

Document downloaded from:

<http://hdl.handle.net/10251/131737>

This paper must be cited as:

Marini, S. (2005). Análisis modal eficiente de dispositivos pasivos de microondas implementados con guías de sección transversal arbitraria [Tesis doctoral no publicada]. Universitat Politècnica de València. <https://doi.org/10.4995/Thesis/10251/131737>



The final publication is available at

Copyright Universitat Politècnica de València

Additional Information



**ANÁLISIS MODAL EFICIENTE
DE DISPOSITIVOS PASIVOS DE MICROONDAS
IMPLEMENTADOS CON GUÍAS
DE SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA**

Stephan Marini

**Directores: Dr. Vicente E. Boria Esbert,
Dr. Santiago Cogollos Borrás**

**Tesis Doctoral presentada en la Universidad Politécnica
de Valencia para la obtención del título de Doctor Inge-
niero de Telecomunicación
Valencia, Mayo 2005**

“Carpe Diem”

Ogni momento lieto che ti daranno gli dei,
afferralo al volo, con mano grata e
non rimandare al domani la gioia, così,
ovunque ti troverai, potrai dire di aver vissuto bene.

Da “Epistole” Orazio

A mi padre. A mi madre. A Cecilia.

Agradecimientos

Un día de finales de abril de 2001 recibí al mismo tiempo, a través de dos correos electrónicos, dos ofertas de trabajo. Apoyado por mi familia y por mi novia elegí irme a Valencia. Esta decisión cambió mi vida (y no sólo la mía). Ahora cuatro años después puedo afirmar, sin duda alguna, que repetiría esta maravillosa experiencia, además la aconsejaría a cualquier estudiante de doctorado extranjero.

En estas pocas líneas de agradecimientos espero no olvidarme involuntariamente de algunas personas, y en tal caso pido disculpas de antemano.

Quiero dirigir mi primer y mayor agradecimiento a la persona que ha hecho posible todo esto, Vicente Boria. Le agradezco su gran disponibilidad, porque cada vez que he tenido un problema (personal o profesional), he podido pasar por su despacho y siempre he salido con una aclaración o con una solución. En las diferentes discusiones que han tenido lugar durante el desarrollo de esta tesis su paciencia conmigo ha sido ilimitada; en toda mi carrera universitaria nunca había tenido un profesor que haya sido al mismo tiempo un gran maestro y un gran amigo. Sin duda puedo afirmar que ha sido el mejor director que podría haber tenido.

Quiero agradecer a Santiago Cogollos el haberme seguido y ayudado a acabar en estos últimos dos años el trabajo propuesto, y a Pablo Soto el haberme dedicado mucho de su tiempo durante el primer año y medio de mi estancia. Gracias a ellos he aprendido mucho, tanto en la programación como en la teoría del electromagnetismo.

Agradezco a Ana Vidal y a Héctor Esteban sus ayudas en la parte gráfica y estética de esta tesis, y por sus consejos sobre \LaTeX . Quiero también agradecer a Benito Gimeno y a muchos profesores del Departamento de Comunicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia el haberme apoyado y ayudado cuando lo he necesitado.

Quiero mencionar también a José Vicente Morro, Daniele Camilleri, Ángel San Blas y Carmen Bachiller, compañeros durante todos los estudios de doctorado, así como a todos los compañeros del laboratorio de radiocomunicaciones y del grupo de Aplicaciones de las Microondas con los cuales he compartido cuatro años estupendos. En particular quiero agradecer a Mária Taroncher, Luis Javier Roglá, Jordi Gil y Jorge Carbonell por ayudarme constantemente en mis dudas sobre el castellano en la escritura de esta tesis.

A todos mis amigos del equipo de voleibol de la Universidad Politécnica de Valencia, que nunca olvidaré: gracias por todos los maravillosos momentos que hemos pasado juntos, vuestra amistad ha hecho que nunca me haya sentido solo.

Y por último agradezco a mis padres y a mi novia su apoyo y por estar siempre ahí. Sus palabras de ánimo me han ayudado a superar los momentos difíciles; todo el trabajo realizado en esta tesis se lo dedico a ellos, que siempre han confiado en mí y que en estos últimos meses no han pasado muy buenos momentos.

Valencia
12 de Abril de 2005

Stephan Marini

Resumen

El objetivo general de esta tesis es el desarrollo de una herramienta básica general para el análisis de dispositivos pasivos de microondas y ondas milimétricas usados en la nueva generación de sistemas de comunicaciones. En particular, el trabajo se centra en desarrollar una herramienta para una eficiente y precisa caracterización modal de dispositivos pasivos constituidos por guías de onda de sección transversal arbitraria.

Para cumplir con este objetivo se propone extender un método surgido recientemente y llamado BI-RME (*Boundary Integral - Resonant Mode Expansion*, que en español significa Integral de Contorno - Expansión Modal Resonante). Este método se ha revelado como uno de los más adecuados, por su tremenda eficiencia computacional, para caracterizar modalmente las guías de sección transversal arbitraria. Respecto al método BI-RME original se pretende mejorar la precisión y la eficiencia en presencia de perturbaciones circulares y elípticas en el contorno de las guías a estudiar.

El primer trabajo de la tesis consiste entonces en extender la teoría del método BI-RME a geometrías circulares y elípticas incluyendo la posibilidad de conectar estos dos nuevos tipos de arcos (circulares y elípticos) con los tramos rectos usados hasta ahora en la implementación práctica del método.

Con el objeto de validar la nueva teoría desarrollada se calcula un conjunto de parámetros, como las frecuencias de corte, la longitud de onda de corte o el campo electromagnético, que caracterizan guías canónicas y guías arbitrarias de interés práctico, y se comparan los resultados obtenidos con las soluciones analíticas conocidas o resultados publicados en la literatura.

Una vez obtenida la carta modal de las diferentes guías de sección transversal arbitraria, el paso siguiente es calcular las integrales de acoplo entre estos modos y los modos de la guía rectangular que encierra completamente el contorno arbitrario. Tales integrales son fundamentales para el análisis modal de estructuras pasivas de microondas constituidas por transiciones planares entre guías de sección transversal distinta.

Para estudiar estas estructuras pasivas, se integra la nueva y extendida técnica BI-RME propuesta en una herramienta informática basada en el método de la ecuación integral, el cual permite caracterizar eficientemente transiciones planares mediante matrices de inmitancia (admitancia o impedancia). Este método de análisis electromagnético *full-wave* necesita el espectro modal de cada una de las guías que forman las transiciones, así como las integrales de acoplo entre los modos de las dos guías adyacentes que constituyen la discontinuidad. En el caso de guías rectangulares, dicha información modal se puede obtener fácilmente de forma analítica. Sin embargo cuando una guía o las dos tienen una sección transversal arbitraria, esta información se puede obtener de forma eficiente y precisa mediante el método BI-RME.

El empleo del método de la ecuación integral basado en matrices de admitancias o de impedancias para caracterizar dispositivos integrados por guías conectadas en cascada resulta especialmente ventajoso, pues conduce a un sistema de ecuaciones lineales a resolver cuya matriz de coeficientes presenta una estructura en banda, característica que puede explotarse adecuadamente para incrementar la eficiencia computacional asociada a la resolución del citado sistema, y reducir considerablemente el coste asociado al análisis de dispositivos complejos.

A continuación se demuestra como en guías de sección transversal arbitraria con uno o dos ejes de simetría se puede generar, también mediante el método BI-RME, toda la familia de modos de dicha guía de manera que verifiquen una cierta condición de contorno ficticia de pared eléctrica o pared magnética en el plano de simetría, y se discuten las ventajas computacionales respecto a calcular todos los modos simultáneamente. Además, las distintas familias de simetría se propagan de forma independiente a lo largo de estructuras constituidas por una conexión en cascada de guías uniformes que presentan la misma simetría. Dicha situación se puede explotar para aumentar de forma notable la eficiencia del simulador electromagnético.

Verificada con éxito la eficiencia y precisión de la nueva herramienta informática desarrollada mediante el análisis de transiciones publicadas en la bibliografía técnica relacionada, se analizan dispositivos pasivos realmente complejos, tales como un filtro con ventanas de acoplo inductivas y tornillos de sintonía, un filtro con esquinas redondeadas, filtros de modo dual en guía circular con iris elípticos o en guía elíptica, un filtro de modo evanescente, un filtro paso bajo en guía coaxial, y finalmente un nuevo girador de polarización de 90° para aplicaciones espaciales. Los resultados son completamente validados mediante comparación con otros publicados en la bibliografía técnica relacionada, o bien mediante las medidas de las respuestas asociadas a unas implementaciones prácticas de las estructuras analizadas.

Finalmente se extraen las conclusiones de la tesis y se indican posibles líneas de investigación futuras. Se indican también las publicaciones en revistas y las comunicaciones en congresos a que ha dado lugar el trabajo desarrollado en el marco de esta tesis.

Resum

L'objectiu general d'esta tesi és el desenrotllament d'una ferramenta bàsica general per a l'anàlisi de dispositius passius de microones i ones mil·limètriques usats en la nova generació de sistemes de comunicacions. En particular, el treball se centra en desenrotllar una ferramenta per a una eficient i precisa caracterització modal de dispositius passius constituïts per guies d'ona de secció transversal arbitrària.

Per a complir amb este objectiu es proposa estendre un mètode sorgit recentment i anomenat BI-RME (*Boundary Integral - Resonant Mode Expansion*, que en valencià significa Integral de Contorn - Expansió Modal Ressonant). Este mètode s'ha revelat com un dels mes adequats, per la seua tremenda eficiència computacional, per a caracteritzar modalment les guies de secció transversal arbitrària. Respecte al mètode BI-RME original es pretén millorar la precisió i l'eficiència en presència de pertorbacions circulars i el·líptiques en el contorn de les guies a estudiar.

El primer treball de la tesi consistix aleshores a estendre la teoria del mètode BI-RME a geometries circulars i el·líptiques incloent la possibilitat de connectar estos dos nous tipus d'arcs (circulars i el·líptics) amb els trams rectes usats fins ara en la implementació pràctica del mètode.

Amb l'objecte de validar la nova teoria desenrotllada es calcula un conjunt de paràmetres, com les freqüències de tall, la longitud d'ona de tall o el camp electromagnètic, que caracteritzen guies canòniques i guies arbitràries d'interés pràctic, i es comparen els resultats obtinguts amb les solucions analítiques conegudes o resultats publicats en la literatura.

Una vegada obtinguda la carta modal de les diferents guies de secció transversal arbitrària, el pas següent és calcular les integrals d'acoblament entre estos modes i els modes de la guia rectangular que tanca completament el contorn arbitrari. Tals integrals són fonamentals per a l'anàlisi modal d'estructures passives de microones constituïdes per transicions planars entre guies de secció transversal distinta.

Amb eixa finalitat, s'integra la nova i estesa tècnica BI-RME proposta en una ferramenta informàtica basada en el mètode de l'equació integral, el qual permet caracteritzar eficientment transicions planars per mitjà de matrius d'inmitància (admitància o impedància). Este mètode d'anàlisi electromagnètica *full-wave* necessita l'espectre modal de cadascuna de les guies que formen les transicions, així com les integrals d'acoblament entre els modes de les dos guies adjacents que constituïxen la discontinuïtat. En el cas de guies rectangulars, dita informació modal es pot obtindre fàcilment de forma analítica. No obstant quan una guia o les dos tenen una secció transversal arbitrària, esta informació es pot obtindre de forma eficient i precisa per mitjà del mètode BI-RME.

L'ús del mètode de l'equació integral basat en matrius d'admitàncies o d'impedàncies per a caracteritzar dispositius integrats per guies connectades en cascada resulta especialment avançat, perquè condueix a un sistema d'equacions lineals a resoldre la matriu de coeficients del qual presenta una estructura en banda, característica que pot explotar-se adequadament per a incrementar l'eficiència computacional associada a la resolució del citat sistema, i reduir considerablement el cost associat a l'anàlisi de dispositius complexos.

A continuació es demostra com en guies de secció transversal arbitrària amb un o dos eixos de simetria es pot generar, també per mitjà del mètode BI-RME, tota la família de modes de dita guia de manera que verifiquen una certa condició de contorn fictícia de paret elèctrica o paret magnètica en el pla de simetria, i es discuteix els avantatges computacionals respecte a calcular tots els modes simultàniament. A més, les distintes famílies de simetria es propaguen de forma independent al llarg d'estructures constituïdes per una connexió en trencada de guies uniformes que tenen les mateixes propietats de simetria. La dita situació es pot explotar per a augmentar de forma notable l'eficiència del simulador electromagnètic.

Verificada amb èxit l'eficiència i precisió de la nova ferramenta informàtica desenvolupada per mitjà de l'anàlisi de transicions publicades en la bibliografia tècnica relacionada, s'analitzen dispositius passius realment complexos, tals com un filtre amb finestres d'acoblament inductives i tornels de sintonia, un filtre amb cantons arrodonits, filtres de modo dual en guia circular amb iris el·líptics o en guia el·líptica, un filtre de modo evanescent, un filtre pas baix en guia coaxial, i finalment un nou girador de polarització de 90° per a aplicacions espacials. Els resultats són completament validats per mitjançant la comparació amb altres publicats en la bibliografia tècnica relacionada, o bé per mitjà de les mesures de les respostes associades a unes implementacions pràctiques de les estructures analitzades.

Finalment s'extrauen les conclusions de la tesi i s'indiquen possibles línies d'investigació futures. S'indiquen també les publicacions en revistes i les comunicacions en congressos a què ha donat lloc el treball desenvolupat en el marc d'esta tesi.

Abstract

The general goal of this thesis is the development of a basic tool for the analysis of passive microwave and millimetre-wave devices used in the new generation of communication systems. In particular, the work is focused on the development of a tool for an efficient and accurate modal characterization of passive devices composed of waveguides with arbitrary cross section.

In order to achieve this goal, a method recently arisen and called BI-RME (Boundary Integral - Resonant Mode Expansion) is extended. This method has been revealed as one of the most appropriate, for its high computational efficiency, to characterize waveguides with arbitrary cross section. Regarding the original BI-RME method, this one will improve the precision and the efficiency of the modal solution in presence of circular and elliptic perturbations in the arbitrary waveguide contour.

Then, the first work consists on extending the original BI-RME method theory to circular and elliptic geometries including the possibility to connect these two new types of segments (circular and elliptic) with the straight segments used until now in the practical implementation of the method.

In order to validate the new developed theory, a set of parameters as the cut-off frequencies, the cut-off wavelengths or the electromagnetic fields of canonical waveguides and arbitrarily shaped waveguides of great practical interest, are calculated. These results are compared with analytical well-known solutions or results published in the literature.

Once the electromagnetic modal chart of different arbitrarily shaped waveguides is obtained, the following step is the computation of the coupling integrals between these modes and the ones of the rectangular waveguide that completely surrounds the arbitrary contour. Such integrals are essential for the modal analysis of microwave passive structures involving waveguides with arbitrary cross section.

For this purpose, the new extended BI-RME method is included into a software package tool based on the integral equation method, which allows to characterize efficiently waveguide discontinuities by means of admittance matrices (admittance or impedance). This efficient full-wave analysis method requires the knowledge of the modal chart related to all the waveguides included in the devices under consideration, as well as the coupling integrals between the modes of the two waveguides composing the discontinuity. In the rectangular waveguides case this modal information can be easily obtained in an analytical way. However, when a waveguide or both have arbitrary cross section, the accurate and efficient modal analysis can be obtained by means of the BI-RME method.

The use of the integral equation method based on admittance or impedance matrices to characterize devices composed of cascading waveguides is specially advantageous because it leads

to a linear system of equations. The coefficients matrix of this linear system presents a banded structure that can be appropriately exploited to increase the computational efficiency associated to the resolution of the aforementioned system, and to reduce considerably the computational cost associated to the analysis of complex devices.

Next step is the demonstration that in waveguides with arbitrary cross section and with one or two symmetry axes you can generate, also by means of the BI-RME method, the whole family of waveguide modes, so that they verify a certain fictitious boundary condition of electric or magnetic walls in the symmetry plane, and the advantages regarding the computation of the modes are discussed. Furthermore, those different symmetry families of waveguide modes propagate in an independent way along the structures constituted by a connection of uniform waveguides. This situation can also be exploited to increase in a remarkable way the efficiency of the Computer-Aided-Design (CAD) electromagnetic software packages.

Once verified with success the efficiency and precision of the new CAD tool developed by means of the analysis of transitions published in the related technical bibliography, the analysis of really complex passive waveguide devices is performed. Some passive waveguide devices analyzed are for instance a filter with inductive coupling windows and tuning screws, a filter with rounded corners, dual mode filters in circular waveguide with elliptic irises or in elliptic waveguides, an evanescent filter, a low bandpass filter in coaxial waveguide, and finally a new 90° twist component for space applications. The simulated results are totally validated by means of comparison with other data published in the related technical bibliography, or by means of measurements of manufactured prototypes.

Finally, the conclusions of this work are extracted and future research lines are outlined. Publications in journal and congress presentations in the framework of this thesis are also indicated.

Índice

Agradecimientos	V
Resumen	VII
Resum	IX
Abstract	XI
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Estado del arte	2
1.2.1. Análisis modal de guías de sección transversal arbitraria	2
1.2.2. Análisis de estructuras pasivas de microondas	4
1.3. Objetivos de la tesis	5
1.4. Estructura de la tesis	6
2. Extensión del método BI-RME a geometrías circulares y elípticas	9
2.1. Introducción	9
2.2. El método BI-RME	10
2.2.1. Modos TM	14
2.2.2. Modos TE	15
2.2.3. Modos TEM	16
2.2.4. Elementos singulares: caso TM	17
2.2.5. Elementos singulares: caso TE	21
2.2.6. Combinación de segmentos lineales, circulares y elípticos	24
2.2.7. Ejemplos: carta modal de guías canónicas	25
2.3. Cálculo de las integrales de acoplamiento	31
2.3.1. Integrales de acoplo TE-TE	34
2.3.2. Integrales de acoplo TE-TM	34
2.3.3. Integrales de acoplo TE-TEM	35
2.3.4. Integrales de acoplo TM-TE	35
2.3.5. Integrales de acoplo TM-TM	35
2.3.6. Integrales de acoplo TM-TEM	35
2.3.7. Comentarios	36

2.3.8.	Ejemplo de validación	36
2.4.	Cálculo del campo electromagnético y algoritmo de descarte modal	37
2.4.1.	Región de interés y algoritmo de descarte modal	40
2.4.2.	Cálculo de los puntos de evaluación	42
2.4.3.	Ejemplos de cálculo del campo electromagnético	43
3.	Análisis de transiciones mediante el método de la ecuación integral	49
3.1.	Introducción	49
3.2.	El método de la ecuación integral	50
3.3.	Integrales de acoplo entre modos de dos guías arbitrarias	61
3.3.1.	Ejemplos de integrales de acoplo entre dos guías arbitrarias	64
3.4.	Análisis de transiciones	66
3.4.1.	Ejemplo de aplicación 1	66
3.4.2.	Ejemplo de aplicación 2	68
3.4.3.	Ejemplo de aplicación 3	68
3.4.4.	Ejemplo de aplicación 4	70
3.4.5.	Ejemplo de aplicación 5	72
3.4.6.	Ejemplo de aplicación 6	73
4.	Propiedades de simetría	75
4.1.	Introducción	75
4.2.	Propiedades de simetría en guías	76
4.2.1.	Modos TM	76
4.2.2.	Modos TE	79
4.2.3.	Modos TEM	81
4.3.	Generación de los modos en una guía simétrica mediante el método BI-RME	85
4.3.1.	Ejemplos	91
4.3.2.	Conclusiones	92
4.4.	Propiedades de simetría en estructuras	94
4.4.1.	Acoplamientos en una discontinuidad planar simétrica entre guías	94
4.4.2.	Aplicación a estructuras pasivas	100
4.4.3.	Ejemplos de transiciones analizadas aprovechando simetría	101
5.	Análisis de dispositivos pasivos con guías de sección transversal arbitraria	105
5.1.	Introducción	105
5.2.	Conexión de discontinuidades y resolución de sistemas de ecuaciones lineales	106
5.3.	Análisis eficiente y riguroso de dispositivos pasivos	119
5.3.1.	Análisis de un dispositivo constituido por dos cavidades circulares acopladas a través de un iris elíptico	119
5.3.2.	Análisis de un filtro paso banda en guía rectangular con ventanas de acoplo inductivas y tornillos de sintonía	120
5.3.3.	Análisis de un filtro inductivo en guía rectangular con esquinas redondeadas	122
5.3.4.	Análisis de un filtro de modo dual de banda estrecha en guía elíptica	125

5.3.5.	Análisis de un filtro pasa banda en guía circular con iris elípticos	128
5.3.6.	Análisis de un filtro paso bajo en guía coaxial	131
5.3.7.	Análisis de un filtro de modo evanescente paso banda	134
5.3.8.	Análisis de un girador de polarización de 90° para aplicaciones espaciales en banda K	138
6.	Conclusiones y líneas futuras	143
A.	Ortonormalización de los modos TEM	147
B.	Expresiones analíticas de las integrales singulares	151
C.	Cálculo del área de una guía de sección arbitraria	155
C.1.	Integrales de línea sobre tramos lineales	156
C.2.	Integrales de línea sobre tramos circulares	157
C.3.	Integrales de línea sobre tramos elípticos	158
D.	Desacoplo de modos cuasi-degenerados	161
E.	Cálculo de la distancia de un punto a una elipse	165
E.1.	Solución clásica del problema	165
E.2.	Solución aproximada	167
E.2.1.	Procedimiento para arcos de elipse	168
E.2.2.	Algoritmo para arcos de elipse	170
F.	Publicaciones	173
F.1.	Artículos en revista de ámbito internacional	173
F.2.	Congresos	173

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La complejidad de las modernas técnicas de análisis de dispositivos pasivos de microondas ha sufrido un gran incremento en los últimos tiempos impulsada por el aumento de los servicios de telecomunicación en las bandas de microondas y ondas milimétricas. El objetivo de estas técnicas es mejorar la precisión y eficiencia computacional en el análisis del comportamiento de dispositivos pasivos de microondas y, además, poder realizar un mejor diseño con herramientas CAD (del inglés *Computer Aided Design*) de diseño asistido por ordenador.

Los nuevos servicios multimedia utilizan sistemas de comunicaciones de banda ancha para facilitar el intercambio mundial de información. Estos servicios requieren una mejor tecnología, por lo que, debido a la saturación del espectro radioeléctrico, deben operar en las bandas altas del espectro. Así pues, si los primeros satélites de comunicación operaban a bajas frecuencias (6/4 GHz y 8/7 GHz), los más modernos ya se encuentran prestando servicios de banda ancha a frecuencias más altas (14/12 GHz), y es de esperar en los próximos años un salto a la banda de frecuencias *Ka* (26.5/40 GHz). Este constante aumento de las frecuencias portadoras ha supuesto una creciente complejidad en el diseño y fabricación de los equipos de comunicación de los satélites y, por tanto, de los dispositivos pasivos de microondas que constituyen un elemento esencial de dichos equipos. En general, este incremento de la frecuencia de trabajo supone la ventaja de una disminución del tamaño físico y peso de los dispositivos. En contrapartida a esta disminución de tamaño han surgido varios inconvenientes, como por ejemplo la necesidad de mayor precisión en los procesos de fabricación, mayores restricciones, elevada sensibilidad del diseño final a tolerancias mecánicas, y un elevado coste económico de los procesos de fabricación.

Todos estos inconvenientes han generado un gran interés entre la comunidad científica actual. Cualquier avance en el sentido de eliminar los inconvenientes anteriores permitiría reducir los costes, tanto económicos como temporales, asociados al análisis y diseño de la nueva generación de sistemas de comunicaciones, contribuyendo en una mejora de la tecnología y a la plena explotación de las nuevas aplicaciones multimedia.

En las últimas dos décadas, se han fabricado un gran número de dispositivos pasivos en guías de onda para aplicaciones de telecomunicación en la banda de microondas y ondas mi-

limétricas. La mayor parte de dichos dispositivos pueden ser modelados considerando todo el circuito como una conexión en cascada de discontinuidades entre guías. La mayoría de estas guías de onda presentan una sección transversal arbitraria. Por ejemplo, guías rectangulares o circulares con reentrantes (en inglés *ridge*) [1, 2], así como iris en forma de cruz [3, 4], se utilizan frecuentemente en filtros resonadores de modo dual. Las guías rectangulares con múltiples entrantes (*multiridge*) se han utilizado como elementos sintonizadores en filtros coaxiales [5], siendo también elementos fundamentales en los filtros doblemente corrugados [6]. Recientemente, debido a los efectos de mecanización de las principales técnicas de fabricación de componentes en guía de onda, se ha empezado a investigar el efecto de la presencia de esquinas redondeadas en las aplicaciones guiadas [7] y radiadas [8]. Otro ejemplo de gran interés es la guía elíptica, que ha encontrado una importante aplicación en los filtros de modo dual [9, 10] y modo triple [11], en los polarizadores [12], en las estructuras radiantes [13], en los resonadores [14], y en bocinas corrugadas [15].

Por lo tanto, el estudio de la propagación electromagnética en guías de onda de sección transversal arbitraria se ha convertido en un problema de gran interés. Sin embargo, actualmente existen muy pocas herramientas informáticas que se dediquen al análisis de este tipo de dispositivos, y además las pocas herramientas disponibles son herramientas dedicadas a aplicaciones y dispositivos específicos. En este contexto, el trabajo realizado en esta tesis se centra en desarrollar una herramienta básica general para el análisis de una amplia clase de dispositivos con guías de sección transversal arbitraria, contribuyendo a reducir al mismo tiempo los costes económicos y temporales del diseño y fabricación de la nueva generación de sistemas de comunicaciones.

1.2. Estado del arte

1.2.1. Análisis modal de guías de sección transversal arbitraria

En la literatura se pueden encontrar diferentes artículos con distintos enfoques que tratan el cálculo modal eficiente de guías de onda de sección transversal arbitraria, como por ejemplo el método del *point-matching* para el estudio de guías asimétricas [16], o métodos que utilizan funciones o polinomios para caracterizar el contorno arbitrario [17, 18]. Un interesante resumen de todas estas técnicas se puede encontrar en [19]-[21].

En la década de los años 80, se propusieron nuevas técnicas de análisis de este tipo de guías. Principalmente estas nuevas técnicas se pueden dividir en dos grandes categorías:

- Métodos basados en la solución de ecuaciones integrales por diversos algoritmos, como por ejemplo el método de los momentos [22]-[24].
- Métodos basados en elementos finitos [25] o basados en el método de la matriz de líneas de transmisión o TLM (*Transmission Line Matrix*) [26].

A pesar de que el primer grupo de técnicas ha sido recientemente modificado y ampliado con nuevas aportaciones, como por ejemplo el método generalizado en el dominio espectral [27] y el método de la ecuación integral de contorno [28], estos métodos producen un problema de

autovalores no lineal de pequeño tamaño que hay que resolver. Además, cuando se requiere obtener muchos modos, el tiempo de computación se incrementa bastante debido a que se calculan las frecuencias de corte como ceros o mínimos del determinante de una matriz cuyos elementos son funciones trascendentes de la frecuencia. Por otro lado, las técnicas pertenecientes al segundo grupo producen problemas de autovalores grandes o requieren numerosas iteraciones para alcanzar una precisión razonable. Hay que elegir una forma, una densidad y una posición adecuada del mallado en la sección transversal de la guía (especialmente cuando el contorno de la guía es bastante irregular), lo que supone un gran consumo de recursos del sistema tales como tiempo de CPU (en inglés *Central Processing Unit*) y memoria.

Un método alternativo que supera todos estos inconvenientes es el conocido como BI-RME (*Boundary Integral - Resonant Mode Expansion*), que fue originariamente propuesto en [29]. La principal ventaja de este nuevo método es que está basado en la resolución de una ecuación integral que produce un problema de autovalores lineal y de pequeño tamaño, problema que puede ser resuelto con poco esfuerzo computacional.

El método BI-RME se ha revelado como uno de los más adecuados, por su tremenda eficiencia computacional, para caracterizar modalmente las guías con sección transversal arbitraria. Esta eficiencia reside en que el mallado es unidimensional, aplicándose sólo a la perturbación de la guía arbitraria respecto de un contorno básico (rectangular o circular).

Recientemente, el método BI-RME ha sido revisado para proporcionar también las integrales de acoplo que caracterizan las diversas discontinuidades presentes en los dispositivos de microondas [30, 31], y que ha facilitado su integración en las herramientas modernas de diseño asistido por ordenador (CAD) [32]-[34]. Sin embargo, a pesar de estos recientes esfuerzos dedicados a mejorar el método, todas las implementaciones prácticas de esta técnica utilizan, en la discretización del contorno arbitrario, una segmentación a tramos rectos, aunque el contorno esté compuesto por arcos circulares o elípticos. Este simple enfoque, que normalmente necesita un número elevado de segmentos rectos para definir todo el contorno, puede introducir efectos indeseados a bajas frecuencias en guías con perturbaciones curvas y elípticas [35]. Sería conveniente poder predecir con mayor precisión el comportamiento de las guías cuya sección arbitraria esté compuesta por los mencionados tramos circulares y elípticos para evitar los mencionados inconvenientes, constituyendo por tanto una de las cuestiones a tratar en esta tesis. Además se intentará añadir la posibilidad de conectar estos dos nuevos tipos de arcos (circulares y elípticos) con los segmentos lineales usados hasta ahora en la implementación práctica del método BI-RME.

Una vez obtenida la carta modal de la guía de sección transversal arbitraria, siguiendo la teoría descrita en [30], se podrán también calcular fácilmente las integrales de acoplo entre estos modos y los modos de la guía rectangular que encierra el contorno arbitrario. Tales integrales son fundamentales para el análisis modal de estructuras pasivas de microondas constituidas por transiciones de guías de sección transversal arbitraria.

Por lo tanto, en la presente tesis se pretende contribuir al desarrollo de un método modal riguroso y eficiente, siguiendo la formulación del método BI-RME original, que permita discretizar el contorno arbitrario considerando segmentos lineales, circulares y elípticos o una conexión cualquiera entre estos tipos de segmentos. Una vez validada la nueva teoría propuesta, con ejemplos de guías canónicas cuya solución modal se conoce numérica o analíticamente,

se quiere incorporar la nueva herramienta en un paquete informático de diseño asistido por ordenador (CAD) para el análisis eficiente de dispositivos pasivos de microondas. Finalmente, comprobada la precisión del nuevo programa analizando dispositivos ya conocidos en la literatura, se intentará analizar nuevas estructuras pasivas de microondas de gran complejidad.

1.2.2. Análisis de estructuras pasivas de microondas

El análisis del comportamiento electromagnético de uniones planares entre guías arbitrarias constituye un tema que ha suscitado un enorme interés en el pasado. Así por ejemplo, en [36] se representa esta unión mediante una red equivalente; si bien dicha red sólo permite tener en cuenta las interacciones asociadas al modo fundamental, y por tanto no resulta apropiada su utilización en el diseño de los actuales componentes de microondas. Debido a la complejidad de estos dispositivos, el análisis de las uniones planares entre guías requiere de algoritmos de simulación que permitan considerar las interacciones entre modos de orden superior, y que además puedan implementarse eficientemente desde el punto de vista computacional.

De entre las diferentes y numerosas técnicas que permiten resolver problemas de dispersión en sistemas guiados, conviene considerar como primeras aquellas basadas en soluciones modales; cuyos principios generales se encuentran recogidos con detalle en [37]. Los métodos modales resultan especialmente interesantes al analizar la dispersión producida por geometrías sencillas; pues permiten obtener de manera relativamente simple soluciones analíticas exactas a dichos problemas. Ahora bien, cuando la geometría de la guía es arbitraria, no es posible obtener soluciones analíticas exactas para este tipo de estructuras. Actualmente uno de los métodos más flexibles y utilizados para caracterizar uniones planares entre guías con secciones transversales diferentes es el de la adaptación modal (en inglés *Mode-Matching*) [38]. Estos métodos modales permiten caracterizar la dispersión producida por las citadas discontinuidades, con bastante precisión por cierto, mediante matrices de dispersión (en inglés *scattering*) generalizadas; cuya combinación adecuada, empleando la teoría de circuitos desarrollada para tratar redes de microondas, permite analizar numerosos dispositivos de microondas integrados por la conexión en cascada de diferentes guías. Ahora bien, esta técnica clásica de análisis presenta varios inconvenientes; destacando entre ellos la baja eficiencia computacional asociada a su implementación, debido a la complejidad inherente al método en cuestión, así como el problema de convergencia relativo expuesto en [39]-[41]. Con el objetivo de evitar estos inconvenientes, en [42] se ha propuesto un nuevo método de análisis modal, basado en matrices de inmitancias (admitancias o impedancia según el caso) generalizadas, para caracterizar discontinuidades en sistemas guiados; método que constituye una adaptación de una técnica clásica propuesta a finales de los años 60 en [43], empleada en su momento para caracterizar uniones entre guías rectangulares en forma de T. Este método parte de los resultados finales a obtener, es decir de la red equivalente multimodal que representa la unión planar, para evaluar los distintos elementos de la matriz generalizada asociada a cada unión.

Recientemente en [44], se ha descrito un nuevo procedimiento, simple y rápido, para calcular estos elementos de la matriz de impedancia generalizada; extrayendo para ello la dependencia frecuencial de las series infinitas que deben evaluarse al calcular dichos elementos, y reduciendo pues notablemente el tiempo de cálculo. Además de esta nueva técnica, se ofrece

también un procedimiento muy eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales con estructura en banda que aparecen al forzar las correspondientes condiciones de contorno de las transiciones entre guías conectadas en cascada, empleando para ello un algoritmo recursivo [45]. Dicha técnica, llamada ecuación integral, permite caracterizar modalmente las transiciones entre uniones planares, resolviendo el problema para modos accesibles (usados para conectar transiciones), y modos localizados (usados para describir el campo electromagnético de la unión). Como se indica en [44], la técnica de la ecuación integral requiere el conocimiento de la carta modal de todas las guías de sección transversal arbitraria presentes en el dispositivo que se quiere analizar. Esta carta modal se obtendrá con la nueva y extendida técnica BI-RME desarrollada en esta tesis.

Entre los diferentes dispositivos que se analizarán, se encuentran por ejemplo filtros en línea de modo dual empleados en aplicaciones para comunicaciones espaciales y analizados con técnicas distintas a la propuesta en esta tesis [9, 11], y un filtro inductivo con tornillos de sintonía [46]. Otros dispositivos de gran interés práctico que se analizarán en la tesis son los resonadores en guía circular y elíptica [10]; los giradores de polarización en guía circular de amplia utilización en la carga útil de los satélites de comunicaciones [12, 47]; filtros inductivos con esquinas redondeadas [7, 48] que constituyen un caso práctico de efectos de mecanización; filtros en guía rectangular doblemente corrugados [6] y de modo evanescente [49]-[51]; y filtros paso bajo en guía coaxial [52].

1.3. Objetivos de la tesis

El objetivo general de la presente tesis es analizar dispositivos complejos de microondas que impliquen guías con sección transversal arbitraria. Este objetivo general se puede descomponer en los siguientes objetivos más concretos:

- Análisis modal completo de guías con sección transversal arbitraria. Para ello se empleará básicamente el método BI-RME [29, 32]. Será también objetivo de esta tesis el intentar mejorar la precisión y eficiencia de este método cuando se introduzcan perturbaciones circulares y elípticas. A tal fin se intentará discretizar el contorno arbitrario considerando segmentos lineales, circulares y elípticos o una conexión cualquiera entre estos tipos de segmentos.
- Cálculo de las integrales de acoplo entre los modos de una guía de sección transversal arbitraria y una guía rectangular que la encierra. Para ello se seguirá el método recientemente publicado en [30].
- Analizar transiciones planares que involucren guías con sección transversal arbitraria. Las transiciones planares se analizarán con la técnica de la ecuación integral. Para ello, se obtendrán también las integrales de acoplamiento entre guías de sección transversal arbitraria distinta.
- Aplicación del método previamente desarrollado al análisis de diversas estructuras pasivas de microondas:

- Resonadores en guía circular o elíptica.
 - Filtros paso banda en guía rectangular con ventanas de acoplo inductivas y tornillos de sintonía.
 - Filtros inductivo en guía rectangular considerando efectos de mecanizado (esquinas redondeadas).
 - Filtros de modo dual en guía circular y elíptica.
 - Filtros de modo evanescente en guía con reentrantes (*ridge*).
 - Filtros paso bajo en guía coaxial.
 - Giradores de polarización en guía circular con iris elípticos y en una nueva geometría más compacta.
- Validación del nuevo método desarrollado mediante comparación con ejemplos publicados en la literatura, y con medidas de prototipos realizados.

1.4. Estructura de la tesis

La tesis se ha estructurado en capítulos diferenciados de la siguiente manera:

Capítulo 2 En este capítulo se introduce el método BI-RME; se extiende la teoría del método a geometrías circulares y elípticas incluyendo la posibilidad de conectar estos dos nuevos tipos de arcos (circulares y elípticos) con los segmentos lineales usados hasta ahora en la implementación práctica del método. Con el objeto de validar la nueva teoría desarrollada, se calculan las frecuencias de corte (o los números de onda de corte) de algunas guías de ondas, y se comparan los resultados obtenidos con las soluciones analíticas conocidas o resultados publicados en la literatura.

En la segunda parte de este capítulo se explica cómo obtener los coeficientes de acoplo entre los modos de una guía rectangular y los modos de una guía arbitraria encerrada por la guía rectangular, empleando para ello las mismas matrices ya obtenidas en el cálculo modal de la guía arbitraria.

Finalmente se explica cómo se ha obtenido el campo electromagnético de los modos TM y TE, se describe el algoritmo utilizado para el descarte de modos fuera de la región de interés, y cómo se han elegido los puntos de evaluación del campo electromagnético. Para comprobar que los resultados obtenidos son correctos, se representa el campo eléctrico transversal de algunos modos TE y TM de las guías analizadas.

Capítulo 3 En este capítulo se analizan transiciones planares entre guías de onda de sección transversal arbitraria mediante una formulación basada en la técnica de la ecuación integral. En la primera parte se muestra un resumen de la formulación general, cuya finalidad es encontrar una matriz de impedancias generalizada (en inglés *Generalized Impedance Matrix*, GIM) que caracterice la transición planar. Para ello, esta técnica de análisis multimodal (*full-wave*) necesita la carta modal de las guías que componen la transición, carta que se calcula mediante la técnica BI-RME extendida propuesta en el capítulo 2.

Seguidamente se demuestra cómo obtener las integrales de acoplo entre dos guías de sección transversal arbitraria rodeadas por dos guías rectangulares diferentes o por la misma guía rectangular, y se comprueba que los resultados obtenidos son correctos.

Finalmente, se representan algunos ejemplos de transiciones planares entre guías de onda de sección transversal arbitraria. A tal fin, se ha integrado la nueva y extendida técnica BI-RME propuesta en una herramienta informática basada en el método de la ecuación integral, y se han analizado algunas transiciones que ya han sido estudiadas con otros métodos en las principales publicaciones periódicas internacionales del electromagnetismo y las microondas.

Capítulo 4 En este capítulo se describen las propiedades de simetría que pueden presentar las guías y las estructuras pasivas de microondas. En la primera parte se demuestra cómo en guías de sección transversal arbitraria con 1 ó 2 ejes de simetría todos los modos se agrupan también en familias de simetría. La segunda parte describe la forma de obtener por separado las distintas familias de simetría de guías con sección transversal arbitraria mediante el método BI-RME. Por último, se demuestra que en estructuras de microondas simétricas formadas por la conexión en cascada de tramos de guía uniforme, también aparece el concepto de familias de simetría, y que además las distintas familias de simetría funcionan de forma independiente a lo largo de toda la estructura al no acoplarse entre sí.

Capítulo 5 En este capítulo se analizan dispositivos pasivos de microondas constituidos por guías de sección transversal arbitraria mediante la herramienta informática desarrollada. Se comparan los resultados obtenidos con los publicados en las principales revistas del electromagnetismo y las microondas, con programas comerciales o con medidas de prototipos fabricados. En la primera parte de este capítulo se hace mención a una técnica muy eficiente, basada en un algoritmo recursivo, para resolver los sistemas de ecuaciones lineales en banda que surgen al analizar dispositivos de microondas constituidos por diferentes guías uniformes conectadas en cascada.

Capítulo 6 En este último capítulo se extraen las conclusiones finales de la tesis y se indican posibles líneas de investigación futuras.

Además de los capítulos mencionados, se han incluido los siguientes apéndices:

Apéndice A En este apéndice se presenta la técnica utilizada para obtener Q modos TEM ortonormalizados, con $Q > 1$. El procedimiento explicado en el capítulo 2 para obtener los modos TEM no determina Q soluciones ortonormalizadas, las cuales se obtendrán sólo después de aplicar una ortonormalización del tipo Gram-Schmidt.

Apéndice B En este apéndice se presentan las expresiones analíticas de todas las integrales singulares que parecen en el capítulo 2 de la presente tesis.

Apéndice C En este apéndice se describe la técnica utilizada para calcular el área de la sección transversal de una guía arbitraria.

Apéndice D En este apéndice se describe una técnica para desacoplar dos modos cuasi-degenerados, es decir, modos asociados a dos autovalores (uno perteneciente a la región interna a la guía arbitraria que se quiere analizar y otro a la región externa complementaria) de valor muy parecido pero distinto. Estos autovalores casi-degenerados causan una alteración de los autovectores que producen valores de campo con amplitudes parecidas en las dos regiones que forman la guía arbitraria y la guía rectangular que la rodea. El objetivo del desacoplo es desechar el autovalor correspondiente a la región que no es de nuestro interés.

Apéndice E En este apéndice se explica la técnica utilizada para elegir puntos, en los cuales se va a evaluar el campo electromagnético, cercanos a arcos elípticos. La distancia de un punto a una recta o a un arco circular es trivial (conociendo los parámetros que definen la recta o el arco circular). No así la distancia de un punto a un arco elíptico o a una elipse que requiere de un algoritmo un tanto peculiar.

Apéndice F En este último apéndice se recogen las publicaciones científicas a que ha dado lugar el trabajo de la presente tesis.

Capítulo 2

Extensión del método BI-RME a geometrías circulares y elípticas

2.1. Introducción

El método BI-RME (*Boundary Integral - Resonant Mode Expansion*) es un nuevo método surgido recientemente [29, 32] para el análisis de guías con sección transversal arbitraria. Esta nueva técnica se ha revelado como una de las más adecuadas, por su tremenda eficiencia computacional, para caracterizar modalmente las citadas guías con sección transversal arbitraria. BI-RME está basado en la resolución de una ecuación integral que produce un problema de autovalores lineal y de pequeño tamaño. La principal ventaja de este método es el uso del núcleo exacto definido mediante funciones de Green diádicas expresadas en forma de series rápidamente convergentes [53]. Los términos de estas series son funciones racionales de la frecuencia, y las series pueden truncarse a un número muy bajo de términos sin pérdida significativa de precisión en los resultados finales. Sin embargo, a pesar de los recientes esfuerzos dedicados a mejorar el método, todas las implementaciones prácticas de esta técnica [54] utilizan, en la discretización del contorno arbitrario, una segmentación a tramos rectos, aunque el contorno esté compuesto por arcos circulares o elípticos. Este enfoque simple, que normalmente necesita un número elevado de segmentos rectos para definir todo el contorno, puede introducir efectos indeseados a bajas frecuencias en guías con perturbaciones curvas y elípticas [35, 48]. En este capítulo se extenderá la teoría del método BI-RME a geometrías circulares y elípticas incluyendo la posibilidad de conectar estos dos nuevos tipos de arcos (circulares y elípticos) con los segmentos lineales usados hasta ahora en la implementación práctica del método BI-RME.

Los coeficientes de acoplo caracterizan la unión entre dos guías de sección transversal distinta. Cuando ambas guías tienen forma rectangular o circular, estos coeficientes pueden calcularse de forma analítica, puesto que se conocen las expresiones de sus campos modales. Pero, en muchos casos, una de las dos guías de la unión (o las dos) tiene forma arbitraria y sus modos no se conocen analíticamente. Mediante el método BI-RME es posible obtener un gran número de estos coeficientes de forma simple y rápida, pues para su cálculo el método utiliza las mismas matrices ya empleadas en la resolución del problema modal. En el segundo apartado, se describe un método rápido, que podemos encontrar en [30], para obtener los coeficientes de

acoplo entre los modos de la guía arbitraria y los modos de una guía rectangular que la rodea.

En el último apartado, se explicará con más detalle cómo se ha conseguido obtener el campo electromagnético de los modos TM y TE. Finalmente se explicará el algoritmo utilizado para el descarte de modos fuera de la región de interés y cómo se han elegido los puntos de evaluación del campo electromagnético. Para comprobar que los resultados obtenidos son correctos, se representará el campo eléctrico de algunos modos TE y TM de diversas guías arbitrarias analizadas previamente.

2.2. El método BI-RME

Consideremos una guía de sección transversal arbitraria S que puede obtenerse perturbando una guía rectangular de sección Ω con una o varias hojas conductoras invariantes en la dirección de propagación de la guía, cuya intersección con Ω es una línea o un conjunto de líneas σ como se muestra en la figura 2.1. Las líneas se definen mediante la ecuación paramétrica:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(l) \quad (2.1)$$

donde \mathbf{s} denota un punto de σ , l es un parámetro tomado sobre σ , y $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector tangente unitario a σ .

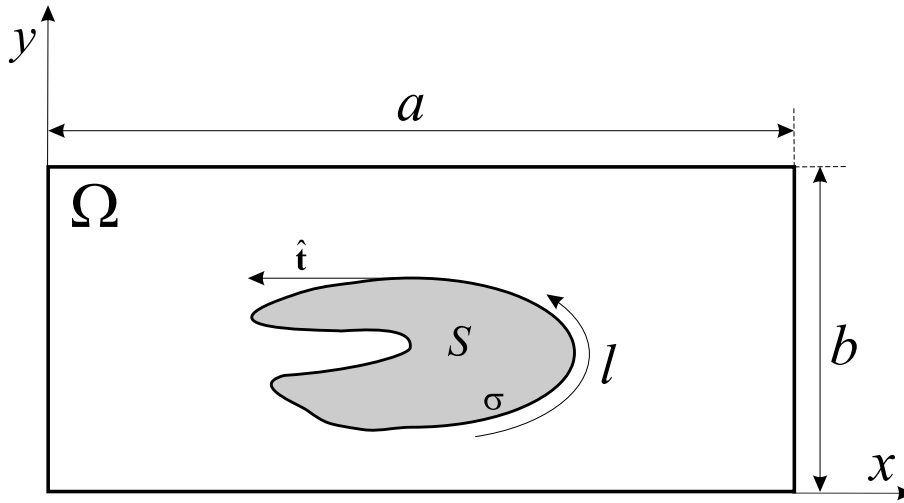


Figura 2.1. Guía de sección transversal arbitraria.

El campo eléctrico en un punto \mathbf{r} de observación genérico dentro de Ω puede obtenerse mediante la expresión:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\eta k \int_{\sigma} \overline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) \cdot \mathbf{J}_{\sigma}(l') dl' \quad (2.2)$$

donde \mathbf{s}' indica el punto de fuente en σ , y \mathbf{r} indica un punto de observación de campo¹; $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ es la impedancia característica del medio; $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ es el número de onda; $\overline{\mathbf{G}}_e$ es

¹Con las variables primadas se indicarán los puntos de fuente, mientras que con las variables no primadas se indicarán los puntos de campo.

la función de Green diádica bidimensional de tipo eléctrico para un resonador bidimensional de sección Ω ; y finalmente \mathbf{J}_σ es la densidad de corriente en la lámina conductora perturbadora.

La función de Green $\overline{\mathbf{G}}_e$ utilizada satisface la condición de contorno de la guía rectangular o circular de sección Ω . Por tanto, para obtener el campo de la guía arbitraria sólo será necesario imponer que la expresión (2.2) cumpla condiciones de contorno también sobre σ , es decir, que la componente tangencial de \mathbf{E} se anule sobre σ . La expresión general de la función de Green $\overline{\mathbf{G}}_e$, proporcionada en [53], tiene el siguiente aspecto para las secciones rectangulares y circulares:

$$\overline{\mathbf{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) = \overline{\mathbf{G}}_{et}(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) + \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} G_{ezz}(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) \quad (2.3)$$

siendo $\hat{\mathbf{z}}$ el vector unitario en la dirección de propagación, $\overline{\mathbf{G}}_{et}$ una diádica transversal a $\hat{\mathbf{z}}$ igual a:

$$\overline{\mathbf{G}}_{et}(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) = -\frac{1}{k^2} \nabla \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') + \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') + \sum_m \frac{k^2}{k_m^2 (k_m^2 - k^2)} \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \quad (2.4)$$

y G_{ezz} la componente en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$:

$$G_{ezz}(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) = g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') + \sum_m \frac{k^2}{k_m'^2 (k_m'^2 - k^2)} \psi_m(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{s}') \quad (2.5)$$

con:

\mathbf{r} y \mathbf{s}' puntos genéricos de campo y fuente, respectivamente.

k_m número de onda de corte para los modos TE de la guía rectangular.

k_m' número de onda de corte para los modos TM de la guía rectangular.

\mathbf{e}_m función modal de tipo vectorial que representa el campo eléctrico para el m -ésimo modo TE. Esta función es real y está normalizada en el área transversal de la guía:

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m ds = 1 \quad (2.6)$$

ψ_m función modal de tipo escalar que representa el campo eléctrico axial para el m -ésimo modo TM. Al igual que la anterior, esta función también es real y está normalizada en el área transversal:

$$\int_{\Omega} \psi_m^2 ds = 1 \quad (2.7)$$

g función de Green escalar bidimensional para la ecuación de Poisson $\nabla^2 g = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}')$ con la condición $g = 0$ en el contorno de la sección Ω .

$\overline{\mathbf{G}}_{st}$ diádica solenoidal estática, normal al contorno, que satisface la ecuación

$$\nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') = \overline{\mathbf{I}}_t \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}') + \nabla \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{s}')$$

donde $\overline{\mathbf{I}}_t$ es la diádica unitaria transversal y $\delta(\mathbf{r})$ es la función delta de Dirac.

La separación de (2.3) en (2.4) y (2.5) no es la más simple pero sí es muy efectiva porque de esta manera, por ejemplo en la G_{ezz} , la función de Green escalar g es independiente de la frecuencia y se conoce una versión equivalente que converge exponencialmente. Por su parte el segundo término de la ecuación (2.5), que depende de la frecuencia, converge como $k_m'^{-4}$, por tanto con esta separación se consigue una gran mejora en la convergencia del algoritmo. Un razonamiento análogo puede aplicarse a (2.4) para aumentar la velocidad de convergencia del método. Como se verá más adelante, la mejora recogida en (2.4) servirá para aumentar la eficiencia asociada al cálculo de los modos TE, mientras la mejora en (2.5) se utilizará en el cálculo de los modos TM. Las expresiones de g y $\overline{\mathbf{G}}_{st}$ para una guía rectangular y circular pueden encontrarse en [29], así como sus formas rápidamente convergentes.

El siguiente paso consiste en descomponer la densidad de corriente en sus componentes transversal y longitudinal:

$$\mathbf{J}_\sigma(l') = J_t(l') \hat{\mathbf{t}}(l') + J_z(l') \hat{\mathbf{z}} \quad (2.8)$$

donde $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector unitario tangencial a σ , J_t y J_z son funciones incógnita a determinar.

Si sustituimos las ecuaciones (2.3)–(2.5) y (2.8) en la expresión (2.2) obtenemos la siguiente ecuación para el campo eléctrico, que dada la separación de $\overline{\mathbf{G}}_e$ y \mathbf{J}_σ , también podemos descomponer en sus componentes transversal y longitudinal:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) &= -j\eta k \int_\sigma \overline{\mathbf{G}}_{et}(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' = \\ &= j \frac{\eta}{k} \int_\sigma \nabla \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial l'} J_t(l') dl' - j\eta k \int_\sigma \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' - \\ &\quad j\eta k^3 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{k_m^2 (k_m^2 - k^2)} \int_\sigma \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} E_z(\mathbf{r}) &= -j\eta k \int_\sigma G_{ezz}(\mathbf{r}, \mathbf{s}', k) J_z(l') dl' = \\ &= -j\eta k \int_\sigma g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') J_z(l') dl' - j\eta k^3 \sum_m \frac{\psi_m(\mathbf{r})}{k_m'^2 (k_m'^2 - k^2)} \int_\sigma \psi_m(\mathbf{s}') J_z(l') dl' \end{aligned} \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) representa el campo eléctrico para los modos TE, caso en el que la corriente inducida y el campo eléctrico son transversales. En el caso de los modos TM el campo eléctrico y la corriente son longitudinales, y por tanto la ecuación (2.10) describe los modos TM. Estas ecuaciones integrales modelan el comportamiento del campo en el interior de la guía arbitraria, y sus incógnitas son las corrientes inducidas sobre σ y los números de onda de corte de la

guía arbitraria. Para propósitos de computación numérica² conviene transformar la integral del primer término de la (2.9) mediante la identidad:

$$\int_{\sigma} \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial l'} J_t(l') dl' = - \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial J_t(l')}{\partial l'} dl' \quad (2.11)$$

que se obtiene integrando por partes, observando que la singularidad de g es integrable y que la misma g es cero en cualquier extremo de σ que yace sobre el contorno Ω de la guía estándar, y que J_t se anula en cualquier extremo de σ no coincidente con Ω . Imponiendo ahora las condiciones de contorno sobre σ para los modos TE:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(l) = 0 \quad (2.12)$$

y para los modos TM:

$$E_z(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.13)$$

se obtiene fácilmente:

Modos TM

$$\int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') J_z(l') dl' + \sum_m \frac{\psi_m(\mathbf{r})}{k_m'^2} a'_m = 0 \quad (2.14)$$

$$a'_m = \frac{k^2}{k_m'^2 - k^2} \int_{\sigma} \psi_m(\mathbf{s}') J_z(l') dl' \quad (2.15)$$

Modos TE

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial J_t(l')}{\partial l'} dl' + \int_{\sigma} \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' + \sum_m \frac{\hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{k_m^2} a_m = 0 \quad (2.16)$$

$$a_m = \frac{k^2}{k_m^2 - k^2} \int_{\sigma} \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \quad (2.17)$$

Las ecuaciones integrales obtenidas en la descripción del método BI-RME no pueden resolverse, en general, de forma analítica. Por tanto, la resolución de este tipo de ecuaciones se debe realizar mediante algoritmos numéricos. Cualquier ecuación necesita ser reducida a un problema de dimensión finita para poder resolverse numéricamente³. Por tanto, el siguiente paso en el método BI-RME consistirá en la discretización del problema y su resolución mediante el método de los momentos en la versión de Galerkin [55].

²La ecuación (2.9) resulta mucho más eficiente si se pasa la derivada sobre la corriente, ya que de ese modo se elimina la singularidad no integrable por métodos convencionales.

³Es necesario truncar el sumatorio infinito con m de las ecuaciones (2.14) y (2.16) a un número finito de términos M .

2.2.1. Modos TM

En el caso de los modos TM se aplicará el método de Galerkin sobre las ecuaciones (2.14) y (2.15). En primer lugar, se descompone la corriente en N funciones parabólicas a trozos de área unidad:

$$J_z(l') = \sum_{j=1}^N b'_j u_j(l') \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{b}' = (b'_1, \dots, b'_N)$ son los coeficientes de las corrientes. Aplicando Galerkin y después de algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene el siguiente problema matricial de autovalores:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}' \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{D}' & \mathbf{R}'^T \\ \mathbf{R}' & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

donde \mathbf{U} es una matriz identidad de orden M' , $\mathbf{0}$ es una matriz nula de tamaño $N \times M'$, $\mathbf{0}'$ es una matriz nula de tamaño $N \times N$. El resto de matrices tienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{D}' = \text{diag}(k_1'^{-2}, k_2'^{-2}, \dots, k_{M'}'^{-2}) \quad (2.20)$$

$$R'_{im} = \frac{1}{k_m'^2} \int_{\sigma} u_i(l) \psi_m(\mathbf{r}) dl \quad (2.21)$$

$$L'_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(l') dldl' \quad (2.22)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N \quad m = 1, 2, \dots, M'$$

$$\mathbf{a}' = (a'_1, \dots, a'_{M'}) \quad \mathbf{b}' = (b'_1, \dots, b'_N) \quad (2.23)$$

con M' el número de modos TM fijado en el contorno básico de la guía rectangular. El problema de autovalores generalizado (2.19) se puede transformar fácilmente en un problema de autovalores estándar de la forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, es decir:

$$\left(\mathbf{D}' - \mathbf{R}'^T \cdot \mathbf{L}'^{-1} \cdot \mathbf{R}' \right) \mathbf{a}' = k^{-2} \mathbf{a}' \quad (2.24)$$

calculándose los coeficientes de las corrientes como

$$\mathbf{b}' = -\mathbf{L}'^{-1} \cdot \mathbf{R}' \cdot \mathbf{a}' \quad (2.25)$$

Finalmente, el campo eléctrico axial para los modos TM en la guía arbitraria lo obtenemos mediante la expresión (2.10) con la corriente expandida según (2.18)

$$E_z(\mathbf{r}) = -j\eta k \left[\sum_{j=1}^N b'_j \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(l') dl' + \sum_{m=1}^{M'} k_m'^{-2} \psi_m(\mathbf{r}) a'_m \right] \quad (2.26)$$

2.2.2. Modos TE

Para los modos TE se sigue el mismo procedimiento empleado con los modos TM. En primer lugar, se descompone la corriente en N funciones parabólicas a trozos de área unidad

$$J_t(l') = \sum_{j=1}^N b_j w_j(l') \quad (2.27)$$

donde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$ son los coeficientes de las corrientes. A continuación se aplica el procedimiento de Galerkin a la ecuación integral definida por (2.16) y (2.17). Si recordamos (2.11), al realizar la integral por partes pasamos de una derivada sobre la función de Green a una derivada sobre la corriente. Esto nos obligará a que las funciones base que utilicemos sean continuas y derivables a trozos.

Una vez aplicado Galerkin y tras unas sencillas manipulaciones matemáticas, obtenemos el siguiente problema de autovalores

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

donde \mathbf{U} es una matriz identidad de orden M , $\mathbf{0}$ es una matriz nula de tamaño $N \times M$, y

$$\mathbf{D} = \text{diag} (k_1^{-2}, k_2^{-2}, \dots, k_M^{-2}) \quad (2.29)$$

$$R_{im} = \frac{1}{k_m^2} \int_{\sigma} w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) dl \quad (2.30)$$

$$L_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} w_i(l) w_j(l') \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dldl' \quad (2.31)$$

$$C_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_i(l)}{\partial l} \frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} dldl' \quad (2.32)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_M) \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$$

con M el número de modos TE fijado en el contorno básico de la guía rectangular.

Una vez solucionado el problema, obtenidos los valores y vectores propios, el campo eléctrico transversal en el interior de la guía arbitraria se calcula según (2.9):

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = -j\eta \left\{ \sum_{j=1}^N b_j \left[\frac{1}{k} \nabla \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} dl' + k \int_{\sigma} \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') w_j(l') dl' \right] + k \sum_{m=1}^M \frac{a_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{k_m^2} \right\} \quad (2.33)$$

2.2.3. Modos TEM

Este último caso es totalmente independiente de las consideraciones anteriores. De hecho, en este caso, sólo estamos interesados en los campos modales, porque los números de onda de corte son cero. Estos campos quedan perfectamente determinados como gradientes del potencial electrostático:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\rho_{\sigma}(l')}{\epsilon} dl' \quad (2.34)$$

donde ρ_{σ} representa la densidad de carga superficial sobre σ . Consideremos el caso en el que existen Q conductores interiores, cuyos contornos son las líneas separadas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$ más una línea σ^* que contacta con el contorno de Ω (ver figura 2.2).

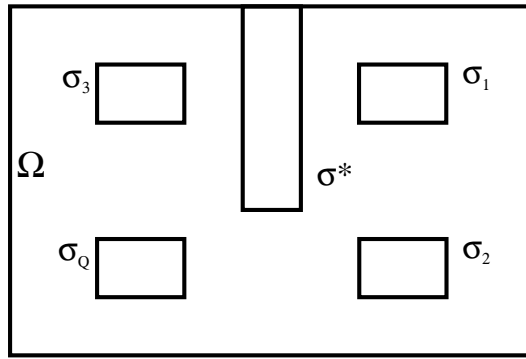


Figura 2.2. Guía de sección transversal arbitraria con Q conductores internos.

Para cualquiera de los Q modos básicos TEM, ϕ queda unívocamente determinada asignando los Q potenciales en los conductores interiores [56]. Si se consideran las mismas funciones base u_n usadas para la determinación de los modos TM, la densidad de carga puede quedar expresada como:

$$\frac{\rho_{\sigma}(l')}{\epsilon} = \sum_{n=1}^{N^*} b_n'' u_n(l') + \sum_{n=N^*+1}^{N^*+N_1} b_n'' u_n(l') + \dots + \sum_{n=N-N_Q+1}^N b_n'' u_n(l') = \sum_{n=1}^N b_n'' u_n(l') \quad (2.35)$$

donde cada uno de los sumatorios representa la distribución de carga sobre las diversas porciones de σ , y donde N^*, N_1, \dots, N_Q representa el número de funciones base que existen sobre cada uno de los conductores. Teniendo en cuenta que el potencial en σ^* debe ser 0, al igual que sobre el contorno Ω , y que en $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$ el potencial viene dado por $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_Q$, aplicando Galerkin a la ecuación (2.34) y teniendo en cuenta la condición de contorno⁴:

$$\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{r} \in \sigma^*$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \Phi_Q \quad \text{cuando} \quad \mathbf{r} \in \sigma_Q$$

⁴En realidad, para resolver el problema TEM se asigna a Φ_i un valor constante igual a la unidad y cero al resto de conductores. Este proceso se realiza para todos los conductores interiores obteniendo, por tanto, tantas soluciones TEM como conductores interiores haya.

se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{L}' \cdot \mathbf{b}'' = \mathbf{f} \quad (2.36)$$

donde \mathbf{L}' es la misma matriz del caso TM, y

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'' &= (b''_1, \dots, b''_N) \\ f_i &= \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq N^* \\ \Phi_Q & \text{si } N^* + \dots + N_{Q-1} < i \leq N^* + \dots + N_{Q-1} + N_Q \end{cases} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Finalmente la expresión a utilizar para el potencial electrostático es:

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N b''_n \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' \quad (2.38)$$

Sin embargo, cuando el número de conductores internos Q , es decir el número de modos TEM, es mayor que uno, este procedimiento no determina Q soluciones ortonormalizadas. En el Apéndice A se explicará la técnica utilizada para ortonormalizar los vectores \mathbf{b}'' y Φ para obtener Q modos TEM ortonormalizados.

2.2.4. Elementos singulares: caso TM

Debido a la singularidad inherente a la función de Green bidimensional de la ecuación de Poisson g y a la singularidad existente en la diádica $\overline{\mathbf{G}}_{st}$ [29], el cálculo de algunos elementos de las matrices \mathbf{L}' (2.22) en el caso TM, y, como veremos en el siguiente apartado, de las matrices \mathbf{L} (2.31) y \mathbf{C} (2.32) en el caso TE puede resultar complicado. Este posible problema se resuelve observando que el tipo de singularidad que aparece en estas funciones es de tipo logarítmico, y por tanto perfectamente integrable utilizando una técnica clásica [57, 58] que consiste en añadir y substraer una función que tenga el mismo comportamiento singular.

Considerando el caso TM, la función de Green bidimensional tiene la siguiente expresión en su versión acelerada [59]:

$$g(x, y; x', y') = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{00} T_m^{11}} \quad (2.39)$$

donde

$$T_m^{pq} = 1 - 2e^{-|x - (-1)^p x' + 2am|\pi/b} \cos\left(\frac{\pi}{b}(y - (-1)^q y')\right) + e^{-2|x - (-1)^p x' + 2am|\pi/b} \quad (2.40)$$

Como se observa, esta función puede presentar una singularidad. En concreto aparece cuando el punto de fuente y de campo se aproximan, siendo T_0^{00} el único término que tiende a cero provocando la singularidad. La manera de proceder en este caso será dividir la función de Green en dos partes. Para separar la parte singular de g de su parte regular se puede escribir:

$$g = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \ln \frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{00} T_m^{11}} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{10} T_0^{01}}{T_0^{11}} - \frac{1}{4\pi} \ln T_0^{00} \quad (2.41)$$

Ahora se intentará desarrollar la parte singular que queda, buscando simplificarla al máximo para que se pueda integrar analíticamente. Si se realiza una expansión en serie de Taylor del término singular T_0^{00} , se comprueba que es posible separarlo nuevamente en una parte singular y otra regular

$$-\frac{1}{4\pi} \ln T_0^{00} = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{(x-x')^2 + (y-y')^2} - \frac{1}{4\pi} \ln \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right] \quad (2.42)$$

cuyo primer sumando es regular, porque cuando el punto de fuente y de campo se aproximan:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{(x-x')^2 + (y-y')^2} = -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \quad (2.43)$$

Resumiendo, la función de Green se podrá entonces expresar como sigue:

$$g(x, y; x', y') = g_{reg}(x, y; x', y') + g_{reg-sing}(x, y; x', y') + g_{sing}(x, y; x', y') \quad (2.44)$$

con

$$g_{reg} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \ln \frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{00} T_m^{11}} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{10} T_0^{01}}{T_0^{11}} \quad (2.45)$$

$$g_{reg-sing} = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (2.46)$$

$$g_{sing} = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right] \quad (2.47)$$

Ahora, llegado este punto, es necesario tratar las integrales singulares en función del tipo de tramo considerado (lineal, circular o elíptico). La integración se realizará siempre en el mismo intervalo que se ha fijado en $t \in [-0,5, 0,5]$, parametrizando el contorno adecuadamente según el tipo de tramo considerado. Además hay que precisar que de las integrales dobles presentes en la ecuación (2.22), sólo la integral interna se resolverá analíticamente, mientras que la externa, como el resto de integrales no singulares, serán calculadas numéricamente utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre [60].

Tramos lineales

En este tipo de perturbación (ver figura 2.3 (apartado a)), una vez realizada la parametrización, la resolución de la integral no conlleva ninguna dificultad:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (t + 0,5) \Delta l \cos \theta \\ y &= y_0 + (t + 0,5) \Delta l \sin \theta \end{aligned} \quad (2.48)$$

La expresión singular se convierte en:

$$\ln R^2 = \ln \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right] = \ln \left[\Delta l^2 (t-t')^2 \right] \quad (2.49)$$

y la integral singular se puede calcular fácilmente porque la integración de una función parabólica u_i por la expresión (2.49) se conoce de forma analítica, tal y como se puede ver con más detalle en la ecuación (B.1) del Apéndice B.

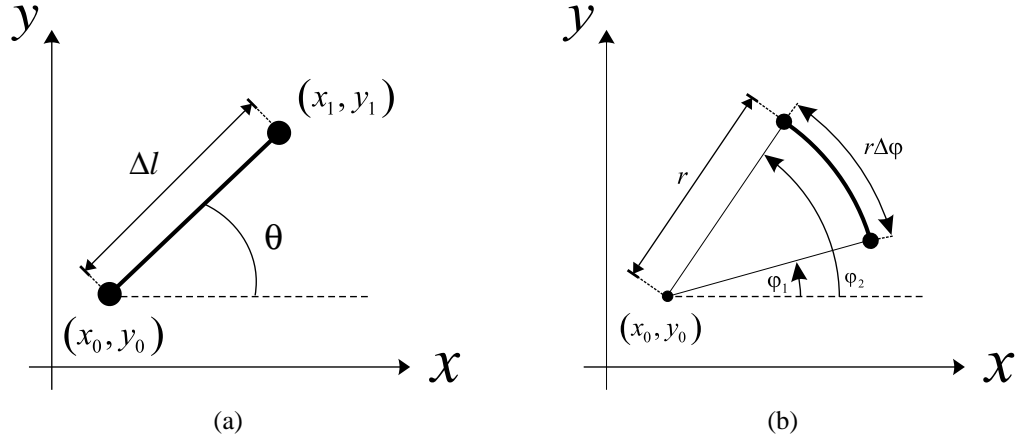


Figura 2.3. Segmento lineal de longitud $\Delta\ell$ en (a) y segmento circular de radio r y longitud $r\Delta\varphi$ en (b).

Tramos circulares

Siguiendo el mismo procedimiento, se parametriza el arco circular de radio r representado en la figura 2.3 (apartado (b)) como

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cos \varphi(t) \\ y &= y_0 + r \sin \varphi(t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

con

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_1 + \Delta\varphi(t + 0,5) \\ \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \end{aligned}$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación (2.47), la parte singular de g puede escribirse como

$$\ln R^2 = \ln \frac{R^2}{\Delta\varphi^2 (t - t')^2} + \ln \left[\Delta\varphi^2 (t - t')^2 \right] \quad (2.51)$$

con

$$R^2 = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right]$$

donde el primer término de la ecuación (2.51) es regular

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \ln \frac{R^2}{\Delta\varphi^2 (t - t')^2} = \ln r^2 \quad (2.52)$$

y puede calcularse numéricamente, mientras que el segundo es singular y tiene que obtenerse analíticamente. La solución analítica de esta integral se puede encontrar en la ecuación (B.1) del Apéndice B, ya que es la misma integral singular del apartado anterior.

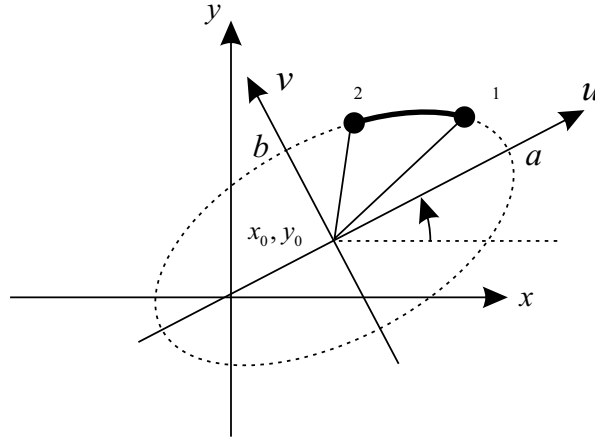


Figura 2.4. Segmento elíptico de semieje mayor a y semieje menor b .

Tramos elípticos

En este caso la parametrización del arco elíptico es un poco distinta, ya que se utiliza (ver figura 2.4) un sistema de coordenadas locales (u, v) :

$$\begin{aligned} u &= a \cos \eta(t) \\ v &= b \sin \eta(t) \end{aligned} \quad (2.53)$$

con

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \eta_1 + \Delta\eta(t + 0,5) \\ \Delta\eta &= \eta_2 - \eta_1 \end{aligned}$$

Estas coordenadas locales (u, v) están relacionadas con las coordenadas cartesianas según la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Introduciendo estas relaciones en la expresión (2.47) se obtiene que

$$\ln R^2 = \ln \frac{R^2}{\Delta\eta^2 (t - t')^2} + \ln [\Delta\eta^2 (t - t')^2] \quad (2.55)$$

donde el primer término es regular porque

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \ln \frac{R^2}{\Delta\eta^2 (t - t')^2} = \ln [a^2 \sin^2 \eta(t) + b^2 \cos^2 \eta(t)] \quad (2.56)$$

mientras que el segundo término necesita un posterior tratamiento para obtener una solución analítica. Este tratamiento se debe al hecho de que las expresiones de los diferenciales dl y dl'

en la ecuación (2.22) tienen una formulación diferente y más complicada que en el caso circular. El diferencial dl para un arco elíptico se puede definir como:

$$dl = a\Delta\eta\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)}dt \quad (2.57)$$

donde e es la excentricidad de la elipse o del arco de elipse. Si se considera este nuevo término, la expresión de los elementos de la matriz \mathbf{L}' tienen la forma:

$$L'_{ij} = a^2\Delta\eta^2 \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i(t)\gamma(t) g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(t')\gamma(t') dt dt' \quad (2.58)$$

con $\gamma(t) = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)}$.

Para resolver analíticamente la parte singular es necesario realizar una operación previa:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t')} - \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)} + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)} = \\ & \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t')} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t')}} \right) + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)} \end{aligned} \quad (2.59)$$

que genera un segundo nivel de división de la parte singular de la matriz \mathbf{L}' :

$$L'_{ii_{sing}} = L'_{ii_{sing-reg}} + L'_{ii_{sing-sing}} \quad (2.60)$$

donde

$$L'_{ii_{sing-reg}} = a^2\Delta\eta^2 \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i(t)\gamma(t) \left(1 - \frac{\gamma(t)}{\gamma(t')} \right) g_{sing}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_i(t')\gamma(t') dt dt' \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} L'_{ii_{sing-sing}} &= a^2\Delta\eta^2 \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i(t)\gamma^2(t) g_{sing}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_i(t') dt dt' \\ &= a^2\Delta\eta^2 \int_{-0,5}^{0,5} u_i(t)\gamma^2(t) \int_{-0,5}^{0,5} g_{sing}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_i(t') dt dt' \end{aligned} \quad (2.62)$$

La ecuación (2.61) es ahora regular porque $\lim_{t \rightarrow t'} \left(1 - \frac{\gamma(t)}{\gamma(t')} \right) = 0$; g_{sing} tiene una singularidad logarítmica pero es conocido que $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ para todos los valores de α mayores que 0. Sin embargo la ecuación (2.62) es aún singular, pero la integral interna tiene la misma forma del caso circular y su expresión analítica se muestra en la ecuación (B.1) del Apéndice B.

2.2.5. Elementos singulares: caso TE

En los modos TE las matrices que presentan singularidades son la matriz \mathbf{L} (2.31) y la matriz \mathbf{C} (2.32). La singularidad de la matriz \mathbf{C} es del mismo tipo que la de la matriz \mathbf{L}' en los modos TM, y se trata de la misma forma explicada anteriormente. Respecto al caso TM ahora se utilizan las derivadas de las funciones base, por lo que el coeficiente a en la solución analítica

de la ecuación (B.1) del Apéndice B debe ser igual a 0. También hay que especificar que estas derivadas, parametrizando las integrales en $t' \in [-0,5, 0,5]$, introducen un nuevo término:

$$\frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} = \frac{\partial w_j(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial l'}$$

que en el caso de un arco elíptico sería:

$$\frac{\partial t'}{\partial l'} = \frac{1}{a\Delta\eta\sqrt{1-e^2\cos^2\eta(t')}} = \frac{1}{a\Delta\eta} \frac{1}{\gamma(t')}$$

Por lo tanto, no es necesario generar el segundo nivel de división de la parte singular utilizado en la matriz L' de los modos TM cuando se integra sobre un segmento elíptico porque el factor $\gamma(t')$ viene simplificado.

En la matriz L aparece la parte estática de la función de Green diádica $\overline{\mathbf{G}}_{st}$, que se puede expresar en su versión acelerada [34] como

$$\overline{\mathbf{G}}_{st} = \hat{\mathbf{x}} \cdot G_{xx} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot G_{xy} \cdot \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot G_{yx} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot G_{yy} \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (2.63)$$

con

$$\begin{aligned} G_{xx} &= \frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\ln \frac{T_m^+}{T_m^-} - |X_m| \left(\frac{\cos Y^+ - e^{-|X_m|}}{T_m^+} - \frac{\cos Y^- - e^{-|X_m|}}{T_m^-} \right) \right] \\ G_{xy} &= \frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m X_m \left(\frac{\text{sen } Y^+}{T_m^+} + \frac{\text{sen } Y^-}{T_m^-} \right) \\ G_{yx} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m \left(\frac{\text{sen } Y^+}{T_m^+} - \frac{\text{sen } Y^-}{T_m^-} \right) \\ G_{yy} &= \frac{x + x' - |x - x'|}{2b} - \frac{xx'}{ab} + \\ & - \frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(-1)^m \ln(4T_m^+ T_m^- e^{2|X_m|}) + |X_m| \left(\frac{\cos Y^+ - e^{-|X_m|}}{T_m^+} + \frac{\cos Y^- - e^{-|X_m|}}{T_m^-} \right) \right] \end{aligned}$$

donde a y b son la anchura y altura de la guía rectangular y

$$X_m = \frac{\pi}{b} \left[x - \left(m + \frac{1}{2} \right) a - (-1)^m \left(x' - \frac{a}{2} \right) \right]$$

$$Y^\pm = \frac{\pi}{b} (y \pm y'); \quad T_m^\pm = \cosh X_m - \cos Y^\pm$$

De todos los términos, el único que puede generar singularidades es en el que aparece T_0^- , ya que es el único que se anula cuando el punto de fuente y de campo se aproximan:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} T_0^- &= \lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \left[\cosh \left(\frac{\pi}{b} (x - x') \right) - \cos \left(\frac{\pi}{b} (y - y') \right) \right] \\ &\cong \lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 [(x - x')^2 + (y - y')^2] = 0 \end{aligned}$$

El procedimiento de extracción de la singularidad es análogo, en particular cada una de las 4 díadas de esta función se puede separar en una parte regular y otra singular como sigue:

$$\overline{\mathbf{G}}_{st}(x, y; x', y') = \overline{\mathbf{G}}_{streg}(x, y; x', y') + \overline{\mathbf{G}}_{streg-sing}(x, y; x', y') + \overline{\mathbf{G}}_{stsing}(x, y; x', y') \quad (2.64)$$

donde las expresiones de $\overline{\mathbf{G}}_{streg-sing}$ y $\overline{\mathbf{G}}_{stsing}$ dependen del tipo de tramo.

La singularidad introducida por las dos componentes G_{xx} y G_{yy} es logarítmica y se trata exactamente como en la $g_{reg-sing}$ y g_{sing} del caso TM, con la única diferencia debida a la presencia del vector tangente $\hat{\mathbf{t}}$ en la ecuación (2.31) que añade un término *seno* o *coseno* en la integración analítica. La presencia de este vector tangente permite también evitar el segundo nivel de división de la parte singular (vista en la matriz \mathbf{L}' del caso TM) cuando se considera un arco elíptico⁵ porque elimina el factor $\gamma(t')$ de la integral singular. La solución de estas nuevas integrales se presenta en las ecuaciones (B.2)-(B.9) del Apéndice B.

Un problema adicional aparece cuando se intenta desarrollar la función diádica en serie de Taylor en el entorno del punto de fuente, porque aparecen estas dos funciones:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{(x - x')^2}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\ \Psi &= \frac{(x - x')(y - y')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde la primera aparece en el desarrollo de las componentes G_{xx} y G_{yy} ⁶, mientras la segunda aparece en las G_{xy} y G_{yx} ⁷. Es interesante evidenciar que las dos funciones son discontinuas pero no son singulares, esto implica que los valores que toman en los puntos de límite dependen del tipo de segmentos que se está considerando.

Tramos lineales

Utilizando la parametrización vista en la ecuación (2.48), los límites de la ecuación (2.65), cuando el punto de campo se acerca al punto de fuente, son:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \Phi &= \cos^2 \theta \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \Psi &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (2.66)$$

⁵El vector tangente a un arco elíptico, representado en la figura 2.4, recorrido en el sentido antihorario es

$$\hat{\mathbf{t}} = -\frac{a \sin \eta(t) \cos \alpha + b \cos \eta(t) \sin \alpha}{a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{-a \sin \eta(t) \sin \alpha + b \cos \eta(t) \cos \alpha}{a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)}} \hat{\mathbf{y}}$$

Si el arco se recorre en el sentido horario la expresión sería la misma cambiada de signo.

⁶Debido al término $|X_0| \frac{\cos Y^- - e^{-|X_0|}}{T_0^-}$

⁷Debido al término $X_0 \frac{\sin Y^-}{T_0^-}$

Tramos circulares

En este caso, utilizando la parametrización de la ecuación (2.50), los límites de la ecuación (2.65) son:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \Phi = \sin^2(\varphi(t)) \quad (2.67)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \Psi = -\frac{1}{2} \sin(2\varphi(t))$$

Tramos elípticos

Utilizando la parametrización de la ecuación (2.53), los límites de la ecuación (2.65) son:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \Phi = \frac{[a \cos \alpha \sin \eta(t) + b \sin \alpha \cos \eta(t)]^2}{a^2 \sin^2 \eta(t) + b^2 \cos^2 \eta(t)} \quad (2.68)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \Psi = \frac{1}{2} \frac{\chi(t) \sin 2\alpha - ab \sin 2\eta \cos 2\alpha}{a^2 \sin^2 \eta(t) + b^2 \cos^2 \eta(t)}$$

con

$$\chi(t) = a^2 \sin^2 \eta(t) - b^2 \cos^2 \eta(t) \quad (2.69)$$

2.2.6. Combinación de segmentos lineales, circulares y elípticos

En este apartado se estudiará la combinación de los tres diferentes tipos de segmentos que pueden definir el contorno de una guía arbitraria. La conexión de dos segmentos lineales, así como la conexión entre uno lineal y uno circular o dos circulares, es fácilmente programable ya que la relación entre la longitud y valor angular de un arco es sencillo en el caso circular. El problema aparece cuando se quiere conectar un arco elíptico con uno de otro tipo. Tal problema se debe al hecho de que la longitud de un arco elíptico no se conoce analíticamente, y su valor no está directamente relacionado con el valor del arco elíptico $\Delta\eta$. Como ya se ha explicado, el valor de la corriente que se está intentando calcular con BI-RME se reconstruye utilizando funciones base parabólicas. En [32], para garantizar resultados numéricos estables, se aconseja definir estas funciones bases sobre dos o tres segmentos del contorno arbitrario, y que el área de estas funciones en sus dominios sea igual a 1. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que un segmento sobre el cual está definida una función base es elíptico y que su longitud es l^8 , no es sencillo definir el valor angular de un arco elíptico a partir de su longitud⁹.

⁸Típicamente $\lambda_{max}/2$, donde λ_{max} es la longitud de onda de corte del modo de orden mayor en la guía rectangular de sección Ω , o de otro modo $\lambda_c/4$, donde λ_c es la longitud de corte del modo de orden mayor en la guía arbitraria [32].

⁹Hay que resolver una integral elíptica dada la relación $dl = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta} d\eta$.

Para resolver este problema, se ha adoptado el siguiente enfoque. Si el arco elíptico pertenece a una elipse de semieje mayor a , se elige un valor angular del arco igual al cociente entre la longitud l y a , es decir $\Delta\eta = l/a$. Se tiene que puntualizar que esta elección no proporciona una longitud real del arco elíptico igual al valor correcto l . No obstante, por como se ha definido el segmento elíptico, los valores de los coeficientes de las dos o tres funciones que definen la función parabólica son fácilmente calculables siguiendo una procedimiento de normalización estándar [32]. El siguiente paso consiste entonces en calcular el área real bajo la curva de la función parabólica de la siguiente manera:

$$I = \int u_n(l) dl = \int_{l_1} u_n^{(1)}(l) dl + \int_{l_2} u_n^{(2)}(l) dl + \int_{l_3} u_n^{(3)}(l) dl \quad (2.70)$$

donde u_n indica la función base total que hay que calcular, y $u_n^{(i)}$ son las funciones parabólicas definidas en cada uno de los segmentos¹⁰. En este ejemplo particular, la tercera integral de (2.70) corresponde a un arco elíptico, y tiene la siguiente forma:

$$\int_{l_3} u_n^{(3)}(l) dl = a\Delta\eta \int_{-0,5}^{0,5} (a_n + b_n t + c_n t^2) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta(t)} dt \quad (2.71)$$

Resuelta la ecuación (2.70) se encontrará que el valor obtenido por I no es igual a 1, porque la longitud real de un arco elíptico no es l , tal y como ya se ha explicado. La solución a este problema es simple, los coeficientes finales de las funciones parabólicas usadas para definir toda la función base tienen que obtenerse simplemente dividiendo el valor obtenido por el valor de I calculado.

Finalmente, es interesante resaltar que procediendo en este sentido, las longitudes de los arcos elípticos dependerán de la posición de tales segmentos en la elipse. Si el arco elíptico se encuentra en una posición donde el vector unitario tangente a la elipse tiene una gran variación, su longitud es más pequeña, dando lugar a una segmentación más fina que proporcionará resultados más precisos.

2.2.7. Ejemplos: carta modal de guías canónicas

En este apartado se validará la nueva teoría extendida con algunos ejemplos de guías canónicas de gran interés. Todos los resultados que se expondrán en la tesis han sido simulados en un Pentium IV a 2,4 GHz, con 1 GB de RAM. Para la verificación del programa informático desarrollado se ha escogido como primer ejemplo una guía con reentrante (en inglés *ridge*). La guía WR-75 ($a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm) que se ha analizado (figura 2.5) tiene un reentrante centrado de anchura $w = 4$ mm y altura $h = 2,976$ mm.

En la tabla 2.1 se presentan las frecuencias de corte de los primeros seis modos calculadas con el programa desarrollado. Se han comparado estas frecuencias de corte con las obtenidas con otros métodos como el TLM (*Transmission Line Matrix*) [26], elementos finitos (FEM) [25], y las frecuencias obtenidas con el programa comercial ANAPLAN-W [54] que utiliza también

¹⁰En este caso se han tomado tres segmentos como dominio de la función base.

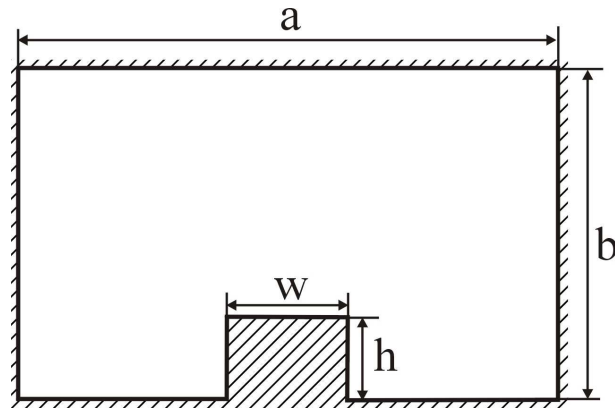


Figura 2.5. Geometría de la guía *ridge* analizada.

Modo (orden)	Tipo (TE/TM)	BI-RME f_c (GHz)	FEM f_c (GHz)	TLM f_c (GHz)	ANAPLAN-W f_c (GHz)
1	TE	6,71569	6,640	6,715	6,7205
2	TE	15,1309	14,956	15,083	15,142
3	TE	16,8550	16,788	16,839	16,867
4	TE	17,1713	17,159	17,201	17,183
5	TM	21,4571	22,135	21,333	21,469
6	TE	22,3047	22,173	22,314	22,320

Tabla 2.1. Primeras 6 frecuencias de corte de una guía *ridge* (guía WR-75 con una penetración centrada de 4 mm de anchura y una altura de 2,976 mm) calculadas con el programa informático que implementa el método BI-RME tal como ha sido descrito. Se han comparado estas frecuencias con el método de elementos finitos (FEM), el método TLM (*Transmission Line Matrix*) y el programa ANAPLAN-W basado así mismo en el método BI-RME original [29].

el método BI-RME propuesto originalmente en [29]. Aparte de la precisión del resultado conviene subrayar la gran velocidad con la que se ha resuelto el problema considerado. Así pues, este método proporciona cientos de frecuencias de corte en cuestión de pocos segundos. En realidad, con este ejemplo, no podemos asegurar cuál es la precisión absoluta del método porque no se conocen expresiones analíticas que proporcionen las frecuencias de corte de la guía con reentrante. Para ver cuál es la precisión absoluta de este método, se analizarán otros ejemplos de los cuales se conoce su solución analítica. De todas formas, se ha comprobado que disminuyendo la penetración del reentrante las frecuencias de corte de los modos tienden, como era de esperar, a las frecuencias de corte de la guía rectangular sobradamente conocidas. Aumentando la altura del reentrante hasta dividir la guía en dos, se generaran nuevamente las frecuencias de corte de los modos de las dos guías rectangulares del mismo tamaño.

En el segundo ejemplo considerado se han representado las longitudes de onda de corte normalizadas de una guía rectangular cuya sección transversal tiene forma de cruz (*crossed*, ver figura 2.6) en función del cociente b/a . Este tipo de guías están presentes en sistemas de alimentación de antenas de doble polarización, en las cuales, a las frecuencias de trabajo, se

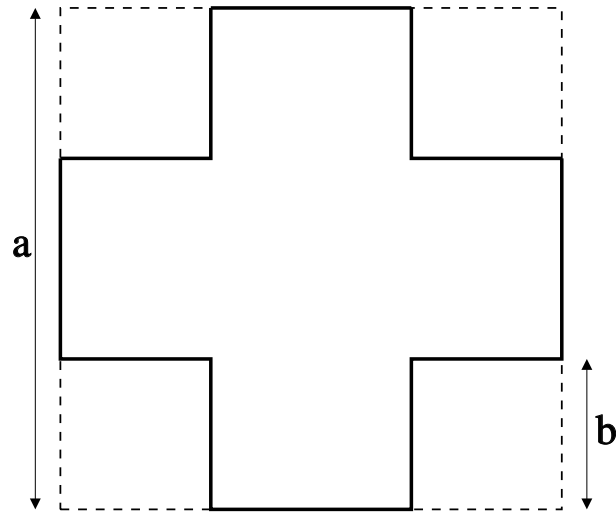


Figura 2.6. Guía rectangular en forma de cruz (*crossed*).

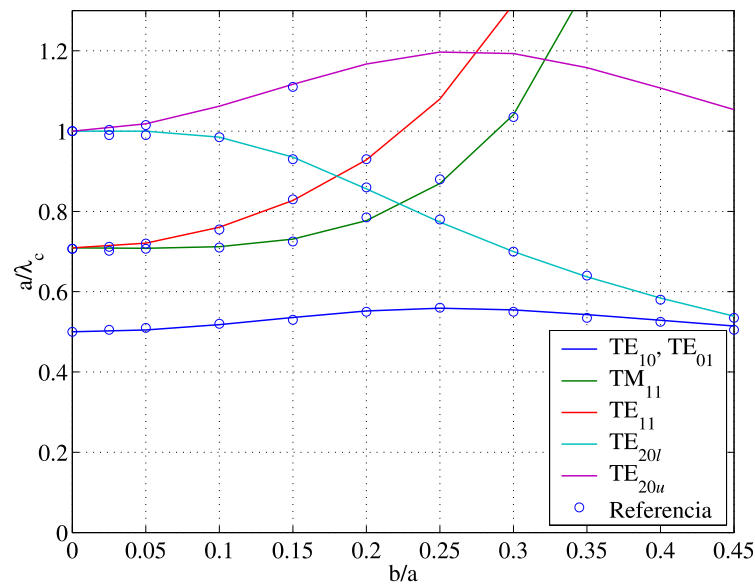


Figura 2.7. Longitudes de onda de corte normalizadas de una guía rectangular en forma de cruz (*crossed*) en función de b/a , los resultados han sido comparados con [61].

propagan más modos aparte del fundamental.

En la figura 2.7 se han representado los resultados obtenidos con la herramienta desarrollada. Estos resultados han sido comparados con los que aparecen en [61, 62] donde se estudió por primera vez este tipo de guía. Como se puede observar, existe una gran concordancia entre los resultados obtenidos con el código desarrollado y los proporcionados en la literatura. Un aspecto curioso de este ejemplo es que al crecer el cociente b/a , la degeneración de los modos TE_{20} y TE_{02} , presente en la guía si $b = 0$, desaparece mientras que la degeneración de los modos TE_{10}

y TE_{01} no se ve afectada por los reentrantes. La guía rectangular en forma de cruz proporciona una doble polarización sobre un ancho de banda que depende del cociente b/a . Como se afirma en [61], el máximo ancho de banda se obtiene para $(b/a) = 0,225$ porque se obtiene la máxima separación de los modos TE_{10} y TM_{11} , si se incrementa el cociente b/a , empieza a aparecer el modo TE_{20l} que limita este ancho de banda¹¹.

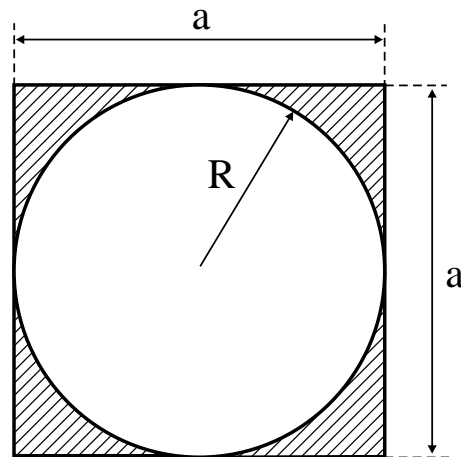


Figura 2.8. Guía circular de radio R , encerrada en una guía cuadrada de lado a .

Con objeto de validar la teoría desarrollada para los arcos circulares, en el siguiente ejemplo se ha analizado una guía circular de diámetro 12 mm, incluida en una guía cuadrada de 12 mm (ver figura 2.8). En la tabla 2.2, se representa la comparación entre el número de onda de corte de los primeros modos TM y TE calculados con BI-RME y las soluciones analíticas conocidas. Cabe señalar que en el cálculo de los modos se han utilizado únicamente arcos circulares en la discretización del contorno. El coste computacional para calcular 120 modos de la guía circular utilizando 500 modos de la guía cuadrada ha sido de tan sólo 37 segundos. Como referencia para la mejora obtenida podemos considerar el ejemplo propuesto en [29], donde se calculan las frecuencias de corte de una guía circular de diámetro 9,525 mm con el método BI-RME original. En la tabla 2.3 se compara el error relativo, respecto a las soluciones analíticas, de dichas frecuencias de corte calculadas discretizando el contorno sólo con segmentos rectos (BI-RME original) y con la nueva discretización propuesta (segmentos circulares). Como se puede ver en los resultados obtenidos, se ha logrado alcanzar el objetivo de mejorar la eficiencia y precisión del método BI-RME empleando perturbaciones circulares.

El siguiente ejemplo canónico considerado es una guía elíptica (ver figura 2.9) con semieje mayor igual a 10 mm y excentricidad¹² $e = 0,5$. Con el fin de aplicar el método BI-RME explicado, se ha encerrado la guía elíptica en una guía rectangular de dimensiones 21 mm \times 18 mm, y se han utilizado 1000 modos en la guía rectangular, discretizando así el contorno arbitrario con 176 arcos elípticos.

¹¹El modo TE_{20l} significa TE_{20} “lower”, es decir, la rama inferior del modo TE_{20} que aparece en la gráfica de la figura 2.7. De igual forma, el modo TE_{20u} significa TE_{20} “upper”, es decir, la rama superior del modo TE_{20} .

¹²La excentricidad de una elipse se calcula como $e = \frac{\sqrt{a_e^2 - b_e^2}}{a_e}$.

Modo (orden)	Tipo (TE/TM)	k_c (BI-RME) mm^{-1}	k_c (Analítico) mm^{-1}	ERROR %
1	TE	0,306875	0,306863	0,0039
2	TE	0,306875	0,306863	0,0039
3	TM	0,400823	0,400804	0,0047
4	TE	0,509067	0,509039	0,0055
5	TE	0,509067	0,509039	0,0055
6	TE	0,638665	0,638617	0,0075
7	TM	0,638670	0,638617	0,0075
8	TM	0,638670	0,638617	0,0075
9	TE	0,700320	0,700198	0,0174
10	TE	0,700320	0,700198	0,0174

Tabla 2.2. Primeros 10 números de onda de corte de una guía circular de diámetro 12 mm, incluida en una guía cuadrada de 12 mm. Se muestra el error relativo entre los valores calculados con el método BI-RME, discretizando el contorno sólo con segmentos circulares, y las soluciones analíticas.

Modo Tipo	Error BI-RME (sólo segmentos rectos)	Error BI-RME (sólo arcos circulares)
TM ₀₁	0,160 %	0,002 %
TM ₁₁	0,206 %	0,009 %
TM ₂₁	0,207 %	0,004 %
TM ₀₂	0,320 %	0,011 %
TM ₃₁	0,439 %	0,013 %
TM ₁₂	0,585 %	0,015 %
TM ₄₁	0,284 %	0,021 %
TM ₂₂	0,526 %	0,012 %
TE ₁₁	—	0,035 %
TE ₂₁	—	0,054 %

Tabla 2.3. Error relativo, respecto a las soluciones analíticas, de los valores de las frecuencias de corte de una guía circular de diámetro 9,525 mm calculados discretizando el contorno sólo con segmentos rectos [29], y con arcos circulares.

En la tabla 2.4 se comparan las longitudes de onda de algunos de los primeros 100 modos de la guía elíptica calculados con dos métodos muy distintos: el método BI-RME y la técnica explicada en [47], la cual transforma la ecuación de Helmholtz en coordenadas elípticas en un problema algebraico de autovalores. El tiempo de CPU necesario para calcular 187 modos de la guía elíptica ha sido de 47 segundos (en un pentium IV a 2,4 GHz), frente a los 167 segundos requeridos por el método explicado en [47], o los 303 segundos necesarios si se utilizan las funciones de Mathieu [47]. Estos dos últimos resultados han sido obtenidos utilizando un IBM RISC-6000 workstation. Como se puede apreciar de los resultados obtenidos, también el objetivo de mejorar la precisión utilizando arcos elípticos en la discretización del contorno arbitrario

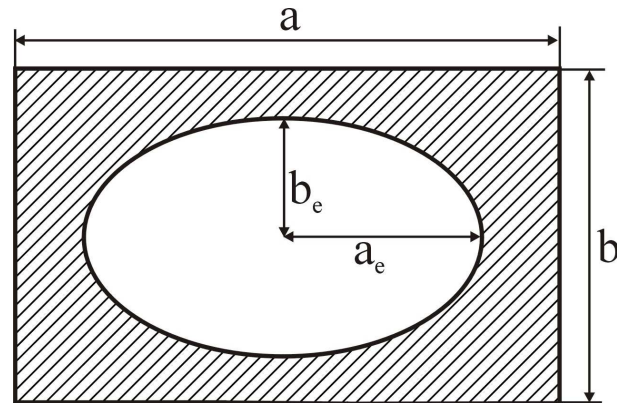


Figura 2.9. Guía elíptica de semieje mayor a_e , semieje menor b_e , encerrada en una guía rectangular.

Modo (orden)	Tipo (TE/TM)	λ_c BI-RME cm^{-1}	λ_c ref.[47] cm^{-1}	ERROR %
1	TE	3,394426	3,394477	0,0015
5	TE	1,907890	1,907950	0,0030
10	TE	1,397804	1,397907	0,0073
20	TE	0,915912	0,916070	0,0170
30	TM	0,775505	0,775601	0,0120
50	TM	0,592021	0,592145	0,0200
70	TE	0,493878	0,494025	0,0290
90	TM	0,433990	0,434155	0,0380
100	TE	0,415935	0,416163	0,0540

Tabla 2.4. Longitudes de onda de corte de una guía elíptica (semieje mayor $a_e = 10$ mm y excentricidad $e = 0,5$), calculados con el método BI-RME utilizando sólo arcos elípticos y comparados con los resultados publicados en [47].

ha sido claramente alcanzado.

Como último ejemplo, consideraremos el análisis de un iris en forma de cruz mostrado en la figura 2.10. Este iris de acoplo ha sido extensamente utilizado en los filtros de modo dual en guía circular para aplicaciones espaciales [3]. Las dimensiones de la cruz son $a_2 = 15,3$ mm, $b = 17,3$ mm y $w = 2$ mm. Para analizar la estructura con el método BI-RME, se ha utilizado una guía cuadrada de anchura $a_1 = 20$ mm. La tabla 2.5 presenta los números de onda de corte de los primeros tres modos TE del iris y el error relativo de estos resultados respecto a los presentados en [30] con $R = 0$ mm. En la misma tabla se muestra la variación del número de onda de corte cuando se varía el radio de curvatura de sus esquinas. Un radio de curvatura $R = 0,01$ mm prácticamente no afecta los resultados; a partir de $R = 0,5$ mm las diferencias empiezan a tomar un valor significativo. Estas esquinas redondeadas suelen aparecer durante los procesos de fabricación de los iris en forma de cruz. La predicción de los efectos que producen dichas esquinas redondeadas durante la fase de análisis del dispositivo resulta extremadamente

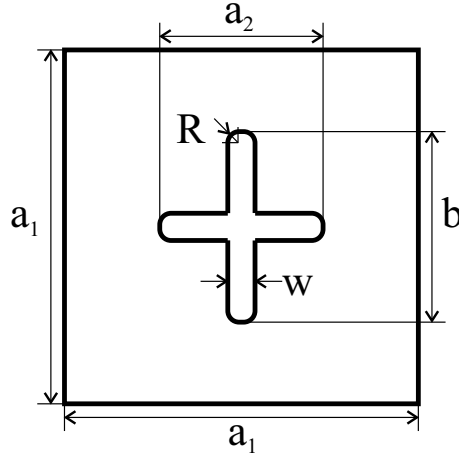


Figura 2.10. Iris en forma de cruz en una guía cuadrada.

útil, tal y como se detalla más exactamente en el capítulo 5. En todos estos ejemplos el contorno arbitrario ha sido dividido en un número de segmentos circulares y lineales comprendido entre 164, para el caso $R = 0$ mm, y 212 para el caso $R = 1$ mm. También el esfuerzo computacional ha sido diferente, variando entre 30 y 40 segundos, y aumentando cada vez que se incrementa el radio de curvatura.

Modo	k_c (mm ⁻¹) $R = 0$ mm [30]	k_c (mm ⁻¹) $R = 0,01$ mm	k_c (mm ⁻¹) $R = 0,1$ mm	k_c (mm ⁻¹) $R = 0,5$ mm	k_c (mm ⁻¹) $R = 1$ mm
TE ₁	0,18762	0,18762	0,18766	0,18882	0,19253
TE ₂	0,21136	0,21136	0,21142	0,21289	0,21761
TE ₃	0,21305	0,21305	0,21311	0,21940	0,21940

Tabla 2.5. Números de onda de corte de los 3 primeros modos TE de un iris en forma de cruz al variar el radio de curvatura de sus esquinas.

2.3. Cálculo de las integrales de acoplamiento

A continuación se describe un método eficiente para el cálculo de los coeficientes de acoplo entre los modos de una guía rectangular y los modos de una guía arbitraria de sección S definida por la línea σ , que se basa en el procedimiento descrito originalmente en [30].

Sean $\mathbf{e}_{qTE}^\diamond(\mathbf{r})$, $\mathbf{e}_{qTM}^\diamond(\mathbf{r})$, y $\mathbf{e}_{qTEM}^\diamond(\mathbf{r})$ el campo eléctrico transversal normalizado de la guía arbitraria en S para el q -ésimo modo TE, TM y TEM, respectivamente, mientras que $\mathbf{e}_{pTE}^\square(\mathbf{r})$ y $\mathbf{e}_{pTM}^\square(\mathbf{r})$ denotan el campo eléctrico transversal normalizado de la guía rectangular para el p -ésimo modo TE y TM. En este caso, los coeficientes de acoplo buscados serán:

$$I_{pq}^{TE-TE} = \int_S \mathbf{e}_{pTE}^\square \cdot \mathbf{e}_{qTE}^\diamond ds \quad (2.72)$$

$$I_{pq}^{TE-TM} = \int_S \mathbf{e}_{pTE}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTM}^{\diamond} ds \quad (2.73)$$

$$I_{pq}^{TE-TEM} = \int_S \mathbf{e}_{pTE}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTEM}^{\diamond} ds \quad (2.74)$$

$$I_{pq}^{TM-TE} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTE}^{\diamond} ds \quad (2.75)$$

$$I_{pq}^{TM-TM} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTM}^{\diamond} ds \quad (2.76)$$

$$I_{pq}^{TM-TEM} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTEM}^{\diamond} ds \quad (2.77)$$

A continuación reproducimos de nuevo el potencial escalar de la guía arbitraria que ya se vio en (2.26) como campo eléctrico axial de los modos TM, donde se ha modificado la notación con el fin de distinguir mejor los términos referentes a la guía arbitraria de los de la guía rectangular:

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = k'_q \left[\sum_{n=1}^N b_n'^q \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^{M'} h_m'^{-2} \psi_m(\mathbf{r}) a_m'^q \right] \quad (2.78)$$

con

k'_q es el número de onda del q -ésimo modo TM de la guía arbitraria,

h'_m es el número de onda del m -ésimo modo TM de la guía rectangular,

$b_n'^q$ y $a_m'^q$ son los autovectores correspondientes al q -ésimo modo TM obtenido con el método BI-RME, tales que $\int_S (\Phi_q(\mathbf{r}))^2 ds = 1$,

$\psi_m(\mathbf{r})$ es el potencial escalar del m -ésimo modo TM en la guía rectangular. La componente transversal de campo eléctrico normalizado se puede calcular a partir de éste como:

$$\mathbf{e}_{mTM}^{\square}(\mathbf{r}) = \frac{-\nabla_T \psi_m(\mathbf{r})}{h'_m} \quad (2.79)$$

$g(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ es la función de Green escalar que podemos expresar como:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{s})}{h_i'^2} \quad (2.80)$$

Entonces la ecuación (2.78) queda finalmente escrita como:

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = k'_q \left[\sum_{n=1}^N b_n'^q \int_{\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{s}')}{h_i'^2} u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^{M'} h_m'^{-2} \psi_m(\mathbf{r}) a_m'^q \right] \quad (2.81)$$

Por tanto, el campo eléctrico transversal normalizado para los modos TM de la guía arbitraria viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{qTM}^{\diamond}(\mathbf{r}) &= \frac{-\nabla_T \Phi_q(\mathbf{r})}{k'_q} = \sum_{n=1}^N b_n'^q \int_{\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-\nabla_T \psi_i(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{s}')}{h_i'} \frac{\psi_i(\mathbf{s}')}{h_i'} u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^{M'} \frac{-\nabla_T \psi_m(\mathbf{r}) a_m'^q}{h_m'} \frac{a_m'^q}{h_m'} \\ &= \sum_{n=1}^N b_n'^q \int_{\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{e}_{iTM}^{\square}(\mathbf{r}) \frac{\psi_i(\mathbf{s}')}{h_i'} u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^{M'} \mathbf{e}_{mTM}^{\square}(\mathbf{r}) \frac{a_m'^q}{h_m'} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Para los modos TE, reescribimos el campo eléctrico transversal descrito en (2.33) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{qTE}^{\diamond}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k_q} \sum_{n=1}^N b_n^q \nabla_T \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_n(l')}{\partial l'} dl' + k_q \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') w_n(l') dl' \\ &\quad + k_q \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{e}_{mTE}^{\square}(\mathbf{r})}{h_m^2} a_m^q \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde

k_q es el número de onda del q -ésimo modo TE de la guía arbitraria,

h_m es el número de onda del m -ésimo modo TE de la guía rectangular,

b_n^q y a_m^q son los autovectores correspondientes al q -ésimo modo TE obtenido con el método BI-RME, tales que $\int_S (\mathbf{e}_{qTE}^{\diamond}(\mathbf{r}))^2 ds = 1$,

$g(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ es la función de Green escalar, que al aplicar el gradiente transversal resulta:

$$\nabla_T g(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_{iTM}^{\square}(\mathbf{r})}{h_i'} \psi_i(\mathbf{s}) \quad (2.84)$$

$\bar{\mathbf{G}}_{st}$ es la parte estática de la función de Green diádica que utilizaremos con la siguiente expansión modal:

$$\bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_{iTE}^{\square}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{iTE}^{\square}(\mathbf{s})}{h_i^2} \quad (2.85)$$

Por tanto, la expresión del campo eléctrico normalizado queda finalmente como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{qTE}^{\diamond}(\mathbf{r}) = & -\frac{1}{k_q} \sum_{n=1}^N b_n^q \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_{iTM}^{\square}(\mathbf{r})}{h_i'} \int_{\sigma} \psi_i(\mathbf{s}') \frac{\partial w_n(l')}{\partial l'} dl' \\ & + k_q \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_{iTE}^{\square}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{iTE}^{\square}(\mathbf{s}')}{h_i'^2} \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') w_n(l') dl' + k_q \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{e}_{mTE}^{\square}(\mathbf{r})}{h_m'^2} a_m^q \end{aligned} \quad (2.86)$$

Si la guía arbitraria admite modos TEM, el campo eléctrico transversal del q -ésimo modo TEM es:

$$\mathbf{e}_{qTEM}^{\diamond}(\mathbf{r}) = -\sum_{n=1}^N b_n''^q \int_{\sigma} \nabla_{Tg}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' \quad (2.87)$$

donde $b_n''^q$ son las amplitudes de las funciones bases u_n ¹³ usadas para expandir la densidad de carga en σ . Teniendo en cuenta la ecuación (2.84) se obtiene que:

$$\mathbf{e}_{qTEM}^{\diamond}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N b_n''^q \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_{iTM}^{\square}(\mathbf{r})}{h_i'} \int_{\sigma} \psi_i(\mathbf{s}') u_n(l') dl' \quad (2.88)$$

Ahora ya se puede proceder a calcular todas las integrales de acoplo [30]. Para ello se deben tener en cuenta las condiciones de normalización de los campos que son, $\int_S \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m ds = 1$ en el caso TE, $\int_S \psi_m^2 ds = 1$ en el caso TM, y $\int_S \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p ds = 1$ en el caso TEM, y que las series que aparecen en las ecuaciones anteriores se truncarán en un valor igual al número de modos utilizados en la expansión modal de la guía rectangular de referencia.

2.3.1. Integrales de acoplo TE-TE

La integral de acoplo TE-TE, después de sustituir (2.86) en (2.72), queda como sigue:

$$I_{pq}^{TE-TE} = \int_S \mathbf{e}_{pTE}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTE}^{\diamond} ds = k_q \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \frac{\mathbf{e}_{pTE}^{\square}(\mathbf{s}')}{h_p'^2} \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') w_n(l') dl' + k_q \frac{a_p^q}{h_p'^2} \quad (2.89)$$

Recordando la expresión de la matriz \mathbf{R} del caso TE (2.30), la integral se puede escribir como:

$$I_{pq}^{TE-TE} = \int_S \mathbf{e}_{pTE}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTE}^{\diamond} ds = k_q \sum_{n=1}^N b_n^q R_{np} + k_q \frac{a_p^q}{h_p'^2} \quad (2.90)$$

2.3.2. Integrales de acoplo TE-TM

Es un hecho conocido [63] que los modos TE de una guía rectangular grande no se acoplan con los modos TM de una guía pequeña contenida en la interior, por tanto:

$$I_{pq}^{TE-TM} = \int_S \mathbf{e}_{pTE}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTM}^{\diamond} ds = 0 \quad (2.91)$$

tal y como se puede comprobar a partir de la expresión (2.82).

¹³Este conjunto de funciones bases es el mismo que se ha empleado en el caso TM.

2.3.3. Integrales de acoplo TE-TEM

También esta integral es cero, la demostración se puede encontrar en [64]:

$$I_{pq}^{TE-TEM} = \int_S \mathbf{e}_{pTE}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTEM}^{\diamond} ds = 0 \quad (2.92)$$

y se verifica a la vista de la expresión (2.88).

2.3.4. Integrales de acoplo TM-TE

Sustituyendo (2.86) en (2.75), la integral de acoplo TM-TE queda como sigue:

$$I_{pq}^{TM-TE} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTE}^{\diamond} ds = -\frac{1}{k_q} \sum_{n=1}^N \frac{b_n^q}{h_p'} \int_{\sigma} \psi_p(\mathbf{s}') \frac{\partial w_n(l')}{\partial l'} dl' \quad (2.93)$$

Introduciendo una nueva matriz \mathbf{R}'' igual a:

$$R_{np}'' = \frac{1}{h_p'} \int_{\sigma} \psi_p(\mathbf{s}') \frac{\partial w_n(l')}{\partial l'} dl' \quad (2.94)$$

con $n = 1, 2, \dots, N$ número de funciones base, y $p = 1, 2, \dots, M'$ número de modos TM de la guía rectangular de referencia. Así pues, la ecuación (2.93) se puede reescribir como:

$$I_{pq}^{TM-TE} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTE}^{\diamond} ds = -\frac{1}{k_q} \sum_{n=1}^N b_n^q R_{np}'' \quad (2.95)$$

2.3.5. Integrales de acoplo TM-TM

La integral de acoplo TM-TM, después de sustituir (2.82) en (2.76), queda:

$$I_{pq}^{TM-TM} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTM}^{\diamond} ds = \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \frac{\psi_p(\mathbf{s}')}{h_p'} u_n(l') dl' + \frac{a_p'^q}{h_p'} \quad (2.96)$$

que se puede escribir, teniendo en cuenta la expresión de la matriz \mathbf{R}' del caso TM (2.21), como:

$$I_{pq}^{TM-TM} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTM}^{\diamond} ds = h_p' \sum_{n=1}^N b_n^q R_{np}' + \frac{a_p'^q}{h_p'} \quad (2.97)$$

2.3.6. Integrales de acoplo TM-TEM

Por último, se puede obtener la integral de acoplo TM-TEM, sustituyendo en la (2.76) la expresión obtenida en la (2.88):

$$I_{pq}^{TM-TEM} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTEM}^{\diamond} ds = \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \frac{\psi_p(\mathbf{s}')}{h_p'} u_n(l') dl' = h_p' \sum_{n=1}^N b_n^q R_{np}' \quad (2.98)$$

2.3.7. Comentarios

Cabe señalar que dos de las tres matrices requeridas para el cálculo de las integrales de acoplo han sido ya calculadas previamente con el método BI-RME. Entonces, para completar el cálculo de las integrales de acoplo entre una guía de sección transversal arbitraria y una guía rectangular que la rodea, sólo se necesita implementar la nueva matriz R'' . Esta es una de las características que demuestran la tremenda eficiencia computacional del método BI-RME, que resulta de gran interés en el análisis de dispositivos pasivos con guías de sección transversal arbitraria.

2.3.8. Ejemplo de validación

Para comprobar la precisión del método, inicialmente se han calculado las integrales de acoplo entre dos guías rectangulares de diferente tamaño y no centradas incluidas en [30]. En el siguiente capítulo se mostrarán más ejemplos de integrales de acoplo que involucran guías de sección transversal arbitraria. La discontinuidad analizada está representada en la figura 2.11.

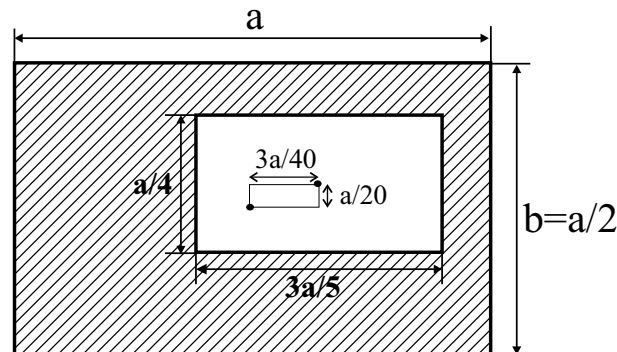


Figura 2.11. Transición entre dos guías rectangulares no centradas.

Las dimensiones de las dos guías son: $19,05 \text{ mm} \times 9,525 \text{ mm}$ para la guía rectangular grande, y $3a/5 \times a/4$ para la guía pequeña, y el desplazamiento entre centros de ambas guías es de $3a/40$ en la dirección del eje x y de $a/20$ en la dirección del eje y . En la tabla 2.6 se comparan algunos resultados obtenidos con los publicados en [30] (marcados con un *) y calculados también con el método BI-RME en su versión original (sólo segmentos rectos). En la simulación se han utilizado 137 modos de la guía rectangular grande, representados en las filas de la tabla, mientras que en las columnas se han situado los modos calculados para la guía pequeña. A partir de los valores numéricos obtenidos, se puede deducir que el error absoluto del método BI-RME es del orden de 10^{-3} – 10^{-4} .

Modo	TE ₁₀	TE ₂₀	TE ₀₁	TE ₁₁	TM ₁₁
TE ₁₀	0,63252	0,04815	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$-3 \cdot 10^{-4}$	*****
	0,63255*	0,04833*	$8,6 \cdot 10^{-4}$ *	$-1,1 \cdot 10^{-3}$ *	*****
TE ₀₁	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	-0,58229	$-1 \cdot 10^{-3}$	*****
	$1,2 \cdot 10^{-4}$ *	$1,8 \cdot 10^{-4}$ *	-0,58468*	$-1,3 \cdot 10^{-3}$ *	*****
TE ₂₀	-0,15190	0,49214	$5 \cdot 10^{-3}$	$-3 \cdot 10^{-3}$	*****
	-0,15172*	0,49246*	$1,5 \cdot 10^{-3}$ *	$-4,8 \cdot 10^{-3}$ *	*****
TE ₁₁	-0,16388	-0,01236	0,09803	0,39473	*****
	-0,16370*	-0,01232*	0,09893*	0,39509*	*****
TM ₁₁	-0,32715	-0,02494	-0,05015	-0,05111	-0,34927
	-0,32710*	-0,02505*	-0,04986*	-0,05036*	-0,34938*

Tabla 2.6. Integrales de acoplo entre dos guías rectangulares, de diferentes tamaño y no centradas, calculadas con el método desarrollado y comparados con [30] donde se utiliza también la técnica BI-RME en su versión original (marcados con un *). En las filas se han situado los modos de la guía rectangular grande, en las columnas los modos de la guía pequeña contenida en la anterior. La serie de asteriscos * indica que estas integrales son cero, tal y como se explica en [63].

2.4. Cálculo del campo electromagnético y algoritmo de descarte modal

En este último apartado, se explicará con más detalle cómo se ha conseguido obtener el campo electromagnético de los modos TM y TE de una guía arbitraria. A tal fin, es necesario calcular el gradiente de la función de Green g . Ahora bien, dado que los términos de la función de Green con convergencia acelerada son muy complejos, se ha intentado calcular estos términos a partir del gradiente de la serie original y posteriormente acelerar la convergencia del gradiente, garantizando así una mayor eficiencia computacional, tal y como se detalla en [65] y [66].

Campos generados por los modos TM

Tal y como se ha explicado previamente, los vectores modales del campo eléctrico transversal de los modos TM se obtienen a partir del potencial escalar de la guía arbitraria:

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = k'_q \left[\sum_{n=1}^N b'_n{}^q \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^{M'} h'_m{}^{-2} \psi_m(\mathbf{r}) a'_m{}^q \right] \quad (2.99)$$

donde

k'_q es el número de onda del q -ésimo modo TM de la guía arbitraria,

h'_m es el número de onda del m -ésimo modo TM de la guía rectangular,

b_n^q y a_m^q son los autovectores correspondientes al q -ésimo modo TM obtenido con el método BI-RME tales que $\int_S \Phi_q^2(\mathbf{r}) ds = 1$

$\psi_m(\mathbf{r})$ es el potencial escalar del m -ésimo modo TM de la guía rectangular, que según [36] se expresa como

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{b}y\right) \quad (2.100)$$

con $r, s = 1, 2, \dots$

Dicho potencial escalar se relaciona con la componente transversal del campo eléctrico TM de la guía arbitraria según la fórmula:

$$\mathbf{e}_{qTM}^\diamond(\mathbf{r}) = \frac{-\nabla_T \Phi_q(\mathbf{r})}{k_q'} \quad (2.101)$$

Por tanto se puede obtener una expresión más eficiente, desde el punto de vista computacional, del vector transversal del campo eléctrico de los modos TM:

$$\mathbf{e}_{qTM}^\diamond(\mathbf{r}) = -\sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \nabla_T g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^{M'} \frac{a_m^q}{h_m'} \mathbf{e}_{mTM}^\square(\mathbf{r}) \quad (2.102)$$

con

$$\mathbf{e}_{mTM}^\square(\mathbf{r}) = \frac{-\nabla_T \psi_m(\mathbf{r})}{h_m'} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\left[r^2 \left(\frac{b}{a}\right) + s^2 \left(\frac{a}{b}\right)\right]}} \times$$

$$\left[\left(\frac{r\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{r\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{b}y\right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{s\pi}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{s\pi}{b}y\right) \hat{\mathbf{y}} \right]$$

con $r, s = 1, 2, \dots$

Campos generados por los modos TE

Análogamente al caso TM, la expresión de los vectores modales de los modos TE de una guía arbitraria se obtiene a partir de las formulas (2.33) y (2.83) proporcionadas por el método BI-RME:

$$\mathbf{e}_{qTE}^\diamond(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_q} \sum_{n=1}^N b_n^q \nabla_T \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_n(l')}{\partial l'} dl' \quad (2.103)$$

$$+ k_q \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') w_n(l') dl' + k_q \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{e}_{mTE}^\square(\mathbf{r})}{h_m^2} a_m^q$$

donde

k_q es el número de onda del q -ésimo modo TE de la guía arbitraria,

h_m es el número de onda del m -ésimo modo TE de la guía rectangular,

b_n^q y a_m^q son los autovectores correspondientes al q -ésimo modo TE obtenido con el método BI-RME, tales que $\int_S (\mathbf{e}_{qTE}^\diamond(\mathbf{r}))^2 ds = 1$

$g(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ es la función de Green escalar, $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ es la función de Green diádica, y $\mathbf{e}_{mTE}^\square(\mathbf{r})$ es el vector eléctrico transversal del modo m -ésimo TE de la guía rectangular:

$$\mathbf{e}_{mTE}^\square(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_s}}{\sqrt{\left[r^2 \left(\frac{b}{a} \right) + s^2 \left(\frac{a}{b} \right) \right]}} \times \left[\left(\frac{s}{b} \right) \cos \left(\frac{r\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{s\pi}{b} y \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{r}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{r\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{s\pi}{b} y \right) \hat{\mathbf{y}} \right]$$

$$\text{con } \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 2, & i \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, separando las dos componentes, se obtiene que el campo eléctrico de los modos TE es:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{qTE}^\diamond(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}} &= \frac{1}{k_q} \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\text{T}} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_n(l')}{\partial l'} dl' \\ &+ k_q \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \hat{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') w_n(l') dl' + k_q \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{e}_{mTE}^\square(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{h_m^2} a_m^q \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{qTE}^\diamond(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{y}} &= \frac{1}{k_q} \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \hat{\mathbf{y}} \cdot \nabla_{\text{T}} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_n(l')}{\partial l'} dl' \\ &+ k_q \sum_{n=1}^N b_n^q \int_{\sigma} \hat{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') w_n(l') dl' + k_q \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{e}_{mTE}^\square(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{y}}}{h_m^2} a_m^q \end{aligned} \quad (2.105)$$

Como se habrá observado, si se quiere calcular el campo eléctrico tanto de los modos TE como de los modos TM, es necesario calcular el gradiente transversal de la función de Green g . Podríamos intentar calcular el gradiente transversal a partir de la expresión de la función de Green con convergencia acelerada, como se recoge en [56] y [67], pero dado que los términos son muy complejos se ha intentado calcular el gradiente de la serie original y posteriormente acelerar la convergencia del gradiente siguiendo la técnica descrita en [65] y [66]. La expresión de la función de Green en serie de autofunciones de una guía rectangular es:

$$g(x, y; x', y') = \frac{4}{ab} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{r\pi}{a} x' \right) \operatorname{sen} \left(\frac{s\pi}{b} y' \right)}{\left(\frac{r\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{b} \right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{r\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{s\pi}{b} y \right) \quad (2.106)$$

La expresión del gradiente se calcula del siguiente modo:

$$\nabla_T g = \frac{\partial g}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial g}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (2.107)$$

Aplicando ahora la suma de Poisson a cada término del gradiente, y sumando la serie respecto a r y s , respectivamente, se obtiene finalmente que los términos a utilizar en el cálculo del campo eléctrico serán:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{4a} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s^{10} + C_s^{01} - C_s^{00} - C_s^{11} \quad (2.108)$$

con

$$C_s^{pq} = \frac{\text{sen} \left[\frac{\pi}{a} (x - (-1)^p x') \right]}{\cosh \left[\frac{\pi}{a} (y - (-1)^q y' + 2sb) \right] - \cos \left[\frac{\pi}{a} (x - (-1)^p x') \right]} \quad (2.109)$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{4b} \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_r^{10} + K_r^{01} - K_r^{00} - K_r^{11} \quad (2.110)$$

con

$$K_r^{pq} = \frac{\text{sen} \left[\frac{\pi}{b} (y - (-1)^p y') \right]}{\cosh \left[\frac{\pi}{b} (x - (-1)^q x' + 2ar) \right] - \cos \left[\frac{\pi}{b} (y - (-1)^p y') \right]} \quad (2.111)$$

En el caso de los modos TEM el cálculo de los vectores modales se obtiene fácilmente a partir del gradiente del potencial electrostático (2.38):

$$\mathbf{e}_{qTEM}^{\diamond}(\mathbf{r}) = - \sum_{n=1}^N b_n^{''q} \int_{\sigma} \nabla_T g(r, s') u_n(l') dl' \quad (2.112)$$

donde $b_n^{''q}$ son las amplitudes de las funciones base u_n usadas para expandir la densidad de carga en σ ; las cuales son las mismas usadas en el caso TM.

2.4.1. Región de interés y algoritmo de descarte modal

La característica principal del método BI-RME es extender el dominio S de una guía arbitraria en un dominio Ω que lo incluye completamente. En el caso particular de que S se distinga de Ω sólo por la presencia de conductores sin espesor, el problema extendido “coincide” con el problema original, es decir, que la solución del problema de autovalores “extendido” coincide con la del problema original. Una diferencia substancial entre los dos problemas se presenta cuando las líneas o el conjunto de líneas σ divide Ω en subdominios, uno de los cuales es S (ver figura 2.12). Evidentemente, asumiendo que el potencial es cero en $\Omega - S$, los valores propios que teóricamente se obtienen serán distintos de cero en la región S , que llamaremos interna, y serán cero en la región complementaria $\Omega - S$, que llamaremos externa. En realidad, debido a las aproximaciones numéricas del método, el campo que se obtiene no es exactamente cero fuera de la región “interna” de interés. De todas formas, los autovalores pueden ser asignados a S o a la región complementaria comparando el valor del campo electromagnético en el interior y en el exterior de S , porque la magnitud del campo es bastante diferente en las dos regiones.

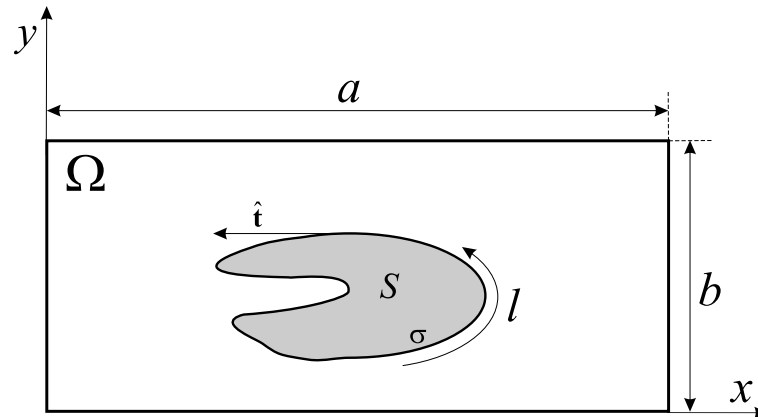


Figura 2.12. Guías de sección transversal arbitraria.

El primer paso del algoritmo de descarte de los modos fuera de la región de interés es el cálculo del área de las distintas regiones S y $\Omega - S$, que es necesario identificar. Hay que precisar que puede existir una única región de interés, que será la región “interna”, mientras que la otra o las otras regiones serán consideradas como “externas”¹⁴.

A continuación se calculará el campo en cada uno de los puntos de las distintas regiones. La elección y generación de estos puntos de evaluación del campo electromagnético vendrá explicada con mayor detalle en el párrafo siguiente. Respecto a la figura 2.13 (una guía con dos inserciones (*doble ridge*)) con el signo positivo se indicarán los puntos referidos a la región interna y con el signo negativo los puntos de la región externa. También con el signo positivo se indicará el área de la región interna (S^+), mientras que con el signo negativo se identificará la externa (S^-)¹⁵. Suponiendo que ya han sido calculados los dos grupos de puntos (internos y externos) de evaluación, por cada modo de la guía arbitraria, obtenido con el método BI-RME, se calculará según las formulas (2.102) para los modos TM, y (2.104) y (2.105) para los modos TE, el módulo al cuadrado del campo electromagnético transversal.

El siguiente paso será el cálculo del cociente Q que se considerará para descartar modos:

$$Q = \frac{S^+ \sum_{i=1}^N |\mathbf{E}_i^+|^2}{S^- \sum_{i=1}^N |\mathbf{E}_i^-|^2} \quad (2.113)$$

donde N es el número de puntos escogidos para la evaluación del campo, y en el cálculo del cociente se tiene en cuenta que los modos se comportan de diferente manera según las áreas de cada sección transversal. Atendiendo a los valores de Q se procederá al descarte de modos. Si $Q > 100$ supondremos que el modo es un modo de la región interna, es decir, un modo de la guía arbitraria que queremos analizar; por contra si $Q < 1$ el modo no es de la región de

¹⁴ Por definición, el contorno σ vendrá parametrizado, discretizado y recorrido de forma tal que la región interna se quede siempre al lado izquierdo de σ .

¹⁵ En el Apéndice C se describe la técnica utilizada para calcular el área de estas dos regiones.

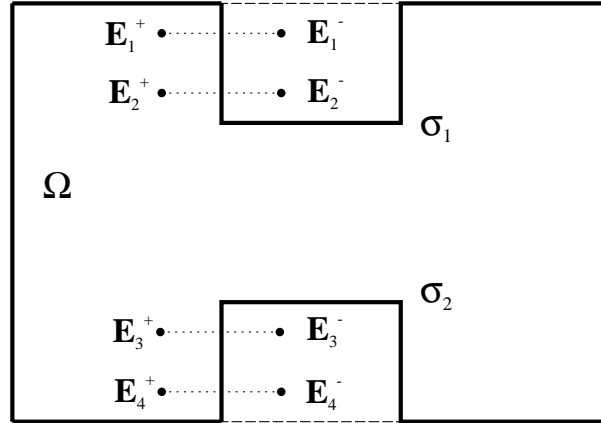


Figura 2.13. Regiones de la guía arbitraria y puntos de evaluación de los campos.

interés interna, es un modo de la región complementaria y por lo tanto será descartado. Menos claro es el caso en el que Q tenga un valor entre 1 y 100. En este caso el modo será considerado dudoso pero no será descartado. Esto sucede cuando los autovalores internos y externos son cuasi-degenerados, es decir, tienen valores muy parecidos pero distintos. Una especie de acoplamiento numérico entre la región interna y externa aparece cuando se fuerza la condición de contorno sobre σ , causando una alteración de los autovectores que producen valores de campo con amplitudes parecidas en las dos regiones. Estos modos acoplados son una combinación lineal de modos desacoplados que se pueden obtener buscando la combinación lineal que produce la máxima diferencia entre la amplitud de campo en la región interna y en la externa, tal y como se detalla en [32]. En el Apéndice D se explica con más detalle cómo pueden desacoplarse estos modos cuasi-degenerados.

2.4.2. Cálculo de los puntos de evaluación

Como se ha dicho en el apartado anterior, el campo electromagnético viene evaluado en puntos de la región interna y externa. Para cada segmento en que se divide el contorno σ de la guía arbitraria se toman uno o más puntos a cada lado. Ahora bien, el contorno σ puede estar compuesto por segmentos, arcos de circunferencia y arcos de elipse. El cálculo de la distancia de un punto a un segmento, o a un arco de circunferencia es un problema trivial, pero cuando se intenta aplicar la misma técnica a una elipse la complejidad algebraica se incrementa. En el algoritmo desarrollado se ha utilizado un método aproximado para calcular la distancia exacta de un punto a una elipse. Este método consiste en minimizar la función distancia de un punto a una elipse, parametrizando adecuadamente la elipse con una sola variable y utilizando el algoritmo de la bisección para buscar la solución. Una descripción más exhaustiva del algoritmo desarrollado se puede encontrar en el Apéndice E de esta tesis.

Un factor importante para el descarte de los modos es la elección de la distancia desde el contorno σ a los puntos donde evaluaremos el campo electromagnético. Esta distancia ha sido fijada a $\lambda_{max}/2$, donde λ_{max} es la máxima longitud de onda de la RME (*Resonant Mode Expansion*), es decir la longitud de onda de corte del modo de orden más elevado de la guía

rectangular de dominio Ω , y que aparece en la formulación teórica (2.14) y (2.16) del método BI-RME bajo el índice m . Cuando no es posible tomar esta distancia, porque por ejemplo hay dos conductores muy cercanos y no se puede tomar un punto interno y/o uno externo a la región de interés, o el conductor está posicionado demasiado cerca del contorno rectangular que lo circunda o de otro conductor, el algoritmo coloca los puntos a una distancia igual a $\lambda_{max}/10$ (ver figura 2.14). Si también esta solución no produjera puntos de evaluación, estos vendrán colocados a una distancia $SF \cdot \lambda_{max}/10$ donde SF es una constante empírica que depende del cociente de superficies:

$$\text{si } S^- < S^+ \rightarrow SF = \left(\frac{S^-}{S^+}\right)^{0,25}$$

$$\text{si } S^- > S^+ \rightarrow SF = \left(\frac{S^+}{S^-}\right)^{0,25}$$

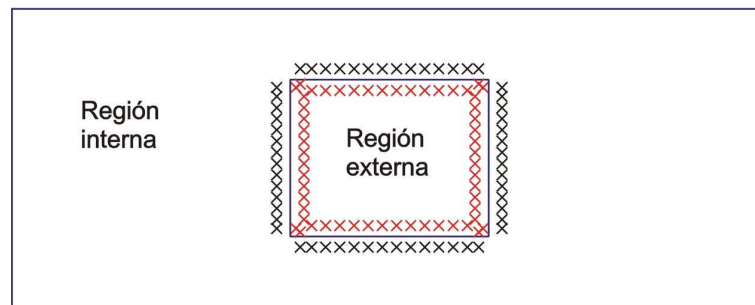


Figura 2.14. Representación de los puntos de evaluación del campo electromagnético, los puntos vienen colocados de dos en dos, a una distancia adecuada que en este caso es $\lambda_{max}/10$ para los puntos externos de las esquinas y $\lambda_{max}/2$ para el resto de los puntos.

Puede pasar que no se puedan colocar puntos, aunque son casos muy excepcionales, como por ejemplo el caso de un conductor lineal interno a una guía rectangular con espesor w casi cero, representado en la figura 2.15. En este caso todos los modos generados serán considerados correctos pero dudosos porque no hay puntos de evaluación. Hay que precisar que, si el conductor interno no tiene espesor no hay descarte de modos porque no existen dos regiones. En este caso, todas las soluciones modales que el método generará son correctas.

2.4.3. Ejemplos de cálculo del campo electromagnético

Para verificar el programa informático desarrollado y comprobar el correcto funcionamiento de las fórmulas implementadas, se ha dibujado el campo eléctrico transversal de algunas guías de onda arbitrarias: una guía con reentrante (en inglés *ridge*), una guía elíptica y un iris en forma de cruz con esquinas redondeadas. Los resultados que se mostrarán en las siguientes gráficas representan el módulo del campo eléctrico transversal obtenido a partir de las fórmulas (2.102), (2.103), (2.104) y (2.105).

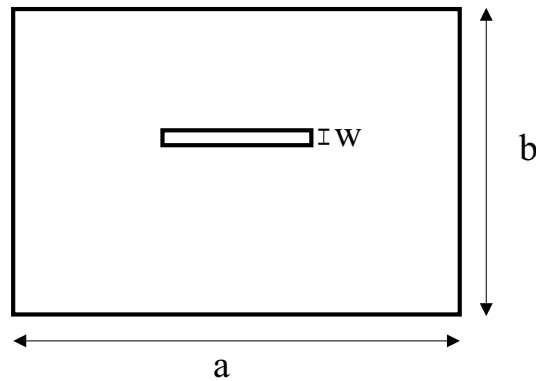


Figura 2.15. Ejemplo de un conductor interno a una guía rectangular con espesor w casi cero. Como no se pueden colocar puntos de evaluación, todos los modos generados serán considerados soluciones del problema.

En la guía *ridge*, es de esperar que el campo dentro de la zona del reentrante sea nulo o cercano a cero si el error numérico es pequeño. La visualización del campo transversal de los dos primeros modos TM en la figura 2.16 permite destacar que el modo está confinado completamente en el interior de la guía, y en el reentrante el campo tiene un valor prácticamente nulo.



Figura 2.16. Representación del campo eléctrico transversal de los dos primeros modos TM de una guía WR-75 con reentrante centrado de 4 mm de anchura y una altura de 2,976 mm. La frecuencia de corte del primer modo TM (*izquierda*) es de 21,45714 GHz y la del segundo modo (*derecha*) es de 23,38994 GHz.

El campo tiende a ser elevado en las esquinas con respecto al resto de la guía, produciéndose problemas de visualización debida a la rápida variación del campo eléctrico transversal en un pequeño entorno alrededor de las esquinas, problema que se ha tratado considerando una mayor segmentación (ver figura 2.17).

Como curiosidad podemos observar el aspecto de los campos asociados a los modos superiores. En la figura 2.18 se observa que el campo sigue estando confinado en el interior de la guía, y que el error numérico sigue siendo despreciable en el exterior de la guía considerada.

Un típico ejemplo de modos cuasi-degenerados se puede ver en la figura 2.19 para una guía

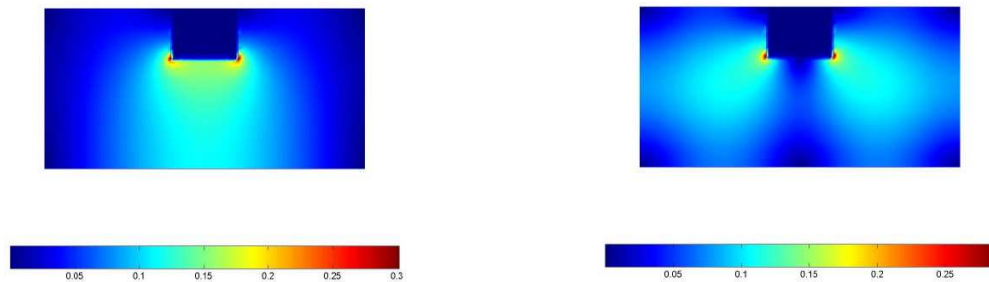


Figura 2.17. Representación del campo eléctrico transversal de los dos primeros modos TE de una guía WR-75 con reentrante centrado de 4 mm de anchura y una altura de 2,976 mm. La frecuencia de corte del primer modo TE (*izquierda*) es de 6,71575 GHz y la del segundo es (*derecha*) de 15,13099 GHz.

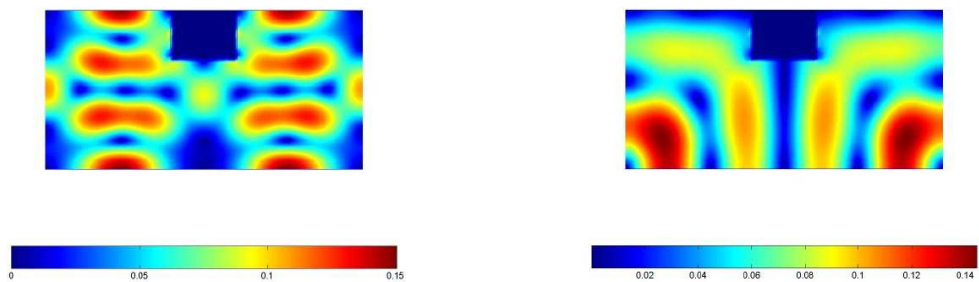


Figura 2.18. *Izquierda:* Representación del campo eléctrico transversal del décimo modo TM de una guía WR-75 con reentrante centrado de 4 mm de anchura y una altura de 2,976 mm. La frecuencia de corte del modo es de 50,27131 GHz. *Derecha:* Módulo del campo eléctrico transversal producido por el décimo modo TE en la misma guía. La frecuencia de corte de este modo es de 35,56768 GHz.

con doble reentrante (*dobles ridges*). Una especie de acoplamiento numérico entre la región interna y externa aparece cuando se fuerza la condición de contorno sobre σ , causando una alteración de los autovectores que producen valores de campo con amplitudes parecidas en las dos regiones de una guía WR-75 con dos reentrantes. Estos modos acoplados son una combinación lineal de dos modos desacoplados (ver figura 2.20) que se pueden obtener buscando la combinación lineal¹⁶ que produce la máxima diferencia entre la amplitud de campo en la región interna y en la externa.

En el tercer ejemplo se ha considerado una guía elíptica de semieje mayor 5 mm y excentricidad $e = 0,7$, situada para aplicar el método en el interior de una guía estándar WR-75. Se ha dibujado el módulo del campo eléctrico transversal de los dos primeros modos TM y TE (ver fi-

¹⁶La técnica utilizada para desacoplar estos modos cuasi-degenerados se describe en el Apéndice D.

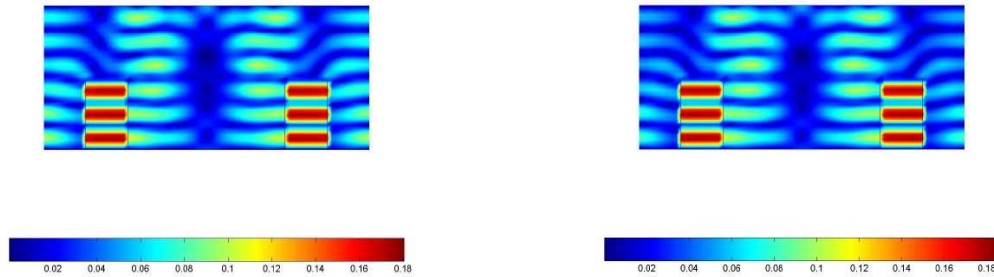


Figura 2.19. Representación del campo eléctrico transversal de dos modos degenerados en una guía WR-75 con dos reentrantes. Los dos modos tienen una frecuencia de corte de 90,1 GHz y son los modos número 115 y 116 TE de la guía.

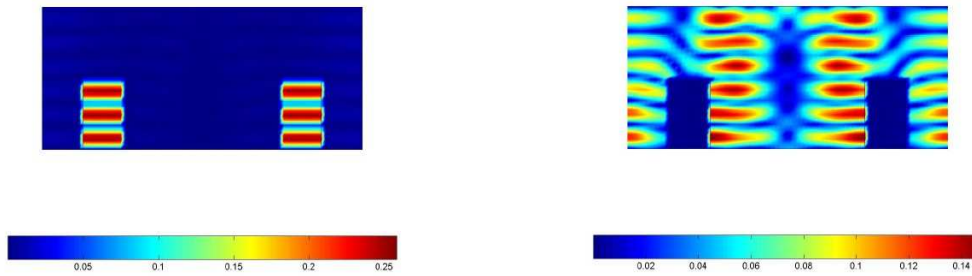


Figura 2.20. Representación del campo eléctrico transversal de los mismos modos después de ortonormalizarlos. El modo representado a la izquierda será descartado por no pertenecer a la región de interés, mientras que el modo a la derecha será aceptado.

gura 2.21). También en este caso se puede comprobar la precisión de la teoría desarrollada en la sección anterior, pues el campo residual en el exterior de la guía debido a errores numéricos es prácticamente nulo.

El cálculo del campo eléctrico transversal debido a los modos TE se obtiene mediante las expresiones (2.104) y (2.105), y resulta computacionalmente más costoso debido a la evaluación de las 4 componentes de la diádica $\overline{\mathbf{G}}_{st}$. Como curiosidad, en la figura 2.22 se ha dibujado el campo eléctrico del décimo modo TM y TE, donde se observa que el error numérico sigue siendo despreciable en el exterior de la guía.

Finalmente en la figura 2.23 se ha dibujado el campo eléctrico transversal de los primeros tres modos TE de un iris en forma de cruz con esquinas redondeadas (figura 2.10), cuyas características modales han sido estudiadas en el apartado anterior.

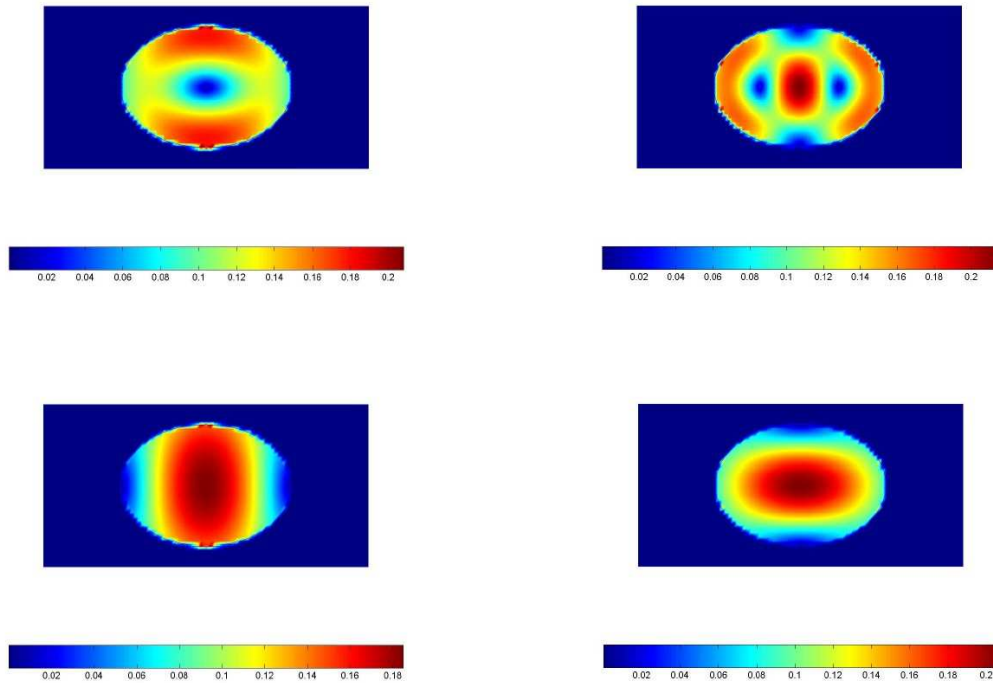


Figura 2.21. Representación del campo eléctrico transversal de los dos primeros modos TM y TE de una guía elíptica de semieje mayor 5 mm, y excentricidad 0,7. *Arriba a la izquierda:* Primer modo TM $f_c = 27,8846$ GHz. *Arriba a la derecha:* Segundo modo TM, $f_c = 40,63324$ GHz. *Abajo a la izquierda:* Primer modo TE, $f_c = 17,76359$ GHz. *Abajo a la derecha:* Primer modo TE, $f_c = 24,19524$ GHz.

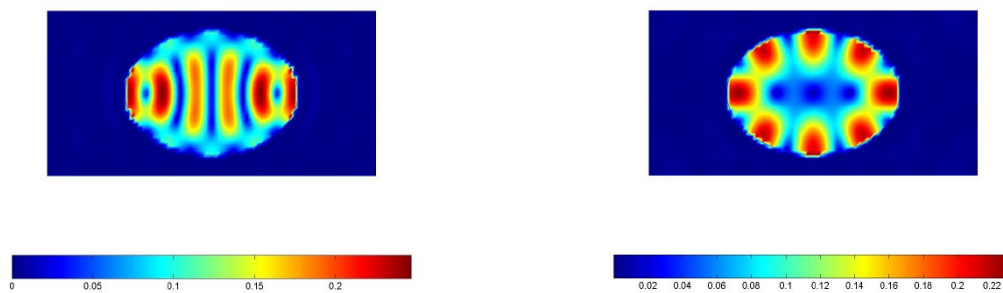


Figura 2.22. Representación del campo eléctrico transversal para el décimo modo TM y TE de la misma guía elíptica. La frecuencia de corte del décimo modo TM (*izquierda*) es de 81,29991 GHz y la del décimo modo TE (*derecha*) es de 58,76695 GHz.

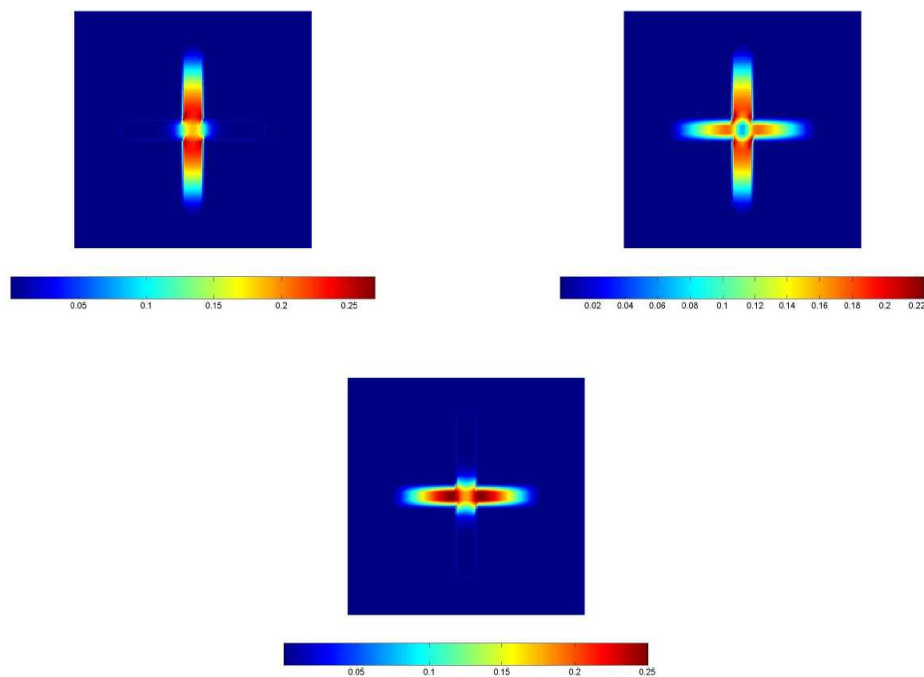


Figura 2.23. Representación del campo eléctrico transversal de los primeros tres modos TE de un iris en forma de cruz con esquinas redondeadas (representado en la figura 2.10). La frecuencia de corte del primer modo TE (*arriba a la izquierda*) es de 9,18675 GHz, la del segundo modo TE (*arriba a la derecha*) es de 10,38358 GHz, y la del tercer modo TE (*abajo*) es de 10,46910 GHz.

Capítulo 3

Análisis de transiciones mediante el método de la ecuación integral

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es analizar transiciones planares entre guías de onda de sección transversal arbitraria mediante una formulación basada en ecuación integral. De entre las diferentes y numerosas técnicas que permiten resolver problemas de dispersión en sistemas guiados, conviene considerar como primeras aquellas basadas en soluciones modales; cuyos principios generales se encuentran recogidos con detalle en [37]. Los métodos modales resultan especialmente interesantes al analizar la dispersión producida por geometrías sencillas; pues permiten obtener de manera relativamente simple soluciones analíticas exactas a dichos problemas. Ahora bien, cuando la geometría de la guía es arbitraria, no es posible obtener soluciones analíticas exactas para dichas estructuras. Actualmente uno de los métodos más flexibles y utilizados para caracterizar uniones planares entre guías con secciones transversales diferentes es el de la adaptación modal (en inglés *Mode-Matching*) [38]. Este método modal permite caracterizar la dispersión producida por las citadas discontinuidades, con bastante precisión por cierto, mediante matrices de dispersión (en inglés *scattering*) generalizadas. La combinación adecuada de las mencionadas matrices, empleando la teoría de circuitos desarrollada para tratar redes de microondas, permite analizar numerosos dispositivos de microondas formados por la conexión en cascada de diferentes guías. Ahora bien, esta técnica clásica de análisis presenta varios inconvenientes; destacando entre ellos la baja eficiencia computacional asociada a su implementación, así como el problema de la convergencia relativa ampliamente expuesto en [39]-[41].

La técnica que se propone en este capítulo para caracterizar uniones planares resulta sumamente eficiente y precisa, a la vez que evita el problema de la convergencia relativa. En el capítulo se muestra un resumen de la formulación general, presentada por primera vez en [44] para discontinuidades entre guías rectangulares, cuya finalidad será encontrar una matriz de impedancias generalizada (en inglés *Generalized Impedance Matrix*, GIM).

Para poder obtener las caracterizaciones matriciales de los tramos de guía y de las discontinuidades planares, es necesario conocer el espectro modal de cada una de las guías de las transiciones, así como las integrales de acoplo entre las dos guías adyacentes que constituyen

una discontinuidad. En el caso de guías rectangulares, dicha información modal se puede obtener fácilmente de forma analítica. Sin embargo, cuando una guía o las dos tienen una sección transversal arbitraria, esta información se puede obtener de forma eficiente y precisa utilizando el método BI-RME ya explicado en el segundo capítulo de la presente tesis.

3.2. El método de la ecuación integral

Para empezar, vamos a concretar la geometría objeto de consideración en este capítulo. Las guías de onda que constituyen la unión planar deben ser uniformes, y los modos de dichas guías deben tener definida una impedancia (o admitancia) característica. Se resolverá el problema para modos accesibles y modos localizados. Estos tipos de modos surgen al caracterizar uniones planares entre guías arbitrarias mediante redes equivalentes multimodales [68], que en principio requieren un número infinito de modos para describir los campos eléctrico y magnético existentes cerca de la unión planar en cada una de las guías que definen dicha unión. En la práctica, para poder implementar computacionalmente las mencionadas matrices, el número teóricamente infinito de modos a utilizar se trunca en un valor finito que garantiza resultados convergentes. Este valor finito dependerá lógicamente del tipo de discontinuidad considerada; que excitará un mayor o un menor número de modos en sus proximidades. Ahora bien, cuando se pretende analizar dispositivos constituidos por diferentes tramos de guías uniformes, si la longitud de dichos tramos es suficientemente grande, tan sólo una pequeña parte de los modos excitados en las proximidades de cada unión (aquellos con números de onda de corte de valor más bajo) afectan a las discontinuidades vecinas; por lo que en la conexión de las redes equivalentes multimodales asociadas a cada unión, deben considerarse únicamente esos pocos modos mencionados que constituyen los llamados modos accesibles. En cuanto al resto de modos excitados en las proximidades de cada discontinuidad (aquellos con número de onda de corte de valor elevado), que se denominan modos localizados, deben tenerse en cuenta únicamente en la caracterización de cada unión planar. Sin embargo, como estos modos se encuentran al corte en los respectivos tramos de guía uniforme a los que pertenecen, cada uno de los accesos asociados a dichos modos en las correspondientes matrices de impedancia generalizadas se cargarán con la impedancia característica del modo que representan. El número de modos localizados será sustancialmente mayor que el número de modos accesibles. Utilizaremos la nomenclatura y el sistema de referencia asociado a la estructura que aparece en la figura 3.1. El origen del sistema de referencia está situado en el centro de la unión entre las guías. La región (1) está definida en $z < 0$ y la región (2) en $z > 0$; las guías de las regiones (1) y (2) se consideran semi-infinitas.

Antes de empezar con la teoría de la ecuación integral, es útil desarrollar la forma en que vamos a describir el campo electromagnético transversal en cada una de las regiones. Las componentes transversales de los campos electromagnéticos en una guía pueden pues escribirse siguiendo la nomenclatura de [36] del siguiente modo:

$$\mathbf{E}_t = \sum_m V_m(z) \mathbf{e}_m \quad \mathbf{H}_t = \sum_m I_m(z) \mathbf{h}_m \quad (3.1)$$

donde la suma se realiza para todos los modos de la guía (propagativos y evanescentes). En la formulación se ha suprimido el factor $e^{j\omega t}$, pues siempre asumiremos excitación armónica

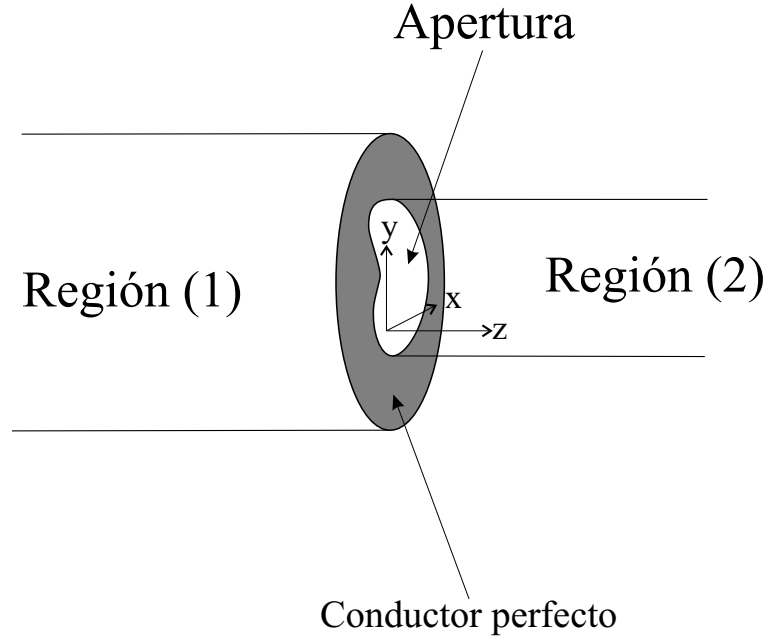


Figura 3.1. Unión planar entre guías y sistema de referencia asociado.

de frecuencia angular ω . Las funciones vectoriales modales \mathbf{e}_m y \mathbf{h}_m satisfacen las siguientes relaciones de normalización [56]:

$$\iint_{cs} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds = \delta_{m,n} \quad (3.2)$$

donde el dominio de integración (cs) está restringido a la sección transversal de la guía en cuestión, y $\delta_{m,n}$ representa la delta de Kronecker:

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (3.3)$$

Si no existen pérdidas:

$$\iint_{cs} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds = \delta_{m,n} \quad (3.4)$$

donde el asterisco (*) indica conjugación compleja. Esta expresión indica que, en el caso de que no haya pérdidas, los modos no están acoplados en potencia.

Respecto a la parte dependiente de la componente axial, se tiene:

$$\begin{aligned} V_m(z) &= V_m^+ e^{-j\beta_m z} + V_m^- e^{+j\beta_m z} \\ I_m(z) &= I_m^+ e^{-j\beta_m z} - I_m^- e^{+j\beta_m z} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Las amplitudes V_m^+ , V_m^- , I_m^+ e I_m^- satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{V_m^+}{I_m^+} = \frac{V_m^-}{I_m^-} = Z_m = \frac{1}{Y_m} \quad (3.6)$$

donde Z_m (Y_m) es la impedancia (admitancia) característica del m -ésimo modo. Para el caso de los modos TM^z y TE^z , tendremos:

$$Z_m^{TM^z} = \frac{1}{Y_m^{TM^z}} = \frac{\beta_m}{\omega\varepsilon} \quad Z_m^{TE^z} = \frac{1}{Y_m^{TE^z}} = \frac{\omega\mu}{\beta_m} \quad (3.7)$$

Observemos que, en general, se cumplirá:

$$Z_m(z) = \frac{V_m(z)}{I_m(z)} = Z_m \frac{V_m^+ e^{-j\beta_m z} + V_m^- e^{+j\beta_m z}}{V_m^+ e^{-j\beta_m z} - V_m^- e^{+j\beta_m z}} \neq Z_m \quad (3.8)$$

Conviene también recordar la siguiente propiedad entre las funciones vectoriales modales, en el caso de que los modos sean TM^z y TE^z :

$$\mathbf{h}_m = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_m \quad \mathbf{e}_m = \mathbf{h}_m \times \hat{\mathbf{z}} \quad (3.9)$$

donde se observa que estas expresiones no incluyen la impedancia característica modal Z_m , ya que \mathbf{h}_m y \mathbf{e}_m están normalizados de la forma indicada previamente en (3.4). El valor de Z_m se incluye en la representación general del campo electromagnético transversal (coeficientes V_m e I_m).

Así pues, para modos TM^z y TE^z , la relación de ortogonalidad recogida previamente en (3.4) se puede expresar como sigue:

$$\iint_{cs} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n^* ds = \delta_{m,n} \quad \iint_{cs} \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_n^* ds = \delta_{m,n} \quad (3.10)$$

También es conveniente recordar que:

$$V_q = \iint_{cs} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_q^* ds \quad I_q = \iint_{cs} \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{h}_q^* ds \quad (3.11)$$

pues el campo transversal se puede descomponer en serie de funciones vectoriales tal y como se recoge en (3.1):

$$\begin{aligned} \iint_{cs} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_q^* ds &= \\ &= \iint_{cs} \sum_m V_m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_q^* ds = \sum_m V_m \iint_{cs} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_q^* ds = \sum_m V_m \delta_{m,q} = V_q \\ \iint_{cs} \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{h}_q^* ds &= \\ &= \iint_{cs} \sum_m I_m \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_q^* ds = \sum_m I_m \iint_{cs} \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_q^* ds = \sum_m I_m \delta_{m,q} = I_q \end{aligned} \quad (3.12)$$

Una vez descrito el campo electromagnético transversal en cada una de las regiones que denominaremos $(\delta) = (1), (2)$, volvemos a considerar el problema inicial de la unión planar

entre dos guías de ondas¹. Supondremos que el modo p -ésimo de la región (1) con amplitud de la corriente modal $I_p^{(1)}$, incide en la unión planar; en la cual se excitarán modos reflejados (en la región (1)), y modos transmitidos (en la región (2)). En la zona de la unión entre las dos guías, se deberá satisfacer pues la condición de continuidad del campo magnético transversal:

$$\mathbf{H}_t^{(1)} = \mathbf{H}_t^{(2)} \Rightarrow \underbrace{I_p^{(1)} \mathbf{h}_p^{(1)} e^{-j\beta_p^{(1)} z}}_{\text{modo incidente}} - \underbrace{\sum_m I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} e^{+j\beta_m^{(1)} z}}_{\text{modos reflejados}} = \underbrace{\sum_m I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} e^{-j\beta_m^{(2)} z}}_{\text{modos transmitidos}} \quad (3.13)$$

La parte exponencial se puede omitir, teniendo en cuenta que la discontinuidad está ubicada en el plano $z = 0$:

$$I_p^{+(1)} \mathbf{h}_p^{(1)} - \sum_m I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} = \sum_m I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \quad (3.14)$$

Se separarán ahora los modos accesibles de los modos localizados:

$$I_p^{+(1)} \mathbf{h}_p^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(1)}} I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=N^{(1)+1}}^{\infty} I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} = \sum_{m=1}^{N^{(2)}} I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=N^{(2)+1}}^{\infty} I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \quad (3.15)$$

donde $N^{(1)}$ y $N^{(2)}$ son el número de modos accesibles en las regiones (1) y (2), respectivamente. El modo p -ésimo incidente queda dentro de los modos accesibles considerados en la región (1).

Si recordamos la relación entre corriente y tensión en la dos regiones:

$$I_m^{-(1)} = Y_m^{(1)} V_m^{-(1)} \quad I_m^{+(2)} = Y_m^{(2)} V_m^{+(2)} \quad (3.16)$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned} I_p^{+(1)} \mathbf{h}_p^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(1)}} I_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=N^{(1)+1}}^{\infty} Y_m^{(1)} V_m^{-(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} = \\ \sum_{m=1}^{N^{(2)}} I_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=N^{(2)+1}}^{\infty} Y_m^{(2)} V_m^{+(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

y si ahora expresamos las corrientes y tensiones en el plano $z = 0$ teniendo en cuenta que el único modo incidente es el p -ésimo, tendremos

$$\begin{aligned} I_p^{(1)}(0) &\equiv I_p^{(1)} \equiv I_p^{+(1)} - I_p^{-(1)} \\ I_m^{(1)}(0) &\equiv I_m^{(1)} = -I_m^{-(1)}, \forall m \neq p \\ I_m^{(2)}(0) &\equiv I_m^{(2)} = I_m^{+(2)}, \forall m \\ V_p^{(1)}(0) &\equiv V_p^{(1)} = V_p^{+(1)} + V_p^{-(1)} \\ V_m^{(1)}(0) &\equiv V_m^{(1)} = V_m^{-(1)}, \forall m \neq p \\ V_m^{(2)}(0) &\equiv V_m^{(2)} = V_m^{+(2)}, \forall m \end{aligned} \quad (3.18)$$

¹En esta sección se va a desarrollar toda la formulación para deducir la matriz de impedancia generalizada. Por esta razón, a este método lo denominaremos ecuación integral para impedancias.

Así pues, la ecuación (3.17) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N^{(1)}} I_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} = \\ \sum_{m=1}^{N^{(2)}} I_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ahora hay que sumar a ambos lados de (3.19) un nuevo término que incluye las admitancias características asintóticas $\hat{Y}_m^{(\delta)}$:

$$\sum_{m=1}^{N^{(1)}} V_m^{(1)} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(2)}} V_m^{(2)} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \quad (3.20)$$

con

$$\hat{Y}_m^{(\delta)} \equiv \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} Y_m^{(\delta)} = \begin{cases} \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \frac{\omega \varepsilon}{\beta_m^{(\delta)}} = \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \frac{\omega \varepsilon}{\sqrt{k^2 - k_{c,m}^{(\delta)2}}} = j \frac{\omega \varepsilon}{k_{c,m}^{(\delta)}} & \text{(TM)} \\ \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \frac{\beta_m^{(\delta)}}{\omega \mu} = \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k^2 - k_{c,m}^{(\delta)2}}}{\omega \mu} = -j \frac{k_{c,m}^{(\delta)}}{\omega \mu} & \text{(TE)} \end{cases} \quad (3.21)$$

donde $k_{c,m}^{(\delta)}$ es el número de onda de corte para el modo m -ésimo en el puerto (δ) , teniendo en cuenta que:

$$\beta_m^{(\delta)} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_{c,m}^{(\delta)2}} \Rightarrow \lim_{\left(\frac{k}{k_{c,m}^{(\delta)}}\right) \rightarrow 0} \beta_m^{(\delta)} = \sqrt{-k_{c,m}^{(\delta)2}} = -j k_{c,m}^{(\delta)} \quad (3.22)$$

donde se ha escogido el signo negativo de la raíz para que la onda positiva se atenúe en la dirección de $z > 0$. Las admitancias $\hat{Y}_m^{(\delta)}$ representan las admitancias de los modos de orden elevado, es decir, de la “mayoría” de los modos localizados, si bien también puede interpretarse como el comportamiento asintótico de los modos a bajas frecuencias. Sustituyendo entonces estos nuevos términos en la ecuación (3.19) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N^{(1)}} I_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} + \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} = \\ = \sum_{m=1}^{N^{(2)}} I_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ahora es necesario definir unas nuevas corrientes ($\bar{I}_m^{(1)}$ e $\bar{I}_m^{(2)}$) tales que:

$$\begin{aligned} \bar{I}_m^{(1)} &\triangleq I_m^{(1)} + \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{(1)} \\ \bar{I}_m^{(2)} &\triangleq I_m^{(2)} - \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{(2)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Recordando las relaciones (3.18), estas nuevas corrientes pueden expresarse como

$$\begin{aligned}\bar{I}_p^{(1)} &= (I_p^{+(1)} - I_p^{-(1)}) + \hat{Y}_p^{(1)}(V_p^{+(1)} + V_p^{-(1)}) = (I_p^{+(1)} - I_p^{-(1)}) + \frac{\hat{Y}_p^{(1)}}{Y_p^{(1)}}(I_p^{+(1)} + I_p^{-(1)}) \\ \bar{I}_m^{(1)} &= -I_m^{-(1)} + \hat{Y}_m^{(1)}V_m^{-(1)} = -I_m^{-(1)} + \frac{\hat{Y}_m^{(1)}}{Y_m^{(1)}}I_m^{-(1)}, \quad \forall m \neq p \\ \bar{I}_m^{(2)} &= I_m^{+(2)} - \hat{Y}_m^{(2)}V_m^{+(2)} = I_m^{+(2)} - \frac{\hat{Y}_m^{(2)}}{Y_m^{(2)}}I_m^{+(2)}, \quad \forall m\end{aligned}\quad (3.25)$$

Así pues, si $m \neq p$ y además m es elevado:

$$Y_m^{(\delta)} \approx \hat{Y}_m^{(\delta)} \Rightarrow \frac{\hat{Y}_m^{(\delta)}}{Y_m^{(\delta)}} \stackrel{m \gg 1}{\approx} 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_m^{(1)} = \left(-1 + \frac{\hat{Y}_m^{(1)}}{Y_m^{(1)}}\right) I_m^{-(1)} \stackrel{m \gg 1}{\approx} 0 & m \neq p \\ \bar{I}_m^{(2)} = \left(1 - \frac{\hat{Y}_m^{(2)}}{Y_m^{(2)}}\right) I_m^{+(2)} \stackrel{m \gg 1}{\approx} 0 & \forall m \end{cases}\quad (3.26)$$

con estas nuevas corrientes, definidas según (3.24), podemos expresar la ecuación (3.23) como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} - \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} &= \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} + \\ &+ \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} + \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} V_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} + \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} V_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Utilizada la condición de continuidad del campo magnético transversal, ahora se puede hacer uso de la misma condición para el campo eléctrico. El campo eléctrico transversal \mathbf{E}_t en la unión de las dos guías es una función desconocida, que en la zona conductora de la guía más grande debe ser igual a cero, pues suponemos que el conductor es perfecto. Esta es la principal razón por la que se prefiere utilizar la formulación de impedancias en lugar de la formulación de admitancias. La condición de campo magnético nulo en la zona conductora de la unión no puede lógicamente imponerse, y por ello la formulación de admitancias requiere que las integrales que se consideran a continuación no se puedan reducir a la sección de la guía menor². Siguiendo pues con la formulación de impedancias, el campo eléctrico transversal incógnita (\mathbf{E}_t) puede expresarse como:

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^{(1)} \mathbf{e}_m^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^{(2)} \mathbf{e}_m^{(2)}\quad (3.28)$$

A partir de este momento vamos a suponer que la guía (1) tiene una sección transversal mayor que la (2), y que en la unión la sección de la guía (2) está contenida completamente en la sección de la guía (1). Esto nos permitirá reducir todas las integrales de superficie al área de la sección transversal de la guía pequeña (2), tal y como veremos a continuación.

²Esto conlleva que la formulación de admitancias precise de más funciones base para reconstruir el campo, y converja por tanto más lentamente que la formulación de impedancias [44].

Los coeficientes $V_m^{(\delta)}$ pueden calcularse invirtiendo la ecuación precedente:

$$\begin{aligned} V_m^{(1)} &= \iint_{cs(1)} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_m^{(1)*} ds' = \iint_{cs(2)} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_m^{(1)*} ds' \\ V_m^{(2)} &= \iint_{cs(2)} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_m^{(2)*} ds' \end{aligned} \quad (3.29)$$

y recordando la propiedad entre las funciones vectoriales modal definida en (3.9), se puede escribir:

$$\begin{aligned} V_m^{(\delta)} &= \iint_{cs(2)} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_m^{(\delta)*} ds' = \iint_{cs(2)} \mathbf{E}_t \cdot (\mathbf{h}_m^{(\delta)} \times \hat{\mathbf{z}})^* ds' = \\ &= \iint_{cs(2)} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde se ha denotado a las variables de integración con primas (puntos de fuente) para poder distinguirlas de las variables sin primar (puntos de campo) que aparecen en la ecuación original (3.27). Ahora se puede expandir $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t$ en la apertura como combinación lineal de un número de funciones base igual al número de modos accesibles considerados en cada acceso:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t = \sum_{n=1}^{N(1)} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{M}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N(2)} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \quad (3.31)$$

donde $\mathbf{M}_n^{(1)}$ y $\mathbf{M}_n^{(2)}$ son dos funciones vectoriales desconocidas que varían con las coordenadas transversales $s' = (x', y')$. Introduciendo esta expansión en la definición anterior de $V_m^{(\delta)}$ se obtiene que:

$$V_m^{(\delta)} = \iint_{cs(2)} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' = \iint_{cs(2)} \left(\sum_{n=1}^{N(1)} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{M}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N(2)} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \right) \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' \quad (3.32)$$

y sustituyendo esta última expresión en la ecuación (3.27), y colocando más externamente los

sumatorios de menor número de términos, tenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{h}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{h}_n^{(2)} = \\
& \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \left(\sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' \right) \\
& - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \left(\sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' \right) \\
& + \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \left(\sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' \right) \\
& - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \left(\sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' \right) \\
& + \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \left(\sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' \right) \\
& - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \left(\sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' \right) \\
& + \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \left(\sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' \right) \\
& - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \left(\sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' \right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Para escribir esta última ecuación en forma más compacta, identificando términos, podemos

escribir el campo magnético para cada modo como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n^{(\delta)} = & \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' + \\
& \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds' + \\
& \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*} ds' + \\
& \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)} \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*} ds'; \quad (\delta) = (1), (2) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Recordemos que en la ecuación (3.34) las funciones dentro de las integrales dependen de las coordenadas transversales primadas ($\mathbf{M}_n^{(\delta)}(s')$, $\mathbf{h}_m^{(1)*}(s')$, $\mathbf{h}_m^{(2)*}(s')$), mientras que las funciones exteriores dependen de las coordenadas no primadas.

Para poder escribir (3.34) en la forma convencional de una ecuación integral, intercambiaremos el orden de las series y las integrales presentes en esta expresión³, también para mayor claridad se especificará la dependencia explícita de todas las funciones presentes en dicha expresión con las coordenadas primadas (s') o sin primar (s):

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_n^{(\delta)}(s) = & \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\delta)}(s') \left[\sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \right. \\
& \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') + \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \\
& \left. \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \cdot \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') \right] ds' \quad (\delta) = (1), (2) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Esta expresión representa una ecuación integral de Fredholm de primera especie de dos variables [67], y en nuestro caso, donde los modos son vectores reales, de núcleo simétrico ($K(s, s') = K(s', s)$):

$$g(s) = \iint K(s, s') f(s') ds' \quad (3.36)$$

donde la función $g(s)$ es conocida, $K(s, s')$ es el núcleo de la ecuación integral (también conocido) y $f(s')$ es la función incógnita que debemos encontrar.

³Para ello admitimos como hipótesis la convergencia uniforme de todas las series de funciones presentes en (3.34).

El núcleo de dicha ecuación integral se puede reordenar como sigue:

$$\begin{aligned}
K(s, s') \equiv & \\
& \sum_{m=1}^{N^{(1)}} \hat{Y}_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') + \sum_{m=N^{(1)}+1}^{\infty} Y_m^{(1)} \mathbf{h}_m^{(1)}(s) \mathbf{h}_m^{(1)*}(s') \\
& + \sum_{m=1}^{N^{(2)}} \hat{Y}_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') + \sum_{m=N^{(2)}+1}^{\infty} Y_m^{(2)} \mathbf{h}_m^{(2)}(s) \mathbf{h}_m^{(2)*}(s') \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Hay que subrayar que el núcleo de la ecuación integral es el mismo para los dos puertos (es independiente del valor que tome δ). Además, el núcleo presenta las siguientes propiedades:

1. Se puede reducir el núcleo a una expresión independiente de la frecuencia si solamente se excitan modos TM^z o modos TE^z . Esto se consigue aproximando $Y_m^{(\delta)} \approx \hat{Y}_m^{(\delta)}$. Para ello, basta con sustituir en (3.37) las admitancias modales $Y_m^{(\delta)}$ por sus respectivas expresiones asintóticas $\hat{Y}_m^{(\delta)}$ (al pertenecer los modos a una sola familia se atenúan más rápidamente y dicha sustitución se puede realizar).
2. Se puede extraer la dependencia con la frecuencia⁴ de tal forma que las sumas del núcleo de la ecuación integral se calculan fuera del bucle en frecuencia, si bien la ecuación integral se debe resolver finalmente para todas las frecuencias, asegurando así una gran rapidez del algoritmo.

Esta ecuación integral de Fredholm de primera especie se resolverá utilizando el Método de los Momentos [55] en la versión de Galerkin, tomando como funciones de expansión de nuestra incógnita $\mathbf{M}_n^{(\delta)}$ una combinación lineal de modos magnéticos de la guía (2), es decir, de la guía pequeña:

$$\mathbf{M}_n^{(\delta)}(s') = \sum_{q=1}^{M^{(\delta)}} \alpha_q^{(n,\delta)} \mathbf{h}_q^{(2)}(s') \quad (3.38)$$

donde $M^{(\delta)}$ es el número de funciones base consideradas en el puerto (δ). Recordando que $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t = \sum_{n=1}^{N^{(1)}} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{M}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N^{(2)}} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{M}_n^{(2)}$, por tanto las funciones $\mathbf{M}_n^{(1)}$ y $\mathbf{M}_n^{(2)}$ deben ser cero fuera de la unión entre las dos guías.

Finalmente, tras resolver las ecuaciones integrales definidas en (3.35) como se termina de

⁴En [32] y [48] se encuentran todos los detalles de cómo extraer la dependencia con la frecuencia. En realidad los términos del núcleo dependen de la frecuencia, pero se pueden separar los modos TM de los modos TE y la dependencia con la frecuencia es lineal en cada caso (la frecuencia multiplica o divide a cada uno de estos términos).

indicar, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
V_m^{(\delta)} &= \iint_{cs(2)} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' = \\
&= \iint_{cs(2)} \left(\sum_{n=1}^{N(1)} \bar{I}_n^{(1)} \mathbf{M}_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N(2)} \bar{I}_n^{(2)} \mathbf{M}_n^{(2)} \right) \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' = \\
&= \sum_{n=1}^{N(1)} \bar{I}_n^{(1)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(1)}(s') \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s') ds' \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N(2)} \bar{I}_n^{(2)} \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(2)}(s') \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s') ds' \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Si definimos los elementos de la matriz de impedancias de la siguiente forma:

$$Z_{m,n}^{(\delta,\gamma)} \triangleq \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\gamma)}(s') \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s') ds' \quad (\delta), (\gamma) = (1), (2) \tag{3.40}$$

podremos escribir que:

$$\begin{aligned}
V_m^{(\delta)} &= \sum_{n=1}^{N(1)} \bar{I}_n^{(1)} Z_{m,n}^{(\delta,1)} + \sum_{n=1}^{N(2)} (-\bar{I}_n^{(2)}) Z_{m,n}^{(\delta,2)} \\
m &= 1, 2, \dots, N^{(\delta)} \quad (\delta) = (1), (2) \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Esta ecuación completa la formulación del problema en términos de una matriz de impedancias generalizada de tamaño finito (ya que dicha matriz se define para los modos accesibles), representada en la figura 3.2. En términos matriciales, la ecuación (3.41) puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}^{(1)} \\ \mathbf{V}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{(1,1)} & \mathbf{Z}^{(1,2)} \\ \mathbf{Z}^{(2,1)} & \mathbf{Z}^{(2,2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{I}}^{(1)} \\ -\bar{\mathbf{I}}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

donde $\mathbf{V}^{(\delta)}$ e $\bar{\mathbf{I}}^{(\delta)}$ son vectores de $N^{(\delta)}$ componentes ($\delta = 1, 2$), y $\mathbf{Z}^{(\delta,\gamma)}$ son matrices de tamaño $N^{(\delta)} \times N^{(\gamma)}$ ($\delta, \gamma = 1, 2$).

Cabe señalar que en el cálculo de los elementos de la matriz de impedancias aparecen las integrales de acoplo entre los modos de las diferentes guías que componen la transición:

$$\begin{aligned}
Z_{m,n}^{(\delta,\gamma)} &\triangleq \iint_{cs(2)} \mathbf{M}_n^{(\gamma)}(s') \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s') ds' \\
&= \iint_{cs(2)} \sum_{q=1}^{M^{(\gamma)}} \alpha_q^{(n,\gamma)} \mathbf{h}_q^{(2)}(s') \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*}(s') ds' \\
&= \sum_{q=1}^{M^{(\gamma)}} \alpha_q^{(n,\gamma)} \iint_{cs(2)} \mathbf{h}_q^{(2)} \cdot \mathbf{h}_m^{(\delta)*} ds' \tag{3.43}
\end{aligned}$$

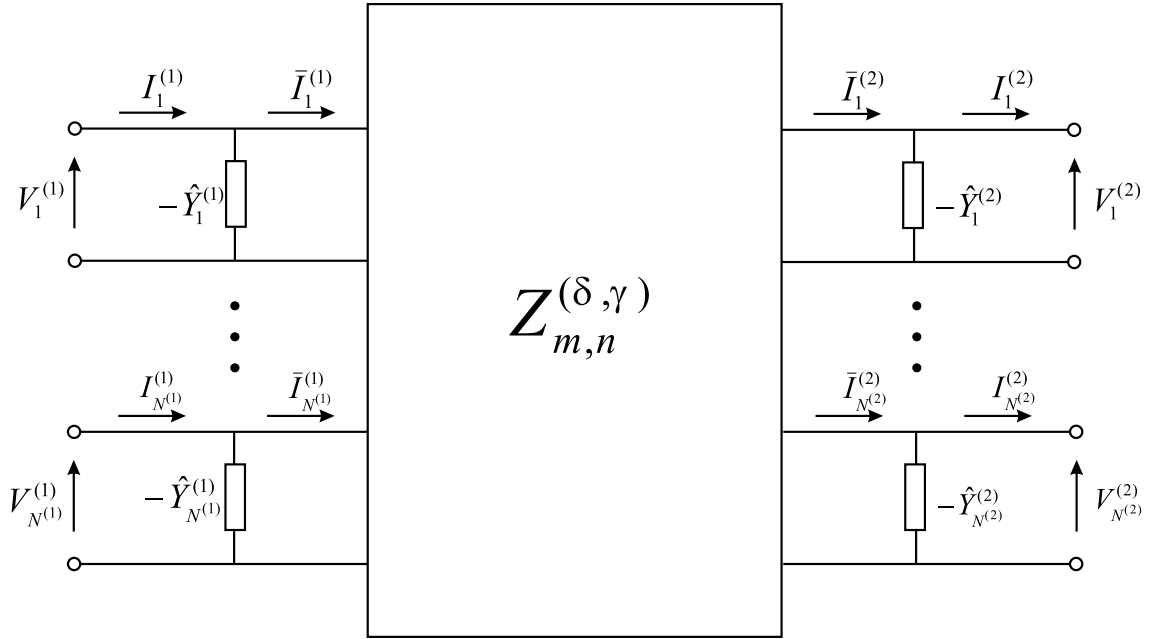


Figura 3.2. Red equivalente multimodal que se obtiene por el método de la ecuación integral formulado para impedancias.

integrales que se calcularán con el método BI-RME si una o las dos guías son de sección transversal arbitraria.

3.3. Integrales de acoplo entre modos de dos guías arbitrarias

En el capítulo 2 se ha demostrado cómo calcular las integrales de acoplo entre los modos de una guía con sección transversal arbitraria y los modos de la guía rectangular estándar que la rodea. Seguidamente, se mostrará cómo utilizar estos resultados para obtener las integrales de acoplo entre modos de dos guías con secciones transversales arbitrarias distintas. Sea \mathbf{e}_m^\diamond el modo m -ésimo correspondiente a la guía con sección transversal arbitraria S más grande (representada en la figura 3.3), que está normalizado respecto a su sección transversal y además es ortogonal al resto de modos de la misma guía:

$$\iint_S \mathbf{e}_m^\diamond \cdot \mathbf{e}_r^\diamond ds = \delta_{m,r} \quad (3.44)$$

Este modo puede descomponerse como una serie de modos \mathbf{e}_i^\square de la guía rectangular estándar (Ω_2) que rodea la guía arbitraria grande:

$$\mathbf{e}_m^\diamond = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{mi} \mathbf{e}_i^\square \quad (3.45)$$

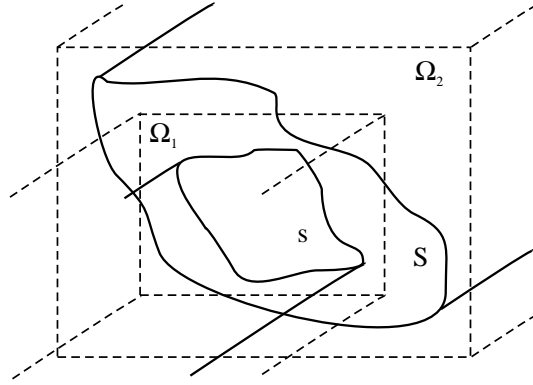


Figura 3.3. Transición entre dos guías de sección transversal arbitraria s y S , encerradas en dos guías rectangulares estándares distintas Ω_1 y Ω_2 .

donde

$$\alpha_{mi} = \iint_S \mathbf{e}_m^\diamond \cdot \mathbf{e}_i^{\square*} ds = \iint_S \mathbf{e}_m^\diamond \cdot \mathbf{e}_i^\square ds \quad (3.46)$$

son las integrales de acoplo entre la guía arbitraria grande y la guía rectangular que la rodea. Dado que los modos involucrados en la parte anterior son reales debido al desarrollo dado por el método BI-RME, se puede eliminar la conjugación compleja sin ninguna consecuencia. Obsérvese que la integral se define en el área S de la guía arbitraria, pues fuera de la misma el vector \mathbf{e}_m^\diamond presenta valor nulo.

Para la guía de sección arbitraria menor tenemos unas expresiones análogas. Sea \mathbf{e}_n^\diamond el modo n -ésimo correspondiente a la guía arbitraria pequeña con sección s (representada en la figura 3.3), también normalizado respecto a su sección transversal y siendo ortogonal a los restantes modos de la misma guía:

$$\iint_s \mathbf{e}_n^\diamond \cdot \mathbf{e}_s^\diamond ds = \delta_{n,s} \quad (3.47)$$

El modo puede descomponerse en este caso como una serie de modos \mathbf{e}_j^\square de la guía rectangular estándar pequeña (de sección Ω_1) que rodea a la guía arbitraria pequeña:

$$\mathbf{e}_n^\diamond = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nj} \mathbf{e}_j^\square \quad (3.48)$$

donde

$$\beta_{nj} = \iint_s \mathbf{e}_n^\diamond \cdot \mathbf{e}_j^{\square*} ds = \iint_s \mathbf{e}_n^\diamond \cdot \mathbf{e}_j^\square ds \quad (3.49)$$

son las integrales de acoplo entre guía arbitraria pequeña y la guía rectangular pequeña que la rodea.

Por tanto la expresión para la integral de acoplo entre el modo m -ésimo de la guía de mayor sección transversal arbitraria y el modo n -ésimo de la guía de menor sección transversal

arbitraria será:

$$I_{mn} = \iint_s \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{mi} \mathbf{e}_i^{\square} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nj} \mathbf{e}_j^{\square} \right) ds = \iint_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{mi} \beta_{nj} \mathbf{e}_i^{\square} \cdot \mathbf{e}_j^{\square} ds = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{mi} \beta_{nj} \iint_{\Omega_1} \mathbf{e}_i^{\square} \cdot \mathbf{e}_j^{\square} ds \quad (3.50)$$

Así pues, para calcular la integral de acoplo I_{mn} entre el modo m -ésimo de la guía de mayor sección transversal y el modo n -ésimo de la guía de menor sección transversal se puede proceder como sigue:

- Calcular las integrales de acoplo (3.46) entre los modos de la guía de mayor sección transversal y la guía rectangular estándar que la rodea por el método BI-RME ya descrito.
- Proceder del mismo modo para calcular las integrales de acoplo recogidas en (3.49).
- Calcular las integrales de acoplo entre las dos guías rectangulares, definidas como:

$$\gamma_{ij} = \iint_{\Omega_1} \mathbf{e}_i^{\square} \cdot \mathbf{e}_j^{\square} ds \quad \forall i, j \quad (3.51)$$

y cuyas expresiones analíticas se pueden calcular fácilmente, (ver por ejemplo [32]).

- Calcular la integral de acoplo correspondiente a los modos deseados utilizando la expresión (3.50):

$$I_{mn} = \iint_s \mathbf{e}_m^{\diamond} \cdot \mathbf{e}_n^{\diamond} ds = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{mi} \gamma_{ij} \beta_{nj} \quad (3.52)$$

Obviamente, para calcular las series que aparecen en las ecuaciones anteriores será necesario truncar las sumas en un valor tal que garantice resultados convergentes. También, es obvio que la guía grande (tanto la rectangular como la arbitraria) debe englobar por completo a la guía pequeña, es decir, al dibujar en un papel la sección de la discontinuidad, no puede haber una zona metálica de la guía grande que se encuentre sobre una zona de aire o dieléctrico de la guía pequeña.

Por último, cabe señalar que si las dos guías rectangulares que rodean las guías arbitrarias son del mismo tamaño, es decir si se utiliza un mismo “box” rectangular, la expresión de la ecuación (3.52) se reduce y se simplifica notablemente, porque (3.51) define una matriz identidad y para calcular (3.52) sólo es necesario multiplicar dos matrices. Naturalmente las dos series serán truncadas en el número de modos utilizado en la expansión modal de la guía rectangular usada como referencia para las dos guías arbitrarias. Es necesario entonces, para obtener resultados convergentes, que las dos guías arbitrarias no sean de tamaño muy distintos. Cuanto más distinto sea el tamaño de la dos guías arbitrarias mayor será el número de términos necesarios para alcanzar la convergencia.

3.3.1. Ejemplos de integrales de acoplo entre dos guías arbitrarias

Como primer ejemplo consideremos la transición, mostrada en la figura 3.4, entre una guía circular y un iris en forma de cruz. Este iris de acoplo ha sido extensamente utilizado en los filtros de modo dual en guía circular para aplicaciones espaciales. La estructura está compuesta por una guía circular de radio $R_1 = 12$ mm, con una cruz en su interior de dimensiones $a_2 = 15,3$ mm, $b = 17,3$ mm y $w = 2$ mm. Para analizar la estructura con el método BI-RME, se ha encerrado la estructura en una guía cuadrada de lado $a_1 = 25$ mm.

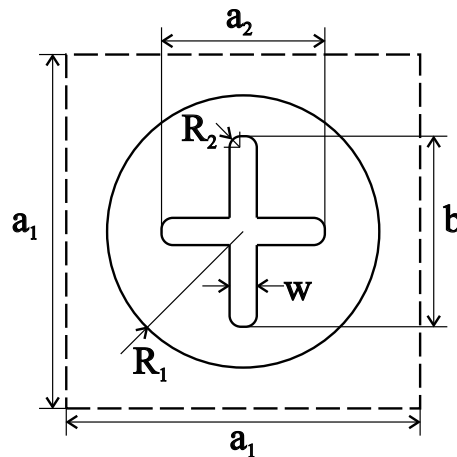


Figura 3.4. Transición entre una guía circular ($R_1 = 12$ mm) y un iris en forma de cruz de dimensiones $a_2 = 15,3$ mm, $b = 17,3$ mm, $w = 2$ mm, encerrado en una guía cuadrada de dimensiones $a_1 = 25$ mm.

La tabla 3.1 presenta los números de onda de corte (en mm^{-1}) de los primeros tres modos TE del iris y el error relativo de estos resultados respecto a los presentados en [30] cuando $R_2 = 0$ mm. La tabla también proporciona los valores de las integrales de acoplo entre estos tres modos del iris y los primeros modos de la guía circular que lo rodea. Los resultados publicados en [30] son aquellos marcados con un asterisco. Como se puede observar, los resultados obtenidos son muy similares a los publicados en [30], donde se ha aplicado la técnica BI-RME en su versión original utilizando una guía circular como referencia en la expansión modal.

Otro ejemplo interesante es el mostrado en la figura 3.5; guía típicamente presente en los filtros de modo dual en guía circular con tornillos de sintonía. Los tornillos de sintonía vienen representados con tres penetraciones rectangulares: la inserción dirigida según el eje y se ocupa de ajustar la frecuencia de resonancia de uno de los modos duales presente en la guía circular; mientras la inserción ortogonal a la anterior, aquella que se encuentra orientada según el eje x en la misma figura, sirve para ajustar la frecuencia de resonancia asociada al segundo modo dual de la guía, cuya polarización es ortogonal a la del primer modo. Por su parte, la tercera inserción metálica posicionada formando un ángulo de 45° sirve para acoplar los dos modos duales de la cavidad circular. Las dimensiones de las tres inserciones metálicas son $d_1 = 1,64$ mm, $d_2 = 2,72$ mm, $d_3 = 1,74$ mm y $t = 2$ mm, y el radio de la guía circular es de $R = 12$ mm. En la expansión modal necesaria para el análisis de esta guía, se han utilizado 600 modos de una

TE ₁	TE ₂	TE ₃
$k_c = 0,18762$	$k_c = 0,21136$	$k_c = 0,21305$
$Err = 0,021\%$	$Err = 0,03\%$	$Err = 0,01\%$
0,32821 (TE _{11c}) 0,32817*	-0,21689 (TE _{21s}) -0,21687*	0,31893 (TE _{11s}) 0,31892*
-0,37204 (TM _{11s}) -0,37234*	-0,04555 (TE ₀₁) -0,04556*	0,36430 (TM _{11c}) 0,36469*
-0,08293 (TE _{31c}) -0,08490*	-0,35096 (TM _{21c}) -0,35523*	0,06622 (TE _{31s}) 0,06829*
0,16007 (TE _{21c}) 0,16012*	0,01694 (TE _{41s}) 0,01688*	0,20223 (TE _{12s}) 0,20216*
0,17295 (TM _{31s}) 0,17080*	-0,20719 (TE _{22s}) -0,20726*	0,14331 (TM _{31c}) 0,14110*

Tabla 3.1. Números de onda de corte (mm^{-1}) e integrales de acoplo del iris en forma de cruz (con $R_2 = 0$ mm) mostrado en la figura 3.4. Los resultados se comparan con los proporcionados en [30].

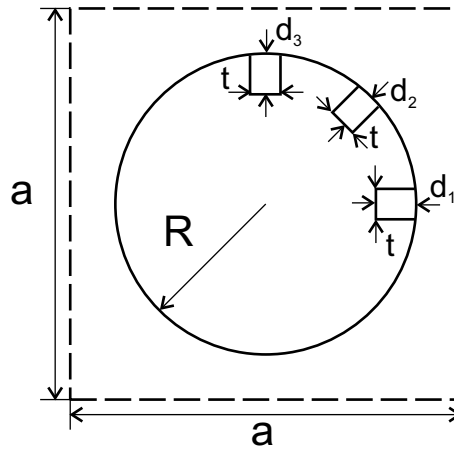


Figura 3.5. Guía circular ($R = 12$ mm) con tres inserciones metálicas de dimensiones $d_1 = 1,64$ mm, $d_2 = 2,72$ mm, $d_3 = 1,74$ mm y $t = 2$ mm, típicamente presentes en filtros de modo dual.

guía cuadrada de lado 25 mm. La tabla 3.2 presenta los números de onda de corte (en mm^{-1}) de los primeros tres modos de la guía circular con las tres penetraciones metálicas y el error relativo de estos resultados respecto a los presentados en el mismo artículo [30]. La tabla también proporciona los valores de las integrales de acoplo entre estos tres modos y los cinco primeros modos de la guía circular. Los resultados publicados en [30] son aquéllos marcados con un asterisco.

modo	TE ₁ $k_c = 0,15028$	TE ₂ $k_c = 1,55811$	TM ₁ $k_c = 0,20890$
	$Err = 0,14\%$	$Err = 0,08\%$	$Err = 0,17\%$
TE _{11s}	0,68041 0,69574*	0,69179 0,68396*	***** *****
TE _{11c}	0,67868 0,66897*	0,69380 0,71139*	***** *****
TM ₀₁	0,07013 0,07871*	-0,00006 -0,00005*	-0,93437 -0,94866*
TE _{21s}	0,00358 0,00304*	0,00062 0,00063*	***** *****
TE _{21c}	0,00067 0,00067*	-0,00709 -0,01091*	***** *****

Tabla 3.2. Números de onda de corte (mm^{-1}) e integrales de acoplo de la guía circular con tres inserciones metálicas mostrada en la figura 3.5. Los resultados son comparados con los mostrados en [30]. La serie de asteriscos * indica que estas integrales son cero, tal y como se explica en [63].

3.4. Análisis de transiciones

Verificada la eficiencia de la nueva teoría propuesta con diferentes ejemplos de guías canónicas, así como con el cálculo de integrales de acoplo entre modos de las guías arbitrarias, consideraremos ahora el análisis de transiciones. A tal fin, se ha integrado la nueva y extendida técnica BI-RME propuesta en un programa basado en el método de la ecuación integral descrito en el segundo apartado de este capítulo. Como ya se ha indicado, este método de análisis electromagnético *full-wave* necesita la carta modal de todas las guías que componen el dispositivo pasivo, carta que ha sido calculada mediante la técnica BI-RME extendida. Antes de empezar a ver ejemplos, hay que especificar que todos los resultados expuestos han sido simulados en un ordenador pentium IV, a 2,4 GHz, con 1 GB de RAM. Analizaremos ahora algunos ejemplos ya publicados en la literatura científica, y compararemos dichos resultados con las simulaciones realizadas.

3.4.1. Ejemplo de aplicación 1

Empezaremos por un resonador en guía rectangular con ventanas de acoplo en forma de cruz, representado en la figura 3.6 y publicado en [69]. Tanto la guía rectangular de entrada y salida, como la guía que forma el resonador son guías WR-62 ($15,799 \text{ mm} \times 7,899 \text{ mm}$, y el resonador tiene longitud $12,155 \text{ mm}$); el iris centrado puede ser visto como dos guías rectangulares, una horizontal de dimensiones $4,42 \text{ mm} \times 3,379 \text{ mm}$, y una vertical de dimensiones $3,08 \text{ mm} \times 4,79 \text{ mm}$, de longitud $0,21 \text{ mm}$. Utilizando 10 modos accesibles, 20 funciones base para la resolución de la ecuación integral con el método de los momentos, 400 elementos en el

sumatorio presente en el núcleo o kernel (modos localizados), y 1000 puntos en frecuencia, en tan sólo 10 segundos se han obtenido (ver figura 3.7) resultados convergentes y muy similares a los resultados publicados en [69], obtenidos mediante la técnica de la adaptación modal (en inglés *Mode-Matching*).

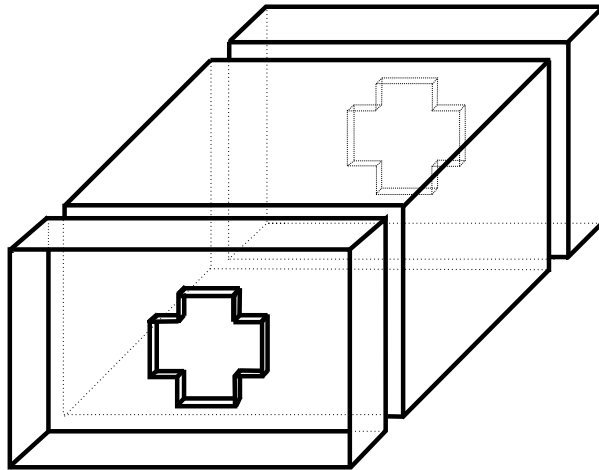


Figura 3.6. Resonador en guía rectangular WR-62 con iris de acoplo en forma de cruz.

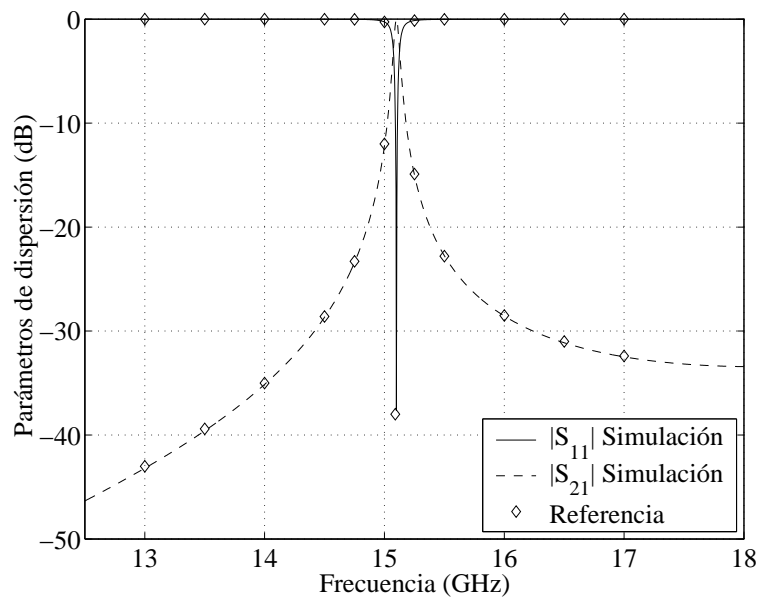


Figura 3.7. Parámetros de dispersión de un resonador en guía rectangular WR-62 con iris de acoplo en forma de cruz comparados con los resultados publicados en [69].

3.4.2. Ejemplo de aplicación 2

Comprobada la eficiencia del simulador electromagnético cuando la sección transversal de la guía arbitraria está compuesta por segmentos lineales, pasamos a analizar transiciones entre guías rectangulares, y guías elípticas o circulares, como por ejemplo una unión entre una guía WR-90 y una guía elíptica de eje mayor 15 mm y eje menor 7 mm presentada en [70] y mostrada en la figura 3.8.

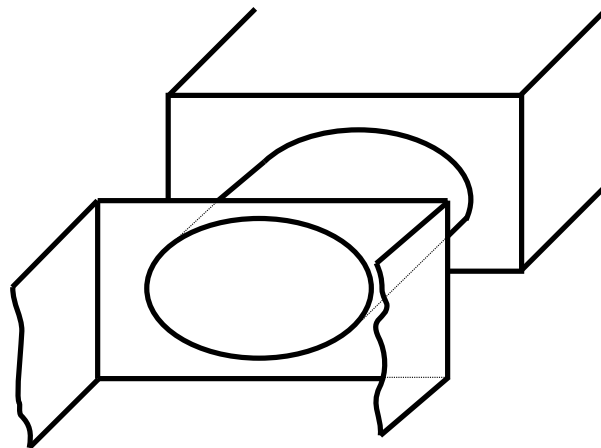


Figura 3.8. Unión entre una guía WR-90 y una guía elíptica (eje mayor 15 mm, eje menor 7 mm) de longitud 7,5 mm publicada en [70].

En este artículo, para obtener los parámetros de dispersión, se ha empleado la técnica de adaptación modal (en inglés *Mode Matching*), mientras que para calcular la carta modal de la guía elíptica se han utilizado las funciones de Mathieu. En la figura 3.9 se comparan el módulo (en escala lineal) y en la figura 3.10 la fase (en grados) del parámetro de reflexión; la simulación se ha realizado con la herramienta desarrollada en esta tesis y las mediciones se han extraído de [70]. Como se puede ver los resultados son muy similares. En la simulación propia se han utilizado 5 modos accesibles, 30 funciones bases y 200 elementos del kernel, obteniendo resultados convergentes en un tiempo de cálculo de tan sólo 16 segundos (500 puntos en frecuencia).

3.4.3. Ejemplo de aplicación 3

Otros ejemplos interesantes los encontramos en [71], donde se han estudiado discontinuidades planares que involucran guías elípticas y circulares. Los iris en guías elípticas son ampliamente utilizados en los filtros de modo dual, y como veremos en el capítulo 5 se han estudiado mucho en los últimos años. Los ejemplos en cuestión (representados en la figura 3.11) corresponden a un resonador constituido por una guía rectangular WR-187 (47,55 mm \times 22,15 mm) de longitud $L = 131,1$ mm acoplado con las guías de entrada y salida (también WR-187) mediante iris de longitud $l = 2$ mm formados por dos guías elípticas en el primer caso, y una guía elíptica y una circular en el segundo caso. Las dimensiones de la primera guía elíptica (indicada

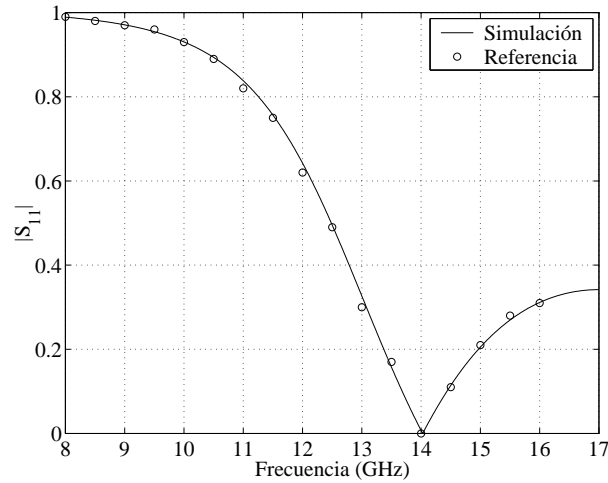


Figura 3.9. Módulo en escala lineal del parámetro de reflexión de la unión entre una guía WR-90 y una guía elíptica, calculado con nuestra herramienta y comparado con las medidas publicadas en [70].

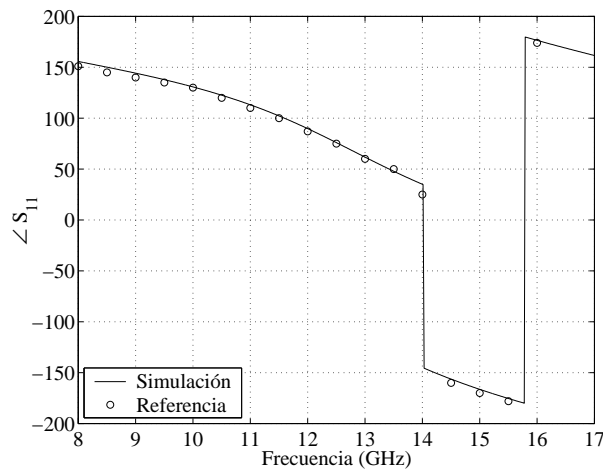


Figura 3.10. Fase del parámetro de reflexión comparada con las medidas publicadas en [70].

con E1 en la figura 3.11) son eje mayor de 41,35 mm y eje menor de 17,40 mm, mientras que las dimensiones de la segunda guía elíptica (E2) son para el eje mayor 29,80 mm y para el eje menor 11,85 mm. Por su parte la guía circular (C1) tiene un diámetro de 17,10 mm. En los dos casos simulados, es decir empleando como iris de acoplo primero dos guías elípticas, y después una guía elíptica y una circular, los resultados obtenidos con la herramienta de simulación coinciden con los resultados publicados en [71] (ver figura 3.12). Como comparación, los autores del artículo [71] afirman haber utilizado 30 modos accesibles en la red global, necesitando 314 segundos (100 puntos en frecuencia) en una estación de trabajo IBM RISC-6000. Con la herramienta desarrollada en esta tesis, se han obtenido resultados similares y convergentes en 66 segundos, empleando 15 modos accesibles, 50 funciones base, 300 elementos del kernel.

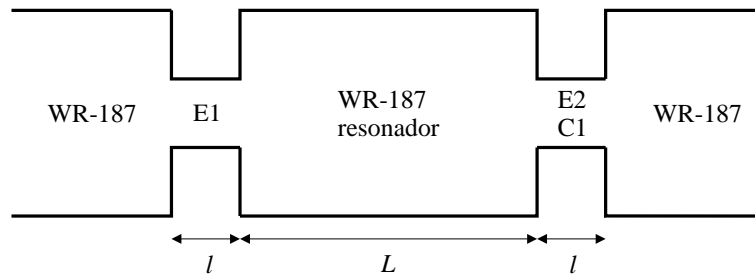


Figura 3.11. Sección longitudinal de un resonador formado en el primer caso por guías rectangulares WR-187 con ventanas de acoplo en guías elípticas (E1 y E2), y en el segundo caso por guías rectangulares WR-187 con una ventana de acoplo en guía elíptica (E1) y una en guía circular (C1) [71].

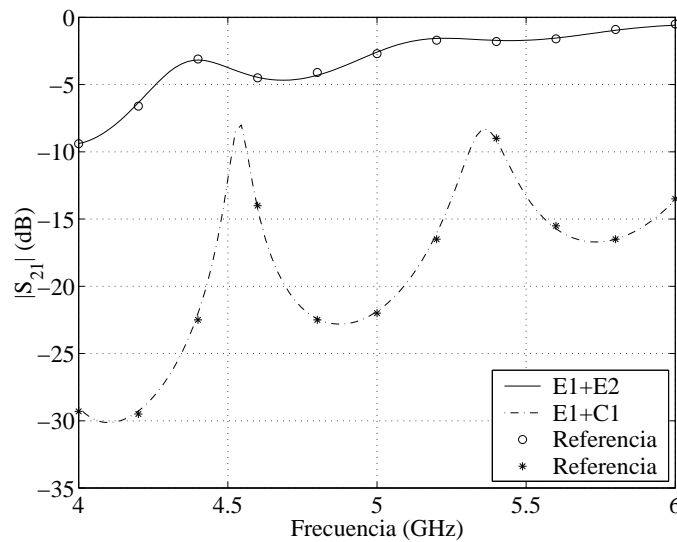


Figura 3.12. Parámetro de transmisión de un resonador en guía rectangular WR-187 con dos iris de acoplo en guía elíptica (E1+E2), y con un iris en guía elíptica y uno en guía circular (E1+C1) comparados con los resultados publicados en [71].

3.4.4. Ejemplo de aplicación 4

En los siguientes dos ejemplos, representados en la figura 3.13 y publicados en [10], también se analizan resonadores, pero esta vez la cavidad que constituye el resonador es una guía circular o elíptica, mientras que los iris de acoplo son en guía rectangular. Los modos del resonador elíptico vienen calculados mediante funciones de Mathieu, y las transiciones vienen caracterizadas con matrices de impedancia multimodal [10]. En la figura 3.13 se puede ver la sección longitudinal de las dos estructuras examinadas. Las guías de entradas son guías WR-90 (22,86 mm × 10,16 mm), el resonador circular, de longitud $L = 100$ mm, tiene un diámetro de 21 mm, el resonador elíptico tiene eje mayor de 22 mm y eje menor de 20 mm. Los iris rectangulares tienen $l = 0,15$ mm de espesor, y son de dimensiones 14 mm × 4 mm en el caso del resonador circular, y de 10,16 mm × 10,16 mm en el caso del resonador elíptico.

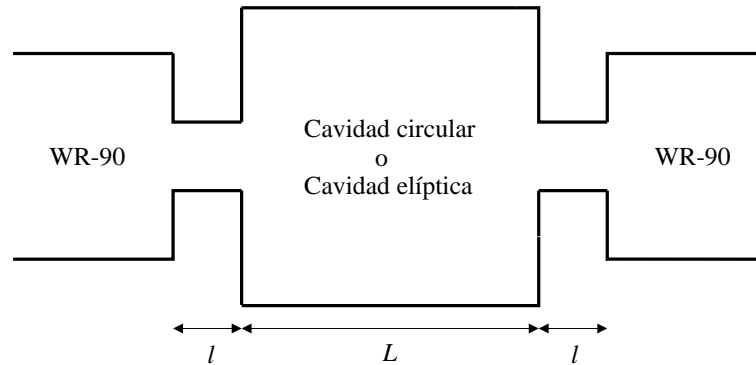


Figura 3.13. Sección longitudinal de un resonador circular o elíptico acoplado a guías WR- 90 mediante iris rectangulares [10].

En la figura 3.14 se muestran los resultados simulados en el caso del resonador circular comparados con los resultados medidos y publicados en [10]. Las simulaciones han sido obtenidas en 225 segundos, utilizando 20 modos accesibles, 30 funciones base, y 300 elementos del kernel. En el segundo caso, es decir empleando una guía elíptica como resonador, los autores del artículo han calculado la respuesta del modo fundamental en 401 puntos en frecuencias, simulando la respuesta en una estación de trabajo *Digital α 300X Series* en casi una hora. Con el programa basado en la teoría expuesta en esta tesis, para obtener resultados similares (ver figura 3.15) y convergentes han sido necesarios tan sólo 2 minutos de simulación empleando 10 modos accesibles, 20 funciones base y 200 elementos del kernel.

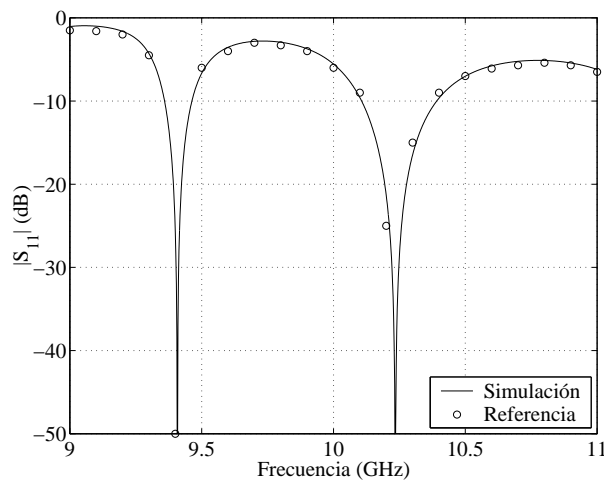


Figura 3.14. Módulo del parámetro de reflexión del resonador en guía circular con iris de acoplo en guía rectangular, representado en la figura 3.13, comparado con los resultados publicados en [10].

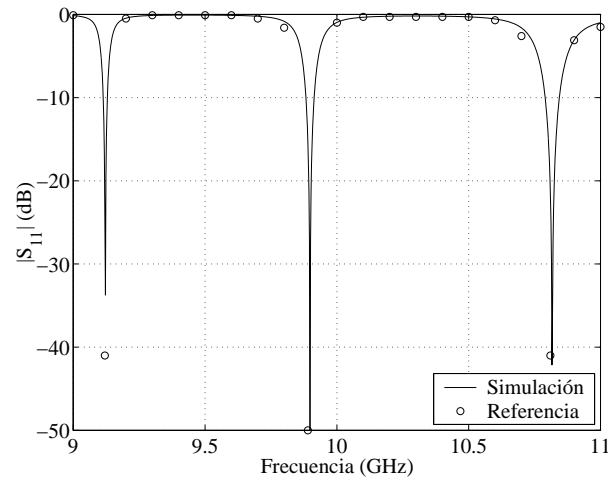


Figura 3.15. Módulo del parámetro de reflexión del mismo resonador, esta vez en guía elíptica, comparado con los resultados publicados en [10].

3.4.5. Ejemplo de aplicación 5

Como se ha comentado anteriormente, las guías elípticas son un elemento fundamental para los filtros de modo dual, ya que realizan el acoplo entre los modos ortogonales, por tanto uniones que involucran este tipo de guías son de gran interés práctico. Utilizando la técnica de la adaptación modal (*Mode Matching*), en [72] se han estudiado varias transiciones entre guías elípticas con el objetivo de evaluar la influencia de una rotación y de un desplazamiento entre guías en la variación del parámetro de reflexión. En la figura 3.16 se muestran las tres transiciones que han sido analizadas: una transición concéntrica, una transición rotada y la última rotada y desplazada.

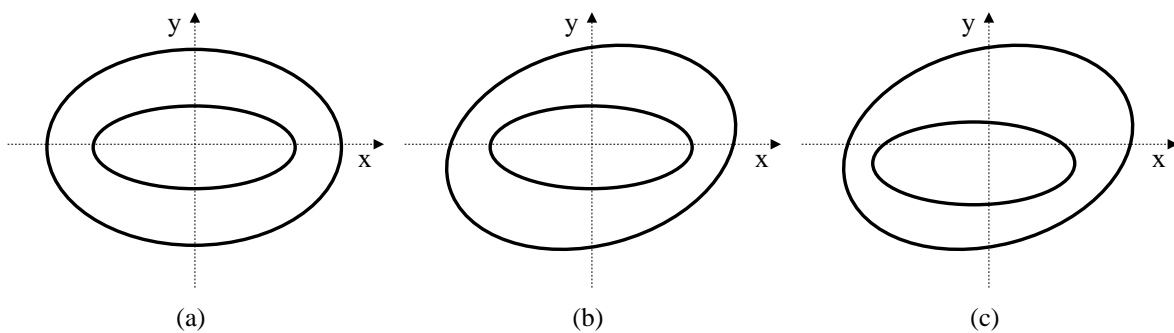


Figura 3.16. Diferentes transiciones entre dos guías elípticas: (a) configuración concéntrica, (b) configuración rotada 15° , (c) configuración rotada 15° y desplazada 1 mm en x y 2 mm en y .

Las dos guías elípticas consideradas tienen las siguientes dimensiones: eje mayor 20 mm y eje menor 14 mm para la más grande, eje mayor 16 mm y eje menor 8 mm para la guía pequeña. En el segundo caso la guía elíptica grande está rotada 15° , y en el tercer y último caso la guía elíptica grande está rotada 15° y la guía pequeña desplazada en el eje x 1 mm y

2 mm en el eje y . En la figura 3.17 se muestran los resultados simulados comparados con los publicados en [72]. En los tres casos, para obtener resultados convergentes, se han utilizado 15 modos accesibles, 30 funciones base, 200 elementos del kernel, y 450 modos de la guía rectangular de 21×15 mm que engloba las dos guías elípticas. Como se puede deducir, este ejemplo es uno de los casos de discontinuidad entre guías arbitrarias en el cual se ha utilizado una única guía rectangular para encerrar ambas guías, pudiendo aplicar la expresión reducida de la ecuación (3.52) para el cálculo de las integrales de acoplo entre las dos guías arbitrarias. Así pues, el tiempo necesario para obtener los resultados de la figura 3.17 ha sido para cada caso de casi 152 segundos; en [72] se han obtenido los mismos resultados con un procesador 486 en 20 minutos. Como se ha afirmado en [72] se puede ver que en las tres transiciones se produce un pico en el parámetro de reflexión a 24,33 GHz; en la segunda configuración se produce una discontinuidad entorno a 20,4 GHz y un mínimo en 21,1 GHz debido al tercer modo de propagación en la guía pequeña. En la última configuración el tercer modo de la guía grande produce un pico a 14,1 GHz aproximadamente.

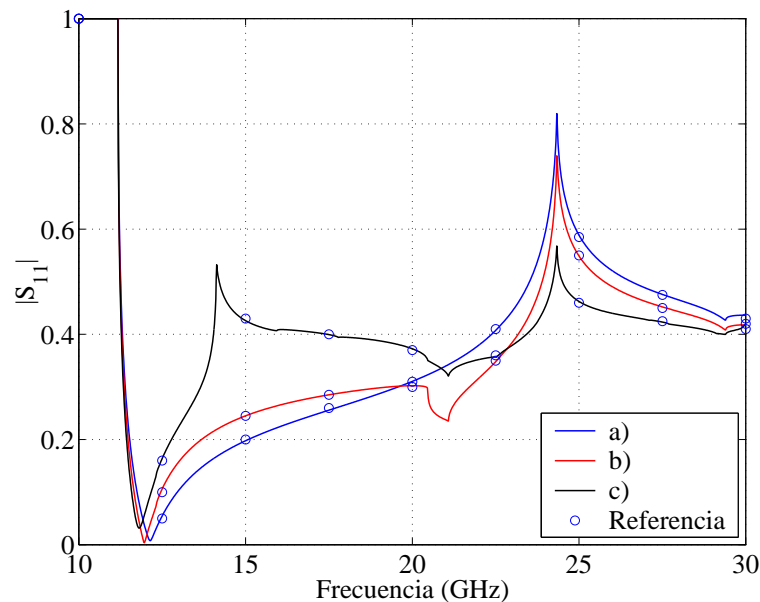


Figura 3.17. Módulo del parámetro de reflexión en escala lineal para las tres distintas transiciones entre guías elípticas representadas en la figura 3.16: a) configuración concéntrica, b) configuración rotada, c) configuración rotada y trasladada. Las simulaciones han sido comparadas con los resultados publicados en [72].

3.4.6. Ejemplo de aplicación 6

El último ejemplo que se va a analizar es una unión entre una guía WR-75, una guía elíptica rotada 45° y otra guía WR-75 también rotada 45° (ver figura 3.18). La guía elíptica de longitud 15,6 mm, presenta un eje mayor de 22 mm y un eje menor de 21,65 mm. Esta estructura ha sido estudiada en [9] para el diseño de una cavidad elíptica en un filtro de modo dual que veremos en

el capítulo 5. Los resultados mostrados en la figura 3.19 comparan el módulo del coeficiente de reflexión obtenido con la herramienta desarrollada (en poco más de 3 minutos) y los resultados publicados en [9]. Los resultados han sido simulados en 500 puntos en frecuencia utilizando 15 modos accesibles, 50 funciones base, y 250 elementos del kernel. También en este caso se ha utilizado un única guía rectangular de 24 mm × 23 mm para encerrar las dos guías rotadas. En cuanto a la serie para calcular las integrales de acoplo, ésta se ha truncado en 500 términos.

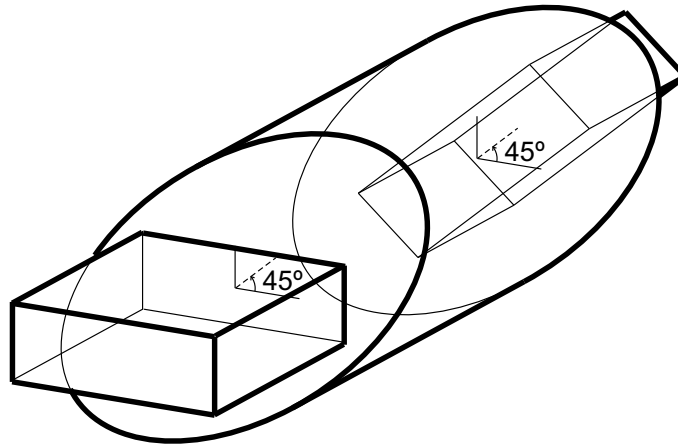


Figura 3.18. Transición entre dos guías WR-75 y una guía elíptica de eje mayor 22 mm, eje menor 21,6 mm, y longitud 16,5 mm; la guía elíptica y la guía WR-75 de salida están rotadas 45° grados.

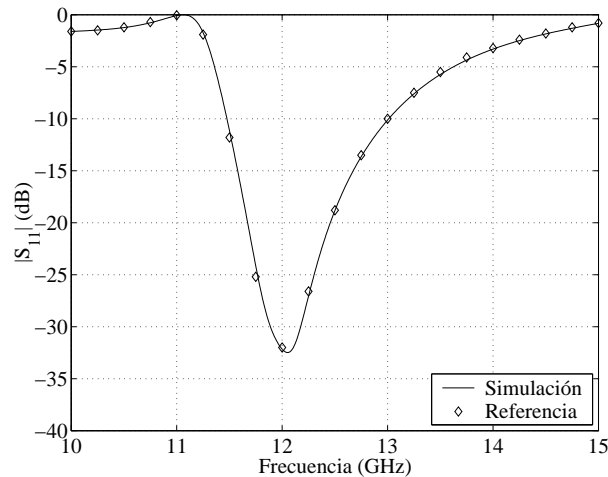


Figura 3.19. Módulo del parámetro de reflexión de la transición de la figura 3.18, las simulaciones han sido comparadas con los resultados publicados en [9].

Capítulo 4

Propiedades de simetría

4.1. Introducción

El objetivo de este capítulo consiste en describir las propiedades de simetría que pueden presentar las guías y las estructuras pasivas de microondas y comentar los procedimientos que se pueden emplear para aprovechar dichas propiedades, buscando reducir al máximo el tiempo necesario para simular dichas guías y estructuras simétricas. En particular nos centraremos en guías formadas por un medio lineal, isótropo y homogéneo completamente encerrado por paredes eléctricas perfectas, aunque las propiedades de simetría que veremos son aplicables a cualquier otro tipo de guía, ya que la simetría es una propiedad intrínseca de las ecuaciones de Maxwell. En el segundo apartado se demostrará como en guías de sección transversal arbitraria con 1 ó 2 ejes de simetría se puede generar toda la familia modal de dicha guía (TEM, TM y TE) de manera que verifiquen una cierta condición de contorno ficticia de pared eléctrica (PE) o pared magnética (PM) en el plano de simetría, lo que da lugar a dos familias de simetría (para 1 eje de simetría) o cuatro familias de simetría (para 2 ejes de simetría) en las que se agrupan todos los modos de la guía. En el tercer apartado se describe la forma de obtener por separado las distintas familias de simetría de guías con sección transversal arbitraria mediante el método BI-RME, y se discuten las ventajas computacionales de esta técnica respecto a calcular todos los modos simultáneamente. Por último, en el cuarto apartado se demostrará que en estructuras de microondas simétricas formadas por la conexión en cascada de tramos de guía uniforme, también aparece el concepto de familias de simetría a nivel modal, donde cada una verifica un cierto tipo de condición de contorno ficticia en los planos de simetría de la estructura. Además se comprobará que las distintas familias de simetría funcionan de forma independiente a lo largo de toda la estructura al no acoplarse entre sí, y cómo dicha situación se puede explotar para aumentar de forma notable la eficiencia del simulador.

4.2. Propiedades de simetría en guías

4.2.1. Modos TM

Consideremos una guía con sección transversal arbitraria que presenta un eje de simetría. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que este eje coincide con el eje y , como se muestra en la figura 4.1. La dirección de propagación coincide con el eje z y con respecto al eje x no tenemos ningún tipo de simetría.

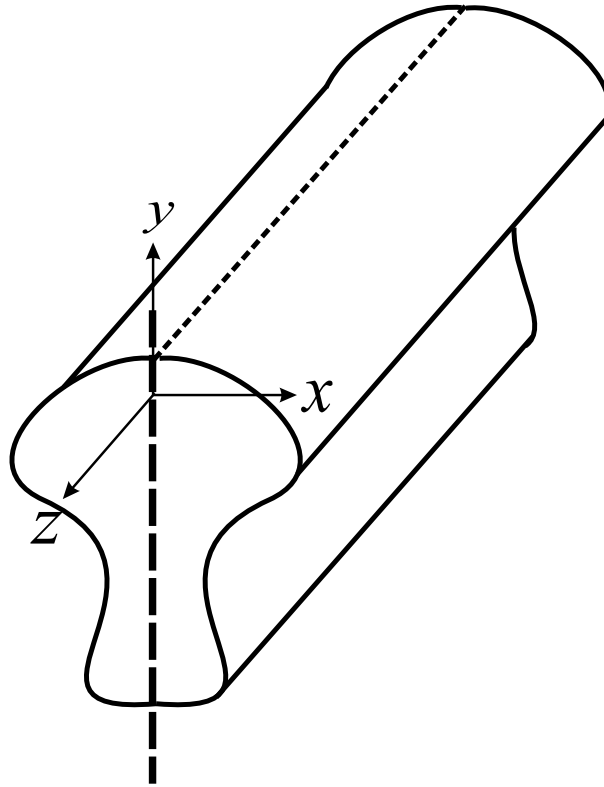


Figura 4.1. Guía de ondas con sección transversal arbitraria y con un plano de simetría coincidente con el plano $x = 0$.

Los modos TM de dicha guía se obtienen a partir de los potenciales que verifican el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi(x, y) + k_c^2 \phi(x, y) = 0 \\ \phi(x, y)|_S = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

donde S es la superficie que forma la guía, de modo que la m -ésima solución $\phi_m(x, y)$ del problema tiene asociado el número de onda de corte $k_{c,m}$, y genera el m -ésimo modo TM de la guía cuyas componentes transversales del campo eléctrico son:

$$\mathbf{e}_m(x, y) = -\nabla_t \phi_m(x, y) \quad (4.2)$$

$$\mathbf{h}_m(x, y) = \widehat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_m(x, y) = -\widehat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi_m(x, y) \quad (4.3)$$

Ahora estamos interesados en demostrar que todas las soluciones (modos) del problema de contorno (4.1) se pueden agrupar en dos grupos de simetría: modos pares e impares respecto al eje y . Comprobar esta propiedad es equivalente a demostrar que si existe una solución de la ecuación (4.1) que no sea par ni impar, ésta se puede descomponer en un modo par y en un modo impar de la guía. Supongamos entonces que tenemos una solución $\phi(x, y)$ de (4.1) que no es par ni impar. Es fácil comprobar que $\phi(-x, y)$ también es solución de la ecuación (4.1) para el mismo k_c , ya que:

- Verifica la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(-x, y) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial(-x)^2} \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(-x, y) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial(-x)^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(-x, y) = -k_c^2 \phi(-x, y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

- Verifica la condición de contorno:

$$\phi(x, y) \Big|_S = 0$$

ya que si $(x, y) \in S$, por simetría $(-x, y)$ también está situado sobre el conductor.

Por lo tanto, si dividimos $\phi(x, y)$ en su parte par e impar:

$$\phi(x, y) = \frac{\phi(x, y) + \phi(-x, y)}{2} + \frac{\phi(x, y) - \phi(-x, y)}{2} = \phi_p(x, y) + \phi_i(x, y)$$

por superposición tanto la parte par como la parte impar son soluciones del problema de contorno asociado al mismo número de onda de corte (es decir, son modos). Se demuestra además que son ortogonales entre sí aprovechando el hecho de que la integral a lo largo de un dominio simétrico de una función par y una función impar en dicho dominio es cero:

$$\iint_S \phi_p(x, y) \phi_i(x, y) ds = \int_{x < 0} \int_y \phi_p(x, y) \phi_i(x, y) dx dy + \int_{x > 0} \int_y \phi_p(x, y) \phi_i(x, y) dx dy \quad (4.5)$$

y haciendo el cambio de variable $x' = -x$ en la integral en $x > 0$:

$$\begin{aligned} \iint_S \phi_p(x, y) \phi_i(x, y) ds &= \int_{x < 0} \int_y \phi_p(x, y) \phi_i(x, y) dx dy + \int_{x' < 0} \int_y \phi_p(-x', y) \phi_i(-x', y) dx' dy \\ &= \int_{x < 0} \int_y \phi_p(x, y) \phi_i(x, y) dx dy - \int_{x' < 0} \int_y \phi_p(x', y) \phi_i(x', y) dx' dy = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

dado que por simetría:

$$\phi_p(-x', y) = \phi_p(x', y)$$

$$\phi_i(-x', y) = -\phi_i(x', y)$$

de este modo, a partir de un modo que no es par ni impar generamos dos modos ortogonales entre sí con el mismo k_c , uno con simetría par y el otro con simetría impar.

Una vez hemos comprobado que todos los modos TM de la guía se pueden dividir en dos grupos de simetría, ahora queda por establecer bajo qué condiciones de contorno equivalentes se genera cada grupo de modos.

■ *Grupo de simetría impar:*

Cualquier modo impar $\phi_i(x, y)$ verifica que en el plano de simetría ($x = 0$) se anula:

$$\phi_i(x, y) \Big|_{x=0} = \frac{\phi(x, y) - \phi(-x, y)}{2} \Big|_{x=0} = \frac{\phi(0, y) - \phi(-0, y)}{2} = 0 \quad (4.7)$$

$$\phi_i(x, y) \Big|_{x=0} = 0 \implies \text{condición de pared eléctrica (PE)}$$

lo que nos indica que los modos impares se obtienen forzando la condición de pared eléctrica en el plano de simetría.

■ *Grupo de simetría par:*

En el plano de simetría, la parcial con respecto a la normal de cualquier modo par se anula:

$$\frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial n} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(-x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \phi(-x, y)}{\partial(-x)} \right) = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial n} \Big|_{x=0} = 0 \implies \text{condición de pared magnética (PM)}$$

y por lo tanto, para obtener los modos TM pares se ha de forzar condición de pared magnética en el plano de simetría.

En resumen se obtienen las siguientes condiciones de contorno equivalentes:

- Modos TM con simetría impar respecto del eje y ($\phi_i(x, y)$): pared eléctrica (PE) en el plano de simetría ($x = 0$).
- Modos TM con simetría par respecto del eje y ($\phi_p(x, y)$): pared magnética (PM) en el plano de simetría ($x = 0$).

Los resultados que se han obtenido para el caso de simetría en el plano $x = 0$, se pueden extrapolar sin dificultad al caso de que el eje de simetría coincidiera con el eje x (plano $y = 0$). En este caso los modos TM se pueden agrupar en dos grupos de simetría: grupo de simetría impar respecto del eje x y grupo de simetría par respecto del eje x , siendo ahora las condiciones de contorno equivalentes:

- Modos TM con simetría impar respecto del eje x : pared eléctrica (PE) en el plano de simetría ($y = 0$).
- Modos TM con simetría par respecto del eje x : pared magnética (PM) en el plano de simetría ($y = 0$).

Por último, si la guía presenta los dos ejes de simetría, todos los modos de la guía se distribuyen en 4 grupos de simetría: impar respecto del eje x – impar respecto del eje y , impar respecto del eje x – par respecto del eje y , par respecto del eje x – impar respecto del eje y , par respecto del eje x – par respecto del eje y . Las condiciones de contorno que hay que forzar en los planos de simetría para generar cada uno de los grupos de simetría se resumen en la tabla 4.1:

$x \setminus y$	Simetría impar y	Simetría par y
Simetría impar x	PE en $y = 0$ PE en $x = 0$	PE en $y = 0$ PM en $x = 0$
Simetría par x	PM en $y = 0$ PE en $x = 0$	PM en $y = 0$ PM en $x = 0$

Tabla 4.1. Condiciones de contorno en los planos de simetría para los modos TM.

4.2.2. Modos TE

Vamos a aplicar el procedimiento utilizado en los modos TM para los modos TE. Los modos TE de una guía con simetría respecto del eje y (ver la figura 4.1) se obtienen a partir de los potenciales que son solución del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi(x, y) + k_c^2 \phi(x, y) = 0 \\ \left. \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right|_S = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

de modo que la m -ésima solución $\phi_m(x, y)$ del problema TE con número de onda de corte asociado $k_{c,m}$ proporciona el m -ésimo modo TE de la guía cuyas componentes transversales de los campos vienen dados por:

$$\mathbf{e}_m(x, y) = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi_m(x, y) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{h}_m(x, y) = -\nabla_t \phi_m(x, y) \quad (4.11)$$

El primer objetivo consiste en demostrar que todos los modos TE de la guía se pueden agrupar en dos grupos de simetría: simetría impar y simetría par respecto del eje y . Como ya se ha visto en el caso TM, esto es equivalente a probar que cualquier modo TE que no pertenezca a ninguno de estos grupos se puede descomponer en un modo par y uno impar ortogonales entre sí. Sea

$\phi(x, y)$ el potencial de un modo TE con número de onda de corte k_c que no es par ni impar, entonces lo descomponemos en su parte par e impar:

$$\phi(x, y) = \frac{\phi(x, y) + \phi(-x, y)}{2} + \frac{\phi(x, y) - \phi(-x, y)}{2} = \phi_p(x, y) + \phi_i(x, y)$$

y como $\phi(-x, y)$ es también solución del problema de contorno (4.9) con número de onda de corte k_c por las propiedades de la ecuación diferencial y la simetría de las condiciones de contorno, tenemos que $\phi_p(x, y)$ y $\phi_i(x, y)$ son también soluciones del problema de contorno con número de onda de corte k_c , y además al ser respectivamente una función par y una función impar en el plano $x = 0$ son ortogonales entre sí por aplicación directa de (4.6).

Al igual que sucedía en los modos TM, cada grupo de simetría de los modos TE se puede obtener forzando unas condiciones de contorno equivalentes en el plano de simetría.

■ *Grupo de simetría impar:*

Los modos de simetría impar $\phi_i(x, y)$ se anulan en el plano de simetría ($x = 0$), lo que corresponde en los modos TE con una condición de pared magnética:

$$\phi_i(x, y) \Big|_{x=0} = \frac{\phi(x, y) - \phi(-x, y)}{2} \Big|_{x=0} = \frac{\phi(0, y) - \phi(-0, y)}{2} = 0 \quad (4.12)$$

$$\phi_i(x, y) \Big|_{x=0} = 0 \implies \text{condición de pared magnética (PM)}$$

■ *Grupo de simetría par:*

Para simetría par $\phi_p(x, y)$ lo que se anula es la parcial con respecto a la normal en el plano de simetría, es decir, la condición de pared eléctrica:

$$\frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial n} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(-x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \phi(-x, y)}{\partial(-x)} \right) = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \phi_p(x, y)}{\partial n} \Big|_{x=0} = 0 \implies \text{condición de pared eléctrica (PE)}$$

En resumen obtenemos las siguientes condiciones de contorno equivalentes:

- Modos TE con simetría impar respecto del eje y ($\phi_i(x, y)$): pared magnética (PM) en el plano de simetría ($x = 0$).
- Modos TE con simetría par respecto del eje y ($\phi_p(x, y)$): pared eléctrica (PE) en el plano de simetría ($x = 0$).

Si el eje de simetría hubiera sido el eje x hubieran aparecido dos grupos de simetría (simetría impar respecto del eje x , simetría par respecto del eje x) donde se ubicarían todos los modos de la guía, y las condiciones de contorno ficticias en el plano de simetría que origina cada tipo de modos serían:

- Modos TE con simetría impar respecto del eje x ($\phi_i(x, y)$): pared magnética (PM) en el plano de simetría ($y = 0$).
- Modos TE con simetría par respecto del eje x ($\phi_p(x, y)$): pared eléctrica (PE) en el plano de simetría ($y = 0$).

Cuando la guía presenta los dos ejes de simetría, los modos TE se distribuyen en cuatro grupos de simetría (impar respecto del eje x – impar respecto del eje y , impar respecto del eje x – par respecto del eje y , par respecto del eje x – impar respecto del eje y , par respecto del eje x – par respecto del eje y). Las condiciones de contorno en los planos de simetría asociadas a cada grupo de simetría se reflejan en la tabla 4.2:

$x \setminus y$	Simetría impar y	Simetría par y
Simetría impar x	PM en $y = 0$ PM en $x = 0$	PM en $y = 0$ PE en $x = 0$
Simetría par x	PE en $y = 0$ PM en $x = 0$	PE en $y = 0$ PE en $x = 0$

Tabla 4.2. Condiciones de contorno en los planos de simetría para los modos TE.

4.2.3. Modos TEM

Queda por comprobar ahora si las mismas propiedades que presentan los modos TE y TM en guías simétricas es aplicable a los modos TEM. Para estudiar este caso se considerará una guía con sección transversal arbitraria con simetría respecto al eje y y con N conductores internos como la mostrada en la figura 4.2 para $N = 5$. Es un hecho conocido que dicha guía presenta N modos TEM que se generan a partir de los potenciales solución del siguiente problema de estática:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi(x, y) = 0 \\ \phi(x, y) \Big|_{\Omega} = 0, \quad \phi(x, y) \Big|_{\sigma_i} = \gamma_i \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (4.14)$$

donde para cada combinación de potenciales en los conductores aparece una solución distinta. Sin embargo, como sólo se dispone de N grados de libertad (tantos como conductores internos), sólo se puede generar un conjunto de N soluciones linealmente independientes que al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmitt¹ proporciona los N modos TEM de la guía. Sea $\phi_m(x, y)$ el potencial del m -ésimo modo TEM (el número de onda de corte de cualquier modo TEM es siempre $k_c = 0$). En ese caso, las componentes de los campos en la guía (que son únicamente transversales) vienen dadas por:

$$\mathbf{e}_m(x, y) = -\nabla_t \phi_m(x, y) \quad (4.15)$$

¹Ver Apéndice A.

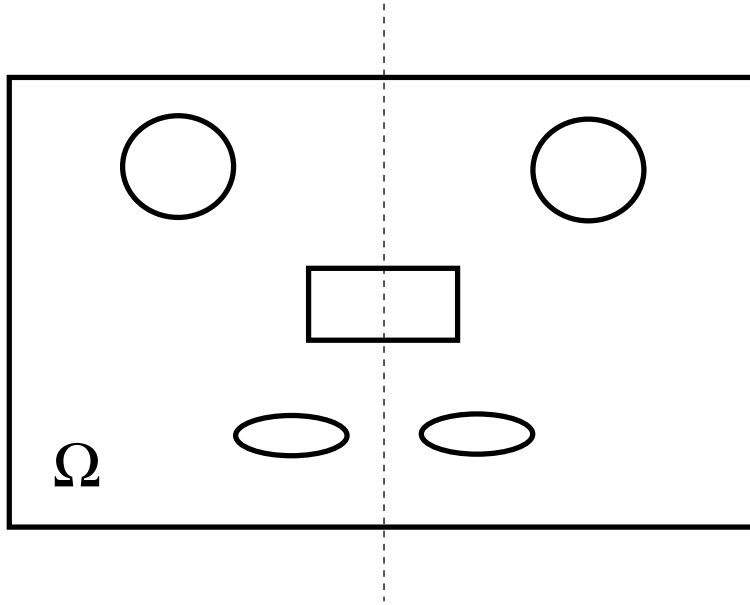


Figura 4.2. Guía de ondas con sección transversal arbitraria con $N = 5$ conductores internos y con un plano de simetría coincidente con el plano YZ ($x = 0$).

$$\mathbf{h}_m(x, y) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_m(x, y) = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi_m(x, y) \quad (4.16)$$

Para poder generar los modos pares y los modos impares en el caso TEM se han de elegir de forma adecuada los potenciales asignados a los conductores, de modo que si se asignan de forma par se obtendrán los modos pares y si se asignan de forma impar se obtendrán soluciones impares. El procedimiento a seguir va a depender de si hay conductores que atraviesen el plano de simetría. Se empezará por considerar el caso más simple de que no hay conductores en dicho plano:

- *No hay conductores en el plano de simetría $x = 0$*

En este caso el número de conductores internos N ha de ser obligatoriamente par, es decir $N = 2P$ con P siendo un número natural. De esta manera existirán P conductores internos a la izquierda del plano de simetría ($x < 0$) y sus correspondientes simétricos a la derecha ($x > 0$).

- *Modos pares*
Se obtienen asignando el mismo potencial a cada par de conductores simétricos. Esto proporciona un total de P grados de libertad, lo que nos permite generar un total de P modos pares de la guía.
- *Modos impares*
Se obtienen asignando el mismo potencial pero con signo contrario a cada par de conductores simétricos. De nuevo se obtiene un total de P grados de libertad (tantos

como pares de conductores), lo que permite generar un total de P modos impares de la guía.

Teniendo en cuenta que, por aplicación de la ecuación (4.6) los modos pares son ortogonales con los modos impares, la suma de ambos conjuntos de modos (conjunto par y impar) proporciona los $N = 2P$ modos TEM de la guía. Como resultado, se ha demostrado que todos los modos TEM de la guía se pueden agrupar en dos grupos de simetría: modos con simetría par respecto del eje y y modos con simetría impar respecto del eje y .

■ *Hay conductores en el plano de simetría $x = 0$*

En este caso el número de conductores internos N se puede expresar como $N = 2P + Q$, donde P es el número de conductores internos a la izquierda (y por simetría a la derecha) del plano de simetría sin tocar dicho plano, mientras que Q es el número de conductores internos en contacto con el plano de simetría (que puede ser un número par o impar de conductores).

● *Modos pares*

Se obtienen asignando el mismo potencial a cada par de conductores simétricos, lo que proporciona P grados de libertad. Por otro lado, para los Q conductores internos sobre el plano de simetría, al darles un valor de potencial se obtiene el mismo potencial en la parte del conductor a la derecha y a la izquierda del plano de simetría, es decir, una distribución par de potencial, lo que proporciona Q grados adicionales de libertad:

$P + Q$ grados de libertad $\Rightarrow P + Q$ modos TEM pares.

● *Modos impares*

Se asigna a cada par de conductores simétricos el mismo potencial pero con signo contrario, resultando P grados de libertad. Por otro lado, la única forma de conseguir una distribución impar de potencial en los Q conductores internos que atraviesan el plano de simetría es que su potencial sea cero, con lo cual estos conductores no proporcionan grados de libertad:

P grados de libertad $\Rightarrow P$ modos TEM impares.

Como el conjunto de modos pares es ortogonal por simetría (ver (4.6)) con el de los impares, la unión de ambos conjuntos de modos proporciona los $N = 2P + Q$ modos TEM de la guía. Es decir, que también en este caso los modos TEM de la guía se pueden agrupar en dos grupos de simetría: modos con simetría par respecto del eje y , y modos con simetría impar respecto del eje y . Por lo tanto, se ha demostrado que para una guía que presenta simetría con respecto del eje y también los modos TEM se pueden agrupar en dos clases de simetría.

Queda por ver las condiciones de contorno equivalentes que forzadas en el plano de simetría dan lugar a cada grupo de simetría. Dichas condiciones se pueden deducir de forma simple mediante la aplicación de teoría de imágenes, de modo que:

- Distribución impar de potencial \rightarrow es equivalente a colocar una pared eléctrica en el plano de simetría, que además cortocircuita los conductores que pasan por el plano de simetría.
- Distribución par de potencial \rightarrow es equivalente a colocar una pared magnética en el plano de simetría.

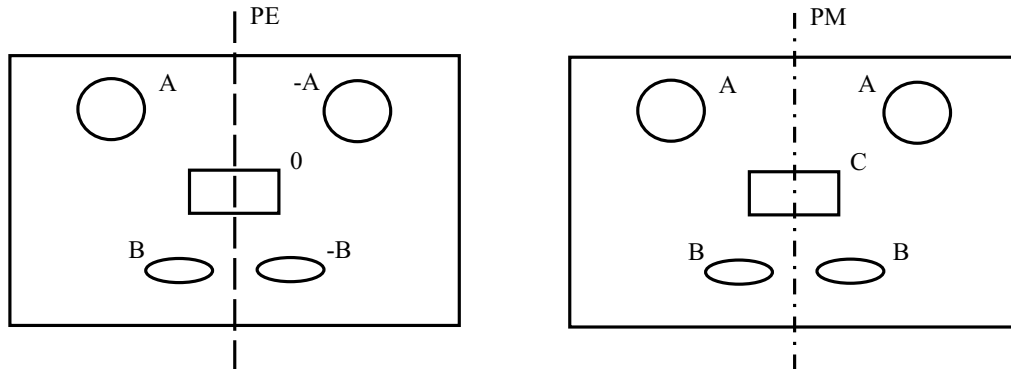


Figura 4.3. A la izquierda: distribución impar de potencial (PE). A la derecha: distribución par de potencial (PM).

Es decir:

- Modos TEM con simetría impar respecto del eje y : se pueden obtener situando una pared eléctrica (PE) en el plano de simetría ($x = 0$) y analizando una parte del problema.
- Modos TEM con simetría par respecto del eje y : se pueden obtener situando un pared magnética (PM) en el plano de simetría ($x = 0$) y analizando una parte del problema.

Si el eje de simetría hubiera sido el eje x , hubieran aparecido dos grupos de simetría: simetría impar respecto del eje x y simetría par respecto del eje x , donde se distribuyen todos los modos TEM de la estructura, siendo las condiciones de contorno equivalentes en el plano de simetría:

- Modos TEM con simetría impar respecto del eje x : se pueden obtener situando una pared eléctrica (PE) en el plano de simetría ($y = 0$) y analizando una parte del problema.
- Modos TEM con simetría par respecto del eje x : se pueden obtener situando una pared magnética (PM) en el plano de simetría ($y = 0$) y analizando una parte del problema.

Por último si la guía presenta los dos ejes de simetría, los modos TEM se distribuyen en los cuatro grupos ya vistos. En la tabla 4.3 se representan las condiciones de contorno en los planos de simetría de cada grupo de simetría.

$x \setminus y$	Simetría impar y	Simetría par y
Simetría impar x	PE en $y = 0$ PE en $x = 0$	PE en $y = 0$ PM en $x = 0$
Simetría par x	PM en $y = 0$ PE en $x = 0$	PM en $y = 0$ PM en $x = 0$

Tabla 4.3. Condiciones de contorno en los planos de simetría para los modos TEM.

4.3. Generación de los modos en una guía simétrica mediante el método BI-RME

En este apartado se verá como se modifican las expresiones de las matrices, que se necesitan calcular con el método BI-RME, para obtener los modos de una guía de sección transversal arbitraria que presenta uno o dos ejes de simetría. Consideremos la guía con sección transversal arbitraria representada en la figura 4.4, dónde cada clase de simetría se denotará con un par de índices (α, β) :

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{no simetría respecto } x \\ 1 & \text{simetría par respecto } x \\ -1 & \text{simetría impar respecto } x \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 0 & \text{no simetría respecto } y \\ 1 & \text{simetría par respecto } y \\ -1 & \text{simetría impar respecto } y \end{cases}$$

Por ejemplo, una función que tenga sólo simetría impar respecto al eje x pertenecerá a la clase $(-1, 0)$. Es necesario resaltar que cuando se considere una clase de simetría, en la expansión modal de la guía rectangular se utilizarán sólo los modos pertenecientes a la misma clase, y naturalmente se obtendrán sólo modos TE y TM de la guía arbitraria también de la misma clase. Por otra parte, como la función densidad de corriente ha de preservar la misma simetría que el modo al que está asociada, se usará en su expansión la mitad de funciones base que en el caso no simétrico pero guardando la simetría correspondiente. Además, todas las integrales de contorno serán calculadas sólo en la parte significativa del contorno σ de la guía arbitraria, que en el caso de la figura 4.4 se ha llamado σ_1 , lo cual significa un gran ahorro computacional en el análisis del problema.

Teniendo en cuenta las contribuciones de las fuentes distribuidas en las diferentes partes del contorno σ , las funciones de Green vendrán modificadas de manera tal que, para cada punto de fuente s' en σ_1 , se considere la contribución que viene de la fuente s^x simétrica en x , o de la fuente s^y simétrica en y , o de estas dos fuentes más la fuente s^{xy} :

$$g^*(\mathbf{r}, s') = g(\mathbf{r}, s') + \alpha g(\mathbf{r}, s^x) + \beta g(\mathbf{r}, s^y) + \alpha\beta g(\mathbf{r}, s^{xy}) \quad (4.17)$$

$$\overline{\mathbf{G}}^*(\mathbf{r}, s') = \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, s') + \alpha \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, s^x) + \beta \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, s^y) + \alpha\beta \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, s^{xy}) \quad (4.18)$$

Por lo tanto en presencia de simetría, en todas las expresiones (2.21), (2.22) y (2.30)–(2.32), calculadas en el capítulo 2, las integrales estarán definidas en σ_1 en lugar de estar definidas en todo el contorno arbitrario σ ; se reemplazará las funciones g y $\overline{\mathbf{G}}$ por las g^* y $\overline{\mathbf{G}}^*$, y se multiplicará por un factor 2 ó 4 dependiendo de que la guía presente uno o dos ejes de simetría.

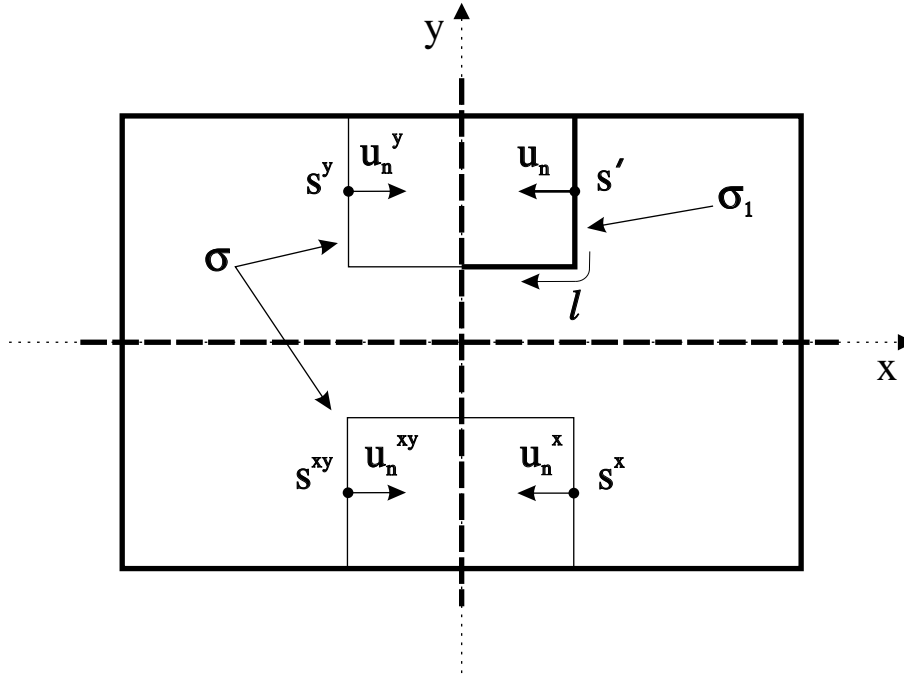


Figura 4.4. Guías de sección transversal arbitraria con dos ejes de simetría; con s' se indican los puntos de fuente y con u_n las normales a los puntos.

Se va a procesar y a demostrar las expresiones de las nuevas matrices, en el caso que la guía presente un sólo eje de simetría: el eje x (ver figura 4.5). Denotaremos a las nuevas matrices con índices (e, o) para indicar que son matrices en el caso de simetría par (en inglés *even*) o impar (en inglés *odd*). Empezamos con la matriz R' de los modos TM:

$$\begin{aligned}
 R'_{im}(e,o) &= \frac{1}{k_m'^2} \int_{\sigma} u_i(l) \psi_m(\mathbf{r}) dl = \frac{1}{k_m'^2} \int_{\sigma_1} u_i(l) \psi_m(\mathbf{r}) dl + \frac{1}{k_m'^2} \int_{\sigma_2} u_i^*(l) \psi_m^*(\mathbf{r}) dl \\
 &= \frac{2}{k_m'^2} \int_{\sigma_1} u_i(l) \psi_m(\mathbf{r}) dl
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde con el índice i se indica el número de funciones base de la corriente, número que será la mitad con respecto al caso sin simetría; análogamente el índice m indica el número de modos TM de la guía rectangular, modos que serán la mitad con respecto al caso no simétrico. También hay que especificar que con u_i^* y ψ_m^* , se indican las funciones base ubicadas simétricamente en σ_2 , y el potencial escalar calculado en el punto de campo simétrico de \mathbf{r} . La demostración de la ecuación (4.19) es fácil, porque tanto en el caso de simetría par (PM en $y = 0$) como en el caso de simetría impar (PE en $y = 0$), las funciones base de la corriente y el potencial escalar ψ tienen la misma paridad respecto del eje x , por lo tanto se pueden sumar.

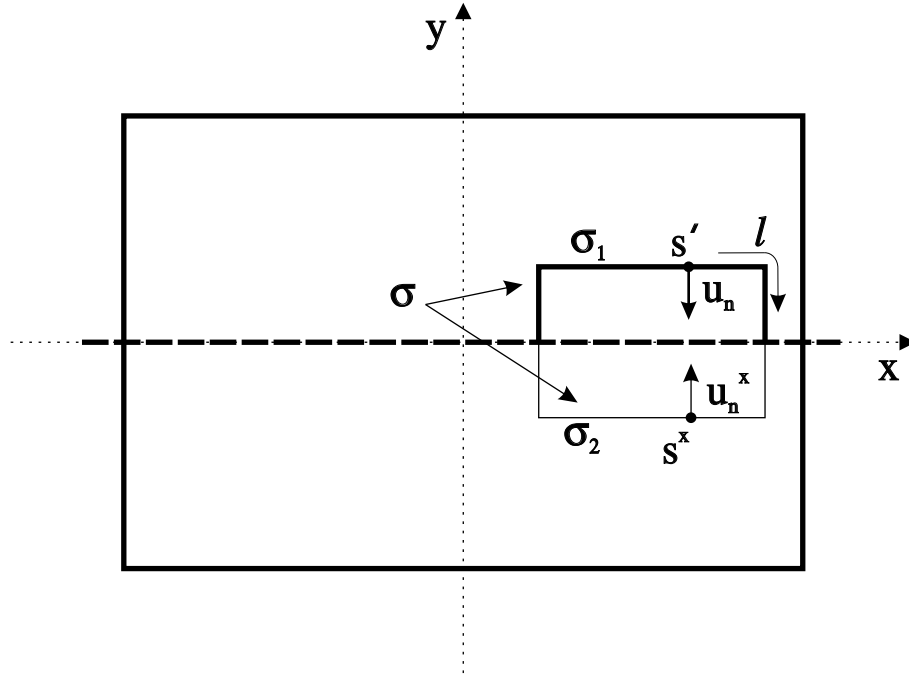


Figura 4.5. Guía de sección transversal arbitraria simétrica respecto del eje x .

Para la matriz L' tenemos que:

$$\begin{aligned}
 L'_{ij}^{(e,o)} &= \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(l') dl' dl = \int_{\sigma} u_i(l) \int_{\sigma_1} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(l') dl' dl \\
 &+ \int_{\sigma} u_i(l) \int_{\sigma_2} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}^x) u_j^*(l') dl' dl = \int_{\sigma} u_i(l) \int_{\sigma_1} g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(l') dl' dl \\
 &= \int_{\sigma_1} u_i(l) \int_{\sigma_1} g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(l') dl' dl + \int_{\sigma_2} u_i^*(l) \int_{\sigma_1} g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(l') dl' dl \\
 &= 2 \int_{\sigma_1} u_i(l) \int_{\sigma_1} g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_j(l') dl' dl
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

con g^* para el caso de simetría par (PM en $y = 0$, $\alpha = 1$):

$$g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') = g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') + g(\mathbf{r}, \mathbf{s}^x)$$

mientras que en el caso de simetría impar (PE en $y = 0$, $\alpha = -1$):

$$g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') = g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{s}^x)$$

Por tanto, dado que también en este caso las funciones base y la función $g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}')$ tienen la misma paridad respecto del eje x , los términos se pueden sumar, obteniendo la expresión final de la ecuación (4.20).

Pasamos ahora a las matrices de los modos TE; la matriz \mathbf{C} tiene las mismas características que la matriz \mathbf{L}' , sólo se cambian las funciones base por sus respectivas derivadas:

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{(e,o)} &= \int_{\sigma} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_i(l)}{\partial l} \frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} dl' dl \\
&= \int_{\sigma} \frac{\partial w_i(l)}{\partial l} \left[\int_{\sigma_1} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} dl' + \int_{\sigma_2} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}^x) \frac{\partial w_j^*(l')}{\partial l'} dl' \right] dl \\
&= \int_{\sigma} \frac{\partial w_i(l)}{\partial l} \int_{\sigma_1} g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} dl' dl \\
&= \int_{\sigma_1} \frac{\partial w_i(l)}{\partial l} \int_{\sigma_1} g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} dl' dl + \int_{\sigma_2} \frac{\partial w_i^*(l)}{\partial l} \int_{\sigma_1} g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} dl' dl \\
&= 2 \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_1} \frac{\partial w_i(l)}{\partial l} g^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial w_j(l')}{\partial l'} dl' dl
\end{aligned} \tag{4.21}$$

donde la función g^* tiene la misma expresión que en el caso de la matriz \mathbf{L}' de los modos TM; y con w_i^* se indican las funciones base de la corriente en el caso TE ubicadas simétricamente en σ_2 .

Para la matriz \mathbf{R} tenemos:

$$\begin{aligned}
R_{im}^{(e,o)} &= \frac{1}{k_m^2} \int_{\sigma} w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) dl = \frac{1}{k_m^2} \int_{\sigma_1} w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) dl \\
&\quad + \frac{1}{k_m^2} \int_{\sigma_2} w_i^*(l) \hat{\mathbf{t}}^*(l) \cdot \mathbf{e}_m^*(\mathbf{r}) dl \\
&= \frac{2}{k_m^2} \int_{\sigma_1} w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) dl
\end{aligned} \tag{4.22}$$

donde $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector tangente en los puntos del contorno σ_1 , y $\hat{\mathbf{t}}^*$ el respectivo vector tangente en los puntos simétricos de σ_2 . Para demostrar la ecuación (4.22), es necesario demostrar que w , $\hat{\mathbf{t}}$ y \mathbf{e}_m tienen la misma paridad y se pueden sumar. Considérese el caso de simetría par (PE en $y = 0$), entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
w_i \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{l}) &= w_i(t_x \hat{\mathbf{x}} + t_y \hat{\mathbf{y}}) \\
w_i^* \hat{\mathbf{t}}^*(\mathbf{l}) &= w_i(-t_x \hat{\mathbf{x}} + t_y \hat{\mathbf{y}})
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_m(\mathbf{r}) &= e_{m_x} \hat{\mathbf{x}} + e_{m_y} \hat{\mathbf{y}} \\
\mathbf{e}_m^*(\mathbf{r}) &= -e_{m_x} \hat{\mathbf{x}} + e_{m_y} \hat{\mathbf{y}}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

es decir las funciones base w_i tienen la misma paridad par a ambos lados del eje de simetría x ; mientras que el vector tangencial $\hat{\mathbf{t}}$ tiene la misma componente en $\hat{\mathbf{y}}$ y contraria en $\hat{\mathbf{x}}$, pero como los vectores del campo eléctrico² tienen también la misma componente en $\hat{\mathbf{y}}$ y contraria en $\hat{\mathbf{x}}$, todas las componentes se suman. En el caso de simetría impar (PM en $y = 0$), las funciones

²Se demostrará en el apartado 4.4.1.

base tienen paridad contraria a ambos lados del eje x , compensando así el cambio de signo de los vectores campo eléctrico que esta vez tienen misma componente en \hat{x} y contraria en \hat{y} :

$$\begin{aligned} w_i \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{l}) &= w_i(t_x \hat{\mathbf{x}} + t_y \hat{\mathbf{y}}) \\ w_i^* \hat{\mathbf{t}}^*(\mathbf{l}) &= -w_i(-t_x \hat{\mathbf{x}} + t_y \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) &= e_{m_x} \hat{\mathbf{x}} + e_{m_y} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{e}_m^*(\mathbf{r}) &= e_{m_x} \hat{\mathbf{x}} - e_{m_y} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por lo tanto también en caso de simetría impar todas las componentes se suman.

En el caso de la matriz \mathbf{L} es necesario hacer consideraciones similares, teniendo en cuenta que la parte estática de la función de Green diádica se puede escribir como una serie en función de los vectores del campo eléctrico transversal de los modos TE:

$$\overline{\mathbf{G}}_{st} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_i(\mathbf{s})\mathbf{e}_i(\mathbf{s}')}{k_i^2}$$

Procediendo de este modo, la matriz \mathbf{L} se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} L_{ij}^{(e,o)} &= \int_{\sigma} \int_{\sigma} w_i(l) w_j(l') \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl' dl \\ &= \int_{\sigma} w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \int_{\sigma_1} w_j(l') \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl' dl \\ &\quad + \int_{\sigma} w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \int_{\sigma_2} w_j^*(l') \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}^x) \cdot \hat{\mathbf{t}}^*(l') dl' dl \\ &= \int_{\sigma} w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \int_{\sigma_1} w_j(l') \overline{\mathbf{G}}_{st}^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl' dl \\ &= \int_{\sigma_1} w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \int_{\sigma_1} w_j(l') \overline{\mathbf{G}}_{st}^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl' dl \\ &\quad + \int_{\sigma_2} w_i^*(l) \hat{\mathbf{t}}^*(l) \int_{\sigma_1} w_j(l') \overline{\mathbf{G}}_{st}^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl' dl \\ &= 2 \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_1} w_i(l) w_j(l') \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \overline{\mathbf{G}}_{st}^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl' dl \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde

$$\overline{\mathbf{G}}_{st}^*(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') = \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') + \alpha \overline{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}^x) \cdot \hat{\mathbf{t}}^*(l')$$

Ahora, la paridad de la diádica \mathbf{G}_{st} depende de los vectores del campo eléctrico transversal, que tienen misma componente en \hat{y} y contraria en \hat{x} en el caso de simetría par (PE en $y = 0$); o en el caso impar (PM en $y = 0$), misma componente en \hat{x} , y contraria en \hat{y} . Los vectores tangenciales y las funciones base se comportan exactamente igual al caso ya visto de la matriz \mathbf{R} . Por lo tanto sin repetir la demostración, análoga al caso precedente, se puede afirmar que el

término $\overline{\mathbf{G}}_{st}^* (\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l')$ tiene la misma paridad que el término $w_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l)$ y por eso se pueden sumar en la ecuación (4.27).

Para completar todos los casos posibles, se puede afirmar que si el eje de simetría hubiera sido el eje y , todas las expresiones obtenidas valdrían igualmente, cambiando sólo la constante α por la constante β . Si hubieran dos ejes de simetría, se tendría que utilizar en el cálculo de g^* y $\overline{\mathbf{G}}_{st}^*$ las expresiones generales (4.17)–(4.18), y cambiar la constante 2 por un 4 en todas las expresiones (4.19)–(4.27) de las matrices.

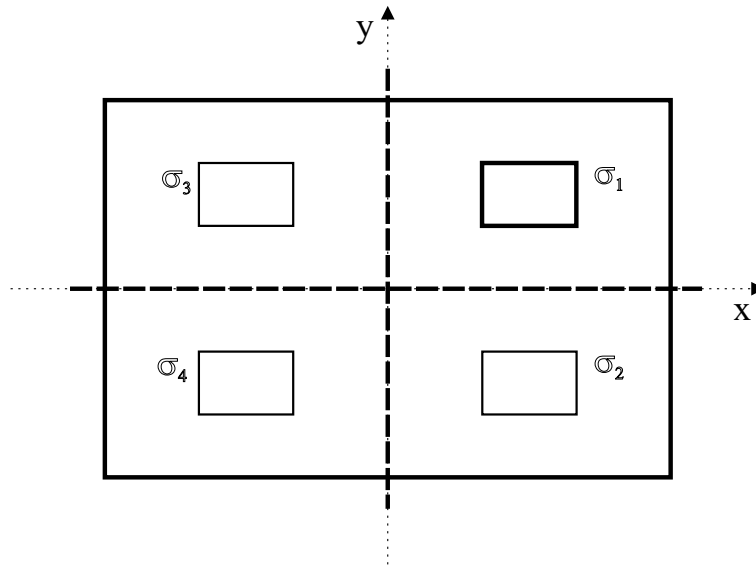


Figura 4.6. Guía de sección transversal arbitraria simétrica respecto a los dos ejes que propaga 4 modos TEM.

Hay que precisar que la resolución final en el caso de presencia de modos TEM en una guía simétrica no es tan eficiente desde el punto de vista computacional como en el caso TE o TM, en particular en la parte del cálculo de las integrales de acoplo; pues por cómo se define el problema (ver apartado 2.2 del capítulo 2 y Apéndice A) para obtener los coeficientes b'' de la densidad de carga ortonormalizados, es necesario reconstruir el problema general sin simetría. Dado que el m -ésimo modo TEM se obtiene fijando el potencial del m -ésimo conductor interno a uno y a cero el potencial del resto de conductores internos, suponiendo que la guía presente dos ejes de simetría (ver figura 4.6), se calcularán 4 problemas diferentes, es decir 4 vectores de densidad de carga³, después a partir de éstos y teniendo en cuenta las paridades, se reconstruirán por superposición los 4 vectores de densidad de carga del problema original:

$$b''_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} + b''^{PEx-PMy} + b''^{PMx-PEy} + b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} - b''^{PEx-PMy} + b''^{PMx-PEy} - b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} + b''^{PEx-PMy} - b''^{PMx-PEy} - b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} - b''^{PEx-PMy} - b''^{PMx-PEy} + b''^{PEx-PEy}) \end{bmatrix}$$

³Si el conductor toca las paredes de simetría sólo el vector b'' generado cuando se consideran PMx (es decir una pared magnética en el eje x) y PMy (es decir una pared magnética en el eje y) tendrá solución no trivial.

$$\begin{aligned}
b''_{\sigma_2} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} - b''^{PEx-PMy} + b''^{PMx-PEy} - b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} + b''^{PEx-PMy} + b''^{PMx-PEy} + b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} - b''^{PEx-PMy} - b''^{PMx-PEy} + b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} + b''^{PEx-PMy} - b''^{PMx-PEy} - b''^{PEx-PEy}) \end{bmatrix} \\
b''_{\sigma_3} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} + b''^{PEx-PMy} - b''^{PMx-PEy} - b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} - b''^{PEx-PMy} - b''^{PMx-PEy} + b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} + b''^{PEx-PMy} + b''^{PMx-PEy} + b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} - b''^{PEx-PMy} + b''^{PMx-PEy} - b''^{PEx-PEy}) \end{bmatrix} \\
b''_{\sigma_4} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} - b''^{PEx-PMy} - b''^{PMx-PEy} + b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} + b''^{PEx-PMy} - b''^{PMx-PEy} - b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} - b''^{PEx-PMy} + b''^{PMx-PEy} - b''^{PEx-PEy}) \\ \frac{1}{4} (b''^{PMx-PMy} + b''^{PEx-PMy} + b''^{PMx-PEy} + b''^{PEx-PEy}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donde PMx o PEx indican una pared magnética o eléctrica en el eje x , y PMy o PEy indican una pared magnética o eléctrica en el eje y . Obtenidos los coeficientes b'' generales y ortornormalizados según la técnica explicada en el Apéndice A, hay que reconstruir la matriz \mathbf{R}' general también por superposición, teniendo en cuenta la paridad, y finalmente calcular las integrales de acoplo TM-TEM según (2.98) que se reescriben a continuación:

$$I_{pq}^{TM-TEM} = \int_S \mathbf{e}_{pTM}^{\square} \cdot \mathbf{e}_{qTEM}^{\diamond} ds = \sum_{n=1}^{N'} b_n'' \int_{\sigma} \frac{\psi_p(\mathbf{s}')}{h_p'} u_n(l') dl' = h_p' \sum_{n=1}^{N'} b_n'' R_{np}'$$

En el caso de simetría según un eje (por ejemplo el eje x), la reconstrucción de los vectores b'' es más simple:

$$b''_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (b''^{PMx} + b''^{PEx}) \\ \frac{1}{2} (b''^{PMx} - b''^{PEx}) \end{bmatrix} \quad b''_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (b''^{PMx} - b''^{PEx}) \\ \frac{1}{2} (b''^{PMx} + b''^{PEx}) \end{bmatrix}$$

pero comportando siempre cálculos adicionales.

4.3.1. Ejemplos

Para la verificación de la teoría desarrollada, en caso de simetría, se calculará la carta modal de algunas guías como por ejemplo la guía circular y la guía elíptica ya analizadas en el capítulo 2 sin utilizar simetría. Se considera como primer ejemplo una guía circular de 6 mm de radio y encerrada en una guía cuadrada de referencia de 13 mm \times 13 mm. Se ha analizado la guía utilizando los dos ejes de simetría y 1000 modos de la guía rectangular de referencia que la rodea. En la tabla 4.4 se comparan los primeros numeros de ondas de corte de la guía circular calculados con el método BI-RME aplicando simetría, sin aplicar simetría, y las soluciones analíticas conocidas. Como se puede ver, los valores calculados con y sin simetría son prácticamente iguales, acercándose mucho a las soluciones analíticas conocidas. Desde el punto de vista computacional, aplicar simetría comporta una reducción evidente del tiempo de cálculo. Utilizando simetría, cada familia de modos ha sido obtenida en poco más de 5 segundos (en total para obtener los primeros 200 modos y las integrales de acoplo con la guía cuadrada, han sido

Modo (orden)	Tipo (TE/TM)	k_c (BI-RME simetría) mm^{-1}	k_c (BI-RME) mm^{-1}	k_c (Analítico) mm^{-1}
1	TE	0,306868	0,306868	0,306863
2	TE	0,306868	0,306868	0,306863
3	TM	0,400814	0,400814	0,400804
4	TE	0,509058	0,509058	0,509039
5	TE	0,509060	0,509060	0,509039
6	TE	0,638641	0,638643	0,638617
7	TM	0,638643	0,638647	0,638617
8	TM	0,638652	0,638647	0,638617
9	TE	0,700251	0,700252	0,700198
10	TE	0,700252	0,700252	0,700198

Tabla 4.4. Primeros 10 números de onda de corte de una guía circular de diámetro 12 mm, incluida en una guía cuadrada de 13 mm \times 13 mm. En la primera columna los valores se calculan con el método BI-RME aplicando simetría, en la segunda no se ha aplicado simetría, y en la última columna se muestran las soluciones analíticas.

necesarios 26 segundos), mientras que el programa que no aprovecha simetrías ha empleado 41 segundos para obtener el mismo número de modos arbitrarios e integrales de acoplo.

El segundo ejemplo que se ha analizado es la guía elíptica, ya vista en el capítulo 2, con semieje mayor de 10 mm y de excentricidad 0,5, encerrada en una guía rectangular de referencia de sección transversal 21 mm \times 18 mm. También en este caso se puede ahorrar tiempo de cálculo puesto que la guía presenta dos ejes de simetría. En la tabla 4.5 se comparan algunas de las longitudes de onda de los primeros 100 modos de la guía elíptica calculados con el método BI-RME, aprovechando simetría y sin considerar simetría con los resultados publicados en [47], obtenidos transformando la ecuación de Helmholtz en coordenadas elípticas en un problema algebraico de autovalores. También en este caso los resultados obtenidos utilizando simetría son idénticos a los resultados ya mostrados en el capítulo 2; el error relativo respecto a los resultados publicados en [47] varía entre 10^{-3} y $5 \cdot 10^{-2}$ en el caso peor. La diferencia sustancial se nota en los tiempos de simulación: utilizando los dos ejes de simetría cada familia de modos se calcula en tan sólo 6 segundos (el tiempo total para obtener todos los modos es de casi 27 segundos); sin aplicar simetría son necesarios 47 segundos frente a los 167 segundos (en una estación de trabajo IBM RISC-6000) requeridos por el método explicado en [47].

4.3.2. Conclusiones

Como se ha demostrado en los apartados anteriores, podemos afirmar que la utilización de las condiciones de contorno en los planos de simetría correspondientes a cada familia de simetría, permite reducir de forma considerable el esfuerzo computacional requerido para obtener los modos de la guía. Así por ejemplo, para una estructura con los dos ejes de simetría la obtención de todos los modos de la guía es equivalente a generar los modos de 4 guías de 1/4 de tamaño de la guía original con diferentes condiciones de contorno (asociadas a cada familia de

Modo (orden)	Tipo (TE/TM)	λ_c BI-RME (simetría) cm^{-1}	λ_c BI-RME cm^{-1}	λ_c ref.[47] cm^{-1}
1	TE	3,394426	3,394426	3,394477
5	TE	1,907890	1,907890	1,907950
10	TE	1,397804	1,397804	1,397907
20	TE	0,915912	0,915912	0,916070
30	TM	0,775506	0,775505	0,775601
50	TM	0,592021	0,592021	0,592145
70	TE	0,493878	0,493878	0,494025
90	TM	0,433991	0,433990	0,434155
100	TE	0,415936	0,415935	0,416163

Tabla 4.5. Longitudes de onda de corte de una guía elíptica (semieje mayor $a = 10$ mm, y excentricidad $e = 0,5$), calculados con el método BI-RME aprovechando simetría y sin considerar simetría, comparados con los resultados publicados en [47].

simetría). El orden de todas las matrices se reduce en un factor 4 (2 en el caso de un sólo eje de simetría), porque el número de funciones base y el número de modos de la expansión modal se reduce en este factor. En cada uno de los 4 casos el tiempo de CPU para obtener las matrices es unas 16 veces más rápido (en el caso de un eje de simetría es unas 4 veces más rápido).

Sea T_{guia} el tiempo que se requiere para resolver el problema de autovalores de la guía arbitraria sin aplicar simetrías, entonces si tenemos en cuenta que la resolución del problema de autovalores de una guía de $1/4$ de tamaño es 64 veces más rápido (orden N^3), tenemos que:

$$T_{simetrias} = 4 \cdot \frac{1}{64} T_{guia} = \frac{1}{16} T_{guia}$$

es decir, que al explotar simetrías la resolución del problema de autovalores es 16 veces más rápido, y si además sólo nos interesan los modos correspondientes a una familia de simetría (lo cual suele suceder en la práctica, como veremos en el proximo apartado) la velocidad se incrementa por un factor de 64. En el caso de que la guía tenga un único eje de simetría, al explotar las simetrías tenemos que obtener los modos de dos guías de la mitad de tamaño, lo que aumenta la velocidad de resolución del problema de autovalores a 4 (que se convertiría en 8 si sólo estamos interesados en una familia de simetría).

En conclusión, si se intenta obtener la carta modal de una guía arbitraria utilizando un eje o dos ejes de simetría se reduce el tiempo de cálculo de las matrices en un factor 2 ó 4, mientras que el tiempo que se requiere para resolver el problema de autovalores se reduce en un factor 4 ó 16.

4.4. Propiedades de simetría en estructuras

4.4.1. Acoplamientos en una discontinuidad planar simétrica entre guías

El objetivo de este apartado consiste en determinar cómo se acoplan las distintas familias de simetría en una discontinuidad planar entre dos guías con el mismo tipo de simetría, de modo que los planos de simetría de ambas guías también coinciden, lo que da lugar a una discontinuidad simétrica. Para simplificar el proceso, vamos a considerar que las guías presentan sólo un eje de simetría, por ejemplo el eje y , con lo que la unión simétrica tiene la forma mostrada en la figura 4.7. Posteriormente se extenderán los resultados al resto de casos (simetría según el eje x , y según los dos ejes). Previamente se va a demostrar dos resultados básicos que se utilizarán de forma repetida a lo largo de este apartado.

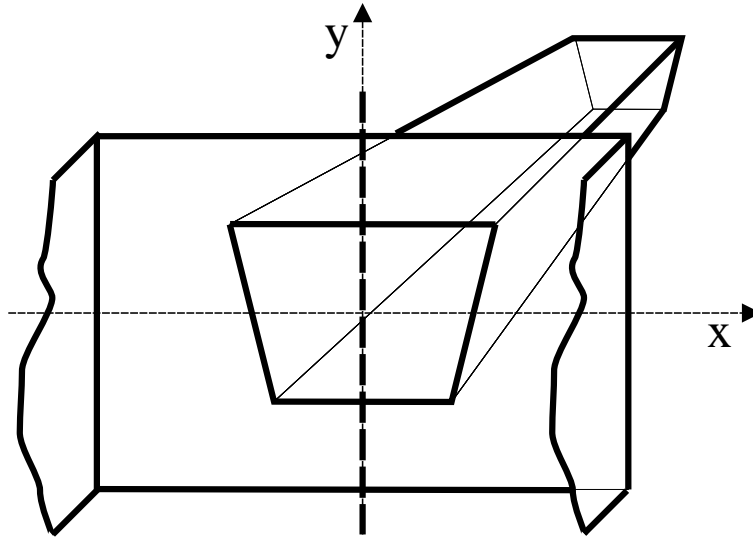


Figura 4.7. Discontinuidad planar simétrica en el plano $x = 0$.

Proposición 1

Sea $f(x, y)$ una función continua y diferenciable en el dominio de Ω simétrico respecto al eje y , la cual verifica que $f(x_0, y_0) = f(-x_0, y_0)$, $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$ (simetría par), entonces:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ es una función impar respecto a x en Ω .
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ es una función par respecto a x en Ω .

Demostrar la primera de las dos expresiones es equivalente a probar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(-x_0, y_0)}$$

y para comprobarlo se utilizará el hecho de que la función $f(x, y)$ es continua y diferenciable en Ω :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h, y_0) - f(x_0 + h, y_0)}{2h}$$

y como $f(x, y) = f(-x, y)$ en Ω tenemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{2h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 - h, y_0) - f(-x_0 + h, y_0)}{2h} = - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(-x_0, y_0)} \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la primera expresión. Para la segunda expresión el procedimiento es análogo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 - h) - f(x_0, y_0 + h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0, y_0 - h) - f(-x_0, y_0 + h)}{2h} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(-x_0, y_0)} \end{aligned}$$

Proposición 2

Sea $f(x, y)$ una función continua y diferenciable en el dominio de Ω simétrico respecto al eje y , y que verifica que $f(x_0, y_0) = -f(-x_0, y_0)$, $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$ (simetría impar), entonces:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ es una función par respecto a x en Ω .
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ es una función impar respecto a x en Ω .

Para demostrar esta segunda proposición se utiliza de nuevo la definición simétrica de la derivada $f(x, y) = -f(-x, y)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h, y_0) - f(x_0 + h, y_0)}{2h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 + h, y_0) - f(-x_0 - h, y_0)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 - h, y_0) - f(-x_0 + h, y_0)}{2h} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(-x_0, y_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 - h) - f(x_0, y_0 + h)}{2h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0, y_0 - h) - f(-x_0, y_0 + h)}{2h} \\ &= - \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(-x_0, y_0)} \end{aligned}$$

La integral de acoplo $I_{pq}^{(1,2)}$ nos mide en tanto por 1 lo que se acopla el modo q -ésimo de la guía 2 ante la presencia del modo p -ésimo de la guía 1, y su valor es igual a:

$$I_{pq}^{(1,2)} = \iint_S \mathbf{e}_p^{(1)} \cdot \mathbf{e}_q^{(2)} ds \quad (4.28)$$

donde $\mathbf{e}_p^{(1)}$ y $\mathbf{e}_q^{(2)}$ representan el campo eléctrico transversal (normalizado) del modo p -ésimo de la guía (1) y del modo q -ésimo de la guía (2) respectivamente, mientras que S es la superficie de la apertura por la que se acoplan ambas guías, y que en nuestro caso será un dominio con simetría según la variable x (es decir, respecto del eje y). Cuando la discontinuidad entre ambas guías es simétrica, muchas de las integrales de acoplo entre modos se anulan por consideraciones de simetría, ya que:

$$I_{pq}^{(1,2)} = \iint_S \mathbf{e}_p^{(1)} \cdot \mathbf{e}_q^{(2)} ds = \iint_S e_{p_x}^{(1)}(x, y) \cdot e_{q_x}^{(2)}(x, y) dx dy + \iint_S e_{p_y}^{(1)}(x, y) \cdot e_{q_y}^{(2)}(x, y) dx dy \quad (4.29)$$

y como S es una region simétrica según x , cuando las paridades de las componentes de ambos campos modales sean opuestas, las integrales anteriores se anularán por aplicación directa de (4.6). A partir de la expresión anterior (4.29) queda claro que para saber qué integrales se anulan se necesita saber la paridad que presenta cada una de las componentes de los campos. Para ello, dividiremos el esfuerzo por familias de simetría, que para este caso particular donde la guía presenta un sólo eje de simetría, el eje y , son dos: *Familia de simetría PEy* y *Familia de simetría PMy*.

■ *Familia de simetría PEy (simetría respecto del eje y)*

Esta familia está formada por los modos TM/TEM con potencial ϕ impar según x , y los modos TE con potencial ϕ par según x . Para el caso TM/TEM, donde el potencial es una función impar en x , el vector campo eléctrico transversal viene dado en virtud de (4.2) y (4.15) por:

$$\mathbf{e}(x, y) = -\nabla_t \phi(x, y) = -\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.30)$$

y aplicando las proposiciones de paridad anteriores tenemos que:

- e_x es par según x , e_y es impar según x .

Por otro lado, en el caso TE el potencial es par según x , y el campo transversal está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x, y) &= \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi(x, y) = \hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = \\ &= -\left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

de modo que:

- e_x es par según x , e_y es impar según x .

Por lo tanto, cualquier modo perteneciente a la familia PEy verifica que e_x es par según x , y e_y es impar según x (ver figura 4.8).

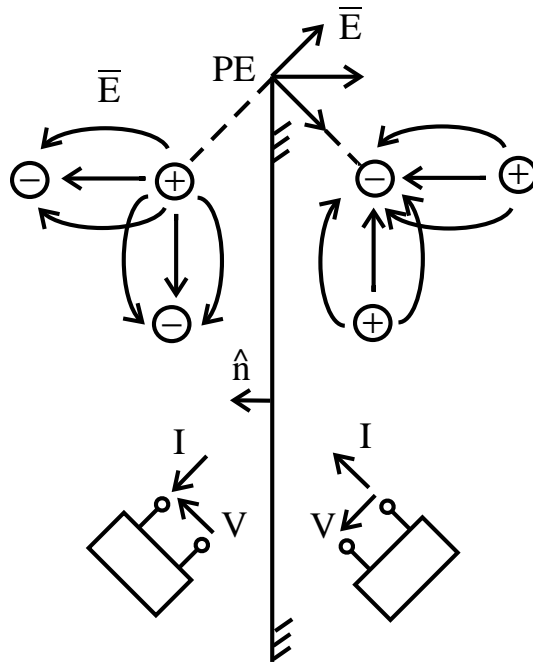


Figura 4.8. Representación del campo eléctrico transversal en presencia de una pared eléctrica en el eje y .

■ *Familia de simetría PMy (simetría respecto del eje y)*

Esta familia está compuesta por los modos TM/TEM con potencial ϕ par según x y los modos TE con potencial ϕ impar según x . En el caso TM/TEM, se ha ya visto que el campo eléctrico transversal es:

$$\mathbf{e}(x, y) = -\nabla_t \phi(x, y) = -\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{y}}$$

y como ϕ es par según x , al aplicar las proposiciones de paridad obtenemos:

- e_x es impar según x , e_y es par según x .

Para los TE el campo eléctrico transversal es:

$$\mathbf{e}(x, y) = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \phi(x, y) = \hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) = -\left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} \right)$$

y al ser ϕ una función impar según x se concluye que:

- e_x es impar según x , e_y es par según x

Es decir, cualquier modo de la familia PMy verifica que e_x es impar según x , y e_y es par según x (ver figura 4.9).

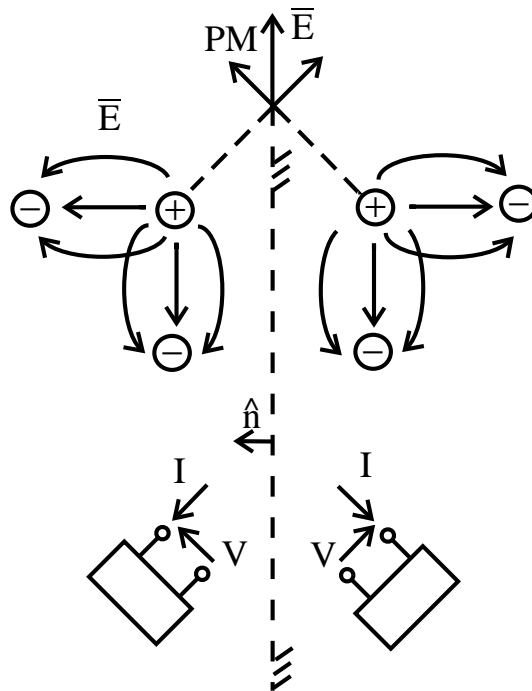


Figura 4.9. Representación del campo eléctrico transversal en presencia de una pared magnética en el eje y .

	PE_y	PM_y
e_x	par según x	impar según x
e_y	impar según x	par según x

Tabla 4.6. Paridad de las componentes de los modos en las guías que forman una discontinuidad simétrica según x (o respecto del eje y).

Los resultados obtenidos para el caso considerado se resumen en la tabla 4.6. La tabla indica que las integrales de acoplo entre modos pertenecientes a familias de simetría distintas se anulan por consideraciones de paridad, ya que para cada componente en (4.29) tendríamos la integral a lo largo de una superficie simétrica según x de una función par en x por una función impar según x .

En el caso de que la discontinuidad hubiera tenido como eje de simetría al eje x (es decir las dos guías son simétricas según el eje x y están ubicadas de modo que sus planos de simetría coinciden, ver figura 4.10), la tabla de paridad hubiera quedado como se indica en la tabla 4.7.

	PE_x	PM_x
e_x	impar según y	par según y
e_y	par según y	impar según y

Tabla 4.7. Paridad de las componentes de los modos en las guías que forman una discontinuidad simétrica según y (o respecto del eje x).

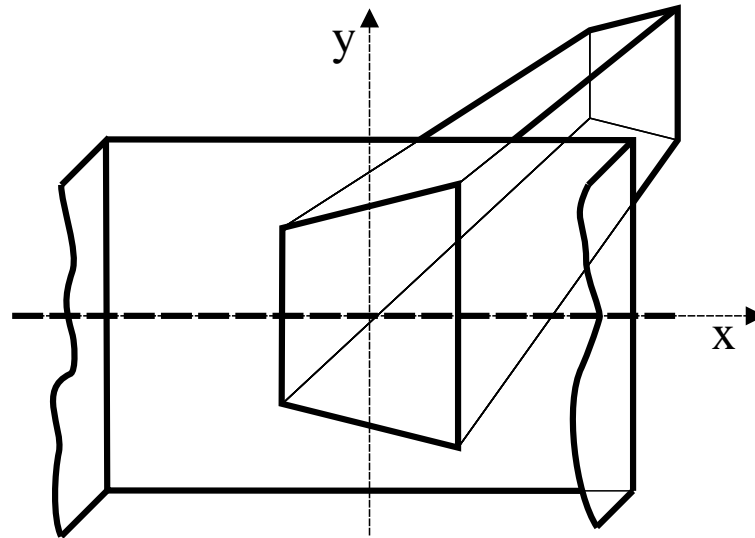


Figura 4.10. Discontinuidad planar simétrica en el plano $y = 0$.

Para una discontinuidad con los dos ejes de simetría (es decir ambas guías son simétricas según x y según y , y además los dos planos de simetría de ambas guías coinciden) la tabla de paridad para las 4 familias de simetría sería la mostrada tabla 4.8. Nuevamente las integrales de acoplo entre modos de las guías pertenecientes a familias de simetría distintas son cero.

	PEy-PEx	PEy-PMx	PMy-PEx	PMy-PMx
e_x	par según x impar según y	par según x par según y	impar según x impar según y	impar según x par según y
e_y	impar según x par según y	impar según x impar según y	par según x par según y	par según x impar según y

Tabla 4.8. Paridad de los modos en las guías de una discontinuidad simétrica según x y según y (respecto de los dos ejes).

Como corolario aplicable a las 3 simetrías posibles (según el eje x , según el eje y y según ambos ejes) podemos afirmar que en una discontinuidad simétrica, las integrales de acoplo entre modos de las guías de la discontinuidad pertenecientes a familias de simetría distintas se anulan, o lo que es lo mismo, no hay acoplo entre modos de familias de simetría distintas. Esto es especialmente útil si tenemos en cuenta que una estructura con 2 ejes de simetría, cuando funcione a frecuencias de operación en las que se excita un único modo fundamental (por ejemplo el TE_{10}^z), sólo será necesario considerar modos cuya paridad coincida con la del fundamental (es decir $TE_{2m+1, 2n}^z$ y $TM_{2m+1, 2n}^z$, con $m, n = 0, 1, 2, \dots$). En la tabla 4.9 se resumen las diferentes familias de modos que deben considerarse cuando se excita con el modo TE_{10}^z una estructura general que presenta simetrías.

	No simetría	Simetría eje x	Simetría eje y	Simetría eje x e y
TE^z	$TE_{m\ n}^z$	$TE_{m\ 2n}^z$	$TE_{2m+1\ n}^z$	$TE_{2m+1\ 2n}^z$
TM^z	$TM_{m\ n}^z$	$TM_{m\ 2n}^z$	$TM_{2m+1\ n}^z$	$TM_{2m+1\ 2n}^z$

Tabla 4.9. Tipos de modos a considerar en estructuras con diferentes tipos de simetría bajo excitación del modo fundamental TE_{10}^z .

4.4.2. Aplicación a estructuras pasivas formadas por la interconexión de tramos de guía uniforme

Una estructura pasiva de microondas formada por la interconexión de tramos de guía uniforme se puede considerar como una conexión en cascada de discontinuidades planares y tramos de guía que interconectan dichas discontinuidades. La estructura es simétrica según un eje cuando existe un plano que corta la estructura en dos mitades iguales. En este tipo de geometrías, y ya que en el interior de una guía cada modo se propaga de forma independiente, el único lugar donde se realizan los acoplos entre modos distintos es en las discontinuidades planares. Dada una estructura simétrica según el eje x , podemos generar en cada guía dos familias de modos en función de su simetría: la familia PEx y la familia PMx. De lo visto en el apartado anterior, sabemos además que, por consideraciones de simetría, en ninguna de las discontinuidades se producen acoplos entre modos de familias de simetría distintas, es decir, entre modos PEx y modos PMx, y por lo tanto podemos decir que a lo largo de la estructura ambas familias de modos funcionan de forma independiente, sin verse afectadas entre sí. Si la excitación situada a la entrada de la estructura fuera de un modo perteneciente a una de las familias, por ejemplo la PEx, entonces los únicos modos que se excitarían a lo largo de la estructura serían los PEx (los PMx no se acoplan), lo que proporciona unas ventajas fundamentales desde el punto de vista computacional:

- Sólo será necesario generar los modos PEx (utilizando la condición ficticia en el plano de simetría), con la correspondiente mejora en la velocidad de resolución del problema de autovalores en el método BI-RME por un factor de 8.
- Al obtener la representación multimodal equivalente de toda la estructura, sólo es necesario generarla si tenemos en cuenta los PEx, lo que reduce a la mitad cada dimensión de la matriz (y por lo tanto hay que calcular 4 veces menos elementos) que supone en el método de ecuación integral una mejora por un factor de 8 (en la inversión de la matriz del método de los momentos con dimensiones reducidas a la mitad).
- Al montar el sistema global uniendo las matrices que representan a cada elemento de la estructura, se obtiene también una mejora por un factor 8.

Es decir, que en los tres puntos más conflictivos, desde el punto de vista computacional, de la técnica de análisis implementada (por orden: generación de modos, cálculo de las matrices e inversión del sistema) se obtiene una mejora en un factor de 8. En el caso muy poco habitual en la práctica de que se excite la entrada con una combinación de modos de ambas familias, la mejor forma de actuar consiste en dividir la excitación en su parte PEx y su parte PMx, y analizar

cada parte de forma independiente y aplicar superposición al resultado, lo que proporciona un incremento de eficiencia de 4 con respecto a analizar toda la estructura sin aplicar simetrías. Cuando la simetría es en el eje y se obtienen los mismos resultados que para el caso anterior con la única diferencia de que ahora se considerarán las familias PEy y PMy. Por último, en el caso de que coexistan los dos ejes de simetría en la estructura la mejora es mucho mayor:

- Si el modo de excitación pertenece a una de las 4 familias de simetría (PEx–PEy, PEx–PMy, PMx–PEy, PMx–PMy) tenemos:
 - Mejora en la resolución del problema de autovalores: $1/64$.
 - Mejora al obtener la representación multimodal (ecuación integral): $1/64$.
 - Mejora al resolver el sistema: $1/64$.
- Si el modo de excitación se descompone en más de una familia de simetría, supongamos en N , la mejora de eficiencia que se obtiene al analizar cada una por separado es: $N \cdot 1/64$ que en el caso peor ($N = 4$) se corresponde con $1/16$.

De estos resultados se desprende que siempre que sea posible conviene explotar las propiedades de simetría al analizar estructuras pasivas de microondas.

4.4.3. Ejemplos de transiciones analizadas aprovechando simetría

Como primer ejemplo se volverá a analizar el resonador en guía rectangular con ventanas de acoplo en forma de cruz representado en la figura 4.11, visto ya en el apartado 3.4.1 del capítulo 3.

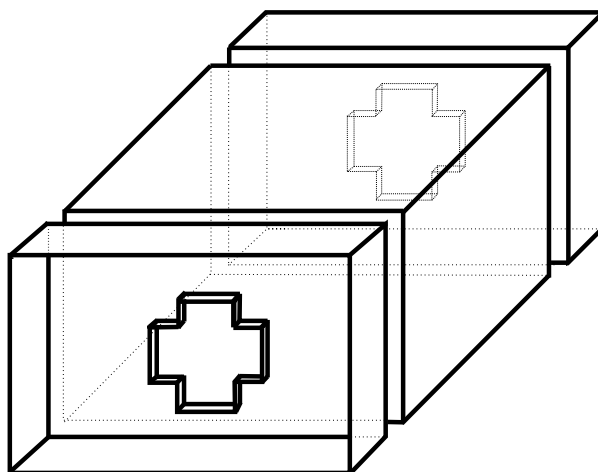


Figura 4.11. Resonador en guía rectangular WR-62 con iris de acoplo en forma de cruz.

Como se puede ver la estructura presenta claramente dos ejes de simetría, además la guía de entrada y salida son guías WR-62 ($15,799 \text{ mm} \times 7,899 \text{ mm}$) que tienen como modo fundamental el modo TE_{10}^z , por lo tanto será necesario considerar sólo modos cuya paridad coincida

con la del fundamental, es decir los modos $TE_{2m+1, 2n}^z$ y $TM_{2m+1, 2n}^z$, con $m, n = 0, 1, 2, \dots$, que se obtienen considerando una pared eléctrica en el plano $y = 0$ (PE_x) y una pared magnética en el plano $x = 0$ (PM_y). En la figura 4.12 se ha representado el módulo de los parámetros de dispersión obtenidos con la herramienta informática desarrollada aprovechando simetría, y los resultados publicados en [69] obtenidos utilizando la técnica de adaptación modal (en inglés *Mode-Matching*). Los resultados han sido calculados empleando una cuarta parte de los valores utilizados en el análisis sin aprovechar simetría (ver apartado 3.4.1 del capítulo 3) y como consecuencia el tiempo de simulación se ha reducido considerablemente, pasando de los 10 segundos originales a casi 3 segundos.

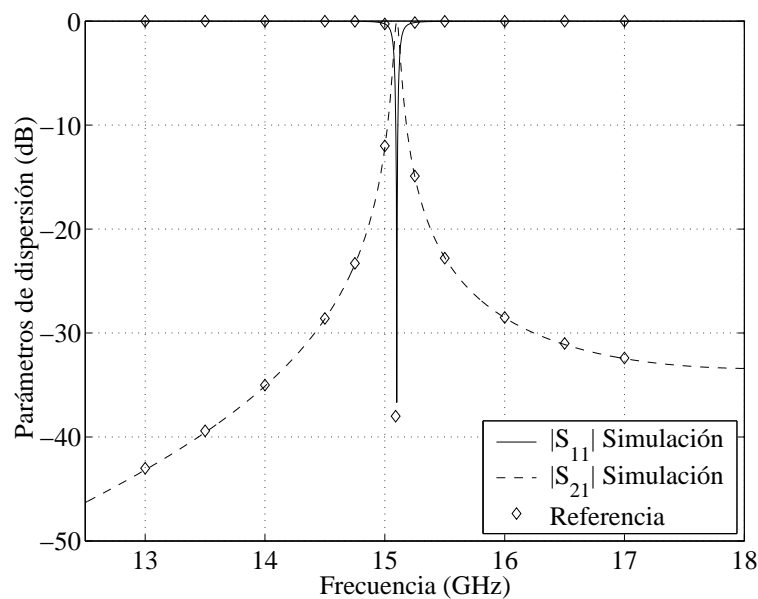


Figura 4.12. Parámetros de dispersión de un resonador en guía rectangular WR-62 con iris de acoplo en forma de cruz obtenidos aprovechando los dos ejes de simetría y comparados con los resultados publicados en [69].

Otros ejemplos en los cuales se ha podido aprovechar la simetría son los resonadores en guía circular y elíptica, ya vistos también en el apartado 3.4.4 del capítulo 3, y publicados en [10]. En la figura 4.13 se representa la sección longitudinal de las dos estructuras examinadas. Las guías de entrada son guías WR-90; el resonador circular, de longitud 100 mm, tiene un diámetro de 21 mm; el resonador elíptico tiene un eje mayor de 22 mm, y un eje menor de 20 mm. Los iris rectangulares tienen 0,15 mm de espesor, y son de dimensiones 14 mm × 4 mm en el caso del resonador circular, y 10,16 mm × 10,16 mm en el caso del resonador elíptico.

En la figura 4.14 se representa el módulo del parámetro de reflexión, en el caso del resonador circular, obtenido aprovechando los dos ejes de simetría y comparado con los resultados publicados en [10]. Para calcular los modos de la guía circular se ha utilizado una guía cuadrada de referencia de 22 mm. Se han obtenido resultados convergentes en sólo 21 segundos (en el caso de no utilizar simetría se había obtenido los mismos resultados en 3 minutos y 45 segundos), utilizando 6 modos accesibles, 10 funciones base y 80 elementos del kernel.

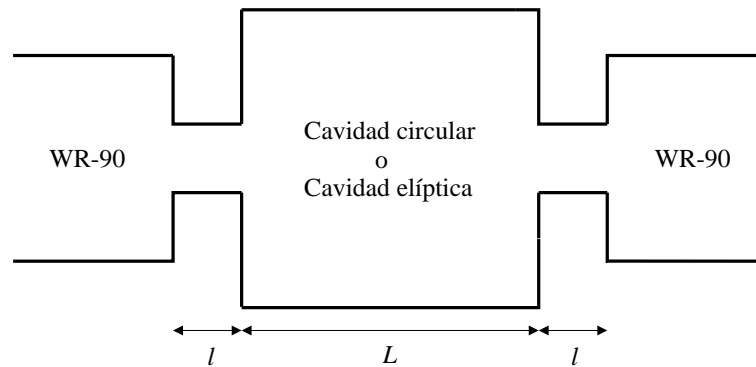


Figura 4.13. Resonador circular y elíptico acoplados con guías WR-90 mediante iris rectangulares [10].

En el segundo caso, es decir con una guía elíptica como resonador, se han obtenido resultados convergentes con valores de los parámetros más bajos, porque se han utilizado sólo 2 modos accesibles, 5 funciones base, y 50 elementos del kernel. También en este caso, el uso de la simetría reduce notablemente el tiempo de simulación de la estructura, pasando de 2 minutos a 13 segundos si se aprovecha la simetría. En la figura 4.15 se ha representado el módulo del parámetro de reflexión obtenido con la herramienta desarrollada, que se compara muy bien con los resultados también publicados en [10].

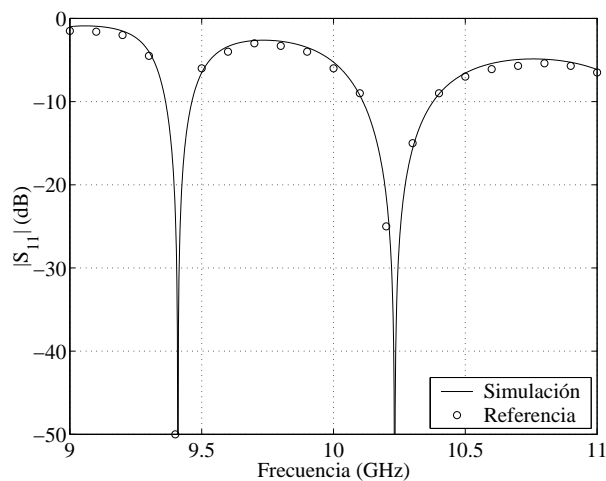


Figura 4.14. Módulo del parámetro de reflexión del resonador en guía circular con dos iris de acoplo en guía rectangular, obtenido aprovechando los dos ejes de simetría, y comparado con los resultados publicados en [10].

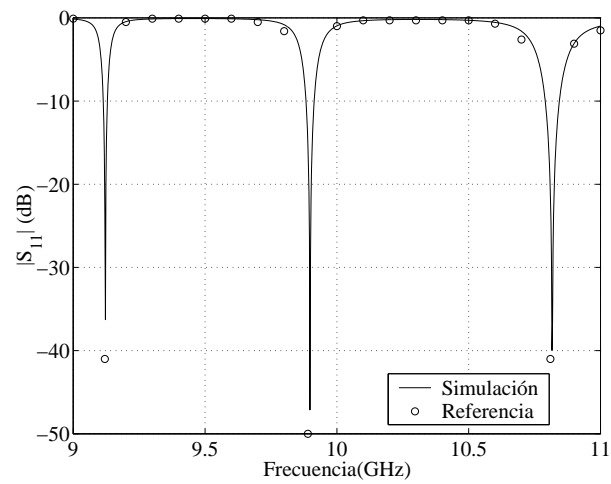


Figura 4.15. Módulo del parámetro de reflexión (aprovechando los dos ejes de simetría) del resonador en guía elíptica con dos iris de acoplo en guía rectangular, comparado con los resultados publicados en [10].

Capítulo 5

Análisis de dispositivos pasivos con guías de sección transversal arbitraria

5.1. Introducción

En las últimas dos décadas, se han fabricado un número cada vez mayor de dispositivos pasivos de microondas en guías de onda de sección transversal arbitraria para aplicaciones de telecomunicación. Filtros, resonadores, polarizadores y otros dispositivos pasivos, son elementos fundamentales en los sistemas de telecomunicación como los satélites, los sistemas de comunicaciones móviles y los radioenlaces [73]. En este capítulo se analizarán, con la herramienta informática desarrollada basada en el método BI-RME y en la técnica de la ecuación integral, dispositivos ya conocidos en la literatura científica y otros nuevos. En el primer caso las comparaciones de nuestros resultados con los publicados corroborarán la validez de la teoría desarrollada. En el segundo caso se obtendrá la validación de los resultados con medidas de prototipos construidos o con resultados de programas comerciales.

El empleo del método basado en matrices de admitancias o de impedancias para caracterizar estos dispositivos integrados por guías conectadas en cascada resulta especialmente ventajoso [42]; pues dicho método conduce a un sistema de ecuaciones lineales a resolver cuya matriz de coeficientes presenta una estructura en banda, característica que puede explotarse adecuadamente para incrementar la eficiencia computacional asociada a la resolución del citado sistema. En el segundo apartado se hará mención a una técnica muy eficiente basada en un algoritmo recursivo, expuesto con detalle en [45] para resolver los sistemas de ecuaciones lineales en banda que surgen al analizar dispositivos de microondas empleando matrices de admitancias¹. Para evidenciar la mejora en términos de eficiencia computacional que supone el empleo de la citada técnica recursiva, se compara con el coste computacional que supone resolver el sistema de ecuaciones empleando un método tradicionalmente utilizado cuando las uniones se caracterizan mediante matrices de dispersión generalizadas [74].

Finalmente se analizarán dispositivos como los filtros de modo dual publicados en [47] y en [9], un filtro inductivo con tornillos de sintonía [46], un filtro inductivo con esquinas redon-

¹En la herramienta desarrollada en esta tesis se han utilizados matrices de impedancias generalizadas.

deadas [7], y nuevos dispositivos como un filtro paso bajo en guía coaxial, un filtro de modo evanescente, y por último un girador de polarización en una nueva geometría más compacta.

5.2. Conexión de discontinuidades y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

El comportamiento de un dispositivo de microondas, constituido por la conexión en cascada de diferentes secciones de guía uniforme, queda completamente descrito si todas las uniones planares entre dichas guías están perfectamente caracterizadas. Conectando adecuadamente las redes equivalentes multimodales de estas uniones planares y de los tramos de guía uniforme, definidas en función de las correspondientes matrices de admitancias o impedancias generalizadas, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones que permite deducir el comportamiento electromagnético del dispositivo completo; y cuya matriz de coeficientes presenta una estructura en banda. Por su parte, esta matriz de coeficientes está constituida por diferentes bloques; cada uno de los cuales se encuentra asociado bien a un tramo de guía uniforme o bien a una unión planar entre guías.

El comportamiento de un tramo de guía uniforme de longitud l puede describirse fácilmente mediante una red equivalente multimodal (ver figura 5.1); basada en una matriz de admitancias generalizada cuyos elementos se obtienen [56] del siguiente modo:

$$Y_{m,n \text{ gu}}^{(1,1)} = Y_{m,n \text{ gu}}^{(2,2)} = (-j) Y_{0n}^{(1)} \cot(\beta_n^{(1)} l) \delta_{m,n} \quad (5.1)$$

$$Y_{m,n \text{ gu}}^{(2,1)} = Y_{m,n \text{ gu}}^{(1,2)} = j Y_{0n}^{(1)} \csc(\beta_n^{(1)} l) \delta_{m,n} \quad (5.2)$$

En (5.1) y (5.2), $Y_{0n}^{(1)}$ y $\beta_n^{(1)}$ hacen referencia respectivamente a la admitancia característica y a la constante de propagación del n -ésimo modo en el tramo de guía caracterizado; parámetros cuyas expresiones analíticas pueden encontrarse por ejemplo en [36]. En cuanto al término $\delta_{m,n}$, presente también en (5.1) y (5.2), éste representa la conocida función delta de Kronecker. Análogamente, una unión planar entre dos guías arbitrarias puede caracterizarse mediante su correspondiente red equivalente multimodal (representada en la figura 5.2), calculada según la técnica de la ecuación integral descrita en el capítulo 3, y definida en términos de una matriz de impedancia generalizada $Z_{m,n}^{(\delta,\gamma)}$ ($\delta, \gamma = 1, 2$).

A nivel global un dispositivo de microondas, constituido por N guías arbitrarias conectadas en cascada, puede escribirse mediante la conexión de $N - 1$ uniones planares y N tramos de guía uniforme. Desde el punto de vista circuital tendremos un esquema como el de la figura 5.3, donde las matrices $Z_{m,n \text{ st}}^{(\delta,\gamma)}$ son matrices que caracterizan las transiciones entre las guías (calculadas con la técnica de la ecuación integral) e $\hat{Y}_{st,m}^{(\delta)}$ son admitancias asintóticas (recordar capítulo 3).

Para deducir el comportamiento electromagnético de un dispositivo es necesario obtener su representación equivalente multimodal, definida en función de las correspondientes matrices de impedancias generalizadas, cuyo aspecto se ofrece en la figura 5.4. Hace falta entonces realizar una serie de operaciones que permitan relacionar cada tramo de línea de transmisión correspondiente a cada modo con su respectiva admitancia asintótica para obtener como objetivo final las

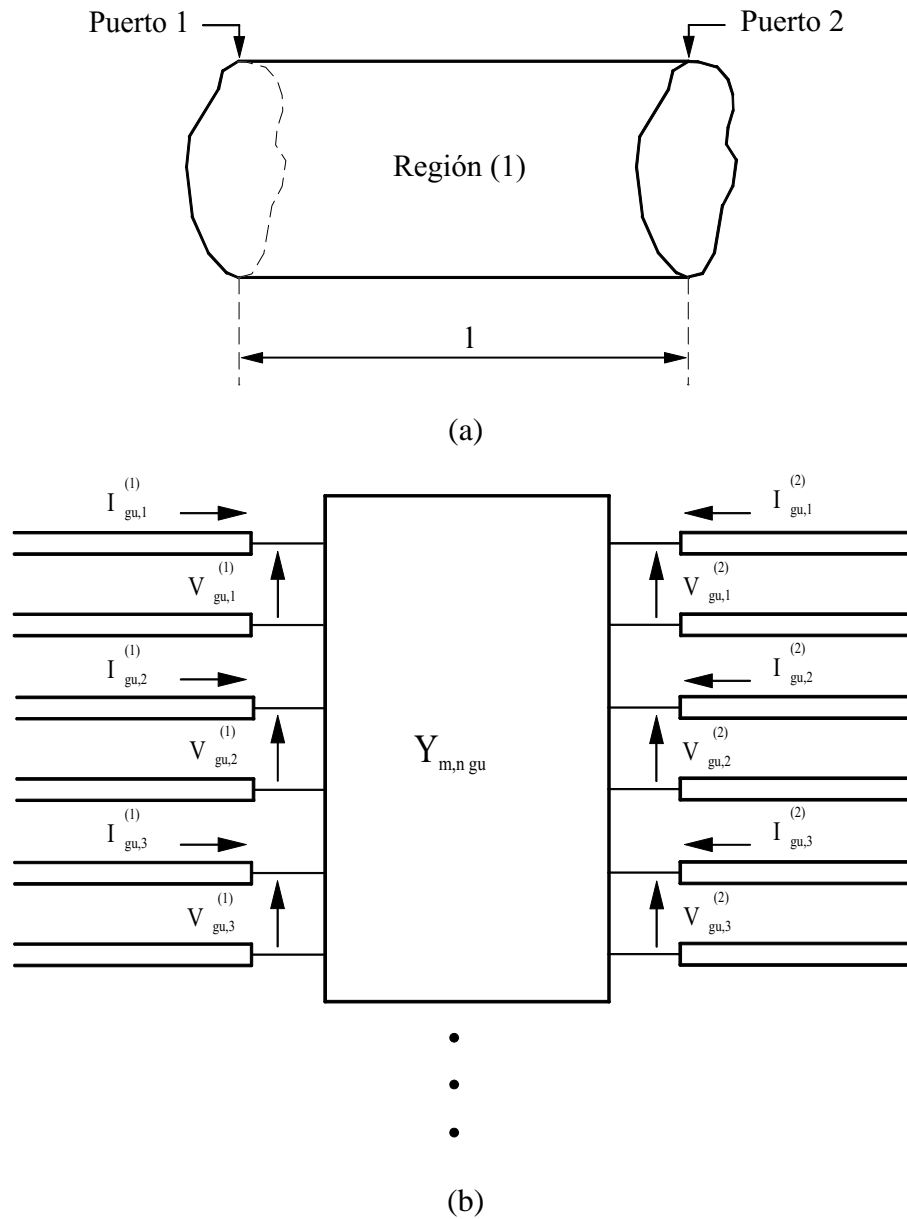


Figura 5.1. a) Guía uniforme arbitraria; b) representación de dicha guía mediante una red equivalente multimodal basada en la matriz de admitancias generalizada.

matrices de impedancias $Z_{m,n \text{ gu}}$ que caracterizan cada tramo de guía en la figura 5.4. Sin entrar en demasiados detalles, estas matrices se obtienen encontrando el equivalente en π de la matriz de admitancias asociada a cada tramo de línea de transmisión correspondiente a cada modo, y resolviendo un circuito equivalente como por ejemplo el representado en la figura 5.5 para los modos de la primera línea de transmisión de la primera guía.

En términos matemáticos, la representación multimodal global de la figura 5.4 determina un sistema de ecuaciones lineales en banda que debe resolverse para obtener la respuesta del dispositivo a caracterizar. Una posible técnica a utilizar en la resolución del citado sistema,

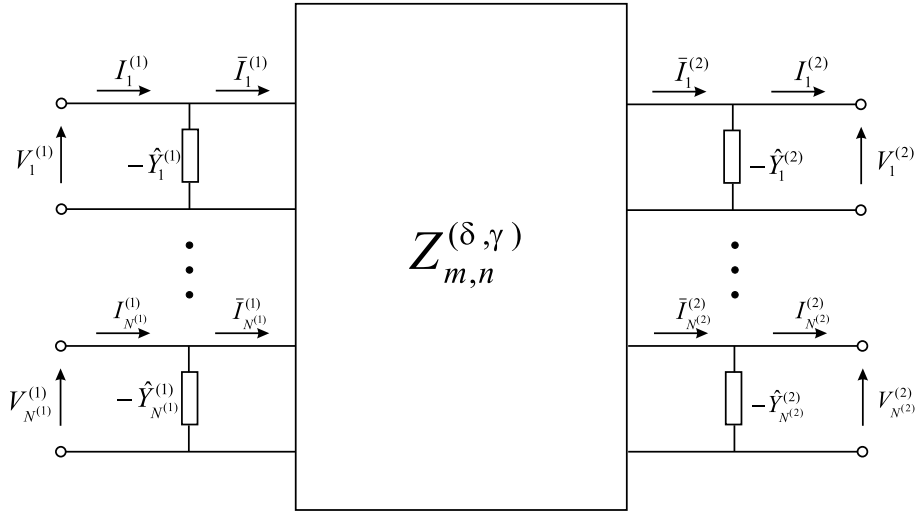


Figura 5.2. Representación de una unión planar entre dos guías mediante una red equivalente multimodal que se obtiene por el método de la ecuación integral.

tradicionalmente empleado cuando las uniones planares y los tramos de guía se caracterizan mediante matrices de dispersión generalizadas [74], se basa en reducir dos matrices de impedancias conectadas en cascada a una matriz equivalente, y en repetir dicha reducción de forma sucesiva hasta que se obtiene una sola matriz de impedancias que representa al dispositivo completo. Así por ejemplo, en la figura 5.6 se tienen dos redes equivalentes multimodales, definidas mediante sus correspondientes matrices de impedancias generalizadas Z_a y Z_b , que están conectadas en cascada. Dichas matrices relacionan los voltajes y las corrientes modales en los puertos de entrada y salida de las correspondientes redes multimodales (ver figura 5.6). Imponiendo la continuidad de los campos eléctrico y magnético transversales definidos en el puerto común que conecta las dos redes equivalentes multimodales:

$$V_a^{(2)} = V_b^{(1)} \quad (5.3)$$

$$I_a^{(2)} = -I_b^{(1)} \quad (5.4)$$

es posible obtener la matriz de impedancias equivalente Z_{ab} , asociada a la red equivalente multimodal que representa la conexión en cascada de las dos redes multimodales definidas mediante sus respectivas matrices Z_a y Z_b (ver figura 5.6). Se obtienen pues las siguientes expresiones:

$$Z_{ab}^{(1,1)} = Z_a^{(1,1)} - Z_a^{(1,2)} \cdot \left(Z_a^{(2,2)} + Z_b^{(1,1)} \right)^{-1} \cdot Z_a^{(2,1)} \quad (5.5)$$

$$Z_{ab}^{(1,2)} = Z_a^{(1,2)} \cdot \left(Z_a^{(2,2)} + Z_b^{(1,1)} \right)^{-1} \cdot Z_b^{(1,2)} \quad (5.6)$$

$$Z_{ab}^{(2,1)} = Z_b^{(2,1)} \cdot \left(Z_a^{(2,2)} + Z_b^{(1,1)} \right)^{-1} \cdot Z_a^{(2,1)} \quad (5.7)$$

$$Z_{ab}^{(2,2)} = Z_b^{(2,2)} - Z_b^{(2,1)} \cdot \left(Z_a^{(2,2)} + Z_b^{(1,1)} \right)^{-1} \cdot Z_b^{(1,2)} \quad (5.8)$$

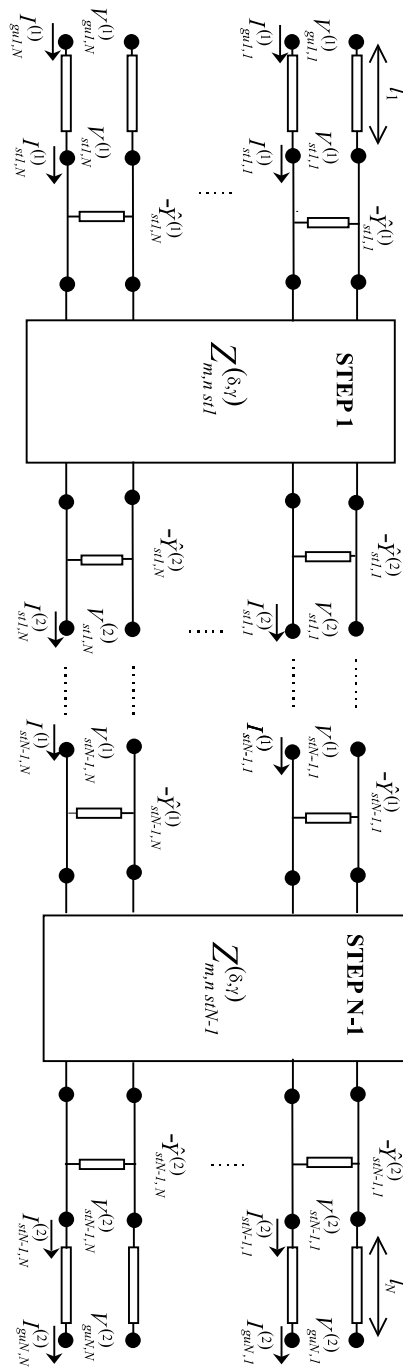


Figura 5.3. Representación circuital de un dispositivo de microondas constituido por N guías conectadas en cascada.

Para aplicar el procedimiento recién descrito al análisis de un dispositivo constituido por N guías conectadas en cascada, se requiere obtener en primer lugar la matriz de impedancias equivalente de las dos últimas matrices ($Z_{m,n \text{ st}N-1}$ y $Z_{m,n \text{ gu}N}$) de la representación global mostrada en la figura 5.4; lo que origina una nueva red equivalente multimodal global asociada

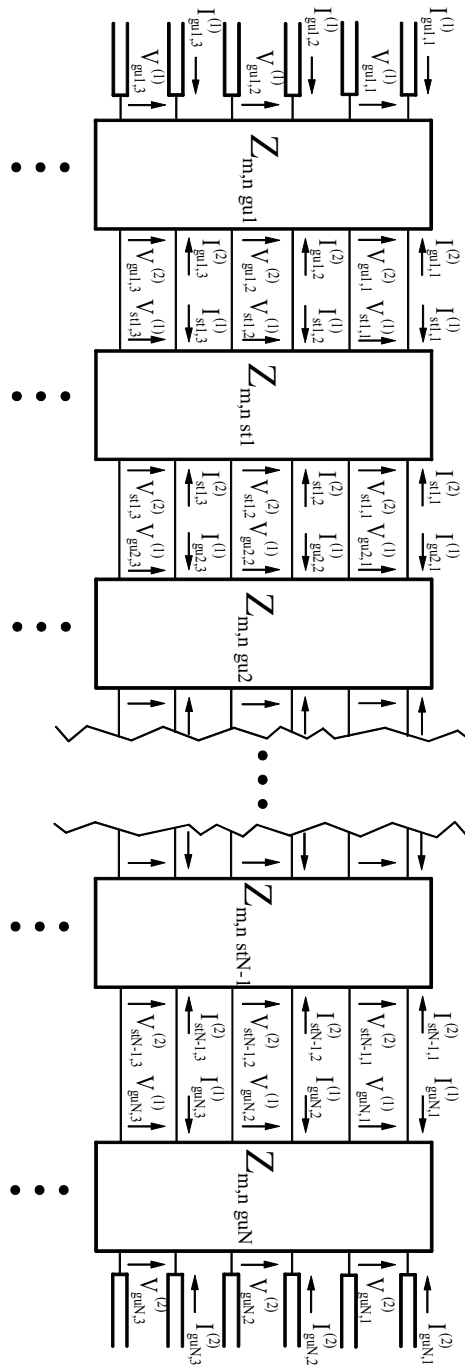


Figura 5.4. Conexión de las redes equivalentes multimodales, definidas mediante las correspondientes matrices de impedancias generalizadas, que corresponden a los elementos integrantes de un dispositivo de microondas constituido por N guías arbitrarias.

al dispositivo que está simplificada, cuyas dos últimas matrices han sido reemplazadas por la correspondiente matriz de impedancias equivalente. Procediendo de esta misma manera con la nueva red simplificada, y repitiendo dicho proceso hasta realizar $(2N-2)$ iteraciones, se obtiene

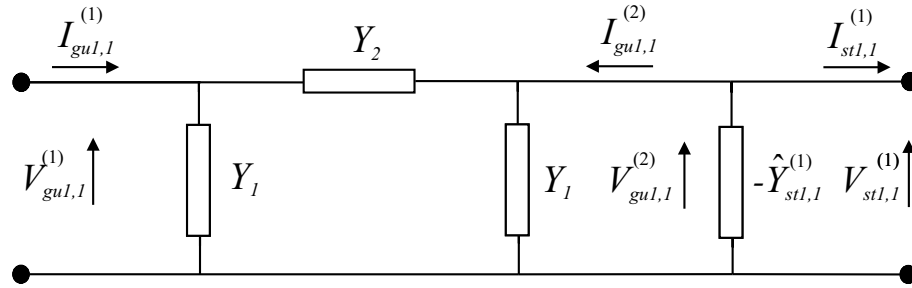


Figura 5.5. Circuito equivalente para el primer modo constituido por el equivalente en π de la matriz de admitancias asociada al primer tramo de línea de transmisión y por la admitancia asintótica de la primera transición (o del primer step).

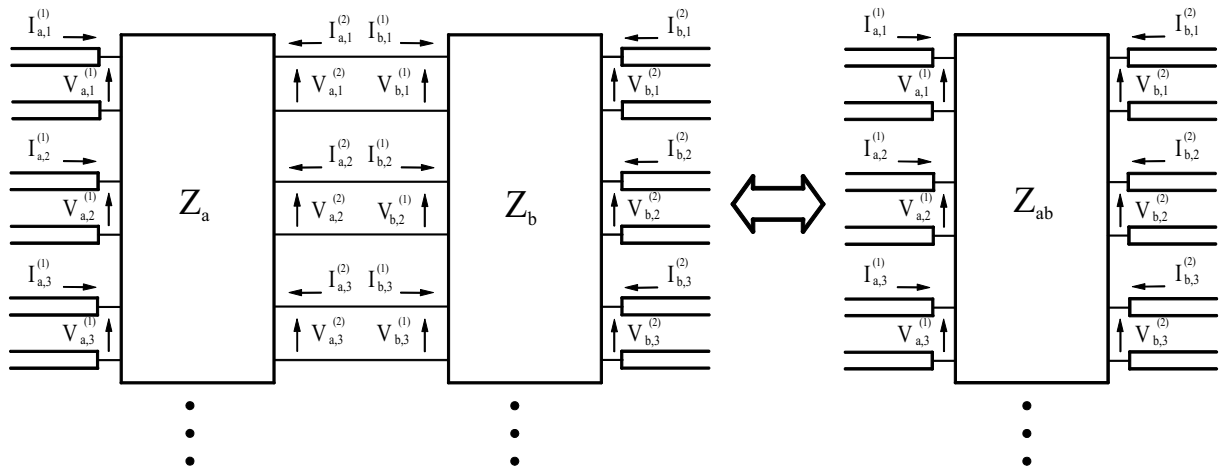


Figura 5.6. Red equivalente multimodal, definida mediante la matriz de impedancias generalizada Z_{ab} , que corresponde a la conexión en cascada de dos redes equivalentes multimodales, expresadas también en función de sus respectivas matrices de impedancias generalizadas Z_a y Z_b .

una sola matriz de impedancias equivalente (Z_{eq}) asociada a la red equivalente multimodal (ver figura 5.7) que representa al dispositivo de microondas bajo análisis.

Una vez obtenida la red equivalente multimodal del dispositivo de microondas a caracterizar, el cálculo de los parámetros de dispersión de dicho dispositivo, asociados por ejemplo al modo fundamental de las guías de entrada (guía 1) y salida (guía N), requiere cargar todos los accesos de los puertos de entrada y salida de la red equivalente multimodal con las impedancias características de los modos correspondientes, exceptuando el primer acceso del puerto de entrada, que constituye la excitación del dispositivo. Cargando pues de esta manera es posible plantear un sistema de ecuaciones lineales expresado matricialmente del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} Z_{eq}^{(1,1)} + Z_{0gu1} & Z_{eq}^{(1,2)} \\ Z_{eq}^{(2,1)} & Z_{eq}^{(2,2)} + Z_{0guN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{gu1}^{(1)} \\ Y_{guN}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

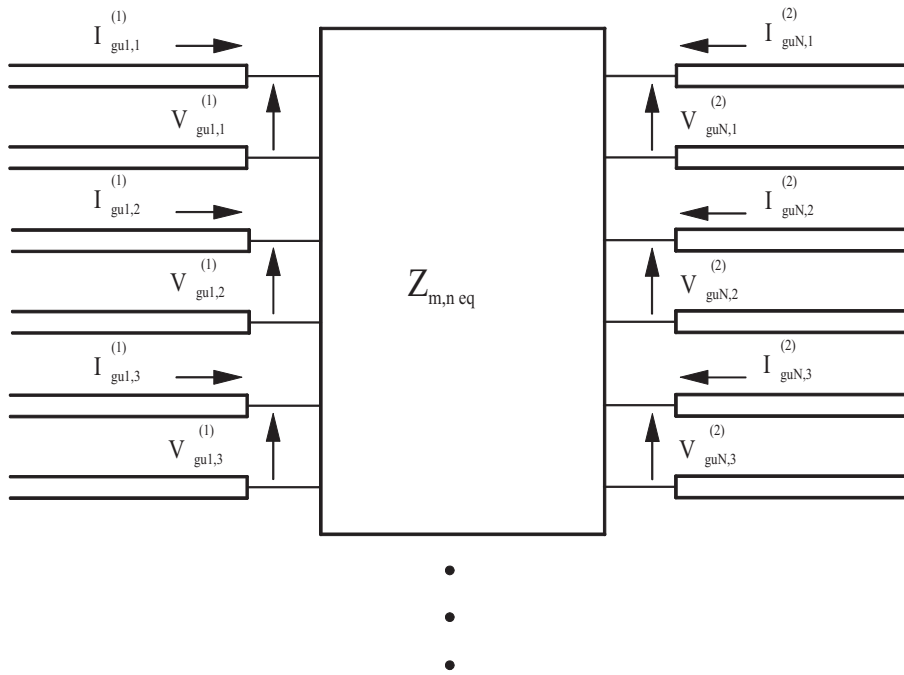


Figura 5.7. Red equivalente multimodal, definida mediante una matriz de impedancias generalizada, que corresponde al mismo dispositivo de microondas constituido por N guías arbitrarias descrito en la figura 5.4.

donde la excitación del sistema de ecuaciones lineales viene definida mediante los vectores columna I y O . Por lo que respecta al vector columna I , su dimensión depende del número de modos escogidos para representar los campos electromagnético en la guía de entrada del dispositivo, número que llamaremos $NM(1)$; sus elementos son todos iguales a 0 excepto el primer elemento, de valor igual a 1, que está asociado a la excitación considerada para calcular los parámetros de dispersión del dispositivo. Por su parte, el vector columna O presenta una dimensión asociada al número de modos elegidos para describir los campos electromagnético en la guía de salida del dispositivo, número que designaremos mediante el parámetro $NM(N)$; todos los elementos de dicho vector O presentan en este caso un valor nulo.

Respecto a las incógnitas del sistema de ecuaciones planteado matricialmente en (5.9), $Y_{gu1}^{(1)}$ representa un vector columna, de dimensión igual a $NM(1)$, cuyos elementos representan una autoadmitancia (asociada al primer modo) y transadmitancias (asociadas al resto de modos); los vectores se definen como el cociente entre la corriente asociada a cada modo en el puerto de entrada de la guía 1 y el voltaje asociado al modo fundamental de dicha guía en el mismo

puerto de entrada:

$$Y_{\text{gu1}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{I_{\text{gu1},1}^{(1)}}{V_{\text{gu1},1}^{(1)}} \\ \frac{I_{\text{gu1},2}^{(1)}}{V_{\text{gu1},1}^{(1)}} \\ \vdots \\ \frac{I_{\text{gu1},\text{NM}(1)}^{(1)}}{V_{\text{gu1},1}^{(1)}} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Con respecto al resto de incógnitas a resolver en el sistema de ecuaciones propuesto en términos matriciales en (5.9), éstas se encuentran asociadas al vector columna $Y_{\text{guN}}^{(2)}$, de dimensión en este caso igual a $\text{NM}(N)$, cuyos elementos representan todos ellos transadmitancias y se definen como el cociente entre la corriente asociada a cada modo en el puerto de salida de la guía N y el voltaje asociado al modo fundamental en el puerto de entrada de la guía 1:

$$Y_{\text{guN}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{I_{\text{guN},1}^{(2)}}{V_{\text{gu1},1}^{(1)}} \\ \frac{I_{\text{guN},2}^{(2)}}{V_{\text{gu1},1}^{(1)}} \\ \vdots \\ \frac{I_{\text{guN},\text{NM}(N)}^{(2)}}{V_{\text{gu1},1}^{(1)}} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Finalmente, las matrices $Z_{0\text{gu1}}$ y $Z_{0\text{guN}}$, presentes en el sistema de ecuaciones propuesto en (5.9), aparecen como consecuencia de imponer las condiciones de carga en los puertos de entrada y salida de la red equivalente multimodal del dispositivo a caracterizar. En particular, la matriz $Z_{0\text{gu1}}$ es una matriz diagonal que contiene un 0 como primer elemento de su diagonal principal (el acceso asociado a la excitación del dispositivo no se carga), y las impedancias características de los respectivos modos considerados en la guía de entrada en el resto de elementos de dicha diagonal principal (es decir, la condición de carga en el puerto de entrada de la guía 1):

$$Z_{0\text{gu1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{02}^{(1)} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & Z_{0\text{NM}(1)}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Por otra parte, la matriz $Z_{0\text{guN}}$ es nuevamente una matriz diagonal; que en este caso contiene en todos los elementos de su diagonal principal las correspondientes impedancias características de los modos escogidos en la guía de salida de la estructura bajo análisis (condición de carga en

el puerto de salida de la guía N):

$$Z_{0\text{gu}N} = \begin{bmatrix} Z_{01}^{(N)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{02}^{(N)} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & Z_{0NM}^{(N)} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones lineales planteado en (5.9), es posible obtener fácilmente los parámetros de dispersión S_{11} y S_{21} asociados al dispositivo de microondas que se pretende caracterizar; deduciendo dichos parámetros de dispersión a partir de las siguientes expresiones, que hacen uso de la autoadmitancia $Y_{\text{gu}1,1}^{(1)}$ y la transadmitancia $Y_{\text{gu}N,1}^{(2)}$ obtenidas previamente:

$$S_{11} = \frac{Y_{01}^{(1)} - Y_{\text{gu}1,1}^{(1)}}{Y_{01}^{(1)} + Y_{\text{gu}1,1}^{(1)}} \quad (5.14)$$

$$S_{21} = -\frac{1}{\sqrt{Y_{01}^{(1)} \cdot Y_{01}^{(N)}}} \cdot (1 + S_{11}) \cdot Y_{\text{gu}N,1}^{(2)} \quad (5.15)$$

De esta forma, se ha caracterizado la respuesta electromagnética del dispositivo de microondas constituido por la conexión en cascada de N guías arbitrarias; habiendo empleado en la resolución del sistema de ecuaciones lineales asociado al dispositivo una técnica reductiva, basada en un procedimiento tradicionalmente utilizado cuando las uniones planares y los tramos de guía del dispositivo se caracterizan mediante matrices de dispersión generalizadas [74].

La técnica reductiva descrita no ha explotado en ningún momento la estructura en banda que presenta la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales asociado al análisis de la estructura global ofrecida en la figura 5.4; razón por la cual parece lógico pensar que no debe ser la más eficiente. De manera diferente, la técnica empleada en la herramienta informática desarrollada se basa en un algoritmo recursivo [45] que aprovecha las características del sistema de ecuaciones lineales en banda. Para aplicar el método recursivo es necesario plantear inicialmente el sistema de ecuaciones lineales, con estructura en banda, que debe resolverse en el análisis de un dispositivo de microondas constituido por la conexión en cascada de N guías arbitrarias. Así pues, dicho sistema se obtiene imponiendo condiciones de continuidad de los campos eléctrico y magnético transversales en los puertos comunes de la estructura global mostrada en la figura 5.4; condiciones que pueden expresarse empleando unos vectores columna cuyos elementos constituyen los voltajes y las corrientes modales en los respectivos puertos

comunes, es decir:

$$V_{\text{gu}1}^{(2)} = V_{\text{st}1}^{(1)} \quad (5.16)$$

$$I_{\text{gu}1}^{(2)} = -I_{\text{st}1}^{(1)} \quad (5.17)$$

$$V_{\text{st}1}^{(2)} = V_{\text{gu}2}^{(1)} \quad (5.18)$$

$$I_{\text{st}1}^{(2)} = -I_{\text{gu}2}^{(1)} \quad (5.19)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$V_{\text{gu}i}^{(2)} = V_{\text{st}i}^{(1)} \quad (5.20)$$

$$I_{\text{gu}i}^{(2)} = -I_{\text{st}i}^{(1)} \quad (5.21)$$

$$V_{\text{st}i}^{(2)} = V_{\text{gu}i+1}^{(1)} \quad (5.22)$$

$$I_{\text{st}i}^{(2)} = -I_{\text{gu}i+1}^{(1)} \quad (5.23)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$V_{\text{gu}N-1}^{(2)} = V_{\text{st}N-1}^{(1)} \quad (5.24)$$

$$I_{\text{gu}N-1}^{(2)} = -I_{\text{st}N-1}^{(1)} \quad (5.25)$$

$$V_{\text{st}N-1}^{(2)} = V_{\text{gu}N}^{(1)} \quad (5.26)$$

$$I_{\text{st}N-1}^{(2)} = -I_{\text{gu}N}^{(1)} \quad (5.27)$$

El planteamiento del sistema de ecuaciones lineales a resolver requiere seleccionar en principio un conjunto de incógnitas; como se ha propuesto en [45] se eligen como incógnitas las corrientes modales (vectores columna) $I_{\text{gu}1}^{(1)}$, $I_{\text{gu}1}^{(2)}$, $I_{\text{gu}2}^{(1)}$, \dots , $I_{\text{gu}N-1}^{(2)}$, $I_{\text{gu}N}^{(1)}$, $I_{\text{gu}N}^{(2)}$, que determinan los campos magnéticos transversales en los puertos de entrada y salida y en los puertos comunes de la estructura global bajo análisis. Dado que se pretenden resolver $2N$ incógnitas (vectores columna), es necesario plantear el mismo número de ecuaciones matriciales. Las condiciones de continuidad, expuestas en (5.16)–(5.27), permiten plantear $(2N - 2)$ ecuaciones de las $2N$ ecuaciones necesarias para determinar el valor de todas las incógnitas; por lo que resulta necesario plantear dos ecuaciones adicionales, deducidas a partir de las relaciones matriciales entre corrientes modales (vectores columna) y voltajes modales (vectores columna) que definen las matrices $Y_{m,n \text{ gu}1}$ e $Y_{m,n \text{ gu}N}$. Una vez se plantean las ecuaciones de este sistema, haciendo uso de todas las mencionadas relaciones matriciales así como de las condiciones de continuidad propuestas en (5.16)–(5.27), deben calcularse los parámetros de dispersión del dispositivo bajo análisis. Escogiendo los parámetros de dispersión asociados al modo fundamental de las guías de entrada (guía 1) y salida (guía N) del dispositivo a caracterizar, su cálculo requiere cargar todos los accesos libres de las redes equivalentes multimodales de las guías de entrada y salida del dispositivo con las impedancias características de los modos correspondientes; exceptuando

el primer acceso de la red equivalente multimodal asociada a la guía de entrada, que corresponde al modo fundamental de dicha guía escogido como excitación del dispositivo. Tras imponer pues esta condición de carga al conjunto de ecuaciones planteadas anteriormente, se obtiene de forma definitiva el siguiente sistema constituido por $2N$ ecuaciones:

$$I_{\text{gu}1} = \left(Z_{\text{gu}1}^{(1,1)} + Z_{0\text{gu}1} \right) \cdot Y_{\text{gu}1}^{(1)} + Z_{\text{gu}1}^{(1,2)} \cdot Y_{\text{gu}1}^{(2)} \quad (5.28)$$

$$O_{\text{gu}1} = Z_{\text{gu}1}^{(2,1)} \cdot Y_{\text{gu}1}^{(1)} + \left(Z_{\text{gu}1}^{(2,2)} + Z_{\text{st}1}^{(1,1)} \right) \cdot Y_{\text{gu}1}^{(2)} + Z_{\text{st}1}^{(1,2)} \cdot Y_{\text{gu}2}^{(1)} \quad (5.29)$$

$$O_{\text{gu}2} = Z_{\text{st}1}^{(2,1)} \cdot Y_{\text{gu}1}^{(2)} + \left(Z_{\text{st}1}^{(2,2)} + Z_{\text{gu}2}^{(1,1)} \right) \cdot Y_{\text{gu}2}^{(1)} + Z_{\text{gu}2}^{(1,2)} \cdot Y_{\text{gu}2}^{(2)} \quad (5.30)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$O_{\text{gu}i} = Z_{\text{gu}i}^{(2,1)} \cdot Y_{\text{gu}i}^{(1)} + \left(Z_{\text{gu}i}^{(2,2)} + Z_{\text{st}i}^{(1,1)} \right) \cdot Y_{\text{gu}i}^{(2)} + Z_{\text{st}i}^{(1,2)} \cdot Y_{\text{gu}i+1}^{(1)} \quad (5.31)$$

$$O_{\text{gu}i+1} = Z_{\text{st}i}^{(2,1)} \cdot Y_{\text{gu}i}^{(2)} + \left(Z_{\text{st}i}^{(2,2)} + Z_{\text{gu}i+1}^{(1,1)} \right) \cdot Y_{\text{gu}i+1}^{(1)} + Z_{\text{gu}i+1}^{(1,2)} \cdot Y_{\text{gu}i+1}^{(2)} \quad (5.32)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$O_{\text{gu}N-1} = Z_{\text{gu}N-1}^{(2,1)} \cdot Y_{\text{gu}N-1}^{(1)} + \left(Z_{\text{gu}N-1}^{(2,2)} + Z_{\text{st}N-1}^{(1,1)} \right) \cdot Y_{\text{gu}N-1}^{(2)} + Z_{\text{st}N-1}^{(1,2)} \cdot Y_{\text{gu}N}^{(1)} \quad (5.33)$$

$$O_{\text{gu}N} = Z_{\text{st}N-1}^{(2,1)} \cdot Y_{\text{gu}N-1}^{(2)} + \left(Z_{\text{st}N-1}^{(2,2)} + Z_{\text{gu}N}^{(1,1)} \right) \cdot Y_{\text{gu}N}^{(1)} + Z_{\text{gu}N}^{(1,2)} \cdot Y_{\text{gu}N}^{(2)} \quad (5.34)$$

$$O_{\text{gu}N} = Z_{\text{gu}N}^{(2,1)} \cdot Y_{\text{gu}N}^{(1)} + \left(Z_{\text{gu}N}^{(2,2)} + Z_{0\text{gu}N} \right) \cdot Y_{\text{gu}N}^{(2)} \quad (5.35)$$

donde la excitación de este sistema de ecuaciones lineales se define mediante los vectores columna $I_{\text{gu}1}$ y $O_{\text{gu}i}$, con $i \in [1, \dots, N]$. El vector columna $I_{\text{gu}1}$, cuya dimensión es igual al número de modos NM(1) elegidos en la guía de entrada del dispositivo, presenta un valor igual a 1 en su primer elemento, que está asociado a la excitación del dispositivo, y valores nulos en el resto de sus elementos; mientras $O_{\text{gu}i}$, con $i \in [1, \dots, N]$, designa un conjunto de vectores nulos (todos los elementos de cada uno de estos vectores iguales a 0), cuyas dimensiones corresponden a los números de modos escogidos en las correspondientes guías del dispositivo bajo análisis. En cuanto a las matrices $Z_{0\text{gu}1}$ y $Z_{0\text{gu}N}$, presentes respectivamente en (5.28) y (5.35), constituyen unas matrices diagonales que surgen al imponer las condiciones de carga requeridas para calcular los parámetros de dispersión del dispositivo a caracterizar; cuyos elementos en la diagonal principal son las impedancias características de los modos de las guías de entrada (guía 1) y salida (guía N) del dispositivo considerado, presentando dichas matrices el mismo aspecto mostrado anteriormente en (5.12) y (5.13). Por último, en lo referente a las incógnitas a resolver en el sistema de ecuaciones definido según (5.28)–(5.35), éstas se encuentran recogidas en los vectores columna $Y_{\text{gu}i}^{(\gamma)}$, con $i \in [1, \dots, N]$ y $\gamma = 1, 2$; vectores constituidos por unos elementos que representan transadmitancias (a excepción del primer elemento del vector

columna $Y_{gu1}^{(1)}$ que designa una autoadmitancia), y definidos del siguiente modo

$$Y_{gui}^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{I_{gui,1}^{(\gamma)}}{V_{gu1,1}^{(1)}} \\ \frac{I_{gui,2}^{(\gamma)}}{V_{gu1,1}^{(1)}} \\ \vdots \\ \frac{I_{gui,NM(i)}^{(\gamma)}}{V_{gu1,1}^{(1)}} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

La resolución del sistema de ecuaciones lineales con estructura en banda, propuesto en (5.28) –(5.35), puede resolverse mediante la aplicación de un algoritmo recursivo² que comienza examinando la última de las ecuaciones de dicho sistema, aquella definida según (5.35), de la que es posible deducir la relación entre los vectores columna $Y_{guN}^{(2)}$ e $Y_{guN}^{(1)}$. Sustituyendo esta relación en la (5.34), se puede establecer una relación entre los vectores columna $Y_{guN}^{(1)}$ e $Y_{guN-1}^{(2)}$. Procediendo recursivamente de esta manera se alcanza la $(2i+1)$ -ésima ecuación del sistema recogida en (5.32); deduciendo de dicha ecuación del sistema una relación entre los vectores columna $Y_{gui+1}^{(1)}$ e $Y_{gui}^{(2)}$. Repitiendo de igual manera el proceso anteriormente descrito hasta alcanzar la primera de las ecuaciones del sistema, definida según (5.28), se obtiene la expresión que permite determinar el valor del vector columna $Y_{gu1}^{(1)}$. Una vez se conoce el valor del vector columna $Y_{gu1}^{(1)}$, es posible proceder de forma recursiva en sentido inverso al seguido en el procedimiento descrito hasta este momento; y deducir por tanto los valores del resto de vectores columna $Y_{gui}^{(\gamma)}$, con $i \in [1, \dots, N]$ y $\gamma = 1, 2$ (excepto $Y_{gu1}^{(1)}$ cuyo valor se ha obtenido anteriormente). Tras determinar el valor de todas las incógnitas (autoadmitancia y transadmitancias definidas en los respectivos accesos de los puertos de la estructura global mostrada en la figura 5.4) del sistema de ecuaciones a resolver, entre ellas $Y_{gu1,1}^{(1)}$ e $Y_{guN,1}^{(2)}$, los parámetros de dispersión del dispositivo bajo análisis se calculan empleando las expresiones descritas previamente en (5.14) y (5.15).

Esta técnica recursiva resulta más eficiente que la reductiva, pues el algoritmo recursivo explota la naturaleza en banda del sistema que se pretende resolver. Con el objeto de comprobar el ahorro en número de operaciones matriciales que supone esta técnica recursiva, se puede hacer un estudio comparativo del número de multiplicaciones e inversiones de matrices (con elementos complejos) requeridas por las citadas técnicas al resolver el sistema de ecuaciones lineales. Considerando inicialmente la primera técnica, consistente en reducir de manera progresiva dos matrices de impedancias a una matriz equivalente hasta representar la estructura global mediante una sola matriz (Z_{eq}), se observa que para implementar las expresiones recogidas en (5.5) –(5.8) es necesario realizar 6 multiplicaciones y 1 inversión de matrices complejas en cada etapa del análisis reductivo; debiendo realizar $(2N - 2)$ de estas etapas reductivas para obtener la matriz de impedancias equivalente (Z_{eq}) que representa a la estructura global mostrada en la figura 5.7. Finalmente, para obtener los parámetros de dispersión que presenta el dispositivo bajo análisis, se requiere resolver el sistema de ecuaciones lineales planteado en términos matriciales en (5.9); para lo cual debe llevarse a cabo una última inversión de una matriz cuyas dimensio-

²Ver detalles del algoritmo para una formulación basada en matrices de admitancias en [45].

Método implementado para resolver el sistema lineal	Número de operaciones matriciales	
	Multiplicaciones	Inversiones
1. Técnica de reducción	$6 \cdot (2N - 2)$	$2N - 1$
2. Técnica recursiva	$3 \cdot (2N - 1)$	$2N$

Tabla 5.1. Número de operaciones matriciales (multiplicaciones e inversiones de matrices con elementos complejos) requeridas para resolver el sistema lineal en banda que aparece al analizar un dispositivo de microondas constituido por N guías arbitrarias.

nes son respectivamente el doble de las que presentan las matrices invertidas en cada una de las etapas reductivas. En la tabla 5.1, se recogen de forma resumida estos números de operaciones con matrices complejas (multiplicaciones e inversiones) que requiere la técnica de reducción progresiva, que constituye una traslación al tipo de análisis propuesto en este capítulo, basado en matrices de impedancias generalizadas, del método tradicionalmente utilizado en la caracterización de dispositivos de microondas empleando matrices de dispersión generalizadas [74].

En la técnica recursiva expuesta en [45] y utilizada en la herramienta informática desarrollada, en cada iteración se requiere una inversión de una matriz con elementos complejos; de manera que para resolver el sistema en banda será necesario realizar un número total de $2N$ inversiones. En cuanto a estas inversiones, resulta interesante reseñar que todas las matrices a invertir presentan el mismo tamaño (dimensiones) que el de las matrices a invertir en cada etapa reductiva de la otra técnica. Por lo que respecta al número de multiplicaciones de matrices complejas a implementar, como se afirma en [45], las expresiones generales determinan la necesidad de llevar a cabo 3 multiplicaciones en cada iteración del algoritmo recursivo. Un resumen del número total de inversiones y multiplicaciones de matrices con elementos complejos que requiere esta técnica recursiva se recoge de nuevo por razones comparativas en la tabla 5.1. Del estudio comparativo ofrecido en la tabla 5.1, resulta fácil determinar la eficiencia computacional que presentan las dos técnicas descritas hasta el momento; concluyendo que la técnica basada en una reducción progresiva requiere casi el doble de multiplicaciones de matrices con elementos complejos que la técnica recursiva, mientras ambas técnicas precisan prácticamente del mismo número de inversiones complejas. En realidad, aunque la técnica de reducción progresiva realiza una inversión menos que la técnica recursiva, la última matriz a invertir por la técnica de reducción progresiva tiene el doble de tamaño (dimensiones) que el del resto de matrices previamente invertidas en dicho método, y que el de todas las matrices a invertir cuando se emplea la técnica recursiva. En definitiva, al analizar estructuras de microondas complejas constituidas por la conexión en cascada de N guías arbitrarias ($N \gg 1$), el coste computacional asociado a la resolución del mencionado sistema en banda mediante la técnica de reducción progresiva será al menos el doble que utilizando la técnica recursiva.

5.3. Análisis eficiente y riguroso de dispositivos pasivos

Una vez validada la teoría desarrollada con diferentes ejemplos de guías arbitrarias, y una vez comprobada la eficiencia de la herramienta de simulación basada en el método BI-RME para el análisis modal de las guías de sección transversal arbitraria, así como de la técnica de la ecuación integral para el análisis de transiciones planares, se ha intentado analizar algunos dispositivos pasivos de microondas constituidos por guías de sección transversal arbitraria. A continuación se analizarán algunos ejemplos conocidos en la literatura que comprobarán la validez y la eficiencia de nuestro simulador, y finalmente para concluir se analizarán nuevos tipos de dispositivos como filtros de modo dual y paso bajo en guía coaxial, un filtro paso banda de modo evanescente, y un nuevo girador de polarización.

5.3.1. Análisis de un dispositivo constituido por dos cavidades circulares acopladas a través de un iris elíptico

El primer ejemplo que consideraremos es un dispositivo constituido por dos cavidades circulares acopladas a través de un iris elíptico y alimentadas a las guías de entrada y salida a través de dos iris rectangulares (ver figura 5.8).

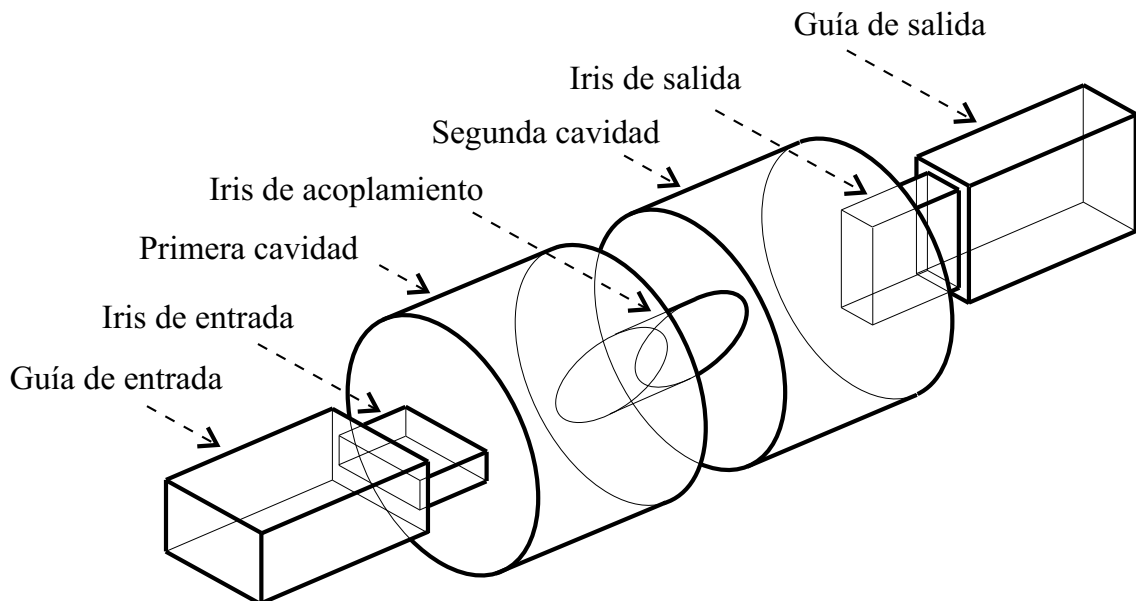


Figura 5.8. Prototipo con dos cavidades en guía circular (de radio 11,70 mm y longitud 100 mm) acopladas a través de un iris elíptico (semiejes 9,0 mm y 7,0 mm, ángulo de rotación 45° y longitud 0,95 mm) y conectadas a las guías de entrada y salida (WR-75) por dos iris rectangulares (iris de entrada: 18,0 mm × 1,10 mm y longitud 0,50 mm; iris de salida: 1,10 × 14,10 mm, y longitud 0,50 mm).

Como se puede ver en la figura 5.8, en la cual se expone detalladamente todas las dimensiones geométricas, la función del dispositivo es la de girar la polarización de la señal de en-

trada 90° . Para cumplir con este objetivo se han utilizados dos cavidades circulares para excitar dos modos ortogonales y linealmente independientes; un iris elíptico rotado 45° para acoplar los dos modos ortogonales de la cavidad circular, y por último dos iris rectangulares para garantizar el acoplo con la guía de entrada y la guía de salida rotada 90° respecto a la de entrada. El coeficiente de trasmisión obtenido para este dispositivo se compara en la figura 5.9 con los resultados experimentales publicados en [47], obteniendo una concordancia de resultados muy elevada entre simulaciones y medidas.

Para obtener estos resultados, la implementación de la técnica basada en la ecuación integral ha requerido un total de 10 modos accesibles, 40 funciones base por guía, y 400 términos del kernel para resolver cada discontinuidad. El análisis completo de este dispositivo, incluyendo el análisis modal de todas la guías arbitrarias que lo componen, ha requerido 0,3 segundos por punto en frecuencia, habiendo empleado 1000 puntos en la banda de frecuencias comprendida entre 10 y 15 GHz.

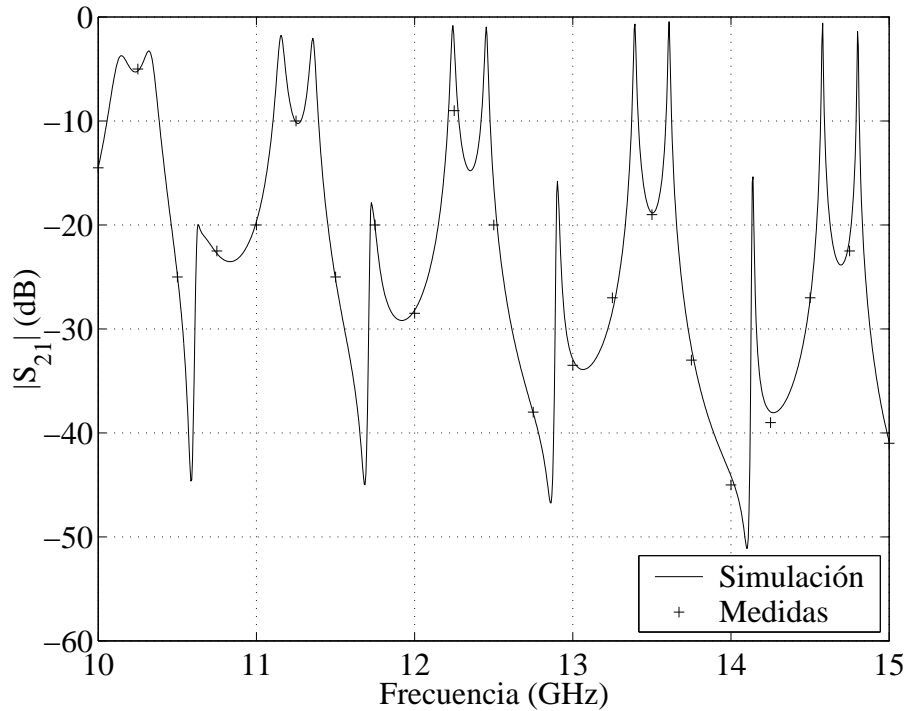


Figura 5.9. Módulo del coeficiente de trasmisión S_{21} del dispositivo mostrado en la figura 5.8, comparado con los resultados de las medidas publicadas en [47].

5.3.2. Análisis de un filtro paso banda en guía rectangular con ventanas de acoplo inductivas y tornillos de sintonía

Los filtros paso banda en guía rectangular con ventanas inductivas encuentran aplicación en el equipamiento utilizado en radioenlaces, en los cuales cada usuario individual utiliza una pequeña porción de la misma banda general de frecuencias. Para sintonizar la respuesta en una

determinada banda de frecuencias preservando un cierto ancho de banda se utilizan tornillos de sintonía. Normalmente estos tornillos de sintonía vienen simulados utilizando penetraciones cuadradas (guías *ridge*) que son más fáciles de caracterizar electromagnéticamente y producen, al variar la profundidad de penetración, el mismo efecto en obtener la respuesta paso banda del filtro [75].

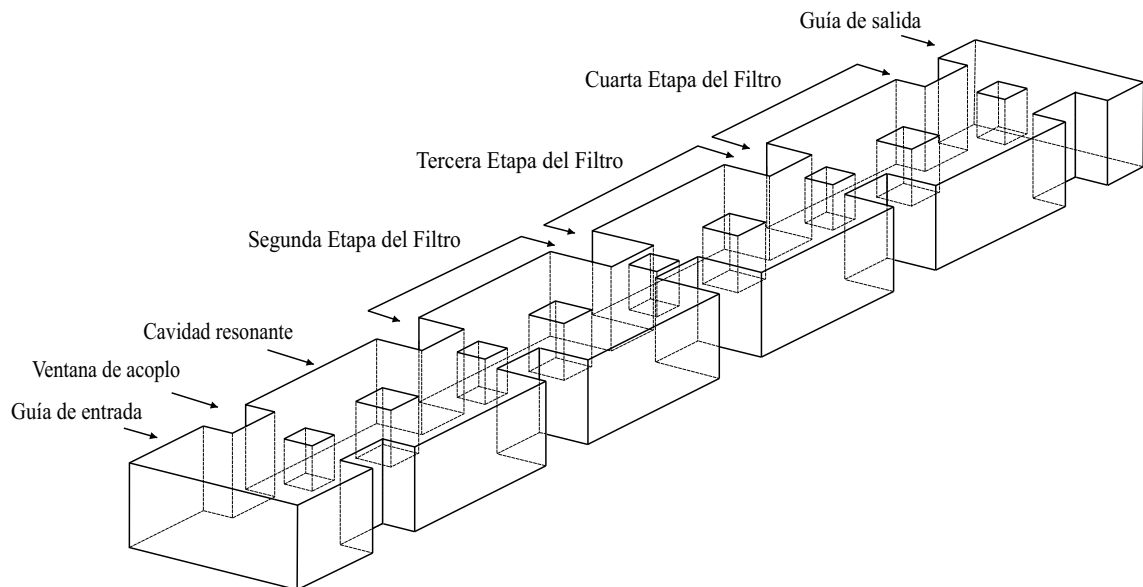


Figura 5.10. Filtro pasa banda simétrico de 4 polos, implementados en guía rectangular con ventanas de acoplo inductivas y tornillos de sintonía [46].

El filtro analizado, representado en la figura 5.10, es un filtro paso banda simétrico de 4 polos, con una respuesta centrada en 11 GHz y de ancho de banda de 300 MHz [46]. El filtro, implementado en guía rectangular con ventanas inductivas, presenta en cada etapa una penetración cuadrada en la ventana de acoplo para el ajuste de los niveles de acoplamiento, y otra penetración en la cavidad rectangular para el ajuste de las frecuencias de resonancia. Las guías de entrada y salida, así como las cavidades resonantes, se corresponden con guías normalizadas WR-75 ($a = 19,05$ mm y $b = 9,525$ mm); mientras que todas las ventanas de acoplo, al presentar un carácter inductivo, tienen la misma altura constante de 9,525 mm y longitud de 2,0 mm. En cuanto a las anchuras de las diferentes ventanas de acoplo inductivas y las longitudes de las cavidades resonantes, se han elegido los valores representados en la tabla 5.2, dimensiones escogidas después de un proceso de optimización sin utilizar elementos de sintonía en el filtro que se detalla en [75] y [76].

Hay que especificar que en la tabla 5.2 tan sólo se muestran las dimensiones de dichos parámetros para la mitad de la estructura (tres ventanas de acoplo y dos cavidades resonantes), debido a que el filtro es simétrico. Los elementos de sintonía presentan una sección transversal cuadrada de lado igual a 2,0 mm para las penetraciones en las ventanas de acoplo y de 4,00 mm para las penetraciones en las cavidades resonantes. Los valores de penetración de los elementos de sintonía han sido optimizados diseñando cavidad tras cavidad (junto con sus correspondientes ventanas de acoplo de entrada y salida) comparando la respuesta electromagnética de la

Guía utilizada	Anchura (mm)	Longitud (mm)
1ª ventana	10,52	2,00
1ª cavidad	19,05	15,68
2ª ventana	7,098	2,00
2ª cavidad	19,05	17,605
3ª ventana	6,52	2,00

Tabla 5.2. Dimensiones de las ventanas de acoplo inductivas y de las cavidades resonantes que integran el filtro inductivo de la figura 5.10.

estructura real con la que presenta una red ideal, cuya respuesta global coincide con aquella deseada (ver [75] y [76]). Estos valores se muestran en la tabla 5.3 donde también se muestra sólo las dimensiones de los elementos de sintonía situados en la primera mitad de la estructura básica, debido a la simetría física de la estructura.

Elemento de Sintonía	Penetración (mm)	Anchura (mm)	Longitud (mm)
1ª ventana	3,366	2,00	2,00
1ª cavidad	3,298	4,00	4,00
2ª ventana	4,078	2,00	2,00
2ª cavidad	2,972	4,00	4,00
3ª ventana	3,570	2,00	2,00

Tabla 5.3. Dimensiones de las penetraciones de los elementos de sintonía situados en las ventanas de acoplo y en las cavidades de la estructura para centrar la respuesta a 11 GHz.

En la figura 5.11 se representan los parámetros de dispersión del filtro analizado, aprovechando la simetría³ respecto del eje y en el cálculo de los modos de las guías que componen la estructura mediante la técnica BI-RME y en el análisis de las transiciones mediante la técnica de la ecuación integral. Para conseguir estos resultados convergentes, se ha requerido un total de 15 modos accesibles, 40 funciones base por guía, y 200 elementos del kernel por cada discontinuidad. Los resultados se han obtenido en sólo 24 segundos, es decir 0,04 segundos por punto en frecuencia. En la figura 5.11 se muestran estos resultados comparados con los publicados en la referencia [46].

5.3.3. Análisis de un filtro inductivo en guía rectangular con esquinas redondeadas

Las actuales técnicas de fabricación de dispositivos de microondas en guía rectangular, como por ejemplo el fresado controlado por ordenador o la electroerosión, introducen internamente esquinas redondeadas debido que en la práctica resulta complicado y costoso realizar ángulos rectos [77]. Si se pudiera tener en cuenta estos efectos en la fase de análisis y diseño se podría

³En el capítulo 4 se indica cómo generar los modos a utilizar en presencia de simetría.

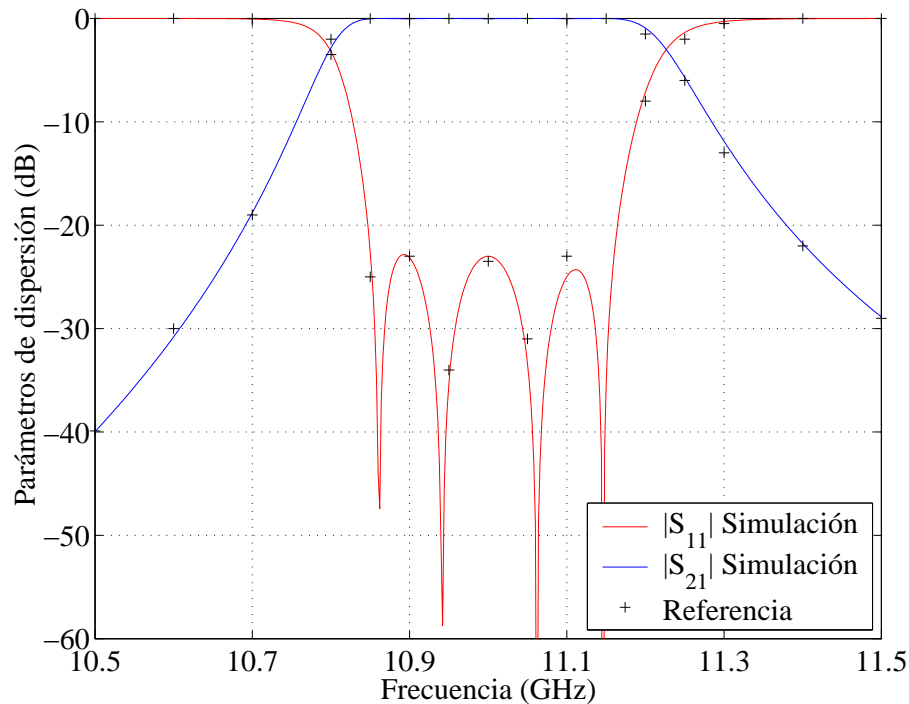


Figura 5.11. Parámetros de dispersión del filtro paso banda simétrico de 4 polos, implementado en guía rectangular con ventanas de acoplo inductivas y tornillos de sintonía representado en la figura 5.10; los resultados dibujados con cruces son los resultados publicados en [46].

mejorar mucho la precisión, los tiempos de desarrollo y el coste de fabricación del dispositivo. Normalmente para simular el efecto de curvatura se suele emplear un modelo escalonado y aproximativo [78], y aplicar la técnica de la adaptación modal (en inglés *Mode-Matching*) [79]. Utilizando la técnica BI-RME descrita en el capítulo 2 se puede analizar de forma rigurosa y eficiente este tipo de estructuras modelando las esquinas redondeadas mediante arcos de circunferencias de amplitud angular igual a 90° . En este apartado se analizará un filtro inductivo en guía rectangular con esquinas redondeadas en la sección transversal de todas las guías [7] representado en la figura 5.12. Para superar los inconvenientes de las técnicas de fabricación que suelen ser llamadas “corte en plano H” y “corte en el plano E”, que producen altas pérdidas o son muy complejas de analizar, en [7] se ha propuesto una nueva técnica de fabricación modular, en la cual se construye el filtro a base de piezas individuales como las mostradas en la figura 5.13. El límite de las piezas se define justo en el centro de cada cavidad del filtro, y por tanto cada pieza consta de dos medias cavidades y una ventana de acoplo. De esta forma se minimizan las discontinuidades en las corrientes superficiales de la estructura, debido a que estas, si cada cavidad tiene longitud $\lambda_g/2$, serán paralelas al plano de corte y nunca perpendiculares. Con esta nueva técnica de fabricación se producen pues esquinas redondeadas, determinadas por las tolerancias del proceso de mecanizado, tanto en las cavidades como en las ventanas de acoplo del filtro.

El filtro analizado (ver figura 5.12), es un filtro paso banda de tipo Chebyshev con 4 cavi-

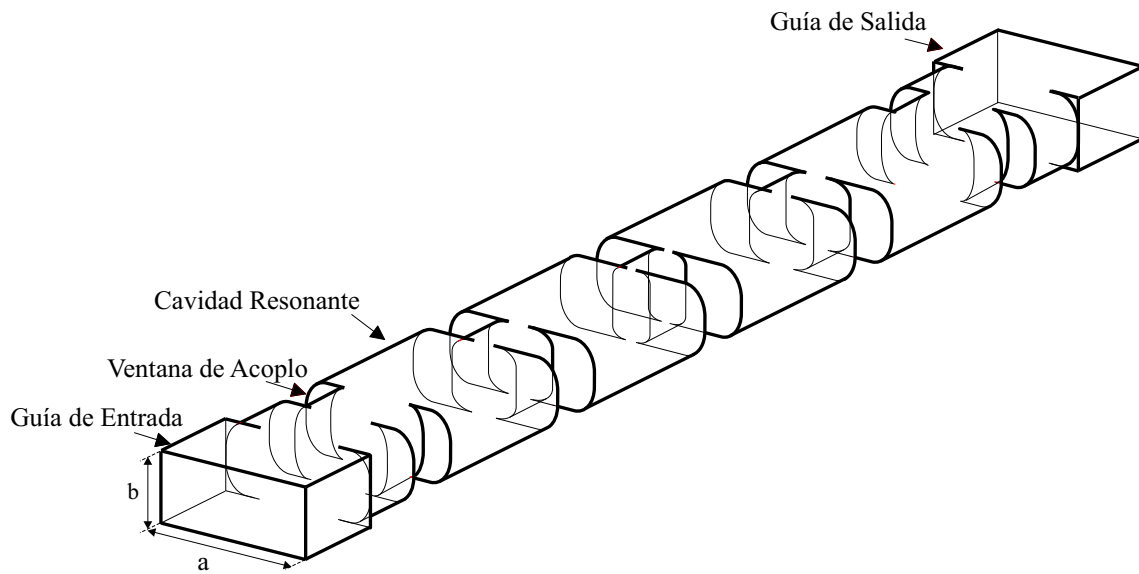


Figura 5.12. Filtro inductivo simétrico de 4 polos, implementado en guía rectangular con esquinas redondeadas en la sección transversal de las guías.

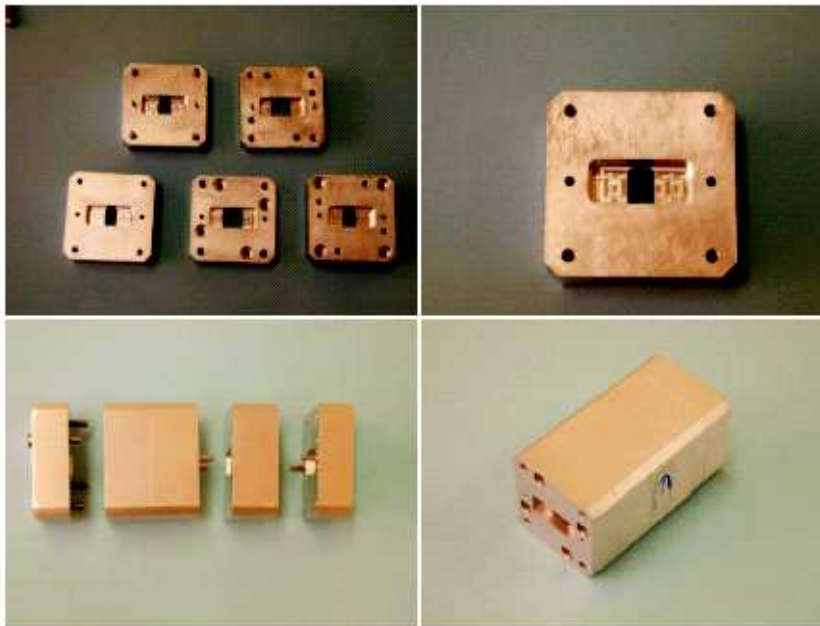


Figura 5.13. Filtro inductivo con esquinas redondeadas. *Parte superior:* aspecto de las piezas individuales. *Abajo a la izquierda:* proceso de ensamblaje. *Abajo a la derecha:* aspecto final del filtro.

dades o polos, centrado a una frecuencia de 11 GHz, con un ancho de banda de 300 Mhz. La estructura presenta todas las esquinas redondeadas con un radio de curvatura constante de 2 mm,

las longitudes de las cavidades y de las ventanas de acoplo inductivo han sido obtenidas después de un proceso de optimización [7] y tienen las dimensiones resumidas en la tabla 5.4. En el proceso de diseño, expuesto en [7], se ha utilizado un método de segmentación que consiste en diseñar el filtro cavidad por cavidad [76]. Para ello, se escoge primero una sola cavidad, se ajustan las longitudes de la cavidad y de las ventanas de acoplo de entrada y salida, luego se añade una cavidad y se optimizan de nuevos los parámetros, y así sucesivamente hasta llegar al filtro completo.

Guía	Anchura (mm)	Altura (mm)	Longitud (mm)
1 ^a (Entrada)	22,86	10,16	10,00
2 ^a (Redondeada)	22,86	10,16	4,00
3 ^a (1 ^a Ventana)	10,50	10,16	1,70
4 ^a (1 ^a Cavidad)	22,86	10,16	14,29
5 ^a (2 ^a Ventana)	6,70	10,16	1,77
6 ^a (2 ^a Cavidad)	22,86	10,16	15,844
7 ^a (3 ^a Ventana)	6,15	10,16	1,782

Tabla 5.4. Dimensiones de las guías empleadas en el filtro inductivo con esquinas redondeadas. El filtro es simétrico y por tanto se definen sólo las dimensiones de la mitad del filtro.

En la figura 5.14 se muestran los parámetros de dispersión del filtro analizado con la herramienta de simulación comparados con medidas experimentales de un prototipo fabricado. Dichas medidas se han realizado con un analizador de redes de la serie HP8510C que dispone el Grupo de Aplicaciones de Microondas (GAM) después de emplear una calibración TRL estándar en guía WR-90.

Para obtener los resultados de la figura 5.14, se han explotado los dos ejes de simetría que presenta el filtro, se han utilizado 5 modos accesibles, 30 funciones base, y 80 elementos en el kernel por cada discontinuidad. Las medidas del prototipo confirman la validez de los resultados teóricos obtenidos con la herramienta en sólo 16 segundos, habiendo empleado 500 puntos en la banda de frecuencias comprendida entre 10,5 y 11,5 GHz. Para una comparación, si no se hubiera explotado los dos ejes de simetría del filtro estos mismos resultados se habrían obtenido en casi 8 minutos.

5.3.4. Análisis de un filtro de modo dual de banda estrecha en guía elíptica

Los filtros de modo dual se emplean asiduamente en la carga útil de los satélites de comunicaciones debido principalmente a la mayor selectividad, menor tamaño y por consiguiente menor masa, que dichos filtros presentan en comparación con aquéllos donde tan sólo se excita un único modo por cavidad resonante [80]-[83]. En la configuración básica de un filtro paso banda de modo dual, cada una de las cavidades resonantes debe soportar dos modos ortogonales y linealmente independientes excitados de manera simultánea. Así pues, el número de cavidades resonantes requeridas para implementar un filtro se reduce a la mitad del orden de su función de transferencia; lo que reduce considerablemente el tamaño y el peso de la implementación práctica del filtro. Una posible solución empleada para implementar filtros de modo dual utiliza

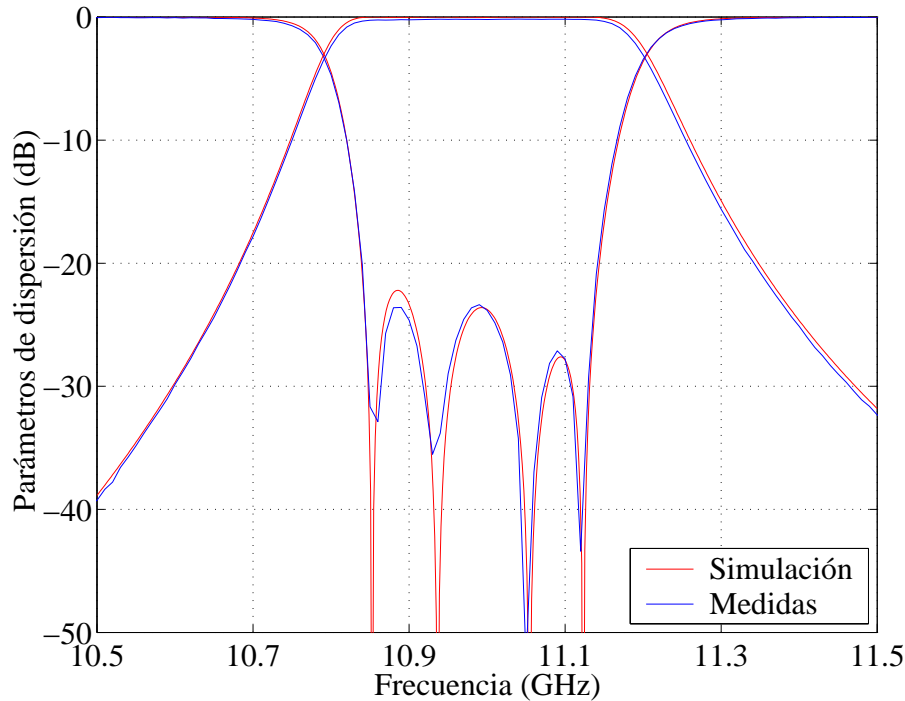


Figura 5.14. Parámetros de dispersión del filtro inductivo de 4 polos con esquinas redondeadas. En rojo se muestran los resultados simulados, en azul las medidas experimentales.

iris rectangulares para conseguir los niveles de acoplo de entrada y salida requeridos, iris en forma de cruz para proporcionar niveles de acoplo desiguales entre las parejas de modos duales situados en cavidades adyacentes, y tornillos de sintonía para obtener los acoplos entre los modos duales dentro de cada cavidad [84]. Además, para conseguir que los modos resuenen a la misma frecuencia de resonancia en todas las cavidades se necesitan tornillos de sintonía adicionales que permitan controlar de manera independiente la frecuencia de resonancia asociada a cada modo. De esta manera, se concluye que un filtro paso banda de modo dual precisará de al menos tres tornillos de sintonía en cada cavidad; cuyo ajuste debe realizarse manualmente mediante un proceso de sintonía experimental bastante arduo y costoso. Adicionalmente, la presencia de tornillos de sintonía en estas implementaciones reduce considerablemente la capacidad de potencia que pueden manejar los filtros de modo dual.

Con el objeto de reducir el esfuerzo computacional requerido por el análisis riguroso de los tornillos de sintonía empleados en los filtros de modo dual, se han propuesto diferentes soluciones alternativas; las cuales básicamente sustituyen los tornillos de sintonía por tramos de guías uniformes cuyas secciones transversales están perturbadas, para de esta forma conseguir los mismos efectos que producen los tornillos de sintonía dentro de cada cavidad. Así por ejemplo, en [2] se propone sustituir los tornillos de sintonía por un tramo uniforme de guía circular con reentrantes, que presenta tres inserciones metálicas situadas en las mismas posiciones que ocupaban los tornillos de sintonía y se analiza el filtro con el método de los elementos finitos. En [1] el acoplo entre modos duales situados dentro de cavidades, de sección transversal cuadra-

da, se consigue suprimiendo una de sus esquinas; sustituyendo así el tornillo tradicionalmente utilizado para conseguir el citado acoplo, y eliminando por tanto los esfuerzos requeridos en la sintonía de dicho tornillo.

Al final de los años 90 aparecieron nuevas geometrías alternativas de filtros de modo dual que pretenden eliminar en las implementaciones de dichos filtros cualquier tramo de guía con sección transversal perturbada; de esta forma, el análisis y el diseño de los mencionados filtros puede realizarse en tiempos adecuados empleando métodos tradicionales, como el de la adaptación modal (*Mode-Matching*). La primera de estas nuevas implementaciones proponía filtros en los cuales el acoplo entre los dos modos de la cavidad circular se consigue rotando el iris de acoplo de salida y la guía rectangular de salida un cierto ángulo respecto a la cavidad de la estructura [85]. El paso final fue implementar el filtro con la conexión en cascada de tramos uniformes de guías circulares y guías elípticas [47, 86]; donde las guías circulares representan las cavidades resonantes de los filtros, y las guías elípticas se utilizan para implementar el acoplo entre cavidades adyacentes y entre modos duales dentro de cada cavidad.

En este apartado se analiza mediante la herramienta informática desarrollada una nueva topología de filtro de modo dual de banda estrecha centrado a 12 GHz, propuesta en [9], utilizando guías elípticas como cavidades resonantes. Los autores afirman que utilizando cavidades elípticas rotadas un cierto ángulo respecto a la guía de entrada y salida, se puede obtener un factor de calidad más elevado, una mayor capacidad de manejo de potencias elevadas y una facilidad en el análisis y diseño de la estructura. En particular la estructura entera, representada en la figura 5.15, ha sido analizada y diseñada en [9] mediante la técnica de adaptación modal (*Mode-Matching*) caracterizando las guías elípticas que forman las cavidades con funciones de Mathieu.

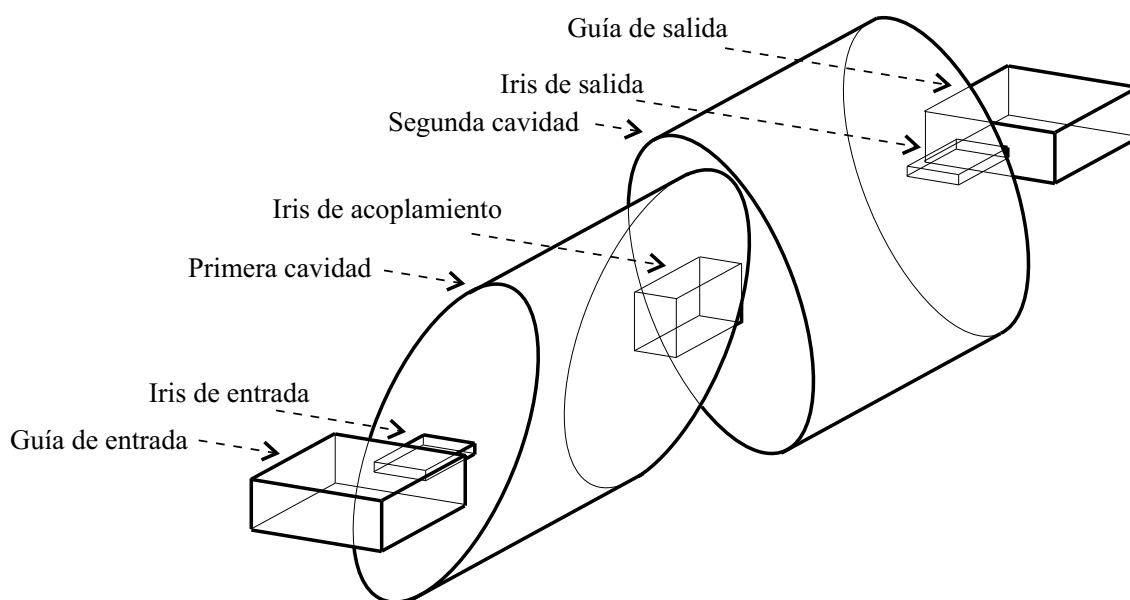


Figura 5.15. Filtro de modo dual con cavidades resonantes en guía elíptica, e iris de acoplo en guía rectangular.

Como se puede ver en la figura 5.15, la estructura está compuesta por dos cavidades elípticas acopladas mediante un iris rectangular, y por otros dos iris rectangulares que acoplan las cavidades a las guías de entrada y salida. Inclinando las cavidades resonantes respecto a las guías de entrada y salida, y seleccionando una correcta proporción entre el eje mayor y el eje menor de las guía elípticas que forman las cavidades se obtienen niveles de acoplo adecuados sin utilizar elementos de sintonía. Entrando en detalles geométricos, las guías de entrada y salida son guías WR-75 ($19,05 \text{ mm} \times 9,525 \text{ mm}$), las dimensiones del iris de acoplo con la guía de entrada y salida son $9,91 \times 2,0 \text{ mm}$, y su longitud $2,0 \text{ mm}$. Las dos cavidades elípticas tienen un semieje mayor de $11,0 \text{ mm}$, un semieje menor de $10,50 \text{ mm}$ y longitud $16,62 \text{ mm}$. La primera cavidad está rotada $81,46^\circ$ respecto a la guía de entrada o al eje horizontal; la segunda cavidad tiene la misma rotación pero en el sentido opuesto respecto al eje horizontal ($-81,46^\circ$ o igualmente $98,54^\circ$). De esta forma se generan ceros de transmisión y la respuesta del filtro es elíptica. El iris central de acoplo entre las dos cavidades tiene dimensiones $3,50 \text{ mm} \times 4,98 \text{ mm}$, y longitud $1,0 \text{ mm}$.

Utilizando la herramienta informática, basada en el método BI-RME para la caracterización modal de guías de sección transversal arbitraria y en la técnica de la ecuación integral para caracterizar transiciones que involucran este tipo de guías, el análisis de la estructura entera se realiza de manera rápida y eficiente. Los coeficientes de reflexión y transmisión obtenidos se comparan en la figura 5.16 con los publicados en [9]. Se puede observar una buena aproximación entre los resultados simulados y los proporcionados en [9], así como una pequeña diferencia en los valores del coeficiente de transmisión a bajas frecuencias; diferencia que disminuye si se comparan las simulaciones con las medidas de un prototipo fabricado que también aparecen en [9]. Para alcanzar resultados convergentes en nuestro simulador electromagnético, se han tenido que emplear en la ecuación integral 7 modos accesibles, 20 funciones base y 400 elementos del kernel. Debido a la complejidad de la estructura, para obtener la respuesta del dispositivo ha sido necesario un esfuerzo computacional de $7,2$ segundos por punto en frecuencia.

5.3.5. Análisis de un filtro pasa banda en guía circular con iris elípticos

En el presente apartado se ha analizado un filtro de modo dual paso banda con una nueva configuración originalmente propuesta en [75]. En la figura 5.17 se muestra la geometría del filtro constituido por dos cavidades (4 polos), simétrico y en el que los acoplos entre cavidades y guías se obtienen mediante iris de sección transversal elíptica. Para comprender mejor el funcionamiento de la nueva estructura de filtro de modo dual, y concretamente cómo se consiguen los niveles de acoplo precisados en este tipo de filtros mediante iris elípticos, vamos a describir la función de cada uno de estos iris. El primer y el último iris sirven para los acoplos de entrada y salida que normalmente suelen ser, en la forma clásica del filtro de modo dual, en guía rectangular, si bien en este caso se han utilizado iris elípticos. El iris rotado 45° sirve para obtener el acoplo entre modos duales dentro de cada cavidad dado que los dos modos incidentes con polarizaciones ortogonales intercambian energía entre ellos al atravesarlo. El tercer iris presente en la figura 5.17, situado en cada una de las dos cavidades, implementa el ajuste frecuencial independiente para cada modo. El ajuste será independiente porque los dos modos ortogonales

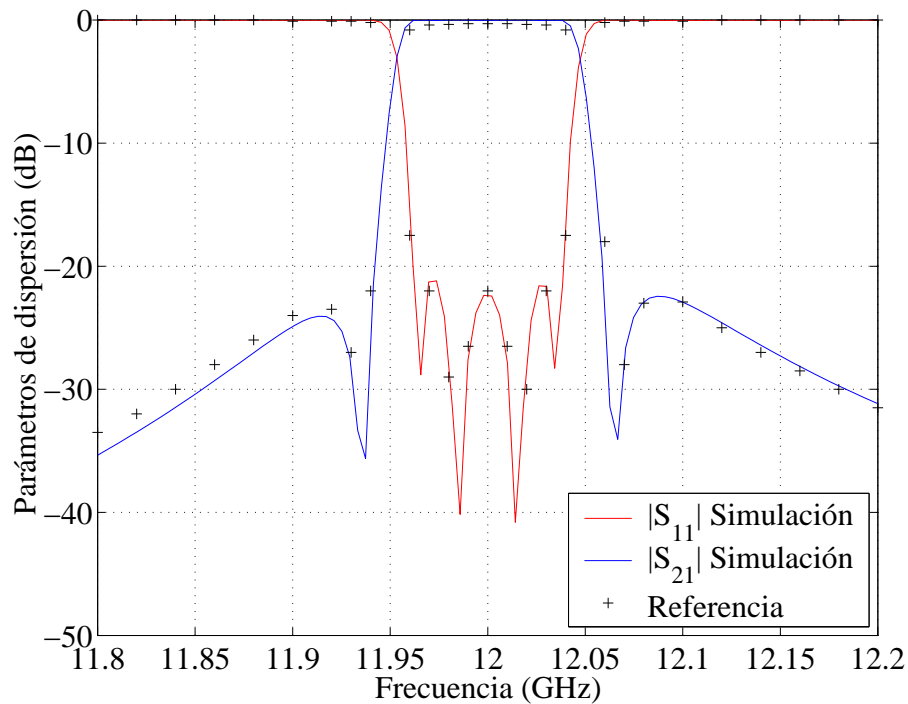


Figura 5.16. Parámetros de dispersión del filtro de modo dual con cavidades elípticas representado en la figura 5.15. Las cruces indican los resultados publicados en [9].

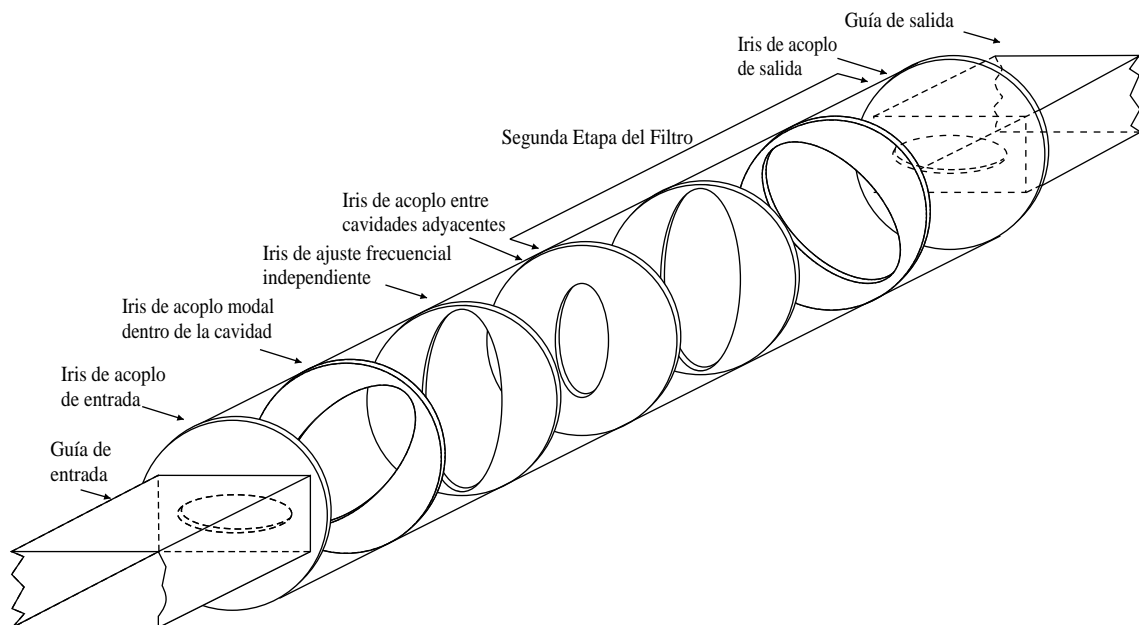


Figura 5.17. Filtro de modo dual en guía circular de 4 polos, simétrico y con todos los iris de acoplamiento en guía elíptica.

al atravesar este iris presentarán diferentes fases. Asimismo, el acoplo que necesita cada pareja de modos duales situados en cavidades adyacentes, implementado tradicionalmente mediante iris en forma de cruz o iris rectangulares, puede obtenerse empleando también un iris elíptico (el cuarto de la figura 5.17). En cuanto a la simetría de la configuración del filtro, ésta hace referencia a que las dimensiones y la orientación de los iris elípticos presentan idénticos valores en las dos mitades en la que puede dividirse el filtro, a excepción de la rotación (45° y -45°) de los iris elípticos de acoplo modal situados dentro de cada cavidad. Las orientaciones de estos dos iris, desplazadas 90° una respecto de la otra, implementan una realimentación negativa entre las dos cavidades adyacentes, de modo que la respuesta paso banda del filtro de modo dual sea elíptica (2 ceros de transmisión, tal y como se detalla en [1] y [82]).

En el diseño de este filtro de modo dual, cuya respuesta paso banda con ancho de aproximadamente 200 MHz pretende centrarse en torno a 11 GHz, se ha empleado un procedimiento en el cual se divide y diseña la estructura global en sucesivas etapas utilizando un número limitado de parámetros físicos a optimizar en cada etapa [75]. Como guías de entrada y salida se han utilizado guías rectangulares WR-75 ($19,05 \text{ mm} \times 9,525 \text{ mm}$), y como cavidades resonantes guías circulares de diámetro 24,00 mm. Las dimensiones de todos los iris elípticos (eje mayor, eje menor, y grosor), así como la longitud de cada uno de los tramos de guía circular que forman las cavidades han sido obtenidos después de un proceso sucesivo en el cual se optimiza cavidad tras cavidad (junto con los iris elípticos) y considerando en principio únicamente un solo modo dual [76]. Posteriormente, considerando los acoplos requeridos entre los modos duales de cada cavidad, se vuelven a optimizar los valores deducidos anteriormente obteniendo de esta forma las dimensiones óptimas de la estructura. Tras implementar el proceso de diseño descrito en [75], se ha obtenido que todos los tramos de guía circular en los que se divide cada una de las dos cavidades resonantes deben presentar la misma longitud de 5,499 mm, mientras que los valores de las dimensiones de los diferentes iris elípticos se encuentran resumidos en la tabla 5.5.

Iris Elíptico	Eje Mayor (mm)	Eje Menor (mm)	Grosor (mm)
acoplo entrada/salida	12,78	4,00	1,73
acoplo modos duales	24,00	21,00	0,50
ajuste frecuencial	24,00	20,414	0,60
acoplo cavidades	8,70	4,00	1,515

Tabla 5.5. Dimensiones de los iris elípticos del filtro de modo dual mostrado en la figura 5.17.

En la figura 5.18 se representa la simulación de la respuesta electromagnética del filtro obtenida con nuestro programa y los resultados (las cruces) obtenidos mediante un programa comercial llamado DUMAS 3.0 [75]. Dicho programa utiliza matrices de admitancias generalizadas en la caracterización de las diferentes uniones planares que componen el filtro, y calcula los modos de la guía elíptica transformando la ecuación de Helmholtz en coordenadas elípticas en un problema algebraico de autovalores [47], evitando así el uso de funciones de Mathieu que son poco eficientes desde el punto de vista computacional. La simulación del filtro ha requerido en nuestra simulación valores muy elevados para obtener resultados convergentes, y causados por la enorme complejidad de la estructura (15 discontinuidades); en particular en la simula-

ción se han utilizados 100 modos accesibles, 300 funciones base, y 750 elementos del kernel. El tiempo necesario para obtener la respuesta del filtro en la banda de frecuencias entre 10 y 12 GHz ha sido de 11 segundos por punto en frecuencia (en total 500 puntos).

Observando la respuesta del filtro en la figura 5.18 se puede ver como la banda de paso está centrada en una frecuencia muy próxima a 11 GHz con un ancho frecuencial de aproximadamente 200 MHz. Se comprueba también la existencia de 4 polos en las pérdidas de retorno y de 2 ceros de transmisión tal y como corresponde a una respuesta elíptica. Asimismo, se puede ver que la condición de igual nivel para todos los picos de las pérdidas de retorno (parámetro S_{11}) en la banda de paso está un poco degradada, debido a los efectos de dispersión que tienen lugar en las cavidades e iris del filtro; aunque los niveles de todos estos picos se mantienen siempre por encima de 20 dB en toda la banda de paso, como conviene en este tipo de filtros.

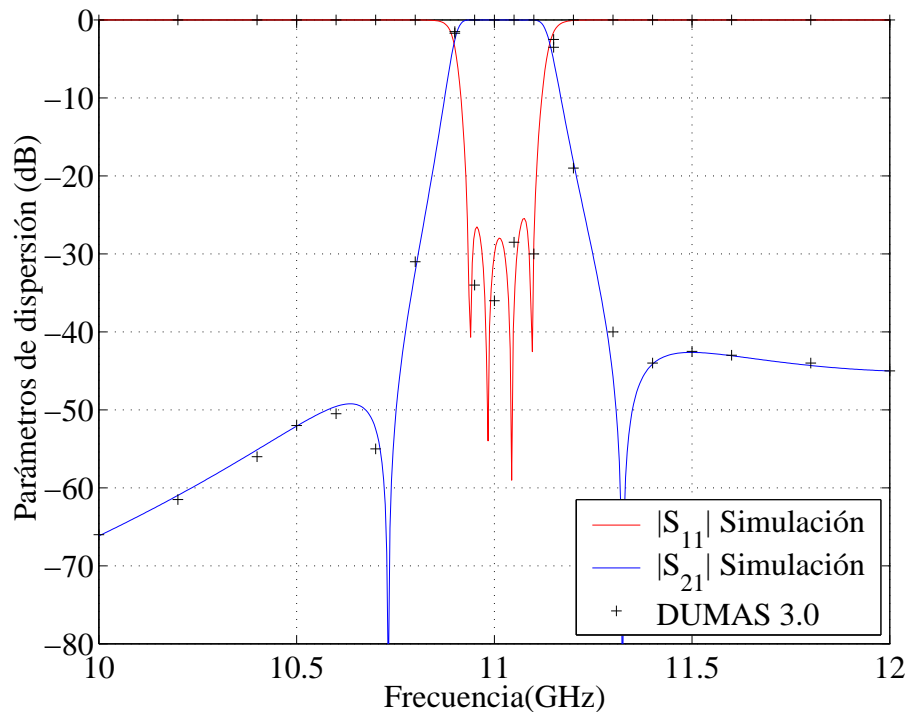


Figura 5.18. Parámetros de dispersión del filtro de modo dual representado en la figura 5.17. En línea continua se muestran los resultados obtenidos con la herramienta desarrollada, en cruces los resultados del programa comercial DUMAS 3.0 (ver [75]).

5.3.6. Análisis de un filtro paso bajo en guía coaxial

Las guías coaxiales se han utilizado extensamente en el diseño de dispositivos de microondas. Este tipo de guías se pueden encontrar en transformadores de impedancias, en acopladores, y en filtros paso bajo [87] por su facilidad de manejo de señales de alta potencia. Las guías coaxiales clásicas están constituidas por dos conductores circulares concéntricos y se pueden caracterizar fácilmente; por el contrario las guías coaxiales constituidas por un conductor circular interno y

una guía rectangular metálica (*housing*) no se analizan tan fácilmente. Esta última geometría de guía coaxial es particularmente interesante por sus características geométricas y eléctricas, en cuanto que es fácil de fabricar y presenta bajas pérdidas.

De entre las diferentes y numerosas técnicas que se han utilizado para analizar este tipo de guías se encuentran el método de adaptación modal (*Mode-Matching*) [88], métodos en el dominio espectral [89], y elementos finitos. Sin embargo la mayor parte de estas técnicas no consideran el efecto de los modos de orden superior cuando se consideran transiciones entre este tipo de guías. En [77] se ha utilizado una técnica híbrida para analizar dispositivos basados en guía coaxial, pero tampoco esta técnica mejora mucho la eficiencia del método de análisis. En la literatura técnica se conocen pocas herramientas dedicadas al análisis de transiciones coaxiales mediante representación multimodales; y la gran mayoría de éstas consideran sólo guías coaxiales clásicas [52].

Aprovechando el método BI-RME extendido en esta tesis, así como el método de la ecuación integral, se ha podido realizar, en colaboración con el Centro Europeo de Tecnología e Investigación Espacial de la Agencia Espacial Europea (ESA/ESTEC), un programa dedicado al análisis y diseño de filtros paso bajo en guía coaxial. La herramienta desarrollada permite simular transiciones entre guías coaxiales de diferentes radios encerradas en un *housing* rectangular (llamaremos a estas guías coaxiales rectangulares) y alimentadas mediante guías coaxiales circulares⁴. En las figuras 5.19 y 5.20 se muestran las secciones transversales de las dos guías presentes en los filtros. Las regiones en gris indican la zona en las guías donde se propaga el campo electromagnético, en las cuales puede haber medios dieléctricos distintos del vacío ($\epsilon_r \neq 1$). El programa desarrollado permite también simular filtros en los cuales tanto los conductores circulares internos a la guía rectangular (*housing*) como las guías coaxiales circulares presentan un desplazamiento respecto al centro del *housing*.

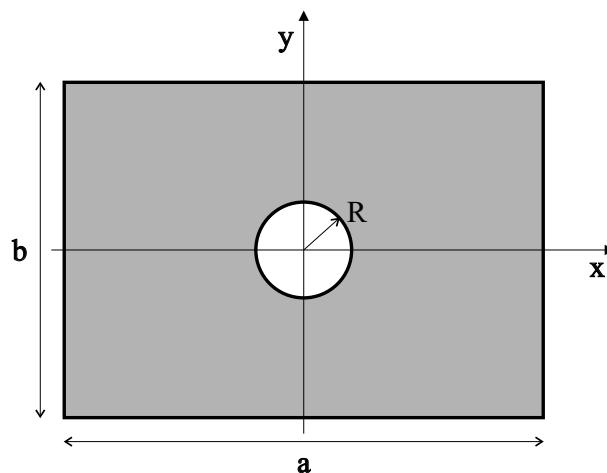


Figura 5.19. Sección transversal de la guía coaxial rectangular. En gris se muestra la región donde se propaga el campo electromagnético.

⁴Las guías coaxiales circulares están también encerradas en un *housing* rectangular para poderlas analizar con la técnica BI-RME desarrollada en esta tesis.

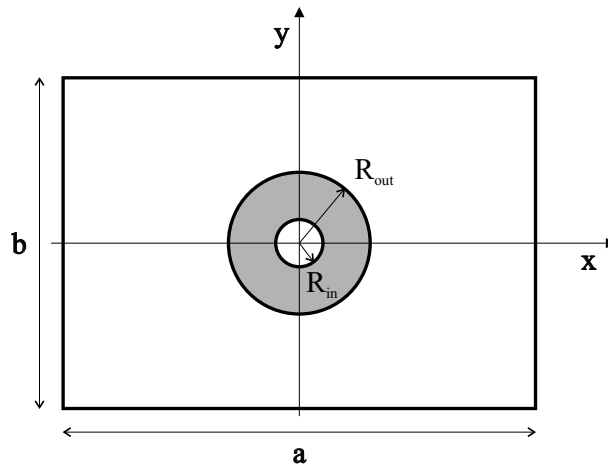


Figura 5.20. Sección transversal de la guía coaxial circular de entrada y salida del filtro. En gris se muestra la región donde se propaga el campo electromagnético.

En la figura 5.21 se puede ver la geometría de los filtros analizados, en este caso el filtro paso bajo está formado por las dos guías coaxiales circulares de entrada y salida, dos guías coaxiales rectangulares de adaptación (tienen el mismo radio interno que las guías coaxiales circulares de entrada y salida) y una guía coaxial rectangular de radio más grande. El número de guías coaxiales rectangulares presentes determina el orden del filtro.

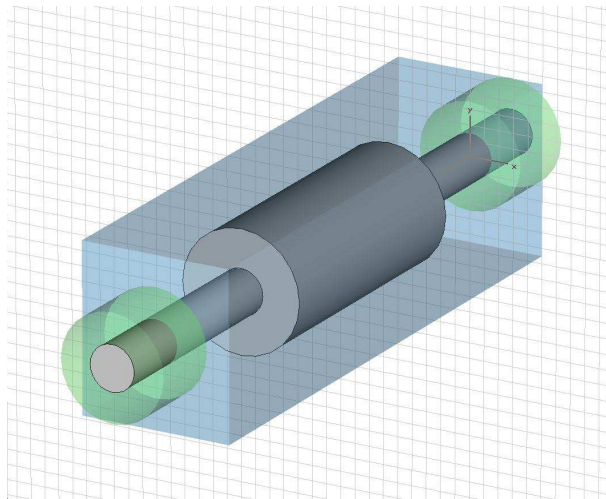


Figura 5.21. Filtro paso bajo de un polo.

Las guías de entrada y salida tienen un radio interno de 1,50 mm y externo de 3,50 mm, longitud 5,0 mm y constante dieléctrica $\epsilon_r = 2$; las guías coaxiales rectangulares de adaptación tienen un radio de 1,50 mm, longitud 10 mm y constante dieléctrica unitaria; la guía coaxial rectangular central tiene un radio de 4 mm, longitud 17,5 mm y constante dieléctrica unitaria. El *housing* para todas las guías es una guía rectangular de dimensiones 11,0 mm \times 10,00 mm.

Para validar los resultados obtenidos en la figura 5.22 se comparan los parámetros de dis-

persión del filtro analizado con la herramienta dedicada y el programa comercial HFSS v9.2 que se basa en la teoría de los elementos finitos. Como se puede ver, los resultados son muy similares, la diferencia se nota a la hora de valorar el tiempo necesario para el análisis. El tiempo necesario para simular el filtro con la herramienta dedicada, empleando 5 modos accesibles, 20 funciones base, 200 elementos del kernel, y 1600 modos en la expansión modal de las guías rectangulares que forman el *housing*, ha sido de casi 2 minutos (utilizando 1000 puntos en frecuencia). El tiempo necesario para analizar la estructura con HFSS v9.2 ha sido diez veces mayor. Esta diferencia se va ampliando cuanto más elevado es el orden del filtro y cuanto más compleja sea la estructura.

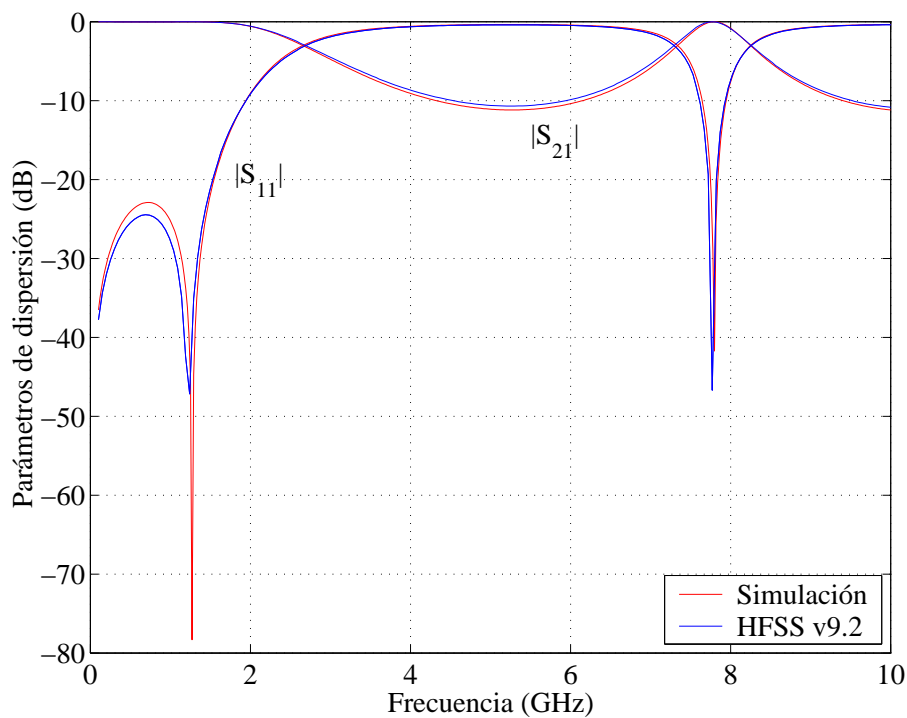


Figura 5.22. Comparación entre los parámetros de dispersión del filtro paso bajo en guía coaxial de la figura 5.21 obtenidos con una herramienta dedicada basada en el método BI-RME y con el programa comercial HFSS v9.2.

5.3.7. Análisis de un filtro de modo evanescente con respuesta paso banda

Los filtros de modo evanescente ofrecen algunas ventajas respecto al resto de filtros que se suelen utilizar en la carga útil de un satélite de telecomunicación. Estos filtros son de peso y dimensiones reducidas, menores que las de los filtros inductivos, y permiten bandas eliminadas muy amplias que pueden llegar incluso hasta frecuencias superiores al tercer armónico de la banda de paso [90]-[92]. Por otro lado presentan el inconveniente de unas pérdidas de inserción moderadas y que no soportan unos niveles de potencia elevados.

Respecto a las aplicaciones para las cuales pueden emplearse los filtros de modo evanescente, una de las más interesantes es, debido a las características que pueden conseguirse, su empleo en la etapa de recepción de señal de un satélite [49]-[51]. La primera etapa de un sistema de recepción tiene como objetivo seleccionar una de las bandas de recepción, aislándola lo máximo posible de otras bandas contiguas. Por ello, las características de un filtro de modo evanescente son apropiadas para el subsistema de recepción de señal. Además una de las restricciones de estos filtros, la modesta capacidad de manejo de potencia, no es inconveniente en este caso dado que la señal que llega a un satélite lo hace con una potencia bastante reducida.

De forma general, un filtro de modo evanescente está compuesto por tramos de guía de onda que están al corte en la banda de trabajo del filtro, y que actúan como inversores de impedancia, seguidos de tramos de guía que actúan como resonadores. Las configuraciones geométricas que se pueden emplear para implementar un filtro de modo evanescente son diversas. Los primeros diseños teóricos de este tipo de filtros fueron descritos en [90]-[92], donde se utilizaban postes circulares y tornillos para implementar los elementos resonantes. Posteriormente se introdujo en el diseño de los filtros de modo evanescente el uso de guías *ridge* para implementar los resonadores [93]-[99], obteniéndose prestaciones diferentes en cada caso. Una guía *ridge* tiene una frecuencia de corte para el modo fundamental mucho menor que una guía rectangular con la misma anchura y altura, siendo el ancho de banda para el cual la guía propaga únicamente el modo fundamental mayor que en el caso de la guía rectangular.

En la figura 5.23 se representa la configuración de los filtros de modo evanescente empleada, filtros formados por guías rectangulares al corte (en inglés *housing*) y guías rectangulares con dobles penetraciones (en inglés *ridge*), una en la pared superior y otra en la pared inferior.

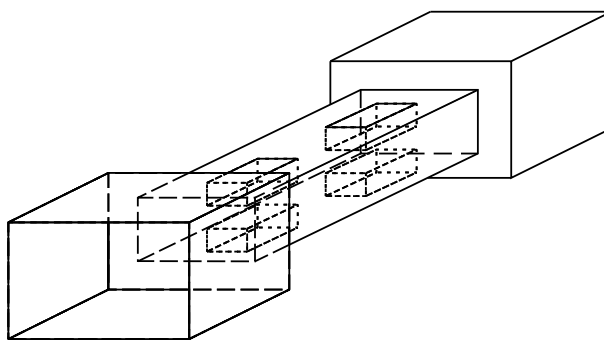


Figura 5.23. Geometría de un filtro de modo evanescente.

La discontinuidad formada entre la guía de modo evanescente y la guía *ridge*, debido a la inserción metálica, presenta un comportamiento capacitivo, dado que la componente de energía electromagnética almacenada alrededor de la misma es fundamentalmente de naturaleza eléctrica. Esta cualidad, junto con el hecho de que una sección de modo evanescente presenta una cierta inductancia, hace que la guía *ridge* se comporte como un resonador. Los tramos de guía rectangular en modo evanescente permiten el acoplo entre los diversos resonadores. Su comportamiento se modela como el de un inversor de impedancia. De esta forma, toda la estructura de un filtro de modo evanescente puede aproximarse a un modelo de filtro paso banda, formado por la sucesión de resonadores e inversores de impedancia [100].

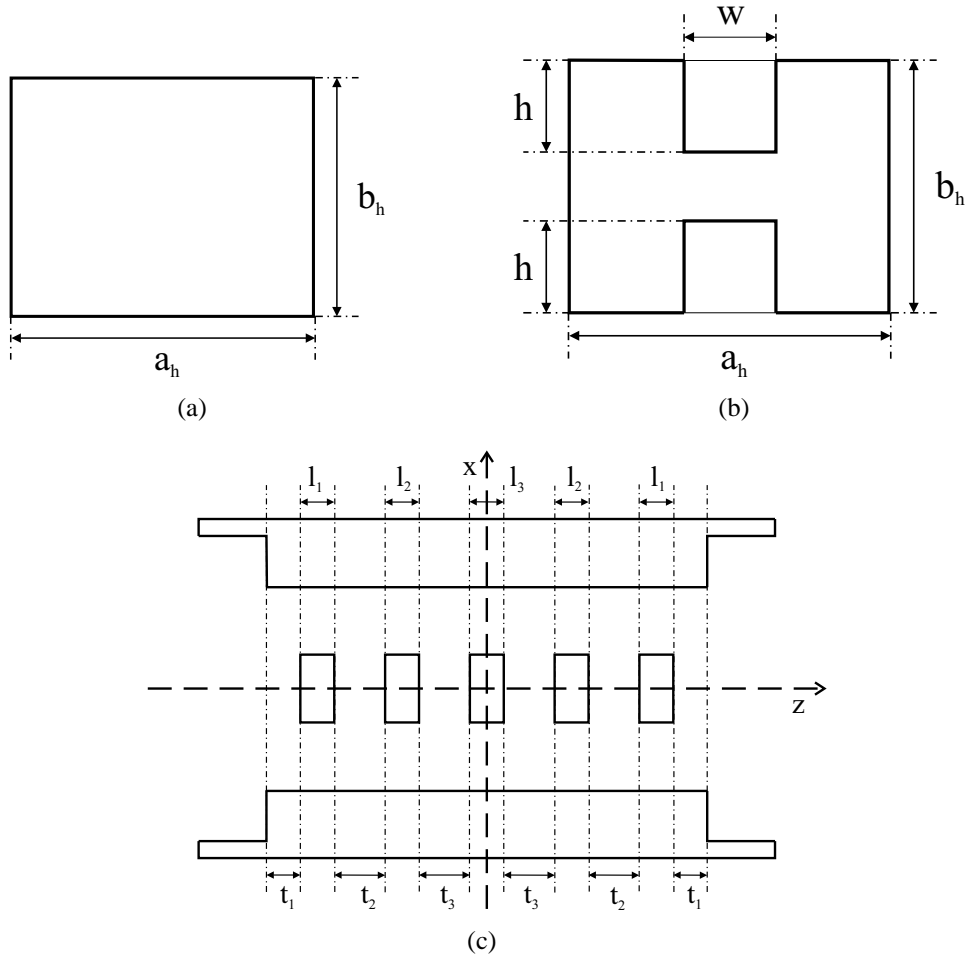


Figura 5.24. Parámetros geométricos de un filtro de modo evanescente: a) sección transversal de la guía al corte (*housing*), a_h y b_h representan la anchura y altura del *housing* ; b) sección transversal de las guías *ridge*, w y h representan la anchura y altura de las inserciones metálicas; c) sección longitudinal del filtro, las t_i representan las longitudes de los tramos de guía al corte, las l_i representan las longitudes de las inserciones metálicas.

Los parámetros geométricos de este tipo de filtros son la anchura y altura de las inserciones metálicas, la anchura y altura de la guía al corte (*housing*), las longitudes de los tramos de guía al corte, y las longitudes de las inserciones metálicas (ver figura 5.24). Utilizando propiamente estos parámetros se pueden controlar las principales características de los filtros, tales como la capacidad de manejo de potencia, las pérdidas de inserción, el ancho de banda y la posición de la primera frecuencia espúrea.

Vamos a ver un ejemplo de filtro de modo evanescente analizado mediante la herramienta informática desarrollada en esta tesis. El filtro que se ha analizado es un filtro paso banda simétrico con las siguientes especificaciones eléctricas:

Respuesta tipo Chebyshev (rizado de 0,015 dB en la banda de paso).

Orden del filtro igual a 6 (número de resonadores).

Ancho de banda relativo del 4 % (banda X: 8,070 – 8,420 GHz).

Guías entrada/salida: WR112 (28,50 mm × 12,620 mm).

Banda eliminada libre de espúreas hasta al menos 15 GHz.

Las dimensiones geométricas del filtro se recogen en la tabla 5.6. Se ha elegido un valor de anchura $a = 11,00$ mm y altura $b = 12,62$ mm del *housing* tales que el modo fundamental TE_{10} y el primer modo de orden superior TE_{12} entren en propagación a una frecuencia superior de los 15 GHz requeridos. Las dimensiones de las *ridge* se han elegido tal y como se indica en la tabla 5.6 de modo que los resonadores entren en propagación un poco antes de la banda de paso (en torno a 7 GHz).

N° de guía	Anchura (mm)	Altura (mm)	Longitud (mm)	Penetraciones	
				Anchura	Altura
1	28,50	12,62	10,00		
2	11,00	12,62	1,280		
3	11,00	12,62	5,434	4,00	4,60
4	11,00	12,62	9,850		
5	11,00	12,62	6,752	4,00	4,60
6	11,00	12,62	11,133		
7	11,00	12,62	6,717	4,00	4,60
8	11,00	12,62	11,386		
9	11,00	12,62	6,717	4,00	4,60
10	11,00	12,62	11,133		
11	11,00	12,62	6,752	4,00	4,60
12	11,00	12,62	9,850		
13	11,00	12,62	5,434	4,00	4,60
14	11,00	12,62	1,280		
15	28,50	12,62	10,00		

Tabla 5.6. Dimensiones del filtro paso banda evanescente simétrico.

En la figura 5.25 se compara la respuesta en la banda de paso del filtro analizado y la respuesta ideal objetivo. En las simulaciones, se han explotado los dos ejes de simetría presentes en la estructura, y se han empleado 20 modos accesibles, 50 funciones base y 500 términos en el kernel. El coste computacional para simular la estructura entera ha sido de tan sólo 0,03 segundos por punto en frecuencia, habiendo dividido la banda de frecuencias en 500 puntos. A su vez, en la figura 5.26 se muestra la transmisión (S_{21}) del filtro en una banda de frecuencias más amplia. Como se puede ver la primera frecuencia espúrea aparece alrededor de 16 GHz, cumpliendo por tanto con las especificaciones proporcionadas.

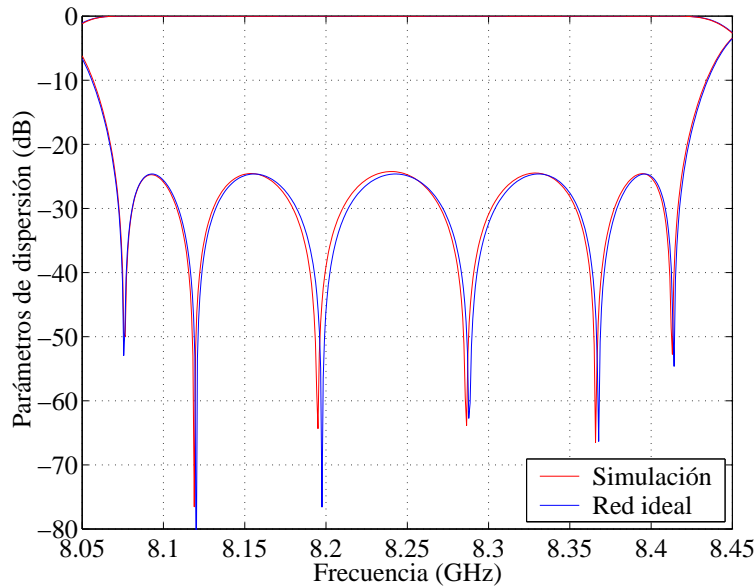


Figura 5.25. Comparación en la banda de paso de los parámetros de dispersión del filtro paso banda evanescente simétrico y de la red ideal.

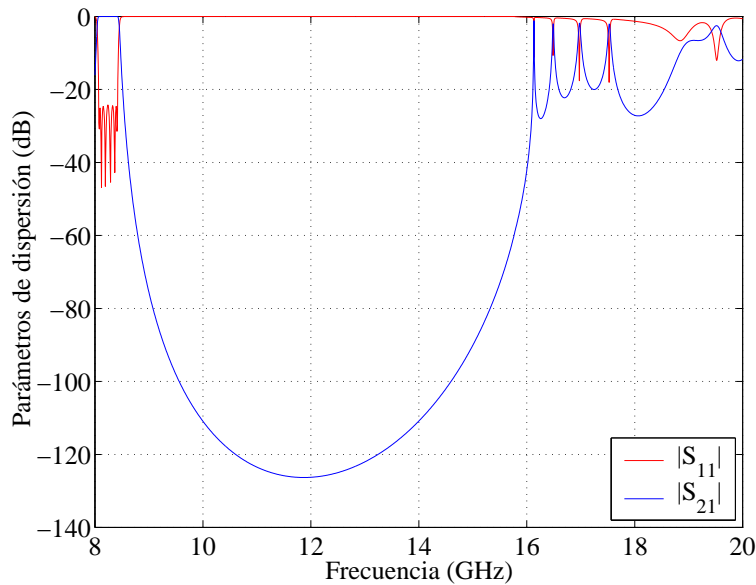


Figura 5.26. Parámetros de dispersión del filtro paso banda evanescente simétrico en una banda amplia para comprobar la aparición de frecuencias espúreas.

5.3.8. Análisis de un girador de polarización de 90° para aplicaciones espaciales en banda K

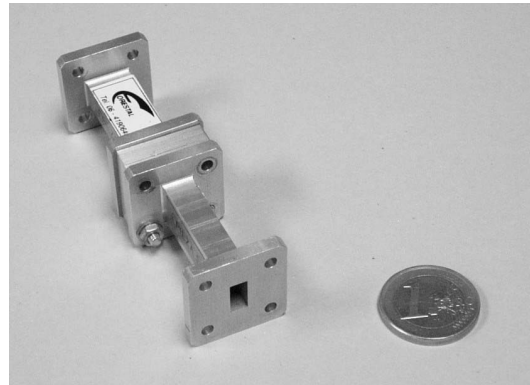
Como último dispositivo analizado mediante la herramienta informática implementada, se considerará un nueva topología de girador de polarización de 90° para aplicaciones espacia-

les en banda K. Los primeros estudios teóricos de este tipo de dispositivo fueron descritos en [101]-[104]. En [105]-[107] se han obtenido expresiones analíticas del campo electromagnético del modo fundamental de un girador de polarización de 90° en guía rectangular. Sin embargo, este tipo de dispositivo ha sido siempre diseñado utilizando una geometría compleja constituida por guías rectangulares e iris en forma de L [108] que cambian progresivamente de sección transversal, y se han analizado mediante técnicas tales como el método de los elementos finitos (FEM) [109] o el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) [110]. En [111] se ha tratado el problema de la fabricación de este tipo de dispositivo utilizando una conexión en cascada de guías rectangulares de diferente sección transversal que convierten el modo fundamental TE_{10} de entrada en el modo TE_{01} a la salida. Esta solución facilita la fabricación de los giradores de polarización pero no proporciona una solución con un ancho de banda amplio.

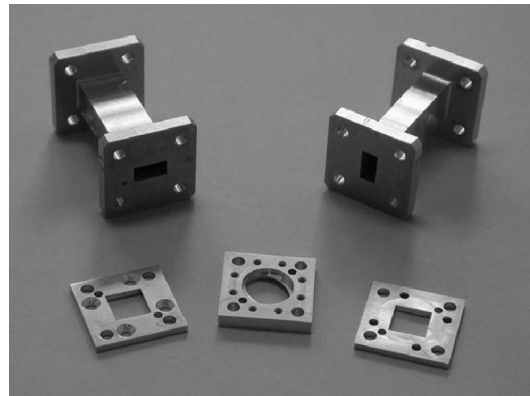
En este apartado se presentará una geometría alternativa y más compacta para este tipo de dispositivos, basada en una rotación suave en el plano E mediante una sucesión de guías cuadradas, circulares y elípticas. El dispositivo tiene a la entrada una guía WR-34 ($a = 8,636$ mm, $b = 4,318$ mm), a continuación se pasa a una guía cuadrada de lado $8,636$ mm que conecta la guía de entrada a una guía circular de radio $r = 6,10$ mm necesaria para excitar dos modos ortogonales y linealmente independientes, y finalmente un iris elíptico (semieje mayor $6,0$ mm, semieje menor $3,90$ mm) rotado 45° para acoplar los dos modos ortogonales de la guía circular. Dada la propiedad de simetría de la estructura, del iris elíptico se pasa de nuevo a una guía circular, de la guía circular a la cuadrada y finalmente a la guía de salida rotada 90° con respecto a la de entrada. Esta rotación suave en el plano E mediante una sucesión de guías cuadradas, circulares y elípticas permite rotar la polarización de la señal de entrada 90° manteniendo un nivel de acoplo y unas pérdidas de retorno adecuadas para aplicaciones espaciales en banda K. En particular el girador de polarización analizado opera a una frecuencia central de $26,3$ GHz con un ancho de banda de cerca de 2 GHz.

En la figura 5.27 se pueden observar las fotografías del prototipo de girador de polarización fabricado, así como de sus partes integrantes con todas las dimensiones detalladas, mientras que en la figura 5.28 se comparan los parámetros de dispersión del polarizador analizado con la herramienta de simulación propia con medidas experimentales del prototipo fabricado (representado en la figura 5.27). Dichas medidas se han realizado con un analizador de redes de la serie HP 8510C que dispone el Grupo de Aplicaciones de Microondas (GAM).

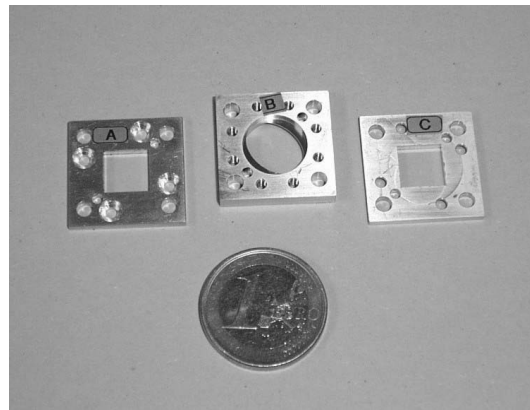
Los resultados simulados se han obtenido utilizando en la teoría de la ecuación integral 20 modos accesibles, 50 funciones base y 400 elementos en el kernel. El tiempo requerido para obtener estos parámetros ha sido de $0,54$ segundos por punto en frecuencia, empleando 1000 puntos en toda la banda de frecuencias analizada. En conclusión, como se puede deducir de los resultados y del tiempo requerido en el análisis, la herramienta informática desarrollada es muy adecuada para analizar y diseñar nuevos dispositivos pasivos de microondas implementados con guías de sección transversal arbitraria.



a)



b)



c)

Figura 5.27. Fotografías del prototipo de girador de polarización de 90° para aplicaciones especiales en banda K. En a) se observa el dispositivo completo fabricado en una guía estándar WR-34 ($a = 8,636$ mm, $b = 4,318$ mm), en b) tenemos una vista general de todas las piezas que constituyen el dispositivo, en c) se observan detalles de las guías presentes en el interior del girador. Las piezas denominadas A y C son dos guías cuadradas de lado $8,636$ mm y de longitud $1,80$ mm; la pieza central B está formada por dos guías circulares de radio $6,10$ mm y longitud $1,60$ mm, y por una guía elíptica (semieje mayor del iris $6,0$ mm, semieje menor $3,90$ mm) rotada 45° y de longitud $0,30$ mm.

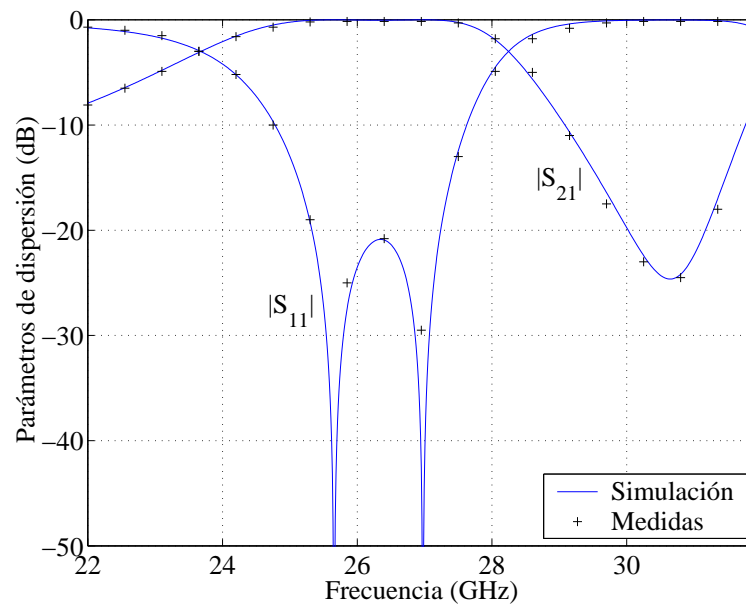


Figura 5.28. Parámetros de dispersión del girador de polarización para aplicaciones espaciales en banda K. Las cruces indican medidas del prototipo realizado.

Capítulo 6

Conclusiones y líneas futuras

Las guías de ondas de sección transversal arbitraria se utilizan cada vez con más frecuencia en los modernos dispositivos para aplicaciones de telecomunicación que operan en las bandas de microondas y ondas milimétricas. En la presente tesis se ha descrito una manera eficiente de analizar este tipo de guías utilizando el conocido método BI-RME, el cual se ha revelado como uno de los métodos más adecuados, por su tremenda eficiencia computacional, para caracterizar modalmente las guías de sección transversal arbitraria. Respecto al método BI-RME original se ha mejorado la precisión y la eficiencia computacional cuando se introducen perturbaciones circulares y elípticas. De hecho, hasta ahora, todas las implementaciones prácticas de este método utilizaban una segmentación a tramos rectos, aunque el contorno arbitrario estuviese compuesto por arcos circulares o elípticos. En la nueva teoría propuesta se discretiza el contorno arbitrario con segmentos lineales, circulares y elípticos, y se permite una conexión cualquiera entre estos tres tipos de segmentos.

La nueva y extendida teoría BI-RME que se ha desarrollado ha sido completamente validada con diferentes ejemplos de guías canónicas y guías arbitrarias de interés práctico conocidas en la literatura científica. En particular, se ha calculado de manera eficiente un conjunto de parámetros que caracterizan dichas guías, como por ejemplo las frecuencias de corte, las longitudes de onda de corte y los campos electromagnéticos en el interior de dichas guías. Una vez obtenida la carta modal de las diferentes guías de sección transversal arbitraria, se ha podido también calcular fácilmente las integrales de acoplo entre sus modos y los modos de la guía rectangular del método BI-RME que encierra completamente el contorno arbitrario. Tales integrales son fundamentales para el análisis modal de estructuras pasivas de microondas constituidas por transiciones entre guías de sección transversal arbitraria. A tal fin, se ha integrado la nueva y extendida técnica BI-RME propuesta en una herramienta informática de análisis basada en el método de la ecuación integral.

El método de la ecuación integral resulta sumamente eficiente y eficaz para caracterizar las transiciones planares entre guías de sección transversal arbitraria mediante matrices de inmitancias (admitancia o impedancia). Este método de análisis electromagnético (*full-wave*) necesita el espectro modal de cada una de las guías de las transiciones, así como las integrales de acoplo entre los modos de las dos guías adyacentes que constituyen la discontinuidad. En el caso de guías rectangulares, dicha información modal se puede obtener fácilmente de forma analítica.

Sin embargo, cuando una guía o las dos tienen una sección transversal arbitraria, esta información se puede obtener de forma eficiente y precisa utilizando la teoría desarrollada en la presente tesis. Estos dos métodos utilizados, junto con la estrategia empleada para resolver los sistemas de ecuaciones lineales en banda que surgen al analizar dispositivos de microondas constituidos por diferentes guías conectadas en cascada, permiten reducir considerablemente el coste computacional asociado al análisis de dispositivos complejos de microondas. De este modo, la nueva herramienta de análisis implementada podrá formar parte de futuros programas de diseño asistido por ordenador (CAD), que suelen requerir un número elevado de simulaciones durante el proceso completo de diseño.

En el trabajo realizado se ha demostrado como en guías de sección transversal arbitraria con uno o dos ejes de simetría se puede generar, mediante el método BI-RME, toda la familia de modos de dicha guía (TEM, TM, y TE) de manera que verifiquen una cierta condición de contorno ficticia de pared eléctrica o pared magnética en el plano de simetría, y se han discutido las ventajas computacionales respecto a calcular todos los modos simultáneamente. Se ha comprobado que en estructuras de microondas simétricas formadas por la conexión en cascada de tramos de guía uniforme, también aparece el concepto de familias de simetría a nivel modal, y que además las distintas familias de simetría funcionan de forma independiente a lo largo de toda la estructura al no acoplarse entre sí. Dicha situación se puede explotar para aumentar de forma notable la eficiencia del simulador electromagnético.

Verificada la eficiencia y precisión de la nueva herramienta informática desarrollada mediante el análisis de transiciones formadas por guías de sección transversal arbitraria, se han analizado con el citado simulador electromagnético algunas estructuras pasivas realmente complejas; tales como un filtro paso banda en guía rectangular con ventanas de acoplo inductivas y tornillos de sintonía, un filtro inductivo en guía rectangular con esquinas redondeadas, filtros de modo dual en guía elíptica y en guía circular con iris elípticos, un filtro paso bajo en guía coaxial, un filtro de modo evanescente con respuesta paso banda, y un nuevo girador de polarización de 90° para aplicaciones espaciales. Todos los resultados han quedado completamente validados, mediante la comparación con resultados conocidos y publicados en las principales revistas científicas del sector, o bien mediante las medidas de las respuestas asociadas a unas implementaciones prácticas de las estructuras analizadas. Se han incluido todos los tiempos necesarios para el análisis de los diferentes ejemplos; con lo cual se ha justificado ampliamente la eficiencia de la nueva herramienta implementada superando a métodos de análisis extensamente documentados.

Como valoración final del trabajo realizado en la tesis se puede afirmar que se ha conseguido un método eficaz y muy eficiente de análisis de dispositivos pasivos de microondas implementados con guías de sección transversal arbitraria. Se han alcanzado todos los objetivos propuestos al inicio de la tesis, habiendo sido también capaces de mejorar la precisión y eficiencia del método BI-RME original cuando se consideran perturbaciones circulares y elípticas. El interés científico de la tesis queda justificado por las publicaciones de tipo científico a que ha dado lugar: 2 artículos publicados en revista de ámbito internacional (*IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*) y 11 comunicaciones presentadas en congresos nacionales e internacionales de reconocido prestigio en el sector (ver detalles en Apéndice F).

Entre las posibles líneas futuras de trabajo, resultaría interesante extender la teoría BI-RME

desarrollada al caso de una guía circular que rodea la guía arbitraria, pudiendo obtener directamente las integrales de acoplo entre guías circulares y guía arbitraria sin pasar necesariamente por la técnica explicada en el capítulo 3, y evitar así posibles problemas de convergencia numérica. Concretamente sería necesario sustituir las funciones de Green para un dominio rectangular con las correspondientes para un dominio circular. Estas funciones son conocidas, y resultan más simples porque tienen forma cerrada, y presentan la misma singularidad de tipo logarítmico que aparece en el dominio rectangular. Otra alternativa consiste en implementar las integrales de acoplo requeridas mediante integración de contorno [31], lo que sin duda reduciría también el coste computacional asociado a dicho cálculo.

En cuanto al desacoplo de modos cuasi-degenerados, es decir modos con frecuencias de corte parecidas, que tienen valores de campos apreciables en la región interna a la guía arbitraria y en la región complementaria limitada por la guía rectangular, se plantea desarrollar una versión iterativa del algoritmo explicado en el Apéndice D, que sería utilizable cuando se presenten diferentes modos cuasi-degenerados.

Una última posible aplicación asociada al método BI-RME, que puede resultar especialmente interesante, consiste en resolver la ecuación integral obtenida en el método mediante la técnica de Nyström (ver [112] y [113]) en sustitución del Método de los Momentos en su versión Galerkin. Para poder diseñar dispositivos complejos de microondas se necesita el uso repetido de herramientas de simulación, por lo tanto sería deseable mejorar la eficiencia, en términos de tiempo de cálculo, de la implementación del método BI-RME. Una posible estrategia a seguir consiste en realizar la optimización en dos tiempos: una primera resolución basada en la técnica Nyström muy eficiente pero menos precisa, para, a continuación, utilizar en una segunda fase el método original en su versión Galerkin para garantizar el correcto diseño final. De hecho, en la actualidad ya se dispone de resultados que garantizan la validez de esta técnica en el análisis modal de guías de sección transversal arbitraria y dispositivos pasivos, resultados que han sido presentados en diversas referencias recogidas en el Apéndice F.

Por último, quiero especificar que mi estancia en la Universidad Politécnica de Valencia ha sido posible gracias a una Red Europea de Investigación (*Research Training Network*) del V Programa Marco, llamada MMCODEF (Referencia: HPRN-CT-2000-00043) “Millimetre-wave and Microwave Components Design Framework for Ground and Space Multimedia Network”, cuyo resultado final ha sido la actualización del programa comercial FEST3D. El programa FEST (*Full-wave Electromagnetic Simulation Tool*) es una herramienta de análisis y diseño asistido por ordenador (CAD) de circuitos pasivos de microondas y ondas milimétricas, que ha sido desarrollado a instancias del Centro Europeo de Tecnología e Investigación Espacial de la Agencia Espacial Europea (ESA/ESTEC). Dicho organismo distribuye este programa a las empresas del sector, y actualmente ya se han concedido más de 60 licencias de este programa en toda Europa.

Apéndice A

Ortonormalización de los modos TEM

En este apéndice se presenta la técnica utilizada para obtener Q modos TEM ortonormalizados, con $Q > 1$ (en la figura A.1 se representa una guía de sección transversal arbitraria con $Q = 4$ conductores internos).

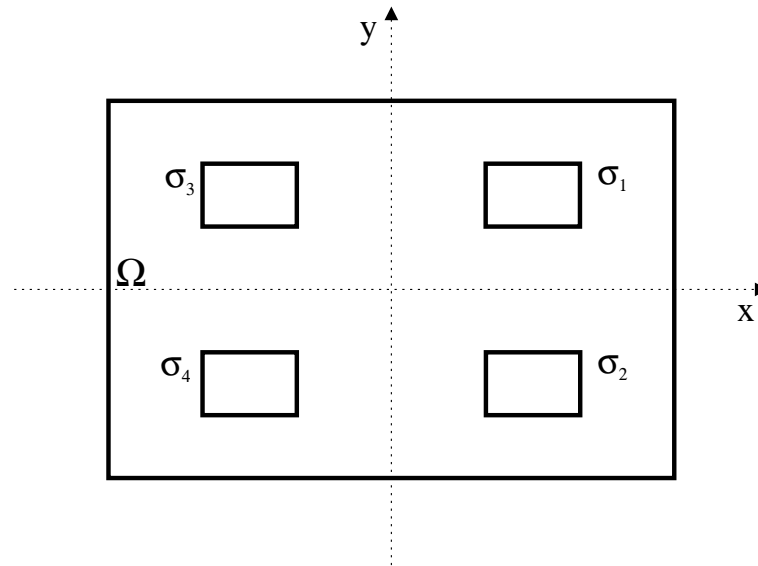


Figura A.1. Guía de sección transversal arbitraria con $Q = 4$ conductores internos.

Como ya se ha explicado en el capítulo 2, el m -ésimo modo TEM se obtiene fijando el potencial del m -ésimo conductor interno a uno, y a cero el potencial del resto de conductores internos σ_i :

$$\Phi_m = \begin{cases} 1, & \text{en } \sigma_m; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

siendo Φ_m el potencial asignado al conductor m -ésimo. Aplicando el principio de superposición, el campo eléctrico total vendrá dado por la suma de los campos eléctricos generados por cada uno de los modos TEM. Sin embargo, este procedimiento no determina Q soluciones ortonormalizadas, las cuales se obtendrán tras aplicar una ortonormalización del tipo Gram-Schmidt

a los vectores de densidad de carga y de potencial de los conductores internos.

Para comprobar que las soluciones no son ortonormalizadas, calculamos las integrales de acoplo entre los campos eléctricos \mathbf{E}_i y \mathbf{E}_j :

$$\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle = \iint_S \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j ds = \iint_S (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j) ds \quad (\text{A.2})$$

donde ϕ_i es el potencial electrostático del modo \mathbf{E}_i . Por la primera identidad de Green podemos escribir:

$$\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle = \oint_{\sigma} (\Phi_i \nabla \phi_j \cdot \hat{\mathbf{n}}) dl - \iint_S \phi_i \nabla^2 \phi_j ds \quad (\text{A.3})$$

donde $\sigma = \bigcup_{m=1}^Q \sigma_m$ es el contorno de la guía arbitraria con Q conductores internos y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal al contorno. Teniendo en cuenta que $\nabla^2 \phi_j = 0$ en la sección arbitraria S , la integral de superficie desaparece, dando lugar a:

$$\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle = \sum_{m=1}^Q \Phi_i \int_{\sigma_m} (\nabla \phi_j \cdot \hat{\mathbf{n}}) dl = - \sum_{m=1}^Q \Phi_i \int_{\sigma_m} \mathbf{E}_j \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (\text{A.4})$$

ya que $\mathbf{E}_j = -\nabla \phi_j$. Aplicando la condición de contorno a la componente normal del campo eléctrico en un conductor perfecto resulta por (2.35):

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\rho_{\sigma}}{\epsilon} = \sum_{n=1}^N b_n'' u_n(l') \quad (\text{A.5})$$

donde N es el número total de funciones base utilizadas al discretizar el contorno σ . Entonces se obtiene que las integrales son:

$$\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle = - \sum_{m=1}^Q \Phi_i \int_{\sigma_m} \frac{\rho_{\sigma}^{(j)}}{\epsilon} dl' = - \sum_{n=1}^N \Phi_i(n) b_n''^{(j)} \int_{\sigma_m} u_n(l') dl' = -(\Phi_i)^T \cdot \mathbf{b}''^{(j)} \quad (\text{A.6})$$

$$\langle \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_i \rangle = - \sum_{m=1}^Q \Phi_j \int_{\sigma_m} \frac{\rho_{\sigma}^{(i)}}{\epsilon} dl' = - \sum_{n=1}^N \Phi_j(n) b_n''^{(i)} \int_{\sigma_m} u_n(l') dl' = -(\Phi_j)^T \cdot \mathbf{b}''^{(i)} \quad (\text{A.7})$$

donde $\rho_{\sigma}^{(i)}$ es la contribución a la densidad de carga debida al campo eléctrico \mathbf{E}_i . Se ha definido en las anteriores ecuaciones

$$\Phi_m = \left[\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_2}, \dots, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{N_m}, \dots, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_Q} \right] \quad (\text{A.8})$$

donde N_m es el número de funciones base sobre el conductor m -ésimo y $N = N_1 + N_2 + \dots + N_Q$ es el número de funciones base totales. Φ_i es el vector construido a partir de las condiciones de contorno (A.1), y

$$\mathbf{b}''^{(i)} = \left[\underbrace{b_1''^{(i)}, b_2''^{(i)}, \dots, b_{N_1}''^{(i)}}_{N_1}, \underbrace{b_{N_1+1}''^{(i)}, b_{N_1+2}''^{(i)}, \dots, b_{N_1+N_2}''^{(i)}}_{N_2}, \dots, \underbrace{b_{N_1+\dots+N_{Q-1}+1}''^{(i)}, \dots, b_N''^{(i)}}_{N_Q} \right] \quad (\text{A.9})$$

es el vector de los coeficientes de densidad de carga. Finalmente, por reciprocidad se cumple que

$$\langle \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_i \rangle = \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle$$

Como se puede ver las integrales son distintas del valor que debieran tener, es decir la delta de Kronecker δ_{ij} . Cabe señalar que en (A.6) y (A.7) se ha omitido voluntariamente después de la última igualdad el término de las funciones base, porque se han elegido funciones parabólicas tales que, como se sugiere en [32]:

$$\int_{\sigma_i} u_n(l') dl' = 1$$

es decir que el área de estas funciones en sus dominios es igual a 1, garantizando así resultados numéricos estables.

Para obtener entonces un conjunto de Q modos TEM ortonormalizados, hay que aplicar una ortonormalización del tipo Gram-Schmidt [114]. El principal objetivo de dicha técnica es calcular, a partir de los $m - 1$ modos TEM ortonormalizados, el vector Φ_m que permita obtener el vector de coeficientes $\mathbf{b}''^{(m)}$ correspondiente al m -ésimo modo TEM ortonormalizado:

$$\hat{\mathbf{E}}_m = \alpha^{(m)} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_m \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{\Phi}_m = \alpha^{(m)} \cdot \tilde{\Phi}_m \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{\mathbf{b}}''^{(m)} = \alpha^{(m)} \cdot \tilde{\mathbf{b}}''^{(m)} \quad (\text{A.12})$$

donde $\tilde{\mathbf{E}}_m$, $\tilde{\Phi}_m$ y $\tilde{\mathbf{b}}''^{(m)}$ son vectores ortogonales y el conjunto $\hat{\mathbf{E}}_m$, $\hat{\Phi}_m$ y $\hat{\mathbf{b}}''^{(m)}$ son el correspondiente conjunto de vectores ortonormales, $\alpha^{(m)}$ es una constante de normalización tal que:

$$\|\hat{\mathbf{E}}_m\|^2 = (\alpha^{(m)})^2 \cdot \langle \tilde{\mathbf{E}}_m, \tilde{\mathbf{E}}_m \rangle = (\alpha^{(m)})^2 \cdot [(\tilde{\Phi}_m)^T \cdot \tilde{\mathbf{b}}''^{(m)}] = 1 \quad (\text{A.13})$$

$$\alpha^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{\Phi}_m)^T \cdot \tilde{\mathbf{b}}''^{(m)}}} \quad (\text{A.14})$$

y los otros términos se obtienen, a partir de los vectores de densidad de carga y de potencial de los conductores internos originales, de forma iterativa según el algoritmo de Gram-Schmidt [114]:

$$\tilde{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_m - \sum_{i=1}^{m-1} [(\Phi_i)^T \cdot \mathbf{b}''^{(m)}] \mathbf{E}_i \quad (\text{A.15})$$

con $m = 2, 3, \dots$ (recuérdese que el proceso de Gram-Schmidt tiene como primer paso mantener el primer vector sin alterar y modificar los demás para ortonormalizarlos según las ecuaciones anteriores). Los potenciales electrostáticos ϕ_m se relacionan con los campos \mathbf{E}_m a través del gradiente:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_m &= \mathbf{E}_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \mathbf{E}_i = -\nabla \phi_m + \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \nabla \phi_i = \\ &= -\nabla \left(\phi_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \phi_i \right) = -\nabla \tilde{\phi}_m\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

donde $-\nabla \tilde{\phi}_m = \tilde{\mathbf{E}}_m$, es decir, el gradiente del potencial $\tilde{\phi}_m$ proporciona el campo ortonormalizado $\tilde{\mathbf{E}}_m$.

Identificando los términos que acompañan al gradiente se obtiene:

$$\tilde{\phi}_m = \phi_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \phi_i \quad (\text{A.17})$$

Particularizando $\tilde{\phi}_m$ en el contorno σ y discretizando σ en las N funciones base obtenemos:

$$\tilde{\Phi}_m = \Phi_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \Phi_i = \Phi_m - \sum_{i=1}^{m-1} [(\Phi_i)^T \cdot \mathbf{b}''^{(m)}] \Phi_i \quad (\text{A.18})$$

De la expresión (A.17) se puede escribir:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_m &= \phi_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \phi_i \\ &= \sum_{n=1}^N b_n''^{(m)} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \sum_{n=1}^N b_n''^{(i)} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl \\ &= \sum_{n=1}^N \left(b_n''^{(m)} - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle b_n''^{(i)} \right) \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' = \sum_{n=1}^N \tilde{b}_n''^{(m)} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl'\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

donde $b_n''^{(m)}$ es la componente n -ésima del vector $\mathbf{b}''^{(m)}$. Identificando de la última igualdad los términos que acompañan a la integral se obtiene:

$$\tilde{b}_n''^{(m)} = b_n''^{(m)} - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle b_n''^{(i)} \quad (\text{A.20})$$

Escribiendo la ecuación anterior de forma vectorial se obtiene:

$$\tilde{\mathbf{b}}''^{(m)} = \mathbf{b}''^{(m)} - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_i \rangle \mathbf{b}''^{(i)} = \mathbf{b}''^{(m)} - \sum_{i=1}^{m-1} [(\Phi_i)^T \cdot \mathbf{b}''^{(m)}] \mathbf{b}''^{(i)} \quad (\text{A.21})$$

Apéndice B

Expresiones analíticas de las integrales singulares

En este apéndice se presentan las expresiones analíticas de todas las integrales singulares que aparecen en el capítulo 2. La integral de una función parabólica multiplicada por un término logarítmico singular tiene la siguiente expresión analítica:

$$\int_{-1/2}^{1/2} (a\xi'^2 + b\xi' + c) \ln [\varphi^2(\xi - \xi')^2] d\xi' =$$
$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{12} [8a\xi^3 + 12b\xi^2 + 24c\xi + a - 3(b - 4c)] \ln |2\xi + 1| \\ & - \frac{1}{12} [8a\xi^3 + 12b\xi^2 + 24c\xi - a - 3(b + 4c)] \ln |2\xi - 1| \\ & + \left(\frac{a}{6} + 2c \right) \ln \left| \frac{\varphi}{2} \right| - \frac{1}{18} (12a\xi^2 + 18b\xi + a + 36c) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.1})$$

En el caso TE y con arcos circulares o elípticos, el vector tangente unitario a un arco es previamente o posteriormente multiplicado por la función de Green diádica $\overline{\mathbf{G}}_{st}$, dando lugar a las siguientes dos integrales singulares:

$$\int_{-1/2}^{1/2} (a\xi'^2 + b\xi' + c) \sin(\varphi\xi' + \varphi_0) \ln [\varphi^2(\xi - \xi')^2] d\xi' =$$
$$(aI_2^s + bI_1^s + cI_0^s) \cos(\varphi_0) + (aI_2^c + bI_1^c + cI_0^c) \sin(\varphi_0) \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} (a\xi'^2 + b\xi' + c) \cos(\varphi\xi' + \varphi_0) \ln [\varphi^2(\xi - \xi')^2] d\xi' =$$
$$(aI_2^c + bI_1^c + cI_0^c) \cos(\varphi_0) - (aI_2^s + bI_1^s + cI_0^s) \sin(\varphi_0) \quad (\text{B.3})$$

Las integrales $I_0^s, I_1^s, I_2^s, I_0^c, I_1^c, I_2^c$, e I_0^c, I_1^c, I_2^c , introducidas en (B.2) y (B.3), tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 I_0^s &= \frac{1}{\varphi} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \operatorname{sen}(x) \ln(k-x)^2 dx = \\
 &\quad \frac{2}{\varphi} \left\{ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \ln \left| \frac{\varphi/2+k}{\varphi/2-k} \right| + \cos k \left[\operatorname{Ci}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sen} k \left[\operatorname{Si}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1^s &= \frac{1}{\varphi^2} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} x \operatorname{sen}(x) \ln(k-x)^2 dx = \\
 &\quad \frac{2}{\varphi^2} \left\{ \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \ln \left| \left(\frac{\varphi}{2}-k\right) \left(\frac{\varphi}{2}+k\right) \right| \right. \\
 &\quad \left. + (k \cos k - \operatorname{sen} k) \left[\operatorname{Ci}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + (k \operatorname{sen} k + \cos k) \left[\operatorname{Si}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \\
 &\quad + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2^s &= \frac{1}{\varphi^3} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} x^2 \operatorname{sen}(x) \ln(k-x)^2 dx = \\
 &\quad \frac{2}{\varphi^3} \left\{ \left[\varphi \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \left(\frac{\varphi^2}{4} - 2\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \ln \left| \frac{\varphi/2-k}{\varphi/2+k} \right| \right. \\
 &\quad \left. + [(k^2-2) \cos k - 2k \operatorname{sen} k] \left[\operatorname{Ci}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + [(k^2-2) \operatorname{sen} k + 2k \cos k] \left[\operatorname{Si}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \\
 &\quad + 2k \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_0^c &= \frac{1}{\varphi} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \cos(x) \ln(k-x)^2 dx = \\
 &\quad \frac{2}{\varphi} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \ln \left| \left(\frac{\varphi}{2}+k\right) \left(\frac{\varphi}{2}-k\right) \right| \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{sen} k \left[\operatorname{Ci}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \cos k \left[\operatorname{Si}\left(k-\frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k+\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1^c &= \frac{1}{\varphi^2} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} x \cos(x) \ln(k-x)^2 dx = \\
&\quad \frac{2}{\varphi^2} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \ln \left| \frac{\varphi/2 - k}{\varphi/2 + k} \right| \right. \\
&\quad - (k \operatorname{sen} k + \cos k) \left[\operatorname{Ci}\left(k - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\
&\quad \left. + (k \cos k - \operatorname{sen} k) \left[\operatorname{Si}\left(k - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \tag{B.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2^c &= \frac{1}{\varphi^3} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} x^2 \cos(x) \ln(k-x)^2 dx = \\
&\quad \frac{2}{\varphi^3} \left\{ \left[\varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\frac{\varphi^2}{4} - 2\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \times \right. \\
&\quad \ln \left| \left(\frac{\varphi}{2} - k\right) \left(\frac{\varphi}{2} + k\right) \right| + \varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
&\quad - [(k^2 - 2) \operatorname{sen} k + 2k \cos k] \left[\operatorname{Ci}\left(k - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Ci}\left(k + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\
&\quad \left. + [(k^2 - 2) \cos k - 2k \operatorname{sen} k] \left[\operatorname{Si}\left(k - \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{Si}\left(k + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \right\} \tag{B.9}
\end{aligned}$$

con $k = \varphi\epsilon$ y (ver [60])

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \tag{B.10}$$

$$\operatorname{Ci}(x) = \int_{\infty}^x \frac{\cos(\tau)}{\tau} d\tau = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)(2n)!} \tag{B.11}$$

donde γ es la constante de Euler de valor:

$$\gamma = 0,577215664901532860606512... \tag{B.12}$$

Apéndice C

Cálculo del área de una guía de sección arbitraria

En este apéndice se explica la técnica utilizada para calcular el area de la sección transversal de una guía arbitraria (ver figura C.1).

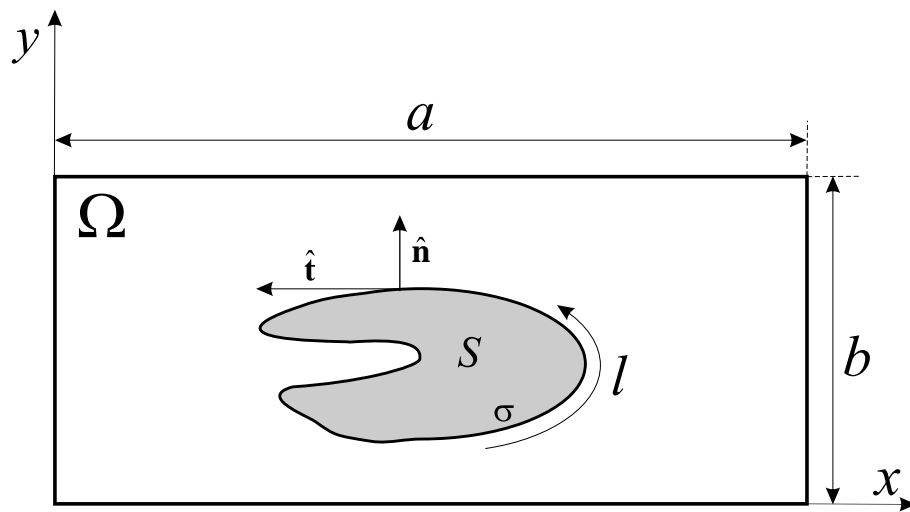


Figura C.1. Guía de sección transversal arbitraria.

Con el fin de reducir la complejidad del problema se puede sustituir la integral de superficie en una integral de contorno utilizando el teorema de la divergencia en el caso bidimensional:

$$\iint_S \nabla \cdot \mathbf{A} \, ds = \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dl \quad (\text{C.1})$$

siendo S la superficie que se quiere calcular, σ el contorno que define la superficie, \hat{n} la normal a la superficie y

$$\mathbf{A} = A_x(x, y)\hat{x} + A_y(x, y)\hat{y}$$

Por lo tanto aplicando este teorema al cálculo del área de una superficie arbitraria, se puede escribir:

$$S = \iint_S ds = \iint_S \nabla \cdot \mathbf{A} ds = \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (\text{C.2})$$

donde ahora el problema consiste en encontrar un vector bidimensional cuya divergencia es igual a $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 1$. Una simple elección para este vector es obviamente $\mathbf{A} = x \hat{\mathbf{x}}$ ó $\mathbf{A} = y \hat{\mathbf{y}}$, obteniendo que:

$$S = \iint_S ds = \iint_S \nabla \cdot \mathbf{A} ds = \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \oint_{\sigma} x \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \oint_{\sigma} y \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (\text{C.3})$$

Entonces suponiendo que el contorno arbitrario que define la superficie sea discretizado en N segmentos lineales, circulares o elípticos, y eligiendo como vector $\mathbf{A} = x \hat{\mathbf{x}}$ la superficie de la guía arbitraria será:

$$S = \oint_{\sigma} x \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \sum_{i=1}^N \oint_{\sigma_i} x \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (\text{C.4})$$

donde las integrales sobre el contorno se calcularán de forma analítica¹ y tendrán una expresión diferente según el tipo de segmento considerado. Por definición, el contorno σ vendrá discretizado y recorrido de forma tal que la región de interés, de la cual se quieren obtener los vectores modales, se quede siempre al lado izquierdo de un observador que recorriera la curva y la normal $\hat{\mathbf{n}}$ al contorno apunte siempre hacia el exterior de esta región. Para no obtener valores negativos (cuando se recorre el contorno arbitrario en el sentido horario) se toma siempre el valor absoluto del resultado de las integrales. Obviamente el área de la superficie complementaria ($\Omega - S$) se obtiene substrayendo al área de la guía rectangular de referencia el área S obtenida.

C.1. Integrales de línea sobre tramos lineales

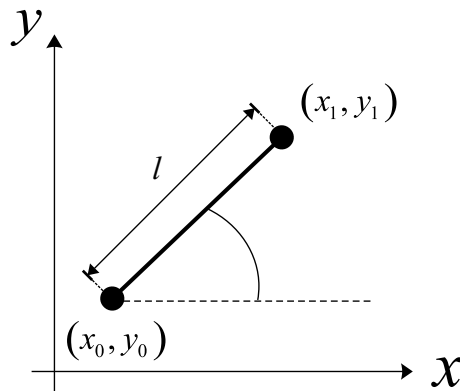


Figura C.2. Segmento lineal de longitud l .

¹Se calculará el área solamente si el contorno está cerrado.

Asumiendo que se está recorriendo el tramo lineal de la figura C.2 en sentido anti-horario y parametrizando respecto de la variable normalizada $t \in [-0,5, 0,5]$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (t + 0,5) l \cos \theta \\ y &= y_0 + (t + 0,5) l \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\mathbf{x}} + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{C.6})$$

$$dl = l dt \quad (\text{C.7})$$

Sustituyendo las expresiones (C.5) y (C.6) en (C.4) se obtiene que la contribución del segmento al área total es:

$$S = \int x \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \int_{-0,5}^{0,5} l [x_0 + (t + 0,5) l \cos \theta] \sin \theta dt = l \sin \theta \left[x_0 + \frac{l}{2} \cos \theta \right] \quad (\text{C.8})$$

En el caso de que se estuviera recorriendo el tramo lineal en sentido horario, se tendría que cambiar el signo a la normal $\hat{\mathbf{n}}$, obteniendo un valor negativo.

C.2. Integrales de línea sobre tramos circulares

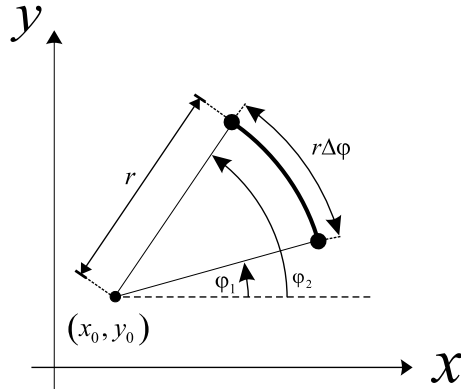


Figura C.3. Segmento circular de radio r y longitud $r\Delta\varphi$.

Se considera el tramo circular de la figura C.3 recorrido en el sentido positivo (anti-horario) y parametrizado en términos de la variable angular φ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cos \varphi \\ y &= y_0 + r \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{C.10})$$

$$dl = r d\varphi \quad (\text{C.11})$$

Substituyendo estas dos últimas expresiones en (C.4) se obtiene que la contribución del segmento circular al área total es:

$$S = \int x \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [x_0 + r \cos \varphi] \cos \varphi r d\varphi = r \left[x_0 \sin \varphi + \frac{r}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad (\text{C.12})$$

En el caso de que se estuviera recorriendo el tramo circular en sentido horario, se tendría que cambiar el signo de la normal $\hat{\mathbf{n}}$.

C.3. Integrales de línea sobre tramos elípticos

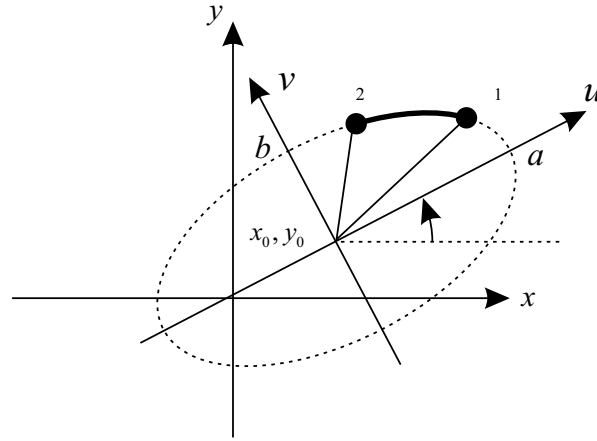


Figura C.4. Segmento elíptico de semieje mayor a y semieje menor b .

Se considera el tramo elíptico de la figura C.4 recorrido en el sentido positivo (anti-horario) y parametrizado en término de la variable angular η :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a \cos \eta \cos \alpha - b \sin \eta \sin \alpha \\ y &= y_0 + a \cos \eta \sin \alpha + b \sin \eta \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{-a \sin \eta \sin \alpha + b \cos \eta \cos \alpha}{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{a \sin \eta \cos \alpha + b \cos \eta \sin \alpha}{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta}} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{C.14})$$

$$dl = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta} d\eta$$

Substituyendo estas dos últimas expresiones en (C.4) se obtiene que la contribución del seg-

mento elíptico al área total es:

$$\begin{aligned}
 S &= \int x \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dl = \int_{\eta_1}^{\eta_2} (x_0 + a \cos \eta \cos \alpha - b \sin \eta \sin \alpha) \times \\
 &\quad \times \left(\frac{-a \sin \eta \sin \alpha + b \cos \eta \cos \alpha}{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta}} \right) (a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta}) \, d\eta = \\
 &= x_0 a \sin \alpha [\cos \eta]_{\eta_1}^{\eta_2} + x_0 b \cos \alpha [\sin \eta]_{\eta_1}^{\eta_2} + (a^2 + b^2) \cos \alpha \sin \alpha \left[\left(\frac{\cos 2\eta}{4} \right) \right]_{\eta_1}^{\eta_2} \quad (\text{C.15}) \\
 &\quad + ab \cos^2 \alpha \left[\left(\frac{\sin \eta \cos \eta}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \right]_{\eta_1}^{\eta_2} + ab \sin^2 \alpha \left[\left(-\frac{\sin \eta \cos \eta}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \right]_{\eta_1}^{\eta_2}
 \end{aligned}$$

En el caso de que se estuviera recorriendo el tramo elíptico en sentido horario, se tendría que cambiar el signo de la normal $\hat{\mathbf{n}}$.

Apéndice D

Desacoplo de modos cuasi-degenerados

Supongamos que tenemos dos modos, con frecuencias de corte parecidas¹ y que tienen valores de campo apreciables en la región de interés S y en la complementaria $\Omega - S$ (ver figura D.1), es decir, el parámetro Q calculado en (2.113) del capítulo 2 tiene un valor entre 1 y 100 para los dos modos calculados. Estos modos acoplados son una combinación lineal de modos desacoplados, los cuales se pueden obtener utilizando el método de los mínimos cuadrados [114], buscando la combinación lineal que produce la máxima diferencia entre la amplitud de campo en la región de interés y en la complementaria.

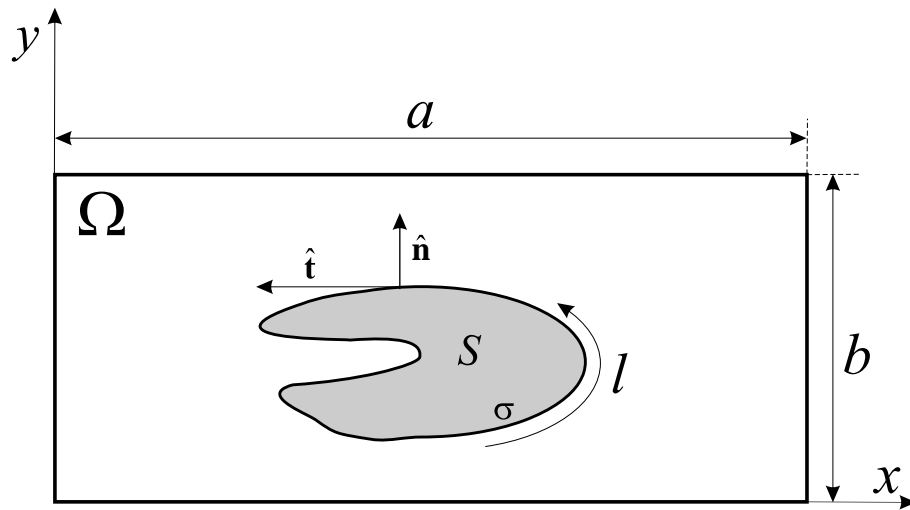


Figura D.1. Guía de sección transversal arbitraria.

Sean $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ y $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ los valores de campo de los dos modos ortonormalizados calculados fuera de la región de interés, el objetivo será calcular el valor de α tal que:

$$\mathbf{E}_1^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \alpha \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{D.1})$$

¹Con una diferencia en valor menor del 2%.

La ecuación (D.1) es un sistema de ecuaciones lineales, del tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, cuya solución se puede encontrar utilizando el método de los mínimos cuadrados [114], según el cual la solución es la proyección ortogonal de \mathbf{b} sobre el espacio columna de \mathbf{A} :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (\text{D.2})$$

En este caso particular el sistema a resolver será del tipo:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r})\alpha = -\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \quad (\text{D.3})$$

El número de ecuaciones será igual al número de puntos donde se medirá el campo electromagnético, y la solución α :

$$\alpha = [\mathbf{E}_2^T(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2(\mathbf{r})]^{-1} \mathbf{E}_2^T(\mathbf{r}) (-\mathbf{E}_1(\mathbf{r})) \quad (\text{D.4})$$

Obtenido el nuevo campo $\mathbf{E}_1^{(1)} = \mathbf{E}_1 + \alpha\mathbf{E}_2$, para obtener el campo $\mathbf{E}_2^{(1)}$ producido por el segundo modo hay que utilizar el mismo procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt ya visto para ortonormalizar los modos TEM:

$$\mathbf{E}_2^{(1)} = \mathbf{E}_2 - \frac{\langle \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1^{(1)} \rangle}{\langle \mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{E}_1^{(1)} \rangle} \mathbf{E}_1^{(1)} \quad (\text{D.5})$$

con

$$\langle \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1^{(1)} \rangle = \langle \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 + \alpha\mathbf{E}_2 \rangle = \langle \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 \rangle + \alpha \langle \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2 \rangle = \alpha \quad (\text{D.6})$$

y

$$\langle \mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{E}_1^{(1)} \rangle = \|\mathbf{E}_1^{(1)}\|^2 = \langle \mathbf{E}_1 + \alpha\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 + \alpha\mathbf{E}_2 \rangle = 1 + \alpha^2 \quad (\text{D.7})$$

por la propiedad de ortogonalidad de los modos \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 . Entonces, utilizando estos resultados, el campo del segundo modo será:

$$\mathbf{E}_2^{(1)} = \mathbf{E}_2 - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \mathbf{E}_1^{(1)} \quad (\text{D.8})$$

Finalmente, hay que ortonormalizar los dos nuevos campos obtenidos:

$$\hat{\mathbf{E}}_1^{(1)} = \frac{\mathbf{E}_1^{(1)}}{\|\mathbf{E}_1^{(1)}\|} = \frac{\mathbf{E}_1^{(1)}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (\text{D.9})$$

$$\hat{\mathbf{E}}_2^{(1)} = \frac{\mathbf{E}_2^{(1)}}{\|\mathbf{E}_2^{(1)}\|} = \frac{\mathbf{E}_2^{(1)}}{\sqrt{\langle \mathbf{E}_2^{(1)}, \mathbf{E}_2^{(1)} \rangle}} = \frac{\mathbf{E}_2^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}}} = \sqrt{1 + \alpha^2} \mathbf{E}_2^{(1)} \quad (\text{D.10})$$

y calcular las nuevas integrales de acoplo con los modos \mathbf{e}_i^{\square} ortonormalizados de la guía rectangular de referencia:

$$\langle \hat{\mathbf{E}}_1^{(1)}, \mathbf{e}_i^{\square} \rangle = \frac{\langle \mathbf{E}_1 + \alpha\mathbf{E}_2, \mathbf{e}_i^{\square} \rangle}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_i^{\square} \rangle}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \langle \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_i^{\square} \rangle \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{E}}_2^{(1)}, \mathbf{e}_i^\square \rangle &= \sqrt{1 + \alpha^2} \langle \mathbf{E}_2 - \beta \mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{e}_i^\square \rangle = \sqrt{1 + \alpha^2} \langle \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_i^\square \rangle - \beta \sqrt{1 + \alpha^2} \langle \mathbf{E}_1^{(1)}, \mathbf{e}_i^\square \rangle = \\
&= \sqrt{1 + \alpha^2} \langle \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_i^\square \rangle - \beta \sqrt{1 + \alpha^2} \langle \mathbf{E}_1 + \alpha \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_i^\square \rangle = \\
&= \sqrt{1 + \alpha^2} (1 - \beta \alpha) \langle \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_i^\square \rangle - \beta \sqrt{1 + \alpha^2} \langle \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_i^\square \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} [\langle \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_i^\square \rangle - \alpha \langle \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_i^\square \rangle]
\end{aligned} \tag{D.12}$$

donde $\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$, $\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_i^\square \rangle$ y $\langle \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_i^\square \rangle$ son las integrales obtenidas antes del desacoplo, calculadas con la formulaci3n explicada en el apartado 2.3 del capitulo 2.

Apéndice E

Cálculo de la distancia de un punto a una elipse

El cálculo de distancias punto-recta, punto-círculo y punto-elipse se necesita para situar puntos no demasiado cercanos a una o más curvas dadas, en los cuales se va a evaluar el campo electromagnético según [29]. El cálculo de la distancia de un punto a un segmento o a un arco de circunferencia es un problema trivial, pero cuando se intenta aplicar la misma técnica o similar a una elipse o a arcos de elipses, sucede que la complejidad algebraica se incrementa. En el algoritmo de descarte de modos es necesario comprobar que estos puntos, fijados a una cierta distancia del contorno σ , por ejemplo $\lambda_{max}/2^1$, para ser puntos donde se evaluará el campo electromagnético, tienen que distar como mínimo $\lambda_{max}/2$ de todo el resto de arcos de elipses, segmentos rectos y arcos circulares.

E.1. Solución clásica del problema

Sea una elipse de ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (\text{E.1})$$

donde a y b son los semiejes de la elipse. Sea C la curva de nivel que define la elipse. Esta curva se puede definir haciendo $f = 0$ con

$$f = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 \quad (\text{E.2})$$

por lo tanto la curva de nivel que define la elipse se expresa

$$C = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f = 0\} \quad (\text{E.3})$$

Sea $(u_0, v_0) \notin C$ el punto del cual se quiere calcular su distancia a la elipse. La estrategia a seguir es sencilla. Se define una perpendicular P a la elipse que pase por el punto (u_0, v_0) .

¹ λ_{max} es la máxima longitud de onda de la RME (*Resonant Mode Expansion*) [32], es decir, la longitud de onda del modo de orden más elevado de la guía rectangular de referencia.

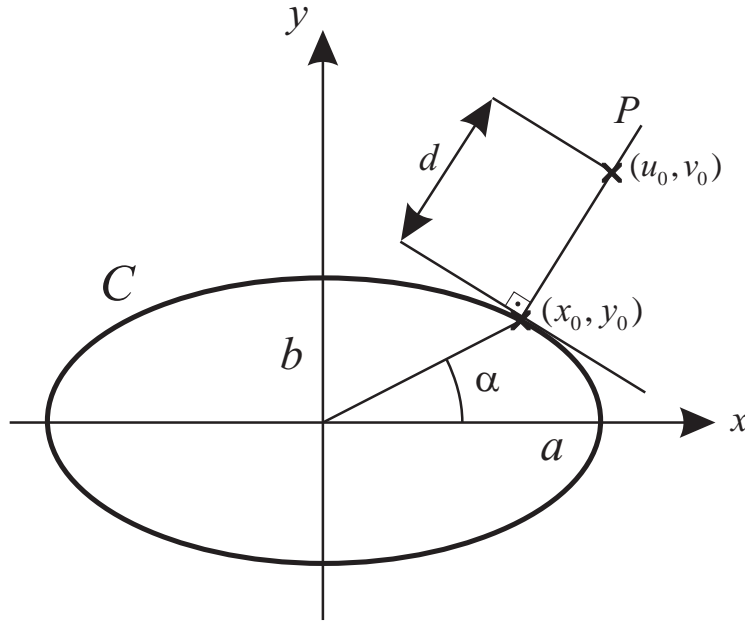


Figura E.1. Geometría del problema.

Sea (x_0, y_0) el punto $P \cap C$ más cercano a (u_0, v_0) (ya que la recta puede cortar a la elipse en dos puntos). Una vez conocido (x_0, y_0) , ya sólo queda calcular la distancia a la elipse como la distancia entre ese punto y el punto obtenido como

$$d = \sqrt{(x_0 - u_0)^2 + (y_0 - v_0)^2} \quad (\text{E.4})$$

En la figura E.1 se puede observar la geometría del problema con las principales variables involucradas.

Se necesita calcular la recta P que sea perpendicular a C y que pase por (u_0, v_0) . Tomamos la ecuación punto-pendiente de una recta genérica de pendiente m_{\perp}

$$y - v_0 = m_{\perp} (x - u_0) \quad (\text{E.5})$$

y para que se cumpla $m_{\perp} \perp C$ tomamos como m_{\perp} la pendiente del gradiente de f aprovechando que $\nabla f \perp C_i$ donde C_i son todas las curvas de nivel $f = cte$

$$\nabla f = \left(\frac{2}{a^2}x, \frac{2}{b^2}y \right) \quad (\text{E.6})$$

y la pendiente buscada es

$$m_{\perp} = \frac{\frac{2}{b^2}y}{\frac{2}{a^2}x} = \frac{a^2y}{b^2x} \quad (\text{E.7})$$

Finalmente la recta P si pasa por el punto (x_0, y_0) generará la condición

$$y_0 - v_0 = \frac{a^2y_0}{b^2x_0} (x_0 - u_0) \quad (\text{E.8})$$

la otra condición es obviamente que $(x_0, y_0) \in C$

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1 \quad (\text{E.9})$$

Con (E.8) y (E.9) tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x_0 e y_0) no lineal cuya solución no es sencilla.

Podemos despejar y_0 de (E.8)

$$y_0 = \frac{v_0 b^2 x_0}{b^2 x_0 - a^2 x_0 + a^2 u_0} \quad (\text{E.10})$$

y sustituyendo en (E.9) obtenemos una ecuación con una sola incógnita

$$a' x_0^4 + b' x_0^3 + c' x_0^2 + d' x_0 + e' = 0 \quad (\text{E.11})$$

donde

$$\begin{aligned} a' &= (a^2 - b^2)^2 \\ b' &= 2a^2 u_0 (b^2 - a^2) \\ c' &= -a^2 [a^4 - a^2 (2b^2 + u_0^2) + b^2 (b^2 - v_0^2)] \\ d' &= 2a^4 u_0 (a^2 - b^2) \\ e' &= -a^6 u_0^2 \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

por lo tanto, tenemos una ecuación de cuarto grado que proporcionará cuatro soluciones en general complejas para x_0 , y todavía queda por obtener el valor “adecuado” de y_0 a partir del x_0 obtenido y la ecuación (E.10) (ya que tenemos que escoger la solución correcta entre las cuatro posibles de x_0).

E.2. Solución aproximada

Ya que la solución exacta obtenida en la sección anterior es poco práctica en la realidad, podemos obtener la solución correcta con un método aproximado. Este método consiste en minimizar la función distancia (o lo que es lo mismo, su cuadrado, para simplificar los cálculos) de un punto dado (u_0, v_0) a una elipse, es decir, minimizar

$$d' = d^2 = (x - u_0)^2 + (y - v_0)^2 \quad (\text{E.13})$$

Esto implica minimizar una función de dos variables, pero lo podemos restringir a un problema más simple parametrizando adecuadamente la elipse con una sola variable

$$(x, y) = (a \cos \eta, b \sin \eta) \quad (\text{E.14})$$

No hay que confundir el parámetro η con el ángulo α de la figura E.1 ya que

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \tan \eta \quad (\text{E.15})$$

Si hay que minimizar d' se deriva respecto al único parámetro

$$\frac{\partial d'}{\partial \eta} = -2a \operatorname{sen} \eta (a \cos \eta - u_0) + 2b \cos \eta (b \operatorname{sen} \eta - v_0) \quad (\text{E.16})$$

y se iguala a cero obteniéndose

$$a \operatorname{sen} \eta (a \cos \eta - u_0) - b \cos \eta (b \operatorname{sen} \eta - v_0) = 0 \quad (\text{E.17})$$

de esta ecuación hay que hallar el valor de η_0 que la verifique y asegurarnos de que es un mínimo. No es necesario calcular la segunda derivada de d' en el punto obtenido para verificarlo, porque podemos calcular la distancia a cualquier otro punto y compararla. Para resolver (E.17) podemos utilizar un algoritmo como el de la bisección que es fácilmente programable y se asegura una buena convergencia con sólo proporcionar dos puntos iniciales ($\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$) donde la derivada tenga distinto signo. El método de la bisección puede ser de lenta convergencia, pero si la solución existe y es única la convergencia será inexorable. Para criterios de detención del método cuando se ha alcanzado una precisión adecuada puede consultarse [115]. Esto es fácil de implementar en la práctica si se quiere calcular la distancia desde un punto a un arco de elipse (no a una elipse completa). El caso de la elipse completa se obtiene buscando la distancia mínima obtenida a cada uno de los arcos que la forman.

E.2.1. Procedimiento para arcos de elipse

Sea un arco de elipse parametrizada según la ecuación (E.14) cuyos extremos vienen dados por $\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$ con $\eta^{(1)} < \eta^{(2)}$. El punto definido por el parámetro $\eta^{(1)}$ tiene coordenadas $(x^{(1)}, y^{(1)})$ y el punto definido por $\eta^{(2)}$ tiene coordenadas $(x^{(2)}, y^{(2)})$. El cálculo práctico de la distancia de un punto a un arco de elipse es una cuestión trivial si tenemos en cuenta que el punto (u_0, v_0) debe estar en la región comprendida entre las dos perpendiculares a la elipse en $\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$ (véase figura E.2). En caso contrario el mínimo será la distancia de (u_0, v_0) a uno de los dos puntos designados por $\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$. Por lo tanto el primer paso del algoritmo es comprobar si el punto (u_0, v_0) pertenece a la región sombreada de la figura E.2. Es decir, se calculan las pendientes de las rectas perpendiculares a la elipse que pasan por los puntos $\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$, se calcula el punto de cruce G y se une G con (u_0, v_0) mediante una recta y se calcula su pendiente para ver si pertenece al área sombreada

$$\begin{aligned} m_{\perp}^{(1)} &= \frac{a}{b} \tan \eta^{(1)} \\ m_{\perp}^{(2)} &= \frac{a}{b} \tan \eta^{(2)} \\ m^{(0)} &= \frac{v_0 - y_G}{u_0 - x_G} \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

y se comprueba la condición

$$\arctan m_{\perp}^{(1)} < \arctan m^{(0)} < \arctan m_{\perp}^{(2)} \quad (\text{E.19})$$

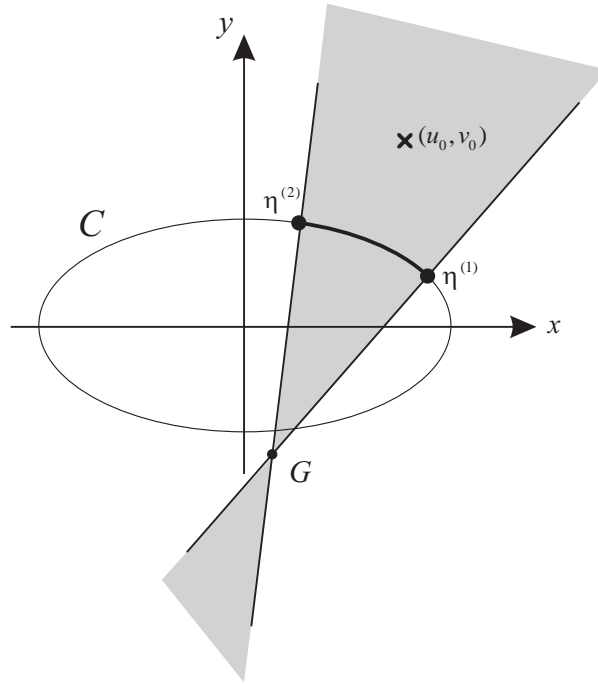


Figura E.2. La región sombreada indica el lugar geométrico donde hay que calcular la distancia. Si el punto está fuera, la distancia mínima es la distancia del punto a uno de los extremos del arco.

Obviamente hay que utilizar una función arctan que nos proporcione el ángulo en el rango $[-\pi, \pi]$. Subrayar aquí que si la condición $\eta^{(1)} < \eta^{(2)}$ no se cumple, es decir si se está recorriendo el arco en el sentido horario, habrá que alterar la condición (E.19) cambiando los signos “<” por “>” y si el arco de la elipse cruza el eje de las x negativas habrá que tratarlo como un caso aparte.

Si los arcos de elipse cruzan el eje de las x negativas, es decir tienen un valor alrededor de π , sucede que los ángulos están definidos entre $[-\pi, \pi]$, y (E.19) no se cumple, por lo que hay que distinguir dos casos. Si estamos recorriendo el arco en sentido anti-horario $\arctan m_{\perp}^{(1)} > 0$ y $\arctan m_{\perp}^{(2)} < 0$, entonces la condición para que el punto (u_0, v_0) pertenezca a la región sombreada de la figura E.2 será:

$$\begin{cases} \arctan m^{(0)} > 0 \\ \arctan m^{(0)} > \arctan m_{\perp}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \arctan m^{(0)} < 0 \\ \arctan m^{(0)} < \arctan m_{\perp}^{(2)} \end{cases} \quad (\text{E.21})$$

Si estamos, por el contrario, recorriendo el arco elíptico en sentido horario $\arctan m_{\perp}^{(1)} < 0$ y $\arctan m_{\perp}^{(2)} > 0$, entonces la condición para que el punto (u_0, v_0) pertenezca a la región

sombreada de la figura E.2 es:

$$\begin{cases} \arctan m^{(0)} > 0 \\ \arctan m^{(0)} > \arctan m_{\perp}^{(2)} \end{cases} \quad (\text{E.22})$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \arctan m^{(0)} < 0 \\ \arctan m^{(0)} < \arctan m_{\perp}^{(1)} \end{cases} \quad (\text{E.23})$$

Este tratamiento especial no es necesario si el arco de elipse cruza el eje de las x positivas, es decir tiene un valor alrededor de 0, porque la (E.19) se cumple siempre en el caso anti-horario, y cambiando los signos en el caso horario.

El único problema que queda por resolver es calcular las coordenadas del punto G que es el cruce de las perpendiculares a la elipse que pasan por los puntos $\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$. Esto se consigue resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} y_G - y^{(1)} &= m_{\perp}^{(1)} (x_G - x^{(1)}) \\ y_G - y^{(2)} &= m_{\perp}^{(2)} (x_G - x^{(2)}) \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{y^{(2)} - y^{(1)} + m_{\perp}^{(1)} x^{(1)} - m_{\perp}^{(2)} x^{(2)}}{m_{\perp}^{(1)} - m_{\perp}^{(2)}} \\ y_G &= \frac{m_{\perp}^{(1)} (y^{(2)} - m_{\perp}^{(2)} x^{(2)}) - m_{\perp}^{(2)} (y^{(1)} - m_{\perp}^{(1)} x^{(1)})}{m_{\perp}^{(1)} - m_{\perp}^{(2)}} \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

E.2.2. Algoritmo para arcos de elipse

Sea C una elipse centrada² y sea un punto $(u_0, v_0) \notin C$. Sean dos puntos de la elipse que delimitan un arco de la misma designados por $\eta^{(1)}$ y $\eta^{(2)}$ tal y como se muestra en la figura E.2. El algoritmo para determinar la distancia de un punto a un arco de elipse consta de los siguientes pasos:

1. Calcular las coordenadas de G .
2. Calcular las pendientes según (E.18).
3. Comprobar que se cumple (E.19) o equivalente, es decir, que el punto pertenezca al área sombreada. En caso de que no se cumpla, la distancia es la mínima entre el punto (u_0, v_0) y unos de los extremos del arco de la elipse.

²Si la elipse no está centrada porque tiene una cierta rotación o traslación respecto a un punto, habrá que utilizar coordenadas locales solidarias con los ejes rotados de la elipse y trasladar el punto (u_0, v_0) al nuevo sistema coordenado con la adecuada transformación para conservar la posición relativa a la elipse.

4. Con el algoritmo de la bisección [115] encontrar la solución η_0 de (E.17), ya que se cumplen las condiciones para que el algoritmo funcione bien y la solución sea única, es decir la solución existe en el intervalo abierto $]\eta^{(1)}, \eta^{(2)}[$ ya que en cada extremo la función a anular $\frac{\partial d'}{\partial \eta}$ tiene signo distinto. Esto es debido a que nos acercamos al punto de distancia mínima o nos alejamos del punto de distancia mínima cuando η crece.
5. Con la solución η_0 , calcular la distancia usando (E.14) y (E.4).

Apéndice F

Publicaciones

En este apéndice se enumera la relación de las publicaciones científicas realizadas como fruto del trabajo de esta tesis. Se trata de dos artículos en la revista de ámbito internacional “*IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*”, y de 11 comunicaciones presentadas en diferentes congresos nacionales e internacionales del sector.

F.1. Artículos en revista de ámbito internacional

- S. Cogollos, S. Marini, P. Soto, V. E. Boria, A. Vidal, H. Esteban, J. V. Morro, B. Gimeno, “Efficient modal analysis of arbitrarily shaped waveguides composed of linear, circular, and elliptical arcs using the BI-RME method”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, n. 12, pp. 2378-2390, Dec. 2003.
- M. Taroncher, A. Vidal, V. E. Boria, S. Marini, S. Cogollos, J. Gil, B. Gimeno, “CAD of complex passive devices composed of arbitrarily shaped waveguides using Nyström and BI-RME methods”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 53, n. 6, (aceptado para su publicación en Junio de 2005).

F.2. Congresos

- S. Cogollos, V. E. Boria, H. Esteban, A. A. San Blas, S. Marini, B. Gimeno, “Efficient and accurate analysis of waveguide diplexers using hybrid methods and integral equation technique”, *Proceedings of 2002 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI National Radio Science Meeting*, pp. 123, San Antonio (USA), June 2002.
- S. Marini, P. Soto, S. Cogollos, V. E. Boria, B. Gimeno, “Efficient full-wave modal analysis of waveguides with arbitrary geometry defined by straight, circular and elliptical segment”, *Proceedings of PIERS 2002*, pp. 884, Boston (USA), July 2002.

- S. Cogollos, S. Marini, P. Soto, V. E. Boria, J. V. Morro, B. Gimeno, “Modal computation of arbitrary waveguides composed of linear, circular and elliptical arcs”, *2003 IEEE MTT-S, International Microwave Symposium Digest*, vol. 3, pp. 2065-2068, Philadelphia (USA), June 2003.
- M. Taroncher, A. Vidal, V. E. Boria, S. Marini, P. Soto, S. Cogollos, “Efficient coupling integrals computation of waveguide step discontinuities using BI-RME and Nyström methods”, *Proceedings of 2003 ISMOT International Symposium on Microwave and Optical Technology*, Ostrawa (Rep. Checa), Aug. 2003.
- M. Taroncher, A. Vidal, V. E. Boria, S. Marini, P. Soto, S. Cogollos, B. Gimeno, “Efficient full wave modal analysis of arbitrarily shaped waveguides using BI-RME and Nyström methods”, *Proceedings of the 33rd European Microwave Conference*, pp. 455-458, Munich (Alemania), Sept. 2003.
- M. Taroncher, A. Vidal, V. E. Boria, S. Marini, P. Soto “Caracterización modal eficiente de estructuras guiadas arbitrarias usando los métodos BI-RME y Nyström”, *Actas del XVIII Symposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, La Coruña (España), Sept. 2003.
- M. Simeoni, D. Schmitt, V. E. Boria, S. Marini, “Efficient Full-wave CAD tool of passive components based on coaxial waveguide junctions”, *2004 IEEE MTT-S, International Microwave Symposium Digest*, Forth Worth (USA), June 2004.
- M. Taroncher, A. Vidal, V. E. Boria, S. Marini, S. Cogollos, “Análisis eficiente de dispositivos complejos en microondas usando BI-RME y Nyström”, *Actas del XIX Simposium Nacional Unión Científica Internacional de Radio*, Barcelona (España), Sept. 2004.
- A. A. San Blas, A. Coves, J.V. Morro, V. E. Boria, S. Marini, B. Gimeno, J. Gil, “Análisis multimodal eficiente de uniones planares entre guías arbitrarias: aplicación a la excitación coaxial de dispositivos”, *Actas del XIX Simposium Nacional Unión Científica Internacional de Radio*, Barcelona (España), Sept. 2004.
- M. Taroncher, A. Vidal, V. E. Boria, S. Marini, S. Cogollos, J. Gil, “CAD of waveguide devices using a simple and efficient implementation of the BI-RME method with Nyström discretization”, *Proceedings of International Workshop on Microwave Filters (CNES and ESA)*, Toulouse (Francia), Sept. 2004.
- M. Taroncher, A. Vidal, V. E. Boria, S. Marini, S. Cogollos, J. Gil, “Efficient analysis of waveguide discontinuities with linear, circular and elliptical geometries using BI-RME and Nyström”, *Proceedings of the 34rd European Microwave Conference*, Amsterdam (Holanda), Oct. 2004.

Bibliografía

- [1] X.-P. Liang, K. A. Zaki, and A. E. Atia, "Dual mode coupling by square corner cut in resonators and filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, no. 12, pp. 2294–2302, Dec. 1992.
- [2] M. Guglielmi, R. C. Molina, and A. Alvarez, "Dual-mode circular waveguide filters without tuning screws," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 2, no. 11, pp. 457–458, Nov. 1992.
- [3] P. Couffignal, H. Baudrand, and B. Théron, "A new rigorous method for the determination of iris dimensions in dual-mode cavity filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, no. 7, pp. 1314–1320, July 1994.
- [4] S. J. Fiedziusko, "Dual mode dielectric resonator loaded cavity filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 30, no. 9, pp. 1311–1316, Sept. 1982.
- [5] V. E. Boria, G. Gerini, and M. Guglielmi, "Computer aided design of reentrant coaxial filter including coaxial excitation," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 3, pp. 1131–1134, June 1999.
- [6] P. Soto, V. E. Boria, J. M. Catalá, N. Chouaib, M. Guglielmi, and B. Gimeno, "Analysis, design and experimental verification of microwave filters for safety issues in open-ended waveguide systems," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 48, no. 11, pp. 2133–2140, Nov. 2000.
- [7] S. Cogollos, V. E. Boria, P. Soto, B. Gimeno, and M. Guglielmi, "Efficient CAD tool for inductively coupled rectangular waveguide filters with rounded corners," *Proc. 31st Eur. Microwave Conf.*, vol. 1, pp. 315–318, Sept. 2001.
- [8] R. Kühne and J. Marquardt, "Mutual coupling of open-ended waveguides with arbitrary cross-sections located in an infinite ground plane," *Proc. 30th Eur. Microwave Conf.*, vol. 2, pp. 357–360, Oct. 2000.
- [9] L. Accatino, G. Bertin, and M. Mongiardo, "Elliptical cavity resonators for dual-mode narrow-band filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 12, pp. 2393–2401, Dec. 1997.

- [10] A. Morini, T. Rozzi, M. Pistolesi, and F. Spinsanti, "Variational analysis of arbitrarily oriented thick iris coupling a rectangular and an elliptical waveguide," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 3, pp. 1243–1246, June 1997.
- [11] L. Accatino, G. Bertin, and M. Mongiardo, "An elliptical cavity for triple-mode filters," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 3, pp. 1037–1040, June 1999.
- [12] G. Bertin, B. Piovano, L. Accatino, and M. Mongiardo, "Full-wave design and optimization of circular waveguide polarizers with elliptical irises," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 4, pp. 1077–1083, April 2002.
- [13] G. L. James, "Propagation and radiation from partially filled elliptical waveguide," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 136, no. 3, pp. 195–201, June 1989.
- [14] F. A. Alhargan and S. R. Judah, "Tables of normalized cutoff wavenumbers of elliptical cross section resonators," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, no. 2, pp. 332–338, Feb. 1994.
- [15] P. J. B. Clarricoats and A. D. Olver, *Corrugated Horns for Microwave Antennas*. London: Peter Peregrinus, 1984.
- [16] J. A. Fuller and N. F. Audeh, "The point-matching solution of uniform nonsymmetric waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-17, no. 2, pp. 114–115, Feb. 1969.
- [17] D. T. Thomas, "Functional approximations for solving boundary value problems by computer," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-17, no. 8, pp. 447–454, Aug. 1969.
- [18] R. M. Bulley, "Analysis of the arbitrarily shaped waveguide by polynomial approximation," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-18, no. 12, pp. 1022–1028, Dec. 1970.
- [19] H. H. Meinke, K. P. Lange, and J. F. Ruger, "TE- and TM waves in waveguides of very general cross section," *Proc. IEEE*, pp. 1436–1443, Nov. 1963.
- [20] J. B. Davies, "Review of methods for numerical solution of the hollow-waveguide problem," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 119, no. 1, pp. 33–37, Jan. 1972.
- [21] F. L. Ng, "Tabulation of methods for the numerical solution of the hollow waveguide problem," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, no. 3, pp. 322–329, March 1974.
- [22] J. Mazumdar, "A method for the study of TE and TM modes in waveguides of very general cross section," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-28, no. 9, pp. 991–995, Sept. 1980.
- [23] L. Gruner, "Characteristics of crossed rectangular coaxial structures," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-28, no. 6, pp. 622–627, June 1980.

- [24] N. P. Malakshinov and A. S. Smagin, "Investigation of arbitrarily shaped regular waveguides by the method of auxiliary sources," *Radio Eng. Elec. Phys.*, vol. 27, pp. 56–60, June 1982.
- [25] M. Israel and R. Miniowitz, "An efficient Finite Element Method for nonconvex waveguide based on Hermitian polynomials," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-35, no. 11, pp. 1019–1026, Nov. 1987.
- [26] P. Saguet and E. Pic, "Le maillage rectangulaire et le changement de maille dans la methode TLM en deux dimensions," *Electron. Lett.*, vol. 17, no. 7, pp. 277–279, April 1981.
- [27] A. S. Omar and K. Schünemann, "Application of the generalized spectral-domain technique to the analysis of rectangular waveguides with rectangular and circular metal inserts," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, no. 6, pp. 944–952, June 1991.
- [28] W. L. Schroeder and M. Guglielmi, "A contour-based approach to the multimode network representation of waveguide transitions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 46, no. 4, pp. 411–419, April 1998.
- [29] G. Conciauro, M. Bressan, and C. Zuffada, "Waveguide modes via an integral equation leading to a linear matrix eigenvalue problem," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 32, no. 11, pp. 1495–1504, Nov. 1984.
- [30] P. Arcioni, "Fast evaluation of modal coupling coefficients of waveguide step discontinuities," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 6, no. 6, pp. 232–234, June 1996.
- [31] M. Bozzi, G. Conciauro, and L. Perregrini, "On the evaluation of modal coupling coefficients by contour integrals," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 7, pp. 1853–1855, July 2002.
- [32] G. Conciauro, M. Guglielmi, and R. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis - CAD Techniques for Waveguide Components and Filters*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [33] G. Conciauro, P. Arcioni, M. Bressan, and L. Perregrini, "Wideband modeling of arbitrarily shaped H-Plane waveguide components by the BI-RME method," *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 44, no. 7, pp. 1057–1066, July 1996.
- [34] ———, "Wideband modeling of arbitrarily shaped E-Plane waveguide components by the BI-RME method," *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 44, no. 11, pp. 2083–2092, Nov. 1996.
- [35] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, ser. Wiley Classics Library. New York: John Wiley & Sons Wiley-Interscience, 1989, vol. I.
- [36] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, ser. IEE Electromagnetic Wave Series. London: Peter Peregrinus Ltd., 1986.

- [37] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, ser. Inc. New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [38] T. Itoh, *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structure*, ser. Wiley Classics Library. New York: John Wiley, 1989.
- [39] A. Wexler, "Solution of waveguides discontinuities by modal analysis," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 15, pp. 508–517, Sept. 1967.
- [40] M. Leroy, "On the convergence of numerical results in modal analysis," *IEEE Trans. on Antenas Propagation*, vol. 31, pp. 655–659, July 1983.
- [41] R. Sorrentino, M. Mongiardo, F. Alessandri, and G. Schiavon, "An investigation of the numerical properties of the mode-matching technique," *International Journal of Numerical Modelling*, vol. 4, pp. 19–43, April 1991.
- [42] A. Alvarez, G. Connor, and M. Guglielmi, "New simple procedure for the computation of the multimode admittance or impedance matrix of planar wave junctions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, no. 3, pp. 413–418, March 1996.
- [43] E. D. Sharp, "An exact calculation for a T-junction of rectangular waveguides having arbitrary cross section," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 15, no. 2, pp. 109–116, Feb. 1967.
- [44] G. Gerini, M. Guglielmi, and G. Lastoria, "Efficient integral formulations for admittance or impedance representation of planar waveguide junctions," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 3, pp. 1747–1750, June 1998.
- [45] V. E. Boria, G. Gerini, and M. Guglielmi, "An efficient inversion technique for banded linear systems," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 3, pp. 1567–1570, June 1997.
- [46] V. E. Boria, M. Guglielmi, and P. Arcioni, "Computer-aided design of inductively coupled rectangular waveguide filters including tuning elements," *Int. Journal of RF and Microwave Computer Aided Engineering*, vol. 8, no. 3, pp. 226–236, May 1998.
- [47] B. Gimeno and M. Guglielmi, "Full wave network representation for rectangular, circular, and elliptical to elliptical waveguide junctions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 3, pp. 376–384, March 1997.
- [48] S. Cogollos, *Caracterización Modal de Guías Arbitrarias y Aplicación a Dispositivos de Microondas*, ser. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia, 2002.
- [49] C. L. Ren and H.-C. Wang, "2 GHz feed horn-reflector antenna utilizing evanescent mode filter," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 77, pp. 545–546, June 1977.
- [50] C. K. Mok, "Design of evanescent-mode waveguide diplexers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 21, pp. 43–48, June 1973.

- [51] C. F. Craven and R. F. Skedd, *Evanescent Mode Microwave Components*. Artech House, 1987.
- [52] B. Gimeno and M. Guglielmi, "Multimode equivalent network representation for junctions between coaxial and circular waveguides," *Int. Journal of Microwave and Millimeter Wave Computed-Aided Engineering*, vol. 7, no. 2, pp. 180–194, March 1997.
- [53] M. Bressan and G. Conciauro, "Rapidly converging expressions for dyadic Green's functions in two-dimensional resonators of circular and rectangular cross section," *Alta Frequenza (special issue on Applied Electromagnetics)*, vol. 39, no. 3, pp. 188–190, 1983.
- [54] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, and L. Perregrini, *ANAPLAN-W on a SUN Platform*. Pavia, Italy: Università di Pavia, 1995.
- [55] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, ser. IEEE/OUP Press Series on Electromagnetic Waves. New York: IEEE Press: Oxford University Press, 1993.
- [56] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd ed., ser. Series on Electromagnetic Wave Theory. New York: IEEE Press, 1991.
- [57] J. Johnson and H. Wang, *Generalized Moment Methods in Electromagnetics: Formulation and Computer Solution of Integral Equations*. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [58] P. K. Kythe and P. Puri, *Computational Methods for Lineal Integral Equations*. Boston: Birkhäuser, 2002.
- [59] P. Arcioni, M. Bressan, and G. Conciauro, "Wideband analysis of planar waveguide circuits," *Alta Frequenza*, vol. 57, no. 5, pp. 217–226, June 1988.
- [60] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, second ed. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [61] H. J. Stalzer, M. Greenman, and F. G. Willwerth, "Modes of crossed rectangular waveguide," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, pp. 220–223, March 1976.
- [62] M. H. Chen, G. Tsandoulas, and F. G. Willwerth, "Modal characteristics of quadruple-ridged circular and square waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 22, pp. 801–804, Aug. 1974.
- [63] G. G. Gentili, "Properties of TE-TM mode-matching techniques," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, no. 9, Sept. 1991.
- [64] G. Figlia and G. G. Gentili, "On the line-integral formulation of Mode-Matching technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 2, pp. 578–580, Febr. 2002.

- [65] S. Cogollos, A. Vidal, H. Esteban, and V. E. Boria, "An efficient approach for the computation of the modal spectrum of ridged rectangular waveguides," *Proceedings of PIERS*, vol. 3, p. 1181, July 1998.
- [66] S. Cogollos, H. Esteban, and V. E. Boria, "Efficient computation of field patterns in arbitrary cross section waveguides," *IEEE AP-S International Symposium Digest*, vol. 1, p. 6, July 1999.
- [67] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. Kogakusha, Tokio: McGraw-Hill, 1953.
- [68] T. E. Rozzi and W. F. G. Mealenbrauker, "Wide-band network modelling of interacting inductive irises and steps," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 23, pp. 235–245, Feb. 1975.
- [69] R. Ihmels and F. Arndt, "Rigorous modal S-matrix analysis of the cross-iris in rectangular waveguides," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 2, no. 10, Oct. 1982.
- [70] K. Chan and S. Judah, "Two-port scattering at an elliptic-waveguide junction," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 8, pp. 1255–1262, Aug. 1997.
- [71] B. Gimeno and M. Guglielmi, "Multimode equivalent network representation for planar junctions involving elliptical waveguides," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 12, no. 5, pp. 272–275, Aug. 1996.
- [72] P. Matras, R. Bunger, and F. Arndt, "Modal scattering matrix of the general step discontinuity in elliptical waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 3, pp. 453–457, March 1997.
- [73] J. Uher, J. Bornemann, and U. Rosemberg, *Waveguide Components for Antenna Feed Systems. Theory and CAD*. Norwood: Artech House Inc., 1993.
- [74] H. Patzel and F. Arndt, "Double-plane steps in rectangular waveguides and their applications for transformers, irises and filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 30, no. 5, pp. 771–776, May 1982.
- [75] V. E. Boria, *Análisis de Problemas Electromagnéticos Mediante Métodos Modales y Matrices Generalizadas, y Aplicaciones*, ser. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia, 1997.
- [76] M. Guglielmi, "Simple CAD procedure for microwave filters and multiplexers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, no. 7, pp. 1347–1352, July 1994.
- [77] F. Arndt, R. Beyer, T. Reiter, T. Sieverding, and T. Wolf, "Automated design of waveguide components using hybrid mode-matching/numerical EM building-blocks in optimized-oriented CAD frameworks-state-of-art and recent advances," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, pp. 747–760, May 1997.

- [78] J. E. Page, "The effect of machining method of the performances of rectangular waveguide devices," *Proceeding of ESA workshop on advanced CAD for microwave filters and passive devices*, pp. 329–336, 1995.
- [79] J. M. Reiter and F. Arndt, "Rigorous analysis of arbitrarily shaped H- and E-plane discontinuities in rectangular waveguides by a full-wave boundary contour mode matching method," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 43, pp. 796–801, April 1995.
- [80] A. E. Williams, "A four-cavity elliptic waveguide filter," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 18, no. 12, pp. 1109–1114, Dec. 1970.
- [81] A. E. Atia and A. E. Williams, "Narrow bandpass waveguide filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 20, no. 4, pp. 258–265, April 1972.
- [82] H. C. Chang and K. A. Zaki, "Evanescent-mode coupling of dual-mode rectangular waveguide filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, no. 8, pp. 1307–1312, Aug. 1991.
- [83] C. Kudsia, R. Cameron, and W. C. Tang, "Innovations in microwave filters and multiplexing networks for communications satellite systems," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, no. 6, pp. 1133–1149, June 1992.
- [84] J. R. Montejo-Garai and J. Zapata, "Full-wave design and realization of multicoupled dual-mode circular waveguide filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 43, no. 6, pp. 1290–1297, June 1995.
- [85] S. Moretti, F. Alessandri, and R. Sorrentino, "Field theory design of a novel circular waveguide dual-mode filter," *Proc. 25th Eur. Microwave Conf.*, vol. 2, pp. 779–783, Sept. 1995.
- [86] L. Accatino, G. Bertin, and M. Mongiardo, "A four-pole dual mode elliptic filter realized in circular cavity without screw," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, no. 12, pp. 2680–2686, Dec. 1996.
- [87] R. Levy and T. Rozzi, "Precise design of coaxial low-pass filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 16, no. 3, pp. 142–147, March 1968.
- [88] H. W. Yao and K. A. Zaki, "Modeling of generalized coaxial probes in rectangular waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 43, no. 12, pp. 2805–2811, Dec. 1995.
- [89] H. Wang, K.-L. Wu, and J. Litva, "The higher order modal characteristics of circular-rectangular coaxial waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 3, pp. 414–419, March 1997.
- [90] R. Levy, "Theory of direct coupled cavity filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 15, pp. 340–348, June 1967.

- [91] R. V. Snyder, "New application of evanescent mode waveguide filter design," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 25, pp. 1013–1021, Dec. 1977.
- [92] G. F. Craven and C. K. Mok, "The design of evanescent mode waveguide bandpass filters for a prescribed insertion loss characteristic," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 19, pp. 195–208, March 1971.
- [93] A. M. K. Saad, J. D. Miller, A. Mitha, and R. Brown, "Analysis of antipodal ridge waveguide structure and application of extremely wide stopband lowpass filter," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 86, pp. 361–363, June 1986.
- [94] A. M. K. Saad, "Novel lowpass harmonic filters for satellite application," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 84, pp. 292–294, May 1984.
- [95] A. M. K. Saad, A. Mitha, and R. Brown, "Evanescent mode-serrated ridge waveguide bandpass harmonic filters," *Proc. 16th Eur. Microwave Conf.*, pp. 287–291, 1986.
- [96] R. V. Snyder, "Broadband waveguide filters with wide stopbands using a stepped-wall evanescent mode approach," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 83, pp. 151–153, May 1983.
- [97] T. Shen and K. A. Zaki, "Length reduction of evanescent-mode ridge waveguide bandpass filters," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 3, pp. 1491–1494, May 2001.
- [98] J. C. Nanan, J. W. Tao, H. Baudrand, B. Theron, and S. Vigneron, "A two-step synthesis of broadband ridged waveguide bandpass filters with improved performances," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, no. 12, pp. 2192–2197, Dec. 1991.
- [99] A. Kirilenko, L. Rud, V. Tkachenko, and D. Kulik, "Evanescent-mode ridged waveguide bandpass filters with improved performances," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 5, pp. 1324–1327, May 2002.
- [100] G. L. Matthaei, L. Young, and E. M. T. Jones, *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks and Coupling Structures*. Norwood: Artech House, 1980.
- [101] L. Lewin, "Propagation in curved and twisted waveguides of rectangular cross-section," *Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 102, pp. 75–80, 1955.
- [102] H. A. Wheeler and H. Schwiebert, "Step-twist waveguide components," *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 3, pp. 44–52, Oct. 1955.
- [103] B. C. De Loach, "Step-twist-junction waveguide filters," *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 9, pp. 130–135, March 1961.
- [104] L. Lewin and T. Ruehle, "Propagation in twisted square waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 28, pp. 44–48, 1980.

- [105] H. Yabe and Y. Moushiake, "An analysis of a hybrid-mode in a twisted rectangular waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 32, no. 1, pp. 65–71, Jan. 1984.
- [106] H. Yabe, K. Nishio, and Y. Moushiake, "Dispersion characteristic of twisted rectangular waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 32, no. 1, pp. 91–96, Jan. 1984.
- [107] J. L. Doane, "Low-loss twists in oversized rectangular twist," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 36, pp. 1033–1042, June 1980.
- [108] H. F. Lenzing and M. J. Gans, "Machined waveguide twist," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 38, no. 7, pp. 942–944, July 1990.
- [109] R. Beyer and F. Arndt, "Efficient modal analysis of waveguide filters including the orthogonal mode coupling elements by an MM/FE method," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 5, pp. 9–11, Jan. 1995.
- [110] J. Ritter and F. Arndt, "Efficient FDTD/matrix-pencil method for the full-wall scattering parameter analysis of waveguiding structures," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, no. 12, pp. 2450–2456, Dec. 1996.
- [111] J. Bornemann, "Short and machinable 90° twists for integrated waveguide applications," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 1, pp. 233–236, May 1994.
- [112] L. Delves and J. Mohamed, *Computational Methods for Integral Equations*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [113] J. Ottusch and M. Wandzura, "High-order Nyström method for computing waveguide modes," *ACES Journal*, vol. 17, no. 1, pp. 84–92, March 2002.
- [114] J. Sebastián and J. R. Torregrosa, *Algebra y Ecuaciones Diferenciales*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia, 1997.
- [115] R. L. Burden and J. D. Faires, *Análisis Numérico*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.