MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 4, No. 22, 2011.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Herramientas de la teoría de grafos para la modelización

Cristina Jordán, Juan R. Torregrosa
Universidad Politécnica de Valencia
cjordan@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es

Abstract

Dentro de la teoría de grafos las redes ocupan un papel destacado por la amplia variedad de problemas que resuelven. En esta ocasión presentamos varios de estos problemas, algunos sin relación aparente a priori con la definición clásica de red. Están enunciados en contextos reales y su resolución pasa, en primer lugar, por definir un grafo que represente la situación, teniendo presente, puesto que influye en su definición, el objetivo a determinar. Una vez modelizado el problema, ya dentro de la teoría de grafos, es el momento de aplicar las técnicas o métodos estudiados. Este tipo de problemas, además de incentivar el interés del alumno, le ayudan a vislumbrar la amplia aplicabilidad de las redes y le entrenan en general en el uso de la modelización.

In graph theory, networks play an important role in a lot of type of problems. In this paper we present some of them, sometimes without a clear relation with the classic definition of a network. They are enunciated in a real neighbourhood and the first step to solve them consists of translating the conditions of the problem to a graph. In order to get a good modelization, it must to take in mind the objective to reach. After the problem is modelized we apply the techniques or methods studied in graph theory. This type of problems increases the interest of the students, helps them to see the wide applicability of networks and trains them in the use of mathematical modelization.

Keywords: Red, grafo dirigido, algoritmo de Ford-Fulkerson, Runnig head Modelización mediante redes.

1 Introducción

Dentro de las innumerables aplicaciones de la teoría de grafos, vamos a hacer referencia en este trabajo a las relativas a la teoría de redes. Ésta constituye por sí misma un amplio campo a estudiar y sus aplicaciones son muy numerosas y variadas. Los casos que nos ocupan en este trabajo constituyen los principios básicos y representan una mínima parte de la teoría desarrollada en relación a las redes.
Los problemas que presentamos constituyen una muestra de los ejercicios, relativos a modelización en el tema de redes, realizados en las clases de la asignatura Estructuras Matemáticas para la Informática 2, obligatoria de quinto cuatrimestre (tercer curso) de la ETSI Informática de la Universidad Politécnica de Valencia. Es una asignatura de 4.5 créditos, distribuidos en 3 de teoría y 1.5 de laboratorio. En clases de teoría se exponen los conceptos nuevos, pasando a continuación a analizar cuál sería la modelización adecuada para la resolución vía redes de una serie de problemas que, aunque no siguen el modelo típico presentado en la introducción, también se pueden resolver utilizándolas. Se termina el proceso de aprendizaje en el laboratorio, donde el programa Mathematica© permite encontrar con facilidad la solución a diversos problemas de los diferentes tipos analizados. Introducimos en la sección 2 la teoría básica necesaria para la comprensión del trabajo, y analizamos a través de ejemplos el problema típico de flujo máximo. En la sección dos nos centramos en tres de sus variantes: flujo máximo con multifuente-multisumidero, flujo máximo con restricción en los vértices y problemas de transporte-almacenaje. Prestamos especial atención a la resolución de distintos problemas previa modelización con la teoría de redes, dejando para otra ocasión la justificación del algoritmo de Ford-Fulkerson, también conocido como algoritmo del etiquetaje, que utilizamos para su resolución.

2 Conceptos básicos de la teoría de redes

Se llama *grafo no dirigido* (resp. *dirigido*), $G = (V, E)$, (ver [1]) a toda estructura formada por un conjunto de puntos no vacío, V, llamados *vértices* o *nodos*, y un conjunto E de pares no ordenados (resp. ordenados) de puntos de V, llamados *aristas* (resp. *arcos*). Se suele representar un grafo no dirigido (resp. dirigido) mediante un diagrama de puntos y líneas (resp. flechas) en el que los primeros representan a los vértices y una arista (resp. flecha) entre los puntos v_i y v_j representa la arista (resp. el arco) (v_i, v_j).

Dado el vértice u, representamos con $\Gamma(u)$ al conjunto de vértices que se alcanzan desde u mediante un arco. Llamamos *grafo subyacente* de un grafo dirigido G al grafo no dirigido en el que existe una arista (v_i, v_j) si en el grafo dirigido G existe un arco de v_i a v_j ó de v_j a v_i. Se llama *camino* a toda sucesión finita alterna de vértices y aristas, (resp. arcos) $v_1e_1v_2e_2 \dots v_{n-1}e_{n-1}v_n$, donde $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, ..., n-1$, en la que no se repite ningún vértice. Un grafo es *débil conexo* si para cada par de vértices v_i y v_j existe un camino de v_i a v_j en el grafo subyacente.

Llamamos *red* a la cuaterna de valores, $N = (G, s, t, c)$ donde G es un grafo débil conexo, s, conocido como *vértice fuente*, es un vértice con grado de salida distinto de cero, t, conocido como *vértice sumidero*, es un vértice con grado de entrada distinto de cero y c es una función definida de V en el conjunto de los naturales, llamada *función capacidad*.
Se llama *flujo en la red* a una función f del conjunto E en N tal que verifique las siguientes propiedades:

- *Limitación por capacidad*: $\forall e \in E, \qquad 0 \leq f(e) \leq c(e)$,
- *Ecuación de conservación*: $\sum_{u\in\Gamma(v)} f(v,u) = \sum_{v\in\Gamma(u)} f(u,v), \qquad \forall u \in V \setminus \{s,t\}$.

Se llama *flujo de la red* al valor

$$f(N) = \sum_{u\in\Gamma(s)} f(s,u) - \sum_{s\in\Gamma(u)} f(u,s).$$

Para alcanzar el objetivo de encontrar un flujo f en N que maximice el valor $f(N)$, lo que se conoce como el *problema del flujo máximo*, se puede aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson, o cualquiera de sus variantes. Podemos encontrar una implementación de estos algoritmos en el programa de cálculo simbólico MATHEMATICA©.

El transporte de la mayor cantidad de fluido posible a través de unas tuberías constituye el problema con el que se introduce esta teoría. Así, por ejemplo, la siguiente figura representa una red de tuberías que se utilizan para transportar petróleo desde la plataforma petrolífera hasta la refinería. Los valores que acompañan a los arcos representan la cantidad máxima de petróleo que puede circular por dicho tramo de tubería. ¿Cuál será el mayor volumen de este fluido que podremos hacer llegar a la refinería?

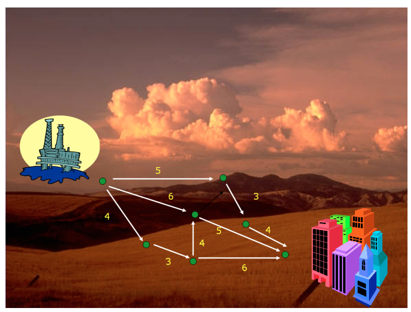

Figura 1: Ejemplo de aplicación del flujo máximo al problema de plataforma-refinería.

Modelizamos la situación como un grafo débil conexo G, en el que los nodos intermedios son las estaciones de bombeo, s es la plataforma petrolífera y t es la refinería. Consideramos como función capacidad la función que asigna a cada arco la capacidad de la tubería que representa.

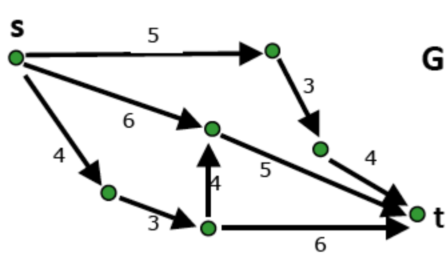

Figura 2: Red que modeliza el problema plataforma-refinería.

Aplicando el algoritmo mencionado obtenemos el flujo máximo f en la red, representado por el número a la derecha de la coma, maximizando así el flujo máximo de la red $f(N) = 10$, que nos proporciona el mayor número de unidades de petróleo que podremos enviar de la plataforma a la refinería.

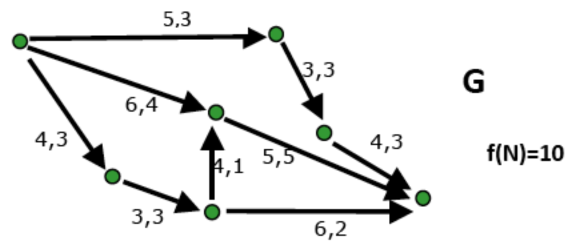

Figura 3: Flujo máximo en la red que modeliza el problema plataforma - refinería.

A continuación presentamos tres problemas que se resuelven a partir de la teoría comentada modelizándolos previamente de forma adecuada. Utilizamos como hilo conductor los posibles problemas de la conocida empresa DeTodo, que posee diferentes sucursales en varias ciudades.

En primer lugar comenzamos con un ejemplo de lo que se conoce como problema de flujo máximo multifuente-multisumidero.

3 Problemas multifuente-multisumidero

Frecuentemente las condiciones para que el resultado de modelizar un problema real sea una red no se verifican. Una de las condiciones que puede no satisfacerse es que exista un único vértice que pueda ser considerado como fuente, (o como sumidero) [2]. La solución pasa por construir una red a partir de la modelización natural del problema añadiendo un vértice ficticio que haga el papel de fuente (resp. sumidero) con los arcos ficticios necesarios adecuadamente ponderados. Esta ponderación se realiza teniendo en cuenta que al calcular el flujo máximo se verifique la ecuación de conservación, con lo que el peso asociado no debe limitar el flujo que se pueda alcanzar. Pasamos a aclarar estas ideas con un ejemplo concreto.

Ejemplo 1.

En tiempos de crisis, situaciones que pasan desapercibidas cobran importancia. Por ejemplo, en ocasiones hay camiones que transportan menos carga de su capacidad máxima. La empresa ha hecho un resumen, representado en la figura 4, en la que se muestran los camiones que no circulan con máxima carga, indicando los círculos $1, 2, ..., 7$ puntos de carga y descarga, las líneas trayectos a recorrer por los camiones y los números asociados a las líneas las unidades de carga que podríamos añadir al camión en dicho trayecto.

El círculo t denota el punto al que deseamos transportar un total de seis unidades de carga de juguetes, material de papelería y pequeños electrodomésticos, representados éstos por círculos marcados con J, P y E respectivamente. ¿Podrán transportar las seis unidades de carga de los tres tipos de objetos mencionados aprovechando las unidades disponibles en los camiones en cada trayecto?

Solución.

Vamos a representar el problema anterior como una red. Consideramos en primer lugar el grafo ponderado dirigido débil conexo $G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, ..., 7, J, P, E, t\}$, $E = \{$Arcos representados en la figura anterior$\}$, $p(x, y) = \{$número de unidades de carga libre en el

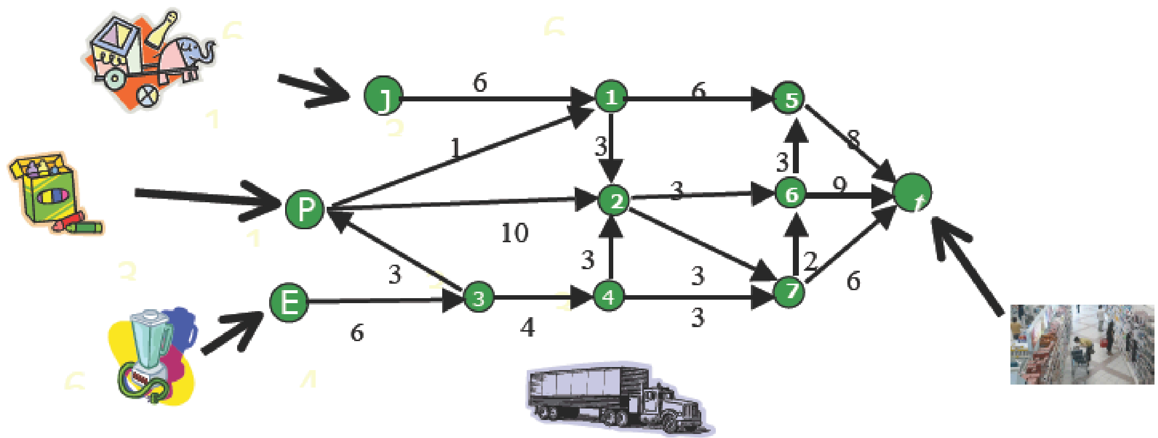

Figura 4: Representación para el problema multifuente-multisumidero.

camión correspondiente si $(x, y) \in \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in \{1, 2, ..., 7\}\}$, y $p(x, y) = 6$ si $(x, y) \in \{(v_i, v_j) : v_i \in \{J, P, E\}, v_j \in \{1, 2, ..., 7\}\}$.

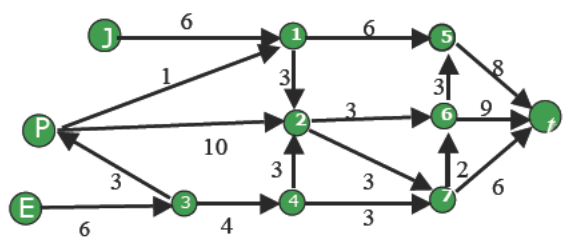

Figura 5: Grafo que modeliza el problema.

Observamos que considerando el peso, $p(x, y)$, como función capacidad y el vértice t como vértice sumidero sólo nos falta un vértice fuente para haber construido una red. El flujo máximo en esa red nos indicaría como cargar los camiones para aprovechar su capacidad al máximo. Resolvemos el problema definiendo un nuevo vértice s, y 3 arcos, (s, J), (s, P), (s, E), ponderados con 6, es decir, con las unidades de carga que queremos transportar. La nueva cuaterna (G, s, t, p) constituye una red, según hemos definido anteriormente.

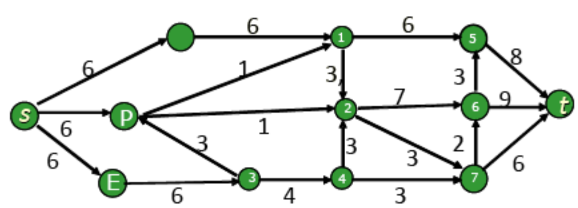

Figura 6: Red que modeliza el problema.

Recordemos que el flujo en una red verifica la ecuación de conservación, por lo que la ponderación realizada de los arcos ficticios no limita el flujo máximo, valor que nos indicará como deberíamos cargar los camiones. Si aplicamos el algoritmo de Ford-Fulkerson obtenemos el flujo máximo, valor de la derecha, representado en la figura 7.

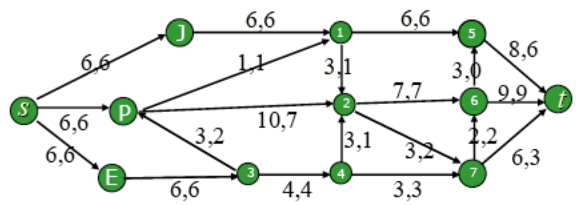

Figura 7: Flujo máximo.

Haciendo caso omiso del vértice s y los arcos ficticios, como vemos en la figura 8,

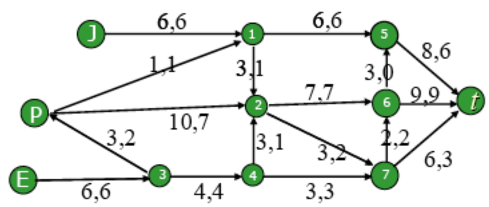

Figura 8: Solución al problema planteado.

observamos que podemos transportar las 6 unidades de carga deseadas de cada tipo de objeto.

4 Flujo máximo con restricción en los vértices

En este tipo de problemas encontramos restricciones en los vértices que impiden el flujo máximo posible sin dichas restricciones [4]. Construiremos una nueva red en la que un nodo ficticio sirva para controlar que la restricción impuesta se cumple. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 2.

Supongamos el mismo problema anterior pero con la restricción de que en un momento dado no hay suficientes operarios o maquinaria en el vértice 2 para cargar los camiones, estando la limitación en 5 unidades de carga.

Solución.

Teniendo en cuenta que una de las propiedades de un flujo definido en una red es que el flujo entrante en los vértices distintos de fuente y sumidero sea igual al saliente, obtendremos la solución a nuestro problema incorporando a la red un nuevo vértice, el $2'$, y un nuevo arco $(2, 2')$ con capacidad 5 que controla la salida del vértice 2, y reemplazando los arcos salientes de este vértice con dos arcos $(2', 6)$ y $(2', 7)$, con capacidades respectivas 7 y 3, como se ve en la figura 9.

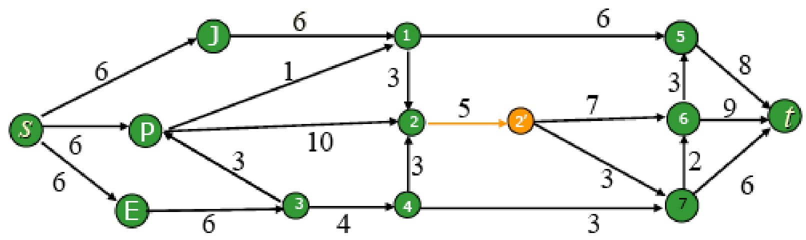

Figura 9: Red con el vértice ficticio.

Aplicando el algoritmo obtenemos

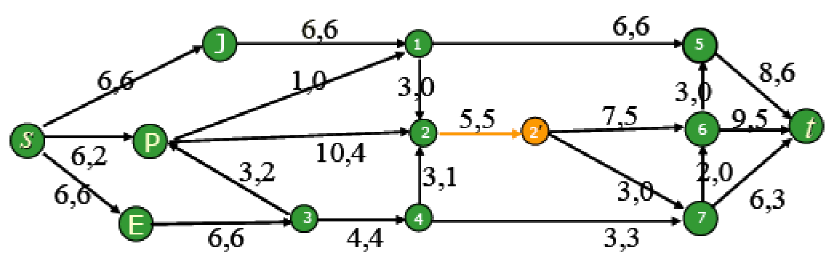

Figura 10: Flujo máximo en la red de la Figura 9.

de donde se deduce el flujo máximo deseado, tras eliminar el vértice y arcos ficticios

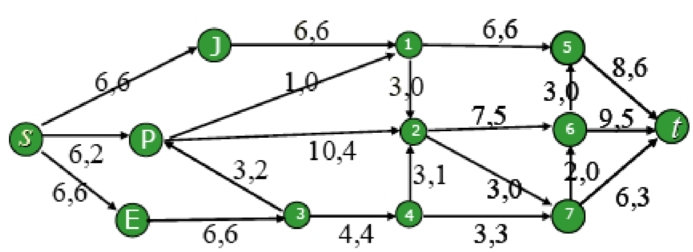

Figura 11: Flujo máximo en la red que modelizar el problema.

Observamos que en este caso el número máximo de unidades de carga que podemos transportar es 14, ya que no cargaríamos 4 de las correspondientes a papelería.

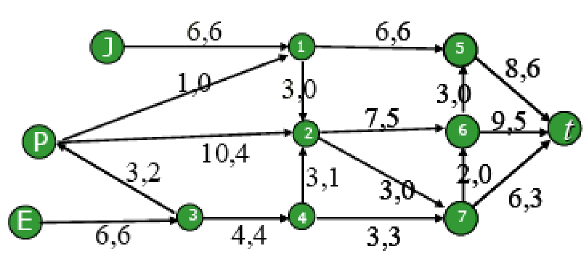

Figura 12: Solución del problema.

5 Poblema de transporte-almacenaje

En los problemas analizados hasta ahora aparecía siempre algún tipo de fluido que se desplazaba entre dos puntos, siendo el concepto de fluido tan amplio como para abarcar camiones transportando mercancías por carreteras o personas viajando en avión. Nos planteamos ahora situaciones en las que no circula ningún tipo de fluido y en las que la solución vendrá dada por la definición de una red abstracta. Presentamos a continuación a modo de ejemplo, y dentro del contexto planteado en las anteriores secciones, cómo resolver de forma óptima el transporte de una serie de contenedores de distintos productos en camiones de diferentes características y sujetos a ciertas restricciones. La red definida para su resolución nos da la pauta a seguir en la modelización necesaria para resolver problemas semejantes a éste.

Ejemplo 3.

Se necesita transportar un cierto número de productos:

Producto	Leche	Agua	Zumos	Queso	Yogur
N° contenedores	6	6	5	4	4

Figura 13: Productos y contenedores utilizados.

Para ello se dispone de 3 camiones de diferentes capacidades, dos de los cuales son frigoríficos.

Camión n°	1(Frig.)	2(Frig.)	3
N° contenedores	8	10	7

Figura 14: Camiones disponibles.

¿Es posible realizar el transporte teniendo en cuenta que:

1.- Los camiones llegan a destino a lo largo de la semana en el orden indicado.

2.- El número de contenedores por viaje de yogur y leche es como máximo de 3, y del resto de alimentos de 2.

3.- En el primer viaje debe llegar por lo menos un contenedor de leche y otro de lácteos?

Solución.

Comenzamos volcando toda la información presentada en un grafo con 5 vértices que representarán los distintos productos y 3 que representarán a los camiones.

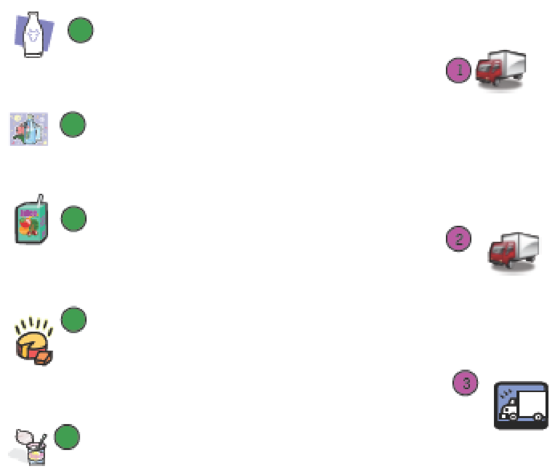

Figura 15: Primer paso en la construcción de la red.

De los diferentes vértices producto salen arcos hacia aquellos vértices camiones en los que se pueda transportar el producto en cuestión. Así, por ejemplo, de los yogures sólo salen arcos hacia los dos camiones frigorífico, puesto que deben ir refrigerados, mientras que de los bricks de zumo salen arcos hacia todos los camiones. La ponderación de estos arcos viene dada por las restricciones impuestas:

- Como en el primer viaje debe llegar por lo menos un contenedor de leche y otro de yogures, suponemos cargado el camión uno con ambos contenedores, lo que deja 5 de leche y tres de yogur por transportar.
- Como el número máximo de contenedores de yogur y leche es como máximo de tres en cada viaje, los arcos que salen de estos productos hacia el camión 1 estarán ponderados con 2 (ya hemos cargado previamente uno de cada), y los que se dirigen a los camiones 2 y 3 con 3.
- Los arcos que salen del agua, queso y zumos estarán ponderados con 2.

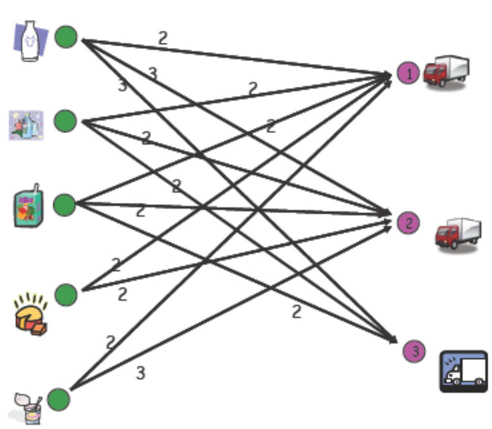

Figura 16: Segundo paso de la construcción de la red.

Para controlar que no excedamos el número de contenedores que cada camión puede cargar, definimos un nuevo vértice que hará las vértices de sumidero y al que llegan arcos de los vértices camiones, ponderados cada uno de ellos con la capacidad del camión.

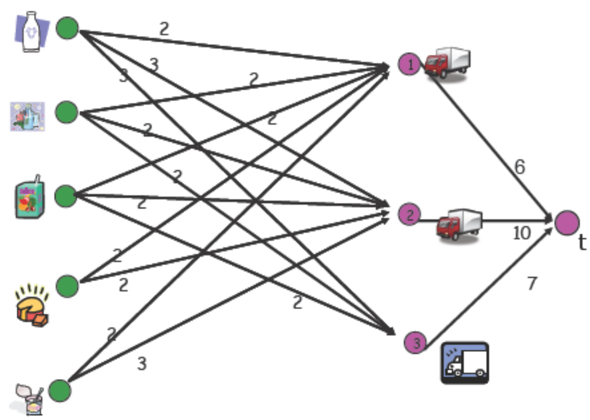

Figura 17: Tercer paso de la construcción de la red.

Finalmente, para controlar que no obtengamos como resultado enviar más contenedores de los existentes, definimos un nuevo vértice, que hará el papel de fuente, del que saldrán arcos a los vértices producto, ponderados con el número de contenedores de cada tipo a enviar.

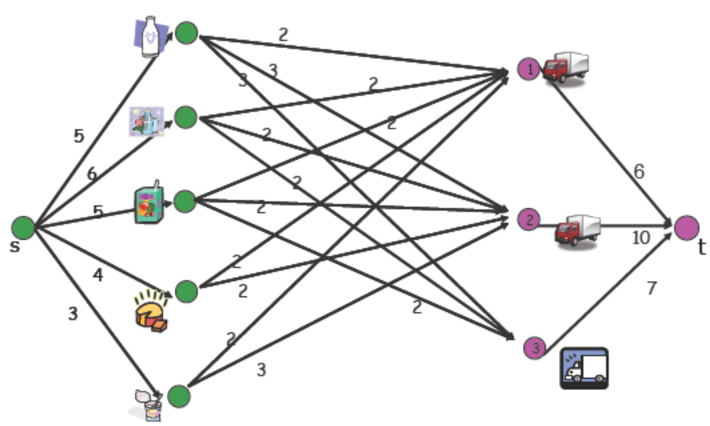

Figura 18: Red que modeliza el problema.

Observemos que los arcos que salen del vértice fuente y los que llegan al sumidero sirven para controlar dos de las condiciones: capacidad de los camiones y número de contenedores a enviar. El grafo así definido constituye una red. Si obtenemos el flujo máximo, sabremos qué contenedores enviar en que camión, si a los camiones les queda algún sitio libre o van a tope de su capacidad y si será posible o no enviar toda la mercancía. La aplicación del algoritmo de Ford-Fulkerson nos proporciona el flujo máximo reflejado en la figura 19.

Observamos por lo tanto, según se deduce de los flujos de los arcos que salen de s, que no hay ningún problema en enviar todos los productos solicitados, satisfaciendo además las restricciones impuestas, los camiones irán cargados al máximo en todos los viajes, como se deduce de los flujos que acompañan a los arcos que llegan a t, y el flujo de los arcos que van de productos a camiones nos indican cómo debemos repartir la carga cada vez.

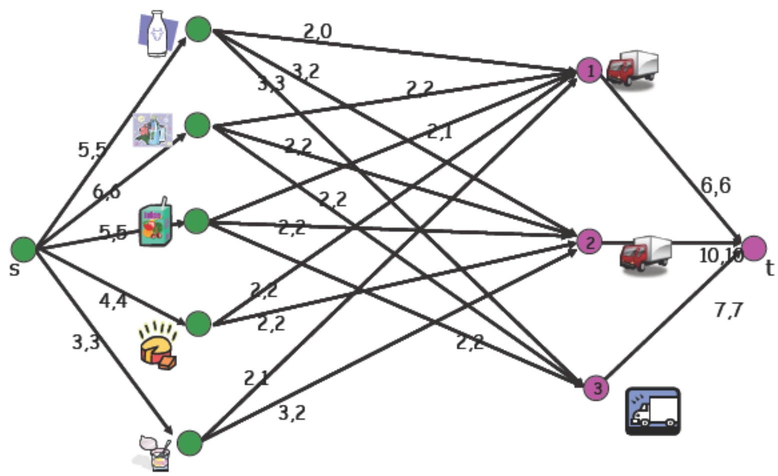

Figura 19: Flujo máximo de la red.

6 Conclusiones

En los ejemplos planteados la teoría de redes constituye una pequeñísima muestra de los problemas que se pueden resolver con esta materia, su amplia aplicabilidad y gran versatilidad. Existen muchos otros ejemplos tipo, que además de resolver problemas concretos abren el camino para que ayudados por nuestro ingenio e imaginación constituyan una importante y potente herramienta.

Referencias

[1] G. Chartrand, O.R. Oellerman, Applied and algorithmic graph theory, McGraw Hill 1993.

[2] A.Dolan, J.Aldous, Networks and algorithms, Wiley 1993.

[3] J. L. Gross, J. Yellen, Graph theory and its applications, Chapman&Hall, 2006.

[4] G. Hernández Peñalver, Grafos. Teoría y algoritmos, UPM 2003.