SUMA 49
Junio 2005, pp. 15-23

Sobre el orden de magnitud de un número entero

En este artículo se introduce una función para calcular el número de dígitos de la parte entera de un número y se aplica para: evaluar la potencia de cada calculadora, estimar números muy grandes, demostrar desigualdades numéricas (involucrando factoriales, números combinatorios,...). A continuación, se muestra cómo las ideas anteriores sirven para demostrar un resultado clásico sobre productorios de una manera diferente. El trabajo acaba explicando una alternativa basada en el cambio de base del sistema de numeración para resolver algunos casos en que el método puede no proporcionar información.

In this article we introduce a function to calculate the number of digits of the integer part of a number and it is applied: to evaluate the power of every calculator, to estimate very big numbers, to demonstrate numerical inequalities (involving the factorial of a number, binomial numbers, ...). After that, we show how the previous ideas can be used to demonstrate a classic result on infinite products of a different way. The work is ended explaining an alternative based on the base change of the system of numeration to solve some cases in which the method cannot provide information.

El matemático norteamericano Edward Kasner pidió en una ocasión a su sobrino de nueve años que inventara un nombre para un número muy grande: diez elevado a cien, 10^{100}, un uno seguido de cien ceros. El niño le llamó un *gugol*. He aquí el número: 10. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. Cada uno de nosotros puede hacer números muy grandes y darles nombres extraños. Intentadlo. Tiene cierto encanto, especialmente si la edad de uno resulta ser nueve años (p. 219, Sagan, 1985). Seguramente la petición de Kasner a su sobrino no fue un capricho matemático. En efecto, son muchas las situaciones en el quehacer científico, en las cuales se requiere manejar números muy grandes: el control de una población en Microbiología o el cálculo del capital que obtendrá una empresa al invertir 10^{12} pesetas al cabo de 100 años a un interés compuesto trimestral del 13%, implican el manejo de grandes números. Basta dar un breve paseo por cualquier texto de Astronomía para que rápidamente nos abrumen y empequeñezcan esas cantidades inimaginables:

Carl Sagan

> Es posible que entre todas las galaxias haya 10^{23} planetas.

p. 5, Sagan, 1985.

> La masa del Sol es 1.989×10^{30} kg.

p. 4, Spiegel y Abellanas, 1997.

> El número de protones en el Universo Visible es 10^{80}

García Alcaine, 1997.

Algunos números grandes son tan importantes que reciben nombre propio: en Química la constante de Avogadro, $N=6{,}022\cdot10^{23}$ mol^{-1} (p. 4, Spiegel y Abellanas, 1997), en Física la constante de Skewes,

$$10^{10^{10^{34}}}$$

(García Alcaine, 1997).

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad politécnica de Valencia.

En Matemáticas también nos vemos muchas veces abocados a manejar números muy elevados: quién no recuerda el gran número de granos de trigo que debía pagar el rey indio Iadava al joven bracman, Lahur Sessa, que inventó el ajedrez para que el soberano saliese de una profunda melancolía y tristeza que por entonces le invadía (p. 100, Malba Tahan, 1988). También, problemas actuales como la búsqueda de números primos a través de los cuales se encriptan mensajes secretos requieren el uso de potentes ordenadores, pues implican el manejo de grandes números (Cilleruelo y Córdoba, 1992).

Estas páginas que siguen contienen parte de una investigación matemática, a distintos niveles de contenidos (universitarios y no universitarios), que nos han surgido a los autores desde la Resolución de problemas, en este caso concreto desde la preparación de nuestros alumnos para Olimpiadas Matemáticas, y sobre todo pretenden aportar una experiencia, la nuestra, de la riqueza que comporta el enfrentarse a este tipo de problemas, normalmente abiertos. En este sentido, todos los métodos de resolución que contiene el artículo son originales de los autores, y han surgido de la dinámica interactiva de resolver estos problemas (que no ejercicios) con nuestros alumnos.

El trabajo está estructurado como sigue. En primer lugar definiremos la función que nos da el orden de magnitud de un número real. A continuación daremos algunas aplicaciones para esta función, entre ellas la demostración de desigualdades numéricas. En el cuarto apartado daremos una estimación del número de dígitos del factorial de un número natural y aplicaremos este resultado para probar desigualdades numéricas y desigualdades en una variable. En la siguiente sección, acotamos el número de cifras de un número combinatorio. Para terminar demostraremos un conocido resultado sobre productos infinitos utilizando la función $\delta(x)$.

Definición de la función δ(x)

Estamos interesados en, dado un número real *x*, conocer su orden de magnitud o equivalentemente el número de cifras de su parte entera, [*x*], por lo que al ser el signo del número irrelevante, el dominio de la función $\delta(x)$ que nos proporciona el número de cifras de [*x*] será $\mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{llll} \delta: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & \delta(x) = \text{n.º de cifras de } [x] \end{array}$$

Para encontrar la expresión algebraica de $\delta(x)$ basta observar que

$$\delta(10^n) = 1 + n \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

y que

$$\delta(x) = 1 + [\log x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad (2)$$

(siendo *log x*, el logaritmo decimal), ya que, dado $x \in \mathbb{R}^+$ existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$10^n \leq x < 10^{n+1}$$

lo que nos indica que

$$\delta(x) = 1 + n$$

Ahora bien, a partir de la última desigualdad por ser la función *log x* creciente en $]0,+\infty[$ se tiene

$$\log 10^n \leq \log x < \log 10^{n+1}$$

esto es

$$n \leq \log x < n + 1$$

por tanto

$$\delta(x) = 1 + n = 1 + [\log x]$$

Obsérvese que efectivamente (2) generaliza (1), pues si $x=10^n$, entonces por (2)

$$\delta(10^n) = 1 + [\log 10^n] = 1 + n$$

Como veremos más adelante, en la práctica $\delta(x)$ nos será útil para *x* muy grandes, expresados a través de potencias, raíces, factoriales, números combinatorios....

Algunas aplicaciones de δ(*x*)

La limitación de nuestra calculadora

Las limitaciones físicas de cualquier máquina, en particular de una calculadora de bolsillo o de un ordenador personal hacen que ciertos cálculos no puedan realizarse en ellas. Así, con una calculadora científica (¡que poseen la mayoría de nuestros alumnos!) no es posible calcular 2^{400}, sin embargo, sí es posible evaluar 2^{300}; el resultado que se obtiene en pantalla, 2.037036^{90}, nos indica que 2^{300} tiene 91 dígitos. En efecto

$$\delta(2^{300}) = 1 + \left[\log 2^{300}\right] = 1 + \left[300 \cdot \log 2\right] = 91$$

Del mismo modo, aunque nuestra máquina no sea capaz de calcular 2^{400}, sí podemos decir su característica más relevante, esto es, su orden de magnitud

$$\delta(2^{400}) = 1 + \left[400 \cdot \log 2\right] = 121$$

Esto nos puede invitar a plantear muchas preguntas a nuestros alumnos, como por ejemplo, ¿hasta qué exponente será capaz tú calculadora de evaluar una potencia del tipo 3^n? ¿y 4^n? ¿y 5^n?...

Estimaciones de números

Ya hemos comentado en la introducción que en muchas ocasiones el orden de magnitud de un número muy grande es más interesante, en un primer momento, que quedar abrumados por su interminable expresión decimal. Así, por ejemplo, aunque nuestra calculadora no sea capaz de calcular $5432{,}1^{9021}$, sí podemos realizar una estimación de dicho número dando su orden de magnitud

$$\delta(5432{,}1^{9021}) = 1 + \left[9021 \cdot \log 5432{,}1\right] = 33694$$

Del mismo modo $\delta(x)$ nos servirá, por ejemplo, para hacernos una excelente idea del tamaño de los números de Fermat. Recordemos que Fermat conjeturó que todos los números de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

son primos. Los cuatro primeros números $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3=257$, $F_4 = 65537$ son, de esta manera, primos, pero Euler probó que $F_5 = 651 \cdot 67000417$ y por tanto la conjetura es falsa. Es más, nadie ha podido encontrar hasta la fecha un número primo de Fermat, F_n con $n > 4$. Recientemente se ha logrado factorizar el número de Fermat F_9 con ayuda de un ordenador en el Supercomputer Computacional Research Institute de la Universidad de Florida (p. 17, Cilleruelo y Córdoba, 1992). Aunque no conozcamos el valor de F_9 sí podemos saber, para realizar una estimación de su tamaño, el número de cifras que posee

$$\delta(F_9) = 1 + \left[\log\left(2^{2^9} + 1\right)\right] = 1 + \left[\log 2^{2^9}\right] = 1 + \left[2^9 \cdot \log 2\right] = 155$$

donde hemos utilizado que la parte entera de

$$\log\left(2^{2^9} + 1\right)$$

y la parte entera de

$$\log 2^{2^9}$$

coinciden, ya que para que al sumar una unidad al argumento, la parte entera del logaritmo cambie, se debería cumplir que

$$2^{2^9}$$

acabase en 9, lo cual sabemos que es falso porque las potencias de 2 siempre acaban en 2, 4, 6 u 8.

También podemos utilizar las propiedades de la función $\delta(x)$ para evaluar el número de dígitos de una suma. Así, por ejemplo, y como es bien sabido, la solución del problema del ajedrez (a la cual hicimos alusión en la introducción) es

$$G = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$$

Para conocer el número de cifras de G no es necesario saber sumar los n primeros términos de una progresión geométrica, pues

$$\delta(G) = \delta(2^{63}) = 1 + \left[63 \cdot \log 2\right] = 19$$

Prueba de desigualdades numéricas

Cuando se nos pide que intentemos demostrar una determinada desigualdad no trivial sobre números, parece poco probable que abordemos el problema intentando comparar el número de dígitos de la parte entera de cada número. Sin embargo, esta estrategia en ocasiones es muy útil. Para ponerlo de manifiesto hemos elegido un problema que apareció en una olimpiada matemática de la antigua URSS (p. 32, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993).

¿Qué número es mayor 1000^{1000} o 1001^{999}?

En primer lugar, conviene observar que aquí nuestra calculadora no aporta ninguna información, ya que es incapaz de evaluar cualquiera de los dos números, sin embargo observemos que como

$$\delta\left(1000^{1000}\right) = 1+\left[1000\cdot\log 1000\right] = 3001$$
$$\delta\left(1001^{999}\right) = 1+\left[999\cdot\log 1001\right] = 2998$$

entonces $1001^{999} < 1000^{1000}$. Es interesante contrastar la sencillez de esta solución con la dada en el texto (p. 32, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993), basada en una hábil manipulación después de la aplicación de la desigualdad

$$2 < (1+1/n)^n < 3$$

para todo n natural.

En este mismo texto encontramos otro problema del tipo anterior

¿Qué número es mayor 100^{300} o 300!?

(p. 32, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993), que nos conduce de un modo natural al siguiente apartado.

El orden de magnitud del factorial de un número

Dado $m\in IN$, en esta sección trataremos de calcular $\delta(m!)$. En realidad, el mejor resultado que alcanzaremos es una cota inferior y una cota superior de $\delta(m!)$.

Como una primera aproximación de $\delta(m!)$ podemos obtener la siguiente cota inferior

$$\delta(m!) = 1+\left[\log m!\right] = 1+\left[\sum_{k=1}^{m}\log k\right] \geq 1+\sum_{k=1}^{m}\left[\log k\right] =$$

observemos que como

$$\left\{\left[\log k\right]\right\}_{k=10}^{99} = 1 \qquad \left\{\left[\log k\right]\right\}_{k=100}^{999} = 2 \qquad \ldots$$

podemos continuar la igualdad anterior del siguiente modo

$$= 1+9\sum_{k=1}^{[\log m]-1} k\cdot 10^k + \left(m+1-10^{[\log m]}\right)\cdot\left[\log m\right] =$$

y evaluando la suma parcial enésima de la serie aritmético geométrica

$$9\sum_{k=1}^{n} k\cdot 10^k = n\cdot 10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-10}{9}$$

continuamos la última igualdad

$$= 1+\left(\left[\log m\right]-1\right)\cdot 10^{[\log m]} - \frac{1}{9}\cdot\left(10^{[\log m]}-10\right) +$$
$$+\left(m+1-10^{[\log m]}\right)\cdot\left[\log m\right] =$$
$$= \frac{1}{9}\cdot\left(19-10^{[\log m]+1}\right) + (m+1)\cdot\left[\log m\right]$$

por tanto

$$\delta(m!) \geq \frac{1}{9}\cdot\left(19-10^{[\log m]+1}\right) + (m+1)\cdot\left[\log m\right] \qquad (3)$$

Esta cota inferior de $\delta(m!)$ puede ser útil en algunas aplicaciones, como por ejemplo en el siguiente problema elegido para que ni la intuición ni la calculadora sean aplicables

¿Qué número es mayor 70^{49} o 100!?

Observemos que como

$$\delta\left(70^{49}\right) = 1+\left[49\cdot\log 70\right] = 91$$

$$\delta(100!) \geq \frac{1}{9}\cdot\left(19-10^{[\log 100]+1}\right) + (100+1)\cdot\left[\log 100\right] = 93$$

se deduce $100! > 70^{49}$.

Sin embargo, aunque en algunas aplicaciones la cota inferior de la fórmula (3) es útil, en la mayoría de los casos resulta muy burda. Así, por ejemplo, para resolver la cuestión: ¿Qué número es mayor 100^{300} o 300!? anteriormente planteada, (3) no nos sirve pues

$$\delta\left(100^{300}\right) = 1+\left[300\cdot\log 100\right] = 601$$

$$\delta(300!) \geq \frac{1}{9}\cdot\left(19-10^{[\log 300]+1}\right) + (300+1)\cdot\left[\log 300\right] = 493$$

En lo que sigue daremos una buena acotación para $\delta(m!)$. Para ello utilizaremos el siguiente resultado (p. 749, Apostol, 1989) debido a James Stirling

$$a_m = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m} < m! < \qquad (4)$$
$$< \sqrt{2\cdot\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\cdot\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m} = A_m$$

Observemos que por ser $\delta(x)$ monótona creciente se tiene

$$\delta\left(a_m\right) \le \delta\left(m!\right) \le \delta\left(A_m\right) \qquad (5)$$

y por otra parte

$$\delta\left(a_m\right) = 1 + \left[\log a_m\right] =$$
$$= 1 + \left[\log\sqrt{2\cdot\pi} + \frac{2\cdot m+1}{2}\cdot\log m - m\cdot\log e\right] \quad (6)$$

$$\delta\left(A_m\right) =$$
$$= 1 + \left[\log\sqrt{2\cdot\pi} + \frac{2\cdot m+1}{2}\cdot\log m - m\cdot\log e + \log\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m}\right] (7)$$

donde hemos aplicado las propiedades del logaritmo sobre el producto y la potenciación, ya que las cotas que buscamos deben ser en la práctica computables. Llamando

$$K_m = \log\sqrt{2\cdot\pi} + \frac{2\cdot m+1}{2}\cdot\log m - m\cdot\log e$$

tenemos

$$\delta\left(a_m\right) = 1 + \left[K_m\right]$$

$$\delta\left(A_m\right) = 1 + \left[K_m + \log\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m}\right]$$

Para $m \in IN$ se tiene

$$1 < 1 + \frac{1}{4\cdot m} < 2$$

luego

$$0 < \log\left(\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m}\right) < \log 2 < 1$$

por lo que de las últimas expresiones de $\delta\left(a_m\right)$ y $\delta\left(A_m\right)$ se deduce

$$D = \delta\left(A_m\right) - \delta\left(a_m\right) \in \{0,1\}$$

Esto nos garantiza que (6) y (7) son una excelente estimación del número de dígitos de *m!*. Cuando $D = 0$ (la mayoría de las aplicaciones prácticas) tendremos el valor exacto de $\delta(m!)$.

Ahora ya estamos en condiciones de resolver el problema que había quedado sin responder con la utilización de la cota (3). En efecto, obsérvese que por (6) y (7) respectivamente se tiene

$$\delta\left(a_{300}\right) =$$
$$= 1 + \left[\log\sqrt{2\cdot\pi} + \frac{2\cdot 300+1}{2}\cdot\log 300 - 300\cdot\log e\right] = 615$$

$$\delta\left(A_{300}\right) = 1 + [\log\sqrt{2\cdot\pi} + \frac{2\cdot 300+1}{2}\cdot\log 300 -$$
$$-300\cdot\log e + \log\frac{4\cdot 300+1}{4\cdot 300}] = 615$$

por tanto aplicando (5) se deduce que

$$\delta(300!) = 615$$

y como ya sabíamos que

$$\delta\left(100^{300}\right) = 601$$

se deduce que $300! > 100^{300}$. Ahora conviene observar que la cota inferior que nos dio (3) es en este caso muy mala. Asimismo, es interesante contrastar la técnica utilizada aquí, con la aplicada en la resolución de este problema dada en (p. 244, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993) o en (p. 22, Korovkin, 1976). Con nuestro método no sólo resolvemos el problema, sino que aportamos más información que las soluciones dadas en las referencias citadas, pues damos el número de cifras de cada número, lo cual nos dice, en nuestro caso particular, que 300! es *mucho mayor* que 100^{300}.

Hasta ahora en este apartado hemos utilizado las acotaciones de $\delta(m!)$ para establecer desigualdades numéricas tales como $70^{49} > 100!$ y $100^{300} > 300!$

En ocasiones nuestra técnica también puede ser útil para demostrar desigualdades en una variable como:

$$m! < \left(\frac{m+1}{2}\right)^m \qquad \forall m \geq 2 \quad (8)$$

Este resultado apareció como problema en una olimpiada matemática de la antigua URSS (p. 65, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993).

Para probar esto compararemos

$$\delta(m!)$$

y

$$\delta\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right)$$

Sabemos por (5) y (7) que

$$\delta(m!) \leq \delta(A_m) = 1 + \left[\log\left(\sqrt{2\cdot\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\cdot\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m}\right)\right] \quad (9)$$

y

$$\delta\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right) = 1 + \left[\log\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right] \quad (10)$$

Para demostrar (8) será suficiente probar

$$\delta\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right) > \delta(A_m) \qquad \forall m \geq m_0$$

(donde m_0 está aún por determinar), ya que entonces tan sólo faltará demostrar la desigualdad (8) en el conjunto de valores {2, 3, ..., m_0-1}. Ahora bien, si m_0 es suficientemente pequeño esto último se consigue con m_0-2 comprobaciones directas sobre (8).

Utilizando (9) y (10), para demostrar

$$\delta\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right) > \delta(A_m) \qquad \forall m \geq m_0$$

bastará probar

$$f(m) - g(m) \geq 1 \qquad \forall m \geq m_0$$

siendo

$$f(m) = \log\left(\frac{m+1}{2}\right)^m$$

y

$$g(m) = \log\sqrt{2\cdot\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)$$

Observemos que

$$f(m) - g(m) = \log\left(\left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)}\right)$$

si deseamos ver que

$$f(m) - g(m) \geq 1 \quad \forall m \geq m_0$$

es suficiente con demostrar

$$\left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)} \geq 10\ \forall m \geq m_0 \quad (11)$$

Para ello notemos que

$$\left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)} =$$

$$= \left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}}\cdot\frac{1+\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{4\cdot m}} =$$

$$= \left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}}\cdot\frac{4\cdot m+4}{4\cdot m+1} \geq$$

$$\geq \left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}} \geq$$

$$\geq \left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}}$$

y como la función

$$h(x) = \left(\frac{e}{2}\right)^x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}} \qquad x \in [1,+\infty[$$

cumple

$$h'(x) = \left(\frac{e}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2\cdot x} + \ln 2\right)\right) > 0 \quad \forall x \geq 2$$

y

$$h(15) \cong 10{,}27 \geq 10$$

se deduce que (11) se cumple para $m_0 = 15$.

Para terminar la demostración de (8) faltaría comprobar dicha desigualdad sobre el conjunto {2, 3, ..., 14}.

Es posible que entre todas las galaxias haya 10^{23} planetas.
Sagan, 1985.

El orden de magnitud de un número combinatorio

Ahora estudiamos el número de dígitos del número combinatorio

$$C_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} \qquad n,m \in IN \ y \ n \geq m$$

Como en el caso del factorial de un número, si $C_{n,m}$ es muy grande la aplicación de (2)

$$\delta\left(C_{n,m}\right) = 1 + \left[\log C_{n,m}\right]$$

puede no ser útil, debido a las limitaciones físicas de la computadora.

Para estudiar este problema aplicaremos los resultados obtenidos para el factorial de un número. Así, aplicando (4) sobre *m!*, *(n-m)!* y *n!* se deduce

$$\frac{a_n}{A_m \cdot A_{n-m}} < \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} < \frac{A_n}{a_m \cdot a_{n-m}}$$

luego

$$\delta\left(\frac{a_n}{A_m \cdot A_{n-m}}\right) \leq \delta\left(C_{n,m}\right) \leq \delta\left(\frac{A_n}{a_m \cdot a_{n-m}}\right) \quad (12)$$

Por otro lado se tiene (13):

$$\delta\left(\frac{a_n}{A_m \cdot A_{n-m}}\right) = 1 + \left[K_{n,m} + \log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right)}\right]$$

$$\delta\left(\frac{A_n}{a_m \cdot a_{n-m}}\right) = 1 + \left[K_{n,m} + \log\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)\right] \quad (14)$$

siendo

$$K_{n,m} = \frac{2\cdot n+1}{2}\log n - \frac{2\cdot m+1}{2}\cdot\log m - \\ -\log\sqrt{2\cdot\pi} - \frac{2\cdot n - 2\cdot m + 1}{2}\cdot\log(n-m) \quad (15)$$

Estudiaremos la diferencia

$$\log\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right) - \log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right)} = \\ = \log\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right)$$

Para ello observemos que como

$$1 < \left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right) < \left(1+\frac{1}{4}\right)^3$$

entonces por la monotonía de la función logaritmo

$$0 = \log 1 < \log\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right) < \\ < \log\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = 3\log\left(\frac{5}{4}\right)$$

por lo que al verificarse que

$$3\cdot\log\frac{5}{4} \cong 0.29 < 1$$

de (13) y (14) se deduce

$$\delta\left(\frac{A_n}{a_m \cdot a_{n-m}}\right)-\delta\left(\frac{a_n}{A_m \cdot A_{n-m}}\right)\in\{0,1\}$$

lo que garantiza que (12) es una buena acotación de

$$\delta\left(C_{n,m}\right)$$

Como aplicación demostraremos la siguiente desigualdad

$$\frac{2^{100}}{10\cdot\sqrt{2}}<C_{100,50}$$

propuesta en una olimpiada matemática (p. 32, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993).

Algunos números grandes son tan importantes que reciben nombre propio: la constante de Avogadro la constante de Skewes...

Nótese que por (13)-(15) se deduce

$$\delta\left(\frac{a_{100}}{A_{50}\cdot A_{50}}\right)=30=\delta\left(\frac{A_{100}}{a_{50}\cdot a_{50}}\right)$$

entonces de (12) se tiene

$$\delta\left(C_{100,50}\right)=30$$

y como

$$\delta\left(\frac{2^{100}}{10\cdot\sqrt{2}}\right)=1+\left[100\cdot\log 2-\log 10-\frac{1}{2}\cdot\log 2\right]=29$$

se concluye

$$\frac{2^{100}}{10\cdot\sqrt{2}}<C_{100,50}$$

Estudio de la convergencia de productos infinitos

Terminaremos este trabajo estableciendo, a través de la función $\delta(x)$, la equivalencia entre la convergencia de un producto infinito y su serie logarítmica asociada. Es bien sabido (p. 7, Rainville, 1971) que

$$\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right) \quad \text{de modo que } a_n\neq -1 \ \forall n\geq 1$$

y

$$\sum_{n\geq 1}\log\left(1+a_n\right)$$

tienen ambas el mismo carácter.

En la referencia antes citada podemos encontrar una prueba de este resultado. Nosotros demostraremos este teorema como una consecuencia natural de la teoría desarrollada acerca del número de dígitos de la parte entera de un número. En efecto, es claro que

$$\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right) \ \text{converge} \Leftrightarrow \delta\left(\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\right)<+\infty \quad (16)$$

por lo que como

$$\delta\left(\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\right)=1+\left[\log\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\right]=1+\left[\sum_{n\geq 1}\log\left(1+a_n\right)\right]$$

se deduce

$$\delta\left(\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\right)<+\infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}\log\left(1+a_n\right) \ \text{converge} \quad (17)$$

y en consecuencia de (16) y (17) se tiene el resultado deseado.

Conclusiones

El objeto de este trabajo no es dar un método para demostrar desigualdades numéricas, ni mucho menos funcionales. Conscientes de que esta técnica es demasiado burda para alcanzar tan altas cotas, estas páginas tan sólo pretenden mostrar, desde la inspiración que siempre aporta el resolver problemas de olimpiadas matemáticas, un modelo de trabajo para estimar grandes números expresados a través de sumas, potencias, raíces, factoriales... y probar desigualdades entre números muy grandes, mostrando algo más que los métodos convencionales: el orden de magnitud entre ambos números.

Lógicamente el talón de Aquiles de esta técnica es que no es útil para demostrar una desigualdad en la que el número de dígitos de ambos números es el mismo. Así por ejemplo, con ella no podemos responder al siguiente problema:

¿Qué número es mayor 2^{100} ó 3^{63}?

pues

$$\delta\left(2^{100}\right)=1+[100\cdot\log 2]=31=1+[63\cdot\log 3]=\delta\left(3^{63}\right)$$

Cuando esto suceda podemos aplicar la misma técnica averiguando el número de dígitos de los números en cuestión (en nuestro caso 2^{100} y 3^{63}) en un sistema de numeración cuya base sea menor que la decimal, como por ejemplo la base binaria. En efecto, este argumento se apoya en el hecho evidente de que

$$A_{(10}<B_{(10}\Leftrightarrow A_{(2}<B_{(2}$$

donde la notación $A_{(\alpha}$ significa que el número A está escrito en la base de numeración α. La idea se basa en que cuanto más pequeña es la base de numeración, menos números hay que tengan el mismo número de dígitos, con lo que más improbable será que nuestra técnica fracase. Por otra parte conviene observar que el hecho de trabajar en otra base de numeración no implica más cálculos adicionales, pues aplicando la fórmula de cambio de base logarítmica se tiene

$$\delta_2(x)=\delta\left(x_{(2}\right)=1+[\log_2 x]=1+\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$$

Aplicando esta idea a nuestro caso particular anterior se tiene

$$\delta_2\left(2^{100}\right)=1+\left[\frac{\log 2^{100}}{\log 2}\right]=1+\left[100\cdot\frac{\log 2}{\log 2}\right]=$$
$$=101>100=1+\left[63\cdot\frac{\log 3}{\log 2}\right]=\delta_2\left(3^{63}\right)$$

por lo que $3^{63}>2^{100}$. Naturalmente este problema está elegido con la única intención de ilustrar la idea de que el cambio de sistema de numeración nos puede ser útil cuando la técnica propuesta falle, ya que podríamos haber respondido a la cuestión anterior mediante razonamientos elementales. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T.M. (1989): *Calculus (vol. II)*, Ed. Reverté, Barcelona.

CILLERUELO, J. y CÓRDOBA A. (1992): *La Teoría de Números*, Ed. Mondadori, Madrid.

GARCÍA ALCAINE, G. (1997): "Los grandes números y la lejanía del infinito", *Revista Española de Física 11(2)*, 53-56.

GARCÍA TUÑÓN, P y ABASCAL FUENTES, P. (1994): "Introducción a la criptografía de la clave pública", *Revista Puig Adam 37*, 17-27.

KOROVKIN, P. P. (1976): *Desigualdades*, Ed. Mir (Colección Lecciones Populares de Matemáticas), Madrid.

MALBA TAHAN (1988): *El Hombre que Calculaba*, Ed. Antalbe, Barcelona.

RAINVILLE, E. D. (1971): *Special Functions*, Ed. Chelsea Publishing Company, New York.

SAGAN, C. (1985): *Cosmos*, Ed. Planeta, Barcelona.

SHKLARSKY, D.O., CHENTZOV N.N. y YAGLOM I.M. (1993): *The URSS Olympiad Problem*, Ed. Dover, New York.

SPIEGEL, M.R. y ABELLANAS L. (1997): *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, Ed. Mondadori, Madrid.

Estrella y poliedro

Fotos Francisco
Martín Casalderrey