación práctica del trabajo realizado sobre un subyacente que cotiza en el mercado real (en nuestro caso, se ha elegido la compañía del IBEX35, Repsol S.A.).
- Realizar un análisis de sensibilidad del diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones que componen la estrategia tipo *Spread* para buscar los valores críticos a partir de los cuales se pasa de tener beneficios a tener pérdidas, o viceversa.

# 1

## Preliminares Financieros

En este capítulo se explican los principales conceptos financieros (mercados financieros, teoría de ciclos, variables macroeconómicas, etc.) que se requerirán a lo largo del trabajo. También se introducen las principales características financieras de la empresa objetivo.

### 1.1. Los Mercados Financieros

Los mercados financieros se pueden definir como el mecanismo o lugar a través del cual se produce el intercambio, entre ahorradores e inversores, de activos financieros. El principal objetivo de los mercados financieros es poder determinar el precio de los activos financieros.

Un mercado financiero funcionará de forma eficiente si cumple con las siguientes funciones:

- Como cualquier mercado, los mercados financieros deben de poner en contacto a la oferta y la demanda de activos financieros, es decir, a los agentes ahorradores con los inversores.
- Los mercados financieros deben de actuar como una herramienta para la fijación del precio de los activos financieros.
- Deben de dotar de liquidez a los activos financieros.
- Reducen los plazos y coste de búsqueda e intermediación. Esta circunstancia ocurre gracias

a la reducción del tiempo empleado en encontrar una contrapartida. Además, los mercados financieros actúan como fuentes de información sobre los activos financieros y los participantes.

Los mercados financieros se pueden clasificar en tres importantes categorías dependiendo del tipo de activos financieros que se negocien.

#### **Mercados financieros según las características de los activos financieros**

- **Mercados monetarios:** Se caracterizan principalmente porque se negocian activos financieros con bajo riesgo y elevada liquidez. Las empresas acuden a estos mercados para poder financiar su activo circulante y colocar sus excedentes de tesorería.
- **Mercados de capitales:** Se negocian activos financieros que vencen a medio o largo plazo. Las empresas acuden a los mercados de capitales para financiar inversiones a largo plazo con el fin de poder canalizar el ahorro hacia la inversión productiva (maquinaria, instalaciones técnicas, equipos y procesos informáticos, etc.).

#### **Mercados financieros según su estructura p grado de formalización**

- **Mercados organizados:** Los activos financieros se negocian bajo unas reglas específicas que buscan conseguir el ideal de eficiencia. Estas reglas actúan como un reglamento para garantizar un correcto funcionamiento del mercado.
- **Mercados no organizados** (extrabursátiles u "Over The Counter"): Las condiciones de cada operación de compraventa, como el precio y/o cantidad, las fijan entre las dos partes en el momento que se está negociando.

#### **Mercados financieros según las características de sus activos financieros**

- **Mercados de renta fija:** Se integran todos los activos financieros en los que el emisor está obligado a realizar pagos en una cantidad y en un período de tiempo previamente establecidos, es decir, el emisor garantiza la devolución del capital invertido y una cierta rentabilidad. En otras palabras, la persona que adquiere títulos de renta fija conoce en todo momento los intereses o rentabilidad que va a recibir desde el momento en que se adquiere dicho instrumento.
- **Mercados de renta variable:** Forman parte aquellos activos financieros en los que no se garantiza ni la devolución del principal (capital invertido) ni la rentabilidad del activo. No se conocen los flujos de caja que se van a recibir e incluso puede que la rentabilidad sea negativa,

es decir, se puede perder dinero. En renta variable la rentabilidad depende de diversos factores como la evolución de la empresa, la situación económica, el comportamiento de los mercados financieros, etc.

## 1.2. Relación entre la Bolsa y la Economía

Es lógico pensar que las acciones de las empresas cotizadas están relacionadas con la actividad económica. Si la economía presenta una coyuntura favorable las empresas funcionarán a pleno rendimiento (aumento de la producción) y obtendrán más beneficios. Esta situación reflejará un mayor valor de la empresa, por lo tanto, las acciones de las empresas cotizarán a un precio más elevado.

La bolsa es muy importante porque actúa como un barómetro de la actividad económica. En la actualidad, se puede decir que las cotizaciones se comportan como un indicador adelantado de lo que va a ocurrir en la economía. Además, la bolsa amplifica los movimientos del ciclo económico.

Para poder explicar de manera más detallada la relación que existe entre el ciclo bursátil y el ciclo económico e intentar demostrar como la bolsa se anticipa a la situación económica aparece la "Teoría de los ciclos".<sup>1</sup>

Mientras el ciclo económico está sumergido en una etapa de recesión caracterizada por tipos de interés elevados, consumo bajo, elevada tasa de desempleo y restricción del crédito. La bolsa entra en una tendencia alcista, ya que las acciones de las empresas punteras empiezan a subir poco a poco. La bolsa empieza a recuperarse gracias a las "manos fuertes" (grandes inversores) que adquieren el máximo número de acciones, puesto que las acciones actualmente están cotizando en mínimos históricos.

La economía poco a poco va entrando en una fase de recuperación. Se empiezan a adoptar medidas para incentivar la recuperación de la economía como bajar los tipos de interés, condiciones menos restrictivas de acceso al crédito (fluidez del crédito), se ponen en marcha

---

<sup>1</sup> La teoría de los ciclos fue desarrollada por Friedrich Hayek y Ludwig Von Mises economistas pertenecientes a la Escuela Austríaca.

políticas para reducir el paro. La bolsa continúa subiendo, primero suben las acciones de las grandes empresas y poco a poco se va contagiando hacia las acciones de otras empresas.

Se confirma la recuperación de la economía y se pasa a una etapa de expansión. Las familias aprovechan la bonanza económica para empezar a realizar compras apalancadas, es decir, empiezan a endeudarse para poder aumentar su poder económico. La bolsa registra un crecimiento superior al de la economía, hasta los peores valores suben. Las familias y pequeños ahorradores empiezan a invertir en renta variable, puesto que se percibe la bolsa como una forma fácil y segura de ganar dinero.

Las acciones alcanzan máximos históricos, momento que aprovechan las manos fuertes para empezar a venderlas. Se produce un cambio de tendencia en el mercado bursátil, se pasa de una tendencia alcista a una tendencia bajista. Además, aparecen los primeros síntomas de que la economía se está recalentando, uno de estos síntomas es la inflación.

Para contrarrestar la inflación se deciden subir los tipos de interés provocando que el valor de las acciones empiece a caer hasta volver a alcanzar mínimos históricos. Los únicos que tendrán grandes pérdidas serán las familias porque las manos fuertes ya han vendido todos los títulos cuando estos cotizaban en máximos históricos.

La subida de los tipos de interés también afecta de forma negativa al ciclo económico. Se vuelve a restringir el acceso al crédito provocando una bajada drástica del consumo, las empresas producen menos y aumenta la tasa de desempleo. La economía vuelve a una etapa de plena recesión.

### **1.3. Efecto de las Variables Macroeconómicas en la Bolsa**

En la explicación anterior del ciclo bursátil se han nombrado algunas variables macroeconómicas, como los tipos de interés, la inflación, crecimiento económico, etc. A continuación, se va explicar el efecto de las variables macroeconómicas en la bolsa.

La variable macroeconómica que en mayor proporción afecta a la cotización de las acciones es el tipo de interés. Si se deciden subir los tipos de interés, los inversores percibirán una aversión al riesgo más elevada. Ante esta situación, decidirán transvasar sus inversiones hacia valores

más seguros, como la renta fija. Por lo tanto, cuando se incrementan los tipos de interés se incrementa la inversión en la renta fija y la bolsa caerá.

La subida de los tipos de interés también afecta de forma directa a los beneficios de las empresas, ya que se incrementa el coste medio de la financiación de las empresas (incremento de los costes financieros). Como consecuencia las acciones de las empresas son menos atractivas por la pérdida de rentabilidad (menor beneficio de las empresas). Por lo tanto, los índices bursátiles y las acciones se desplomarán.

Otra variable macroeconómica que afecta a la bolsa es la inflación. La inflación se define como un incremento en la cantidad de dinero necesaria para obtener la misma cantidad de producto o servicio. Esta aparece cuando el valor del dinero ha cambiado, se ha reducido y como resultado se necesitan más unidades monetarias para menos bienes.

La inflación suele aparecer por una de las siguientes causas:

- La demanda se sitúa por encima de la oferta.
- Incremento del coste de las materias primas y de la mano de obra.
- Aumentando la masa monetaria en circulación, es decir, "inundando" la economía de dinero.

El instrumento principal que tienen los órganos de gobierno para combatir la temida inflación es la subida de los tipos de interés y la disminución de la oferta monetaria. Como ya se ha explicado anteriormente, si suben los tipos de interés la bolsa caerá. Simplificando, si se incrementa la inflación (incremento del Índice de Precios al Consumo o IPC) la bolsa se desplomará porque para intentar reducirla se subirán los tipos de interés.

Otra variable que afecta a los índices bursátiles es el tipo de cambio. Cuando una moneda nacional se devalúa, los órganos de gobierno intervienen por medio de los bancos centrales incrementando los tipos de interés. Esta subida de los tipos de interés provocará que la inversión en renta fija sea más atractiva. Para poder adquirir títulos de renta fija los inversores deben de comprar moneda nacional (incremento de la demanda de moneda nacional). Si los inversores perciben como un valor más rentable y seguro la renta fija que la renta variable, la demanda de títulos de renta variable se verá reducida y la bolsa caerá.

Siguiendo con las variables macroeconómicas ahora nos centraremos en explicar brevemente

cómo actúa el déficit público en la bolsa. El déficit público aparece cuando el gasto del Estado es superior a lo que ingresa. Para tenerlo controlado el gobierno pone en marcha políticas para incentivar la demanda de renta fija, por lo tanto, los tipos de interés subirán. En consecuencia, la bolsa caerá, puesto que los inversores perciben la renta fija como una mejor inversión (menor riesgo y buena rentabilidad).

La última variable macroeconómica que afecta a la bolsa es el crecimiento económico. El impacto del crecimiento económico en la bolsa ya se ha detallado anteriormente en la explicación de la "Teoría de los ciclos".

#### 1.4. Índices Bursátiles como un Barómetro de la Economía

Los índices bursátiles son números índices que muestran la evolución en el tiempo del precio de los títulos que cotizan en un determinado mercado bursátil. Pueden actuar como una especie de termómetro de la economía.

Se empezaron a utilizar en el año 1884, gracias a su descubridor el periodista **Charles Henry Dow**<sup>2</sup>. Mientras observaba el mercado de valores percibió que existía cierta relación en la subida y bajada de las acciones de la mayoría de las empresas. Por este motivo, Dow decidió expresar esta tendencia en términos de precio medio de las acciones de las empresas más representativas de su época. Dow creó un índice de las 20 compañías ferroviarias más importantes, principalmente porque el sector del ferrocarril era el más importante y otro índice con 12 acciones de las empresas de otros tipos de negocio.

En la actualidad, existen cientos de índices bursátiles. La principal característica es que no representan todas las empresas de una economía, ni de un sector, ni siquiera todas las que cotizan, sino que los índices se construyen siempre con las empresas más representativas (normalmente coincide con las empresas más grandes).

Actualmente, los índices bursátiles se pueden utilizar para:

---

<sup>2</sup> Charles Henry Dow (1851-1902) Periodista especializado en el mercado bursátil. Destaca por ser uno de los fundadores de *The Wall Street Journal* en el año 1889, también por crear la primera medida de valores en el año 1884.

- Reflejar la tendencia o sentimiento del mercado, es decir, si el mercado se encuentra en una tendencia alcista o bajista.
- Punto de referencia para medir el rendimiento o rentabilidad de un gestor de activos.
- Medir la rentabilidad y el riesgo (volatilidad) del mercado.
- Crear carteras que repliquen el comportamiento del índice bursátil.

## 1.5. IBEX-35

El IBEX-35 es el principal índice bursátil de referencia de la bolsa española elaborado por Bolsas y Mercados Españoles (BME). Está compuesto por las 35 empresas de mayor liquidez (más representativas de la economía española) que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) en las cuatro bolsas españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia).

Abertis	Gas Natural
Acciona	Grifols
Acerinox	IAG
ACS	Iberdrola
Aena	Inditex
Amadeus	Indra
ArceroMittal	Mapfre
Banco Sabadell	Mediaset
Bankia	Meliá Hotels
Bankinter	Merlín Properties
BBVA	Red Eléctrica
Caixabank	Repsol
Celinux Telecom	Santander
Colonial	Siemens Gamesa
DIA	Técnicas Reunidas
Enagás	Telefónica
Endesa	Viscofan
Ferrovial	

**Tabla 1.5.1: Empresas que forman parte del IBEX-35.**

Fuente: Investing.com

La Tabla 1.5.1 contiene todas las empresas que forman parte del IBEX-35 a fecha de 31 de

octubre de 2017.

El IBEX-35 es un índice bursátil que se calcula por capitalización bursátil. Se calcula aplicando la fórmula dada en (1.5.1).

$$IBEX_t = IBEX_{t-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{35} Cap_{i,t}}{\sum_{i=1}^{35} Cap_{i,t-1} + J} \quad (1.5.1)$$

donde:

t = momento en el que se calcula el IBEX-35.

i = compañía incluida en el IBEX-35.

$Cap_{i,t}$  = capitalización de la compañía incluida en el índice ( $Cap_{i,t} = S_{i,t} \times P_{i,t}$ ).

$S_{i,t}$  = Número de acciones emitidas de la compañía "i" en el momento "t".

$P_{i,t}$  = Precio de una acción de la compañía "i" incluida en el índice en el momento "t".

J = Coeficiente de ajuste del valor del índice por operaciones financieras que afectan a la capitalización considerada en el índice. Las operaciones financieras que suelen afectar al IBEX-35 son los dividendos, ampliaciones de capital o la emisión de obligaciones convertibles.

Si se analiza la posición que ocupa la empresa objetivo dentro del IBEX-35, Repsol se encuentra dentro de las empresas con mayor capitalización bursátil de las 35 que integran el índice. Por lo tanto, la evolución del precio de las acciones de Repsol tendrá una gran repercusión en el índice bursátil.

Tras introducir algunos términos financieros importantes, el presente trabajo continúa explicando la historia de la empresa objetivo, el plan de negocio y algunos aspectos que se consideran importantes de la acción de Repsol.

## 1.6. Repsol S.A.

Repsol es una empresa multinacional que pertenece al sector energético y petroquímico, con sede social en Madrid, fue fundada en octubre de 1987. En su origen estaba conformada por la agrupación de una serie de compañías pertenecientes al Instituto Nacional

de Hidrocarburos.

Las principales actividades de Repsol son la exploración, producción, transporte y refino de petróleo y gas. Además, Repsol también se encarga de la producción, distribución y comercialización de derivados del petróleo, productos petroquímicos, gas licuado y de vender gas natural.

### **1.6.1. Historia Repsol**

#### **1ª Etapa: Cimientos del Grupo Repsol S.A (1927-1983)**

El 17 de octubre de 1927, en los últimos años del directorio civil de Primo de Rivera, se crea la Compañía Arrendataria del Monopolio de Petróleo S.A (CAMPSA S.A). CAMPSA S.A. se caracterizaba por ser una empresa mixta, ya que el Estado participaba de forma minoritaria.

El de 30 de septiembre de 1941 se creó el Instituto Nacional de Industria. Un año más tarde, se transfieren las funciones de CAMPSA S.A. al Instituto Nacional de Industria. Seis años más tarde, en 1947 se reorganiza el Monopolio de Petróleo, puesto que ya habían transcurridos los 20 años de duración del contrato entre CAMPSA S.A. y el Estado. Esta reorganización sustituía el antiguo arrendamiento por un régimen de desconcentración de servicios, provocando una mayor intervención del Estado en CAMPSA S.A.

En 1948 nace la sociedad REPESA (Refinería del Petróleo de Escombreras). Tres años después, REPESA se convierte en la líder del sector del refino gracias a la producción y comercialización, con marca propia de gasolina, de lubricantes y aceites. En esta época, la marca puntera de REPESA se denominaba REPSOL.

En el año 1957 nace la empresa Butano S.A. con una estrategia clara, la de dotar de mayor comodidad a los españoles, abasteciendo de puerta en puerta con gas butano. En la actualidad, sigue siendo un servicio que sigue ofreciendo Repsol S.A.

En el año 1965 ante el crecimiento del sector se decide constituir la Sociedad Hispánica de Petróleo S.A. Su objetivo principal era la producción de hidrocarburos fuera del territorio español, es decir, buscar la internacionalización del sector español de hidrocarburos.

Tres años más tarde, en 1968, REPESA constituye los primeros cimientos de lo que actualmente es la escudería Repsol Honda. La competición del motor se percibe como una

gran oportunidad para mejorar sus productos porque la competición actúa como un banco de pruebas ideal.

Finalmente, el 28 de noviembre de 1974 se crea la Empresa Nacional de Petróleos (ENPETROL) tras la fusión de REPESA, ENTASA (Empresa Nacional de Petróleos de Tarragona) y ENCANSO (Empresa Nacional Calvo Sotelo de Combustibles Líquidos y Lubricantes).

## **2ª Etapa: Liberalización del sector de hidrocarburos y constitución del Grupo Repsol S.A. (1984-1997)**

Para cumplir con las exigencias del tratado de adhesión a la Comunidad Económica Europea (CEE)<sup>3</sup>, España debía liberalizar todos los sectores económicos. En 1984 mediante la Ley 45/84 de Reordenamiento del sector petrolero se consigue cumplir con el objetivo de liberalizar el sector de los hidrocarburos.

Tres años después (1987) se establece el Grupo Repsol como una S.A. y su actividad se basa en la producción, transporte y refinado del petróleo y gas. Repsol S.A. se establece en un mercado homogéneo caracterizado por la oferta de productos genéricos en los que la calidad no es un factor de elección sino el precio de los productos.

A principios de la década de los 90, Repsol se hace con el 88,3% de CAMPSA y con el 68,12% de Petronor. En noviembre de 1991 se aprueba la segregación de las actividades comerciales de CAMPSA. Por esa sentencia CAMPSA se ve obligada a distribuir sus activos comerciales entre Repsol y British Petroleum (BP).

Finalmente, en abril de 1997 finaliza el proceso de privatización de Repsol, tras la última Oferta Pública de Venta (OPA). Este proceso de privatización se dilató durante ocho años, en los cuales, se realizaron cuatro Ofertas Públicas de Adquisición.

## **3ª Etapa: Proceso de internacionalización (1998-2015)**

Tras la privatización, Repsol decide reforzar su eje internacional. En el año 1999 la empresa adquiere la compañía petrolera argentina YPF, con esta adquisición Repsol se convierte en una multinacional más equilibrada y mejor posicionada en el sector de los hidrocarburos.

---

<sup>3</sup> España firmó el tratado el 12 de junio de 1985 que entraba en vigor el 1 de enero de 1986, España pasaba a formar parte de la Comunidad Económica Europea (CEE).

Con la llegada del nuevo milenio Repsol sigue avanzando en su proceso de internacionalización en Latinoamérica. Repsol firma acuerdos en Argentina, Venezuela, Chile, Cuba y Colombia. Además, Repsol consigue un hito en Brasil, ser la segunda petrolera integrada en el país.

Tras el éxito alcanzado en Latinoamérica, Repsol decide internacionalizarse hacia otros países como Trinidad y Tobago donde Repsol descubrió uno de los mayores yacimientos de gas. En Norteamérica destaca Canadá, que a finales del año 2005 Repsol alcanzó un acuerdo para abrir una planta de regasificación, con la cual abastecerá el mercado norteamericano.

También hay que destacar acuerdos firmados con Gazprom para desarrollar proyectos comunes en Europa, Latinoamérica, África y Rusia.

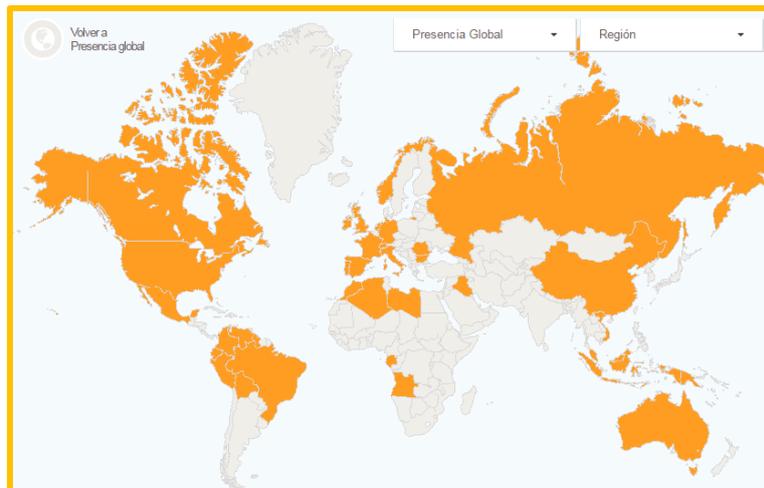
#### **4º Etapa: Repsol en la actualidad**

El principal reto de la compañía es mostrar que hay mucho más allá del petróleo, Repsol quiere ser percibida como una empresa energética y no como una simple petrolera. Para poder conseguirlo la empresa realizará grandes inversiones en investigación y desarrollo de nuevos productos y nuevas energías.

La estrategia de Repsol está dando sus frutos, ya que en 2016 Repsol ha sido nombrada mejor compañía petroquímica del año según Petroleum Economist. El galardón reconoce el proceso de transformación acometido por el negocio químico de Repsol para mejorar su competitividad, generar productos diferenciados y diversificarse geográficamente. Además, el jurado de los Petroleum Economist Awards<sup>4</sup> ha valorado de forma satisfactoria las inversiones realizadas por Repsol para modernizar sus complejos petroquímicos aplicando soluciones innovadoras.

---

<sup>4</sup> Petroleum Economist Awards premia anualmente a las mejores personas, empresas y proyectos del sector energético. El tribunal encargado de otorgar el premio está formado por miembros de la OPEP y de la Unión Internacional del Gas.



**Figura 1.6.1: Países donde está presente Repsol S.A.**

Fuente: Memoria Anual Repsol S.A. 2015

La Figura 1.6.1 muestra las zonas geográficas donde opera Repsol. Se observa que la compañía tiene presencia en todos los continentes, concretamente en más de 40 países. Además, Repsol, en la actualidad, cuenta con más de 27.000 empleados de 80 nacionalidades distintas.

## 1.6.2. Modelo de Negocio

### Visión y valores

Repsol, en la actualidad, quiere convertirse en una empresa global que busca el bienestar de las personas y un futuro mejor a través del desarrollo de energías inteligentes. Repsol mediante el esfuerzo, el talento y la ilusión, avanza para ofrecer las mejores soluciones energéticas a la sociedad y al planeta.

Esta visión se puede concretar mediante la aplicando de una serie de valores fundamentales por los que se rige la compañía:

- **Integridad:** Repsol vela por el bienestar del entorno en el que opera, de las personas y por el bienestar de la propia empresa.
- **Responsabilidad:** Repsol alcanza todos sus objetivos teniendo siempre en cuenta el impacto global de sus decisiones y actuaciones sobre el entorno en el que opera.
- **Flexibilidad:** La empresa intenta cumplir sus objetivos de forma equilibrada y sostenida mediante la puesta en funcionamiento de una estrategia de escucha activa.
- **Transparencia:** Repsol percibe la información como un activo de la entidad que se

comparte para generar un mayor valor. Por la tanto, la empresa opera bajo la máxima de que todas las actuaciones pueden ser reportadas de manera veraz, clara y contrastable.

- **Innovación:** Percibe la innovación como la clave para ser una empresa competitiva en el sector. Por eso, la entidad debe de generar ideas que se puedan llevar a la práctica, en un entorno de colaboración y aprendizaje colectivo continuo.

**Actividades.** Las actividades del Grupo Repsol se desarrollan en dos grandes áreas de negocio:

- **Upstream:** se agrupan las operaciones de exploración, desarrollo y producción de las reservas de crudo y gas natural (véase Figura 1.6.2).

- **Downstream:** Las actividades correspondientes al *Downstream* (véase Figura 1.6.3) se pueden agrupar en tres grupos de actividades diferentes:

1. Las actividades de refinación, trading y transporte de crudo y productos, así como a la comercialización de productos petrolíferos, productos químicos y gases licuados del petróleo.
2. La comercialización, transporte y regasificación de gas natural y gas natural licuado.
3. Los proyectos de generación renovable.

Además, Repsol posee un 30% del grupo Gas Natural Fenosa, cuyas principales actividades son la distribución y comercialización de gas natural y electricidad.



Figura 1.6.2: Principales actividades de Upstream de Repsol S.A.

Fuente: Memoria Anual Repsol S.A. 2015

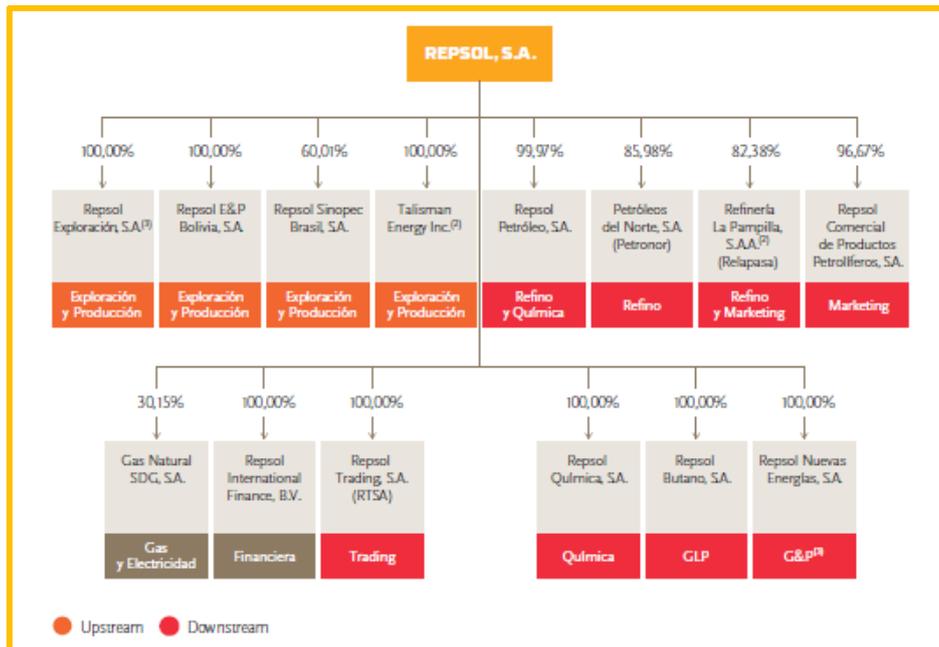


Figura 1.6.3: Principales actividades de Downstream de Repsol S.A.

Fuente: Memoria Anual Repsol S.A. 2015

La Figura 1.6.4 detalla de forma desglosada las entidades que integran el grupo Repsol S.A. Las empresas de color naranja se integran dentro de la actividad del "Upstream". Por otra parte, las empresas de color rojo forman parte de la actividad del "Downstream". Además, Repsol posee Repsol Internacional Finance que se dedica al sector financiero y Gas Natural que se dedica, como se ha dicho anteriormente, a la comercialización de gas y electricidad.

Si analizamos la participación de Repsol en sus filiales, se observa que en la mayoría de las empresas es el máximo accionista ya que, posee más del 50% del capital. La única empresa por debajo del 50% es Gas Natural con un 30,15% del capital social.



**Figura 1.6.4: Entidades que integran el Grupo Repsol S.A.**

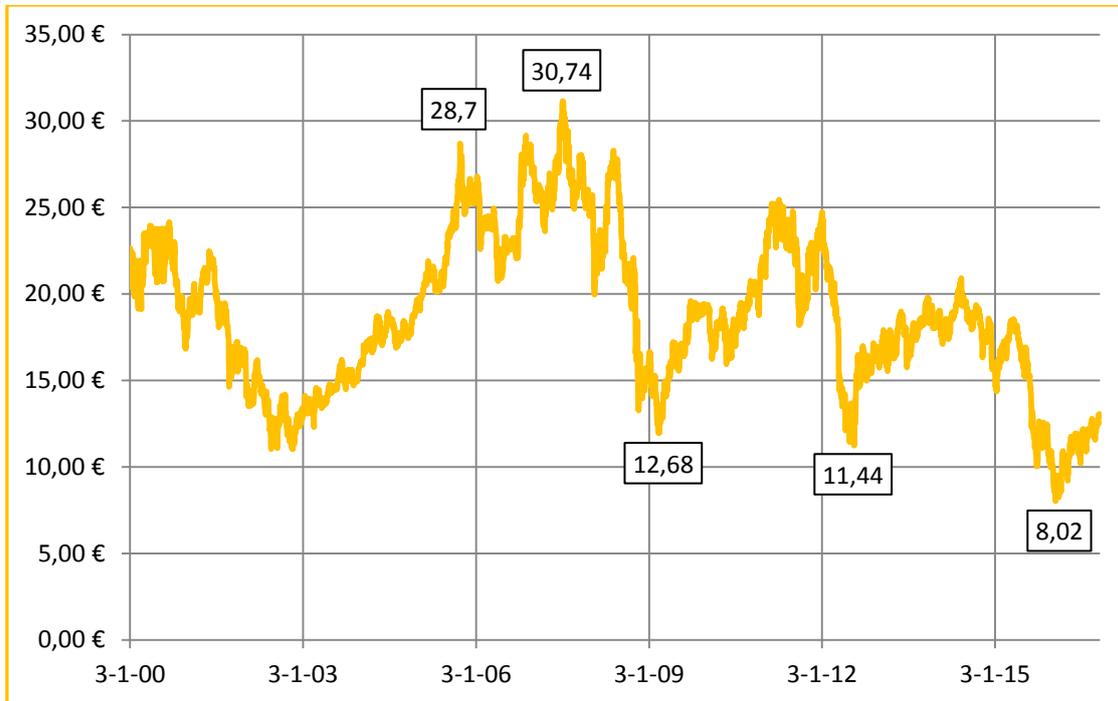
Fuente: Memoria Anual Repsol S.A. 2015

### 1.6.3. Repsol en el Mercado Bursátil

El Gráfico 1.6.1 muestra la evolución del precio de las acciones de Repsol durante los últimos diez años (mediante la utilización de medias mensuales). El máximo valor que han alcanzado las acciones de Repsol fue en el mes de junio de 2007 con 24,245€. Durante este periodo tanto la empresa como la economía vivía una coyuntura muy favorable, el consumo era muy alto, había pleno empleo y el precio del petróleo estaba en plena alza (máximo el 11 de julio de 2008 con 147,25 dólares el barril de Brent).

Por otra parte, durante esto últimos 10 años, el valor de las acciones ha alcanzado tres mínimos por tres causas distintas. El primer mínimo es en febrero de 2009 cuando las acciones de Repsol cotizan a 10,129€, momento en que estalló la crisis económica que provocó una reducción en el consumo, en la producción, aumento del desempleo y también, hay que unir una caída drástica del precio del barril de Brent. El segundo mínimo histórico es en mayo de 2012 con apenas 10,013€ por acción, el principal causante fue la expropiación de la compañía

YPF. El tercer mínimo histórico fue en enero de 2016 cuando la acción cotizaba en 9,492€ por una sobreproducción de petróleo y el incremento del método de extracción "fracking".<sup>5</sup>



**Gráfico 1.6.1: Evolución del precio de las acciones de Repsol S.A en los últimos 16 años.**

Fuente: Elaboración propia a partir de datos históricos de Investing.com

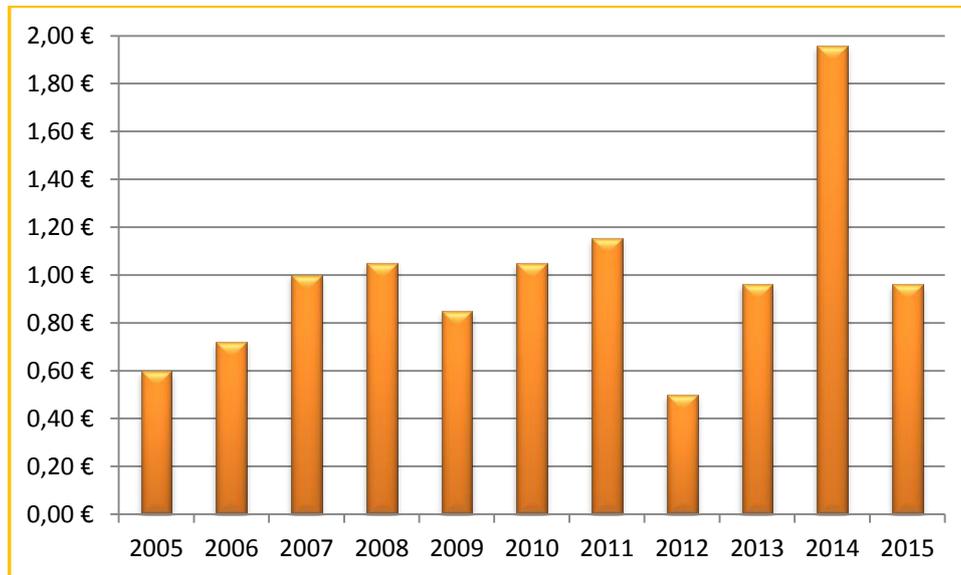
#### 1.6.4. Retribución a los Accionistas

La política de reparto de dividendos de Repsol se basa en mantener una retribución atractiva para sus accionistas, dependiendo de los resultados de ejercicios anteriores, de la evolución de los negocios y resultados operativos.

El Gráfico 1.6.2 muestra la retribución de los accionistas de Repsol durante los últimos diez años disponibles. El año de mayor reparto fue el año 2014 donde los accionistas de la empresa recibieron 1,96€ por acción. El dividendo incluía un importe de 0,477€ y 0,485€ brutos correspondientes a la estrategia "Repsol Dividendo Flexible", y un dividendo extraordinario a cuenta de los resultados del ejercicio de 1€ bruto por acción.

<sup>5</sup>Fracking o fractura hidráulica es una técnica que se utiliza para buscar nuevas zonas de extracción o aumentar la extracción de gas y petróleo del subsuelo.

Por el contrario, destaca el año 2012 donde apenas Repsol repartió 0,50€ brutos por acción. El principal causante fue la expropiación, por parte del gobierno argentino, de la empresa YPF que provocó grandes pérdidas para la entidad y una importante bajada de la cotización de las acciones.



**Gráfico 1.6.2: Retribución anual (€) de Repsol S.A.**

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de Memorias Anuales de Repsol S.A.

La estrategia de retribución de Repsol se basa, como ya se ha dicho anteriormente, en el dividendo flexible o "*scrip dividend*". Esta estrategia se basa en un reparto flexible para sus accionistas, la empresa le da la oportunidad de cobrar el dividendo en efectivo o en nuevas acciones. Además, también los accionistas tienen la posibilidad de vender los derechos correspondientes a dicha ampliación.

La principal ventaja que ofrece el dividendo flexible es la reducción de la salida de dinero de la empresa. Es decir, si los accionistas optan por la retribución en acciones saldrá una cantidad menor de dinero (normalmente de la cuenta de resultados)



# 2 Opciones sobre Acciones (*Stocks Options*)

Durante el presente capítulo vamos a centrarnos en introducir de forma teórica las ideas esenciales sobre las opciones financieras o productos financieros derivados de estas. Esta parte del trabajo trata de presentar de una forma matemática las principales características de las opciones financieras. En particular, nos centraremos en describir a través de funciones matemáticas definidas a trozos las posiciones a vencimiento que este tipo de contratos financieros pueden ofrecer beneficios/pérdidas.

## 2.1. Contratos de Opciones Financieras

En finanzas se conoce como una opción (*option*) a un contrato que se emite sobre un subyacente (normalmente acciones o índices bursátiles) que se firma en un momento temporal  $t_0$ , con el fin, de que a vencimiento conceda un derecho (normalmente a comprar o vender el subyacente) al tenedor o propietario del contrato (*buyer* o *holder*) y una obligación a su vendedor o contrapartida (*seller* o *writer*). Por poseer el derecho, el propietario del contrato paga en el momento inicial  $t_0$  una prima (*prime*). Si el propietario del contrato ejercita su derecho, en el vencimiento  $T$  pagará o recibirá (dependiendo, como detallaremos en las próximas páginas, del tipo de opción que se trate) una cantidad determinado al inicio del contrato, que se conoce como precio de ejercicio (*strike*).

Dependiendo de las características del contrato, encontramos diferentes tipos de opciones:

- **Opción de compra (Call option):** este contrato proporciona al tenedor o propietario del contrato un derecho a comprar el subyacente al vencimiento  $T$ . del contrato En ese instante, el propietario de la opción de compra pagará el precio de ejercicio a la contrapartida (vendedor), y éste deberá entregar de forma obligatoria el subyacente al propietario de la opción. La opción de compra *Call* será de tipo europea (*European Call*) si el derecho de compra solo se puede ejercer en el instante final  $T$ . En cambio, la opción de compra *Call* será de tipo americana (*American Call*) si el derecho de compra se puede ejercer en cualquier instante  $t$  de la vida del contrato, es decir,  $t_0 < t \leq T$ .
- **Opción de venta (Put option):** este contrato proporciona al tenedor o propietario el derecho a vender el subyacente al vencimiento  $T$  del contrato. En ese instante, el tenedor de la opción de venta entregará a su contrapartida el subyacente y éste quedará obligado a pagar al propietario de la *Put* el precio de ejercicio. La opción de venta *Put* será de tipo europea (*European Put*) si el derecho de venta solo se puede ejercer en el instante final  $T$ . En cambio, la opción de venta *Put* será de tipo americana (*American Put*) si el derecho de venta se puede ejercer en cualquier instante  $t$  de la vida del contrato, es decir,  $t_0 < t \leq T$ .

Hay que señalar que en un contrato

- **En la opción de compra *Call*,** tanto la prima como el precio de ejercicio lo paga el tenedor del contrato, y el dueño del subyacente es el vendedor.
- **En la opción de venta *Put*,** la prima la paga el tenedor del contrato, quien a su vez es el propietario del subyacente, y en su contrapartida quien paga el precio de ejercicio.

Normalmente se utiliza la denominación posición corta (*short position*) a quien vende (o posee una obligación sobre) la opción y posición larga (*long position*) a quien compra (o posee un derecho sobre) la opción.

La Tabla 2.1.1 muestra a modo de resumen de los principales derechos y obligaciones. Además de la posición de las dos partes (tenedor y vendedor) tanto de un contrato de opción de compra y de venta.

OPCIÓN	Tenedor ( <i>holder</i> )	Vendedor ( <i>writer</i> )
<b>Call (Comprar)</b>	Derecho	Obligación
<b>Put (Venta)</b>	Derecho	Obligación
<b>Posición</b>	Larga	Corta

Tabla 2.1.1: Derechos/Obligaciones y posiciones del tenedor y el vendedor de una opción *Call* y de una opción *Put*.

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 2.1.2 detalla los principales aspectos de los contratos *Call* y *Put*.

	Tenedor ( <i>holder</i> )		Vendedor ( <i>writer</i> )	
	CALL	PUT	CALL	PUT
<b>Propietario del subyacente</b>	---	Si	Si	---
<b>Pago de la prima</b>	Si	Si	---	---
<b>Pago del precio de ejercicio</b>	Si	---	---	Si

Tabla 2.1.2: Detalle de las características de los contratos *Call* y *Put*.

Fuente: Elaboración propia

## 2.2. El Rol Financiero de los Contratos de Opciones

Las principales funciones de los contratos de opciones en los mercados financieros son:

- **Cobertura (*hedge*):** esta estrategia se utiliza con el fin de reducir el riesgo de la posición que se adopta en el mercado al realizar una inversión.
- **Apalancamiento (*leverage*):** a través de esta estrategia podemos lograr una posición en el mercado, con poco efectivo, que puede tener un importante efecto en la rentabilidad de la inversión sin haber comprado el producto subyacente (una acción, por ejemplo).

A continuación, se muestran un par de ejemplos que permiten ver de forma ilustrativa las funciones anteriores:

**Ejemplo de estrategia de apalancamiento con una opción *Call*.** Imaginemos que una acción de una empresa tiene un precio de 100€ y que un inversor posee 500€ para invertirlos en la compra de acciones, por lo tanto, el inversor solo puede comprar 5 acciones. Si el inversor cree que la acción subirá durante los próximos meses puede utilizar las opciones *Call* para

apalancarse con su escaso efectivo y especular sobre las acciones, en lugar de comprarlas directamente. Ahora, imaginemos que el precio de una opción de compra *Call* con precio de ejercicio 100€ es 2€. De esta manera el inversor puede adquirir 250 opciones *Call* (en este ejemplo ignoramos las comisiones para simplificar la explicación). Si en el momento vencimiento de la *Call* la acción cotiza a 110€, ejerceremos nuestro derecho de compra de la acción y obtendremos una ganancia de  $250 \times (110 - 100) = 2500$  €, mientras que si hubiéramos comprado la acción directamente solo habríamos ganado  $5 \times (110 - 100) = 50$ €. Por tanto, los beneficios (retornos) con la opción *Call* es del 500% sobre la inversión y con la compra de las acciones es solo del 10% sobre la inversión. Esto es lo que en finanzas se conoce como una inversión apalancada. Cabe señalar que, si al vencimiento de la opción *Call*, la acción cotiza a un precio inferior al precio de ejercicio 100€, obtendremos una pérdida de  $2 \times 250 = 500$ €, es decir, el valor de la prima inicial. Por lo tanto, la compra de una opción *Call* va ligada con una visión alcista de la acción, ya que se piensa que el precio de la acción subirá, y por tanto, a vencimiento la opción de compra se ejercerá.

- **Ejemplo de estrategia de cobertura con una opción Put.** Imaginemos que tenemos 1000 acciones de una compañía que su precio de cotización es de 50€/acción. Sabemos que corremos el riesgo de que la cotización de nuestras acciones baje. Para reducir el riesgo, es decir, cubrirnos frente a la bajada de cotización, podemos comprar una opción *Put* con vencimiento dentro de 3 meses con un precio de ejercicio  $K = 45$ €. Esta estrategia nos otorga el derecho a vender la acción dentro de 3 meses al precio 45€/acción siempre y cuando la acción tenga un precio inferior a 45€ dentro de tres meses, por lo que estaríamos cubiertos frente al riesgo de caída del precio de la acción. Para poseer este derecho pagamos a día de hoy 2€/acción, o sea, un total de 2000€. Mediante esta prima cubrimos los 5000€ que vale a día de hoy nuestra inversión. Si las acciones dentro de 3 meses cotizan, por ejemplo a 35€/acción, y no nos hubiéramos cubierto a través de la compra de la opción *Put* perderíamos  $(50 - 35) \times 1000 = 15000$ €, mientras que comprando la *Put* las pérdidas se reducen ostensiblemente a  $(50 - 45) \times 1000 = 5000$ € con una pequeña inversión de 2000€ que sumadas a las pérdidas nos da un valor total de  $5000 + 2000 = 7000$ €, cantidad que es mucho más pequeña que la cantidad que la pérdida si no hubiéramos comprado la opción de venta *Put*,  $7000€ < 15000€$ .

### 2.3. Diagramas de Pago de las Opciones

Cuando compramos una opción *Call* o *Put* se adquiere un derecho de compra o de venta, respectivamente. Es por tanto normal cuestionarnos la siguiente pregunta:

#### ¿Cuándo se ejercerá una opción *Call/Put*?

En el caso de una opción tipo *Call (Put)* europea, el derecho solo se podrá ejercer en el momento de vencimiento  $T$ . En ese instante, si el valor del subyacente,  $S_T$ , es mayor (menor) que el precio de ejercicio  $K$ ,  $S_T > K$  ( $S_T < K$ ), entonces el propietario de la *Call (Put)* ejercerá su derecho y pagará (recibirá) el precio de ejercicio  $K$  y recibirá (entregará) el subyacente. Estas ideas serán válidas para las opciones americanas si sustituimos  $T$  por  $t$ , siendo  $t: t_0 < t \leq T$ .

La terminología que aparece en la Tabla 2.3.1 corresponde a la que se utiliza de forma estándar para indicar a vencimiento del contrato de una opción europea, la relación de orden del valor del subyacente,  $S_T$ , y el precio del ejercicio  $K$ .

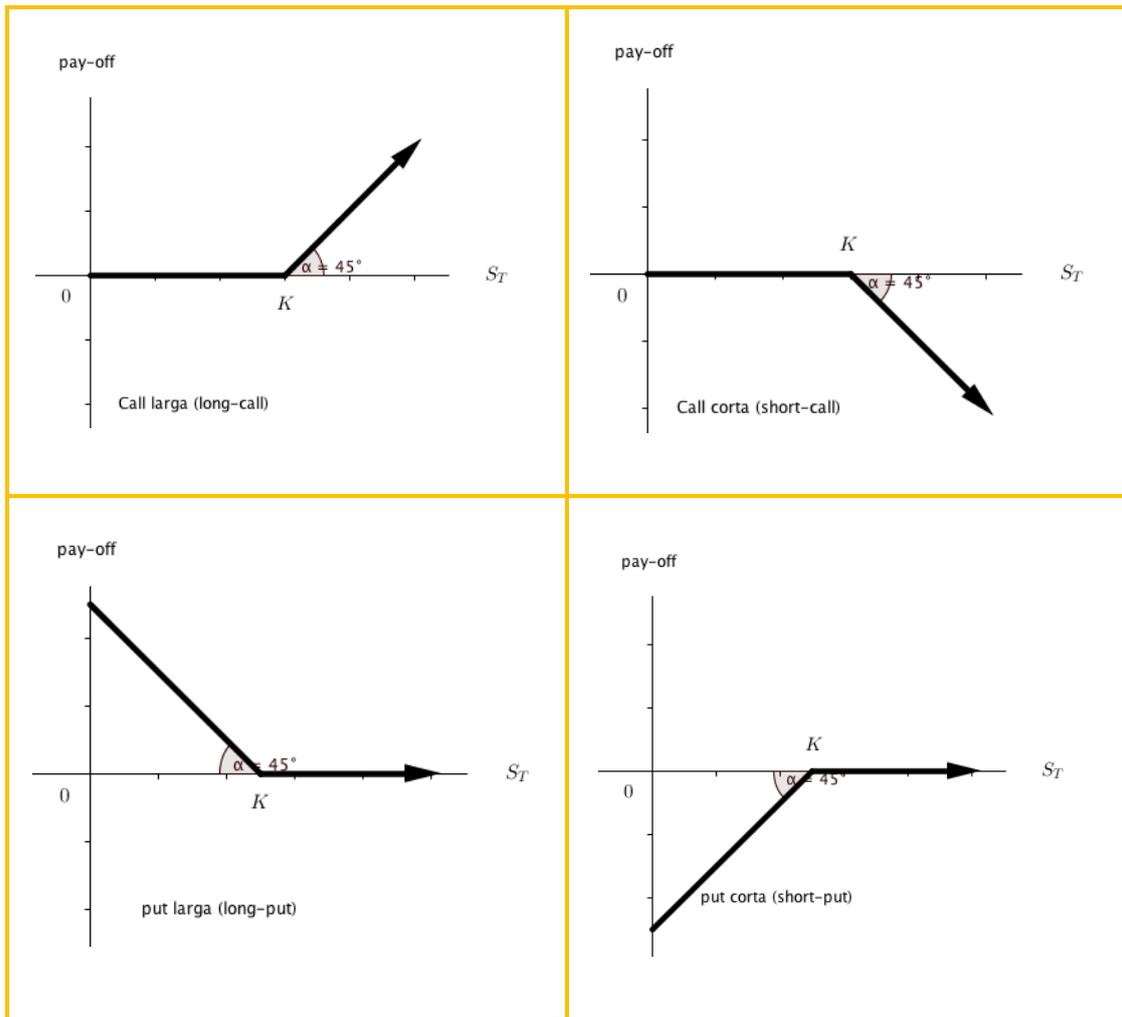
Posición	¿Se ejerce la opción?	CALL	PUT
En el dinero/ <i>ITM (in the money)</i>	Sí	$S_T > K$	$S_T < K$
Al dinero/ <i>ATM (at the money)</i>	Indiferente	$S_T = K$	$S_T = K$
Fuera del dinero/ <i>OTM (out of the money)</i>	No	$S_T < K$	$S_T > K$

Tabla 2.3.1: Terminología para opciones *Call* y *Put* europeas a vencimiento, en función de si hay ejercicio o no de la opción.

Fuente: Elaboración propia

Un aspecto importante es el siguiente: aunque se ejerza la opción (es decir, esté *In The Money*), el propietario de la opción no siempre obtiene un beneficio. Esto ocurre porque para esta explicación el coste de la posición inicial, las comisiones, etc., son ignoradas (en la mayoría de la literatura disponible) y ello podría hacer que el beneficio de la inversión (retorno) obtenido con el ejercicio de la opción fuese negativo, es decir, una pérdida. No obstante, el derecho de ejercicio se realiza, ya que se consigue disminuir las pérdidas totales.

En la Figura 2.3.1 se observan las gráficas de los beneficios brutos o *pay-off* para posiciones cortas y largas de opción de compra *Call* y de venta *Put* al vencimiento  $T$ .



**Figura 2.3.1: Diagramas de beneficios brutos o *pay-off* para posiciones cortas y largas de opción de compra y de venta al vencimiento  $T$ .**

Fuente: Elaboración propia

Obsérvese que la pendiente de las rectas es  $\pm 1$ , ya que, el *pay-off* es de la misma magnitud que el subyacente. Por lo tanto, como la opción solo se ejerce cuando el *pay-off* es positivo se tienen las relaciones mostradas en la expresión (2.3.1) para el caso de posiciones largas de compra (*Call*) y de venta (*Put*).

$$\begin{cases} \text{pay-off (long call)} = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+, \\ \text{pay-off (long put)} = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Si ahora incluimos la prima (coste de inicial de la estrategia de inversión),  $C$  para una *Call* y  $P$  para una *Put*, las funciones de beneficios/pérdidas ( $B/P$ ) para las posiciones corta y larga serán las mostradas en la Figura 2.3.2.

$$(B/P)_{CL}(S_T) = \begin{cases} -C & \text{si } 0 \leq S_T \leq K, \\ S_T - (C + K) & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

$$(B/P)_{CC}(S_T) = \begin{cases} C & \text{si } 0 \leq S_T \leq K, \\ -S_T + (C + K) & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

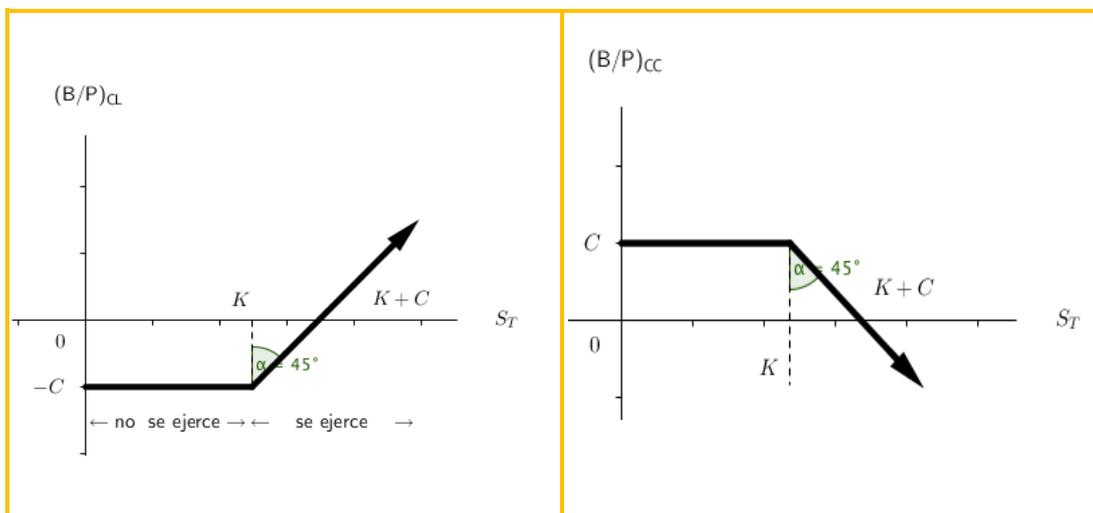
$$(B/P)_{PC}(S_T) = \begin{cases} -S_T + (K - P) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K, \\ -P & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

$$(B/P)_{PL}(S_T) = \begin{cases} S_T - (K - P) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K, \\ P & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

**Figura 2.3.2: Función de beneficios/perdidas (B/P) de una posición corta (C) y de una posición larga (L) de una opción Call (C) y de una opción de venta Put (P) de primas C y P, respectivamente, precio de ejercicio K y vencimiento T.**

Fuente: Elaboración propia

La Figura 2.3.3 representa las funciones de la Figura 2.3.2.



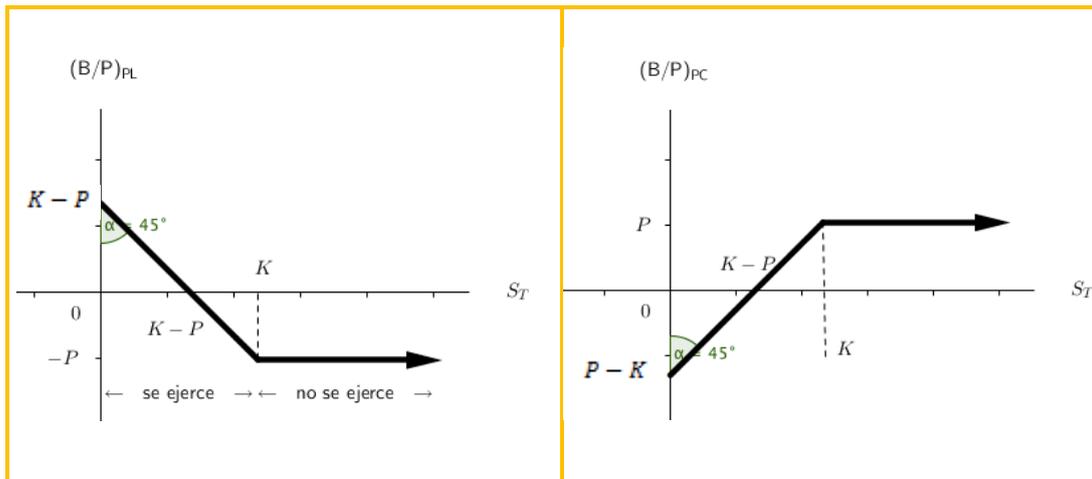


Figura 2.3.3: Representación gráfica de las funciones de beneficios/pérdidas dadas en la Figura 2.3.2.

Fuente: Elaboración propia

Todas las gráficas de posiciones largas tienen una zona crítica del valor del subyacente en el momento de vencimiento donde a pesar de que hay pérdidas, el tenedor del contrato ejerce su derecho. Estas zonas críticas son:

Call larga:  $S_T \in [K, K + C]$ .

Put larga:  $S_T \in [K - P, K]$ .

Cuando el valor del subyacente se encuentre dentro de estos intervalos a vencimiento, el propietario de la opción ejerce su derecho para así reducir sus pérdidas. Veámoslo con ejemplos:

- Si se adquiere a fecha de hoy una opción *Call Europea* sobre la compra de un ordenador que actualmente tiene un valor de 1500€ para poder comprarlo dentro de tres meses a 1200€ ( $K = 1200$ ) y se paga por ello una prima de 100€ ( $C = 100$ ), entonces si transcurridos los tres meses el ordenador en el mercado posee un precio comprendido en el rango  $[1200, 1200 + 100] = [1200, 1300]$ , por ejemplo, 1230€, se ejercerá el derecho de compra y se pagarán 1200€, porque acudir al mercado libre costaría 1230€, es decir, 30€ más caro. Obsérvese que en realidad hemos tenido 70€ de pérdidas,  $1230 - (1200 + 100) = -70$ €, ya que se tiene que incluir los 100€, en total el gasto asciende a  $1200 + 100 = 1300$ €, pero se podría haber adquirido el ordenador por 1230€ si no se hubiera adquirido la opción *Call*. Ahora bien, siendo que al principio se ha comprado la *Call* es mejor ejercerla porque si no la adquisición del ordenador implicaría un gasto de  $100 + 1230 = 1330$ €, en lugar de los 1300€.
- Y si por ejemplo, asumiendo el mismo precio actual del ordenador que en el ejemplo

anterior, 1500€, adquirimos una *opción Put Europea* para vender el ordenador dentro de tres meses a 1800€ ( $K = 1800€$ ), pagando por ello una prima de 100€ ( $P = 100€$ ), entonces si pasados los tres meses en el mercado el ordenador tiene un precio que pertenece al intervalo  $[1800 - 100, 1800] = [1700, 1800]$ , por ejemplo, 1755€, ejerceremos nuestro derecho a vender el ordenador a 1800€, aunque, como veremos a continuación, ello acarrea pérdidas. A vencimiento entregaremos el ordenador y recibiremos 1800€, y con ello tenemos  $-1755 + (1800 - 100) = -55$  € de pérdidas. Ahora bien, si no ejercemos el derecho de venta que nos proporciona la *Put*, las pérdidas hubieran sido mayores, concretamente 100€ de la prima pagada al principio del contrato.

### Lectura de las gráficas de las funciones de beneficios/perdidas de las opciones de compra y venta

Las gráficas de la Figura 2.3.3 contienen gran cantidad de información interesante las opciones europeas de compra y venta en la fecha de vencimiento  $T$ , que es el momento decisivo en que puede ejercerse el derecho que otorga la opción a su propietario. A continuación, se detallan estas características, para cuya deducción es importante tener en cuenta tanto las expresiones algebraicas dadas en la Figura 2.3.2 como las representaciones gráficas de la Figura 2.3.3

#### Long Call (opción de compra larga)

- Las pérdidas se encuentran limitadas a la prima. Las pérdidas se mueven en el intervalo  $[-K, 0]$  al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo  $[0, K + C]$ , es decir,

$$\text{Si } 0 \leq S_T \leq K + C \Rightarrow \text{Pérdidas} \in [-K, 0].$$

- Los beneficios están potencialmente ilimitados. Los beneficios se mueven en el intervalo  $[0, +\infty[$  al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo  $[K + C, +\infty[$ , es decir,

$$\text{Si } K + C \leq S_T < +\infty \Rightarrow \text{Beneficios} \in [0, +\infty[.$$

- Se tiene una visión alcista del subyacente, ya que, para que se obtengan beneficios se espera que a vencimiento el valor del subyacente aumente.
- La opción de compra solo se debe de ejercer cuando a vencimiento el subyacente supere el precio de ejercicio.

### **Short Call (opción de compra corta)**

- Las pérdidas se encuentran potencialmente ilimitadas. Las pérdidas se mueven en el intervalo  $] -\infty, 0]$  al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo  $[K + C, +\infty[$ , es decir,

$$\text{Si } K + C \leq S_T < +\infty \Rightarrow \text{Pérdidas} \in ] -\infty, 0].$$

- Los beneficios están limitados a la prima. Los beneficios se mueven en el intervalo  $[0, K]$  al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo  $[0, K + C]$ , es decir,

$$\text{Si } 0 \leq S_T \leq K + C \Rightarrow \text{Beneficios} \in [0, K].$$

- Se tiene una visión bajista del subyacente, ya que para obtener beneficios se espera que a vencimiento el valor del subyacente disminuya.

### **Long Put (opción de venta larga)**

- Las pérdidas se encuentran limitadas a la prima. Las pérdidas se mueven en el intervalo  $[-K, 0]$  al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo  $[K - P, +\infty[$ , es decir,

$$\text{Si } K - P \leq S_T < +\infty \Rightarrow \text{Pérdidas} \in [-K, 0].$$

- Los beneficios están limitados. Los beneficios se mueven en el intervalo  $[0, P + K]$  al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo  $[0, K - P]$ , es decir,

$$\text{Si } 0 \leq S_T \leq K - P \Rightarrow \text{Beneficios} \in [0, P + K].$$

- Se tienen una visión bajista del subyacente, ya que se espera obtener beneficios cuando a vencimiento el valor del subyacente disminuya.
- La opción de venta solo se debe ejercer cuando a vencimiento el subyacente tengo un precio menor al precio de ejercicio.

### **Short Put (opción de venta corta)**

- Las pérdidas se encuentran limitadas a la prima más el precio de ejercicio. Las pérdidas se mueven en el intervalo  $[-P - K, 0]$  al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo  $[0, K - P]$ , es decir,

$$\text{Si } 0 \leq S_T \leq K - P \Rightarrow \text{Pérdidas} \in [-K - P, 0].$$

- Los beneficios están limitados a la prima. Los beneficios se mueven en el intervalo  $[0, P]$  al variar el subyacente en el vencimiento en el intervalo  $[K - P, +\infty[$ , es decir,

$$\text{Si } K - P \leq S_T < +\infty \Rightarrow \text{Beneficios} \in [0, P].$$

- Se tiene una visión alcista del subyacente, ya que se espera obtener beneficios cuando a vencimiento el valor del subyacente valor se incremente.

Para terminar con este capítulo, es conveniente conocer la siguiente terminología estándar, con respecto de las posiciones optimistas (valor alcista del subyacente) y pesimistas (valor bajista del subyacente) del mercado: las posiciones *Long Call* y *Short Put* son optimistas, también conocidas *bullish/optimistic positions*, mientras que las posiciones *Short Call* y *Long Put* son pesimistas, también conocidas *bearish/pessimistic positions*.



# 3 Estrategias Especulativas con Opciones Financieras (Spreads)

Uno de los principales usos financieros de las opciones es la creación de estrategias inversoras mediante la compra y venta de las mismas. A continuación, se estudiarán diferentes formas de combinar la compra y venta de opciones para crear una estrategia especulativa denominada "diferenciales alcistas de precios" (o **Bull Spreads**). A partir de los diagramas de beneficios/pérdidas de una opción básica tipo *Call* y tipo *Put*, se construirán inversiones más complejas. El contenido de este capítulo está basado en artículos docentes <sup>6</sup><sup>7</sup> de las cuales soy coautor.

## 3.1. Diferencial Alcista (*Bull Spread*)

Las estrategias de diferenciales de precio alcista o **Bull Spreads** consisten en tomar una posición de compra o de venta en dos o más opciones del mismo tipo (por ejemplo, dos o más opciones de compra o *Call*; dos o más opciones de venta o *Put*) sobre el mismo subyacente, pero con diferentes precios de ejercicio (o *strike*) y fecha de vencimiento (*maturity*). Así, una

---

<sup>6</sup> Burgos C., Cortés J., Navarro A. y Rodríguez G. (2017): *Estrategias especulativas con opciones financieras; Diferenciales de precios alcistas (Bull Spreads)*

<sup>7</sup>Burgos C., Cortés J., Navarro A. y Rodríguez G. (2017): *Estrategias especulativas con opciones financieras; Diferenciales de precios bajistas (Bear Spreads)*

**Call Bull Spread (Put Bull Spread)** involucra una posición con *Call* (*Put*). La idea es que una opción es utilizada para cubrir el riesgo de la otra opción.

### 3.1.1. Diferencial Alcista de Compra o *Call Bull Spread*

En esta estrategia el inversor toma la siguiente posición:

- Compra una opción *Call* sobre un subyacente con un cierto precio del ejercicio  $K_1$ .
- Vende una opción *Call* sobre el mismo subyacente a un cierto precio de ejercicio  $K_2$  mayor que  $K_1$  ( $K_2 > K_1$ ).

A continuación, se va a analizar esta estrategia.

Si denotamos por  $C_1$  y  $C_2$  a las primas de ambas opciones *Call*, como  $K_2 > K_1$ , se deduce que  $C_1 > C_2$ . Esto es así porque la prima de una opción *Call* sobre un subyacente es menor cuanto mayor es el precio del ejercicio. En otras palabras, la prima y el precio de ejercicio de una *Call* se compensan, ya que para una *Call* es la misma persona (el propietario del derecho de compra o *holder* de la *Call*, quien paga tanto la prima como el precio de ejercicio).

La ecuación (3.1.1) detalla las funciones de beneficios/pérdidas de la compra de una *Call* (o posición larga), y de la venta de una *Call* (o posición corta) en función del subyacente a vencimiento, así como la posición total resultante mediante el diferencial alcista de compra o ***Call Bull Spread***.

$$\begin{aligned}
 (B/P)_{CL}(S_T) &= \begin{cases} -C_1 & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_1, \\ S_T - (C_1 + K_1) & \text{si } S_T \geq K_1. \end{cases} \\
 (B/P)_{CC}(S_T) &= \begin{cases} C_2 & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_2, \\ (C_2 + K_2) - S_T & \text{si } S_T \geq K_2. \end{cases} \quad (3.1.1) \\
 (B/P)_{TOTAL}(S_T) &= \begin{cases} -C_1 + C_2 & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_1, \\ S_T - (C_1 + K_1) + C_2 & \text{si } K_1 \leq S_T \leq K_2, \\ (C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) & \text{si } S_T \geq K_2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

La ecuación (3.1.1) representa la función de beneficios/pérdidas (B/P) de una posición corta (C) y de una posición larga (L) de una *Call* (C) de primas  $C_1$  y  $C_2$  y precios de ejercicio  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente, al vencimiento  $T$ . Finalmente,  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$  representa la función de

beneficios/pérdidas de la posición total que corresponde con una diferencial alcista de compra o *Call Bull Spread*.

La Figura 3.1.1 muestra la función  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$  para una *Call Bull Spread*. Para la realización de esta figura es conveniente tener en cuenta que, como se ha indicado,  $C_2 - C_1 < 0$  (pues  $K_2 - K_1 > 0$ ). Así,

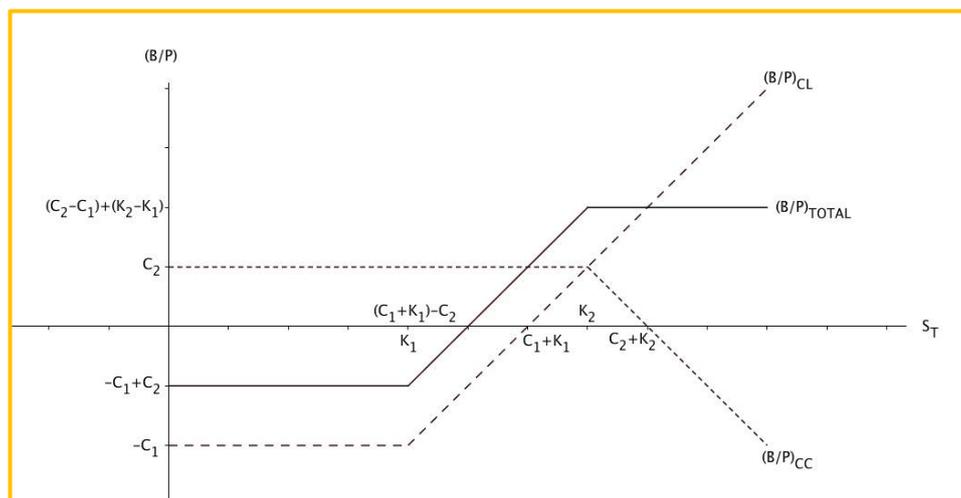
$$(C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) > 0,$$

puesto que el valor de los precios de ejercicio es normalmente mucho mayor que el de las primas, por lo tanto, es de esperar que las diferencias de los precios de ejercicio sean mayores, en valor absoluto, que los de las primas.

La Figura 3.1.1 muestra la representación de las funciones de la ecuación (3.1.1). Obsérvese que el punto de corte de la función de beneficios/pérdidas de la posición total con el eje horizontal es  $K_1 + C_1 - C_2$ , y corresponde al valor del subyacente a vencimiento que arroja beneficio nulo. Este valor cumple que

$$K_1 < K_1 + C_1 - C_2 < K_2.$$

Obsérvese que la desigualdad de la derecha equivale a la desigualdad anterior:  $(C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) > 0$ .



**Figura 3.1.1: Representación gráfica de las funciones beneficios/pérdidas de las funciones de las funciones de la ecuación (3.1.1).**

Fuente: Elaboración propia

A partir de la Figura 3.1.1 es sencillo deducir las principales características de la posición diferencial alcista de compra o **Call Bull Spread**:

- Para adoptar esta posición se necesita una inversión o gasto inicial  $C_2 - C_1 (< 0)$ .
- Es una posición optimista (o alcista), ya que un inversor que adopta esta estrategia cree que a vencimiento el subyacente estará en valores altos, y con su posición obtendrá beneficios (aunque limitados al valor  $(C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) > 0$ , es decir, la suma de las diferenciales de primas y precios de ejercicio).
- Las pérdidas están limitadas al valor  $C_2 - C_1 < 0$  que es la inversión inicial.
- A vencimientos, hay pérdidas/beneficios si el subyacente tiene un valor en los intervalos  $[0, K_1 + C_1 - C_2]/[K_1 + C_1 - C_2, +\infty[$ , respectivamente.

### 3.1.2. Diferencial Alcista de Venta o *Put Bull Spread*

En esta estrategia el inversor toma la siguiente posición:

- Compra una opción *Put* sobre un subyacente con un cierto precio del ejercicio  $K_1$ .
- Vende una opción *Put* sobre el mismo subyacente a un cierto precio de ejercicio  $K_2$  mayor que  $K_1$  ( $K_2 > K_1$ ).

Del mismo modo que se ha hecho con la diferencial alcista de compra, a continuación, se va a analizar esta estrategia.

Si denotamos por  $P_1$  y  $P_2$  a las primas de ambas opciones *Put*, como  $K_2 > K_1$ , se deduce, a diferencia de los que sucede con las *Call* que  $P_2 > P_1$ . Esto es así porque la prima de una opción *Put* la paga el propietario de la opción, es decir, quien tiene el derecho a vender el subyacente y su contrapartida tiene la obligación de quedarse con el subyacente a vencimiento (si el *holder* de la *Put* ejerce su derecho). En otras palabras, cuanto más pague (es decir, mayor será la prima) el propietario de la *Put* por vender a vencimiento el subyacente, mayor será el precio de ejercicio que pedirá por entregar el subyacente.

En la ecuación (3.1.2) se detallan las funciones de beneficios/pérdidas de la compra de una *Put* (o posición larga), y de la venta de una *Put* (o posición corta) en función del subyacente a vencimiento, así como la posición total resultante mediante la diferencial alcista de venta o **Put Bull Spread**.

$$(B/P)_{PL}(S_T) = \begin{cases} -S_T + (K_1 - P_1) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_1, \\ -P_1 & \text{si } S_T \geq K_1, \end{cases}$$

$$(B/P)_{PC}(S_T) = \begin{cases} S_T - (K_2 - P_2) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_2, \\ P_2 & \text{si } S_T \geq K_2. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

$$(B/P)_{TOTAL}(S_T) = \begin{cases} (K_1 - K_2) - (P_1 - P_2) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_1, \\ S_T - (K_2 + P_1 - P_2) & \text{si } K_1 \leq S_T \leq K_2, \\ P_2 - P_1 & \text{si } S_T \geq K_2. \end{cases}$$

La ecuación (3.1.2) representa la función de beneficios/pérdidas (B/P) de una posición corta (C) y de una posición larga (L) de una *Put* (P) de primas  $P_1$  y  $P_2$  y precios de ejercicio  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente, al vencimiento  $T$ . Finalmente,  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$  representa la función de beneficios/pérdidas de la posición total que corresponde con una diferencial alcista de venta o *Put Bull Spread*.

La Figura 3.1.2 representa la función  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$ . Para la realización de esta gráfica es conveniente tener en cuenta que, como se ha indicado,  $P_2 - P_1 > 0$   $K_2 - K_1 > 0$ . Además, el valor de los precios de ejercicio es normalmente mucho mayor que el de las primas, por lo tanto, es de esperar que las diferencias entre los precios de ejercicio sean mayores que los de las primas.

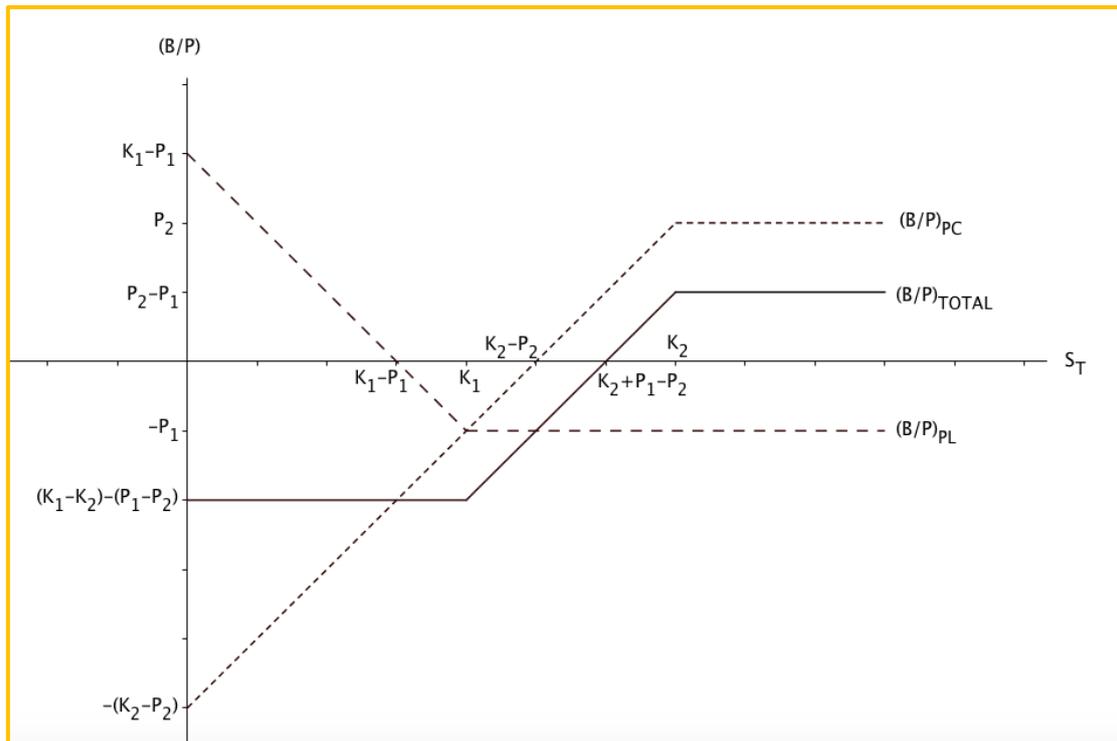
$$K_2 - K_1 > C_2 - C_1.$$

La Figura 3.1.2 muestra la representación de las funciones de la ecuación (3.1.2). Obsérvese que el punto de corte de la función de beneficios/pérdidas de la posición total con el eje horizontal es  $K_2 + P_1 - P_2$ , y corresponde al valor del subyacente a vencimiento que arroja beneficio nulo. Este valor cumple (véase gráficamente en la Figura 3.1.2) que

$$K_1 < K_2 + P_1 - P_2 < K_2.$$

Obsérvese que la desigualdad de la izquierda equivale a la desigualdad anterior:

$$K_2 - K_1 > C_2 - C_1 > 0.$$



**Figura 3.1.2: Representación gráfica de las funciones beneficios/pérdidas de las funciones de las funciones de la ecuación (3.1.2).**

Fuente: Elaboración propia

A partir de la Figura 3.1.2 es sencillo deducir las principales características de la posición diferencial alcista de venta o **Put Bull Spread**:

- Para adoptar esta posición se necesita una inversión o gasto inicial igual a  $(K_1 - K_2) - (P_1 - P_2) < 0$ .
- Es una posición optimista (o alcista), ya que un inversor que adopta esta estrategia cree que a vencimiento el subyacente estará en valores altos, y con su posición obtendrá beneficios (aunque limitados al valor  $P_2 - P_1 > 0$ , es decir, la diferencia de las primas pagadas por cada opción).
- Las pérdidas están limitadas al valor  $(K_1 - K_2) - (P_1 - P_2) < 0$ , que es la inversión inicial.
- Con esta posición, la cual apuesta por una visión alcista del subyacente, se consigue reducir las pérdidas en caso de que el subyacente esté bajo (puesto que la pérdida  $-(K_2 - P_2)$  de una posición corta en la *Put* pasa a  $-(K_2 - P_2) + (K_1 - P_1) > -(K_2 - P_2)$ , pues  $K_1 - P_1 > 0$ ).
- A vencimientos, hay pérdidas/beneficios si el subyacente tiene un valor en los intervalos  $[0, K_2 + P_1 - P_2] / [K_2 + P_1 - P_2, +\infty[$ , respectivamente.

## 3.2. Diferencial Bajista (*Bear Spreads*)

A continuación, se estudiarán diferentes formas de combinar la compra y venta de opciones para crear una estrategia especulativa denominada "diferenciales bajistas de precios" (o *Bear Spreads*). A partir de los diagramas de beneficios/pérdidas de una opción básica tipo *Call* y tipo *Put*, se construirán inversiones más complejas, denominadas *Bear Spreads*, para los cuales se determinarán sus principales ventajas/inconvenientes, desde el punto de vista del que realiza dicha inversión.

Las estrategias de diferenciales de precio bajista o *Bear spreads* consisten en tomar una posición de compra o de venta en dos o más opciones del mismo tipo (por ejemplo, dos o más opciones de compra o *Call*; dos o más opciones de venta o *Put*) sobre el mismo subyacente, pero con diferentes precios de ejercicio (o *strike*) y fecha de expiración o vencimiento (*maturity*). Así, una *Call Bear Spread (Put Bear Spread)* involucra una posición con *Call (Put)*. La idea es que una opción es utilizada para cubrir el riesgo de la otra opción.

### 3.2.1. Diferencial Bajista de Compra o *Call Bear Spread*

En esta estrategia el inversor toma la siguiente posición:

- Compra una opción *Call* sobre un subyacente con un cierto precio del ejercicio  $K_1$ .
- Vende una opción *Call* sobre el mismo subyacente a un cierto precio de ejercicio  $K_2$  menor que  $K_1$  ( $K_2 < K_1$ ).

A continuación, se va a analizar esta estrategia.

Si denotamos por  $C_1$  y  $C_2$  a las primas de ambas opciones *Call*, como  $K_2 < K_1$ , se deduce que  $C_1 < C_2$ . Esto es así porque la prima de una opción *Call* sobre un subyacente es menor cuanto mayor es el precio del ejercicio. En otras palabras, la prima y el precio de ejercicio de una *Call* se compensan, ya que para una *Call* es la misma persona (el propietario del derecho de compra o *holder* de la *Call*) quien paga tanto la prima como el precio de ejercicio.

En la ecuación (3.2.1) se detallan las funciones de beneficios/pérdidas de la compra de una *Call* (o posición larga), y de la venta de una *Call* (o posición corta) en función del subyacente a vencimiento, así como la posición total resultante mediante la diferencial alcista de compra o *Call Bear Spread*.

$$\begin{aligned}
 (B/P)_{CL}(S_T) &= \begin{cases} -C_1 & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_1, \\ S_T - (C_1 + K_1) & \text{si } S_T \geq K_1. \end{cases} \\
 (B/P)_{CC}(S_T) &= \begin{cases} C_2 & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_2, \\ -S_T + (C_2 + K_2) & \text{si } S_T \geq K_2. \end{cases} \quad (3.2.1) \\
 (B/P)_{TOTAL}(S_T) &= \begin{cases} C_2 - C_1 & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_2, \\ -S_T + C_2 + K_2 - C_1 & \text{si } K_2 \leq S_T \leq K_1, \\ (C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) & \text{si } S_T \geq K_1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

La ecuación (3.2.1) representa la función de beneficios/pérdidas (B/P) de una posición corta (C) y de una posición larga (L) de una *Call* (C) de primas  $C_1$  y  $C_2$  y precios de ejercicio  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente, al vencimiento  $T$ . Finalmente,  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$  representa la función de beneficios/pérdidas de la posición total que corresponde con una diferencial bajista de compra o *Call Bear Spread*.

La Figura 3.2.1 muestra gráficamente la función  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$  de la ecuación 3.2.1. Para la realización de esta gráfica es conveniente tener en cuenta que, como se ha indicado,  $C_2 - C_1 > 0$  (pues  $K_2 - K_1 < 0$ ). Así,

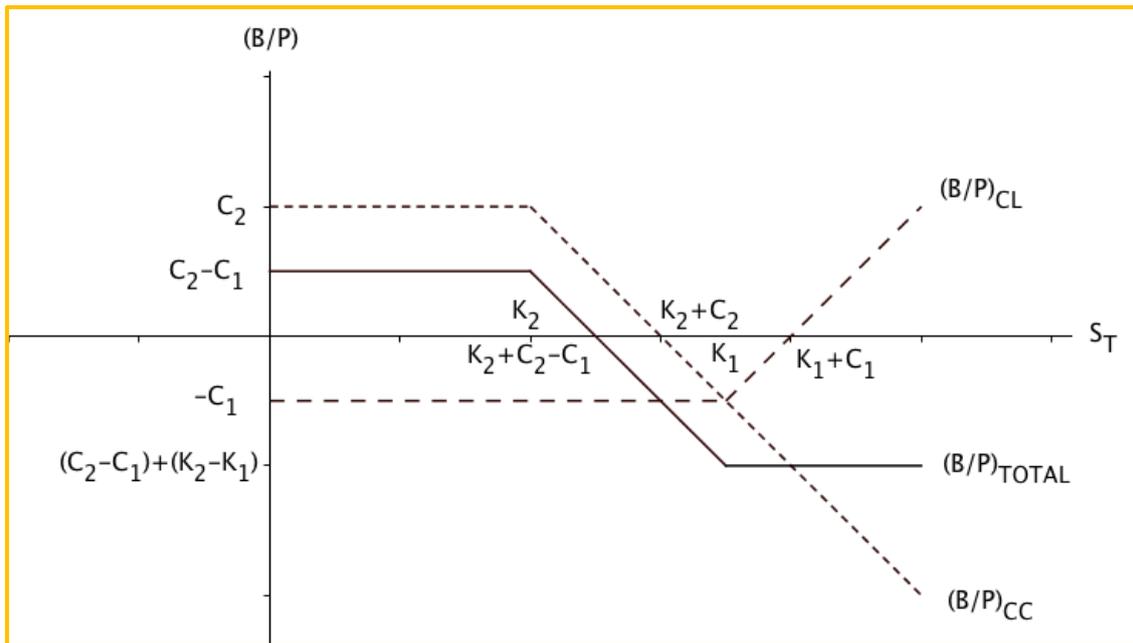
$$(C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) < 0,$$

ya que el valor de los precios de ejercicio es normalmente mucho mayor que el de las primas, por lo tanto, es de esperar que las diferencias de los precios de ejercicio sean mayores, en valor absoluto, que los de las primas.

La Figura 3.2.1 muestra la representación de las funciones de la ecuación (3.2.1). Obsérvese que el punto de corte de la función de beneficios/pérdidas de la posición total con el eje horizontal es  $K_2 + C_2 - C_1$ , y corresponde al valor del subyacente a vencimiento que arroja beneficio nulo. Este valor cumple (véase gráficamente en la Fig. 1) que

$$K_2 < K_2 + C_2 - C_1 < K_1.$$

Obsérvese que la desigualdad de la derecha equivale a la desigualdad anterior:  $(C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) < 0$ .



**Figura 3.2.1: Representación gráfica de las funciones beneficios/pérdidas de las funciones de las funciones de la ecuación (3.2.1).**

Fuente: Elaboración propia

A partir de la Figura 3.2.1 es sencillo deducir las principales características de la posición diferencial bajista de compra o **Call Bear Spread**:

- Para adoptar esta posición no se necesita una inversión o gasto inicial, puesto que  $C_2 - C_1 > 0$  (obtenemos un ingreso al adoptar esta estrategia).
- Es una posición pesimista (o bajista) porque un inversor que adopta esta estrategia cree que a vencimiento el subyacente estará en valores bajos, y con su posición obtendrá beneficios, aunque limitados al valor  $C_2 - C_1 > 0$  que es la inversión inicial.
- Las pérdidas están limitadas al valor  $(C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) < 0$ , es decir, la suma de las diferencias de primas y precios de ejercicio).
- A vencimientos, hay beneficios/pérdidas si el subyacente tiene un valor en los intervalos  $[0, K_2 + C_2 - C_1]/[K_2 + C_2 - C_1, +\infty[$ , respectivamente.

### 3.2.2. Diferencial Bajista de Venta o Put Bear Spread

En esta estrategia el inversor toma la siguiente posición:

- Compra una opción *Put* sobre un subyacente con un cierto precio del ejercicio  $K_1$ .

- Vende una opción *Put* sobre el mismo subyacente a un cierto precio de ejercicio  $K_2$  menor que  $K_1$  ( $K_2 < K_1$ ).

Del mismo modo que se ha hecho con la diferencial bajista de compra, a continuación, se va a analizar esta estrategia.

Si denotamos por  $P_1$  y  $P_2$  a las primas de ambas opciones *Put*, como  $K_2 < K_1$ , se deduce, a diferencia de lo que sucede con las *Call* que  $P_2 < P_1$ . Esto es así porque la prima de una opción *Put* la paga el propietario de la opción, es decir, quien tiene el derecho a vender el subyacente y su contrapartida tiene la obligación de quedarse con el subyacente a vencimiento (si el *holder* de la *Put* ejerce su derecho). En otras palabras, cuanto más pague (es decir, mayor será la prima) el propietario de la *Put* por vender a vencimiento el subyacente, mayor será el precio de ejercicio que pedirá por entregar el subyacente.

En la ecuación (3.2.2) se detallan las funciones de beneficios/pérdidas de la compra de una *Put* (o posición larga), y de la venta de una *Put* (o posición corta) en función del subyacente a vencimiento, así como la posición total resultante mediante la diferencial bajista de venta o **Put Bear Spread**.

$$\begin{aligned}
 (B/P)_{PL}(S_T) &= \begin{cases} -S_T + (K_1 - P_1) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_1, \\ -P_1 & \text{si } S_T \geq K_1. \end{cases} \\
 (B/P)_{PC}(S_T) &= \begin{cases} S_T - (K_2 - P_2) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_2, \\ P_2 & \text{si } S_T \geq K_2. \end{cases} \quad (3.2.2) \\
 (B/P)_{TOTAL}(S_T) &= \begin{cases} (K_1 - K_2) + (P_2 - P_1) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_2, \\ -S_T + K_1 + P_2 - P_1 & \text{si } K_2 \leq S_T \leq K_1, \\ P_2 - P_1 & \text{si } S_T \geq K_1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

La ecuación (3.2.2) representa la función de beneficios/pérdidas (B/P) de una posición corta (C) y de una posición larga (L) de una *Put* (P) de primas  $P_1$  y  $P_2$  y precios de ejercicio  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente, al vencimiento  $T$ . Finalmente,  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$  representa la función de beneficios/pérdidas de la posición total que corresponde con una diferencial bajista de venta o **Put Bear Spread**.

La Figura 3.2.2 contiene la representación de la función  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$ . Para la realización de

esta gráfica es conveniente tener en cuenta que, como se ha indicado anteriormente,  $P_2 - P_1 < 0$   $K_2 - K_1 < 0$ . Además,

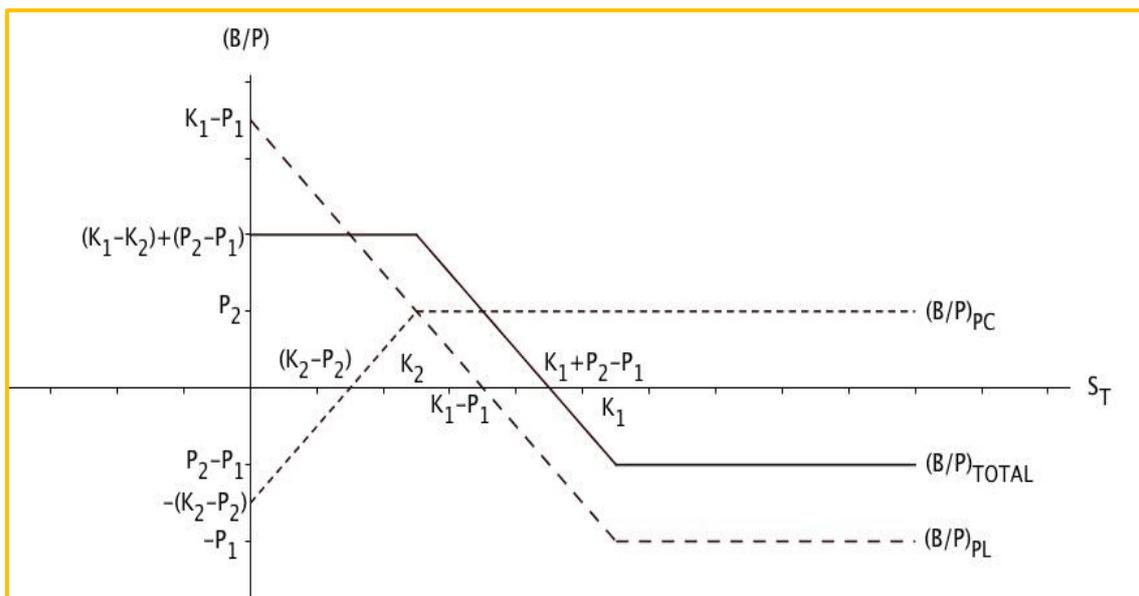
$$K_1 - K_2 > P_1 - P_2,$$

el valor de los precios de ejercicio es normalmente mucho mayor que el de las primas, por lo tanto, es de esperar que las diferencias de los precios de ejercicio sean mayores que los de las primas.

La Figura 3.2.2 muestra la representación de las funciones de la ecuación (3.2.2). Obsérvese que el punto de corte de la función de beneficios/pérdidas de la posición total con el eje horizontal es  $K_1 + P_2 - P_1$ , y corresponde al valor del subyacente a vencimiento que arroja beneficio nulo. Este valor cumple que

$$K_2 < K_1 + P_2 - P_1 < K_1.$$

Obsérvese que la desigualdad de la izquierda equivale a la desigualdad anterior:  $K_1 - K_2 > P_1 - P_2 > 0$ .



**Figura 3.2.2: Representación gráfica de las funciones beneficios/pérdidas de las funciones de las funciones de la ecuación (3.2.2).**

Fuente: Elaboración propia

A partir de la Figura 3.2.2 es sencillo deducir las principales características de la posición

diferencial bajista de venta o **Put Bear Spread**:

- Para adoptar esta posición no se necesita una inversión o gasto inicial igual a  $(K_1 - K_2) + (P_2 - P_1) > 0$  (obtenemos un ingreso al adoptar esta estrategia).
- Es una posición pesimista (o bajista), ya que un inversor que adopta esta estrategia cree que a vencimiento el subyacente estará en valores bajos, y con su posición obtendrá beneficios (aunque limitados al valor  $(K_1 - K_2) + (P_2 - P_1) > 0$ ), es decir, la suma de las diferenciales de primas y precios de ejercicio.
- Las pérdidas están limitadas al valor  $P_2 - P_1 < 0$ , que es la diferencia de primas.
- A vencimientos, hay pérdidas/beneficios si el subyacente tiene un valor en los intervalos  $[0, K_1 + P_2 - P_1]/[K_1 + P_2 - P_1, +\infty[$ , respectivamente.

# 4 Preliminares Estocásticos: una Introducción del Movimiento Browniano

Durante este capítulo se van a introducir los instrumentos básicos que se necesitaran para calcular la solución del Modelo Log-Normal y sus principales propiedades estadísticas. El capítulo comenzará con la presentación de un proceso estocástico, denominado Movimiento Browniano o proceso de Wiener, que será muy importante para el desarrollo teórico del Modelo Log Normal. El punto de partida será la definición y enunciación de las propiedades estadísticas del Movimiento Browniano. Después, se realizará una explicación de cómo obtener simulaciones del proceso de Wiener.

Cabe señalar que el Modelo Log-Normal se basa en una ecuación de diferencial estocástica de tipo de Itô. El capítulo se cerrará con el estudio de las integrales de tipo de Itô y de sus principales propiedades estadísticas, que serán importantes para resolver la integral de Itô.

## 4.1. El Movimiento Browniano o Proceso de Wiener

La principal función de un proceso estocástico es describir la evolución temporal de una variable aleatoria. En el presente trabajo se utiliza el Movimiento Browniano, uno de los procesos estocásticos más famosos en la estadística, para analizar el comportamiento de las variables económico-financieras, concretamente las acciones de Repsol S.A.

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico de tipo *gaussiano*<sup>8</sup>. El hallazgo de este proceso estocástico fue de una manera intuitiva cuando en el año 1827 Robert Brown, biólogo y botánico escocés, lo empleó para explicar el movimiento aleatorio de las partículas de polen en el agua debido a la interacción de dichas partículas con las moléculas del agua (interacción molecular). Hoy en día se le conoce como Movimiento Browniano.

En el siglo XX, se halló una mayor utilidad del proceso estocástico de Robert Brown, puesto que se podía aplicar en múltiples campos. Por ejemplo, en el campo de las finanzas se podía utilizar para modelizar el comportamiento de los precios de los activos subyacentes. En el año 1900 Louis Bachelier, un matemático francés, empleó el Movimiento Browniano en su tesis doctoral "La teoría de la especulación"<sup>9</sup> para poder modelizar ciertos activos financieros. Sin embargo, la tesis de Louis Bachelier no fue comprendida y pasó desapercibida durante mucho tiempo. Unos años más tarde, Norbert Wiener<sup>10</sup> sí que pudo conseguir demostrar matemáticamente el concepto de Movimiento Browniano y es por ello que, también se le conoce como proceso de Wiener<sup>11</sup>.

Durante este trabajo el proceso de Wiener o Movimiento Browniano se denotará a través de la ecuación  $B = \{B(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  o de forma sintetizada por  $B = \{B(t): t \geq 0\}$ . Cabe destacar que otra forma de denotarlo es través de  $W = \{W(t): t \geq 0\}$  que también está presente en numerosos textos y estudios.

Anteriormente, se ha fijado como objetivo del presente trabajo el análisis y aplicación de un modelo estocástico de activos subyacentes llamado Modelo Log-Normal, cuya solución es un proceso estocástico llamado Movimiento Browniano Geométrico (MBG). La característica que proporciona la aleatoriedad al Movimiento Browniano Geométrico es el Movimiento Browniano cuyas trayectorias muestrales son muy irregulares.

---

<sup>8</sup> Recordatorio: Un proceso estocástico  $(X(t; \omega): t \in T, \omega \in \Omega)$  se dice que es de tipo gaussiano si las distribuciones finito dimensionales de dicho proceso son gaussianas, en particular,  $X(t; \cdot)$  es una variable gaussiana para cada  $t \in T$ .

<sup>9</sup> Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Vol 3, pp 21-86.

<sup>10</sup> Norbert Wiener (1894-1964) fue un matemático estadounidense conocido como el fundador de la cibernética.

<sup>11</sup> Klebaner, C. (2011). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications To Finance*. Imperial College Press.

Siguiendo con el Movimiento Browniano vamos a intentar definir este significativo proceso estocástico enunciando una serie de propiedades estadísticas que lo singularizan.

El Movimiento Browniano,  $B = \{B(t): t \geq 0\}$  ó  $W\{W(t): t \geq 0\}$  es un proceso estocástico que cumple las siguientes propiedades estadísticas:

- **MB.1.** Comienza en el origen con probabilidad 1:  $P[B(0) = 0] = 1$ .
- **MB.2.** El modelo tiene incrementos estacionarios  $B(t + \Delta t) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + \Delta t) - B(s)$ .  
 $\forall s, t \in [0, +\infty[$ , siendo  $\stackrel{d}{=}$  una igualdad en distribución.
- **MB.3.** El modelo Browniano posee incrementos independientes.  
 $B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \dots, B(t_{n+1}) - B(t_n)$  con  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < +\infty$ , son independientes.
- **MB.4.** Los incrementos  $B(t) - B(s)$  del Movimiento Browniano o proceso de *Wiener* con  $s < t$  siguen una distribución normal,  $Z \sim N[0; t]$ , es decir, con media cero y varianza  $t - s > 0: B(t) - B(s) \sim N[0; t - s]$ . Si se tiene en cuenta la primera propiedad (P1.),  $s$  toma un valor cero ( $s = 0$ ), por lo tanto  $B(t) \sim N[0; t]$ .
- **MB.5.** Posee trayectorias sin saltos y que no se pueden diferenciar en ningún punto, es decir, tiene trayectorias continuas indiferenciables.

## 4.2. Propiedades Estocásticas del Movimiento Browniano

A continuación, se van a enumerar las principales propiedades del proceso de Wiener o Movimiento Browniano  $B = \{B(t), t \geq 0\}$ . En algunas de estas propiedades no se va a perder tiempo en demostrarlas, para cualquier duda puede consultarse por ejemplo el libro de Øksendal, B.K.<sup>12</sup>

- **P.1.** Función media: Aplicando la condición MB.4 se deduce que la función media del Movimiento Browniano es idénticamente nula:

$$\mu_{S(t)} = 0, \forall t \geq 0.$$

La Gráfica 4.3.1, que se encuentra en el siguiente apartado (Simulación del Movimiento Browniano), muestra de una forma ilustrada esta propiedad.

---

<sup>12</sup> Øksendal, B.K. (2003): Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications. Berlin, Springer.

- **P.2.** Función de Covarianza: Mide el grado de relación lineal entre las dos variables aleatorias,  $B(s)$  y  $B(t)$ , que se obtienen al determinar dos instantes  $s$  y  $t$ . A continuación, se va a demostrar que se cumple.

$$\text{Cov}[B(t), B(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Para mostrarlo de una forma más sencilla se aplica la propiedad P.1 y las propiedades básicas del operador esperanza a  $0 \leq s \leq t < +\infty$  obteniendo:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[B(t), B(s)] &= E[B(t)B(s)] - E[B(t)]E[B(s)] \\ &= E[B(t)B(s) - (B(s))^2 + (B(s))^2] \\ &= E[B(t) - B(s)B(s) + (B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s)] + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))] + E[(B(s))^2] \\ &= E[B(t) - B(s)]E[B(s) - B(0)] + E[(B(s))^2] \\ &= (E[B(t)] - E[B(s)])E[B(s)] - E[B(0)] + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(s))^2] \\ &= \text{Var}[B(s)] \\ &= s. \end{aligned}$$

Se observa que si en la relación anterior se toma  $s = t$ , el resultado es la propiedad MB.4, es decir, la varianza del Movimiento Browniano es  $t$ .

- **P.3.**  $B(t)$  es  $\frac{1}{2}$ - autosemejante: Esta es, básicamente, una propiedad geométrica que se denota de la siguiente manera.

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall t \geq 0, \forall T \geq 0.$$

- **P.4.** Las trayectorias muestrales de  $B(t)$  son continuas pero estas no son diferenciables en ningún punto. Se puede probar que  $B(t)$  posee trayectorias que no poseen variación acotada, es decir, las trayectorias no son derivables (las trayectorias del Movimiento Browniano poseen puntos angulosos, en otras palabras, con pico para todo instante  $t$ ). En el Gráfico 4.3.1 se puede observar de una el comportamiento muestral de esta propiedad.

### 4.3. Simulación del Movimiento Browniano

Para obtener predicciones de activos subyacentes será necesario realizar simulaciones del Movimiento Browniano. En los próximos apartados, cuando se introduzca y se resuelva el Modelo Log-Normal con el fin de modelizar los subyacentes, se verá como la solución quedará expresada en términos del Movimiento Browniano. A continuación, se presenta una manera de simular el Movimiento Browniano.

La simulación del Movimiento Browniano se realizará a través de variables aleatorias normales tipificadas, para ello se hará uso de la siguiente identidad:

$$B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N[0; 1].$$

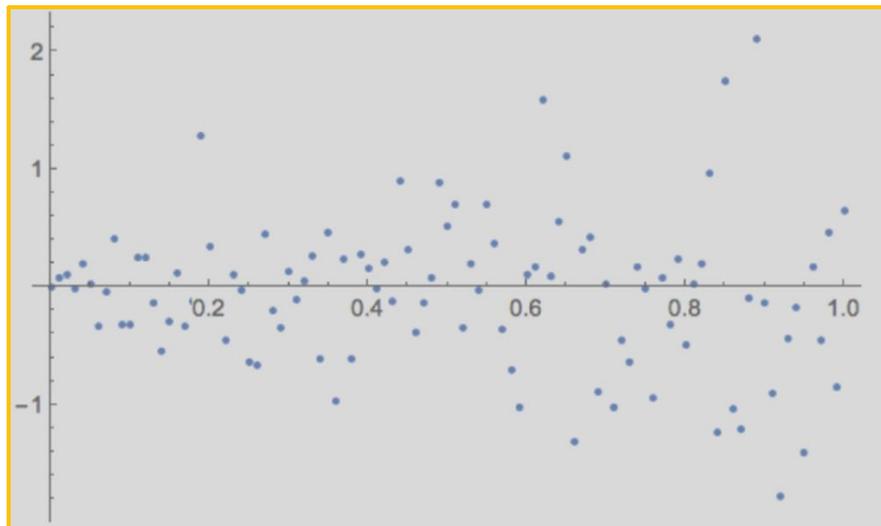
La distribución anterior es una distribución gaussiana y demuestra que la media y la varianza de los dos elementos coinciden, como se observa en la Tabla 4.3.1. Para demostrar esta identidad basta con probar que los dos elementos de la identidad poseen la misma distribución.

	$B(t)$	$\sqrt{t}Z$
<b>Distribución</b>	Gaussiana	Transformación lineal de una variable gaussiana.
<b>Media</b>	0 [MB.4.]	$E[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t}E[Z] = 0$
<b>Varianza</b>	$t$ [MB.4.]	$Var[\sqrt{t}Z] = [Z] = (\sqrt{t})^2 Var[Z] = t$

**Tabla 4.3.1: Media y varianza del Movimiento Browniano.**

Fuente: Elaboración propia

El Grafico 4.3.1 contiene una simulación del Movimiento Browniano sobre la ventana temporal  $[0,1]$ . En la presente gráfica se puede ver de forma ilustrada la propiedad MB.1 y la propiedad estadística P.4 que se presentaron anteriormente.



**Gráfico 4.3.1: Simulación del Movimiento Browniano sobre la ventana temporal [0, 1].**

Fuente: Elaboración propia

Sin embargo, hay que señalar que el Movimiento Browniano es la característica que introduce el componente de aleatoriedad en el Modelo Log-Normal, dicha aleatoriedad no proviene directamente del Movimiento Browniano, sino de su diferencial. El diferencial del Movimiento Browniano es un nuevo proceso estocástico de tipo gaussiano conocido como Ruido Blanco (*White Noise*). El Ruido Blanco o *White Noise* se denota por  $\{dB(t), \forall t \geq 0\}$ .

Con base en el Teorema Central del Límite, el diferencial del Movimiento Browniano  $\{dB(t), \forall t \geq 0\}$  se aplicará para para modelizar la aleatoriedad, también denominada "ruido", en el modelo. Hay que tener en cuenta que hay abundantes factores en el mundo real que pueden fijar el valor de un activo financiero. Normalmente, el Teorema Central del Límite determina que, si  $S_n$  es la suma de  $n$  variables aleatorias independientes, la función de distribución de  $S_n$  se aproxima hacia una distribución normal o gaussiana. En conclusión, al modelizar el "ruido" aplicando el Teorema Central del Límite, este al seguir una distribución normal o gaussiana, otorga mayor coherencia a la decisión de modelizar la aleatoriedad a través de un proceso gaussiano, como lo son el Movimiento Browniano y su diferencial, el "Ruido Blanco".

#### 4.4. El Cálculo de Itô

Kiyoshi Itô era un matemático japonés que pasó a la historia por desarrollar el Cálculo de Itô, una teoría que suponía un avance en la diferenciación e integración de procesos estocásticos. La característica principal del Cálculo de Itô es la integral de Itô y el resultado más significativo, es el Lema de Itô. Se tiene que señalar que la integral de Itô, ayuda a facilitar la comprensión matemática de sucesos aleatorios y difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación.

La teoría de Itô posee muchas aplicaciones diferentes, no obstante, el Cálculo de Itô se adaptará al objetivo principal del presente trabajo. Se centrará en el cálculo exacto de la solución de una ecuación diferencial estocástica definida por la siguiente ecuación:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t).$$

Esta solución se obtiene, en determinados casos que dependen de la forma específica de los coeficientes  $f(t, X(t))dt$  y  $g(t, X(t))$ , aplican el Lema de Itô.

El Lema de Itô se define como una versión estocástica de la regla de la cadena para procesos estocásticos  $X(t)$ . Cuando se desarrolle el Modelo Log-Normal, se podrá observar que es posible obtener una expresión explícita del proceso estocástico.

### Lema de Itô (versión integral)

**Hipótesis:** Sea  $X(t)$  un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial tipo de Itô con condición inicial determinista  $x_0$  :

$$dX(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0$$

$$X(0) = x_0,$$

y sea  $F(t, x)$  una función  $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas.

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = F_1(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = F_2(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x^2} = F_{22}(t, x).$$

**Tesis:** Entonces para  $t > 0$  se cumple

$$F(t, x(t)) - F(s, x_0) = \int_0^t \{F_1(r, x(r)) + f(r, x(r))F_2(r, x(r))\}dr$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{2} (g(r, x(r)))^2 F_{22}(r, x(r))dr + \int_0^t g(r, x(r))F_2(r, x(r))dB(r).$$

Siguiendo con el Lema de Itô, ahora se procederá a enunciarlo a través de su versión integral, que más tarde nos será de gran utilidad.

#### 4.4.1. La Integral de Itô

Cabe señalar que la definición de integral de Itô es diferente de la teoría matemática clásica de diferenciación e integración, se tiene que definir lo que se debería entender por integración de un proceso estocástico respecto al Movimiento Browniano (u otro proceso estocástico). El objetivo de este apartado, en el que se va a introducir el concepto de integral de Itô de un proceso estocástico, es poder dar una interpretación de la siguiente expresión:

$$\int_0^t X(s)dB(s), \quad (4.4.1)$$

$X(s)$  es un proceso estocástico que cumple una serie de condiciones que a continuación se van a detallar. La expresión que se ha introducido anteriormente es la integral de Itô con respecto

al Movimiento Browniano. La explicación se basará en las ideas del libro de E. Allen<sup>13</sup>. Para empezar con la explicación, interpretaremos la integral que se ha presentado anteriormente como si  $X(s)$  y  $B(s)$  fueran funciones deterministas, en lugar de procesos estocásticos.

Consideramos que  $f(s)$  y  $g(s)$  son funciones deterministas respecto a la variable tiempo  $s$  y supongamos la siguiente integral:

$$\int_0^t g(s)df(s). \quad (4.4.2)$$

Cuando  $f(s)$  tiende a una función diferenciable, se denota  $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$ , también se puede escribir,  $df(s) = f'(s)ds$ . Si se sustituye esto en la integral (xxx) se obtiene:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s)ds,$$

quedando una integral definida como una integral de tipo de Riemann o integral estándar. Si  $f(s)$  no fuese diferenciable, se podría hacer uso de la teoría determinista para definir la integral anterior. En efecto, cuando  $f(s)$  no es excesivamente irregular como función del argumento  $s$ , es decir, cuando  $f(s)$  es lo que se conoce como una función de variación acotada, se puede demostrar que la integral está correctamente definida a través del siguiente límite:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i) (f(s_{i+1}) - f(s_i)),$$

$f(s)$  es de variación acotada,  $f(s_{i+1})$  está aproximado a  $f(s_i)$ . Con la expresión anterior, es posible demostrar que el límite existe siempre que  $g(s)$  no varíe demasiado. Cabe destacar que el límite puede llegar a ser divergente si la función  $g(s)$  es excesivamente fluctuante en el tiempo.

Se determina la integral (4.4.2) de forma equivalente a través del siguiente límite:

$$\int_0^t X(s, \omega)dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega)(B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad \omega \in \Omega. \quad (4.4.3)$$

<sup>13</sup> Allen, E. (2007): Modelling with Itô Stochastic Differential Equations. Springer (Series Mathematical Modelling: Theory and Applications). New York

a que se toma el límite para cada  $\omega$  fijo en el espacio muestral  $\Omega$  de la variable aleatoria  $B(s)$ . Aquí aparece un problema, el límite para cada  $\omega$  por lo general no existe, comienza en  $\pm\infty$ , para muchos procesos estocásticos  $X(s)$ . La función  $s \rightarrow B(s, \omega)$  es extremadamente volátil para cada  $\omega$ . Como se mostraba en los apartados anteriores (ver propiedad estadística P.4.), el Movimiento Browniano es un prototipo de proceso estocástico con trayectorias muestrales continuas, pero estas no diferenciables en ningún punto (trayectorias continuas indiferenciables). Sin embargo, el Movimiento Browniano como función del tiempo no es de variación acotada para cada  $\omega$ , tal como se necesita para  $f(s)$ .

Para poder compensar esta irregularidad en las trayectorias del Movimiento Browniano, se tienen que exigir dos condiciones, que más tarde se especificarán, en el proceso integrador  $X(s)$ . Con la aplicación de estas condiciones el límite existirá a pesar de las trayectorias irregulares del Movimiento Browniano. La primera condición se basa en asumir que  $X(s)$  es independiente de los incrementos del Movimiento Browniano. A continuación, se detallará la segunda condición que posee relación con la variación del integrando (es similar a la condición de que  $g(s)$  en la ecuación (4.4.2) no debe de variar demasiado).

Aplicando la propiedad estadística MB.2 del Movimiento Browniano se obtiene que la variación de un incremento del mismo, viene determinada por:

$$E[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2] = s_{i+1} - s_i.$$

Si  $X(s_i)$  es independiente del incremento  $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} E\left[\left(X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] &= E[(X(s_i)^2)]E\left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2\right] \\ &= E[(X(s_i)^2)](s_{i+1} - s_i). \end{aligned}$$

Aplicando el segundo momento de la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)), \quad (4.4.4)$$

y aceptando que  $X(s_i)$  es independiente de  $B(s_{i+1}) - B(s_i)$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , se puede observar por la independencia de los incrementos del Movimiento Browniano que:

$$E \left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[(X(s_i))^2] (s_{i+1} - s_i).$$

La suma de la parte derecha de la ecuación anterior se trata de una aproximación de la integral  $\int_0^t E[(X(s))^2] ds$ . Por lo tanto, si esta integral existe se puede deducir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds,$$

esto conduce a la conclusión de que la varianza de la suma en la ecuación (4.4.4) converge a  $\int_0^t E[(X(s))^2] ds$ . Si se asume que esta integral existe, se puede demostrar lo siguiente:

$$E \left[ \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds. \quad (4.4.5)$$

Cabe señalar que la integral correspondiente al lado derecho de la ecuación (4.4.5) en algunos casos, puede no llegar a existir. La integral existirá siempre que sea finita, es decir, siempre que el proceso estocástico  $X(s)$  sea tal que su segundo momento integrado de 0 hasta  $t$ .

Por ejemplo, si se aplica la condición estadística MB.2 de la definición del Movimiento Browniano al proceso  $X(s) = s^{-1}B(s)$ , se obtiene:

$$\int_0^t E[(X(s))^2] ds = \int_0^t s^{-1} ds = \ln(t) - \ln(0) = +\infty.$$

Por otro lado, si se aplica  $X(s) = B(s)$ , sencillamente se puede observar que  $X(s)$  satisface la condición de integrabilidad. Esta situación también se cumple en muchos procesos estocásticos.

Volviendo a la relación (4.4.5), y considerando que la variable aleatoria  $X(s_i)$ , que aparece en la parte izquierda, debe de ser independiente de incrementos  $B(s_{i+1}) - B(s_i)$  para todos los valores de  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Cabe señalar que, esto origina la introducción de la conocida adaptabilidad del proceso integrador. Ahora se va a seguir con la introducción de una serie de definiciones:

- **Definición 1.** Una variable aleatoria  $X$  es conocida como  $\mathcal{F}_s$ - adaptada si  $X$  es capaz de ser

escrita como límite de una serie de funciones de  $B(r)$  para uno ó más  $r \leq s$ , pero no como función de cualquier  $B(u)$  con  $u > s$ . Un proceso estocástico de  $X(s)$  se dice que está adaptado si para cada tiempo  $s \in [0, t]$ , la variable  $X(s)$  es  $\mathcal{F}_s$ - adaptada.

Ahora, se destacan una serie de aspectos de la definición anterior. Primero, hay que recalcar algunos procesos que se derivan de composiciones simples del Movimiento Browniano tales como  $X(s) = f(s, B(s))$  son procesos adaptados sin embargo, procesos como  $X(s) = B(s + 1)$  no son procesos adaptados.

La integral  $X(s) = \int_0^s B(r)dr$  igualmente se define como un proceso estocástico adaptado, ya que la integral yace en el límite de sumas del Movimiento Browniano en distintos tiempos menores que  $s$ . Por lo definición de la integral de Itô se obtiene:

$$X(s) = \int_0^s B(\tau)d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} B(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Si nos centramos sobre la integral de Itô, se observa que siempre que el proceso integrando  $X(s)$  sea adaptado, la integral  $\int_0^t X(s)dB(s)$  como el límite puntual de la expresión (4.4.4). Además, el límite de la expresión (4.4.4) se puede probar que converge en media cuadrática y también, para cada  $\omega \in \Omega$ .

• **Definición 2.** Un proceso estocástico  $X(s)$  se puede integrar en el intervalo  $[0, t]$  en el sentido de Itô si:

1.  $X(s)$  es adaptado para  $s \in [0, t]$ , y
2.  $\int_0^t E \left[ (X(s))^2 \right] ds < \infty$ .

La Integral de Itô se denota como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s, \omega)dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega)(B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad (4.4.6)$$

donde el límite es considerado para cada  $\omega \in \Omega$ .

#### 4.4.2. Propiedades de la Integral de Itô

Tras introducir el concepto de integral de Itô, vamos a seguir con la introducción de sus propiedades estadísticas. Las propiedades se citarán distinguiendo entre si el integrando es un

proceso estadístico  $X(t)$  o bien una función determinista  $h(t)$ .

Si el integrando se trata de un proceso estocástico  $X(t)$  que cumple con las condiciones de la Definición 2, entonces se verifican las siguientes propiedades:

- **1ª propiedad.** Media:

$$E \left[ \int_0^t X(s) dB(s) \right] = 0.$$

- **2ª propiedad.** Varianza:

$$V \left[ \int_0^t X(s) dB(s) \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds.$$

Se puede observar que a partir de las propiedades 1 y 2 se determina:

$$E \left[ \left( \int_0^t X(s) dB(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds,$$

denominada isometría de Itô.

Sea  $h(t)$  una función determinista definida por  $\int_0^t (h(s))^2 ds$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- **3ª Propiedad.** Media:

$$E \left[ \int_0^t h(s) dB(s) \right] = 0.$$

- **4ª Propiedad.** Varianza:

$$Var \left[ \int_0^t h(s) dB(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds.$$

- **5ª Propiedad.** Covarianza:

$$\text{Cov} \left[ \int_0^t h_1(\tau) dB(\tau), \int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau,$$

donde  $t \wedge s = \min(t, s)$ .

En particular,

$$E \left[ \left( \int_0^t h_1(\tau) dB(\tau) \right) \left( \int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau.$$

- **6ª Propiedad.** Normalidad:

$$\int_0^t h(s) dB(s) \sim N \left[ 0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right].$$

# 5 | Modelo Estocástico

## Log-Normal

La finalidad de este capítulo es realizar una explicación del Modelo Log-Normal. La principal utilidad del Modelo Log-Normal será la de proporcionar una base matemática para poder realizar predicciones sobre un subyacente, concretamente sobre el precio futuro de las acciones de Repsol.

El modelo Log-Normal se utiliza para introducir la incertidumbre o aleatoriedad en el precio de cotización de un subyacente. El modelo se basa en una ecuación diferencial estocástica.

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.0.1)$$

donde

- $S(t)$  es el precio del subyacente en el instante  $t$ .
- $\mu$  se trata de una constante llamada tendencia o deriva.
- $\sigma$  es una constante positiva ( $\sigma > 0$ ) denominada volatilidad.
- $B(t)$  proceso estocástico denominada Movimiento Browniano, también conocido como el proceso estocástico de *Wiener*.
- $dS(t)$  es la variación del subyacente en el intervalo  $[t, t + dt]$ .
- $dB(t)$  es la variación del proceso estocástico de Wiener en el intervalo  $[t, t + dt]$ .

El presente capítulo comenzará con la motivación del modelo (5.0.1) a partir de los modelos

clásicos (deterministas) de subyacentes. Después, se utilizará el Cálculo de Itô, introducido en el capítulo anterior, para poder obtener la solución del Modelo Log-Normal y sus principales propiedades estadísticas (funciones media y varianza).

El capítulo seguirá con la introducción de las técnicas estadísticas para estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del modelo Log-Normal. La principal finalidad es obtener resultados que permitan realizar predicciones puntuales y por intervalos de confianza de un subyacente.

### 5.1. Motivación de un Modelo Estocástico para un Subyacente en Condiciones de Certidumbre

Este apartado va a consistir en introducir un modelo determinista clásico con la finalidad de poder representar la trayectoria temporal de una inversión sin riesgo, es decir, en condiciones de certidumbre. Este modelo será el primer paso para motivar el modelo estocástico Log-Normal.

$S_0$  determina un activo subyacente o principal que se invierte (capitaliza) a un tipo de interés  $\mu$  compuesto continuo durante un intervalo temporal  $[0, T]$  dividido en  $K$  períodos de longitud  $\Delta t > 0$  cada uno (véase la Figura 5.1.1).



Figura 5.1.1: Capitalización a interés compuesto continuo.

Fuente: Elaboración propia

Se determina por  $\hat{S}^{(j)}, j = 0, 1, \dots, K$  el capital durante  $j$  períodos, implícitamente se supone que  $\hat{S}^{(0)} = S_0$ , entonces se puede saber que:

$$\hat{S}^{(1)} = S_0 e^{\mu \Delta t}, \quad \hat{S}^{(2)} = S^{(1)} e^{\mu \Delta t}, \quad (5.1.1)$$

en general,

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu\Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, K, \quad (5.1.2)$$

razonando recursivamente se obtiene:

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu\Delta t} = \hat{S}^{(j-2)} e^{2\mu\Delta t} = \dots = S_0 e^{\mu j\Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, K. \quad (5.1.3)$$

Se puede observar que cuando  $j = k$  se cumple que  $\hat{S}(T) = \hat{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K\Delta t} = S_0 e^{\mu T}$ , nótese que donde anteriormente se ha utilizado  $K\Delta t = T$ , ahora se ha substituido por la siguiente notación  $\hat{S}(T)$  que representa el capital durante  $K$  períodos. Es decir, el fruto de  $K$  pasos de longitud  $\Delta t$  corresponde a un paso de tamaño  $T = K\Delta t$ . De hecho, este modelo de capitalización se obtiene al resolver el problema de valor inicial (ecuación diferencial ordinaria unida a un requisito inicial).

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu\hat{S}(t), \quad \hat{S}(0) = s_0. \quad (5.1.4)$$

El resultado de la derivada parcial anterior es el siguiente:

$$\hat{S}(t) = s_0 e^{\mu t}, \quad (5.1.5)$$

el cual, para  $t = T$  determina la solución del problema anterior:  $\tilde{S}(T) = s_0 e^{\mu T}$ . Es de vital importancia observar que el modelo estocástico de partida (modelo 5.0.1) contiene al modelo clásico determinista de capitalización continua, puesto que con solo hacer  $\sigma = 0$  en la ecuación (5.0.1) se obtiene, a partir de la ecuación diferencial estocástica, la ecuación diferencial ordinaria (5.1.4).

## 5.2. Motivación del Modelo Estocástico para un Subyacente Cotizado: El Modelo Log-Normal

En el apartado anterior se ha introducido un modelo para un subyacente en condiciones de certidumbre, es decir, el cual no presenta ningún tipo de aleatoriedad. En la realidad, el precio de un activo subyacente viene determinado por un gran número de factores (económicos, políticos, sociales, etc.) que influyen en los mercados financieros (donde cotizan

las acciones). Estos factores incluyen un elevado grado de incertidumbre dada la enorme dificultad de su determinación.

Dado el grado de incertidumbre que posee un subyacente será más adecuado y conveniente incluir la aleatoriedad en el modelo determinista. En el nuevo modelo el parámetro  $\mu$  se convierte en una cantidad aleatoria en vez de una cantidad determinística. Si se aplican los conocimientos estadísticos del capítulo anterior, la aleatoriedad se introducirá a través del Movimiento Browniano  $B(t)$ . Concretamente, a través de su diferencial o derivada, conocida como el proceso de Ruido Blanco (*White Noise*)  $dB(t)$ . Si se aplica se obtiene la siguiente expresión para  $\mu$ :

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma B'(t), \sigma > 0. \quad (5.2.1)$$

En la expresión anterior el parámetro  $\mu$  es el rendimiento medio del activo subyacente, pero ahora, se le ha incorporado fluctuaciones aleatorias a través del proceso estocástico Ruido Blanco  $B'(t)$  y su intensidad  $\sigma > 0$ .

Aplicando en el modelo estocástico la notación diferencial de la derivada

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt},$$

y teniendo en cuenta la aleatoriedad de  $\mu$ , el modelo se denota de la siguiente forma:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma B'(t))S(t) \Rightarrow dS(t) = (\mu + \sigma B'(t))S(t) dt.$$

Al agrupar los distintos parámetros se alcanza la siguiente expresión:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)B'(t)dt, \quad (5.2.2)$$

ahora se consigue diferenciar entre una parte determinista  $\mu S(t)dt$  y otra estocástica a través del Ruido Blanco  $\sigma S(t)B'(t)dt$ . Dada la siguiente equivalencia  $dB(t) = B'(t)dt$  el modelo se podrá escribir como en la expresión (5.0.1). En literatura financiera se conoce a este modelo como el modelo Log-Normal de activos subyacentes.

## 5.3. Solución del Modelo Log-Normal

Durante este apartado se va a resolver la ecuación diferencial estocástica (5.0.1) mediante dos técnicas o enfoques distintos. Primero, se resolverá sin utilizar el Cálculo de Itô que resulta un enfoque más artificial por la manera en que se incluye la aleatoriedad. Además, para este enfoque no es necesario tener conocimientos de herramientas complejas como la integración y diferenciación de procesos estocásticos.

Después, se resolverá por el segundo enfoque que presenta un mayor nivel técnico. En este enfoque se tendrá que hacer uso del Cálculo de Itô, en particular del Lema de Itô introducido en el Capítulo 4.

### 5.3.1. Primer Enfoque: Solución del Modelo Log-Normal sin el Cálculo de Itô

El precio o valor de una acción viene determinado por una multitud de elementos y variables que deben de considerarse inciertos y no deterministas. A causa de esto, el modelo (5.1.4) no nos podrá ser de utilidad, ya que el precio de la acción posee una parte incierta que hace que el valor de este activo financiero no se pueda predecir a través de un modelo determinista.

Partiendo de la expresión (5.1.2) con  $j = 1$ , se introduce la aleatoriedad a través de:

$$\tilde{S}^{(1)} = \tilde{S}^{(0)} e^{\mu\Delta t} e^{cZ_1}, \quad (5.3.1)$$

donde  $c$  equivale a una constante libre y no nula (más tarde la determinaremos) y  $Z_1$  equivale a una variable aleatoria normal o gaussiana tipificada, i.e.,  $Z_1 \sim N[0; 1]$ . Al introducir la aleatoriedad en la expresión (5.3.1) se obtiene:

$$\tilde{S}^{(j)} = \tilde{S}^{(j-1)} e^{\mu\Delta t} e^{cZ_j}, \quad (5.3.2)$$

siendo  $Z_j \sim N[0; 1]$ . Si se hace esto para cada  $j = 1, 2, \dots, K$  de manera que  $Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_k$  sean variables  $N[0; 1]$  e independientes, desde la expresión (5.3.2) con  $j = k$  obtenemos por recursividad la siguiente expresión:

$$\tilde{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K \Delta t} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)}, \quad (5.3.3)$$

o de forma equivalente,

$$\tilde{S}(T) = S_0 e^{\mu T} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)}.$$

La aleatoriedad que se ha introducido en la expresión (5.3.2) parece razonable principalmente porque certifica  $\tilde{S}^{(1)} > 0$  ( $\tilde{S}^{(j)} > 0$ ). Sin embargo, no es absolutamente correcta porque es de esperar que cuando no haya incertidumbre  $\tilde{S}^{(1)}$  en la expresión (5.3.1) actúe como en (5.1.3) con  $j = 1$  al menos en media. Sin embargo, se sabe<sup>14</sup>:

$$E[e^{cZ}] = e^{\frac{c^2}{2}}, \quad Z \sim N[0; 1], \quad (5.3.4)$$

por lo tanto

$$E[\tilde{S}^{(1)}] = E[S_0 e^{\mu \Delta t} e^{cZ_1}] = S_0 e^{\mu \Delta t} E[e^{cZ_1}] = S_0 e^{\mu \Delta t} e^{\frac{c^2}{2}} \neq S_0 e^{\mu \Delta t} = \tilde{S}^{(1)}.$$

Para conseguir el objetivo estipulado, a continuación, vamos a introducir la aleatoriedad en la siguiente expresión:

$$S^{(1)} = S_0 e^{\mu \Delta t} e^{cZ_1 - \frac{c^2}{2}}. \quad (5.3.5)$$

De la expresión (5.3.5) se alcanza que

$$E[S^{(1)}] = S_0 e^{\mu \Delta t},$$

y en general en (5.1.2) se introducirá la aleatoriedad de la misma manera:

$$S^{(j)} = S^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} e^{cZ_j - \frac{c^2}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (5.3.6)$$

Razonando recursivamente como en (5.1.3) se obtendrá

$$S(T) = S^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)} e^{-K \frac{c^2}{2}}, \quad (5.3.7)$$

donde

$$B_K = Z_1 + \dots + Z_K, \quad (5.3.8)$$

---

<sup>14</sup> Quesada, V., García A. (1988): Lecciones de Cálculo de Probabilidades. Ed. Díaz de Santos, Madrid.

puesto que  $Z_j \sim N[0; 1]$ ,  $j = 1, 2, \dots, K$  son variables aleatorias independientes se obtiene  $B_K \sim N[0; 1]$  y como  $K\Delta t = T$  y  $S^{(K)} = S(T)$ , la expresión (5.3.7) es igual a:

$$S(T) = s_0 e^{\mu T} e^{cB_K - K \frac{c^2}{2}}, \quad (5.3.9)$$

- $s_0$  equivale al precio o valor de la acción en el momento inicial.
- $e^{\mu T}$  es el componente determinista del precio de la acción (atado al valor  $\mu$  del tipo de interés).
- $B_K$  corresponde con la introducción de la aleatoriedad en el modelo.
- $e^{-k \frac{c^2}{2}}$  equivale a un término (determinístico) de corrección.

La modelización a partir de la expresión (5.3.9) posee una gran ventaja con respecto a otro tipo de modelos, como por ejemplo los modelos basados en arboles binomiales<sup>15</sup>, ya que consigue que el valor de la acción no solo tome un número finito. Además, cualquier valor positivo. Pero, aun posee un defecto importante respecto al objetivo principal de este trabajo; si determinamos  $T$  y vamos estimando intervalos más pequeños del intervalo  $[0, T]$ , en otras palabras, hacemos  $k \rightarrow +\infty$  ó de forma equivalente  $\Delta t \rightarrow +0$  con un valor de  $T$  fijo. Para la varianza del término que permite introducir la aleatoriedad en el modelo (5.3.9) se obtiene por la expresión (5.3.8) que:

$$Var[cB_K] = c^2 Var[B_K] = c^2 K \rightarrow +\infty, \quad (5.3.10)$$

La varianza se incrementará cuanta más discretizaciones se tomen del intervalo objeto de estudio, con independencia de valor de  $T$  que determina su extremo superior, el cual se encuentra fijo. Esta situación carece de sentido desde una perspectiva financiera porque una vez se ha fijado un intervalo sobre el cual se analiza el valor de una acción, la volatilidad de la acción es un elemento fijo que no tendría que oscilar. Para conseguir resolver este problema vamos a recordar que la constante  $c$ , introducida anteriormente en las expresiones (5.3.5) y (5.3.6) se encuentra libre. Con la constante  $c$  se obtiene:

$$c^2 K = \sigma^2 T, \quad (5.3.11)$$

---

<sup>15</sup> Hull, J.C. (2002): Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones. Pearson Education, 4ª edición Madrid.

$\sigma^2$  equivale a un parámetro fijo característico del modelo que se está desarrollando durante el presente trabajo, es decir, el modelo Log-Normal. De esta forma se tiene:

$$\text{Var}[cW_k] = \sigma^2 T < +\infty. \quad (5.3.12)$$

La expresión (5.3.12) nos permite ver una situación coherente que se observa perfectamente en la práctica: cuanto mayor es la longitud  $T$  del intervalo  $[0, T]$  tendremos mayor volatilidad, en otras palabras, tendremos una mayor variabilidad del precio de la acción.

Ahora procederemos a relacionar  $B_k$  de la expresión (5.3.8) con el Movimiento Browniano. Para poder conseguirlo se va a utilizar la propiedad P.3 enunciada en el capítulo anterior. Gracias a esta propiedad se puede saber que:

$$B(T) = B(K\Delta t) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t} B_K. \quad (5.3.13)$$

Al despejar de (5.3.11) se obtiene:

$$c = \sigma \sqrt{\frac{T}{K}} \xrightarrow{T=K\Delta t} c = \sigma \sqrt{\Delta t}, \quad (5.3.14)$$

por la expresión (5.3.13) se obtiene:

$$cB_K = \sigma \sqrt{\Delta t} B_K = \sigma B(T). \quad (5.3.15)$$

Para terminar, sustituyendo (5.3.11) y (5.3.15) en la expresión (5.3.9) alcanzamos la solución del modelo Log-Normal:

$$S(T) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\sigma B(T)}. \quad (5.3.16)$$

### 5.3.2. Segundo Enfoque: Solución del Modelo Log-Normal Mediante el Cálculo de Itô

Durante el presente apartado vamos a resolver la ecuación diferencial de tipo de Itô (5.0.1) con condición inicial:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.0.1)$$

Si aplicamos el Lema de Itô que hemos introducido en el Apartado 4.4. Para poder conseguirlo,

escribimos la expresión (5.0.1) en forma de integral:

$$\int_0^t dS(r) = \int_0^t \mu S(r) dr + \int_0^t \sigma S(r) dB(r),$$

o de forma equivalente se obtiene la siguiente expresión:

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu S(r) dr + \int_0^t \sigma S(r) dB(r). \quad (5.3.17)$$

Ahora aplicamos el Lema de Itô con la siguiente identificación:

$$X(t) = S(t); \quad f(t, x(t)) = f(t, S(t)) = \mu S(t); \quad g(t, x(t)) = g(t, S(t)) = \sigma S(t),$$

escogiendo:

$$F(t, x) = \ln(x).$$

Para poder aplicar el Lema de Itô tenemos que calcular las presentes derivadas parciales:

$$\begin{aligned} F_1(t, x) &= \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0, \\ F_2(t, x) &= \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \\ F_{22}(t, x) &= \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\ln(S(t)) - \ln(s_0) = \int_0^t \left( \mu S(r) \frac{1}{S(r)} + \frac{1}{2} (\sigma S(r))^2 \left( \frac{-1}{(S(r))^2} \right) \right) dr + \int_0^t \sigma S(r) \frac{1}{S(r)} dB(r).$$

Al simplificar obtenemos

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) &= \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dB(r), \\ \ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (B(t) - B(0)). \end{aligned}$$

Al aplicar la definición del Movimiento Browniano y la condición MB.1,  $B(0) = 0$  con probabilidad 1, se obtiene la siguiente expresión que es la solución del modelo Log-Normal,

también conocido como Movimiento Browniano Geométrico:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t),$$
$$\frac{S(t)}{s_0} = e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)},$$
$$S(t) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)}. \quad (5.3.18)$$

## 5.4. Propiedades Estadísticas del Proceso Estocástico Solución del Modelo Log-Normal

En la práctica, utilizaremos la expresión (5.3.18), solución del modelo Log-Normal, para elaborar predicciones probabilísticas de tipo puntual del subyacente a partir de la función media. Estas predicciones se completan a través de intervalos de confianza. Por lo tanto, es de vital importancia el cálculo de las funciones media y varianza de la solución del Modelo Log-Normal en  $t = T$ .

### Función media

Para poder calcular la función media de la solución del Modelo Log-Normal (5.0.1), tendremos que aplicar la presente relación, conocida como propiedad de  $\frac{1}{2}$  – autosemejanza del Movimiento Browniano presentada en el Capítulo 4:

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad t \geq 0, \quad T \geq 0,$$

aplicamos la propiedad al caso particular  $t = 1$ , o sea,

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(1). \quad (5.4.1)$$

Debemos de recordar que por la definición del Movimiento Browniano

$$B(1) \sim N[0; 1].$$

También será necesaria la presente propiedad:

$$E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad Z \sim N[0; 1], \quad (5.4.2)$$

que se calcula a través de la siguiente integral:

$$E[e^{\lambda Z}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Considerando el operador de la esperanza en la expresión (5.3.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} E[S(T)] &= s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma B(T)}] \\ &= s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma\sqrt{T}B(1)}] \quad (5.4.3) \\ &= s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\frac{(\sigma\sqrt{T})^2}{2}}. \end{aligned}$$

Al simplificar la expresión anterior se obtiene:

$$E[S(T)] = s_0 e^{\mu T}. \quad (5.4.4)$$

Para hallar la expresión (5.4.3) primero se ha aplicado la propiedad (5.4.1) y después se ha aplicado la relación (5.4.2) con  $\lambda = \sigma\sqrt{T}$ ,  $B(1) = Z \sim N[0; 1]$ .

La expresión (5.4.4) nos indica que el modelo Log-Normal disfruta de la envidiable propiedad de que el comportamiento medio del valor (precio de la acción) es semejante al del caso determinista. Esto se puede comprobar en la expresión (5.1.5) con  $t = T$ .

### **Función varianza**

Para conocer cómo se comporta la volatilidad (varianza) del precio del subyacente según el modelo Log-Normal tenemos que usar el mismo razonamiento que usamos anteriormente en la media. La varianza viene determina por:

$$\begin{aligned} Var[S(T)] &= E[(S(T))^2] - (E[S(T)])^2 \\ &= E\left[(s_0)^2 e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{2\sigma B(T)}\right] - (s_0)^2 e^{2\mu T} \\ &= (s_0)^2 e^{2\mu T} (e^{-\sigma^2 T} E[e^{2\sigma B(T)}] - 1). \end{aligned}$$

desarrollando la expresión de la varianza obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[S(T)] &= (s_0)^2 e^{2\mu T} \left( e^{-\sigma^2 T} E \left[ e^{2\sigma\sqrt{T}B(1)} \right] - 1 \right) \\
 &= (s_0)^2 e^{2\mu T} \left( e^{-\sigma^2 T} e^{\frac{4\sigma^2 T}{2}} - 1 \right) \quad (5.4.5) \\
 &= (s_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1).
 \end{aligned}$$

La función de la varianza nos indica que la varianza (volatilidad) de una acción aumentará a medida que lo haga el horizonte temporal  $T$ .

## 5.5. Calibración de los Parámetros del Modelo Log-Normal

Durante esta sección del trabajo se realizará una presentación y explicación de dos métodos estadísticas para poder estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del modelo Log-Normal.

- Método de los momentos.
- Método de máxima verosimilitud.

La principal causa que provoca que se usen dos métodos diferentes para calibrar los parámetros es comprobar que  $\mu$  y  $\sigma$  se asemejan en los dos métodos, con el fin de ofrecer unas estimaciones más robustas.

### 5.5.1. Método de Momentos

Primero se tiene que tener en cuenta que para aplicar este método resulta más cómodo trabajar con las log-cotizaciones, es decir, con los logaritmos de las cotizaciones de Repsol. Por lo tanto, aplicamos logaritmos en la solución del modelo Log-Normal obteniendo la siguiente expresión:

$$\ln(S(t)) - \ln(s_0) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t; \sigma\sqrt{t} \right], \quad (5.5.1)$$

cabe recordar que está expresión sigue una distribución estadística gaussiana, ya que se trata de una transformación lineal de  $B(t) \sim N[0; t]$ .

Ahora consideramos una serie de  $K + 1$  cotizaciones del activo si  $S(0) = s_0$ ,  $S^{(1)} = S(\Delta t)$ ,  $S^{(2)} = S(2\Delta t)$ , ...,  $S^{(K)} = S(K\Delta t)$ , en los periodos  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, K\Delta t$  equiespaciados del intervalo  $[0, t]$ . En cada subperiodo  $[(j-1)\Delta t, j\Delta t]$  con  $j = 1, 2, \dots, K$ , consideremos los  $K$

incrementos:

$$U_j = \ln S(j\Delta t) - \ln(S((j-1)\Delta t)) , \quad 1 \leq j \leq K. \quad (5.5.2)$$

Se puede observar que por la expresión (5.5.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln(S(j\Delta t)) &= \ln(s_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)j\Delta t + \sigma B(j\Delta t), \\ \ln(S((j-1)\Delta t)) &= \ln(s_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(j-1)\Delta t + \sigma B((j-1)\Delta t), \end{aligned}$$

si a la primera expresión se le resta la segunda se podría expresar la ecuación (5.5.2) de la siguiente forma:

$$U_j = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \left(B(j\Delta t) - B((j-1)\Delta t)\right). \quad (5.5.3)$$

Si recordamos que por su definición el Movimiento Browniano  $B(t)$  posee incrementos gaussianos e independientes de media cero y varianza la longitud del incremento sobre  $t$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$U_j \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t; \sigma\sqrt{\Delta t}\right],$$

Por lo tanto, las variables aleatorias  $U_j$  son gaussianas e independientes con media  $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$  y varianza  $\sigma^2\Delta t$ . Con una serie de  $K + 1$  cotizaciones reales, se puede conseguir calcular las  $K$  diferentes dadas en la expresión (5.5.2) y conseguir obtener una estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  a través del método de los momentos estadísticos. Esto se logra al igualar la media de las  $K$  variables aleatorias  $U_j$  a la media muestral  $\bar{U}$  y a la quasi-varianza muestral  $S^2$  que vienen determinadas por:

$$\bar{U} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K U_j, \quad S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (U_j - \bar{U})^2. \quad (5.5.4)$$

La expresión anterior nos permite poder construir el siguiente sistema de ecuaciones algebraico para poder estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ :

$$\bar{U} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \quad S^2 = \sigma^2 \Delta t. \quad (5.5.5)$$

La solución de la expresión anterior (5.5.5) nos proporciona las estimaciones que estábamos buscando:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \widehat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (5.5.6)$$

### 5.5.2. Método de Máxima Verosimilitud

Durante el presente apartado vamos a estudiar el método de máxima verosimilitud, este método es otra técnica estadística que también nos permite estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del modelo Log-Normal.

Antes de aplicar el método de máxima verosimilitud es mejor introducir y explicar una serie de definiciones que son necesarias para aplicar este método.

El método de máxima verosimilitud se basa en el concepto de verosimilitud, debido al estadístico Ronald Aylmer Fisher, que es uno de los conceptos más valiosos de la inferencia estadística.

A modo de introducción, suponemos que hemos obtenido una muestra  $(x_k: 0 \leq k \leq N)$  de una población explicada por una variable aleatoria continua con una función de densidad  $p(x; \vec{\theta})$  subordinada al vector de parámetros  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$ . Los resultados serán semejantes si la población es discreta. Si analizamos muestras aleatorias simples, la probabilidad de que suceda la muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  para un vector del vector de parámetros  $\vec{\theta}$  está explicada por la función de densidad de probabilidad conjunta (f. d. p) de la muestra y que a partir de ahora denotaremos por  $L$ .

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(x_k; \vec{\theta}). \quad (5.5.7)$$

En la expresión anterior debemos de resolver el siguiente problema: dada una muestra fija buscamos calcular el valor de parámetros  $\vec{\theta}$  que es desconocido.

Si volvemos a recordar que  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  se trata de una muestra dada, se conoce como función de verosimilitud a la función de  $\vec{\theta}$  dada por:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(x_k; \vec{\theta}).$$

A partir de este momento la función anterior se tiene en cuenta como una función solo de  $\vec{\theta}$  y no de la muestra, puesto que esta se ha construido a posteriori de haber obtenido la muestra, es decir es fija.

La idea principal del método de máxima verosimilitud radica en tener en cuenta como mejor estimación del vector de parámetros  $\vec{\theta}$  el valor que maximiza  $L$  para la muestra dada. De una forma más explicativa, dada la muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  estableceremos como una mejor estimación  $\vec{\theta}_1$  que  $\vec{\theta}_2$  si:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}_1) > L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}_2).$$

El valor del parámetro  $\vec{\theta}_1$  es más probable para la muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Es decir, en el método de máxima verosimilitud la principal idea consiste en escoger la moda de la distribución a posteriori de  $\vec{\theta}$ .

Cabe señalar que la función de verosimilitud es mayor o igual que cero para todo  $\vec{\theta}$  además, la función logaritmo es monótona creciente. A continuación, se presenta la función logaritmo.

$$\max[L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta})] = \max[\ln(L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}))].$$

Utilizamos el  $\ln L$  en vez de  $L$  simplemente porque nos resulta más fácil, ya que la derivación de una suma resulta mucho más sencilla que la derivación de un producto.

Si la muestra solamente depende de un solo parámetro,  $\theta$  entonces  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N)$  se trata de un estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$  para la distribución poblacional determinada por  $p(x; \theta)$  si  $\hat{\theta}$  maximiza el valor de la función de verosimilitud, o lo que es igual, hace máximo:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = \sum_{k=1}^N \ln p(x_k, \theta).$$

Para realizar el cálculo efectivo de  $\hat{\theta}$  debemos resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0,$$

de manera que si  $\hat{\theta}$  es solución de esta ecuación,  $\hat{\theta}$  será máximo siempre que la segunda

derivada sea negativa.

Como la distribución poblacional está subordinada a  $n$  parámetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  tendremos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_n} = 0.$$

Analizando después si  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n)$  confirma este sistema, además hace el hessiano correspondiente definido negativo.

Ahora tenemos que adecuar la definición anterior a nuestra causa, dada una muestra  $\{x_k : 0 \leq k \leq N\}$  de un proceso estocástico  $x(t)$  en los momentos  $\{t_k : 0 \leq k \leq N\}$  y considerando que el proceso  $x(t)$  está subordinado a un vector de parámetros  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$ , queremos definir el vector  $\vec{\theta}$  tal que

$$\max L(\theta) = f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}),$$

$f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})$  corresponde con la función de densidad conjunta de la muestra. En la mayoría de escenarios no podemos asumir que la muestra sea simple, o sea, que existe independencia por lo que no será aceptable legitimar la factorización proporcionada en la expresión (5.5.7). No obstante, para conseguir aplicar el método de máxima verosimilitud, tendremos que conseguir una expresión de la función de densidad conjunta que sea preferiblemente algebraica.

Para poder obtenerla, tenemos que recordar que el modelo de subyacente en que estamos trabajando es de la siguiente forma (véase la expresión (5.0.1)):

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5.8)$$

con

$$x(t) = S(t); \quad x_0 = s_0; \quad \vec{\theta} = (\mu, \sigma),$$

$$f(t, x(t); \vec{\theta}) = \mu S(t); \quad g(t, x(t); \vec{\theta}) = \sigma S(t).$$

Podemos demostrar que la solución de una ecuación tipo de Itô como la expresión (5.5.8) se trata de un proceso de Markov de primer orden<sup>16</sup>.

$$\begin{aligned} p(t_0, x_0, t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}) &= p(t_0, x_0, \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_2, x_2 | t_1, x_1, t_0, x_0; \vec{\theta}) \dots \\ &\vdots \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}, \dots, t_2, x_2, t_1, x_1, t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &= p(t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_2, x_2 | t_1, x_1; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}; \vec{\theta}). \end{aligned}$$

En la expresión anterior  $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$  se trata de la función de densidad de transición del proceso estocástico  $x(t)$  que comienza en  $(t_{k-1}, x_{k-1})$  y pasa a  $(t_k, x_k)$ . Para trabajar de una forma más cómoda vamos a utilizar la función del log-verosimilitud, es decir,

$$\ln(p(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})) = \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) + \sum_{k=1}^N \ln p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}).$$

Como los valores  $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$ ,  $1 \leq k \leq N$ , casi siempre están entre 0 y 1, el logaritmo neperiano de dichos valores es negativo y el problema de maximización de la función de log-verosimilitud es igual a obtener el mínimo de su función contraria, por ello tendremos en cuenta el siguiente programa de optimización:

$$\text{Min } D(\vec{\theta}) = \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) - \sum_{k=1}^N \ln(p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})). \quad (5.5.9)$$

A continuación, vamos a intentar explicitar el valor de  $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$ . Para poder conseguirlo, debemos de definir como punto de partida la ecuación diferencial estocástica tipo de Itô dada en (5.3.8) y le tendremos que aplicar el esquema de integración discreto de Euler-Maruyama para conseguir aproximar dicha ecuación en los instantes de la muestra que consideramos equiespaciados en el tiempo siendo  $\Delta t$  el incremento temporal (paso temporal). Para ello, suponemos un subintervalo de tiempo global  $[t_{k-1}, t_k]$  y a través de la discretización de Euler-Maruyama se obtiene la expresión (5.5.10) que se muestra a continuación:

<sup>16</sup> Theorem 5.2.5. Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Academic Press, New York.

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = f(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \Delta t + g(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \{B(t_k) - B(t_{k-1})\}.$$

A la expresión anterior la debemos de reescribir, denotaremos por  $x_k$  la aproximación de la solución obtenida en el instante  $t_k$ , o sea,

$$x_k \approx x(t_k),$$

Quedando la siguiente expresión (5.5.11):

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = f(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \Delta t + g(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \{B(t_k) - B(t_{k-1})\},$$

con  $K = 1, 2, \dots, N$ .

Así pues, de la expresión (5.5.10) se sigue que la aproximación, vía Euler-Maruyama de  $x(t_k)$  dado  $x(t_{k-1})$ , sigue la sucesiva distribución normal que a continuación se presenta:

$$x_k | x_{k-1} \sim N[\mu_k; \sigma_k], \quad \begin{cases} \mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \Delta t, \\ \sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \Delta t. \end{cases} \quad (5.5.12)$$

Por lo tanto,

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.5.13)$$

donde  $\mu_k$  y  $\sigma_k$  corresponden con las expresiones proporcionadas en la expresión (5.5.12). Esto nos permite poder escribir explícitamente la función de log-verosimilitud dada en (5.5.9) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D(\vec{\theta}) &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) - \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2}\right) \\ &= \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) - N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\right) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2 \\ &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) + \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \sum_{k=1}^N \ln(\sigma_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2. \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Como en nuestro caso el subyacente en el momento inicial  $x_0 = s_0$  es determinista, por lo tanto:

$$p(t_0, x_0; \vec{\theta}) = p(0, s_0; \mu, \sigma) = 1. \quad (5.5.15)$$

Además, las expresiones  $\mu_k$  y  $\sigma_k$  mostradas en (5.5.12) toman la forma:

$$\mu_k = S_{k-1} + \mu S_{k-1} \Delta t; \quad \sigma_k = \sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}. \quad (5.5.16)$$

Si incluimos las expresiones (5.5.15) y (5.5.16) en la expresión (5.5.14) obtenemos

$$\begin{aligned} D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \sum_{k=1}^N \ln(\sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k - S_{k-1} - \mu S_{k-1} \Delta t}{\sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}} \right)^2 \\ &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto el programa de minimización de la función de log-verosimilitud es:

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\ (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ &+ \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2. \end{aligned}$$

Para poder obtener el mínimo de  $D(\mu, \sigma)$  en primer lugar debemos calcular los puntos críticos, que son aquellos puntos en los que el gradiente es nulo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right) = 0, \\ \frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.5.17) obtenemos como puntos críticos:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2. \quad (5.5.18)$$

Se puede verificar que la matriz *hessiana* compuesta por las cuatro derivadas parciales segundas de la función  $D(\mu, \sigma)$ , o sea,

$$H(D(\mu, \sigma)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix},$$

analizada en el punto crítico  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  dado en (5.5.18) posee valores propios positivos, lo que demuestra que  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  se trata de un mínimo de la función opuesta de log-verosimilitud y por tanto son los estimadores máximos verosímiles del modelo Log-Normal.

## 5.6. Validación del Modelo Log-Normal

A continuación, se presentan las medidas de bondad de ajuste que se utilizarán para la validación del Modelo Log-Normal aplicado al subyacente de Repsol:

- Error porcentual absoluto medio (*Mean Absolute Percentage Error*, MAPE).
- Error cuadrático medio (*Root Mean Squared Error*, RMSE).
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.
- Gráfico de observaciones y predicciones (puntuales y por intervalos).

Los resultados de las medidas de bondad de ajuste nos sirven para ver cómo se adecuan cada uno de los dos métodos, que vamos a utilizar y así poder realizar predicciones del subyacente en cuestión.

### 5.6.1. Medidas de Bondad de Ajuste

#### Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE)

El Error Promedio Absoluto Medio (MAPE) es igual al promedio de las diferencias absolutas entre los valores pronosticados,  $\hat{S}_i$ , y los observados,  $S_i$ , entre las observaciones correspondientes, quedando reflejado como un porcentaje de los valores reales. De forma más simple, si se pronostican  $k$  periodos y los valores reales corresponden a  $k$  periodos, el MAPE se obtendrá a través de la siguiente formula:

$$MAPE = \frac{100}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}. \quad (5.6.1)$$

En el cálculo del MAPE se considerarán las predicciones puntuales proporcionadas a partir de la aplicación del modelo teórico Log-Normal para cada uno de los dos métodos de estimación de los parámetros. También, utilizaremos el MAPE como una especie de error global de diagnóstico tolerable, cuando el MAPE obtenido sea inferior al 5%, consideraremos un nivel de

aproximación aceptable (estándar en estadística).

### Error Cuadrático Medio (RSME)

El error cuadrático medio (RMSE), se trata de una medida de bondad de ajuste que determina la distancia media entre los valores observados,  $S_i$ , y los estimados,  $\hat{S}_i$ . El error del modelo será menor (más ajustado) cuando menor sea el valor del RSME. Su valor está determinado por la siguiente expresión:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (S_i - \hat{S}_i)^2}{k}}. \quad (5.6.2)$$

Como ocurre con el MAPE, el RMSE se calculará utilizando las predicciones puntuales (función media) que se obtiene a través de aplicar el Modelo Teórico Log-Normal con los dos métodos de estimación de los parámetros descritos anteriormente. Los resultados obtenidos en el Error Cuadrático Medio (RSME nos proporcionarán una primera idea de cuál se ajusta más.

### 5.6.2. Validación por Intervalos de Confianza

Otra de las técnicas de validación que vamos a utilizar es la construcción y análisis de intervalos de confianza (IC) del 95%. Para poder utilizar esta herramienta tenemos que considerar dos elementos fundamentales. El primero, el diámetro o amplitud del intervalo, este elemento nos proporciona la precisión de la estimación y por lo tanto, deberá ser la menor posible. El segundo elemento es la probabilidad de que el intervalo abarque el valor verdadero del parámetro a estimar, que se denomina nivel de confianza e importará que sea la menor posible. En este trabajo, los intervalos de confianza se construirán para un nivel de probabilidad del 95%.

A modo de introducción, consideramos que se escoge una muestra aleatoria simple de una población descrita por la función  $f(x; \theta)$  dependiente del parámetro  $\theta$  que se desea estimar. El problema se plantea de la siguiente manera: Se determina un nivel de confianza, que se denota por  $1 - \alpha$ , en donde  $0 < \alpha < 1$ , y se trata de determinar dos funciones  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de manera que:

$$P[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1 - \alpha.$$

Al intervalo  $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  se le conoce como *intervalo de confianza* del

parámetro  $\theta$  al nivel de confianza del  $(1 - \alpha)100\%$ . Es conveniente analizar que sería un error asentir que la probabilidad indicada anteriormente, es la probabilidad de que  $\theta$  esté entre los números reales  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , puesto que  $\theta$  no es una variable aleatoria sino un parámetro que tendrá un valor determinado. Las variables aleatorias son  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  al variar la muestra, luego la probabilidad anterior debe valorarse como la probabilidad de que el intervalo aleatorio  $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  comprenda el verdadero valor de  $\theta$ .

Expresado en términos de frecuencia esto significa que de cada 100 muestras aleatorias que tomemos, se esperará que el  $(1 - \alpha)100\%$  de ellas posea el verdadero valor de  $\theta$  entre  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Considerando que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una muestra aleatoria simple y que  $\bar{x}$  es la media muestral. La variable aleatoria  $\bar{x}$  media muestral se distribuye según una normal  $N\left[\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right]$ , considerando que la población es  $N[\mu; \sigma^2]$  con  $\sigma$  conocida. Esta propiedad permite afirmar que la variable tipificada  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  sigue una  $N[0; 1]$ , y por tanto, determinando un nivel de confianza  $1 - \alpha$ , obtener el valor  $\lambda_{\alpha/2}$  tal que

$$P\left[\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Si operamos la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \lambda_{\alpha/2}\right], \\ &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \\ &= P\left[-\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \\ &= P\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

Las funciones que estamos buscando son las siguientes:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ \theta_2 &= \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional para un nivel de confianza del  $(1 - \alpha)$  100% viene determinado por la presente expresión:

$$\left[ \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Cabe destacar, que se puede ganar en precisión de dos maneras, bien perdiendo confianza lo que, en la mayoría de casos, no interesa, o bien incrementando el tamaño  $n$  de la muestra seleccionada.

### **5.6.3. Gráficos Comparativos**

Utilizaremos los gráficos comparativos para poder realizar un estudio comparativo a través del cual, podremos comprobar el grado de ajuste que hay entre las predicciones puntuales y el valor real del subyacente (acción de Repsol S.A.).



# 6 | La Fórmula de Black-Scholes para Valorar Opciones Europeas

La fórmula de Black-Scholes es una expresión que proporciona el valor teórico de una opción *Call* o *Put* de tipo europea a partir de una serie de datos conocidos de antemano. Estos datos son el tiempo hasta vencimiento de la opción ( $T$ ), el precio de ejercicio o de expiración o maduración de dicha opción ( $K$ ) y la volatilidad que posee el subyacente ( $\sigma$ ). La característica principal de la fórmula de Black-Scholes es poder adoptar una estrategia de cobertura frente al riesgo inherente de la opción en la fecha de ejercicio de la misma. Es decir, fijar el valor de las primas de las opciones para obtener una estrategia que nos permita cubrirnos del riesgo inherente de la opción.

Antes de empezar a desarrollar la fórmula de Black-Scholes vamos a centrarnos en las principales hipótesis del modelo:

- **Liquidez perfecta:** el mercado permite comprar o vender cualquier cantidad real, es decir, no hace falta que esta cantidad sea un valor entero positivo del subyacente.
- **El modelo permite la venta en corto:** se asume que es posible vender acciones incluso sin llegar a tenerlas.
- **No se tienen en cuenta los costes de transacción:** No se incurren en costes (o son despreciables) cuando se realiza una compra o venta de acciones para adoptar estrategias de inversión o de cobertura.
- **Los precios *bid* y *ask* siempre coinciden:** El precio *bid* se define como el mejor precio al que

los inversores están dispuestos a comprar las acciones, es decir, el mejor precio al que los vendedores pueden vender las acciones. El *ask* se define como el mejor precio al que los inversores están dispuestos a vender las acciones, es decir, el mejor precio al que el inversor puede comprar las acciones. En circunstancias normales, el valor del *bid* es menor que el valor del *ask*, la diferencia entre el *ask* y el *bid* (*ask-bid*) se conoce como horquilla o *bid/ask spread*.

- El modelo de Black-Scholes asume que ningún inversor posee información privilegiada para tomar decisiones ventajosas, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

## 6.1. Aplicación de Black-Scholes para Calcular la Prima de una Opción de Compra *Call*

A continuación, vamos a explicar cómo calcular la prima de una opción de compra *Call* de tipo europea.

Para empezar tenemos que recordar que se asume que el subyacente sigue un Movimiento Browniano Geométrico (MBG), por tanto según se ha estudiado en el Capítulo 5 se asume que la dinámica temporal del subyacente a vencimiento ( $T$ ) está dada por

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B_t} = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \propto N[0; 1]. \quad (6.1.1)$$

Si valoramos el valor de una *Call* a través de la técnica de la Cartera Duplicadora obtenemos la siguiente expresión:

$$C = e^{-rT} E[(S_T - K)^+],$$

donde  $r$  denota el tipo de interés libre de riesgo,  $E[\ ]$  denota el operador esperanza y  $S_T$  es la variable aleatoria que sigue el Movimiento Browniano Geométrico (MBG) descrito en la expresión (6.1.1). Por lo tanto,

$$C = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z} - K \right)^+ e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (6.1.2)$$

Si

$$s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z} - K > 0,$$

la variable  $z$  será:

$$z^* = \frac{\ln\left(\frac{K}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} > 0.$$

Ahora, descomponemos la expresión (6.6.2) en las dos integrales que se muestran a continuación

$$C_1 = \frac{s_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^*}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{z^2}{2}} dz, \quad (6.1.3)$$

$$C_2 = \frac{e^{-rT}K}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^*}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{-rT}K \cdot N(-z^*), \quad (6.1.4)$$

donde

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

denota la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar.

Teniendo en cuenta la descomposición anterior:

$$C = C_1 - C_2,$$

obtenemos:

$$C = \frac{s_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^*}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{z^2}{2}} dz - e^{-rT}K \cdot N(-z^*). \quad (6.1.5)$$

Ahora, completamos el cuadrado del exponente del integrando en la expresión (6.1.3), obteniendo la siguiente ecuación:

$$\sigma\sqrt{T}z - \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T})^2 + \frac{\sigma^2 T}{2},$$

por tanto

$$C_1 = \frac{s_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^*}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{z^2}{2}} dz = \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^*}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T})^2} dz. \quad (6.1.6)$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable en la expresión (6.1.6)

$$y = z - \sigma\sqrt{T},$$

$$z = y + \sigma\sqrt{T},$$

obtenemos la siguiente expresión para el término integral  $C_1$  en términos de la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar:

$$C_1 = \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^* - \sigma\sqrt{T}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = s_0 \cdot N\left(-\left(z^* - \sigma\sqrt{T}\right)\right) = s_0 \cdot N\left(\sigma\sqrt{T} - z^*\right). \quad (6.1.7)$$

Aplicando la expresión (6.1.7) en la ecuación (6.6.5) obtenemos la siguiente expresión:

$$C = s_0 \cdot N(d_1) - K e^{-rT} \cdot N(d_2), \quad (6.1.8)$$

dónde

$$d_1 = \sigma\sqrt{T} - z^* = \sigma\sqrt{T} - \frac{\ln\left(\frac{K}{s_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

y teniendo en cuenta que  $z^* = \sigma\sqrt{T} - d_1$ , se tiene

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Por tanto, para calcular la prima ( $C$ ) de una opción de compra *Call* europea tendremos que aplicar la siguiente fórmula

$$C = s_0 N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2). \quad (6.1.9)$$

## 6.2. Aplicación de Black-Scholes para Calcular la Prima de una Opción de Venta *Put*, a través de la Paridad *Put/Call*

En el apartado anterior hemos visto cómo calcular la prima de una opción de compra *Call* Europea. Ahora vamos a ver cómo calcular la prima de una opción de venta *Put* europea

aplicando la fórmula de paridad *Put/Call*.

La paridad *Put/Call* se define como la relación que existe entre las opciones de compra *Call*, las opciones de venta *Put* de tipo europeo y el precio del subyacente (*Stock*) común a ambas opciones, de forma que en todo momento debe existir un equilibrio entre los precios, ya que en otro caso si no se cumple la relación de paridad, aparecerían oportunidades de arbitraje.

A continuación, se muestra la fórmula de la paridad *Put/Call*:

$$P + s_0 = C + K \cdot e^{-rt}, \quad (6.2.1)$$

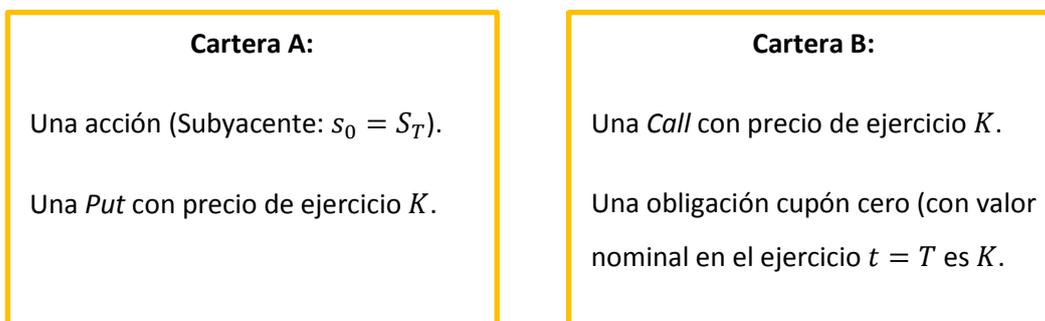
siendo:

- $P$ : es la prima de una opción de venta *Put* de tipo europea.
- $s_0$ : es el valor del subyacente en el momento actual.
- $C$ : es la prima de una opción de compra *Call* tipo europea.
- $K$ : el precio de ejercicio de la opción de compra *Call* y de venta *Put* europeas.
- $r$ : es el tipo de interés libre de riesgo.  $t$

La principal importancia de la fórmula de Paridad *Put/Call* es que si conocemos el precio (prima) de una de las opciones, entonces podremos calcular el valor de la otra opción. En este caso, si conocemos la prima de la opción de compra *Call*  $C$  podremos calcular la prima de la opción de venta *Put*  $P$ .

Ahora vamos a ver cómo conseguimos llegar a la expresión (6.2.1) a través de la técnica de la Cartera Duplicadora.

A partir de dos carteras denominadas A y B (véase Figura 6.2.1) formadas por:



**Figura 6.2.1: Composición de las Cartera A y B.**

Fuente: Elaboración propia

Para formar estas dos carteras tenemos que tener en cuenta la expresión (2.3.1) que muestra los *pay-off* de las opciones de compra y de venta:

$$\begin{cases} \text{pay-off (long call)} = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+, \\ \text{pay-off (long put)} = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+. \end{cases}$$

La Figura 6.2.2 muestra cómo se comportarán las dos carteras en caso de que ejerzamos las dos opciones o en el caso opuesto, es decir, que no ejerzamos las opciones para el instante final  $T$ .

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Cartera A:} \\
 \max[(K - S_T, 0)] + S_T, \\
 \quad S_T > K \quad S_T < K. \\
 \text{No ejercer} \quad \text{Ejercer} \\
 0 + S_T = S_T \quad K - S_T + S_T = K \\
 \max(S_T, K).
 \end{array} \right\} t = T \quad = \quad \begin{array}{l}
 \text{Cartera B:} \\
 \max[(S_T - K, 0)] + K, \\
 \quad S_T > K \quad S_T < K. \\
 \text{No ejercer} \quad \text{Ejercer} \\
 S_T - K + K = S_T \quad 0 + K = K \\
 \max(S_T, K).
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 6.2.2: Comportamiento de las Carteras en el instante final o de ejercicio  $T$ .

Fuente: Elaboración propia

Se puede observar que las dos carteras consiguen alcanzar el mismo valor al vencimiento  $t = T$  periodos. Por tanto, si las carteras tienen el mismo valor al vencimiento, también lo tendrán al inicio, por lo que actualizando sus valores, según un régimen de capitalización a interés compuesto continuo obtenemos directamente la expresión (6.2.1)

$$s_0 + P = C + K \cdot e^{-rT}.$$

Si pasamos  $s_0$  restando, obtenemos la fórmula para calcular la prima de la opción de venta *Put* ( $P$ ):

$$P = C - s_0 + K \cdot e^{-rT}, \quad (6.2.2)$$

# 7 Aplicación del Modelo Log-Normal

Durante el presente capítulo se aplicarán los conceptos y resultados que se han presentado de forma teórica en el Capítulo 5. El objetivo fundamental es conseguir aplicar el modelo Log-Normal a la modelización de la dinámica del activo subyacente de Repsol S.A. que cotiza en el IBEX-35. Para ello, se ha seleccionado un horizonte temporal compuesto por 65 periodos.

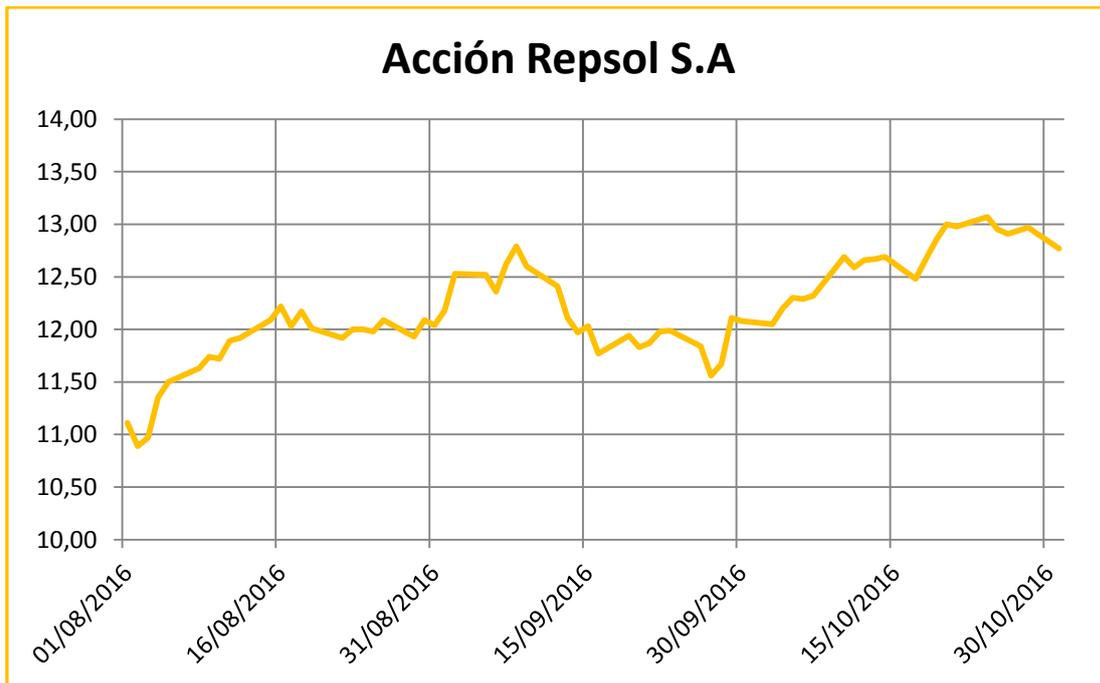
La implementación del modelo del Modelo Log-Normal se ha realizado a través de la hoja de cálculo de Microsoft Excel®. Esta herramienta nos permite validar el modelo y posteriormente realizar predicciones.

La Tabla 7.0.1 contiene las cotizaciones diarias de Repsol durante el periodo objeto de análisis. Además, el Gráfico 7.0.1 muestra la evolución de las cotizaciones de una acción de Repsol durante el periodo analizado (desde el 01 de agosto de 2016 hasta el 31 de octubre de 2016).

<b>Δt</b>	<b>Fecha</b>	<b>Precio</b>	<b>Δt</b>	<b>Fecha</b>	<b>Precio</b>
0	01/08/2016	11,11	33	15/09/2016	12,03
1	02/08/2016	10,89	34	16/09/2016	11,77
2	03/08/2016	10,97	35	19/09/2016	11,94
3	04/08/2016	11,35	36	20/09/2016	11,83
4	05/08/2016	11,5	37	21/09/2016	11,87
5	08/08/2016	11,63	38	22/09/2016	11,98
6	09/08/2016	11,74	39	23/09/2016	11,99
7	10/08/2016	11,72	40	26/09/2016	11,84
8	11/08/2016	11,89	41	27/09/2016	11,56
9	12/08/2016	11,92	42	28/09/2016	11,67
10	15/08/2016	12,09	43	29/09/2016	12,11
11	16/08/2016	12,22	44	30/09/2016	12,08
12	17/08/2016	12,03	45	03/10/2016	12,05
13	18/08/2016	12,17	46	04/10/2016	12,20
14	19/08/2016	12,01	47	05/10/2016	12,30
15	22/08/2016	11,92	48	06/10/2016	12,29
16	23/08/2016	12,00	49	07/10/2016	12,32
17	24/08/2016	12,00	50	10/10/2016	12,69
18	25/08/2016	11,98	51	11/10/2016	12,59
19	26/08/2016	12,09	52	12/10/2016	12,66
20	29/08/2016	11,93	53	13/10/2016	12,67
21	30/08/2016	12,09	54	14/10/2016	12,69
22	31/08/2016	12,04	55	17/10/2016	12,48
23	01/09/2016	12,18	56	18/10/2016	12,67
24	02/09/2016	12,53	57	19/10/2016	12,85
25	05/09/2016	12,52	58	20/10/2016	13,00
26	06/09/2016	12,36	59	21/10/2016	12,98
27	07/09/2016	12,62	60	24/10/2016	13,07
28	08/09/2016	12,79	61	25/10/2016	12,95
29	09/09/2016	12,60	62	26/10/2016	12,91
30	12/09/2016	12,41	63	27/10/2016	12,94
31	13/09/2016	12,11	64	28/10/2016	12,97
32	14/09/2016	11,97	65	31/10/2016	12,77

Tabla 7.0.1: Cotizaciones de Repsol S.A.

Fuente: Elaboración propia



**Gráfico 7.0.1: Evolución de las cotizaciones de la acción de Repsol S.A.**

Fuente: Elaboración propia

## 7.1. Estimación de los Parámetros del Modelo Log-Normal

Durante el Capítulo 5 se introdujeron dos técnicas estadísticas, que ahora nos permitirán poder poner en práctica el Modelo Log-Normal, con el fin de estimar los parámetros  $\mu$  (tendencia) y  $\sigma$  (volatilidad). Las técnicas estadísticas las utilizaremos siguiendo el siguiente orden:

- i. Método de los momentos.
- ii. Máxima verosimilitud.

El objetivo que perseguimos al utilizar estas dos técnicas estadísticas, es obtener estimaciones similares, así podremos decir que se obtienen estimaciones robustas que no dependen de la técnica utilizada.

### 7.1.1. Estimación de Parámetros con el Método de los Momentos

El primer método que vamos a utilizar para estimar los parámetros es el método de los

momentos, a partir de la aplicación de la solución del Modelo Log-Normal. Este método consiste básicamente en igualar los momentos teóricos poblacionales con los momentos muestrales. Para aprovechar las propiedades estadísticas vamos a trabajar con logaritmos de las cotizaciones o log-retornos.

La Tabla 7.1.1 muestra la cotización al cierre junto con los logaritmos de las cotizaciones.

$\Delta t$	Fecha	Precio Ajustado	Log-Retornos	$\Delta t$	Fecha	Precio Ajustado	Log-Retornos
0	01/08/2016	11,11	-0,02	33	15/09/2016	12,03	-0,02185
1	02/08/2016	10,89	0,00732	34	16/09/2016	11,77	0,01434
2	03/08/2016	10,97	0,03405	35	19/09/2016	11,94	-0,00926
3	04/08/2016	11,35	0,01313	36	20/09/2016	11,83	0,00338
4	05/08/2016	11,5	0,01124	37	21/09/2016	11,87	0,00922
5	08/08/2016	11,63	0,00941	38	22/09/2016	11,98	0,00083
6	09/08/2016	11,74	-0,00171	39	23/09/2016	11,99	-0,01259
7	10/08/2016	11,72	0,0144	40	26/09/2016	11,84	-0,02393
8	11/08/2016	11,89	0,00252	41	27/09/2016	11,56	0,00947
9	12/08/2016	11,92	0,01416	42	28/09/2016	11,67	0,03701
10	15/08/2016	12,09	0,0107	43	29/09/2016	12,11	-0,00248
11	16/08/2016	12,22	-0,01567	44	30/09/2016	12,08	-0,00249
12	17/08/2016	12,03	0,01157	45	03/10/2016	12,05	0,01237
13	18/08/2016	12,17	-0,01323	46	04/10/2016	12,20	0,00816
14	19/08/2016	12,01	-0,00752	47	05/10/2016	12,30	-0,00081
15	22/08/2016	11,92	0,00669	48	06/10/2016	12,29	0,00244
16	23/08/2016	12,00	0,00000	49	07/10/2016	12,32	0,02959
17	24/08/2016	12,00	-0,00167	50	10/10/2016	12,69	-0,00791
18	25/08/2016	11,98	0,00914	51	11/10/2016	12,59	0,00554
19	26/08/2016	12,09	-0,01332	52	12/10/2016	12,66	0,00079
20	29/08/2016	11,93	0,01332	53	13/10/2016	12,67	0,00158
21	30/08/2016	12,09	-0,00414	54	14/10/2016	12,69	-0,01669
22	31/08/2016	12,04	0,01156	55	17/10/2016	12,48	0,01511
23	01/09/2016	12,18	0,02833	56	18/10/2016	12,67	0,01411
24	02/09/2016	12,53	-0,0008	57	19/10/2016	12,85	0,01161
25	05/09/2016	12,52	-0,01286	58	20/10/2016	13,00	-0,00154
26	06/09/2016	12,36	0,02082	59	21/10/2016	12,98	0,00691
27	07/09/2016	12,62	0,01338	60	24/10/2016	13,07	-0,00922
28	08/09/2016	12,79	-0,01497	61	25/10/2016	12,95	-0,00309
29	09/09/2016	12,60	-0,01519	62	26/10/2016	12,91	0,00232
30	12/09/2016	12,41	-0,02447	63	27/10/2016	12,94	0,00232

$\Delta t$	Fecha	Precio Ajustado	Log-Retornos	$\Delta t$	Fecha	Precio Ajustado	Log-Retornos
31	13/09/2016	12,11	-0,01163	64	28/10/2016	12,97	-0,01554
32	14/09/2016	11,97	0,005	65	31/10/2016	12,77	-

Tabla 7.1.1: Log-cotizaciones durante el periodo objeto de análisis.

Fuente: Elaboración propia

El cálculo de las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  se ha realizado a través de la aplicación de las fórmulas que se han obtenido en el Capítulo 5:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}$$

donde  $\bar{U}$  es la media muestral y  $S^2$  es la quasi-varianza de las log-cotizaciones. Hemos definido un horizonte temporal para aplicar el modelo de  $\Delta t = 1/252$  que corresponde al número medio de días hábiles que cotizan anualmente las acciones del IBEX-35. La Tabla 7.1.2 contiene los resultados de los parámetros  $\bar{U}$  y  $S^2$ .

$\bar{U}$	$S^2$
0,00214	0,00018409

Tabla 7.1.2: Media y varianza de los Log-retornos.

Fuente: Elaboración propia

Una vez se han obtenido los parámetros  $\bar{U}$  y  $S^2$ , podemos proceder a estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , que se encuentran detallados en la Tabla 7.1.3.

$\mu$	$\sigma$
0,56307	21,54%

Tabla 7.1.3: Parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  para el método de los momentos.

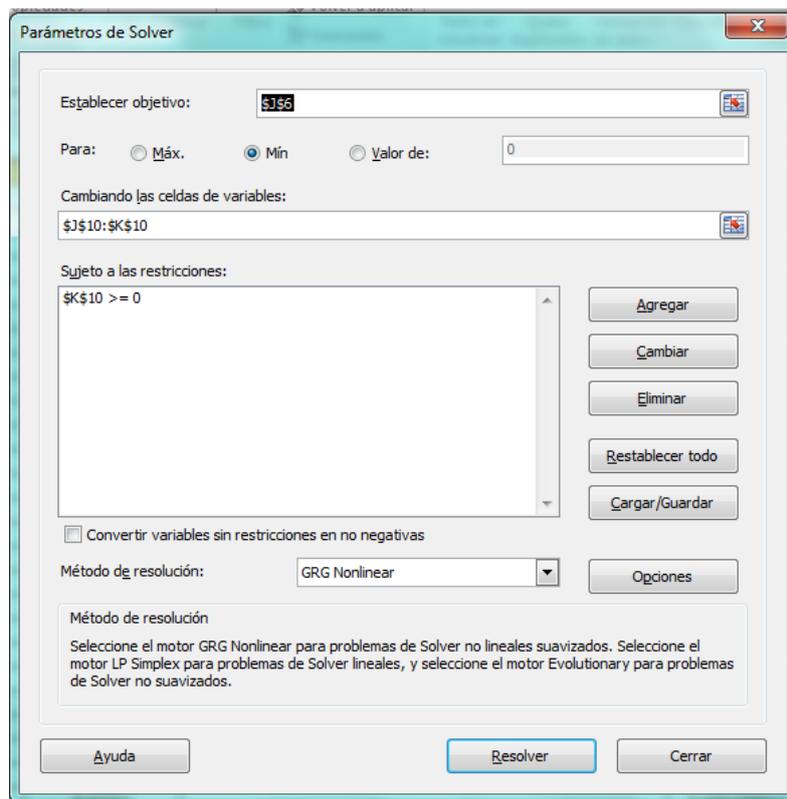
Fuente: Elaboración propia

## 7.1.2. Estimación de Parámetros con el Método de Máxima Verosimilitud

Tras realizar la estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  por el método de los momentos, procedemos ahora a estimarlos por el método de máxima verosimilitud, de nuevo aplicado a la solución del Modelo Log-Normal. Para poder estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  utilizaremos la herramienta Solver del programa Microsoft Excel. La función objetivo que debemos minimizar

corresponde a la función de log-verisimilitud que se ha presentado en el Capítulo 5.

$$\begin{aligned} \text{Min } D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) \\ (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ &+ \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2. \end{aligned}$$



**Figura 7.1.1: Estimación de parámetros del Modelo Log-Normal mediante el método de máxima verosimilitud y la macro Solver de Excel®.**

Fuente: Elaboración propia a través de Software Solver (Excel®).

Las celdas denominadas "cambiando las celdas de variables" que aparecen en el cuadro de dialogo de la herramienta Solver (véase Figura 7.1.1) hacen referencia a los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  que tenemos que estimar a través del método de máxima verosimilitud. Para poder aplicar el Solver es primordial definir unos valores iniciales a partir de los cuales se busca el mínimo de la función objetivo. En nuestro estudio, aplicado al subyacente de Repsol, hemos tomado como referencia los siguientes valores:

- Para el parámetro  $\mu$  se ha considerado como referencia el valor 0,55 (véase Figura 7.1.2).

- Para el parámetro  $\sigma$  se ha considerado como referencia para calcular los valores estimados el valor 0,2 (véase Figura 7.1.2).

Para terminar, solo tenemos que introducir las restricciones que sean necesarias en el Solver. En nuestro caso, debemos introducir una sola restricción  $\sigma > 0$ , puesto que por definición la volatilidad local ( $\sigma$ ) es mayor que 0, es decir, no negativa (véase Figura 7.1.1).

Una vez hemos implementado LN las restricciones en el Solver solo nos queda ejecutarlo (a través del comando *resolver*) para que nos muestre los valores de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  que minimicen la función de log-verosimilitud. Los resultados que se obtienen del Solver son mostrados en la Tabla 7.1.4.

$\mu$	$\sigma$
0,56335707	0,21283936

Tabla 7.1.4: Parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  para el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia

MÁXIMA VEROSIMILITUD										J	K	L	M	N
dt	Fecha	Precio Ajustado	Rendimiento	LN(SK-1)	(SK/SK-1)-1	((SK/SK-1)-1- $\mu$ dt)*2					$\Delta t=1/252$	N	ALEATORIO Z(0,1)	0
0	01/08/2016	11,11									0,00396825	66	-0,446018577	11,11
1	02/08/2016	10,89	-0,02000	2,40785	-0,01980	0,00049							-0,808446629	11,11
2	03/08/2016	10,97	0,00732	2,38784	0,00735	0,00003							0,385600348	11,11
3	04/08/2016	11,35	0,03405	2,39516	0,03464								0,297022764	11,11
4	05/08/2016	11,50	0,01313	2,42922	0,01322	0,00012							-1,24182582	11,11
5	06/08/2016	11,63	0,01124	2,44235	0,01130	0,00008							0,002516164	11,11
6	07/08/2016	11,74	0,00941	2,45359	0,00946	0,00005							-1,327218084	11,11
7	08/08/2016	11,72	-0,00171	2,46300	-0,00170	0,00002							1,500791946	11,11
8	09/08/2016	11,89	0,01440	2,46130	0,01451	0,00015							-0,034175273	11,11
9	10/08/2016	11,92	0,00252	2,47570	0,00252	0,00000							0,619165756	11,11
10	11/08/2016	12,09	0,01416	2,47822	0,01426	0,00014							-0,657218805	11,11
11	12/08/2016	12,22	0,01070	2,49238	0,01075	0,00007							1,088244276	11,11
12	13/08/2016	12,03	-0,01567	2,50307	-0,01555	0,00032							0,333382603	11,11
13	14/08/2016	12,17	0,01157	2,48740	0,01164	0,00009							-0,179544967	11,11
14	15/08/2016	12,01	-0,01323	2,49897	-0,01315	0,00024							-0,531971746	11,11
15	16/08/2016	11,92	-0,00752	2,48574	-0,00749	0,00009							-1,427967021	11,11
16	17/08/2016	12,00	0,00669	2,47822	0,00671	0,00002							1,048648459	11,11
17	18/08/2016	12,00	0,00000	2,48491	0,00000	0,00000							-0,507427667	11,11
18	19/08/2016	11,98	-0,00167	2,48491	-0,00167	0,00002							1,225012721	11,11
19	20/08/2016	12,09	0,00914	2,48324	0,00918	0,00005							-0,378524108	11,11
20	21/08/2016	11,93	-0,01332	2,49238	-0,01323	0,00024							0,111084892	11,11
21	22/08/2016	12,09	0,01332	2,47906	0,01341	0,00012							-2,247122082	11,11

Figura 7.1.2: Obtención de los parámetros por el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia

La Celda J6 corresponde a la función objetivo, función de Log-Verosimilitud, en la que obtenemos los valores de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  que la minimizan. Para el resultado de la Celda J6 tenemos que tener en cuenta, el incremento del tiempo es  $\Delta t = 1/252$ , que como en el caso del método de los momentos, corresponde al número de días hábiles que cotizan anualmente las acciones del IBEX-35.

## 7.2. Validación del Modelo Log-Normal

La validación del modelo Log-Normal la vamos a realizar a través de una serie de criterios estadísticos. La validación del modelo Log-Normal nos posibilitará aceptar la solución del modelo para el caso concreto de una acción de Repsol S.A. Los criterios estadísticos que vamos a utilizar son las medidas d bondad de ajuste y los intervalos de confianza (véase expresiones (5.6.1) y (5.6.2), respectivamente). El objetivo principal de este apartado es, en base a los resultados que hemos obtenido, poder validar las predicciones que hemos obtenido para la acción de Repsol S.A., con el fin de ver si son fiables e independientes del método empleado.

En este apartado nos centraremos en calcular la función media (estimación puntual de la acción de Repsol S.A.) y a construir los intervalos de confianza (estimación por intervalos del subyacente de Repsol S.A.) para los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  estimados por los dos métodos diferentes.

### 7.2.1. Validación de los Parámetros a través del Método de los Momentos

*Estimaciones puntuales por el método teórico Log-Normal. Cálculo de la media y la varianza teórica.*

A continuación, vamos a calcular la función media y la función varianza teórica utilizando los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  estimados por el método de los momentos para la acción de Repsol S.A. para cada periodo seleccionado (véase Tabla 7.2.1).

METODO MOMENTOS					
$\Delta t$	Fecha	VALOR OBSERVADO	VALOR ESTIMADO	$Var(S(t))$	$Desv(S(t))$
0	01/08/2016	11,11	11,11000	0,00000	0,00000
1	02/08/2016	10,89	11,13317	0,15108	0,38869
2	03/08/2016	10,97	11,15730	0,21415	0,46277
3	04/08/2016	11,35	11,18164	0,26288	0,51272
4	05/08/2016	11,50	11,20610	0,30424	0,55158
5	08/08/2016	11,63	11,23066	0,34093	0,58389
6	09/08/2016	11,74	11,25532	0,37432	0,61182
7	10/08/2016	11,72	11,28005	0,40524	0,63658
8	11/08/2016	11,89	11,30486	0,43420	0,65894
9	12/08/2016	11,92	11,32975	0,46159	0,67941

$\Delta t$	Fecha	VALOR OBSERVADO	VALOR ESTIMADO	$Var(S(t))$	$Desv(S(t))$
10	15/08/2016	12,09	11,35470	0,48767	0,69834
11	16/08/2016	12,22	11,37972	0,51264	0,71599
12	17/08/2016	12,03	11,40480	0,53666	0,73257
13	18/08/2016	12,17	11,42995	0,55985	0,74823
14	19/08/2016	12,01	11,45517	0,58231	0,76309
15	22/08/2016	11,92	11,48045	0,60413	0,77726
16	23/08/2016	12,00	11,50579	0,62536	0,79080
17	24/08/2016	12,00	11,53119	0,64608	0,80379
18	25/08/2016	11,98	11,55665	0,66633	0,81629
19	26/08/2016	12,09	11,58218	0,68615	0,82834
20	29/08/2016	11,93	11,60776	0,70558	0,83999
21	30/08/2016	12,09	11,63341	0,72466	0,85127
22	31/08/2016	12,04	11,65912	0,74341	0,86221
23	01/09/2016	12,18	11,68489	0,76185	0,87284
24	02/09/2016	12,53	11,71072	0,78001	0,88318
25	05/09/2016	12,52	11,73661	0,79791	0,89326
26	06/09/2016	12,36	11,76256	0,81557	0,90309
27	07/09/2016	12,62	11,78857	0,83301	0,91269
28	08/09/2016	12,79	11,81464	0,85023	0,92208
29	09/09/2016	12,60	11,84077	0,86725	0,93126
30	12/09/2016	12,41	11,86697	0,88409	0,94026
31	13/09/2016	12,11	11,89322	0,90076	0,94908
32	14/09/2016	11,97	11,91953	0,91726	0,95774
33	15/09/2016	12,03	11,94591	0,93361	0,96624
34	16/09/2016	11,77	11,97234	0,94981	0,97458
35	19/09/2016	11,94	11,99883	0,96588	0,98279
36	20/09/2016	11,83	12,02539	0,98182	0,99087
37	21/09/2016	11,87	12,05201	0,99763	0,99882
38	22/09/2016	11,98	12,07868	1,01333	1,00664
39	23/09/2016	11,99	12,10542	1,02892	1,01436
40	26/09/2016	11,84	12,13222	1,04441	1,02196
41	27/09/2016	11,56	12,15908	1,05980	1,02947
42	28/09/2016	11,67	12,18600	1,07510	1,03687
43	29/09/2016	12,11	12,21298	1,09030	1,04418
44	30/09/2016	12,08	12,24002	1,10543	1,05139
45	03/10/2016	12,05	12,26713	1,12047	1,05852
46	04/10/2016	12,20	12,29429	1,13544	1,06557
47	05/10/2016	12,30	12,32152	1,15033	1,07254
48	06/10/2016	12,29	12,34881	1,16516	1,07943
49	07/10/2016	12,32	12,37616	1,17992	1,08624
50	10/10/2016	12,69	12,40357	1,19462	1,09299
51	11/10/2016	12,59	12,43104	1,20926	1,09967

$\Delta t$	Fecha	VALOR OBSERVADO	VALOR ESTIMADO	Var(S(t))	Desv(S(t))
52	12/10/2016	12,66	12,45858	1,22385	1,10628
53	13/10/2016	12,67	12,48618	1,23838	1,11283
54	14/10/2016	12,69	12,51384	1,25286	1,11931
55	17/10/2016	12,48	12,54156	1,26730	1,12574
56	18/10/2016	12,67	12,56934	1,28169	1,13212
57	19/10/2016	12,85	12,59719	1,29603	1,13843
58	20/10/2016	13,00	12,62510	1,31034	1,14470
59	21/10/2016	12,98	12,65307	1,32460	1,15091
60	24/10/2016	13,07	12,68111	1,33883	1,15708
61	25/10/2016	12,95	12,70921	1,35302	1,16319
62	26/10/2016	12,91	12,73737	1,36718	1,16927
63	27/10/2016	12,94	12,76560	1,38131	1,17529
64	28/10/2016	12,97	12,79388	1,39541	1,18127
65	31/10/2016	12,77	12,82224	1,40948	1,18721

Tabla 7.2.1: Cálculo de la media y varianza/desviación típica teórica de la acción de Repsol S.A. utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia

Para obtener la columna "valor estimado" hemos aplicado las ecuaciones (5.4.4) y (5.4.5) y una vez hemos estimado los parámetros, el resultado obtenido se trata de la media teórica y varianza teórica de  $S(t)$  para cada  $t$  del período fijo empleando el incremento temporal  $1/252$ . Los resultados se muestran en la Tabla 7.2.1.

Tras obtener la media y la varianza teórica para la acción de Repsol S.A. durante el periodo seleccionado, podemos validar el modelo a través de las medidas de bondad de ajuste y mediante la construcción de los intervalos de confianza.

### Medidas de bondad del ajuste: Cálculo del error porcentual absoluto medio (MAPE) y del error cuadrático medio (RSME)

El Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) se calcula a través de las diferencias absolutas entre los valores estimados y los valores observados divididos por los valores observados (véase expresión (5.6.1)). El MAPE será tolerable siempre que esté por debajo de un 5%.

El Error Cuadrático Medio (RSME) se trata de la raíz del error cuadrático y su principal función es la de medir la distancia que por término medio hay entre los valores observados y los valores estimados (véase expresión (5.6.2)). Cuando menor sea el valor del RSME menor será

el error en el modelo, por lo tanto, mejor será la estimación.

Para poder obtener el valor del MAPE, antes debemos de calcular el error absoluto. El error absoluto es la diferencia en términos de valor absoluto entre el valor observado y el valor estimado para cada uno de los instantes de tiempo  $t$  (véase Columna K Figura 7.2.1). Una vez hemos obtenido el error absoluto, tenemos que dividirlo entre el valor observado del instante de tiempo en cuestión,  $|Xi - XESTi| / Xi$ , (véase Columna L Figura 7.2.1). Para terminar tenemos que aplicar la función promedio a los datos de la columna K y obtenemos el MAPE.

Para calcular el valor del RSME, vamos a utilizar los datos que anteriormente hemos calculado para el MAPE. Una vez hemos calculado el error absoluto tenemos que calcular el error cuadrático, para obtenerlo solo hay que elevar la Columna K al cuadrado. Por último, como en el MAPE, debemos de aplicar la función promedio para obtener el Erro Cuadrático Medio (RSME).

T13									
H	I	J	K	L	M	N	O	P	C
METODO MOMENTOS									
	VALOR ESTIMADO (XESTI)	VALOR OBSERVADO (Xi)	ERROR ABSOLUTO	(Xi - XESTi)/ Xi	ERROR^2				
3	11,11000	11,11000	0,00	0,00	0,00				
4	11,13317	10,89000	0,24317	0,02184	0,05913				
5	11,15730	10,97000	0,18730	0,01679	0,03508		MAPE (%)	RSME	
6	11,18164	11,35000	0,16836	0,01506	0,02835		2,94074%	0,17848	
7	11,20610	11,50000	0,29390	0,02623	0,08638				
8	11,23066	11,63000	0,39934	0,03556	0,15947				
9	11,25532	11,74000	0,48468	0,04306	0,23492				
10	11,28005	11,72000	0,43995	0,03900	0,19355				
11	11,30486	11,89000	0,58514	0,05176	0,34239				
12	11,32975	11,92000	0,59025	0,05210	0,34840				
13	11,35470	12,09000	0,73530	0,06476	0,54067				
14	11,37972	12,22000	0,84028	0,07384	0,70607				
15	11,40480	12,03000	0,62520	0,05482	0,39087				
16	11,42995	12,17000	0,74005	0,06475	0,54767				
17	11,45517	12,01000	0,55483	0,04844	0,30784				
18	11,48045	11,92000	0,43955	0,03829	0,19321				
19	11,50579	12,00000	0,49421	0,04295	0,24425				
20	11,53119	12,00000	0,46881	0,04066	0,21979				
21	11,55665	11,98000	0,42335	0,03663	0,17922				
22	11,58218	12,09000	0,50782	0,04385	0,25788				
23	11,60776	11,93000	0,32224	0,02776	0,10384				
24	11,63341	12,09000	0,45659	0,03925	0,20847				
25	11,65912	12,04000	0,38088	0,03267	0,14507				

Figura 7.2.1: Cálculo medidas bondad de ajuste: RSME y MAPE utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia.

Los valores que hemos obtenido del MAPE y del RSME (Celdas O6 y P6 Figura 7.2.1.), son 2,94074% y 0,17848, respectivamente. El valor del MAPE es inferior al 5% y el valor RSME es bajo, esto nos indica que la estimación de los parámetros por el método de los momentos posee un elevado grado de aceptación.

### Validación por intervalos de confianza teóricos

Para comprobar definitivamente si el método de los momentos es válido para una acción de Repsol S.A. en el periodo seleccionado, haremos una última estimación a través de intervalos de confianza (I.C.) al 95% (véase Apartado 5.6.2).

Por lo tanto, tendremos que definir el intervalo de confianza a un nivel  $\alpha = 5\%$  para la estimación de  $S(t)$  es:

$$E[S(t)] \pm 1,96 \times \sigma[S(t)],$$

teniendo en cuenta las siguientes expresiones

$$E[S(t)] = s_0 e^{\mu t},$$

$$Var [S(t)] = (s_0)^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

La Tabla 7.2.2 contiene los intervalos de confianza teóricos con un nivel de confianza del 95%. Para construir los intervalos de confianza hemos tomando como base la media y la varianza teórica, ya presentadas en la Tabla 7.2.1. Para calcular el extremo superior del I.C. tenemos que sumar a la estimación puntual que se ha calculado a través del modelo Log-Normal (media teórica), la cantidad de 1,96 veces el valor de la desviación típica que hemos obtenido. Para obtener el extremo inferior del I.C. tenemos que realizar la misma operación pero debemos sustituir el + por un - , es decir, en vez de sumar tendremos que restar.

E [S <sub>t</sub> ]	σ [S <sub>t</sub> ]	I.C. Superior	I.C. Inferior
11,11000	0,00000	11,11000	11,11000
11,13485	0,15108	11,43098	10,83873
11,15976	0,21415	11,57950	10,74002
11,18472	0,26288	11,69997	10,66948
11,20974	0,30424	11,80605	10,61343
11,23482	0,34093	11,90304	10,56660
11,25995	0,37432	11,99362	10,52628
11,28514	0,40524	12,07940	10,49087
11,31038	0,43420	12,16142	10,45934
11,33568	0,46159	12,24040	10,43095
11,36104	0,48767	12,31688	10,40519
11,38645	0,51264	12,39123	10,38167
11,41192	0,53666	12,46378	10,36006
11,43745	0,55985	12,53476	10,34014
11,46303	0,58231	12,60436	10,32170

E [S <sub>i</sub> ]	$\sigma$ [S <sub>i</sub> ]	I.C. Superior	I.C. Inferior
11,48867	0,60413	12,67276	10,30459
11,51437	0,62536	12,74008	10,28866
11,54013	0,64608	12,80645	10,27381
11,56594	0,66633	12,87195	10,25994
11,59181	0,68615	12,93667	10,24696
11,61774	0,70558	13,00069	10,23480
11,64373	0,72466	13,06406	10,22340
11,66978	0,74341	13,12685	10,21270
11,69588	0,76185	13,18910	10,20266
11,72204	0,78001	13,25087	10,19322
11,74826	0,79791	13,31217	10,18436
11,77454	0,81557	13,37307	10,17602
11,80088	0,83301	13,43357	10,16819
11,82728	0,85023	13,49373	10,16083
11,85374	0,86725	13,55355	10,15392
11,88025	0,88409	13,61308	10,14743
11,90683	0,90076	13,67232	10,14134
11,93346	0,91726	13,73129	10,13563
11,96016	0,93361	13,79003	10,13028
11,98691	0,94981	13,84854	10,12527
12,01372	0,96588	13,90685	10,12060
12,04060	0,98182	13,96496	10,11623
12,06753	0,99763	14,02289	10,11217
12,09452	1,01333	14,08066	10,10839
12,12158	1,02892	14,13827	10,10489
12,14869	1,04441	14,19574	10,10165
12,17587	1,05980	14,25307	10,09866
12,20310	1,07510	14,31029	10,09592
12,23040	1,09030	14,36739	10,09341
12,25776	1,10543	14,42439	10,09113
12,28518	1,12047	14,48130	10,08906
12,31266	1,13544	14,53811	10,08720
12,34020	1,15033	14,59485	10,08555
12,36781	1,16516	14,65152	10,08409
12,39547	1,17992	14,70812	10,08282
12,42320	1,19462	14,76466	10,08174
12,45099	1,20926	14,82114	10,08083
12,47884	1,22385	14,87758	10,08009
12,50675	1,23838	14,93398	10,07952
12,53473	1,25286	14,99034	10,07912
12,56277	1,26730	15,04667	10,07886
12,59087	1,28169	15,10298	10,07876

E [S <sub>t</sub> ]	$\sigma$ [S <sub>t</sub> ]	I.C. Superior	I.C. Inferior
12,61903	1,29603	15,15926	10,07881
12,64726	1,31034	15,21552	10,07900
12,67555	1,32460	15,27177	10,07933
12,70391	1,33883	15,32801	10,07980
12,73232	1,35302	15,38425	10,08040
12,76080	1,36718	15,44048	10,08113
12,78935	1,38131	15,49672	10,08198
12,81796	1,39541	15,55296	10,08296
12,84663	1,40948	15,60921	10,08405

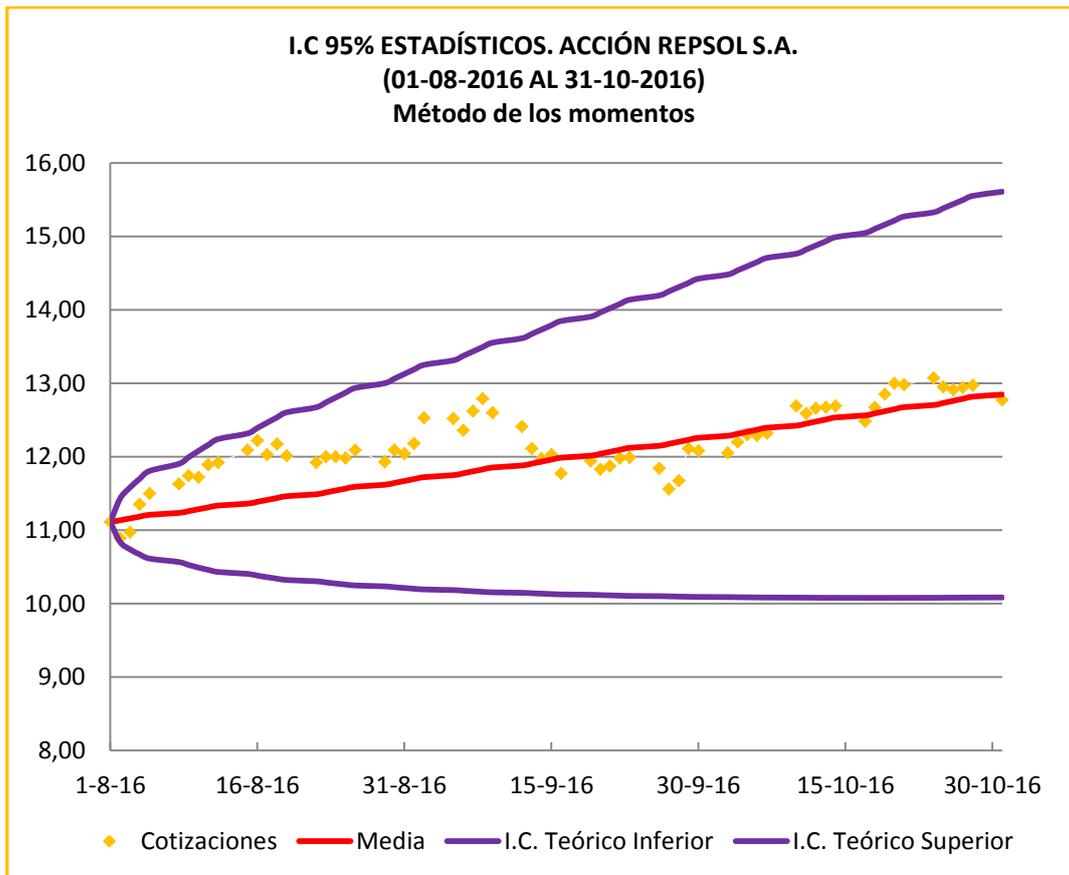
**Tabla 7.2.2: Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos.**

Fuente: Elaboración propia

El cálculo de los I.C. teóricos nos permite poder establecer entre que valores oscilará el precio de la acción en un futuro con una probabilidad del 95%, con el fin de poder determinar un rango de datos (precios) entre los que se espera que oscilen las cotizaciones para así poder comprobar si las estimaciones son correctas.

El Gráfico 7.2.1 contiene la evolución de las cotizaciones reales durante el periodo analizado frente a las cotizaciones que hemos predicho a través del Modelo Log-Normal y el Intervalo de Confianza al 95%.

Se puede observar que las fluctuaciones que se producen en la muestra observada, durante el periodo analizado, se encuentran dentro de los intervalos de confianza calculados. Por lo tanto, podemos afirmar que el Modelo Log-Normal cuyos parámetros se han estimado a través del método de los momentos, recoge de forma satisfactoria la dinámica del subyacente de Repsol S.A.



**Gráfico 7.2.1. I.C (95%) para la acción Repsol S.A. vía la calibración de parámetros mediante el método de los momentos.**

Fuente: Elaboración propia

## 7.2.2. Validación de los Parámetros del Método de Máxima Verosimilitud

### Estimaciones puntuales por el método teórico Log-Normal. Cálculo de la media y varianza teóricas

Este apartado, posee un desarrollo similar al del apartado anterior, con la principal diferencia que ahora procedemos a validar el Modelo Log-Normal, a partir de los parámetros estimados mediante el método de máxima verosimilitud. Por lo tanto, se vuelven a utilizar las expresiones (5.4.5) y (5.4.5) teóricas para la media y la varianza según el Modelo Log-Normal.

MAXIMA VEROSIMILITUD					
$\Delta t$	Fecha	VALOR OBSERVADO	VALOR ESTIMADO	$Var(S(t))$	$Desv(S(t))$
0	01/08/2016	11,11	11,11000	0,00000	0,00000
1	02/08/2016	10,89	11,13321	0,14930	0,38639
2	03/08/2016	10,97	11,15736	0,21162	0,46002
3	04/08/2016	11,35	11,18171	0,25978	0,50968
4	05/08/2016	11,50	11,20620	0,30065	0,54831
5	08/08/2016	11,63	11,23078	0,33690	0,58043
6	09/08/2016	11,74	11,25546	0,36990	0,60819
7	10/08/2016	11,72	11,28021	0,40045	0,63281
8	11/08/2016	11,89	11,30504	0,42908	0,65504
9	12/08/2016	11,92	11,32995	0,45614	0,67538
10	15/08/2016	12,09	11,35492	0,48191	0,69420
11	16/08/2016	12,22	11,37996	0,50659	0,71175
12	17/08/2016	12,03	11,40506	0,53032	0,72823
13	18/08/2016	12,17	11,43023	0,55324	0,74380
14	19/08/2016	12,01	11,45547	0,57543	0,75857
15	22/08/2016	11,92	11,48076	0,59699	0,77265
16	23/08/2016	12,00	11,50612	0,61798	0,78612
17	24/08/2016	12,00	11,53155	0,63845	0,79903
18	25/08/2016	11,98	11,55703	0,65846	0,81146
19	26/08/2016	12,09	11,58257	0,67805	0,82344
20	29/08/2016	11,93	11,60818	0,69725	0,83502
21	30/08/2016	12,09	11,63385	0,71610	0,84623
22	31/08/2016	12,04	11,65958	0,73463	0,85710
23	01/09/2016	12,18	11,68536	0,75285	0,86767
24	02/09/2016	12,53	11,71121	0,77080	0,87795
25	05/09/2016	12,52	11,73712	0,78849	0,88797
26	06/09/2016	12,36	11,76309	0,80594	0,89774
27	07/09/2016	12,62	11,78913	0,82317	0,90729
28	08/09/2016	12,79	11,81522	0,84019	0,91662
29	09/09/2016	12,60	11,84137	0,85701	0,92575
30	12/09/2016	12,41	11,86758	0,87365	0,93469
31	13/09/2016	12,11	11,89385	0,89012	0,94346
32	14/09/2016	11,97	11,92019	0,90643	0,95207
33	15/09/2016	12,03	11,94658	0,92258	0,96051
34	16/09/2016	11,77	11,97304	0,93860	0,96881
35	19/09/2016	11,94	11,99955	0,95447	0,97697
36	20/09/2016	11,83	12,02613	0,97022	0,98500
37	21/09/2016	11,87	12,05276	0,98585	0,99290
38	22/09/2016	11,98	12,07946	1,00137	1,00068
39	23/09/2016	11,99	12,10622	1,01677	1,00835
40	26/09/2016	11,84	12,13304	1,03208	1,01591

$\Delta t$	Fecha	VALOR OBSERVADO	VALOR ESTIMADO	$Var(S(t))$	$Desv(S(t))$
41	27/09/2016	11,56	12,15992	1,04728	1,02337
42	28/09/2016	11,67	12,18686	1,06240	1,03073
43	29/09/2016	12,11	12,21386	1,07743	1,03799
44	30/09/2016	12,08	12,24092	1,09237	1,04517
45	03/10/2016	12,05	12,26805	1,10724	1,05225
46	04/10/2016	12,20	12,29524	1,12203	1,05926
47	05/10/2016	12,30	12,32248	1,13675	1,06618
48	06/10/2016	12,29	12,34979	1,15140	1,07303
49	07/10/2016	12,32	12,37716	1,16599	1,07981
50	10/10/2016	12,69	12,40460	1,18052	1,08652
51	11/10/2016	12,59	12,43209	1,19498	1,09315
52	12/10/2016	12,66	12,45965	1,20940	1,09973
53	13/10/2016	12,67	12,48727	1,22376	1,10624
54	14/10/2016	12,69	12,51495	1,23807	1,11269
55	17/10/2016	12,48	12,54270	1,25233	1,11908
56	18/10/2016	12,67	12,57050	1,26655	1,12541
57	19/10/2016	12,85	12,59837	1,28073	1,13169
58	20/10/2016	13,00	12,62631	1,29486	1,13792
59	21/10/2016	12,98	12,65430	1,30896	1,14410
60	24/10/2016	13,07	12,68236	1,32302	1,15023
61	25/10/2016	12,95	12,71048	1,33705	1,15631
62	26/10/2016	12,91	12,73866	1,35104	1,16234
63	27/10/2016	12,94	12,76691	1,36500	1,16833
64	28/10/2016	12,97	12,79522	1,37893	1,17428
65	31/10/2016	12,77	12,82360	1,39284	1,18018

Tabla 7.2.3: Cálculo de la media y varianza/desviación típica teórica de la acción de Repsol S.A. utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 7.2.3 muestra la media teórica y la varianza teórica para cada  $S(t)$  del periodo analizado. El incremento que hemos utilizado, al igual que para el método de los momentos, es  $1/252$ .

### Medidas de bondad del ajuste: Cálculo del error porcentual absoluto medio (MAPE) y del error cuadrático medio (RSME)

En la Tabla 7.2.4 se muestran los valores obtenidos del MAPE y el RSME que hemos calculado a partir de los parámetros estimados por el método de máxima verosimilitud.

MAPE (%)	RSME
2,93910%	0,17826

**Tabla 7.2.4: Error porcentual medio (MAPE) y error cuadrático medio para el método de máxima verosimilitud.**

Fuente: Elaboración propia

Los valores tanto del MAPE como del RSME son aceptables, ya que el primero se encuentra por debajo del 5% y el RSME arroja un valor bastante bajo.

### Validación por intervalos de confianza teóricos

Para terminar con la validación de los valores de una acción de Repsol S.A. calculados por el método de máxima verosimilitud vamos a construir los intervalos de confianza teóricos, con el fin de ver si los valores estimados están dentro de dichos intervalos. La Tabla 7.2.5 contiene el cálculo de la media teórica y la varianza teórica, y los intervalos de confianza teóricos (I.C.) al 95% para los valores estimados por el método de máxima verosimilitud. Para el cálculo de dichos intervalos utilizamos la siguiente expresión:

$$E[S(t)] \pm 1,96 \times \sigma[S(t)].$$

La predicción a través de I.C. teóricos la debemos completar utilizando el valor de la desviación típica, la cual la hemos calculado anteriormente (véase Tabla 7.2.5), así conoces el error de dicha predicción.

E [S <sub>t</sub> ]	σ [S <sub>t</sub> ]	I.C. Superior	I.C. Inferior
11,11000	0,00000	11,11000	11,11000
11,13486	0,14930	11,42749	10,84224
11,15978	0,21162	11,57456	10,74501
11,18476	0,25978	11,69392	10,67560
11,20979	0,30065	11,79906	10,62052
11,23488	0,33690	11,89521	10,57455
11,26003	0,36990	11,98503	10,53502
11,28523	0,40045	12,07011	10,50035
11,31048	0,42908	12,15147	10,46949
11,33580	0,45614	12,22984	10,44176
11,36117	0,48191	12,30572	10,41661
11,38659	0,50659	12,37951	10,39368
11,41208	0,53032	12,45151	10,37264
11,43762	0,55324	12,52197	10,35327
11,46322	0,57543	12,59107	10,33536

E [S <sub>t</sub> ]	$\sigma$ [S <sub>t</sub> ]	I.C. Superior	I.C. Inferior
11,48887	0,59699	12,65897	10,31877
11,51458	0,61798	12,72582	10,30335
11,54035	0,63845	12,79172	10,28899
11,56618	0,65846	12,85676	10,27560
11,59207	0,67805	12,92104	10,26309
11,61801	0,69725	12,98462	10,25140
11,64401	0,71610	13,04757	10,24045
11,67007	0,73463	13,10994	10,23021
11,69619	0,75285	13,17178	10,22060
11,72237	0,77080	13,23313	10,21160
11,74860	0,78849	13,29404	10,20316
11,77490	0,80594	13,35454	10,19525
11,80125	0,82317	13,41466	10,18784
11,82766	0,84019	13,47443	10,18089
11,85413	0,85701	13,53387	10,17439
11,88066	0,87365	13,59302	10,16830
11,90725	0,89012	13,65189	10,16261
11,93390	0,90643	13,71050	10,15730
11,96061	0,92258	13,76887	10,15234
11,98738	0,93860	13,82703	10,14773
12,01420	0,95447	13,88497	10,14343
12,04109	0,97022	13,94273	10,13945
12,06804	0,98585	14,00031	10,13577
12,09505	1,00137	14,05773	10,13237
12,12212	1,01677	14,11499	10,12924
12,14925	1,03208	14,17212	10,12638
12,17644	1,04728	14,22912	10,12376
12,20369	1,06240	14,28599	10,12139
12,23100	1,07743	14,34276	10,11925
12,25838	1,09237	14,39942	10,11733
12,28581	1,10724	14,45600	10,11563
12,31331	1,12203	14,51248	10,11413
12,34087	1,13675	14,56889	10,11284
12,36849	1,15140	14,62523	10,11174
12,39617	1,16599	14,68150	10,11083
12,42391	1,18052	14,73772	10,11010
12,45171	1,19498	14,79388	10,10955
12,47958	1,20940	14,85000	10,10916
12,50751	1,22376	14,90608	10,10895
12,53550	1,23807	14,96212	10,10889
12,56356	1,25233	15,01813	10,10899
12,59168	1,26655	15,07412	10,10923

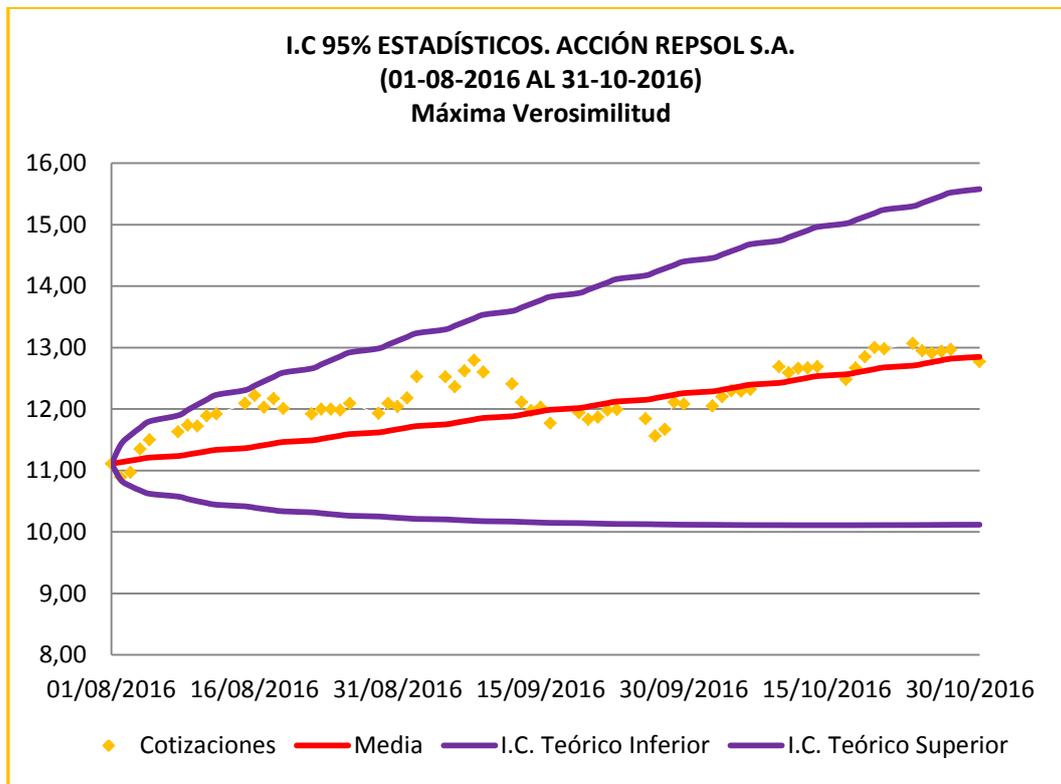
E [S <sub>t</sub> ]	$\sigma$ [S <sub>t</sub> ]	I.C. Superior	I.C. Inferior
12,61986	1,28073	15,13009	10,10963
12,64810	1,29486	15,18603	10,11017
12,67641	1,30896	15,24197	10,11085
12,70478	1,32302	15,29790	10,11166
12,73321	1,33705	15,35382	10,11260
12,76171	1,35104	15,40975	10,11368
12,79027	1,36500	15,46567	10,11487
12,81890	1,37893	15,52160	10,11619
12,84759	1,39284	15,57754	10,11763

**Tabla 7.2.5: Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de máxima verosimilitud.**

Fuente: Elaboración propia

Para terminar de validar las estimaciones de las cotizaciones de Repsol S.A. por el método de máxima verosimilitud, hemos construido un gráfico que contiene los valores reales de la acción, los valores estimados, la media calculada y los intervalos de confianza que hemos calculado anteriormente para el periodo analizado.

Al igual que ocurre con el método anterior, podemos observar que las fluctuaciones se encuentran dentro de los intervalos de confianza calculados. Por lo tanto, podemos afirmar que el Modelo Log-Normal cuyos parámetros se han estimado a través del método de máxima verosimilitud, recoge de forma satisfactoria la dinámica del subyacente de Repsol S.A.



**Gráfico 7.2.2. I.C (95%) para la acción Repsol S.A. vía la calibración de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud.**

Fuente: Elaboración propia



# 8

## Determinación de las Posibilidades de Beneficio con Estrategias Especulativas Mediante Opciones Financieras de Tipo Diferencial de Precios

Este capítulo está dedicado a determinar la probabilidad de obtener beneficio cuando se realizan inversiones con el subyacente de Repsol S.A. mediante las estrategias especulativas vía Opciones Financieras de tipo Diferencial de Precios Alcistas (*Bull Spread*) y Bajistas (*Bear Spread*). Es importante recordar que estas estrategias han sido presentadas con cierto detalle en los Apartados 3.1 y 3.2, respectivamente. Para el cálculo de dichas probabilidades se asumirá, como se ha presentado en el Capítulo 5, que la dinámica del subyacente sigue un proceso estocástico de tipo Movimiento Browniano Geométrico (MBG) (véase ecuación .5.0.1).

$$S_T = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N[0; 1]. \quad (5.0.1)$$

También se requerirán las expresiones de los beneficios a vencimiento de las estrategias *Bull Spread* (véase ecuación (3.1.1) y ecuación (3.1.2))

### Call Bull Spread

$$(B/P)_{TOTAL}(S_T) = \begin{cases} -C_1 + C_2 & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_1, \\ S_T - (C_1 + K_1) + C_2 & \text{si } K_1 \leq S_T \leq K_2, \\ (C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) & \text{si } S_T \geq K_2. \end{cases}$$

### Put Bull Spread

$$(B/P)_{TOTAL}(S_T) = \begin{cases} (K_1 - K_2) - (P_1 - P_2) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_1, \\ S_T - (K_2 + P_1 - P_2) & \text{si } K_1 \leq S_T \leq K_2, \\ P_2 - P_1 & \text{si } S_T \geq K_2, \end{cases}$$

y de las estrategias *Bear Spread* (véase (ecuación (3.2.1) y (ecuación (3.2.2))

### Call Bear Spread

$$(B/P)_{TOTAL}(S_T) = \begin{cases} C_2 - C_1 & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_2, \\ -S_T + C_2 + K_2 - C_1 & \text{si } K_2 \leq S_T \leq K_1, \\ (C_2 - C_1) + (K_2 - K_1) & \text{si } S_T \geq K_1. \end{cases}$$

### Put Bear Spread

$$(B/P)_{TOTAL}(S_T) = \begin{cases} (K_1 - K_2) + (P_2 - P_1) & \text{si } 0 \leq S_T \leq K_2, \\ -S_T + K_1 + P_2 - P_1 & \text{si } K_2 \leq S_T \leq K_1, \\ P_2 - P_1 & \text{si } S_T \geq K_1. \end{cases}$$

## 8.1. Determinación de la Probabilidad de Beneficio con una Estrategia de Inversión Tipo diferencial de Precios Alcista (*Bull Spread*). Estudio Teórico

### 8.1.1. Call Bull Spread

Para calcular la probabilidad de beneficio de una *Call Bull Spread* exigimos que el subyacente,  $S_T$ , dado en (5.0.1) varíe en un intervalo de modo que la función de beneficios totales  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$  dado en (3.1.1) sea positiva. A partir de la Figura 3.1.1 se deduce que el intervalo buscado es

$$S_T \in ]K_1 + C_1 - C_2, +\infty[. \quad (8.1.1)$$

Por tanto, se debe de calcular la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{Call\ Bull\ Spread}^{Beneficio} &= \mathbb{P}[S_T > K_1 + C_1 - C_2] \\ &= \mathbb{P}\left[s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} > K_1 + C_1 - C_2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{P} \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} > \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} \right] \\
 &= \mathbb{P} \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma\sqrt{T}Z > \ln \left( \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} \right) \right] \\
 &= \mathbb{P} \left[ \sigma\sqrt{T}Z > \ln \left( \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] \\
 &= \mathbb{P} \left[ Z > \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right) \right] \\
 &= 1 - \Phi \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln \left( \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] \right),
 \end{aligned}$$

siendo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8.1.2)$$

la función aleatoria de la variable aleatoria normal tipificada,  $Z \sim N[0; 1]$ . Resumiendo, dada una inversión de tipo Diferencial de Precios Alcista o *Bull Spread* con vencimiento  $T > 0$ , sobre un subyacente modelizado según el M.B.G (5.0.1) con parámetros de tendencia  $\mu \in \mathbb{R}$  y volatilidad local  $\sigma > 0$ , la probabilidad de beneficio está dada por:

$$\mathbb{P}_{Call\ Bull\ Spread}^{Beneficio} = 1 - \Phi \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln \left( \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] \right), \quad (8.1.3)$$

siendo  $\Phi(*)$  la función dada en (8.1.2) y  $C_1$  y  $K_1$ , la prima y el precio de ejercicio, respectivamente, de la opción de compra *Call* comprada y,  $C_2$ , la prima de la opción de compra *Call* vendida.

A partir de la expresión (8.1.3) y teniendo en cuenta la tabulación de la función  $\Phi$ , pueden deducirse propiedades de gran interés para el inversor. Por ejemplo, a continuación para ilustrar la potencialidad de los resultados obtenidos anteriormente, se determina la condición matemática que deben satisfacer los parámetros  $C_1, C_2$  y  $K_1$  de los dos derivados financieros de la estrategia especulativa *Bull Spread* para que la probabilidad de beneficio supere el valor crítico 0,5 (50% de probabilidad de obtener beneficio con la inversión).

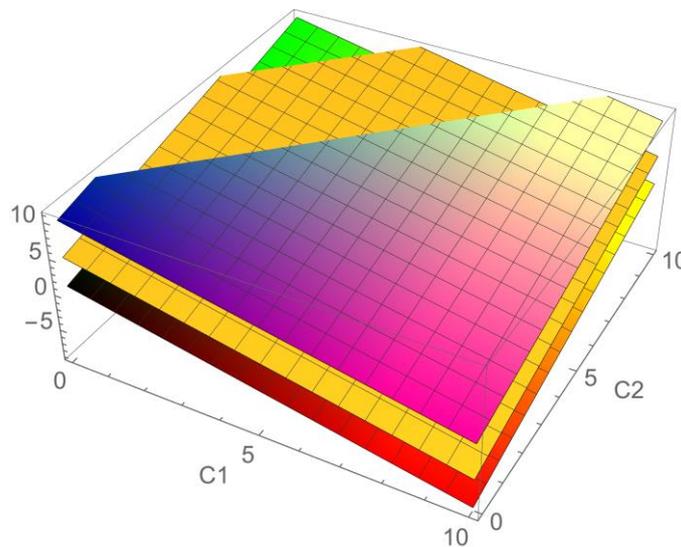
$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{Call\ Bull\ Spread}^{Beneficio} > 0,5 &\leftrightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln \left( \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] < 0 \\
 &\leftrightarrow \ln \left( \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0}\right) &< \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \\ \Leftrightarrow \frac{K_1 + C_1 - C_2}{s_0} &< e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} \\ \Leftrightarrow K_1 + C_1 - C_2 &< s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que la probabilidad de beneficio con esta inversión supere el 50%, la terna o punto del espacio tridimensional  $(K_1, C_1, C_2)$  debe estar encima del plano

$$\prod_{\text{Call Bull Spread}}^{\text{BENEFICIO}} (0) : K_1 + C_1 - C_2 = \alpha, \quad \alpha = s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}.$$

En la Figura 8.1.1 se ilustra gráficamente esta conclusión para tres valores del parámetro  $\alpha = 1, 5, 10$ .



**Figura 8.1.1:** Representación gráfica del plano que determina la relación de los parámetros  $(K_1, C_1, C_2)$  de una *Bull Spread* para que haya una probabilidad de beneficio superior a 0 con esta inversión.

Fuente: Elaboración propia.

### 8.1.2. Put Bull Spread

Para calcular la probabilidad de beneficio de una *Put Bull Spread* exigimos que el subyacente,  $S_T$ , dado en (5.0.1) varíe en un intervalo de modo que la función de beneficios totales  $(B/P)_{\text{TOTAL}}(S_T)$  dado en (3.1.2) sea positiva. A partir de la Figura 3.1.2 se deduce que

el intervalo buscado es

$$S_T \in ]K_2 + P_1 - P_2, +\infty[. \quad (8.1.4)$$

Por tanto, se debe de calcular la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{Put\ Bull\ Spread}^{\text{Beneficio}} &= \mathbb{P}[S_T > K_2 + P_1 - P_2] \\ &= \mathbb{P}\left[s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} > K_2 + P_1 - P_2\right] \\ &= \mathbb{P}\left[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} > \frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z > \ln\left(\frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right)\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\sigma\sqrt{T}Z > \ln\left(\frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right] \\ &= \mathbb{P}\left[Z > \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right]\right), \end{aligned}$$

siendo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8.1.5)$$

la función aleatoria de la variable aleatoria normal tipificada,  $Z \sim N[0; 1]$ . Resumiendo, dada una inversión de tipo Diferencial de Precios Alcista o *Bull Spread* con opciones de venta o Puts con vencimiento  $T > 0$ , sobre un subyacente modelizado según el M.B.G (5.0.1) con parámetros de tendencia  $\mu \in \mathbb{R}$  y volatilidad local  $\sigma > 0$ , la probabilidad de beneficio está dada por:

$$\mathbb{P}_{Put\ Bull\ Spread}^{\text{Beneficio}} = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right]\right), \quad (8.1.6)$$

siendo  $\Phi(*)$  la función dada en (8.1.5) y  $P_2$  y  $K_2$ , la prima y el precio de ejercicio, respectivamente, de la opción de venta *Put* vendida y,  $P_1$ , la prima de la opción de venta *Put* comprada.

A partir de la expresión (8.1.6) y teniendo en cuenta la tabulación de la función  $\Phi$ , pueden deducirse propiedades de gran interés para el inversor. Por ejemplo, a continuación para

ilustrar la potencialidad de los resultados obtenidos anteriormente, se determina la condición matemática que deben satisfacer los parámetros  $P_1, P_2$  y  $K_2$  de los dos derivados financieros de la estrategia especulativa *Bull Spread* con opciones de venta *Puts* compradas para que la probabilidad de beneficio supere el valor crítico 0,5 (50% de probabilidad de obtener beneficio con la inversión).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{Put\ Bull\ Spread}^{Beneficio} > 0,5 &\leftrightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right] < 0 \\ &\leftrightarrow \ln\left(\frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T < 0 \\ &\leftrightarrow \ln\left(\frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0}\right) < \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \\ &\leftrightarrow \frac{K_2 + P_1 - P_2}{s_0} < e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} \\ &\leftrightarrow K_2 + P_1 - P_2 < s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que la probabilidad de beneficio con esta inversión supere el 50%, la terna o punto del espacio tridimensional  $(K_2, P_1, P_2)$  debe estar encima del plano.

$$\prod_{Put\ Bull\ Spread}^{BENEFICIO} (0) : K_2 + P_1 - P_2 = \alpha, \quad \alpha = s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}.$$

## 8.2. Determinación de la probabilidad de beneficio con una estrategia de inversión tipo Diferencial de Precio Bajista (*Bear Spread*). Estudio teórico.

### 8.2.1. Call Bear Spread

Para calcular la probabilidad de beneficio de una *Call Bear Spread* exigimos que el subyacente,  $S_T$ , dado en (5.0.1) varíe en un intervalo de modo que la función de beneficios totales  $(B/P)_{TOTALES}(S_T)$  dado en (3.2.1) sea positiva. A partir de la Figura 3.2.1 se deduce que el intervalo buscado es

$$S_T \in ]0, K_2 + C_2 - C_1[, \quad (8.2.1)$$

Por tanto, se debe de calcular la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{Call\ Bear\ Spread}^{Beneficio} &= \mathbb{P}(0 < S_T < K_2 + C_2 - C_1), \\
 &= \mathbb{P}\left[0 < s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} < K_2 + C_2 - C_1\right] \\
 &= \mathbb{P}\left[s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} < K_2 + C_2 - C_1\right] \\
 &= \mathbb{P}\left[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} < \frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right] \\
 &= \mathbb{P}\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z < \ln\left(\frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right)\right] \\
 &= \mathbb{P}\left[\sigma\sqrt{T}Z < \ln\left(\frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right] \\
 &= \mathbb{P}\left[Z < \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)\right] \\
 &= \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right]\right),
 \end{aligned}$$

siendo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8.2.2)$$

La función aleatoria de la variable aleatoria normal tipificada,  $Z \sim N[0; 1]$ . Resumiendo, dado para una inversión de tipo Diferencial de Precios Bajista o *Bear Spread* con opciones de compra o *Calls* con vencimiento  $T > 0$ , sobre un subyacente modelizado según el M.B.G (5.0.1) con parámetros de tendencia  $\mu \in \mathbb{R}$  y volatilidad local  $\sigma > 0$ , la probabilidad de beneficio está dada por:

$$\mathbb{P}_{Call\ Bear\ Spread}^{Beneficio} = \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right]\right), \quad (8.2.3)$$

siendo  $\Phi(*)$  la función dada en (8.2.2) y  $C_1$  la prima de la opción de compra *Call* comprada y,  $C_2$  y  $K_2$ , la prima y el precio de ejercicio, respectivamente, de la opción de compra *Call* vendida.

A partir de la expresión (8.2.3) y teniendo en cuenta la tabulación de la función  $\Phi$ , pueden deducirse propiedades de gran interés para el inversor, por ejemplo, a continuación para ilustrar la potencialidad de los resultados obtenidos, anteriormente, se determina la condición matemática que deben satisfacer los parámetros  $C_1, C_2$  y  $K_2$  de los dos derivados financieros

de la estrategia especulativa Bear Spread para que la probabilidad de beneficio supere el valor crítico 0 (posibilidad de obtener beneficio con la inversión).

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{Call\ Bear\ Spread}^{Beneficio} > 0 &\leftrightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right] > 0 \\
 &\leftrightarrow \ln\left(\frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T > 0 \\
 &\leftrightarrow \ln\left(\frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0}\right) > \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \\
 &\leftrightarrow \frac{K_2 + C_2 - C_1}{s_0} > e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \\
 &\leftrightarrow K_2 + C_2 - C_1 > s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que la probabilidad de beneficio con esta inversión supere el 50%, la terna  $(K_2, C_2, C_1)$  debe estar encima del plano

$$\prod_{Call\ Bear\ Spread}^{BENEFICIO} (0) : K_2 + C_2 - C_1 = \alpha, \quad \alpha = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$$

### 8.2.2. Put Bear Spread

Para calcular la probabilidad de beneficio de una *Put Bear Spread* exigimos que el subyacente,  $S_T$ , dado en (5.0.1) varíe en un intervalo de modo que la función de beneficios totales  $(B/P)_{TOTALES}(S_T)$  dado en (3.2.2) sea positiva. A partir de la Figura 3.2.2 se deduce que el intervalo buscado es

$$S_T \in ]0, K_1 + P_2 - P_1[. \quad (8.2.4)$$

Por tanto, se debe de calcular la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{Put\ Bear\ Spread}^{Beneficio} &= \mathbb{P}(0 < S_T < K_1 + P_2 - P_1), \\
 &= \mathbb{P}\left[0 < s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} < K_1 + P_2 - P_1\right], \\
 &= \mathbb{P}\left[s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} < K_1 + P_2 - P_1\right], \\
 &= \mathbb{P}\left[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} < \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0}\right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{P} \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z < \ln \left( \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0} \right) \right], \\
 &= \mathbb{P} \left[ \sigma \sqrt{T} Z < \ln \left( \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right], \\
 &= \mathbb{P} \left[ Z < \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right) \right], \\
 &= \Phi \left( \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left[ \ln \left( \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right] \right),
 \end{aligned}$$

siendo

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (8.2.5)$$

La función aleatoria de la variable aleatoria normal tipificada,  $Z \sim N[0; 1]$ . Resumiendo, dado para una inversión de tipo Diferencial de Precios Bajista o *Bear Spread* con opciones de venta *Puts* vendidas con vencimiento  $T > 0$ , sobre un subyacente modelizado según el M.B.G (5.0.1) con parámetros de tendencia  $\mu \in \mathbb{R}$  y volatilidad local  $\sigma > 0$ , la probabilidad de beneficio está dada por:

$$\mathbb{P}_{Put\ Bear\ Spread}^{Beneficio} = \Phi \left( \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left[ \ln \left( \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right] \right), \quad (8.2.6)$$

siendo  $\Phi(*)$  la función dada en (8.2.6) y  $P_1$  la prima de la opción de venta *Put Bear Spread* comprada y,  $P_2$  y  $K_2$ , la prima y el precio de ejercicio, respectivamente, de la opción de venta *Put* vendida.

A partir de la expresión (8.2.6) y teniendo en cuenta la tabulación de la función  $\Phi$ , pueden deducirse propiedades de gran interés para el inversor, por ejemplo, a continuación para ilustrar la potencialidad de los resultados obtenidos, anteriormente, se determina la condición matemática que deben satisfacer los parámetros  $P_1, P_2$  y  $K_1$  de los dos derivados financieros de la estrategia especulativa *Bear Spread* para que la probabilidad de beneficio supere el valor crítico 0 (posibilidad de obtener beneficio con la inversión).

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{Put\ Bear\ Spread}^{Beneficio} > 0 &\leftrightarrow \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left[ \ln \left( \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right] > 0 \\
 &\leftrightarrow \ln \left( \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T > 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{K_1 + P_2 - P_1}{s_0} \right) > e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$$

$$\Leftrightarrow K_1 + P_2 - P_1 > s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}.$$

Por lo tanto, para que la probabilidad de beneficio con esta inversión supere el 50%, la terna  $(K_2, P_2, P_1)$  debe estar encima del plano

$$\prod_{\substack{\text{BENEFICIO} \\ \text{Put Bear Spread}}} (0), : K_1 + P_2 - P_1 = \alpha, \quad \alpha = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}.$$

### 8.3. Presentación de los escenarios

Para poner en práctica lo que hemos descrito durante el presente capítulo, hemos creado cinco escenarios diferentes. Las 5 estrategias o escenarios de inversión poseen un precio de ejercicio diferente, con el fin de observar en qué escenario obtenemos beneficios y en cuáles obtenemos pérdidas.

Cabe destacar que primero fijamos un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de 0,50€ con el fin de realizar un análisis de sensibilidad. El objetivo perseguido es ver si seguimos obteniendo beneficios o encontramos un punto crítico en el que se pasamos de obtener beneficios/pérdidas a pérdidas/beneficios.

#### Escenario 1: Promedio de los valores observados

El primer escenario "promedio de los valores observados" se ha construido a partir del promedio de los valores observados durante el periodo utilizado para calibrar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , (1 de agosto hasta el 31 de octubre del 2016). Para calcular el valor, precio de ejercicio de la segunda *Call* ( $K_2$ ), hemos utilizado la función de Excel PROMEDIO. Para verlo de una forma más ilustrativa, la Figura 8.3.1 muestra cómo hemos aplicado dicha fórmula en Excel.

CONSULTAV										
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1										
2		Fecha	Precio Ajustado	Fecha	Precio Ajustado	Fecha	Precio Ajustado			
3		01/08/2016	11,11	31/08/2016	12,04	30/09/2016	12,08			
4		02/08/2016	10,89	01/09/2016	12,18	03/10/2016	12,05	=+PROMEDIO(C3:C24;E3:E24;G3:G24)		
5		03/08/2016	10,97	02/09/2016	12,53	04/10/2016	12,20			
6		04/08/2016	11,35	05/09/2016	12,52	05/10/2016	12,30			
7		05/08/2016	11,50	06/09/2016	12,36	06/10/2016	12,29			
8		08/08/2016	11,63	07/09/2016	12,62	07/10/2016	12,32			
9		09/08/2016	11,74	08/09/2016	12,79	10/10/2016	12,69			
10		10/08/2016	11,72	09/09/2016	12,60	11/10/2016	12,59			
11		11/08/2016	11,89	12/09/2016	12,41	12/10/2016	12,66			
12		12/08/2016	11,92	13/09/2016	12,11	13/10/2016	12,67			
13		15/08/2016	12,09	14/09/2016	11,97	14/10/2016	12,69			
14		16/08/2016	12,22	15/09/2016	12,03	17/10/2016	12,48			
15		17/08/2016	12,03	16/09/2016	11,77	18/10/2016	12,67			
16		18/08/2016	12,17	19/09/2016	11,94	19/10/2016	12,85			
17		19/08/2016	12,01	20/09/2016	11,83	20/10/2016	13,00			
18		22/08/2016	11,92	21/09/2016	11,87	21/10/2016	12,98			
19		23/08/2016	12,00	22/09/2016	11,98	24/10/2016	13,07			
20		24/08/2016	12,00	23/09/2016	11,99	25/10/2016	12,95			
21		25/08/2016	11,98	26/09/2016	11,84	26/10/2016	12,91			
22		26/08/2016	12,09	27/09/2016	11,56	27/10/2016	12,94			
23		29/08/2016	11,93	28/09/2016	11,67	28/10/2016	12,97			
24		30/08/2016	12,09	29/09/2016	12,11	31/10/2016	12,77			
25										

Figura 8.3.1: Cálculo del precio de ejercicio ( $K_2$ ) de la segunda Call para el primer escenario (intermedio).

Fuente: Elaboración propia

La fórmula de Excel nos permite fijar en 12,1833€ el precio de ejercicio de la segunda Call ( $K_2$ ).

Se ha elegido este método para generar un escenario intermedio, es decir, un escenario que bajo nuestro punto de vista no se trata ni de un escenario bajista ni alcista, ya que contiene el valor medio de los tres meses utilizados para la fijación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

### Escenario 2: Pesimista

El segundo escenario denominado "pesimista" lo hemos construido eligiendo la cotización más baja de la acción de Repsol S.A durante el periodo utilizado para calibrar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , (1 de agosto hasta el 31 de octubre del 2016). Para calcular el valor, precio de ejercicio de la segunda Call ( $K_2$ ), hemos utilizado la función de Excel MIN. La Figura 8.3.2 muestra cómo hemos aplicado dicha fórmula en Excel.

CONSULTAV											
=+MIN(C3:C24;E3:E24;G3:G24)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		Fecha	Precio Ajustado	Fecha	Precio Ajustado	Fecha	Precio Ajustado				
3		01/08/2016	11,11	31/08/2016	12,04	30/09/2016	12,08		=+MIN(C3:C24;E3:E24;G3:G24)		
4		02/08/2016	10,89	01/09/2016	12,18	03/10/2016	12,05				
5		03/08/2016	10,97	02/09/2016	12,53	04/10/2016	12,20				
6		04/08/2016	11,35	05/09/2016	12,52	05/10/2016	12,30				
7		05/08/2016	11,50	06/09/2016	12,36	06/10/2016	12,29				
8		08/08/2016	11,63	07/09/2016	12,62	07/10/2016	12,32				
9		09/08/2016	11,74	08/09/2016	12,79	10/10/2016	12,69				
10		10/08/2016	11,72	09/09/2016	12,60	11/10/2016	12,59				
11		11/08/2016	11,89	12/09/2016	12,41	12/10/2016	12,66				
12		12/08/2016	11,92	13/09/2016	12,11	13/10/2016	12,67				
13		15/08/2016	12,09	14/09/2016	11,97	14/10/2016	12,69				
14		16/08/2016	12,22	15/09/2016	12,03	17/10/2016	12,48				
15		17/08/2016	12,03	16/09/2016	11,77	18/10/2016	12,67				
16		18/08/2016	12,17	19/09/2016	11,94	19/10/2016	12,85				
17		19/08/2016	12,01	20/09/2016	11,83	20/10/2016	13,00				
18		22/08/2016	11,92	21/09/2016	11,87	21/10/2016	12,98				
19		23/08/2016	12,00	22/09/2016	11,98	24/10/2016	13,07				
20		24/08/2016	12,00	23/09/2016	11,99	25/10/2016	12,95				
21		25/08/2016	11,98	26/09/2016	11,84	26/10/2016	12,91				
22		26/08/2016	12,09	27/09/2016	11,56	27/10/2016	12,94				
23		29/08/2016	11,93	28/09/2016	11,67	28/10/2016	12,97				
24		30/08/2016	12,09	29/09/2016	12,11	31/10/2016	12,77				
25											

Figura 8.3.2: Cálculo del precio de ejercicio ( $K_2$ ) de la segunda Call para el segundo escenario (pesimista).

Fuente: Elaboración propia

La fórmula de Excel nos permite fijar, para el escenario "pesimista", en 10,89€ el precio de ejercicio de la segunda Call ( $K_2$ ).

Un escenario pesimista nos ofrece la posibilidad de ver si conseguimos obtener beneficios cuando se emiten opciones sobre la acción de Repsol S.A. con precios de ejercicio ( $K$ ) bajos. Los precios de ejercicio serán bajos cuando los inversores poseen una visión pesimista sobre el precio de cotización de la acción, es decir, los inversores creen que el precio de la acción a vencimiento estará por debajo de la cotización del mismo subyacente en el momento en que se formaliza el contrato (opción).

### Escenario 3: Optimista

El tercer escenario "optimista" lo hemos construido a través de la cotización más elevada de la acción de Repsol S.A. durante el periodo utilizado para calibrar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  (1 de agosto hasta el 31 de octubre del 2016). Para calcular el valor, precio de ejercicio de la segunda Call ( $K_2$ ), hemos utilizado la función de Excel MAX. La Figura 8.3.3 muestra cómo se hemos aplicado dicha fórmula en Excel.

CONSULTAV										=+MAX(C3:C24;E3:E24;G3:G24)	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		Fecha	Precio Ajustado	Fecha	Precio Ajustado	Fecha	Precio Ajustado				
3		01/08/2016	11,11	31/08/2016	12,04	30/09/2016	12,08		=+MAX(C3:C24;E3:E24;G3:G24)		
4		02/08/2016	10,89	01/09/2016	12,18	03/10/2016	12,05				
5		03/08/2016	10,97	02/09/2016	12,53	04/10/2016	12,20				
6		04/08/2016	11,35	05/09/2016	12,52	05/10/2016	12,30				
7		05/08/2016	11,50	06/09/2016	12,36	06/10/2016	12,29				
8		08/08/2016	11,63	07/09/2016	12,62	07/10/2016	12,32				
9		09/08/2016	11,74	08/09/2016	12,79	10/10/2016	12,69				
10		10/08/2016	11,72	09/09/2016	12,60	11/10/2016	12,59				
11		11/08/2016	11,89	12/09/2016	12,41	12/10/2016	12,66				
12		12/08/2016	11,92	13/09/2016	12,11	13/10/2016	12,67				
13		15/08/2016	12,09	14/09/2016	11,97	14/10/2016	12,69				
14		16/08/2016	12,22	15/09/2016	12,03	17/10/2016	12,48				
15		17/08/2016	12,03	16/09/2016	11,77	18/10/2016	12,67				
16		18/08/2016	12,17	19/09/2016	11,94	19/10/2016	12,85				
17		19/08/2016	12,01	20/09/2016	11,83	20/10/2016	13,00				
18		22/08/2016	11,92	21/09/2016	11,87	21/10/2016	12,98				
19		23/08/2016	12,00	22/09/2016	11,98	24/10/2016	13,07				
20		24/08/2016	12,00	23/09/2016	11,99	25/10/2016	12,95				
21		25/08/2016	11,98	26/09/2016	11,84	26/10/2016	12,91				
22		26/08/2016	12,09	27/09/2016	11,56	27/10/2016	12,94				
23		29/08/2016	11,93	28/09/2016	11,67	28/10/2016	12,97				
24		30/08/2016	12,09	29/09/2016	12,11	31/10/2016	12,77				
25											

**Figura 8.3.3: Cálculo del precio de ejercicio ( $K_2$ ) de la segunda opción de compra Call para el tercer escenario (optimista).**

Fuente: Elaboración propia

Para este escenario el precio de ejercicio de la segunda Call ( $K_2$ ) se fija en 13,07€

Un escenario alcista nos ofrece la posibilidad de ver si conseguimos obtener beneficios cuando se emiten opciones sobre la acción de Repsol S.A. con precios de ejercicio ( $K$ ) altos. Los precios de ejercicio serán elevados cuando los inversores poseen una visión alcista sobre el precio de cotización de la acción, es decir, los inversores creen que el precio de la acción a vencimiento estará por encima de la cotización del mismo subyacente en el momento en que se formaliza el contrato (opción).

#### Escenario 4: Pesimista total

El cuarto escenario "pesimista total" lo hemos construido a través de la cotización más baja de la acción de Repsol S.A. durante el último año. Este "último año" va desde el 1 de agosto de 2016 al 31 de octubre de 2016. La cotización de Repsol más pequeña la hemos obtenido a través de la información histórica de la página web investing.com (<https://es.investing.com/equities/repsol-yfp-historical-data>).

La Figura (8.3.4) nos permite ver que la cotización más baja de Repsol S.A es de 7,623 €. Por lo tanto, el precio de ejercicio de la segunda Call ( $K_2$ ) es de 7,623€.

Investing.com		EUR/USD o BBVA						
Mercados	Noticias	Análisis	Gráficos	Técnico	Social trading	Brokers	Herramientas	
Acciones	Buscador de acciones	España	Preapertura EE.UU.	América	Europa	Oriente Próximo		
01.09.2015	11,446	12,084	12,112	11,386	18,72M	-3,60%		
31.08.2015	11,874	12,182	12,219	11,777	12,14M	-3,45%		
28.08.2015	12,298	12,256	12,563	12,084	14,65M	1,11%		
27.08.2015	12,163	11,907	12,270	11,749	13,77M	5,23%		
26.08.2015	11,558	11,777	11,888	11,530	14,14M	-2,44%		
25.08.2015	11,847	11,777	11,921	11,576	16,74M	3,76%		
24.08.2015	11,418	12,065	12,265	11,395	24,01M	-8,81%		
21.08.2015	12,521	12,838	12,903	12,521	11,62M	-3,28%		
20.08.2015	12,945	13,127	13,192	12,936	11,46M	-1,52%		
19.08.2015	13,145	13,336	13,396	13,145	6,51M	-1,87%		
18.08.2015	13,396	13,518	13,573	13,369	8,06M	-1,20%		
17.08.2015	13,559	13,671	13,704	13,406	7,39M	0,07%		
14.08.2015	13,550	13,722	13,783	13,518	7,87M	-1,25%		
13.08.2015	13,722	14,039	14,123	13,694	10,37M	-0,41%		
12.08.2015	13,778	13,946	13,978	13,704	12,14M	-1,37%		
11.08.2015	13,969	14,234	14,323	13,946	7,91M	-1,90%		
10.08.2015	14,239	14,127	14,253	13,969	6,77M	1,16%		
07.08.2015	14,076	14,127	14,276	14,071	6,54M	-0,06%		
06.08.2015	14,085	14,146	14,174	13,983	5,97M	-0,33%		
05.08.2015	14,132	14,025	14,211	13,983	7,89M	0,86%		
04.08.2015	14,011	14,160	14,188	13,983	10,64M	-1,57%		
03.08.2015	14,234	14,248	14,309	14,030	8,04M	-0,07%		
Máximo: 14,323		Mínimo: 7,623		Diferencia: 6,700		Promedio: 10,526		% var.: -24,003

Figura 8.3.3: Cotizaciones de Repsol S.A durante el último año.

Fuente: Elaboración propia

Un escenario pesimista total nos permite ver si conseguimos obtener beneficios en una situación en la que se emiten opciones sobre la acción de Repsol S.A. con precios de ejercicio (K) muy bajos. En este escenario los inversores poseen una visión muy bajista sobre el valor de cotización del subyacente, es decir, los inversores creen que el precio de la acción a vencimiento estará muy por debajo de la cotización del mismo subyacente en el momento en que se formaliza el contrato (opción).

### Escenario 5: Optimista total

El último escenario "optimista total" lo hemos construido a través de la cotización más elevada de la acción de Repsol S.A. durante el último año. Como hemos dicho ya

anteriormente, el "último año" va desde el 1 de agosto de 2015 al 31 de octubre de 2016. Al igual que para el escenario anterior, la cotización de Repsol más alta la hemos obtenido a través de la información histórica de la página web [investing.com \(https://es.investing.com/equities/repsol-ypf-historical-data\)](https://es.investing.com/equities/repsol-ypf-historical-data).

La Figura 8.3.3 nos permite observar el valor más elevado de Repsol S.A durante el último año, este valor se fija en 14,323€. Por lo tanto, el precio de ejercicio de la segunda Call ( $K_2$ ) es de 14,323 €.

Un escenario optimista total nos permite ver si conseguimos obtener beneficios en una situación en la que se emiten opciones sobre la acción de Repsol S.A. con precios de ejercicio ( $K$ ) muy altos. En este escenario los inversores poseen una visión muy alcista sobre el valor de cotización del subyacente, es decir, los inversores creen que el precio de la acción a vencimiento estará muy por encima de la cotización del mismo subyacente en el momento en que se formaliza el contrato (opción).

Una vez se han fijado los escenarios vamos a centrarnos en ver si conseguimos obtener beneficios si adoptamos una estrategia tipo diferencial alcista de compra *Call Bull Spread*. Además, también se realizará un análisis de sensibilidad en cada escenario con el fin de ver si obtenemos un valor crítico, es decir, un diferencial entre los precios de las opciones a partir del cual obtenemos beneficios.

Por último, al final del presente trabajo se ha creado un anexo donde se encuentran las tablas con los resultados de los 5 escenarios de inversión en el resto de estrategias de inversión (*Put Bull Spread, Call y Put Bear Spread*).

## **8.4. Determinación de la probabilidad de beneficio con una estrategia de inversión tipo Diferencial Alcista de Compra (*Call Bull Spread*).**

### **Estudio práctico.**

En esta sección se van a ilustrar las ideas teóricas desarrolladas en el apartado anterior utilizando la calibración de la acción Repsol S.A. que se ha desarrollado en los Capítulos 5 y 7. Para ello tomaremos como datos los siguientes:

- Vencimiento:  $T = 3$  meses.
- Tendencia del subyacente:  $\mu = 0,56336$ .
- Volatilidad local:  $\sigma = 0,21284$ .
- Valor inicial del subyacente:  $s_0 = 11,11\text{€}$ .

Obsérvese que los valores de  $\mu$  y de  $\sigma$  corresponden con las estimaciones realizadas mediante el método de máxima verosimilitud, que la que arroja menores medidas de bondad del ajuste (los errores RSME y MAPE).

Para las primas  $C_1$  y  $C_2$ , se han tomado los valores obtenidos, aplicando la fórmula de Black-Scholes (véase ecuación (6.1.8)). Concretamente la prima de la opción de compra se obtiene de:

$$C_1 = s_0\phi(d_1) - K_1e^{-rT}\phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Para la segunda opción, el valor de la segunda prima está dado por la siguiente expresión:

$$C_2 = s_0\phi(\hat{d}_1) - K_2e^{-rT}\phi(\hat{d}_2),$$

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sigma\sqrt{T},$$

siendo:

- El precio de ejercicio  $K_2$ : corresponde al precio de ejercicio de la segunda opción de compra que lo iremos fijando, dependiendo de los cinco escenarios que hemos previsto generar, para ver en qué casos obtenemos beneficios. Además, analizaremos el diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra en busca de un valor crítico.
- El precio de ejercicio  $K_1$ : corresponde al precio de ejercicio de la primera opción de compra, el valor será el resultante de sumar/restar a  $K_2$  un diferencial que variará en función del caso

en que nos encontremos:

$$K_1 = K_2 \pm \Delta.$$

- $\Delta$ : Diferencial variable.
- El tipo de interés libre de riesgo:  $r = 1,02\%$  anual.

Para  $K_2$ , se ha tomado un valor (explícito) mientras que  $r$  es el tipo de interés anual de un bono a 10 años, obtenido de <http://www.datosmacro.com/bono/espana?dr=2016-08> (con fecha del 30-07-2016).

Ahora vamos a ver si obtenemos beneficios en las 5 estrategias de inversión (anteriormente descritas). Primero observaremos si conseguimos obtener beneficios en un diferencial de 0,50€ y luego realizaremos un análisis de sensibilidad del diferencial de precios de ejercicio de las opciones.

En las estrategias de inversión *Call Bull Spread* obtendremos beneficio, como hemos visto en el Apartado 8.1.1, siempre que se cumpla la siguiente igualdad:

$$K_1 + C_1 - C_2 < s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}.$$

La Tabla 8.4.1 muestra de forma resumida los valores de las primas de las 5 estrategias de inversión y cómo varían en función del cambio de valor del diferencial. Además, también podemos ver qué estrategias poseen un valor crítico, valor límite en el que obtenemos beneficios.

	$K_1$	$K_2$	Diferencial	$C_1$	$C_2$	Beneficios	V. CRITICO
<b>Promedio</b>	11,68333	12,18333	0,50	0,25900	0,13768	SI	-
<b>Caso 1</b>	11,93333	12,18333	0,25	0,19069	0,13768	SI	-
<b>Caso 2</b>	12,08333	12,18333	0,10	0,15720	0,13768	SI	-
<b>Caso 3</b>	12,13333	12,18333	0,05	0,14717	0,13768	SI	-
<b>Caso 4</b>	12,17333	12,18333	0,01	0,13953	0,13768	SI	-
<b>Pesimista</b>	10,39000	10,89000	0,50	0,92270	0,60048	SI	-
<b>Caso 1</b>	10,64000	10,89000	0,25	0,75140	0,60048	SI	-
<b>Caso 2</b>	10,79000	10,89000	0,10	0,65834	0,60048	SI	-
<b>Caso 3</b>	10,84000	10,89000	0,05	0,62899	0,60048	SI	-
<b>Caso 4</b>	10,88000	10,89000	0,01	0,60612	0,60048	SI	-
<b>Optimista</b>	12,57000	13,07000	0,50	0,08012	0,03726	SI	-
<b>Caso 1</b>	12,82000	13,07000	0,25	0,05513	0,03726	NO	-
<b>Caso 2</b>	12,72000	13,07000	0,35	0,06416	0,03726	NO	-
<b>Caso 3</b>	12,69000	13,07000	0,38	0,06711	0,03726	NO	-

	$K_1$	$K_2$	Diferencial	$C_1$	$C_2$	Beneficios	V. CRITICO
Caso 4	12,68000	13,07000	0,39	0,06812	0,03726	SI	0,39
<b>Pesimista total</b>	7,12300	7,62300	0,50	4,00514	3,50646	SI	-
Caso 1	7,37300	7,62300	0,25	3,75579	3,50646	SI	-
Caso 2	7,52300	7,62300	0,10	3,60619	3,50646	SI	-
Caso 3	7,57300	7,62300	0,05	3,55632	3,50646	SI	-
Caso 4	7,61300	7,62300	0,01	3,51643	3,50646	SI	-
<b>Optimista total</b>	13,82300	14,32300	0,50	0,01033	0,00407	NO	-
Caso 1	14,07300	14,32300	0,25	0,00653	0,00407	NO	-
Caso 2	14,22300	14,32300	0,1	0,00493	0,00407	NO	-
Caso 3	14,27300	14,32300	0,05	0,00448	0,00407	NO	-
Caso 4	14,31300	14,32300	0,01	0,00415	0,00407	NO	-

Tabla 8.4.1: Resultados de las inversiones para una *Call Bull Spread*

Fuente: Elaboración propia.

### Escenario 1: Promedio

Para el primer escenario hemos fijado el precio de ejercicio de la segunda opción de compra  $K_2$  en 12,1833€, que corresponde al promedio de los valores observados durante el periodo analizado (función promedio de Excel).

La Tabla 8.4.2 muestra los valores necesarios para fijar las primas de las dos opciones de compra *Call*. Inicialmente el precio de ejercicio de la primera opción de compra,  $K_1$ , es 0,50€ más pequeño que el de la segunda opción, ya que en las estrategias *Bull Spread*  $K_2 > K_1$ .

ESCENARIO 1 PROMEDIO		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	11,68333€	12,18333€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25

Tabla 8.4.2: Valores a tener en cuenta para poder aplicar la fórmula de Black-Scholes

Fuente: Elaboración propia.

Aplicando la fórmula de Black Scholes, anteriormente descritas en el Apartado 6.1.1, obtenemos el valor de las primas para el primer escenario:

<b>d1</b>	-0,395651889	-0,789428426
<b>d2</b>	-0,502071568	-0,895848105
<b>N(d1)</b>	0,346180926	0,214930824
<b>N(d2)</b>	0,307808589	0,185166947
<b>Prima Call</b>	0,25900€	0,13768€

**Tabla 8.4.3: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las opciones de compra Calls en el escenario "Promedio"**

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.4 muestra si para este escenario conseguimos obtener beneficio, como 12,71805€ es mayor que 11,80466€ podemos afirmar que en este escenario, promedio de los valores observados, obtenemos beneficio para un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra de 0,50€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
11,80466€	<	12,71805€

**Tabla 8.4.4: Resultado de la estrategia de inversión "Promedio"**

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, vamos a centrarnos en ver si conseguimos beneficio en una serie de casos para el mismo escenario. Cada caso posee un diferencial distinto para ver si conseguimos beneficios en todos estos casos o encontramos un valor crítico.

En el primer caso se ha variado el diferencial de 0,50€ a 0,25€, el precio de ejercicio de la primera Call pasa de los 11,68333€ a los 11,9333€. El cambio anterior provoca que la prima de la opción se reduzca hasta los 0,19069€.

CASO 1		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	11,93333€	12,18333€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-0,594602686	-0,789428426
d2	-0,701022365	-0,895848105
N(d1)	0,276054542	0,214930824
N(d2)	0,241644529	0,185166947
Prima Call	0,19069€	0,13768€

Tabla 8.4.5: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls en el escenario "Promedio" primer caso

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.6 muestra si para el Caso 1, dentro de la estrategia de inversión "promedio", conseguimos obtener beneficio. Como 12,71805€ es mayor que 11,98634€ podemos afirmar que obtenemos beneficio con un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra de 0,25€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
11,98634€	<	12,71805€

Tabla 8.4.6: Resultado de la estrategia de inversión "Promedio" primer caso

Fuente: Elaboración propia.

Como observamos que con un diferencial de 0,25€ aún tenemos bastante margen de beneficio vamos a reducir el diferencial hasta su valor mínimo, es decir, los 0,01€. Por lo tanto, vamos a analizar el último caso, ahora el precio de ejercicio de la primera Call se fija en 12,17333€ provocando que el valor de la prima se reduzca hasta los 0,13953€.

CASO 4		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,17333€	12,18333€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,21284	0,21284
t	0	0
T(años)	0,25	0,25
d1	-0,781712462	-0,789428426
d2	-0,888132141	-0,895848105
N(d1)	0,217191788	0,214930824
N(d2)	0,187234838	0,185166947
Prima Call	0,13953€	0,13768€

Tabla 8.4.7: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls en el escenario "Promedio" cuarto caso

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.8 detalla si en este caso conseguimos obtener beneficio, como 12,71805€ es mayor que 12,17519€ podemos afirmar que en este escenario, valor mínimo de los observados, obtenemos beneficio para un diferencial entre los precios de ejercicio de 0,01€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,17519€	<	12,71805€

Tabla 8.4.8: Resultado de la estrategia de inversión "Promedio" cuarto caso

Fuente: Elaboración propia.

Tras analizar todos los casos posibles de la estrategia de inversión "Promedio de los valores observados" podemos afirmar que obtendremos beneficios para todos los casos, ya que reduciendo el diferencial entre los precios de ejercicio de las dos opciones hasta alcanzar su valor mínimo, los 0,01€, seguimos obteniendo beneficios.

### Escenario 2: Pesimista

Para el segundo escenario hemos fijado el precio de ejercicio de la segunda opción de compra  $K_2$  en 10,89€, que corresponde al valor más bajo durante el periodo analizado, es decir, el mínimo del trimestre (función Min de Excel).

ESCENARIO 2 PESIMISTA		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	10,39000€	10,89000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T(años)	0,25	0,25
d1	0,706771278	0,265113003
d2	0,600351599	0,158693324
N(d1)	0,760145687	0,604538795
N(d2)	0,725864031	0,563044751
Prima Call	0,92270€	0,60048€

Tabla 8.4.9: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las opciones de compra Calls en el escenario "Pesimista"

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.10 detalla si para esta estrategia de inversión conseguimos obtener beneficios, como 12,71805€ es mayor que 10,71221€ podemos afirmar que obtenemos beneficio para un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra de 0,50€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
10,71221€	<	12,71805€

Tabla 8.4.10: Resultado de la estrategia de inversión "Pesimista"

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, vamos realizar un análisis de sensibilidad del diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones para comprobar si conseguimos beneficio en todos los casos o encontramos un valor crítico. Como tenemos un gran margen de beneficio (12,71805€ > 10,71221€) vamos a reducir el diferencial hasta alcanzar su valor mínimo 0,01€ (caso 4) que nos permite observar si conseguimos beneficios para todos los diferenciales posibles.

CASO 4		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	10,88000€	10,89000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	0,273745763	0,265113003
d2	0,167326084	0,158693324
N(d1)	0,607859997	0,604538795
N(d2)	0,566443259	0,563044751
Prima Call	0,60612€	0,60048€

Tabla 8.4.11: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls en el escenario "Pesimista" cuarto caso

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.12 muestra si conseguimos obtener beneficios en el cuarto caso, como 12,71805€ es mayor que 10,88563€ podemos afirmar que en este escenario, valor mínimo de los observados, obtenemos beneficio para un diferencial entre los precios de ejercicio de 0,01€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
10,88563€	<	12,71805€

Tabla 8.4.12: Resultado de la estrategia de inversión "Pesimista" cuarto caso

Fuente: Elaboración propia.

Tras analizar la estrategia de inversión "Pesimista" podemos afirmar que obtendremos beneficios para todos los casos, ya que reduciendo la diferencia entre los precios de ejercicio de las dos opciones de compra Calls hasta alcanzar los 0,01€ seguimos obteniendo beneficios.

### Escenario 3: Optimista

Para la tercera estrategia de inversión hemos fijado el precio de ejercicio de la segunda opción de compra  $K_2$  en 13,07€, que corresponde al valor más elevado durante el periodo analizado, es decir el máximo del trimestre (función Max de Excel).

ESCENARIO 3 OPTIMISTA		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,57000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,083021917	-1,449556616
d2	-1,189441596	-1,555976295
N(d1)	0,139399348	0,073591101
N(d2)	0,11713297	0,059856865
Prima Call	0,08012€	0,03726€

Tabla 8.4.13: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las opciones de compra Calls en el escenario "Optimista"

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.14 detalla si en el escenario "Optimista" obtenemos beneficio, como 12,71805€ es mayor que 12,61285€ podemos afirmar que para la estrategia "Optimista" obtenemos beneficio con un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra Calls de 0,50€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,61285€	<	12,71805€

Tabla 8.4.14: Resultado de la estrategia de inversión "Optimista"

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, vamos a realizar un análisis de sensibilidad del diferencial del precio de ejercicio de las opciones con el fin de probar si conseguimos obtener beneficios en todos los casos o encontramos un valor crítico.

En el primer caso se reduce el diferencial hasta los 0,25€, esto provoca que el precio de ejercicio de la primera opción de compra Call se sitúe ahora en 12,82€, y la prima se reduzca hasta alcanzar los 0,05513€.

CASO 1		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,82000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,268076308	-1,449556616
d2	-1,374495987	-1,555976295
N(d1)	0,102385351	0,073591101
N(d2)	0,084643878	0,059856865
Prima Call	0,05513€	0,03726€

Tabla 8.4.15: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls en el escenario "Optimista" primer caso

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.16 detalla si para este primer caso conseguimos obtener beneficio, como 12,71805€ es menor que 12,83787€ podemos afirmar que en este caso no conseguimos obtener beneficios para un diferencial entre los precios de ejercicio de 0,25€.

Como se puede observar hemos pasado de obtener beneficio con un diferencial de 0,50€ a obtener pérdidas al reducir el diferencial hasta los 0,25€. Por lo tanto, habrá un valor crítico a partir del cual obtendremos beneficios que estará comprendido entre el intervalo [0,25€, 0,50€].

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,83787€	>	12,71805€

Tabla 8.4.16: Resultado de la estrategia de inversión "Optimista" primer caso

Fuente: Elaboración propia.

Ahora, vamos a analizar el segundo caso. Ahora el diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra se cifra en 0,35€, fijando el precio de ejercicio de la primera opción de compra en 12,72€. Al cambiar el precio de ejercicio también varía la prima, que ahora se sitúa en 0,06416€.

CASO 2		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,72000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,194491294	-1,449556616
d2	-1,300910973	-1,555976295
N(d1)	0,116142922	0,073591101
N(d2)	0,096644465	0,059856865
Prima Call	0,06416€	0,03726€

Tabla 8.4.17: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls en el escenario "Optimista" tercer caso

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.18 muestra si para segundo caso conseguimos obtener beneficio, como 12,71805€ es menor que 12,74690€ podemos afirmar que en este caso no conseguimos obtener beneficio para un diferencial entre los precios de ejercicio de 0,35€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,74690€	>	12,71805€

Tabla 8.4.18: Resultado de la estrategia de inversión "Optimista" tercer caso

Fuente: Elaboración propia.

Con un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra Calls seguimos sin obtener beneficio tendremos que seguir buscando el valor crítico. Ahora el intervalo donde se encuentre el valor crítico se reduce a ]0,35€, 0,50€].

Para el tercer caso hemos fijado el diferencial entre el precio de las opciones de compra en 0,38€, ahora el precio de precio de ejercicio de la primera opción de compra Call se sitúa en los 12,69€. Además, la prima de la Call  $C_1$  se sitúa en los 0,06711€.

CASO 3		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,69000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0,00	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,172302952	-1,449556616
d2	-1,278722631	-1,555976295
N(d1)	0,120537723	0,073591101
N(d2)	0,100497374	0,059856865
Prima Call	0,06711€	0,03726€

Tabla 8.4.19: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls en el escenario "Optimista" tercer caso

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.20 detalla si en el tercer caso conseguimos obtener beneficio, como 12,71805€ es menor que 12,71985€ podemos afirmar que en este caso no conseguimos obtener beneficios para un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra 0,38€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,71985€	>	12,71805€

Tabla 8.4.20: Resultado de la estrategia de inversión "Optimista" tercer caso

Fuente: Elaboración propia.

En este tercer caso tampoco conseguimos obtener beneficio tendremos que seguir buscando el valor crítico. El intervalo se va acotando situando, ahora, entre ]0,38€ , 0,50€].

En el cuarto caso hemos fijado el diferencial en 0,39€. Esto provoca que el precio de ejercicio de la primera Call varíe hasta situarse en los 12,68€, provocando un cambio en la prima de la opción que se fija en 0,06812€.

CASO 4		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,68000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,16489518	-1,449556616
d2	-1,271314859	-1,555976295
N(d1)	0,122030712	0,073591101
N(d2)	0,101808329	0,059856865
Prima Call	0,06812€	0,03726€

Tabla 8.4.21: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls en el escenario "Optimista" cuarto caso

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.22 muestra si en este caso, dentro del escenario optimista, conseguimos obtener beneficio, como 12,71805€ es mayor que 12,71086€ podemos afirmar que en este caso conseguimos obtener beneficio para un diferencial entre los precios de ejercicio de 0,38€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,71086€	<	12,71805€

Tabla 8.4.22: Resultado de la estrategia de inversión "Optimista" cuarto caso

Fuente: Elaboración propia.

En esta estrategia encontramos un valor crítico, es decir, encontramos un diferencial a partir del cual obtenemos beneficios. Este valor crítico se sitúa en 0,39€,

$$\text{Beneficios} = [0.39, +\infty[.$$

#### Escenario 4: Pesimista total

Para el cuarto escenario hemos fijado el precio de ejercicio de la segunda opción de compra  $K_2$  en 7,623€, que corresponde al valor más bajo que alcanzó la acción de Repsol S.A. durante el último año. Cuando nos referimos al último año hablamos del periodo comprendido entre el 01-08-2015 al 31-07-2016.

ESCENARIO 4 PESIMISTA TOTAL		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	7,12300€	7,62300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	4,254186785	3,616701232
d2	4,147767106	3,510281553
N(d1)	0,999989509	0,999850809
N(d2)	0,999983213	0,999776184
Prima Call	4,00514€	3,50646€

Tabla 8.4.23: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las opciones de compra Calls en el escenario "Pesimista total"

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.24 muestra si si para la estrategia de inversión "Pesimista Total" conseguimos obtener beneficio. Como 12,71805€ es mayor que 7,62169€ podemos afirmar que obtenemos beneficio para un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra Calls de 0,50€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
7,62169€	<	12,71805€

Tabla 8.4.24: Resultado de la estrategia de inversión "Pesimista total"

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, vamos a realizar un análisis de sensibilidad del diferencial entre el precio de ejercicio de las opciones de compra, con el fin de ver si conseguimos obtener beneficios en todos los casos o encontramos un valor crítico. Como el margen de beneficio es elevado vamos a reducir el diferencial hasta los 0,01€, es decir, vamos a analizar directamente el cuarto caso.

CASO 4		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	7,61300€	7,62300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	3,629036175	3,616701232
d2	3,522616496	3,510281553
N(d1)	0,999857759	0,999850809
N(d2)	0,999786345	0,999776184
Prima Call	3,51643€	3,50646€

Tabla 8.4.25: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls en el escenario "Pesimista total" cuarto caso

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.26 detalla si para el cuarto caso dentro de la estrategia de inversión "Pesimista Total" obtenemos beneficio. Como 12,71805€ es mayor que 7,62297€ podemos afirmar que obtenemos beneficio para un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra Calls de 0,01€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
7,62297€	<	12,71805€

Tabla 8.4.26: Resultado de la estrategia de inversión "Pesimista total" cuarto caso

Fuente: Elaboración propia.

Tras analizar la estrategia de inversión "Pesimista Total" podemos afirmar que obtendremos beneficios para todos los casos, ya que, reduciendo el diferencial en los precios de ejercicio de las dos opciones de compra, hasta alcanzar su valor más pequeño, lo 0,01€, seguimos obteniendo beneficios.

### Escenario 5: Optimista total

Para el último escenario hemos fijado el precio de ejercicio de la segunda opción de compra  $K_2$  en 14,323€, que corresponde al valor más elevado que alcanzó la acción de Repsol S.A. durante el último año. Cuando nos referimos al último año nos referimos al periodo que

comprende desde el 01-08-2015 al 31-07-2016.

ESCENARIO 5 OPTIMISTA TOTAL		
CALL BULL SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	13,82300€	14,32300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,975909864	-2,309802671
d2	-2,082329544	-2,41622235
N(d1)	0,024082493	0,010449541
N(d2)	0,01865619	0,007841241
Prima Call	0,01033€	0,00407€

Tabla 8.4.27: Aplicación de la fórmula de Black Scholes para obtener las primas de las Calls para la estrategia de inversión "Optimista total"

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 8.4.28 muestra si para la estrategia de inversión "Optimista Total" conseguimos obtener beneficios. Como 12,71805€ es menor que 13,82926€ podemos afirmar que en este escenario no obtenemos beneficios para un diferencial entre los precios de ejercicio de las opciones de compra Calls de 0,50€.

$K_1 + C_1 - C_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
13,82926€	>	12,71805€

Tabla 8.4.28: Resultado de la estrategia de inversión "Optimista total"

Fuente: Elaboración propia.

En este escenario no hace falta analizar el resto de diferenciales entres los precios de las opciones de compra, ya que si reducimos el diferencial  $K_1 + C_1 - C_2$  será mayor, y por lo tanto, se verán incrementadas las pérdidas al realizar esta estrategia de inversión.



# 9 Conclusiones Finales

La principal motivación del presente trabajo ha sido el estudio, desarrollo y aplicación de estrategias especulativas de tipo diferencial de precios (*Bull/Bear Spread*) con opciones de compra *Call* y de venta *Put*, con el fin de simular escenarios de inversión y ver en cuáles conseguimos obtener beneficios. Durante el presente trabajo siempre hemos asumido que el subyacente (acción de Repsol S.A.) sigue un Modelo Log-Normal cuya solución es el proceso estocástico Movimiento Browniano Geométrico (MBG).

Para poder aplicar estas estrategias especulativas de tipo diferencial de precios en los escenarios de inversión se ha revisado todos los aspectos teóricos fundamentales: aspectos teóricos de las opciones de compra y venta, solución de ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô aplicando el Lema de Itô, técnicas de estimación de parámetros a partir de los datos históricos (cotizaciones del subyacente), la introducción de la fórmula de Black-Scholes para poner precio a las opciones de compra *Call* y de venta *Put* de tipo europeo, formación de estrategias sintéticas de tipo diferencial de precios *Bull/Bear Spreads*. Tras explicar los fundamentos teóricos se han puesto en práctica, a través de las cotizaciones históricas de una acción (subyacente) de Repsol S.A con el único fin formar carteras de inversión de tipo diferencial de precios "Spreads" con proporcionen beneficios con una probabilidad prefijada.

Finalmente, se han creado cinco escenarios diferentes, que podrían ocurrir en el mundo real, para ver si conseguimos obtener beneficios y probar que este trabajo de investigación tiene aplicación en el mundo real.

El motivo de la elección del subyacente de Repsol S.A. ha sido porque la empresa es de las más importantes del IBEX-35, es decir, se trata de una de las empresas que más influyen en el valor del índice de referencia del mercado bursátil español (IBEX-35).

Para realizar este trabajo hemos tenido que ampliar los conocimientos adquiridos en el Máster de Dirección Financiera y Fiscal (MDFF). Las asignaturas que poseen una mayor relación con este Trabajo Final de Máster son: Modelización y Valoración de Opciones Financieras; Finanzas Cuantitativas; Banca y Operaciones Financieras; Mercados Financieros y Valoración de Empresas.

El Capítulo 1 actúa a modo de introducción de aspectos claves para entender la importancia de dicho trabajo en el mundo real. Se explica la importancia de los mercados financieros en la Economía a través de la teoría de los ciclos, las variables macroeconómicas y los índices bursátiles. El capítulo termina explicando la historia, estrategias y principales aspectos financieros de Repsol S.A.

El Capítulo 2 introduce de forma teórica las ideas esenciales sobre las opciones de compra *Call Options* y las opciones de venta *Put Options*. El capítulo se centra principalmente en analizar las funciones matemáticas definidas a trozos a vencimiento que este tipo de contratos financieros pueden ofrecer beneficios/pérdidas. El Capítulo 3 se detalla la información fundamental para crear estrategias de tipo diferencial de precios (*Bull/Bear Spreads*) combinando opciones de compra Call y de Venta Put.

En los Capítulos 4 y 5, se presenta y desarrolla el Modelo Estocástico Log-Normal, haciendo hincapié en todas las técnicas estocásticas necesarias para su estudio. Además, se explican las dos técnicas estadísticas utilizadas (método de los momentos y máxima verosimilitud) para estimar los parámetros necesarios para poner en práctica el Modelo Log-Normal en el presente trabajo. Por último, se detallan las medidas de Bondad del Ajuste para ver elegir las mejores estimaciones de los parámetros del modelo.

El Capítulo 6 es el último capítulo teórico de este trabajo, en él se introduce la fórmula de Black-Scholes. Es necesario comprender todos los conceptos, ya que permite dar valor (poner precio) a las opciones de compra y de venta de tipo europeo con las cuales se forma las estrategias inversoras analizadas en el trabajo, concretamente las Estrategias con Diferenciales de Precios (*Spreads*).

Por último, los Capitulo 7 y 8 ponen en práctica todas las ideas introducidas durante los capítulos anteriores. En el Capítulo 7 se estiman, por dos métodos diferentes, los parámetros del Modelo Log-Normal para valores reales de un histórico del activo Repsol S.A. Finalmente, el Capítulo 8 se consigue cumplir con el objetivo del presente trabajo que es determinar las primas y los precios de ejercicio de las opciones que forman las estrategias diferenciales de precios *Spreads* con el fin de obtener beneficios con una probabilidad prefijada. Para ver si este trabajo podía aplicarse al mundo real se han creado 5 escenarios de inversión, muy diferenciados, para ver en cuáles obteníamos beneficio. Las conclusiones que arrojan este análisis de escenarios pueden ser muy útiles a la hora de crear estrategias inversoras en el mercado real.



# Bibliografía

## Libros y Artículos

ALLEN, E. (2007). *Modelling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer. Series Mathematical Modelling: Theory and Applications). New York

BACHELIER, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Vol 3, pp 21-86.

BLACK, F. SCHOLES, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy 81.

BURGOS C., CORTÉS J., NAVARRO A. y RODRÍGUEZ G. (2017): *Estrategias especulativas con opciones financieras; Diferenciales de precios alcistas (Bull Spreads)*.

BURGOS C., CORTÉS J., NAVARRO A. y RODRÍGUEZ G. (2017): *Estrategias especulativas con opciones financieras; Diferenciales de precios bajistas (Bear Spreads)*.

HULL, J.C. (2002) *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Pearson Education, 4ª Edición.

ØKSENDAHL, B.K. (2003). *Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications*. Berlin, Springer.

SAMUELSON, P. (1965). *Rational theory of warrants prices*. Industrial Management Review.

STAMPFLI, JOSEPH (2002). *Matemáticas para las finanzas modelado y cobertura*. Thomson

International.

**Páginas web:**

Bolsa de Madrid [www.bolsademadrid.es](http://www.bolsademadrid.es) (fecha del último de acceso: 06/10/2017).

Expansión datos macro: <http://www.datosmacro.com/bono/espana?dr=2016-08> (fecha del último de acceso: 06/10/2017). Memoria anual de Repsol S.A año 2015; [https://www.repsol.energy/es/accionistas-inversores/informacion-economica-financiera/informe-anual/index.cshtml?\\_ga=2.77982484.1080169746.1511563485-1190232981.1511563485](https://www.repsol.energy/es/accionistas-inversores/informacion-economica-financiera/informe-anual/index.cshtml?_ga=2.77982484.1080169746.1511563485-1190232981.1511563485) (fecha del último de acceso: 06/10/2017).

Página web de Investing [www.investing.com](http://www.investing.com) (fecha del último de acceso: 06/10/2017).

Repsol S.A; [www.repsol.es](http://www.repsol.es) (fecha del último de acceso:).

# Anexo

### Put Bull Spread

A continuación, se muestran las tablas con los cálculos realizados para una estrategia de precios alcista constituida por opciones de venta *Put* (*Put Bull Spread*).

	$K_1$	$K_2$	Diferencial	$C_1$	$C_2$	Beneficios	V. CRITICO
<b>Promedio</b>	11,68333	12,18333	0,50	0,80258	1,17998	SI	-
<b>Caso 1</b>	11,93333	12,18333	0,25	0,98363	1,17998	SI	-
<b>Caso 2</b>	12,08333	12,18333	0,10	1,09976	1,17998	SI	-
<b>Caso 3</b>	12,13333	12,18333	0,05	1,13960	1,17998	SI	-
<b>Caso 4</b>	12,17333	12,18333	0,01	1,17186	1,17998	SI	-
<b>Pesimista</b>	10,39000	10,89000	0,50	0,17624	0,35275	SI	-
<b>Caso 1</b>	10,64000	10,89000	0,25	0,25430	0,35275	SI	-
<b>Caso 2</b>	10,79000	10,89000	0,10	0,31086	0,35275	SI	-
<b>Caso 3</b>	10,84000	10,89000	0,05	0,33138	0,35275	SI	-
<b>Caso 4</b>	10,88000	10,89000	0,01	0,34841	0,35275	SI	-
<b>Optimista</b>	12,57000	13,07000	0,50	1,50810	1,96397	SI	-
<b>Caso 1</b>	12,82000	13,07000	0,25	1,73248	1,96397	NO	-
<b>Caso 2</b>	12,72000	13,07000	0,35	1,64177	1,96397	NO	-
<b>Caso 3</b>	12,69000	13,07000	0,38	1,61479	1,96397	NO	-
<b>Caso 4</b>	12,68000	13,07000	0,39	1,60583	1,96397	SI	0,39
<b>Pesimista total</b>	7,12300	7,62300	0,50	0,00000	0,00004	SI	-
<b>Caso 1</b>	7,37300	7,62300	0,25	0,00001	0,00004	SI	-
<b>Caso 2</b>	7,52300	7,62300	0,10	0,00003	0,00004	SI	-
<b>Caso 3</b>	7,57300	7,62300	0,05	0,00003	0,00004	SI	-
<b>Caso 4</b>	7,61300	7,62300	0,01	0,00004	0,00004	SI	-
<b>Optimista total</b>	13,82300	14,32300	0,50	2,68813	3,18059	NO	-
<b>Caso 1</b>	14,07300	14,32300	0,25	2,93369	3,18059	NO	-
<b>Caso 2</b>	14,22300	14,32300	0,10	3,08170	3,18059	NO	-
<b>Caso 3</b>	14,27300	14,32300	0,05	3,13113	3,18059	NO	-
<b>Caso 4</b>	14,31300	14,32300	0,01	3,17070	3,18059	NO	-

ESCENARIO 1 FUNCIÓN PROMEDIO		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	11,68333€	12,18333€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,25900€	0,13768€
Prima Put	0,80258€	1,17998€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
11,80593€	<	12,71805€

CASO 1		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	11,93333€	12,18333€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,19069€	0,13768€
Prima Put	0,98363€	1,17998€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
11,98698€	<	12,71805€

CASO 4		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,17333€	12,18333€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,21284	0,21284
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,13953€	0,13768€
Prima Put	1,17186€	1,17998€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,17522€	<	12,71805€

ESCENARIO 2 PESIMISTA		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	10,39000€	10,89000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,92270€	0,60048€
Prima Put	0,17624€	0,35275€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
10,71349€	<	12,71805€

CASO 4		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	10,88000€	10,89000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,60612€	0,60048€
Prima Put	0,34841€	0,35275€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
10,88566€	<	12,71805€

ESCENARIO 3 OPTIMISTA		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,57000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,08012€	0,03726€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,61413€	<	12,71805€

CASO 1		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,82000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,05513€	0,03726€
Prima Put	1,73248€	1,96397€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,83851€	>	12,71805€

CASO 2		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,72000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,06416€	0,03726€
Prima Put	1,64177€	1,96397€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,7477€9	>	12,71805€

CASO 3		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,69000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,06711€	0,03726€
Prima Put	1,61479€	1,96397€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,72082€	>	12,71805€

CASO 4		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,68000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,06812€	0,03726€
Prima Put	1,60583€	1,96397€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,71185€	<	12,71805€

ESCENARIO 4 PESIMISTA TOTAL		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	7,12300€	7,62300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	4,00514€	3,50646€
Prima Put	0,00003€	0,00004€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
7,62296€	<	12,71805€

CASO 4		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	7,61300€	7,62300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	3,51643€	3,50646€
Prima Put	0,00004€	0,00004€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
7,62300€	<	12,71805€

ESCENARIO 5 OPTIMISTA TOTTAL		
PUT BULL SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
<b>Acción t=0</b>	11,11000€	11,11000€
<b>K</b>	13,82300€	14,32300€
<b>r</b>	1,02%	1,02%
<b><math>\sigma</math></b>	21,2839%	21,2839%
<b><math>\mu</math></b>	0,56336	0,56336
<b>t</b>	0	0
<b>T (años)</b>	0,25	0,25
<b>Prima Call</b>	0,01033€	0,00407€
<b>Prima Put</b>	2,68813€	3,18059€

$K_2 + P_1 - P_2$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
13,83053€	>	12,71805€

### Call Bear Spread

A continuación, se muestran las tablas con los cálculos realizados para una estrategia de precios bajistas constituida por opciones de compra Call (*Call Bear Spread*).

	K1	K2	Diferencial	Prima 1ª	Prima 2ª	Beneficios
<b>Promedio</b>	12,18333	12,68333	0,5	0,06778	0,13768	NO
<b>Caso 1</b>	13,43333	12,68333	0,75	0,04626	0,13768	NO
<b>Caso 2</b>	13,68333	12,68333	1,00	0,03102	0,13768	NO
<b>Pesimista</b>	11,39000	10,89000	0,5	0,36174	0,60048	NO
<b>Caso 1</b>	11,64000	10,89000	0,75	0,27257	0,60048	NO
<b>Caso 2</b>	11,89000	10,89000	1	0,20136	0,60048	NO
<b>Optimista</b>	13,57000	13,07000	0,5	0,01616	0,03726	SI
<b>Caso 1</b>	13,32000	13,07000	0,25	0,02475	0,03726	SI
<b>Caso 2</b>	13,17000	13,07000	0,1	0,03170	0,03726	SI
<b>Caso 3</b>	13,12000	13,07000	0,05	0,03667	0,03726	SI
<b>Caso 4</b>	13,08000	13,07000	0,01	0,03667	0,03726	SI
<b>Pesimista total</b>	8,12300	7,62300	0,5	3,00812	3,50646	NO
<b>Caso 1</b>	7,87300	7,62300	0,25	2,75948	3,50646	NO
<b>Caso 2</b>	7,72300	7,62300	0,1	2,51174	3,50646	NO
<b>Optimista total</b>	14,82300	14,32300	0,5	0,00151	0,00407	SI
<b>Caso 1</b>	14,57300	14,32300	0,25	0,00250	0,00407	SI
<b>Caso 2</b>	14,42300	14,32300	0,1	0,00335	0,00407	SI
<b>Caso 3</b>	14,37300	14,32300	0,05	0,00370	0,00407	SI
<b>Caso 4</b>	14,33300	14,32300	0,01	0,00399	0,00407	SI

ESCENARIO 1 PROMEDIO		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	12,68333€	12,18333€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,167365086	-0,789428426
d2	-1,273784766	-0,895848105
N(d1)	0,121531482	0,214930824
N(d2)	0,101369853	0,185166947
Prima Call	0,06778€	0,13768€

$K_2 + C_2 - C_1$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,25323€	<	12,71805€

CASO 2		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	13,18333€	12,18333€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,530687079	-0,789428426
d2	-1,637106758	-0,895848105
N(d1)	0,062923374	0,214930824
N(d2)	0,050804082	0,185166947
Prima Call	0,03102€	0,13768€

$K_2 + C_2 - C_1$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,28999€	<	12,71805€

ESCENARIO 2 PESIMISTA		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	11,39000€	10,89000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-0,156715373	0,265113003
d2	-0,263135053	0,158693324
N(d1)	0,437734585	0,604538795
N(d2)	0,396223244	0,563044751
Prima Call	0,36174€	0,60048€

$K_2 + C_2 - C_1$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
11.12874€	<	12,71805€

CASO 1		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	11,89000€	10,89000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-0,560418275	0,265113003
d2	-0,666837954	0,158693324
N(d1)	0,287597085	0,604538795
N(d2)	0,252437823	0,563044751
Prima Call	0,20136€	0,60048€

$K_2 + C_2 - C_1$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
11,28912€	<	12,71805€

ESCENARIO 3 OPTIMISTA		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	13,57000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,802329209	-1,449556616
d2	-1,908748888	-1,555976295
N(d1)	0,035746813	0,073591101
N(d2)	0,028147247	0,059856865
Prima Call	0,01616€	0,03726€

$K_2 + C_2 - C_1$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
13,0911€	>	12,71805€

CASO 1		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	13,08000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-1,456743429	-1,449556616
d2	-1,563163108	-1,555976295
N(d1)	0,072593608	0,073591101
N(d2)	0,059007117	0,059856865
Prima Call	0,03667€	0,03726€

$K_2 + C_2 - C_1$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
13,07059€	>	12,71805€

ESCENARIO 4 PESIMISTA TOTAL		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	8,12300€	7,62300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	3,019729398	3,616701232
d2	2,913309719	3,510281553
N(d1)	0,998734997	0,999850809
N(d2)	0,998211901	0,999776184
Prima Call	3,00812€	3,50646€

$K_2 + C_2 - C_1$	$> \text{ ó } <$	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
8,12134€	<	12,71805€

CASO 1		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	8,62300€	7,62300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	2,458428064	3,616701232
d2	2,352008385	3,510281553
N(d1)	0,993022663	0,999850809
N(d2)	0,990663823	0,999776184
Prima Call	2,51174€	3,50646€

$K_2 + C_2 - C_1$	$> \text{ ó } <$	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
8,61771€	<	12,71805€

ESCENARIO 5 OPTIMISTA TOTAL		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	14,82300€	14,32300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-2,632237318	-2,309802671
d2	-2,738656997	-2,41622235
N(d1)	0,004241229	0,010449541
N(d2)	0,003084535	0,007841241
Prima Call	0,00151€	0,00407€

$K_2 + C_2 - C_1$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
14,32556€	>	12,71805€

CASO 1		
CALL BEAR SPREAD	PRIMERA CALL	SEGUNDA CALL
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	14,33300€	14,32300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
d1	-2,316360989	-2,309802671
d2	-2,422780668	-2,41622235
N(d1)	0,010269283	0,010449541
N(d2)	0,007701111	0,007841241
Prima Call	0,00399€	0,00407€

$K_2 + C_2 - C_1$	> ó <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
14,32308€	>	12,71805€

### Put Bear Spread

A continuación, se muestran las tablas con los cálculos realizados para una estrategia de precios bajista constituida por opciones de venta *Put* (*Put Bear Spread*).

	K1	K2	Diferencial	Prima 1ª	Prima 2ª	Beneficios
<b>Promedio</b>	11,39000	10,89000	0,50	1,60881	1,17998	NO
<b>Caso 1</b>	13,43333	12,68333	0,75	1,83666	1,17998	NO
<b>Caso 2</b>	13,68333	12,68333	1,00	2,07078	1,17998	NO
<b>Pesimista</b>	11,39000	10,89000	0,50	0,61273	0,35275	NO
<b>Caso 1</b>	11,64000	10,89000	0,75	0,77293	0,35275	NO
<b>Caso 2</b>	11,89000	10,89000	1,00	0,95108	0,35275	NO
<b>Optimista</b>	13,57000	13,07000	0,50	2,44160	1,96397	SI
<b>Caso 1</b>	13,32000	13,07000	0,25	2,20082	1,96397	SI
<b>Caso 2</b>	13,17000	13,07000	0,10	2,05816	1,96397	SI
<b>Caso 3</b>	13,12000	13,07000	0,05	2,01097	1,96397	SI
<b>Caso 4</b>	13,08000	13,07000	0,01	1,97336	1,96397	SI
<b>Pesimista total</b>	8,12300	7,62300	0,50	0,00043	0,00004	NO
<b>Caso 1</b>	7,87300	7,62300	0,25	0,00115	0,00004	NO
<b>Caso 2</b>	7,72300	7,62300	0,10	0,00278	0,00004	NO
<b>Optimista total</b>	14,82300	14,32300	0,50	3,67676	3,18059	SI
<b>Caso 1</b>	14,57300	14,32300	0,25	3,42839	3,18059	SI
<b>Caso 2</b>	14,42300	14,32300	0,10	3,27962	3,18059	SI
<b>Caso 3</b>	14,37300	14,32300	0,05	3,23009	3,18059	SI
<b>Caso 4</b>	14,33300	14,32300	0,01	3,19049	3,18059	SI

ESCENARIO 1 PROMEDIO		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
<b>Acción t=0</b>	11,11000€	11,11000€
<b>K</b>	12,68333€	12,18333€
<b>r</b>	1,02%	1,02%
<b><math>\sigma</math></b>	21,2839%	21,2839%
<b><math>\mu</math></b>	0,56336	0,56336
<b>t</b>	0	0
<b>T (años)</b>	0,25	0,25
<b>Prima Call</b>	0,06778€	0,13768€
<b>Prima Put</b>	1,60881€	1,17998€

$K_1 + P_2 - P_1$	$> 0 <$	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
12,25450€	<	12,71805€

ESCENARIO 2 PESIMISTA		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	11,39000€	10,89000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,36174€	0,60048€
Prima Put	0,61273€	0,35275€

$K_1 + P_2 - P_1$	$> 0 <$	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
11,13002€	<	12,71805€

CASO 1		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	11,89000€	10,89000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,20136€	0,60048€
Prima Put	0,95108€	0,35275€

$K_1 + P_2 - P_1$	$> 0 <$	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
11,29167€	<	12,71805€

ESCENARIO 3 OPTIMISTA		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	13,57000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,01616€	0,03726€
Prima Put	2,44160€	1,96397€

$K_1 + P_2 - P_1$	> 0 <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
13,09237€	>	12,71805€

CASO 1		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	13,08000€	13,07000€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,03667€	0,03726€
Prima Put	1,97336€	1,96397€

$K_1 + P_2 - P_1$	> 0 <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
13,07062€	>	12,71805€

ESCENARIO 4 PESIMISTA TOTAL		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	8,12300€	7,62300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	3,00812€	3,50646€
Prima Put	0,00043€	0,00004€

$K_1 + P_2 - P_1$	> 0 <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
8,12261€	<	12,71805€

CASO 1		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	8,62300€	7,62300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	2,51174€	3,50646€
Prima Put	0,00278€	0,00004€

$K_1 + P_2 - P_1$	> 0 <	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
8,62026€	<	12,71805€

ESCENARIO 5 OPTIMISTA TOTAL		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	14,82300€	14,32300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,00151€	0,00407€
Prima Put	3,67676€	3,18059€

$K_1 + P_2 - P_1$	$> 0 <$	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
14,32683€	$>$	12,71805€

CASO 1		
PUT BEAR SPREAD	PRIMERA PUT	SEGUNDA PUT
Acción t=0	11,11000€	11,11000€
K	14,33300€	14,32300€
r	1,02%	1,02%
$\sigma$	21,2839%	21,2839%
$\mu$	0,56336	0,56336
t	0	0
T (años)	0,25	0,25
Prima Call	0,00399€	0,00407€
Prima Put	3,19049€	3,18059€

$K_1 + P_2 - P_1$	$> 0 <$	$s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$
14,32310€	$>$	12,71805€

