

Análisis implícito del flujo transitorio de agua con aire disuelto

Implicit analysis of the transient water flow with dissolved air

Twyman, J.

Twyman Ingenieros Consultores. Pasaje Dos No. 362, Rancagua, Región de O'Higgins, Chile. E-mail: john@twyman.cl.

Recibido: 17/08/2017

Aceptado: 08/01/2018

Publicado: 31/01/2018

Citar como: Twyman, J. 2018. Implicit analysis of the transient water flow with dissolved air. *Ingeniería del agua*, 22(1), 27-36. <https://doi.org/10.4995/la.2018.7949>

RESUMEN

Se aplica el método de diferencias finitas implícito (MDFI) para resolver el flujo transitorio en un sistema que transporta agua con aire disuelto utilizando una malla espacio-tiempo rectangular fija (o variable) definida por el método del paso de tiempo especificado. El contenido de aire en el fluido modifica tanto la velocidad de la onda como el número de Courant, lo cual hace inconveniente aplicar el Método de las Características (MC) tradicional y otros esquemas explícitos debido a su imposibilidad para simular los cambios en la magnitud, forma y frecuencia del tren de presiones. La conclusión es que el MDFI entrega una solución precisa y estable, con un buen nivel de ajuste respecto de un caso clásico reportado en la literatura, siendo una alternativa válida para la solución del transitorio en sistemas que transportan agua con aire disuelto.

Palabras clave | aire disuelto; golpe de ariete; método de Lax; método de McCormack; método de las características; método de diferencias finitas implícito.

ABSTRACT

The implicit finite-difference method (IFDM) for solving a system that transports water with dissolved air using a fixed (or variable) rectangular space-time mesh defined by the specified time step method is applied. The air content in the fluid modifies both the wave speed and the Courant number, which makes it inconvenient to apply the traditional Method of Characteristics (MOC) and other explicit schemes due to their impossibility to simulate the changes in magnitude, shape and frequency of the pressures train. The conclusion is that the IFDM delivers an accurate and stable solution, with a good adjustment level with respect to a classical case reported in the literature, being a valid alternative for the transient solution in systems that transport water with dissolved air.

Key words | *dissolved air; implicit finite-difference method; Lax's method; McCormack's method; method of characteristics; water hammer.*

INTRODUCCIÓN

El método de las características (MC) es el esquema más usado para la solución del flujo transitorio en redes de tuberías debido a sus propiedades numéricas: precisión, estabilidad, rapidez y facilidad para modelar distintas condiciones de borde (estanques, depósitos, válvulas, bombas, etc.). La principal desventaja del MC es que debe cumplir irrestrictamente con la condición de Courant (C_n) para garantizar la calidad y confiabilidad numérica de los resultados, lo cual restringe la forma de discretización de la malla espacio-tiempo, lo cual significa que la relación entre el paso de tiempo Δt , la subdivisión de los tramos Δx ($= L/N$, con L =longitud de la tubería y N =número de sub-tramos) y la velocidad de la onda (a) no puede ser escogida arbitrariamente, siendo necesario cumplir con la relación $\Delta t = \Delta x/a$ en todos los tramos del sistema. Es claro que en las redes de tuberías reales es imposible cumplir con Courant a partir de un Δt común porque los sistemas generalmente están compuestos por tuberías de diferentes dimensiones (longitudes, diámetros, espesores) y materiales constituyentes (acero, PVC, etc.). Por lo tanto, la aplicación del MC para solucionar el flujo transitorio en redes complejas supone aplicar un procedimiento de interpolación, generalmente en el eje espacial de la discretización, para determinar las variables de estado (Q = caudal, H = presión) en los nodos internos y de borde de cada tubería del sistema que tenga un $C_n < 1.0$. Sin embargo, la aplicación del proceso de interpolación implica la aparición de atenuaciones numéricas en los resultados (Goldberg y Wylie, 1983). Otro camino que evita la interpolación es ajustar la velocidad de la onda ($\pm 15\%$) en aquellas tuberías donde $C_n < 1.0$ hasta cumplir con $\Delta t = \Delta x/a$, aún cuando este proceder supone un riesgo en el sentido que podría significar adoptar valores físicos inconsistentes o directamente irreales (Twyman, 2016b). El MC es aplicable en casi cualquier tipo de sistema, aún cuando se ha demostrado que puede dejar de funcionar en sistemas extremadamente sencillos, siendo indispensable contar con métodos de solución alternativos (Twyman, 2016c). Por otro lado, el MC tradicional tampoco funciona correctamente en sistemas que transportan agua con aire disuelto, ya que la modelación del flujo bifásico significa alterar el valor de a , de la discretización inicialmente adoptada y de C_n , lo cual significa caer en la problemática de las interpolaciones, atenuación numérica y/o del ajuste de a explicados anteriormente. Es bien sabido lo difícil que es conocer a priori la masa de aire disuelta (m) en un sistema, ya que su cantidad depende del tipo de sistema analizado. Por ejemplo, en el caso de una impulsión se sabe que el tamaño de m depende del nivel de agua que exista en la aspiración de la bomba. Además, la presencia de aire puede variar de una sección a otra (Jönsson, 1985), lo cual tiende a complicar aún más el problema.

El objetivo del presente artículo es demostrar la aplicabilidad del MDFI, conocido también como método de Preissmann o esquema de la caja, para resolver el transitorio en flujos con aire disuelto en un sistema discretizado según una malla espacio-tiempo rectangular fija o variable, esto en contraposición a otro tipo de esquemas de 1er. o 2do. orden, como el MC tradicional, los métodos de McCormack y de Lax, o el MC de malla espacio-tiempo escalonada (*staggered grid*), el cual, pese a ser estable, preciso y más rápido en términos relativos, es difícil de manejar porque el analista debe lidiar con diferentes volúmenes de control para las distintas variables, con pseudo-variables de estado en los nodos de borde de la tubería, y con un esquema de discretización de la malla espacio-tiempo que puede ser difícil de programar (Sepehran y Badri, 2012).

Un aspecto de la modelación transitoria en los sistemas que transportan agua con aire disuelto se relaciona con el cálculo de la velocidad de la onda, la cual pasa a depender, aparte de los parámetros clásicos (diámetro, espesor, tipo de apoyo de las tuberías, etc.), de otros parámetros tales como: la constante de los gases, la cantidad de aire disuelto en el agua, la presión, etc., tópicos que serán abordados brevemente a continuación.

MATERIAL Y MÉTODOS

La velocidad de la onda de presión constituye un parámetro importante en el estudio del flujo transitorio, y depende tanto de las propiedades de la tubería (diámetro, espesor, material, condiciones de apoyo) como de las propiedades del agua (densidad, cantidad de aire disuelto, etc.) (Wang y Sanada, 2002; García *et al.*, 2008). En un sistema que transporta agua sin aire disuelto es válido suponer que la magnitud de la velocidad de la onda se mantiene constante. Sin embargo, la existencia de aire disuelto en el agua puede complicar el análisis debido a que ahora el valor de la velocidad de la onda pasa a depender tanto del tiempo como de la presión, lo cual se manifiesta en una reducción en su valor (Padmanabhan, 1976; Wylie y Streeter, 1978; Chaudhry, 1979; García *et al.*, 2008; Lee *et al.*, 2008; Kela y Vähäoja, 2009). Es bien sabido que basta una pequeña cantidad de aire disuelto en el

agua para afectar sensiblemente el comportamiento de las ondas de presión debido a que éstas ya no se transmiten directamente de una partícula a la siguiente (Wylie y Streeter, 1978). Este punto es relevante porque si en el diseño de los conductos y estructuras adyacentes no se reduce la magnitud de la velocidad de la onda teniendo en cuenta la presencia de aire, los cambios de presión previstos serán demasiado grandes, pudiendo dar lugar a estructuras sobredimensionadas y demasiado costosas (Padmanabhan, 1976).

Una fórmula válida para el cálculo de la velocidad de la onda en sistemas que transportan agua con aire disuelto es aquella planteada por Wylie y Streeter (1978), Chaudhry y Yevjevich (1981) y por Svindland (2005), esto debido a que, a diferencia de otras formulaciones, toma en cuenta algunas propiedades del aire como la constante de los gases (R) y su temperatura (T):

$$a_m^2 = a^2 \cdot \left[1 + \frac{F \cdot m}{P_{\max}^2} \right]^{-1} \quad (1)$$

Donde:

$$a^2 = (K_l / \rho_l) \cdot \left[1 + \frac{K_l}{E} \cdot \frac{D}{e} \cdot \psi \right]^{-1} \quad (2)$$

$$F = (R \cdot T \cdot K_{\text{aire}}) \cdot \left[1 + \frac{K_l}{E} \cdot \frac{D}{e} \right]^{-1/2} \quad (3)$$

Con:

- a_m = velocidad de la onda en m/s (agua con aire disuelto).
- a = velocidad de la onda en m/s (agua sin aire disuelto).
- m = masa de aire (kg/m^3).
- P = presión absoluta = $9806 \times [P_{\text{rel}} + H_{\text{atm}}]$ (kg/ms^2), con P_{rel} = presión relativa y H_{atm} = presión atmosférica.
- K_l = módulo de compresibilidad del fluido = 2.07×10^9 (kg/ms^2).
- ρ_l = densidad del agua = 1000 (kg/m^3).
- E = módulo de elasticidad del material constituyente de la tubería (kg/ms^2).
- D = diámetro interno de la tubería (m).
- e = espesor de la pared de la tubería (m).
- ψ = factor relacionado con la condición de apoyo de la tubería.
- R = constante de los gases = 287 [Joule / ($\text{kg} \cdot \text{K}$)].
- T = temperatura absoluta = 293 (K), con K = grados Kelvin.
- K_{aire} = módulo de compresibilidad del aire (kg/ms^2), el cual, para efectos prácticos, se supondrá con un valor similar al de K_l (Svindland, 2005).

La ecuación (1) considera la variable P_{\max}^2 igual al valor máximo de P al cuadrado, esto en orden a obtener una solución más conservadora en cada Δt , y también toma en cuenta algunos supuestos tales como (Chaudhry, 1979; García *et al.*, 2008):

- El flujo es unidimensional.
- La mezcla agua-aire es homogénea, es decir, las burbujas de gas están uniformemente distribuidas en el líquido.
- Las burbujas de gas siguen una ley isotérmica.
- La presión dentro de las burbujas es independiente de la tensión superficial y de la presión de vapor.

Existe un amplio abanico de métodos de solución del flujo transitorio en redes de tuberías, destacando por sus propiedades numéricas el MDFI, el cual ha sido ampliamente utilizado para resolver matrices con forma de bandas desde principios de los años 1960s. Puede trabajar en mallas con espaciamiento variable donde las ondas con frentes pronunciados pueden ser apropiadamente simuladas al variar sus factores de ponderación (FP), eliminando con ello el impacto de las oscilaciones espurias (Canelón, 2003). Su mayor estabilidad numérica le permite funcionar independientemente del valor que tenga C_n . Sin embargo, pese a estas ventajas su popularidad ha sido limitada debido a que es un esquema relativamente complejo de programar porque, en su versión tradicional, requiere construir y resolver un sistema de ecuaciones en cada Δt que englobe todo el sistema, considerando la forma de la red (conectividad), tuberías y condiciones de borde. En este artículo se aplicará una formulación mejorada que reduce la complejidad del MDFI tradicional al trabajar con ecuaciones de compatibilidad que permiten desacoplar la red en sus nodos de borde y resolver cada tramo según el MDFI (u otro esquema) en cada paso de tiempo, facilitando el manejo de las condiciones de borde y reduciendo el tamaño del sistema de ecuaciones a un valor proporcional a la cantidad de sub-tramos que tenga cada tubería (Twyman, 2017b). El flujo transitorio en un sistema que transporta agua con aire disuelto será abordado según el MDFI de acuerdo a las fórmulas mostradas en Twyman (2017b), modificando solamente la forma de cálculo de a , la cual deberá atenerse a lo mostrado en las ecuaciones (1) a (3) del presente artículo. Más detalles sobre el flujo transitorio en redes de tuberías y métodos de solución pueden hallarse en los textos de Wylie y Streeter (1978), Chaudhry (1979), Watters (1984) y Twyman (2017a), y en los artículos recientemente publicados por Twyman (2016a,b, 2017b, 2018), por lo que se omitirá entregar más detalles aquí.

RESULTADOS

El sistema analizado está incluido en Bergant *et al.* (2008) y consiste en una tubería de cobre ($E=1.55 \times 10^8 \text{ kg/ms}^2$, ν =módulo de Poisson=0.36) inclinada 5.45% hacia arriba que conecta dos depósitos presurizados (Figura 1), con $L=37.23 \text{ (m)}$, $D=0.0221 \text{ (m)}$ y espesor $e=0.0016 \text{ (m)}$. El valor del factor de fricción es $f=0.04$ (constante). La tubería está apoyada de forma tal que está impedida de moverse en dirección longitudinal. El flujo transitorio es generado por el cierre rápido de la válvula en $T_c=0.009 \text{ (s)}$. La velocidad inicial del flujo (V_0) es igual a 0.2 (m/s) . Se supone que la viscosidad cinemática del agua $\nu=1.01 \times 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$, y que la situación analizada corresponde a un flujo turbulento *inicial* (pre-transitorio) con un número de Reynolds (Re) reducido igual a 4376. La relación $\varepsilon/D=1 \times 10^{-4}$, siendo ε =rugosidad relativa de la tubería. La cota piezométrica (H_p) en el depósito No. 2 es igual a 32 (m).

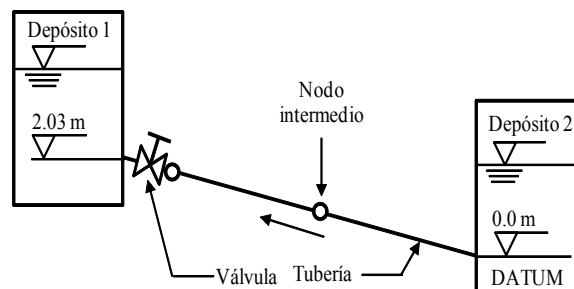


Figura 1 | Esquema de la red ejemplo (adaptado de Bergant *et al.*, 2008).

Además, a (inicial)=1319 (m/s), N =cantidad de subtramos de la discretización=16 y Δt =paso de tiempo computacional (inicial)=0.0017627 (s), siendo C_n = número de Courant (inicial)= $a \cdot \Delta t / (L/N) = 1319 \times 0.0017627 / (37.23/16) = 1.0$. Se supondrá que la masa de aire disuelto se distribuye en cada una de las secciones de la tubería, y que en todo momento la presión en el sistema será mayor que la presión de vapor, lo cual evitará la aparición de bolsas de aire y la subsecuente separación de la columna de agua. La elevación en el nodo intermedio y en la válvula se supone igual a 1.015 (m) y 2.030 (m), respectivamente. El MDFI será aplicado con $m=0.0027 \text{ (kg/m}^3)$ y $FP=0.57$, y sus resultados serán comparados con el MC (cuando $m=0 \text{ kg/m}^3$ y $m=0.0027 \text{ kg/m}^3$) en orden a visualizar el efecto que tiene la presencia (o no) de aire disuelto sobre la solución. En este caso no se incluye el resultado entregado por el MDFI ($m=0 \text{ kg/m}^3$) debido a que coincide exactamente con el resultado entregado por el MC ($m=0 \text{ kg/m}^3$).

Las Figuras 2 y 3 comparan las curvas de presión vs. tiempo en el nodo intermedio de la tubería y en el nodo donde se ubica la válvula, donde se aprecia que el MC ($m = 0.0027 \text{ kg/m}^3$) presenta una atenuación mayor en relación al MDFI ($m = 0.0027 \text{ kg/m}^3$), siendo que este último registra un mejor nivel de ajuste al resultado entregado por la literatura (Bergant *et al.*, 2008). El resultado insatisfactorio del MC se debe a que el flujo con aire disuelto hace disminuir la magnitud original de a , haciendo por tanto que C_n disminuya del valor inicial 1.00 a 0.55, con el consiguiente impacto en la magnitud y frecuencia de las presiones debido al efecto de interpolación. Esto es indicador de que el MC tradicional es inadecuado para modelar el transitorio en sistemas que transportan agua con aire disuelto.

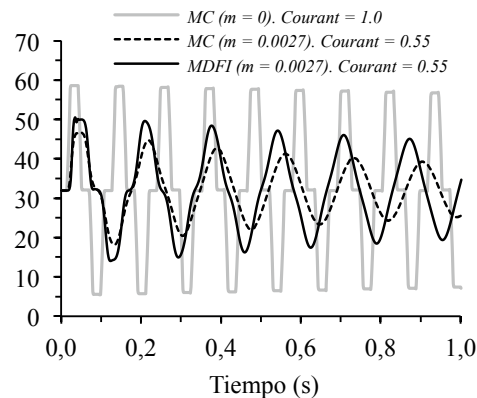


Figura 2 | Presión en el nodo intermedio (m en kg/m^3). MDFI aplicado con $\text{FP}=0.57$.

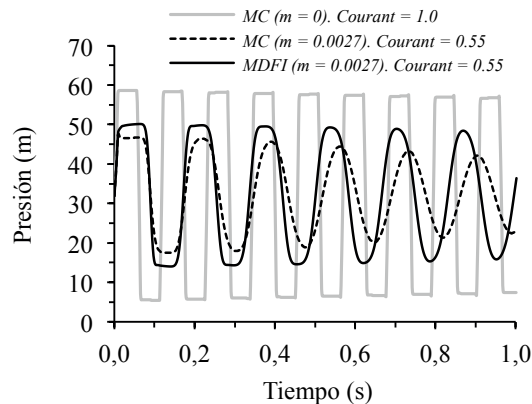


Figura 3 | Presión en la válvula (m en kg/m^3). MDFI aplicado con $\text{FP}=0.57$.

En cambio, el MDFI pudo funcionar sin problemas frente a la disminución de la velocidad de la onda debido al contenido de aire en el fluido, sin que su desempeño numérico se haya visto afectado por la disminución del valor de C_n . El MDFI aporta varias ventajas respecto del MC: mayor estabilidad y precisión cuando C_n es distinto de 1.0, con similar nivel de rapidez al permitir incrementos del paso de tiempo por sobre el valor óptimo. Además, puede mantener sus condiciones de estabilidad y relativa precisión sin necesidad de tener que modificar a para cumplir con Courant. Por ejemplo, la Figura 4 muestra lo que sucede en la válvula cuando se modela el transitorio en la red ejemplo aplicando el MDFI con un paso de tiempo entre 3.9 y 5.7 veces mayor que el valor óptimo, es decir, con $\Delta t = 0.007 \text{ s}$ ($C_n = 2.20$) y $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ ($C_n = 3.12$), respectivamente. En este caso se supone que el valor exacto está dado por el MDFI aplicado con $m = 0.0027 \text{ (kg/m}^3)$. La Figura 4 muestra que el MDFI genera un primer pico de presión con un buen nivel de ajuste respecto de la solución exacta, siendo los valores $+50.1 \text{ m}$ (exacto) en $t = 0.06 \text{ (s)}$, y $+50.1 \text{ m}$ (MDFI) en $t = 0.05 \text{ (s)}$. Las siguientes presiones extremas entregadas por el MDFI son levemente más conservadoras, para luego ajustarse a la solución exacta transcurridos 0.8 (s) del tiempo de simulación. Es del caso indicar que el MC se mostró inestable siempre que $C_n > 1.0$, registrando un efecto ficticio de separación de la columna de agua. Otra ventaja del MDFI es que puede ser tan rápido como el MC porque el incremento de Δt al valor 0.007 (s) permitió reducir significativamente el tiempo de ejecución del programa a aproximadamente 1.0 (s) .

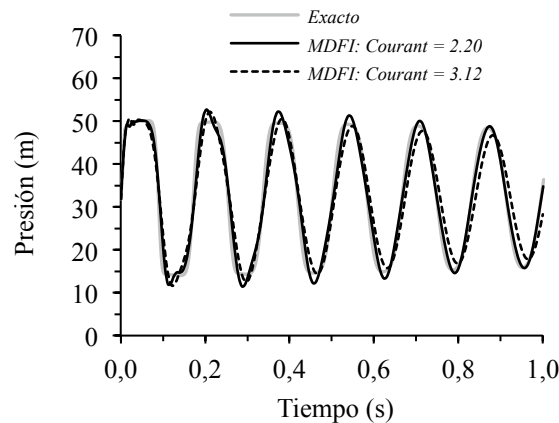


Figura 4 | Presión en la válvula según el MDFI (FP=0.60 cuando Courant=2.20, FP=0.65 cuando Courant=3.12).

En general, el MDFI acepta mayores incrementos de Δt reflejando fielmente el valor de la primera onda de presión, y puede mostrar atenuaciones crecientes en las presiones extremas pasados 0.8 (s) del tiempo de simulación (ver Figura 4), siendo necesario seguir ajustando los FP a medida que sigue incrementándose el valor de C_n . Cabe mencionar que todos los ejemplos fueron corridos en un PC estándar de 32 bits con velocidad de procesamiento de 1.66 (GHz).

Comparación con otros esquemas numéricos

Al analizar la red ejemplo resolviendo el flujo transitorio mediante los métodos de McCormack (2do. orden) y difusivo (1er. orden), también conocido como método de Lax (más detalles en Twyman, 2017b), y comparar los resultados con el resultado exacto obtenido según el MDFI en la válvula cuando $m = 0.0027$ (kg/m³) y FP = 0.57, se observa que McCormack predice casi exactamente la evolución de la presión hasta antes de 0.1 (s) de tiempo de simulación, para luego mostrar las típicas oscilaciones numéricas que aparecen cuando se modelan transientes muy rápidos usando esquemas de 2do. orden. Como McCormack no dispone de factores de ponderación (como en el MDFI) cuyo ajuste le permita gestionar las oscilaciones espurias, la única forma de atenuarlas o eliminarlas es mediante la aplicación de filtros numéricos o viscosidades artificiales, cuyos valores óptimos requieren aplicar un procedimiento iterativo de prueba y error (Twyman, 2017a).

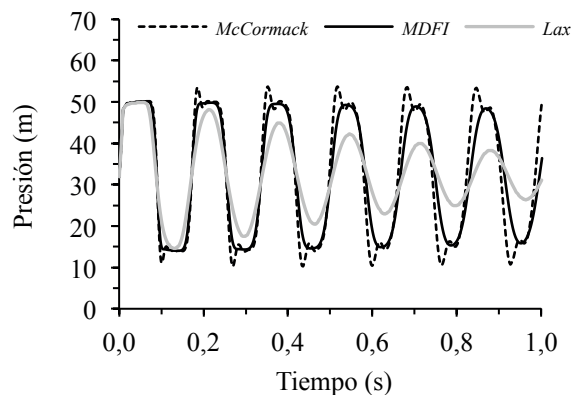


Figura 5 | Presión en la válvula ($m = 0.0027$ kg/m³). MDFI aplicado con FP = 0.57. Courant = 0.55.

Por otro lado, el método de Lax tuvo un desempeño aceptable hasta antes de 0.1 (s) de tiempo de simulación, para luego registrar las típicas atenuaciones numéricas que aparecen cuando se aplican esquemas explícitos de 1er. orden en sistemas donde $C_n < 1.0$. Ambos esquemas mostraron inestabilidad numérica cuando fueron aplicados con $C_n > 1.0$, lo cual es esperable tratándose de esquemas explícitos.

Δx variable

Otro aspecto interesante del MDFI es que permite resolver el flujo transitorio usando valores de Δx variables, es decir, distintos de L/N . La variabilidad de Δx puede conseguirse discretizando la tubería a partir de Δt , redefiniendo la longitud de los sub-tramos próximos a los nodos de borde (aguas arriba y aguas abajo) usando $\Delta x = a \cdot \Delta t$, asegurando con esto que el cálculo de las variables de estado en los nodos de borde sea siempre con $C_n = 1.0$. Los restantes sub-tramos interiores son discretizados usando la relación $\Delta x^* = L - 2 \cdot \Delta x / (N - 2)$, donde C_n puede ser mayor o menor que 1.0 dependiendo de la relación que exista entre Δx y Δt . Esta forma de discretizar el tramo no representa complicación alguna para el MDFI al momento de construir el sistema de ecuaciones necesario para determinar Q y H en cada nodo de la red en cada paso de tiempo (más detalles de la forma y aplicación del sistema de ecuaciones en Twyman, 2017b, c, 2018). La Figura 6 muestra el resultado entregado por MDFI para la válvula cuando $m = 0.0027$ (kg/m³) y $\Delta x = L/N = 37.23/16 = 2.327$ (m) y $\Delta x \neq L/N$, con $\Delta x = a \cdot \Delta t = 726.7 \times 0.021 = 15.3$ (m) en los dos sub-tramos de borde, y $\Delta x^* = 37.23 - 2 \times 15.3 / (16 - 2) = 0.474$ (m) en los restantes 14 sub-tramos interiores.

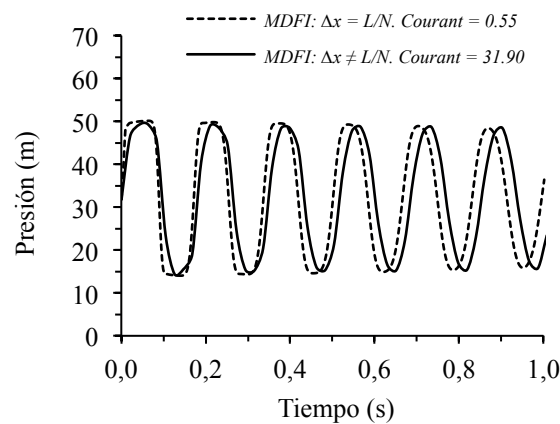


Figura 6 | Presión en la válvula según el MDFI (FP = 0.59). $m = 0.0027$ (kg/m³).

El resultado entregado por la discretización flexible es bastante aceptable respecto del resultado obtenido con $\Delta x = L/N$, con un leve corrimiento de la onda de presión que se manifiesta pasados 0.5 (s) del tiempo de simulación. En este caso hubo que ajustar los FP a 0.59 para eliminar las oscilaciones espurias (aunque leves) que aparecieron en los primeros instantes de la simulación. Otra ventaja de este tipo de discretización flexible es que permite incrementos de C_n importantes, igual a 31.90 en este caso, cuando $\Delta x^* < 0.5$ (m), con resultados cercanos al valor exacto y casi nula atenuación numérica. Este mejor desempeño del MDFI puede ser muy útil y ventajoso para analizar en forma rápida y preliminar las presiones extremas generadas por un transitorio antes de profundizar el análisis mediante un estudio más exhaustivo. El tiempo de ejecución del MDFI con discretización variable fue de 0.33 (s), siendo por tanto la opción más rápida de todas. Las desventajas de la discretización flexible son que obligatoriamente el N del tramo debe ser mayor o igual a 3, y que la forma que adopta la discretización impide hacer comparaciones de los valores de las variables de estado en los nodos internos de las tuberías debido a que su posición varía respecto del caso donde $\Delta x = L/N$. Por último, en el ejemplo probado se verifica que el MC, McCormack y Lax no funcionan cuando $\Delta x \neq L/N$.

DISCUSIÓN

Se verifica que, para el caso de simulación del transitorio en una tubería que transporta agua con aire disuelto ($m = 0.0027$ kg/m³), el MDFI obtuvo mejores resultados en comparación con el MC, McCormack y Lax, mostrando un buen nivel de ajuste con los resultados del ejemplo clásico presentado por Bergant *et al.* (2008). El MDFI, pese a ser aplicado en una malla rectangular (fija: $\Delta x = L/N$ o variable: $\Delta x \neq L/N$) discretizada usando el método del paso de tiempo especificado, y usando una velocidad de onda variable (ecuación 1), pudo mantener su estabilidad y precisión numérica, situación que el MC, McCormack y Lax no pudieron replicar, mostrando siempre soluciones erróneas.

Esta mayor robustez del MDFI se explica por varias razones: al adoptar la discretización fija, sólo debe interpolar en las secciones próximas a los nodos de borde; en la opción con discretización variable, no requiere interpolar para determinar Q y H en cada Δt . Ambas opciones (discretización fija y variable) reducen al mínimo o eliminan el efecto atenuador del MC en las secciones de borde de la tubería cuando $C_n < 1.0$, mejorando significativamente la estabilidad y precisión del MDFI. Además, la formulación del MDFI en base a diferencias finitas permite atenuar el efecto de inestabilidad no-lineal asociado a la velocidad de la onda, tal como es reconocido por Chaudhry (1979). El MDFI, a diferencia de otros métodos usualmente usados para resolver el transitorio en tuberías que transportan agua con aire disuelto, como el MC de malla escalonada (staggered grid), puede trabajar con cualquier valor razonable de N (par o impar) e incluso con un C_n distinto de 1.0, lo cual puede significar la adopción de un paso de tiempo distinto al originalmente planteado, sin que esto signifique un desmedro significativo en sus propiedades numéricas, tal como ha sido reconocido por Salgado *et al.* (1993) y Kim (2008). La mayor estabilidad del MDFI puede constituir una ventaja relevante cuando se busca resolver el problema de distribución de agua con aire disuelto en redes más grandes e intrincadas, compuestas por tuberías distintas en cuanto a sus dimensiones geométricas y materiales constituyentes, donde puede tornarse imposible cumplir con Courant sin antes modificar algunos parámetros iniciales como a o L .

De las Figuras 2 y 3 se puede inferir que la presencia de aire en el agua afecta la magnitud, frecuencia y forma del tren de ondas transitorias, por lo que al aumentar el valor de m disminuyen las presiones extremas junto con la frecuencia de las mismas (ver Tabla 1) en comparación con la solución clásica (MC con $m = 0 \text{ kg/m}^3$). Se observa en la Tabla 1 que la presión máxima, tanto en el nodo intermedio como en la válvula, disminuye aproximadamente un 14% cuando m pasa de 0 (kg/m^3) a 0.0027 (kg/m^3). En el caso de la presión mínima, las diferencias en uno y otro caso bordean el 158%. Analizando las Figuras 2 y 3 se corrobora que la frecuencia de las ondas disminuye, pasando de 9 (hercios/s) cuando $m = 0 \text{ (kg/m}^3)$ a 6 (hercios/s) cuando $m = 0.0027 \text{ (kg/m}^3)$, en ambos casos considerando un tiempo de simulación de 1 (s).

Tabla 1 | Presiones extremas según el MC y el MDFI. Presiones máximas (P. Máx.) y mínimas (P. Mín.) en metros. Masa m en (kg/m^3).

Ubicación	$m=0$ (MC)		$m=0.0027$ (MDFI)	
	P. Máx.	P. Mín.	P. Máx.	P. Mín.
Nodo intermedio	58.7	5.5	50.5	14.1
Válvula	58.7	5.4	50.1	14.0

Dentro de ese rango de m , las ondas tienden a suavizarse a medida que disminuye la frecuencia. En este tipo de simulación se pudo verificar la importancia que adquieren los FP al momento de tener que estabilizar al MDFI. Por ejemplo, en los casos donde fue aplicado con $m > 0$ y $\text{FP} = 0.50$, el MDFI mostró un comportamiento similar al del MC, en el sentido que tendía a fallar o mostrar inestabilidad, llevando a un resultado ficticio de separación de la columna de agua. Se realizaron procedimientos iterativos de prueba y error para determinar el valor óptimo de los FP y así eliminar las oscilaciones espurias (no-físicas) típicas del MDFI cuando es utilizado para modelar flujos transitorios muy rápidos, siendo el valor escogido $\text{FP} = 0.57$ ($C_n = 1.0$) y $\text{FP} = 0.59, 0.60$ y 0.65 ($C_n > 1.0$), sin que esto haya representado un aumento en el uso de memoria computacional o un incremento del tiempo de ejecución del programa. La tarea de ejecutar el programa computacional tantas veces como sea necesario en orden a hallar el valor óptimo de los FP constituye la principal desventaja del MDFI, ya que el procedimiento de prueba y error demora más o menos tiempo dependiendo de las características de cada problema. No existen valores de FP que sean universalmente aplicables, y cada caso debe ser tratado separadamente.

En el ejemplo analizado el MDFI necesitó construir y resolver un sistema de ecuaciones de tamaño 16 ($N+2$) en cada Δt , conformado por dos ecuaciones por cada subtramo de la discretización más dos ecuaciones adicionales correspondientes a las condiciones de borde aguas arriba y aguas abajo del sistema, siendo resuelto mediante el algoritmo de Thomas o algoritmo de la matriz tri-diagonal (Salih, 2010; Ginestar, 2016; Twyman, 2017a,b,c).

CONCLUSIONES

Se muestra la aplicabilidad del MDFI para resolver el transitorio de un sistema que transporta un flujo con aire disuelto utilizando una malla espacio-tiempo rectangular (fija o variable) discretizada según el método del paso de tiempo especificado. La mayor fortaleza numérica del MDFI permite calcular las presiones a partir de la magnitud de a calculada según distintos valores de m , en este caso con valores extremos de 0 y 0.0027 (kg/m³), sin mostrar señales de inestabilidad o atenuación numérica una vez determinados los valores más adecuados para los FP. Basta una pequeña porción de aire disuelto en el agua para afectar en forma significativa la magnitud, frecuencia y forma del tren de ondas transitorias, reduciendo el nivel de impacto respecto de la solución clásica. Esto podría significar que, en el mundo real, el sistema podría estar menos solicitado de lo pensado, ya que el fenómeno tiende a reducir la magnitud de las presiones y su frecuencia, esto obviando otros problemas asociados al transporte o distribución de agua con aire disuelto, como la corrosión en tuberías metálicas que podría adelgazar la pared de la tubería dejándola susceptible a daños con sobrepresiones de baja magnitud relativa. Con esto la correcta modelación del flujo de agua con aire disuelto adquiere una importancia significativa toda vez que permitiría reducir el tamaño de los artefactos mitigadores de ondas (cámaras hidroneumáticas, estanques unidireccionales, chimeneas de equilibrio, etc.), ayudando incluso a mejorar o perfeccionar las actividades operacionales en las redes existentes, como el cierre de válvulas importantes, todo lo cual significaría una mayor eficiencia y por tanto, un ahorro en los costes asociados a daños o fallas en la infraestructura.

Como trabajo futuro se recomienda resolver el ejemplo analizado utilizando otros esquemas de 2do. orden, como el esquema tipo-Godunov (en volúmenes finitos) planteado por León *et al.* (2007), lo cual permitiría reducir el tiempo de ejecución, manteniendo el nivel de precisión numérica y la concordancia con el fenómeno físico.

REFERENCIAS

- Bergant, A., Tijsseling, A.S., Vítkovský, J., Covas, D.I.C. 2008. Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing - part 2: case studies. *Journal of Hydraulic Research*, 46(3), 382-391. <https://doi.org/10.3826/jhr.2008.2847>
- Canelón, D. 2003. Análisis de estabilidad numérica del esquema implícito de los cuatro puntos basado en diferencias finitas. *Geoenseñanza*, 8(2), 105-113.
- Chaudhry, M.H. 1979. *Applied hydraulic transients*. NY, USA: Van Nostrand Reinhold Co.
- Chaudhry, M.H., Yevjevich, V. 1981. Closed-conduit flow. *Water Resources Publications*, Colorado, USA, 255-278.
- García, E., Osorio, J., Cortes, M. 2008. Modelamiento matemático de flujo bifásico: efecto de la velocidad de la onda de presión sobre la magnitud y distribución de presiones. *Dyna*, 75(154), 47-58.
- Ginestar, D. 2016. Métodos directos. Departamento de Matemática Aplicada (Curso 2016-2017), Universidad Politécnica de Valencia (UPV), 58.
- Goldberg, D.E., Wylie, E.B. 1983. Characteristics Method using Time-Line Interpolations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(5), 670-683. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1983\)109:5\(670\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1983)109:5(670))
- Jönsson, L. 1985. Maximum transient pressures in a conduit with check valve and air entrainment. *Proceedings of the International Conference on the Hydraulics of Pumping Stations*. British Hydromechanics Research Association, Manchester, 55-76.
- Kela, L., Vähöja, P. 2009. Measuring pressure wave velocity in a hydraulic system. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 3(1), 67-73.
- Kim, Y.I. 2008. *Advanced numerical and experimental transient modeling of water and gas pipeline flows incorporating distributed and local effects*. Ph.D. thesis, School of Civil, Environmental and Mining Engineering, The University of Adelaide, Australia.
- Lee, T.S., Low, H.T., Nguyen, D.T. 2008. Effects of air entrainment on fluid transients in pumping systems. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 1(1), 55-61.

- León, A., Ghidaoui, M.S., Schmidt, A.R., García, M.H. 2007. An efficient finite-volume scheme for modeling water hammer flows. *Journal of Water Management Modeling*, R227-21. <https://doi.org/10.14796/JWMM.R227-21>
- Padmanabhan, M. 1976. *Wave propagation through flowing gas-liquid mixtures in long pipelines*. Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, USA.
- Salgado, R., Zenteno, J., Twyman, C., Twyman, J. 1993. A hybrid characteristics-finite difference method for unsteady flow in pipe networks. *International Conference on Integrated Computer Applications for Water Supply and Distribution*, September 7-8, De Montfort University, Leicester, U.K., 139-149.
- Salih, A. 2010. *Tridiagonal matrix algorithm*. Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram. <https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/tdma.pdf>
- Sepehran, M., Badri, M. 2012. Water hammer simulation by implicit finite difference scheme using non-symmetrical staggered grid. *The 9th WSEAS Int. Conf. on Fluid Mechanics 12*, Harvard, Cambridge, USA.
- Svindland, R.C. 2005. *Predicting the location and duration of transient induced low or negative pressures within a large water distribution system*. Master of Science Thesis, Graduate School, University of Kentucky (USA).
- Twyman, J. 2016a. Golpe de ariete en una red de distribución de agua. *Anales del XXVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica IAHR* (Spain Water & IWHR China), 26-30 de Septiembre, Lima, Perú, pp. 10.
- Twyman, J. 2016b. Wave Speed Calculation for Water Hammer Analysis. *Obras y Proyectos*, UCSC, 20, 86-92. ISSN 0718-2813. <https://doi.org/10.4067/S0718-28132016000200007>
- Twyman, J. 2016c. Water hammer analysis using the Method of Characteristics. *Revista de la Facultad de Ingeniería* (U. de Atacama), 32(2016), 1-9. <http://www.revistaingenieria.uda.cl/publica.php?tipot=1&tipov=2>
- Twyman, J. 2017a. *Métodos para el análisis del flujo transiente en redes de tuberías*. Mauritius: Editorial Académica Española.
- Twyman, J. 2017b. Water hammer analysis in a water distribution system. *Ingeniería del Agua*, 21(2), 87-102. <https://doi.org/10.4995/ia.2017.6389>
- Twyman, J. 2017c. Water hammer analysis using a hybrid scheme. *Revista Científico Tecnológica*, Departamento de Ingeniería de Obras Civiles (RIOCI), 7(2017), 16-25. ISSN 0719-0514. <http://www.rioc.cl/index.php/RIOCI/article/view/16>
- Twyman, J. 2018. Water hammer analysis using an implicit finite-difference method. *Ingeniare, Revista Chilena de Ingeniería*, 26(2). ISSN 0718-3305. Versión en línea será publicada en número de Abril-Junio 2018.
- Wang S., Sanada K. 2002. A study on estimation of wave speed in a pipe. *Fluid Power, Fifth JFPS International Symposium*, 865-870. <https://doi.org/10.5739/isfp.2002.865>
- Watters, G.Z. 1984. *Analysis and control of unsteady flow in pipelines*. Boston, USA: Butterworth-Heinemann, 2nd Edition.
- Wylie, B.E., Streeter, V.L. 1978. *Fluid transients*. McGraw-Hill, 1st Edition. International Book Co., USA.