

Un laboratorio virtual para la enseñanza de momentos de inercia de figuras planas

Fernando Giménez, Juan A. Monsoriu, Andrés Lapuebla-Ferri, Antonio José Jiménez

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

fgimenez@mat.upv.es, jmonsori@fis.upv.es, anlafer0@mes.upv.es, ajimene@mes.upv.es

Abstract

En este trabajo presentamos una interfaz gráfica de usuario de MATLAB[®] que permite obtener fácilmente el centro de gravedad y la matriz de inercia de un dominio plano, con posibilidad de agujeros y cuyo borde esté formado por líneas poligonales y arcos de circunferencia. Además la aplicación representa gráficamente el dominio, la posición del centro de gravedad y los ejes principales de inercia. Desde un punto de vista pedagógico puede ser útil en diversas asignaturas de carreras de ingeniería como física, resistencia de materiales, cálculo de estructuras, etc.

In this work, we present a graphic user interface (GUI) developed in MATLAB[®] to easily obtain the gravity center and the matrix of inertia of a plane domain. It is allowed to include holes, an also to consider curved or straight edges. The application represents graphically the domain, the position of the centre of gravity and the principal axes of inertia. From a pedagogical point of view, it can be usefully employed in the context of different subjects in university teaching, such as: Physics, Strength of Materials, Structural Analysis, etc.

Keywords: Centro de gravedad, momento de inercia, laboratorio virtual.

1 Introducción

El hombre siempre ha sentido curiosidad por el mundo que le rodea. La ciencia le da una visión del mundo y la física, en particular, trata de indagar sobre la materia y energía, los principios que gobiernan el movimiento de partículas y ondas y sus interacciones ([1]). Dos de los conceptos de la física más importantes son, sin duda, los de centro de gravedad y momento de inercia, por su relevancia en el estudio de la estática y la dinámica de rotación por lo que hemos desarrollado un laboratorio virtual que puede ser útil en la tarea de que el alumno comprenda bien estos conceptos. En las últimas décadas ha sido objeto de creciente estudio el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física. Su enseñanza debe permitir la conformación, en el individuo, de una visión del mundo, debe servir de puente para pasar de un conocimiento común a uno más elaborado, sistemático y científico, y debe de posibilitar de modo sencillo el desarrollo y adquisición de capacidades tales como el razonamiento ([2]), la resolución de problemas ([3]) o las habilidades experimentales ([4]). El uso de metodologías activas puede permitir que los alumnos adquieran más fácilmente competencias y capacidades ([5]). En este marco presentamos una Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) de MATLAB[®] que puede utilizarse en las prácticas docentes de aquellas asignaturas universitarias que manejen los conceptos de centro de gravedad y momentos de inercia y aquellos resultados relacionados con ellos. Puede consultarse la referencia [6] para profundizar sobre las GUI.

2 Teoría

Sea D un dominio del plano fijado un sistema de coordenadas XY cartesiano.

2.1 Definición de centro de gravedad

Se define el *centro de gravedad geométrico* de D por

$$(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{area}(D)} \left(\int_D x dS, \int_D y dS \right),$$

donde x e y son las distancias a los ejes X e Y respectivamente.

2.2 Definición de momentos y productos de inercia

En este apartado recordaremos las principales definiciones y resultados relacionados con los conceptos de centro de gravedad y momentos de inercia: Se definen los momentos de inercia geométricos de D respecto de los ejes coordenados X e Y por

$$I_X = \int_D x^2 dS, \quad I_Y = \int_D y^2 dS,$$

y el producto de inercia respecto de los ejes X e Y por

$$P_{XY} = \int_D xy dS.$$

Se denomina *matriz de inercia* de D respecto de los ejes X e Y a la matriz simétrica

$$I = \begin{pmatrix} I_X & P_{XY} \\ P_{XY} & I_Y \end{pmatrix}.$$

Como I es real y simétrica entonces es diagonalizable respecto de una base ortonormal, por lo que es posible encontrar un nuevo sistema de referencia para el cual la matriz de inercia de D sea diagonal. A los ejes de este sistema de referencia se les llama *ejes principales de inercia*. Los ejes principales de inercia trazados por el centro de masas del sistema se denominan *ejes centrales principales de inercia*. Sea l una recta cualquiera que pasa por el origen del sistema de coordenadas. Se define el momento de inercia de D respecto de l por

$$I_l = \int_D d_l^2 dS,$$

donde d_l es la distancia del punto a la recta l . El momento de inercia anterior puede calcularse fácilmente a partir de la matriz de inercia mediante la ecuación de Poincot

$$I_l = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} I_X & P_{XY} \\ P_{XY} & I_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

donde (u_1, u_2) es un vector director unitario de l .

2.3 Teoremas de Steiner

Los momentos y productos de inercia de un dominio respecto de los ejes de referencia XY pueden calcularse fácilmente a partir de los momentos y productos de inercia respecto de los ejes de referencia $X'Y'$ paralelos a los anteriores y cuyo origen de coordenadas es el centro de masas (x_G, y_G) de D :

$$I_X = I_{X'} + \text{area}(D)x_G^2, \quad I_Y = I_{Y'} + \text{area}(D)y_G^2, \quad P_{XY} = P_{X'Y'} + \text{area}(D)x_G y_G.$$

Para el momento de inercia de una recta cualquiera que no pasa por el centro de masas se tiene un resultado similar

$$I_l = I_{l'} + \text{area}(D)h^2,$$

donde l' es la recta paralela a l que pasa por el centro de masas y h es la distancia entre las dos rectas.

2.4 Métodos de cálculo de momentos de inercia

El cálculo de los momentos y productos de inercia de figuras complejas puede determinarse descomponiendo la figura en otras más sencillas y utilizando los teoremas de Steiner. Se suelen emplear dos procedimientos:

- Método de descomposición: El momento de inercia de un dominio que es la unión de dos dominios disjuntos coincide con la suma de los momentos de inercia.
- Método de diferenciación: El momento de inercia de un dominio obtenido como la diferencia de dos dominios coincide con la diferencia de los momentos de inercia.

3 Presentación del laboratorio virtual

El laboratorio virtual CG-INERCIA está desarrollado como una interfaz gráfica de usuario de MATLAB[®]. El aspecto gráfico de la aplicación puede verse en la figura 1. La interfaz de

usuario consta de dos partes principales. En la parte superior se encuentran los campos donde el usuario introduce los parámetros de entrada de la figura ya descompuesta en figuras más sencillas consistentes en poligonales convexas y arcos de circunferencia. En la parte inferior se encuentran dos ventanas con información numérica (parte izquierda) y gráfica (derecha) relacionada con el centro de gravedad y los momentos de inercia.

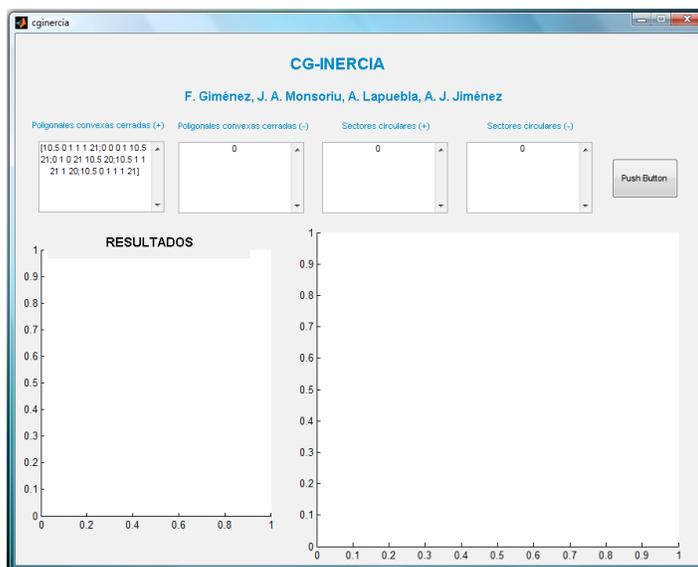


Figura 1: Aspecto gráfico del laboratorio virtual.

Los parámetros de entrada de la estructura son:

- Poligonales convexas cerradas (+): Aquí se introducen las coordenadas de cada una de los segmentos de las poligonales que corresponden a los polígonos convexos que “suman” en los cálculos (método de descomposición). Es una matriz cuyas columnas $2i - 1$ y $2i$ recogen abcisas y ordenadas del polígono convexo i . Si no hay más puntos se completan con ceros.
- Poligonales convexas cerradas (-): Aquí se introducen las coordenadas de cada una de los segmentos de las poligonales que corresponden a los polígonos convexos que “restan” en los cálculos (método de diferenciación). Es una matriz cuyas columnas $2i - 1$ y $2i$ recogen abcisas y ordenadas del polígono convexo i . Si no hay más puntos se completan con ceros.
- Sectores circulares (+): Se introducen los datos correspondientes a los sectores circulares convexos que “suman” en los cálculos (método de descomposición). Es una matriz que tienen la forma donde (a_i, b_i) son las coordenadas del centro del sector circular, (c_i, d_i) son las coordenadas del punto final y α es el ángulo del sector.
- Sectores circulares (-): Se introducen los datos correspondientes a los sectores circulares convexos que “restan” en los cálculos (método de diferenciación). Es una matriz que tienen la forma donde (a_i, b_i) son las coordenadas del centro del sector circular, (c_i, d_i) son las coordenadas del punto final y α es el ángulo del sector.

El usuario del laboratorio virtual debe tener muy presente el sistema de unidades en el que está introduciendo los diversos parámetros, garantizando en todo momento la coherencia dimensional del tratamiento numérico. Como salida se obtienen:

- Coordenadas del centro de masas.
- I_X, I_Y, P_{XY} .
- Valores y vectores propios unitarios de la matriz de inercia.
- Una representación gráfica del dominio dado descompuesto en subdominios que suma (azul) y restan (verde), el centro de masas y los ejes centrales principales de inercia.

4 Ejemplos

4.1 Ejemplo 1

Considérese el dominio mostrado en la figura 2a. Para introducirlo convenientemente en el laboratorio virtual **CG-INERCIA** se elige como origen de coordenadas el extremo izquierda y descomponemos el dominio en dos rectángulos (ver figura 2b) . Los datos a introducir son:

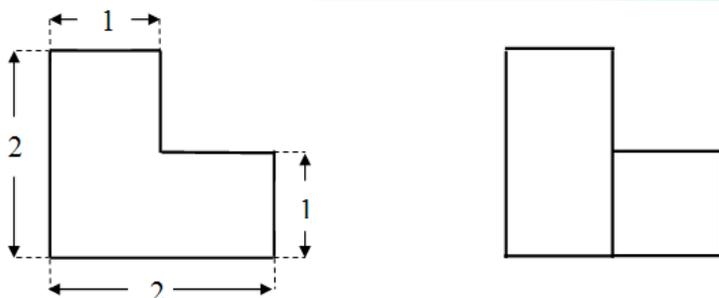


Figura 2: Gráfico del Ejemplo 1 (2a) y descomposición (2b).

- Poligonales convexas cerradas (+): $[0\ 0\ 1\ 1; 0\ 2\ 2\ 1; 1\ 2\ 2\ 0; 1\ 0\ 1\ 0]$
- Poligonales convexas cerradas (-): 0 (no hay)
- Sectores circulares (+): 0 (no hay)
- Sectores circulares (-): 0 (no hay)

Obsérvese que las coordenadas de los puntos que definen el primer rectángulo son $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ y $(1, 0)$. Las del segundo son $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$ y $(1, 0)$. Los resultados se muestran en la figura 3.

4.2 Ejemplo 2

Considérese el dominio mostrado en la figura 4a que puede obtenerse por diferenciación entre un círculo y un sector circular (ver figura. 4b). Los datos a introducir son:

- Poligonales convexas cerradas (+): 0 (no hay)
- Poligonales convexas cerradas (-): 0 (no hay)

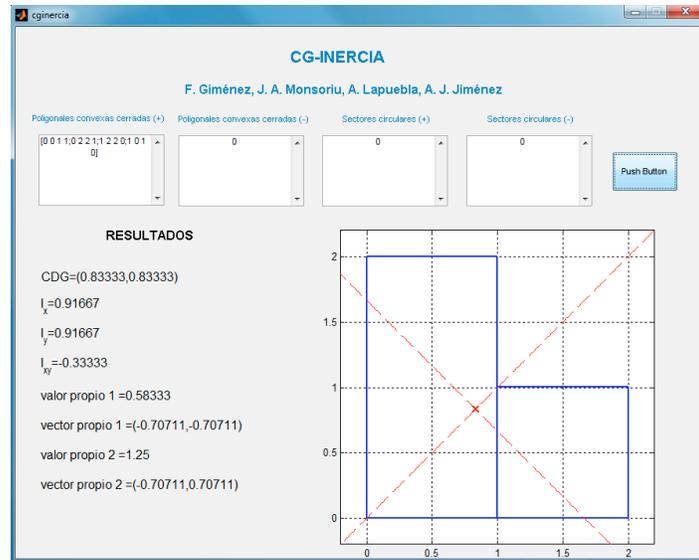


Figura 3: Centro de gravedad, ejes principales y resultados del ejemplo 1.

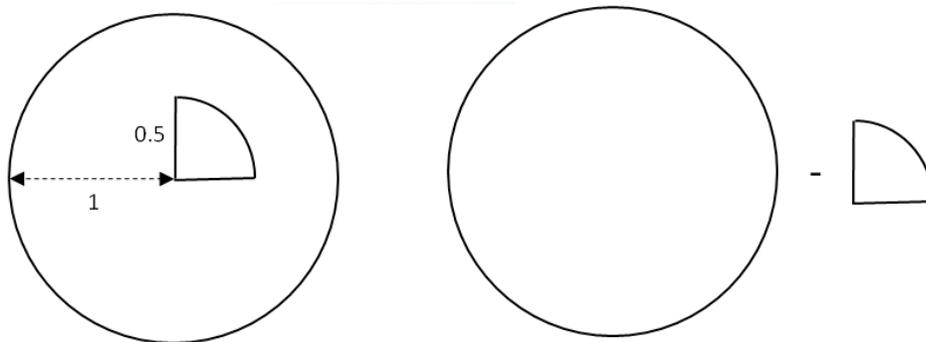


Figura 4: Gráfico del Ejemplo 2 (4a) y descomposición (4b).

- Sectores circulares (+): $[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2\pi]$
- Sectores circulares (-): $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ \pi/2]$

Los resultados se muestran en la Figura 5.

4.3 Ejemplo 3

Un ejemplo mucho más elaborado es el correspondiente a una llave inglesa (ver figura 6). La descomposición en figuras más simples se muestra en la figura 7 y los resultados obtenidos en la figura 8.

5 Conclusiones

Desde un punto de vista docente creemos que la herramienta que presentamos puede ser muy útil para su uso en asignaturas de física, matemáticas, teoría de estructuras, resistencia de

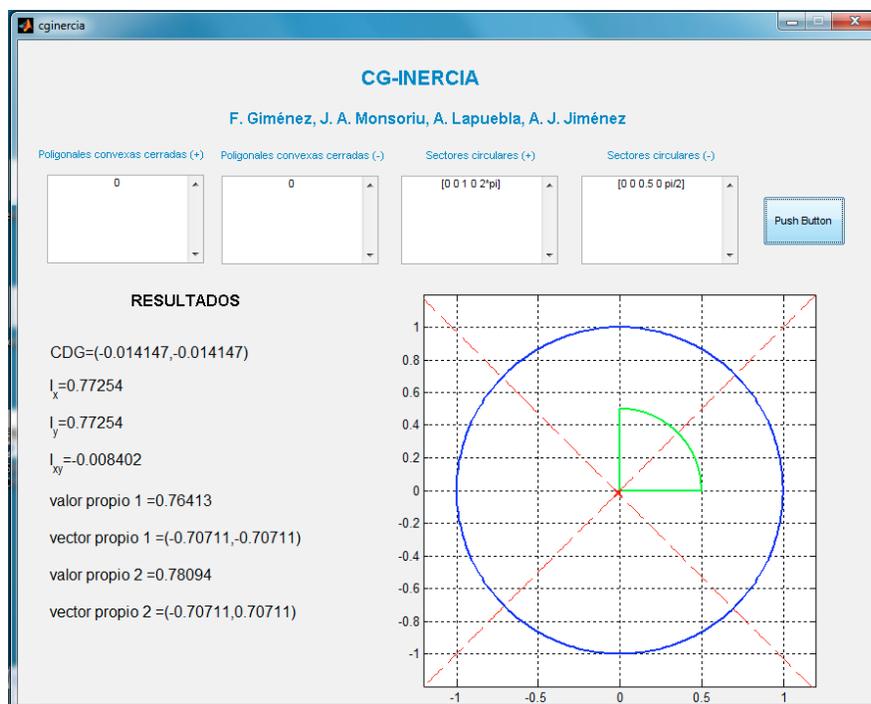


Figura 5: Centro de gravedad, ejes principales y resultados del Ejemplo 2.

materiales, etc. ya que permite visualizar el concepto de centro de gravedad y el de momento de inercia y comprender mejor los teoremas de Steiner y la ecuación de Poinot. Además muestra un alto grado de interactividad y es aplicable a muchos ejemplos de la vida real.

Agradecimientos. Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia e Innovación (DPI2008-02953) y a la Universidad Politécnica de Valencia (PAID-06-08) su apoyo financiero. J.A. Monsoriu forma parte del Grupo de Innovación Docente e-MACAFI de la Universidad Politécnica de Valencia.



Figura 6: Llave inglesa (Ejemplo 3).

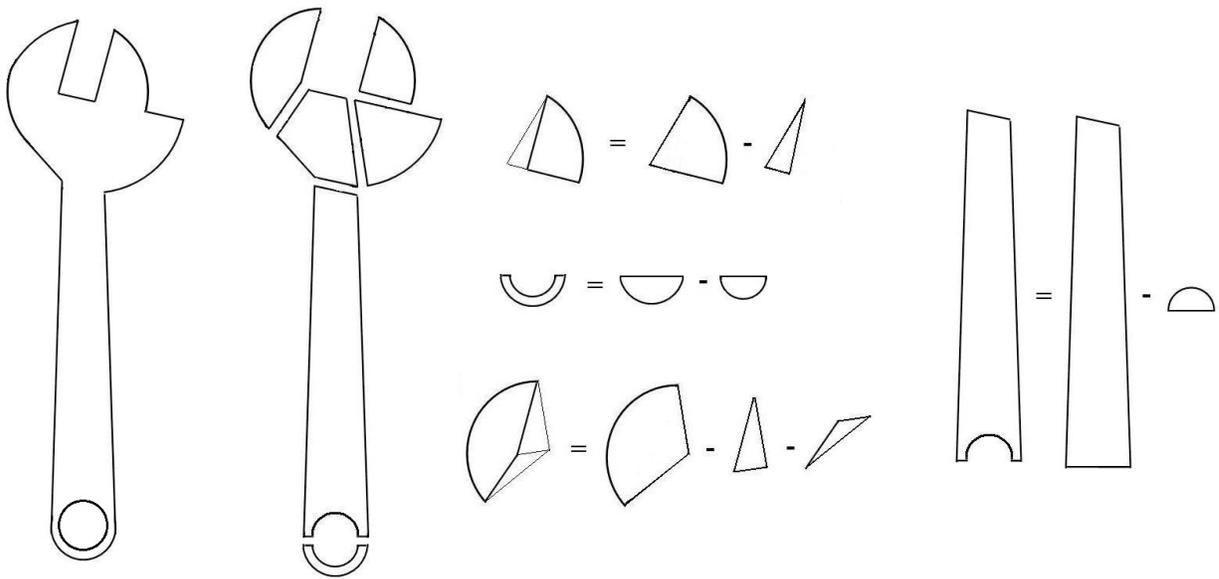


Figura 7: Gráfico del Ejemplo 3 y descomposición.

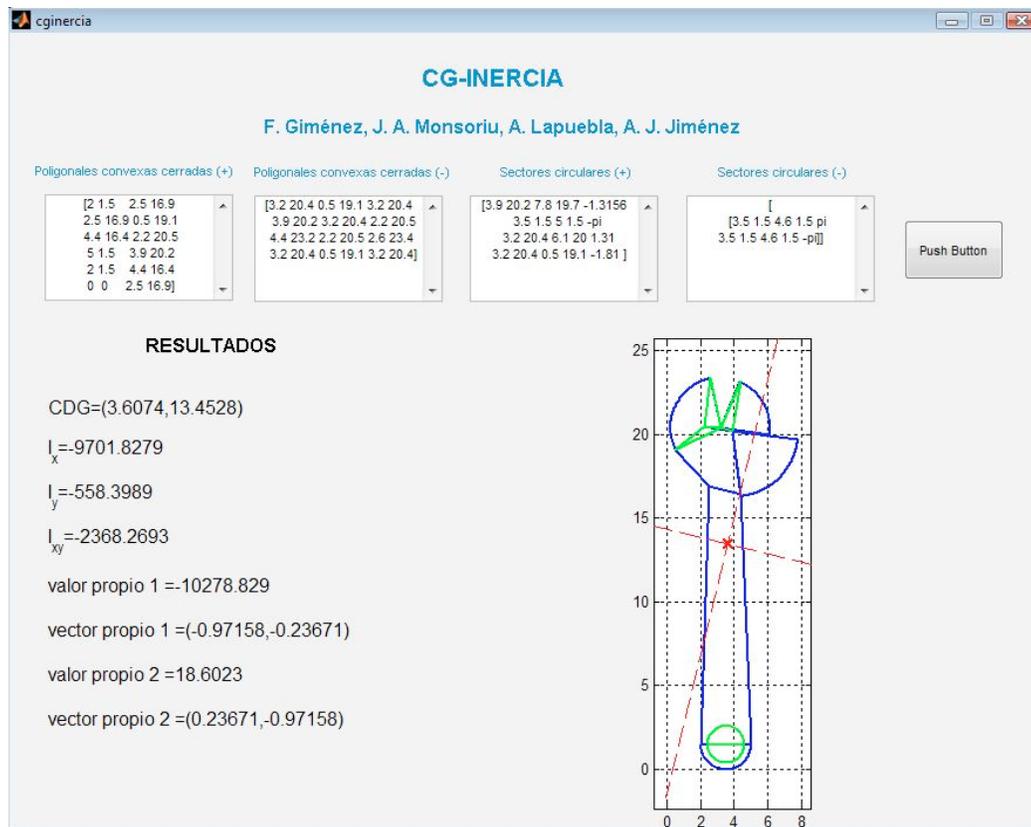


Figura 8: Centro de gravedad, ejes principales y resultados del ejemplo 3.

Referencias

- [1] P. A. Tipler , *Physics for scientists and engineers*, W.H. Freeman , 6 ed. , (2008).
- [2] L. C. Mcdermott, P. S. Shaffer y C. P. Constantinou, *Preparing Teachers to Teach Physics and Physical Science by Inquiry*, *Physics Education*, 35 (6), pp. 411-416. (2000).
- [3] C.Watts, *The Science of Problem Solving: A Practical Guide for Science Teachers*, Cassell Educational, London (1991).
- [4] D. N. Arion, K. M. Crosby, y E.A. Murphy, *Case Study Experiments in the Introductory Physics Curriculum*, *The Physics Teacher*, 38 (6), pp. 373-376, (2000).
- [5] A. Benito, A. Portela y R. M. Rodríguez, *Análisis de la enseñanza de la Física en Europa: el fomento de competencias generales en estudiantes universitarios*, *Revista Iberoamericana de Educación*, número 38/7, (2006).
- [6] C. Depcik and D.N. Assanis, *Graphical user interfaces in an engineer in educational environment*, *Comput. Appl. Eng. Educ.* Vol. 13, (2005).

