Viscoelasticidad. Modelo básico de Kelvin-Voigt.

Apellido, nombre	Balart Gimeno, Rafael Antonio (rbalart@mcm.upv.es) Montañés Muñoz, Néstor (nesmonmu@upvnet.upv.es) Quiles-Carrillo, Luís Jesús (luiquic1@epsa.upv.es) Torres-Giner, Sergio (storresginer@iata.csic.es) Lascano Aimacaña, Diego (dielas@epsa.upv.es) Rojas Lema, Sandra (sanrole@epsa.upv.es) Ivorra Martínez, Juan (juaivmar@epsa.upv.es)
Departamento	Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales (DIMM)
Centro	Escuela Politécnica Superior de Alcoy (EPSA) Universitat Politècnica de València (UPV)

1 Resumen de las ideas clave.

En este artículo vamos a trabajar con los **modelos físicos** que se emplean para explicar los fenómenos **viscoelásticos** en materiales, así como las **expresiones matemáticas** que permiten llevar a cabo un análisis. Teniendo en cuenta que la **viscoelasticidad** define una naturaleza **dual**: **sólidos elásticos** y **líquidos viscosos** y que los modelos físicos correspondientes son un **resorte** y un **émbolo**, respectivamente, este artículo se centra en el modelo básico de viscoelasticidad de **Kelvin-Voigt** que considera el acoplamiento en **paralelo** de ambos elementos físicos representativos de comportamiento elástico y viscoso.

2 Introducción.

En el ámbito de **ingeniería**, es bastante frecuente encontrar **asignaturas** ligadas al **comportamiento elástico** de los materiales (por ejemplo, elasticidad y resistencia de materiales). También es bastante frecuente la presencia en los Planes de Estudio, de asignaturas ligadas al **comportamiento de los fluidos** (ingeniería de fluidos o fluido-mecánica). Ello se debe a la relevancia que presentan los materiales con comportamiento elástico en diseño y cálculo en ingeniería, así como el comportamiento de fluidos en el diseño de instalaciones y tecnologías derivadas de gases, flujo de líquidos, etc.

Cuando se aborda el estudio de los **materiales poliméricos**, aparece una **dualidad** de comportamiento. Los **polímeros lineales** o **termoplásticos**, presentan una naturaleza **intermedia** entre sólidos elásticos y líquidos viscosos, de ahí que la disciplina que estudia su comportamiento es la denominada "**viscoelasticidad**" [1]. El elemento físico representativo del comportamiento **elástico** es un **resorte** y el modelo matemático que rige su comportamiento es la denominada **Ley de Hooke** que establece la proporcionalidad de la tensión aplicada (σ) con la elongación producida (ε), a través de una constante de proporcionalidad o elástica (ξ). Esta expresión (en la que no aparece la variable tiempo), sugiere que cuando se aplica una tensión (σ) a un material elástico, la elongación (ε) se produce de forma instantánea y, evidentemente no depende del tiempo [2,3].

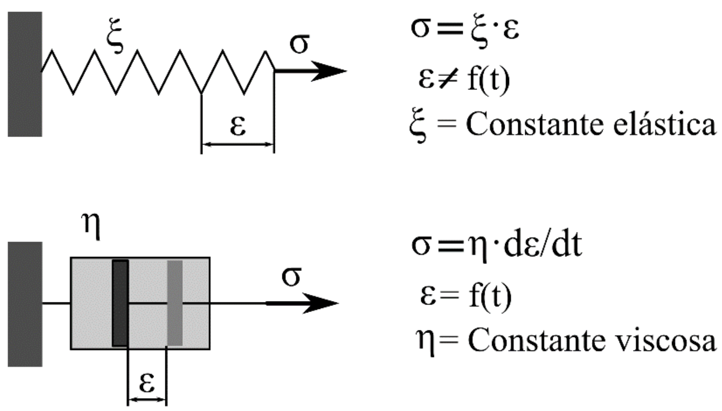

Figura 1. Representación esquemática de los modelos físicos básicos de comportamiento elástico (resorte) y viscoso (émbolo con un fluido) y sus expresiones matemáticas y características generales.

Con relación al comportamiento **viscoso**, el **modelo físico** que mejor se adapta es un **émbolo** o **pistón** con un determinado fluido en su interior. La expresión matemática que relaciona las tensiones y las elongaciones es la denominada Ley de Newton, que establece la proporcionalidad entre la tensión aplicada (σ) y la variación de la elongación con el tiempo ($d\varepsilon/dt$). La **constante** de proporcionalidad está ligada a la **naturaleza del fluido** y es un valor constante denominado constante viscosa o viscosidad (η). Como puedes deducir de la expresión de la Ley de Newton, la respuesta depende del tiempo, es decir, cuando se aplica una tensión (σ) a un fluido newtoniano, la variación de la elongación con el tiempo ($d\varepsilon/dt$) es proporcional a la tensión aplicada, con lo cual, la respuesta **sí** que **depende** del **tiempo** [4,5].

Como se ha indicado, los materiales **termoplásticos** ofrecen una naturaleza **híbrida o dual** entre el comportamiento puramente elástico y viscoso. Por ello, su comportamiento mecánico/reológico viene determinado por su naturaleza "**viscoelástica**". Para analizar el comportamiento mecánico/reológico según el punto de vista de la viscoelasticidad, cualquier **modelo físico** de tipo viscoelástico debe contener al menos un elemento elástico (**émbolo**) y un elemento viscoso (**resorte)**. Cuando el émbolo y el resorte se acoplan en **paralelo**, el modelo que se obtiene es el modelo básico de viscoelasticidad de **Kelvin-Voigt**, que, si bien no es perfecto, sí que representa una base sólida para llevar a cabo el análisis de diversos fenómenos derivados del comportamiento viscoelástico: **fluencia** (elongación creciente con el tiempo bajo la acción de una tensión constante) y **relajación** (liberación de tensiones con el paso del tiempo bajo la acción de una elongación/deformación constante) [6].

3 Objetivos.

El objetivo principal de este artículo docente es que puedas **identificar** las condiciones de **contorno** del modelo de **Kelvin-Voigt**, que servirán de base para deducir la **expresión** general de dicho modelo. Una vez obtenida esta expresión general, el artículo te guiará en el estudio de los fenómenos de **fluencia** y relajación según el modelo desarrollado, definiendo sus **pros** y **contras** como modelo viscoelástico.

4 Desarrollo.

El modelo de **Kelvin-Voigt** contempla el acoplamiento de un muelle y un émbolo en **paralelo** tal y como se indica en la **Figura 2**. Como puedes deducir, se trata de un modelo de **dos parámetros** que se corresponden con la **constante elástica** del resorte (ξ) y la **constante viscosa** del fluido en el émbolo (η).

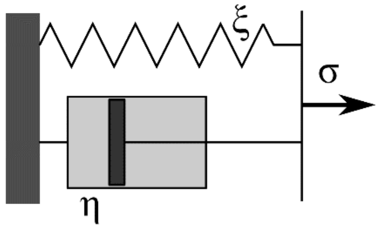

Figura 2. Representación esquemática del acoplamiento en paralelo de resorte y émbolo que definen el modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

Para llevar a cabo el análisis de las expresiones matemáticas que rigen este modelo es conveniente que aísles cada uno de los componentes con su respectiva tensión y elongación tal y como se muestra en la **Figura 3**. Con **1**=resorte; **2**=émbolo.

*Simplemente observando la **Figura 3**, puedes deducir las condiciones de contorno (relacionadas con las tensiones y elongaciones, si son constante o se suman) ¿podrías decir cómo será la **elongación** resultante? Y en relación a la **tensión**, ¿qué opinas sobre la **tensión** en cada uno de los elementos?*

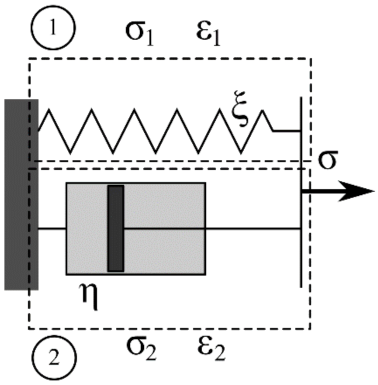

Figura 3. Representación esquemática del modelo físico de Kelvin-Voigt con las tensiones y elongaciones en cada uno de los componentes.

Según la **Figura 3**, puedes hacer las siguientes consideraciones:

En el elemento puramente elástico [resorte]

σ_1	tensión soportada por el resorte
ε_1	elongación producida en el resorte al aplicar la tensión σ_1
ξ	constante elástica del resorte

En el elemento puramente viscoso [émbolo]

σ_2	tensión soportada por el pistón
ε_2	elongación producida en el émbolo al aplicar la tensión σ_2
η	constante viscosa del fluido en el émbolo

De la observación del modelo gráfico (**Figura 3**) puedes deducir las condiciones de **contorno**. Con relación a la tensión total aplicada, (σ), se puede ver claramente que esta es compartida por el resorte (σ_1) y el émbolo (σ_2), de tal manera que se cumple el criterio de **aditividad de tensiones** (**Expresión 1**). Con relación a las elongaciones, la elongación total (ε), no es la suma de la elongación en cada componente; realmente la elongación total (ε) es idéntica en el resorte (ε_1) y en el émbolo (ε_2). Es lo que denominados el principio de igualdad de deformaciones (elongaciones) tal y como se indica en la **Expresión 1**.

$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ [Igualdad de elongaciones]
$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ [Adición de tensiones] **Expresión 1**

*Una vez has identificado las condiciones de contorno, **intenta llevar a cabo el análisis parcial** en cada uno de los **elementos**, **elástico** y **viscoso** según las expresiones correspondientes. Para obtener la expresión general del modelo de Kelvin-Voigt, basta* *con aplicar la condición de contorno correspondiente a la adición de tensiones. Para ello, debes intentar **evaluar la tensión** en cada uno de los modelos físicos según la expresión correspondiente (Ley de Hooke para el elemento elástico y Ley de Newton para el elemento viscoso). ¡**Inténtalo** antes de continuar con la lectura del artículo!*

La ecuación básica que rige la respuesta elástica en el resorte, es la **Ley de Hooke** que, aplicada al elemento elástico (1), te lleva a la siguiente expresión.

$$\sigma_1 = \xi \cdot \varepsilon_1$$ **Expresión 2**

*Venga, ahora que ya sabes cómo se ha aplicado la deducción en el elemento elástico, ¡intenta avanzar en la deducción con el **componente viscoso (2)**!* Como habrás deducido, basta con emplear la Ley de Newton para identificar el valor de la tensión en el elemento viscoso (2), tal y como se muestra en la **Expresión 3**.

$$\sigma_2 = \eta \cdot \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$ **Expresión 3**

Teniendo en cuenta el criterio de contorno correspondiente a la **adición** de las **tensiones**, puedes substituir la **Expresión 2** y **3** en la **Expresión 1**.

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \xi \cdot \varepsilon_1 + \eta \cdot \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$ **Expresión 4**

Y, asumiendo que las elongaciones son idénticas tanto a nivel global como en cada uno de los componentes (elástico y viscoso) tal y como se ha evaluado en las condiciones de contorno y reflejado en la **Expresión 1**, puedes obtener la expresión general de viscoelasticidad según el modelo de Kelvin-Voigt (**Expresión 5**).

$$\sigma = \xi \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$ **Expresión 5**

A partir de esta expresión general del modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, vamos a deducir las expresiones que rigen el comportamiento reológico a **fluencia** (variación de elongación con el tiempo bajo tensión constante) y **relajación** (variación de tensión con el tiempo bajo elongación constante) de materiales plásticos con comportamiento viscoelástico y evaluar sus ventajas y limitaciones.

4.1 Fluencia según el modelo de Kelvin-Voigt.

Como ya sabes, la **fluencia** o **plastodeformación** implica un alargamiento o **elongación creciente** a medida que transcurre el **tiempo**, debido al desenrollamiento de la estructura molecular en forma de ovillo en el polímero; todo ello, bajo la acción de una **tensión** aplicada **constante**. Así pues, la condición de fluencia implica que σ = cte. Si substituyes el valor de $\sigma=\sigma_0$=cte en la en la ecuación general del modelo de Kelvin-Voigt (**Expresión 5**), obtienes la siguiente ecuación diferencial representativa del comportamiento a fluencia según este modelo.

$$\xi \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = Cte$$ **Expresión 6**

Si integras la ecuación diferencial de la **Expresión 6**, obtienes la evolución de la elongación en función del tiempo, o fluencia (**Expresión 7**).

$$\varepsilon(t)=K\cdot\left[1-e^{-\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\cdot t}\right] \quad \text{donde} \quad \frac{\eta}{\xi}=\text{Constante de tiempo}$$ **Expresión 7**

*Teniendo en cuenta la naturaleza de la respuesta elástica y de la respuesta viscosa ¿Cuál crees que será el valor de la **constante "K")**? ¿Cuál será la elongación en el instante **inicial**?*

Si analizas matemáticamente la **Expresión 7**, te darás cuenta de que se trata de una función exponencial creciente, que tiende asintóticamente hasta el valor de K. Si ahora consideras el modelo físico con el resorte y el émbolo trabajando en paralelo, la deformación cuando $t\rightarrow\infty$, será la que permite el resorte. Es por ello para $t\rightarrow\infty$, la elongación será la que proporciona el resorte, es decir, $K=\frac{\sigma_0}{\xi}$.

Con relación al instante inicial en el que se produce el salto de tensión, $t\rightarrow 0$. Si substituyes este valor de t en la **Expresión 7**, el valor de elongación obtenido es **0**. Es decir, según el modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, la fluencia se produce de forma exponencial creciente hasta un valor máximo que viene definido por la constante elástica del resorte. El émbolo actúa como un amortiguador que ralentiza la respuesta del muelle. Esta situación se puede apreciar claramente en la **Figura 4**.

El modelo de Kelvin-Voigt es bastante sólido en cuanto a la forma de producirse la fluencia ya que los resultados experimentales cuadran con una fluencia de tipo exponencial creciente. No obstante, este modelo no predice la elongación instantánea (cuando $t\rightarrow 0$) y, además, solo explica fluencia de forma amortiguada hasta un valor máximo definido por la constante elástica del resorte. Es por ello, que el modelo básico de Kelvin-Voigt explica algunos aspectos de la fluencia, pero falla en otros.

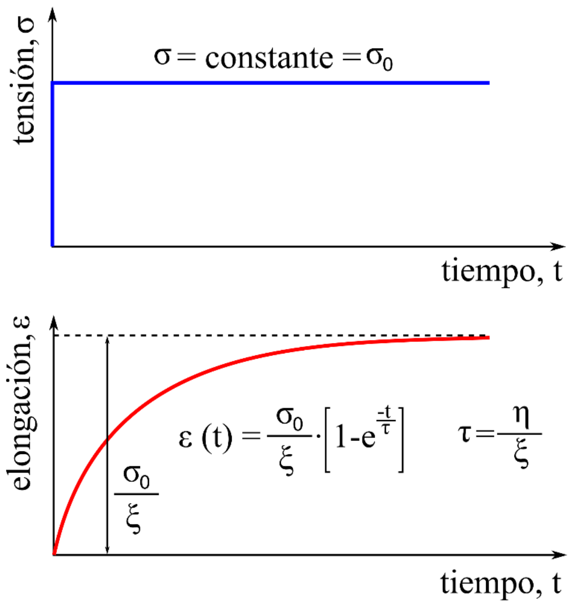

Figura 4. Representación esquemática del fenómeno de fluencia según el modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt con acoplamiento en paralelo de resorte y émbolo.

El modelo de Kelvin-Voigt, además de conocer la evolución de la elongación con el tiempo, permite estimar el valor del **módulo** del material a medida que transcurre el tiempo. Este es el denominado **módulo de fluencia** o de **plastodeformación**, que en materiales viscoelásticos, presenta una disminución con el tiempo. Para obtener el módulo de fluencia, basta con llevar a cabo una analogía con la expresión general de la Ley de Hooke $\varepsilon = \sigma \cdot \frac{1}{E}$.

*Teniendo en cuenta la expresión básica de la Ley de Hooke, ¿podrías determinar la variación del **módulo** con el tiempo?*

Como habrás podido deducir, se pueden identificar términos ($\varepsilon(t) = \sigma \cdot \frac{1}{E(t)}$) y obtener la expresión del módulo de fluencia o plastodeformación en función del tiempo, tal y como se muestra en la **Expresión 8**, que implica una disminución del módulo a medida que transcurre el tiempo. El valor máximo se da para $t \rightarrow 0$ y el valor mínimo (correspondiente a la constante elástica del resorte), se da para $t \rightarrow \infty$.

$$E(t) = \frac{1}{\frac{1}{\xi} \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \cdot t}\right]} = \frac{\xi}{1 - e^{-\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \cdot t}}$$ **Expresión 8**

4.2. Relajación de tensiones según el modelo de Kelvin-Voigt.

Cuando un material viscoelástico se somete a condiciones de elongación **constante**, se produce un fenómeno de **liberación** o **relajación de tensiones**. Ello se debe a la estructura del material viscoelástico. En el caso de los polímeros, la acción de una tensión inicial (la necesaria para alcanzar una determinada elongación constante), provocaría fluencia, pero como la elongación está restringida, el material reorganiza su estructura interna y libera tensiones. Esto implica que a medida que pasa el tiempo, cada vez se requiere una **tensión más baja** que la inicial para mantener el mismo nivel de elongación.

Por lo tanto, si el material se somete a una elongación constante, $\varepsilon = \varepsilon_0 = cte$, su variación con el tiempo es nula; es decir $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$. Si ahora substituyes este término en la ecuación general del modelo de Kelvin-Voigt (**Expresión 5**), obtienes:

$$\sigma = \xi \cdot \varepsilon_0$$ **Expresión 9**

Esta expresión indica que, bajo una elongación constante, la tensión la soporta solamente el resorte o componente elástico, y en consecuencia **no** hay **relajación**. Al trabajar en paralelo, es el componente elástico el responsable de la tensión inicial (σ_0) necesaria para alcanzar el nivel de elongación constante definido (ε_0). Además, dada la naturaleza elástica del resorte, la tensión se mantiene constante. Es por ello que el modelo de Kelvin-Voigt no explica adecuadamente los fenómenos de liberación de tensiones con el tiempo. En la **Figura 5** se muestra la representación gráfica de la respuesta del modelo de Kelvin-Voigt a relajación.

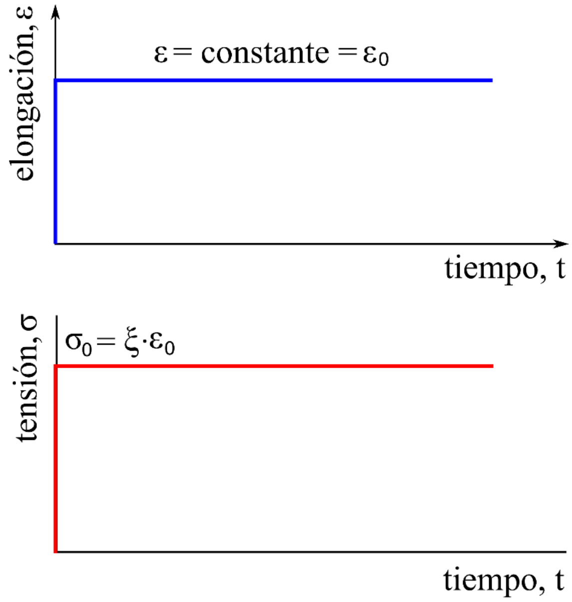

Figura 5. Representación esquemática del fenómeno de relajación de tensiones según el modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt con acoplamiento en paralelo de resorte y émbolo.

5. Conclusiones

Los materiales poliméricos presentan un comportamiento **viscoelástico**, es decir, simultáneamente ofrecen una respuesta **elástica** (que se rige por la Ley de Hooke y cuyo elemento físico representativo es un resorte) y una respuesta **viscosa** (que se rige por la Ley de Newton y cuyo elemento físico representativo es un émbolo con un fluido). Es por ello que cualquier modelo de viscoelasticidad debe considerar simultáneamente un componente elástico (resorte) y uno viscoso (émbolo). Según se produzca el acoplamiento entre estos elementos, en **serie** o en **paralelo**, se tiene el modelo de **Maxwell** o el modelo de **Kelvin-Voigt**, respectivamente.

El modelo de **Kelvin-Voigt** es uno de los modelos básicos y simples que aborda los fenómenos de viscoelasticidad y, para ello, considera el **acoplamiento** en **paralelo** de un resorte y un émbolo. En el modelo de Kelvin-Voigt los elementos elástico y viscoso trabajan en condiciones de **isodeformación** y **adición de tensiones**, de tal manera que es posible deducir la expresión básica del modelo. Una vez obtenida la expresión básica, es posible deducir cómo explica este modelo diversos fenómenos relacionados con el comportamiento viscoelástico.

Con relación a los fenómenos de **fluencia** (elongación creciente con el tiempo bajo la acción de tensión constante), merece la pena destacar que el modelo de Kelvin-Voigt predice una fluencia de tipo **exponencial creciente** desde un valor nulo hasta un valor asintótico máximo definido por la constante elástica del resorte. Si bien el modelo de Kelvin-Voigt explica adecuadamente la forma de fluencia, de tipo exponencial creciente, la experiencia demuestra que cuando se aplica una tensión constante, se produce una elongación inicial ligada a la respuesta elástica inmediata del material. Por otro lado, la máxima fluencia que permite el modelo de Kelvin-Voigt, viene condicionada por la constante elástica del resorte.

En cuanto a los fenómenos de **relajación** o liberación de tensiones bajo la acción de una elongación constante, el modelo de Kelvin-Voigt presenta importantes **limitaciones** ya que no es capaz de explicar liberación de tensiones con el tiempo. Ello se debe a la forma de acoplamiento en paralelo. Con este modelo en paralelo, es el resorte el que soporta la tensión inicial necesaria para conseguir cierta elongación y, además, como el elemento elástico no varía sus propiedades con el tiempo, no se produce liberación de tensión.

A pesar de las carencias o limitaciones de este modelo básico, es conveniente resaltar su utilidad para llevar a cabo un análisis conceptual y crítico de los **fenómenos viscoelásticos** y comprender los fenómenos asociados: fluencia y relajación.

6. Referencias

[1] Ferry, John D. "Viscoelasticity properties of polymers". John Wiley & Sons (1980).

[2] Aklonis, John J. "Introduction to polymer viscoelasticity". John Wiley & Sons (1983).

[3] Ward, I.M., Sweeney, J. "An introduction to the mechanical properties of solid polymers". John Wiley & Sons (2004).

[4] Valiente Camacho, A, "Curso de comportamiento mecánico de materiales, elasticidad y viscoelasticidad.". García-Maroto Editores (2014).

[5] Lin, Y.-H., "Polymer viscoelasticity: basis, molecular theories, experiments and simulations", Ed. World Scientific, (2011).

[6] Phan-Thien, Nhan "Understanding viscoelasticity", Ed. Springer (2002).