MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING
Volumen 6(2), No. 12, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Piedra, Papel, Tijera y sus generalizaciones

Cristina Jordán Lluch, Esther Sanabria-Codesal
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
cjordan@mat.upv.es, esaanbri@mat.upv.es

Abstract

En este artículo mostramos como la modelización nos ayuda a motivar a los alumnos en un curso de teoría de grafos. Utilizamos el conocido juego de"piedra, papel y tijera" y sus generalizaciones para mostrar la aplicabilidad de los conceptos matemáticos estudiados.

In this paper we show how modeling helps us to motivate the Graph Theory's students. We use the well known game of "rock, paper, scissors" and its generalizations to show the applicability of mathematical concepts studied.

Keywords: Grafos, ciclo euleriano, grafo euleriano, modelización.
Graphs, Euler cycle, Euler graph, modelling

1 Introducción

Unos de los principales retos al que nos enfrentamos como profesores de matemáticas es la baja motivación de los alumnos por la materia. La modelización facilita nuestra labor al mostrar la aplicabilidad de los conceptos matemáticos al alumnado, especialmente si buscamos situaciones actuales y que formen parte de su entorno habitual. Un ejemplo de éstas es el conocido juego "piedra, papel, tijera", tradicionalmente utilizado para tomar decisiones al igual que hacemos, por ejemplo, al lanzar una moneda.

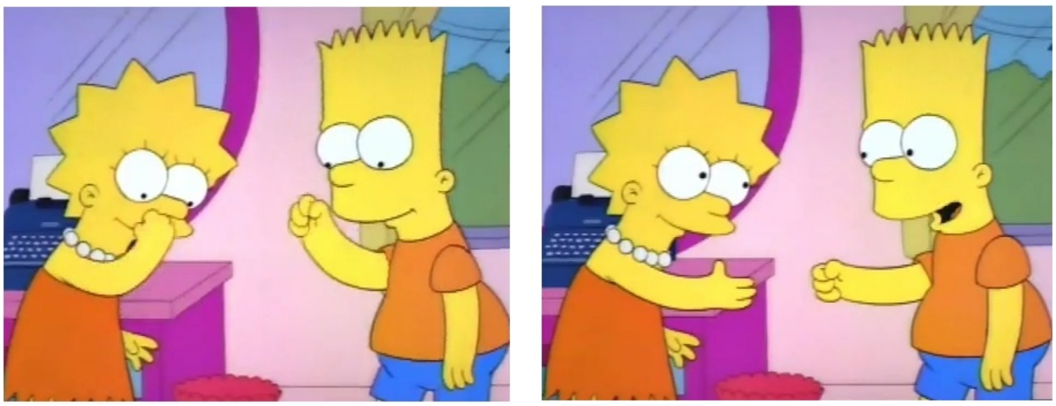

Figura 1: Bart piensa: La buena es la piedra... nada la vence. Lisa piensa: Pobre Bart siempre elige la piedra.

Este juego es conocido en todo el mundo, y tiene diversas nomenclaturas dependiendo del país en el que se juege, en Japón, Perú, Bolivia, Brasil se lo conoce como "jan-ken-po", mientras que en México o en Chile como "chin-chan-pu". Es tan popular que incluso es mencionado en famosas series norteamericanas como Los Simpsom, donde Lisa aprovecha el poco conocimiento que tiene Bart de las probabilidades de ganar del juego para conseguir lo que quiere (Figura 1), o Friends donde Joey y Phoebe se permiten la licencia de añadir nuevos elementos, como fuego o globo de agua, para ganar a sus compañeros (Figura 2).

Figura 2: Ross: ¿Qué es eso? Joey: Es fuego, gana a todos. Phoebe: ¡Ah si! ¿gana al globo de agua? Joey: Bien jugado Phoebe, bien jugado.

La generalización más conocida de este juego “piedra, papel, tijera, lagarto, Spock”, utilizando cinco elementos en vez de los tres originales, la crea Sam Kass. Esta versión aparece en la conocida comedia The Big Bang Theory, donde Sheldom Cooper lo propone como solución a una disputa que mantiene con un compañero de departamento, por ocupar el despacho de un profesor jubilado.

En este trabajo, utilizando la teoría de grafos, justificamos como realizar una generalización de este juego sin estrategia dominante, es decir sin que exista una opción que siempre mejore las del resto de oponentes, para hacerlo más entretenido al disminuir el porcentaje de empates.

2 Piedra, Papel y Tijera

Tradicionalmente el juego infantil “piedra, papel, tijera” es utilizado para tomar decisiones. Cuando dos jugadores pretenden que sólo el azar decida, una opción es utilizar este juego, ya que no tiene estrategia dominante, lo que implica que no hay una decisión que mejore todas las posibles elecciones de los oponentes.

El juego comienza cuando los participantes dicen juntos “¡piedra, papel, tijera!” y nada más acabar muestran todos al mismo tiempo una mano que representa la opción que cada uno ha elegido: si se muestra un puño cerrado se hace referencia a la Piedra, la palma de la mano con todos los dedos extendidos es Papel y el puño cerrado con los dedos índice y corazón extendidos y separados en forma de V es Tijera.

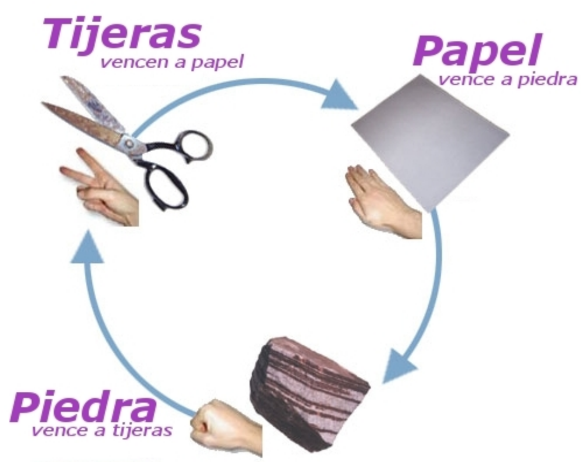

Figura 3: Reglas del juego con tres elementos

El objetivo de cada jugador es vencer seleccionando un arma que gane a todas las que han elegido el resto de oponentes, siguiendo las reglas: la piedra aplasta la tijera (gana la piedra), la tijera corta el papel (gana la tijera) y el papel envuelve la piedra (gana el papel), como se muestra en la Figura 3.

Cuando los jugadores eligen el mismo elemento se llega a un empate y se juega otra vez hasta desempatar. Con tres jugadores, también se empata si todos eligen elementos diferentes, en este caso si un jugador vence a los dos restantes gana el juego y cuando hay empate entre dos ganadores, estos vuelven a jugar hasta que haya un vencedor.

1 jugador	2 jugador	Resultado
Piedra	Piedra	Empate
Piedra	Papel	Gana 2 jugador
Piedra	Tijera	Gana 1 jugador
Papel	Piedra	Gana 1 jugador
Papel	Papel	Empate
Papel	Tijera	Gana 2 jugador
Tijera	Piedra	Gana 2 jugador
Tijera	Papel	Gana 1 jugador
Tijera	Tijera	Empate

Tabla 1: Espacio muestral para dos jugadores

Si nos limitamos al caso más sencillo, donde participan únicamente dos jugadores, el análisis estadístico determina que existen las mismas probabilidades de ganar, de empatar o de perder: un tercio en todos los casos, como indica el Cuadro 1. Aunque a priori esto sugiere que obtener una victoria en el juego no depende de la habilidad de los participantes, la experiencia nos muestra que si éstos se conocen el porcentaje de empate suele ser alto. Por tanto la estrategia más óptima a la hora de jugar consistirá en analizar el comportamiento de nuestro rival, que en general tendrá sesgos y no será completamente aleatorio.

Figura 4: Empate en la serie The Big Bang Theory jugando a piedra, papel, tijera, lagarto, Spock.

Una posibilidad de minimizar el riesgo de empate consiste en añadir más elementos, como hace Sam Kass en su versión extendida del juego donde, haciendo un guiño a la popular serie Star Trek, añade lagarto y Spock. En este caso, las reglas se complican:

- La piedra aplasta la tijera
- La tijera corta el papel
- El papel envuelve la piedra
- La piedra machaca al lagarto
- El lagarto envenena a Spock

- Spock rompe las tijeras
- La tijera decapita al lagarto
- El lagarto se come el papel
- El papel desautoriza a Spock
- Spock vaporiza la piedra

Al añadir más elementos al juego disminuye la probabilidad de empatar, en este caso baja a un quinto, mientras que la de perder o ganar es en ambos casos igual a dos quintos. Aún así, en la serie The Big Bang Theory los protagonistas empatan ya que todos eligen Spock, como era de esperar (Figura 4).

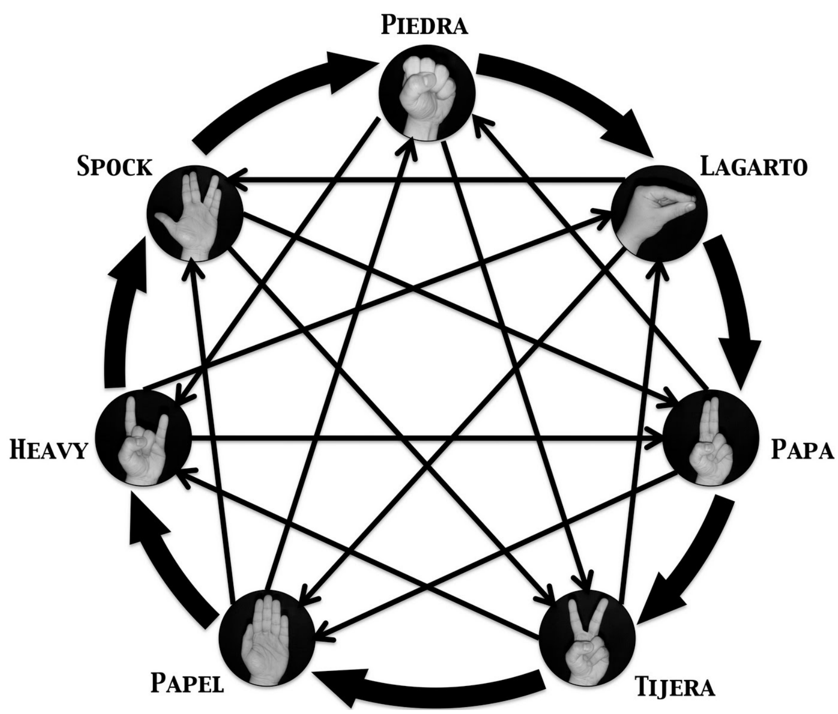

Figura 5: Reglas del juego con 7 elementos

Sin embargo "piedra, papel, tijera, lagarto, Spock" no es la única generalización que existe, Caco Manrique ([1]) en su blog propone una ampliación del juego con 7 elementos donde añade, además de los cinco anteriores, heavy y papa. El papa representa una figura tradicional que conoce perfectamente el juego de piedra, papel, tijera y por tanto gana a estos tres elementos, pero pierde con lagarto, Spock y heavy, mientras que el heavy representa la modernidad, de forma que a él le pasa todo lo contrario (Figura 5).

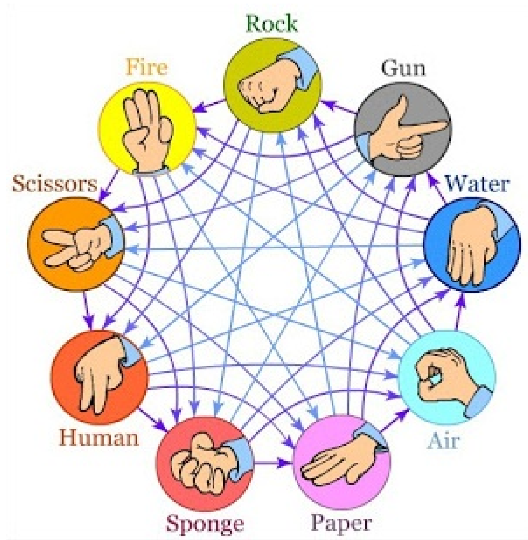

Figura 6: Reglas del juego con 9 elementos elementos

En este blog también se comenta una curiosa ampliación a 9 elementos: piedra, papel, tijera, pistola, agua, aire, esponja, humano y fuego. La mayor parte de las relaciones entre los elementos son fácilmente deducibles: la piedra aplasta a la tijera y machaca a la esponja, al humano y al fuego, la tijera corta al papel, a la esponja y al humano, el fuego quema a las tijeras, al humano, a la esponja y al papel, el humano contamina el agua, el aire y acaba con el papel y la esponja, la esponja moja el papel, inutiliza el arma y absorbe el agua, el papel contamina el aire, el agua, inutiliza el arma y envuelve a la piedra, el aire apaga el fuego, el agua apaga el fuego, inutiliza el arma, erosiona a la piedra y oxida las tijeras, el arma mata al humano, destroza las tijeras y a la piedra y apaga el fuego, pero otras son algo menos naturales como que la tijera o la esponja ganen al aire, o que el aire gane a la piedra, al arma o al agua (Figura 6).

La ampliación del juego con más elementos, que hemos encontrado hasta el momento, la describen en el blog tecnológico Microsiervos ([2]) y consta de 15 elementos: piedra, papel, tijera, pistola, rayo, dragón, agua, aire, esponja, lobo, árbol, humano, serpiente, fuego y diablo. Pero como ellos mismos comentan, en este caso parece tan difícil aprenderse de memoria las relaciones, como entender por qué los elementos pierden o ganan frente a otros (Figura 7).

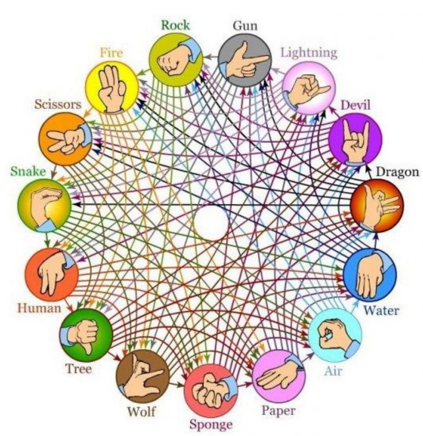

Figura 7: Reglas del juego con 15 elementos

Nosotros aprovechamos estas curiosidades para motivar a los alumnos a resolver un problema de grafos que justifica como deben realizarse las generalizaciones del juego.

3 Conceptos generales de la teoría de grafos

Un grafo no dirigido (resp. dirigido) $G = (V, E)$ es una estructura formada por un conjunto finito no vacío V y un conjunto E de pares no ordenados (resp. ordenados) de V. Llamamos vértices del grafo G a los elementos de V y aristas (resp. arcos) a los elementos de E, ([3], [4], [5], [6]).

Una forma habitual de representar un grafo no dirigido (resp. dirigido) es a través de un diagrama de puntos y líneas (resp. flechas) en el que cada punto representa un vértices y la línea (resp. flecha) entre los puntos v_i y v_j representa la arista (resp. arco) que los une (v_i, v_j). Si $v_i = v_j$ decimos que la arista (resp. arco) es un bucle.

Llamamos grafo subyacente de un grafo dirigido G al grafo no dirigido $\bar{G}$ en el que existe una arista (v_i, v_j) si el grafo G tiene definido un arco de v_i a v_j y/o de v_j a v_i. Decimos que el grafo $\bar{G}$ es completo si cada par de vértices está conectado por una arista.

Un grafo G es simple si no tiene bucles. Se denomina cadena de un grafo a toda sucesión finita alterna de vértices y aristas, $v_1 e_1 v_2 \ldots v_{n-1} e_{n-1} v_n$, donde $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Decimos que un grafo es conexo cuando para cualquier par de vértices v_i, v_j existe una cadena de v_i a v_j.

Dado un grafo dirigido, llamamos grado de entrada de un vértice al número de arcos cuyo extremo final es dicho vértice y grado de salida al número de arcos salientes de él. En el caso de grafo no dirigido, el grado de un vértice viene dado por el número de aristas incidentes.

En un grafo no dirigido decimos que una cadena es euleriana si pasa por todas las aristas una sola vez. Las cadenas eulerianas que recorren todas las aristas de manera que sus extremos v_1 y v_n coinciden son ciclos eulerianos. Un grafo se dice euleriano si posee un ciclo euleriano [6], como en el ejemplo de la Figura 8 ([7]).

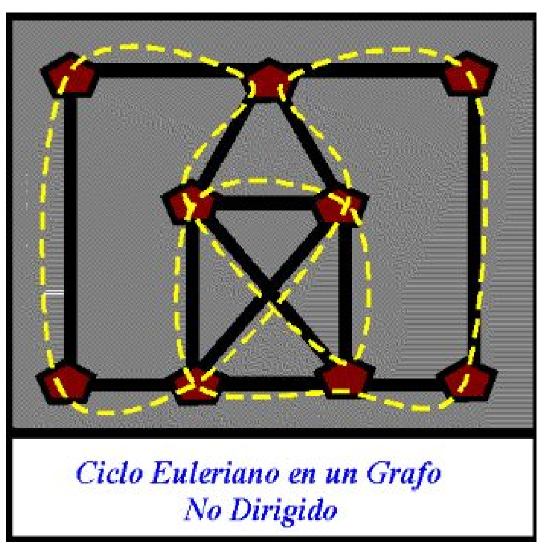

Figura 8: Grafo euleriano

Existen varios resultados que caracterizan los grafos eulerianos no dirigidos, por ejemplo el siguiente: un grafo no dirigido y conexo es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par ([3], [4], [5]).

4 Generalización del juego a través de la teoría de grafos

Aplicando los conceptos anteriores de la teoría de grafos, estudiamos en este apartado cuales son las condiciones que se deben cumplir para generalizar el juego de "piedra, papel, tijera". Para ello, comenzamos modelizando el juego como un grafo dirigido $G = (V, E)$ de n vértices $V = \{$ piedra, papel, tijera, $\ldots \}$ y cuyos arcos vienen determinados por el conjunto $E = \{(u, v), u,\, v \in V/u$ gana a $v\}$.

Observamos que la modelización de la generalización del juego requiere:

- Un grafo G dirigido, simple, con un único arco entre vértices distintos, para que dos elementos diferentes no produzcan un empate, y cuyo grafo subyacente $\bar{G}$ sea completo, con el objetivo de que todos los elementos se relacionen entre sí.
- Por otro lado, para que no haya una estrategia dominante en el juego, el grado de entrada y de salida tiene que ser el mismo para todos los vértices del grafo G.

Utilizando que el grafo que modeliza la generalización del juego tiene un único arco entre cada par de vértices, obtenemos que para todo vértice $v_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple:

$$d^e_G(v_i) + d^s_G(v_i) = d_{\bar{G}}(v_i)$$

donde $d^e_G(v_i)$ y $d^s_G(v_i)$ denotan el grado de entrada y de salida del vértice v_i en G, respectivamente y $d_{\bar{G}}(v_i)$ el grado del vértice v_i en el grafo subyacente $\bar{G}$.

Esta igualdad nos permite probar:

- El grafo subyacente del grafo G, que modeliza la generalización del juego, es un grafo euleriano, ya que todos los vértices de $\bar{G}$ tienen grado par y al ser $\bar{G}$ completo también es conexo.
- Dado un grafo G dirigido, simple, con un único arco entre vértices distintos en el que se verifica que el grado de entrada es igual al grado de salida, la condición de que $\bar{G}$ sea completo es equivalente a que el número de vértices del grafo G es impar y que los grados de entrada y de salida son iguales a $(n-1)/2$.

Del último resultado concluimos que sólo podremos encontrar generalizaciones válidas del juego "piedra, papel, tijera" que tengan un número impar de elementos, como "piedra, papel, tijera, lagarto, Spock" o las de 7, 9 o 15 elementos comentadas anteriormente.

5 Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por el proyecto PID-DMA 2012.

Referencias

[1] Blog de Caco Manrique: http://cacomanrique.blogspot.com.es/2011/04/piedra-papel-tijera-lagarto-spock-heavy.html

[2] Blog Microsiervos: http://www.microsiervos.com/archivo/humor/piedra-papel-tijera-pistola-rayo-dragon-agua-aire-esponja-lobo-arbol-humano-serpiente-fuego.html

[3] C. Jordán LLuch, J. R. Torregrosa Sánchez. *Introducción a la teoría de grafos y sus algoritmos*, Editorial Reverté, SPUPV- 96.865, Valencia, 1996.

[4] R. P. Grimaldi, *Matemáticas Discretas y Combinatoria*, Addison Weslay Logman, USA, 1998.

[5] J. L. Gross, J. Yellen, *Graph theory and its applications*, Chapman & Hall/CRC, USA, 2006.

[6] C. Jordán.*Materiales docentes de la asignatura Estructuras Matemáticas para la Informática II*, Click aquí

[7] O. Astudillo, P. Salina, J. Castro. Materiales de Teoría de Grafos para la asignatura Fundamentos de Informática Teórica:
http://dns.uls.cl/∽ej/fit_2009/teo_fit_2009/Lect_2009/Fit_1998/index.htm