



Reducción a una fuerza puntual de la carga distribuida que actúa sobre una viga por analogía con un sistema continuo de vectores deslizantes. Aplicación a una carga triangular.

Apellidos, nombre	Gasque Albalate, María (mgasque@fis.upv.es) Llopis Cosín, Juan Vicente (jllopis@fis.upv.es)
Departamento	Física Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica y del Medio Natural Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

Este artículo se centra en el procedimiento de reducción de una carga distribuida que actúa sobre una viga a una sola fuerza puntual produciendo los mismos efectos mecánicos, aplicando la teoría de vectores deslizantes. Con objeto de facilitar la comprensión y utilidad de dicha teoría, así como de contextualizar el contenido, se resuelve en paralelo un ejemplo sencillo.

Se plantea la resolución de un caso teórico como modelo de un caso real, con datos proporcionados como valores alfanuméricos, lo que permite la obtención de resultados numéricos al sustituir valores, y la evaluación de los resultados en un amplio rango.

2 Introducción

La teoría de vectores deslizantes proporciona una herramienta muy adecuada para el estudio de la Mecánica Técnica o Ingeniería Mecánica utilizadas en los modelos planteados en Ingeniería. Así según el principio de transmisibilidad de las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido, es posible la aplicación de esta teoría al estudio de la Estática y la Dinámica. Por otra parte, la consideración de las rotaciones instantáneas como vectores deslizantes a efectos del cálculo de velocidades en el movimiento de un sólido rígido, también permite la utilización de los vectores deslizantes en el estudio de la Cinemática. De este modo una única teoría general permite el estudio de las tres partes de la mecánica con la gran ventaja que ello supone.

No obstante, el estudio de una teoría tan abstracta supone una dificultad importante al intentar relacionarla con los casos reales de aplicación en Ingeniería. Por ello la modelización de los casos reales mediante esta teoría ayuda a desarrollar esta capacidad de abstracción tan necesaria para pasar de la teoría a la práctica.

Por todo lo anterior, la metodología empleada en la resolución de un caso práctico presentado como una aplicación de la teoría puede contribuir al desarrollo de estas capacidades en los futuros Ingenieros.

3 Objetivos

Una vez que el estudiante haya leído con detenimiento este documento, será capaz de:

- Caracterizar un sistema continuo de vectores deslizantes identificando sus peculiaridades en la resolución de problemas.
- Plantear las hipótesis simplificadoras adecuadas que le permitan reducir un sistema continuo de vectores deslizantes a partir de los conocimientos básicos de la teoría de vectores deslizantes.
- Utilizar su capacidad de abstracción para su aplicación a un caso real.
- Plantear un problema con valores alfanuméricos, lo cual le permite el análisis posterior de distintas hipótesis de cargas para el modelo propuesto.

4 Desarrollo

4.1 Conocimientos previos

Para optimizar el aprovechamiento de este artículo, es fundamental el dominio con soltura de la notación y álgebra vectorial (suma, producto escalar, y producto vectorial de vectores libres), integración simple, y homogeneidad de fórmulas y ecuaciones.

Además, son necesarios algunos conocimientos previos básicos de vectores deslizantes:

- Concepto de Torsor de un sistema de vectores deslizantes (formado por la Resultante y el Momento resultante en el punto donde se calcula el Torsor).
- Eje central de un sistema de vectores deslizantes. Caso particular de los sistemas de vectores deslizantes de invariante fundamental nulo.
- Campo de momentos asociado al Torsor de un SVD (expresión que nos permite calcular el Momento resultante en un punto a partir de los elementos del Torsor en cualquier otro punto).

4.2 Enunciado del problema

Sobre la viga de la figura OA de longitud L actúa una carga distribuida de perfil triangular de ecuación $d\vec{F} = -\frac{q_0}{L}x dx \vec{j}$, donde q_0 es el valor de la fuerza por unidad de longitud en el extremo A de la viga (Imagen 1). Se pide calcular en función de los datos q_0 y L para la carga considerada como un sistema de vectores deslizantes:

- Torsor en el punto O.
- Eje central.
- Reducirlo a un único vector.

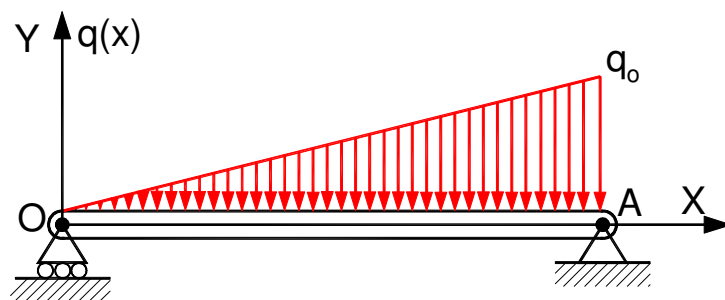


Imagen 1. Sistema de vectores deslizantes formado por una carga distribuida de perfil triangular actuando sobre la viga OA.

La fuerza $d\vec{F}$ define un sistema continuo de vectores deslizantes paralelos y representa la fuerza elemental que actúa sobre un elemento diferencial de longitud de la viga dx situado en un punto P genérico a una distancia x del extremo O de la viga, para $0 \leq x \leq L$

(Imagen 2), siendo $\frac{q_0}{L}x$ la fuerza por unidad de longitud que actúa en P .

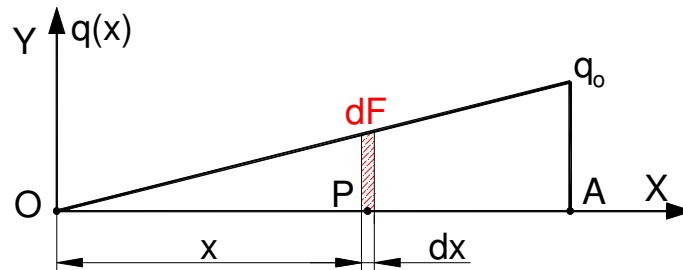


Imagen 2. Fuerza elemental dF sobre el elemento dx situado en P .

4.3 Cálculo del Torsor en O

El Torsor del sistema de vectores deslizantes $\left\{d\vec{F} = -\frac{q_0}{L}x dx \vec{j}, P(x,0,0)\right\}$ en el punto O lo constituyen la Resultante \vec{R} y el Momento resultante en O , \vec{M}_O : $T_O \equiv [\vec{R}; \vec{M}_O]$

4.3.1 Resultante del sistema de vectores deslizantes

La Resultante del sistema de vectores deslizantes es un vector libre que se calcula como la suma de los vectores del sistema: $\vec{R} = \int_{x=0}^{x=L} d\vec{F}$

Sustituyendo $d\vec{F}$ y resolviendo la integral:

$$\vec{R} = \int_0^L -\frac{q_0}{L}x dx \vec{j} = -\frac{q_0}{L} \vec{j} \int_0^L x dx = -\frac{q_0}{L} \vec{j} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = -\frac{q_0}{L} \vec{j} \left[\frac{L^2}{2} \right] = -\frac{q_0 L}{2} \vec{j}$$

Se obtiene la Resultante: $\vec{R} = -\frac{q_0 L}{2} \vec{j}$.

4.3.2 Momento resultante en el punto O

El Momento resultante del sistema de vectores deslizantes respecto del punto O , es el vector localizado en O que se determina como la suma de los momentos en O de cada uno de los vectores $d\vec{F}$ que componen el sistema:

$$\vec{M}_O = \int_{x=0}^{x=L} \vec{OP} \wedge d\vec{F}$$

En este caso, al ser los puntos $O(0,0,0)$, y $P(x,0,0)$, resulta el vector $\vec{OP} = x\vec{i}$

Sustituyendo \vec{OP} y $d\vec{F}$, y resolviendo la integral:

$$\vec{M}_O = \int_0^L \vec{OP} \wedge d\vec{F} = \int_0^L \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{q_0}{L}x dx & 0 \end{vmatrix} = \int_0^L -\frac{q_0}{L}x^2 dx \vec{k} = -\frac{q_0}{L} \vec{k} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = -\frac{q_0}{L} \vec{k} \left[\frac{L^3}{3} \right] = -\frac{q_0 L^2}{3} \vec{k}$$

Se obtiene el Momento resultante en O: $\vec{M}_O = -\frac{q_0 L^2}{3} \vec{k}$

Siendo por tanto el Torsor en O: $T_O \equiv \left[\vec{R} = -\frac{q_0 L}{2} \vec{j}; \vec{M}_O = -\frac{q_0 L^2}{3} \vec{k} \right]$

4.4 Cálculo del eje central

A partir del Torsor calculamos el invariante fundamental (producto escalar $\vec{M} \cdot \vec{R} = cte$), que en este caso será: $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$.

Se trata pues de un sistema de vectores deslizantes de invariante fundamental nulo, así la Resultante y el Momento son perpendiculares. Para estos sistemas el eje central es una recta paralela a la resultante y se calcula como el lugar geométrico de puntos de momento nulo.

Para calcular el eje central se plantea la ecuación del campo de momentos entre el punto O y el punto genérico E(x,y,z), perteneciente al eje central, imponiendo la condición $\vec{M}_E = 0$.

Ecuación del campo de momentos: $\vec{M}_E = \vec{M}_O + \vec{EO} \wedge \vec{R}$

Sabiendo que $\vec{M}_O = -\frac{q_0 L^2}{3} \vec{k}$; $\vec{R} = -\frac{q_0 L}{2} \vec{j}$; y $\vec{EO} = -x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$, sustituyendo:

$$\vec{M}_E = -\frac{q_0 L^2}{3} \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & -z \\ 0 & -\frac{q_0 L}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{q_0 L^2}{3} \vec{k} - \frac{q_0 L}{2} z \vec{i} + \frac{q_0 L}{2} x \vec{k}$$

Operando resulta:

$$\vec{M}_E = -\frac{q_0 L}{2} z \vec{i} + \left(-\frac{q_0 L^2}{3} + \frac{q_0 L}{2} x \right) \vec{k} = 0$$

E igualando a cero sus dos componentes:

$$-\frac{q_0 L}{2} z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\left(-\frac{q_0 L^2}{3} + \frac{q_0 L}{2} x \right) = 0 \Rightarrow \frac{q_0 L^2}{3} = \frac{q_0 L}{2} x \Rightarrow x = \frac{2L}{3}$$

Siendo el eje central la recta intersección de los dos planos de ecuación $\left. \begin{matrix} x = \frac{2L}{3} \\ z = 0 \end{matrix} \right\}$ que corta al eje OX en el punto $\left(\frac{2L}{3}, 0, 0\right)$ (Imagen 3)

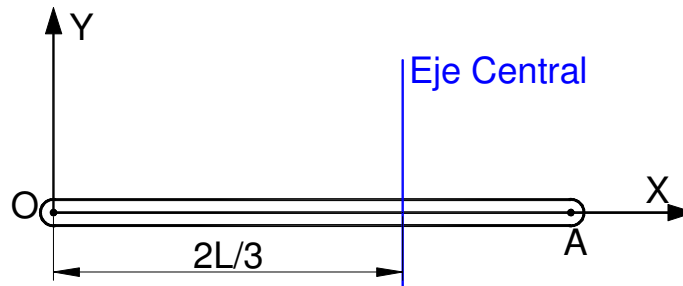


Imagen 3. Representación gráfica del eje central.

4.5 Reducción del sistema a un solo vector

La reducción más sencilla en sistemas de vectores deslizantes con invariante fundamental $\vec{M} \cdot \vec{R} = 0$ y $\vec{R} \neq 0$, es a un solo vector deslizante en el eje central.

Por lo tanto, en este caso, el sistema reducido a un solo vector lo constituye la Resultante como vector deslizante sobre el eje central como línea de acción, o en un punto de ésta:

Siendo la primera forma: $\left(\vec{R} = -\frac{q_0 L}{2} \vec{j}, \text{Línea de acción} \left\{ \begin{matrix} x = \frac{2L}{3} \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \right)$

y la segunda: $\left(\vec{R} = -\frac{q_0 L}{2} \vec{j}, \left(\frac{2L}{3}, 0, 0 \right) \right)$

Esto supone la sustitución de la carga distribuida por una sola fuerza \vec{R} como vector deslizante siendo un sistema equivalente, ya que ambos tienen el mismo Torsor y por lo tanto el mismo campo de Momentos, produciendo los mismos efectos mecánicos.

En la Imagen 4 se ha representado el sistema reducido.

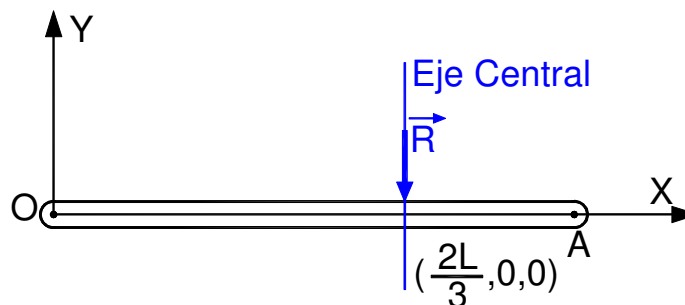


Imagen 4. Sistema reducido a un solo vector deslizante.



5 Cierre

En este artículo se resume el procedimiento de reducción de una carga distribuida de perfil triangular a una sola fuerza puntual produciendo los mismos efectos mecánicos aplicando la teoría de vectores deslizantes. Paralelamente se resuelve un caso práctico sencillo.

Se han repasado algunos de los conceptos básicos de la teoría necesarios para la caracterización de un sistema continuo de vectores deslizantes con la intención de proporcionar una metodología general clara y organizada que permita el análisis y resolución posterior de gran número de problemas con planteamientos similares.

6 Bibliografía

6.1 Libros:

R. Annequin y J. Boutigny. "Curso de ciencias físicas. Mecánica 2", Editorial Revertè, 1978, pág 48-58.

J. M. Bastero y J. Casellas. "Curso de mecánica", EUNSA, 1976, pág 29-30.

F. Belmar, A. Garmendia y J. Llinares. "Curso de física aplicada. Estática", SPUPV-87-330, 1987, pág 39-42.

C. Rubio, M. Gasque, J. V. Llopis, S. Quiles. 2013. "The theory of sliding vectors as a methodology for modelling systems of forces in technical subjects in engineering bachelor's degree". EDULEARN 13 Proceedings. Pp. 5691-5698. ISBN 978-84-616-3822-2.

6.2 Referencias de fuentes electrónicas:

Rubio Michavila, C.; Gasque Albalate, M. (2014). "Algebra vectorial". Universitat Politècnica de València. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10251/38571>.

Rubio Michavila, C.; Gasque Albalate, M. (2014). "Magnitudes escalares y vectoriales". Universitat Politècnica de València. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10251/38105>.

Llopis Cosín, JV.; Gasque Albalate, M.; Rubio Michavila, C. (2017). "La reducción de un sistema de vectores deslizantes como metodología para la simplificación del cálculo de cargas estructurales reales. Aplicación a un caso práctico". Universitat Politècnica de València. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10251/80754>.

Gasque Albalate, M.; Rubio Michavila, C.; Llopis Cosín, JV. (2017). Modelo simplificado de cargas sobre un puente metálico como un sistema discreto de vectores deslizantes. Caracterización mediante el Torsor. Universitat Politècnica de València. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10251/77872>.