

# Resalto Hidráulico Ondulatorio

## *Undular Hydraulic Jump*

Castro-Orgaz, O.<sup>a1</sup>, Roldán Cañas, J.<sup>a2</sup> y Dolz Ripollés, J.<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Agronomía, Universidad de Córdoba, Edificio Leonardo Da Vinci - Campus Universitario Rabanales. Ctra. Madrid km 396, 14071-Córdoba (España). E-mail: <sup>a1</sup> ag2caoro@uco.es, <sup>a2</sup> jroldan@uco.es

<sup>b</sup>Instituto Flumen, E.T.S. d'Enginyers de Camins, Jordi Girona 1-3, D1, 08034-Barcelona (España). E-mail: j.dolz@upc.edu

Recibido: 17/10/2014

Aceptado: 15/04/2015

Publicado: 28/04/2015

---

## RESUMEN

La transición de régimen supercrítico a régimen subcrítico cuando el número de Froude  $F_o$  aguas arriba está próximo a la unidad da lugar a un tren de ondas estacionario llamado resalto hidráulico ondulatorio. La caracterización del resalto ondulatorio es muy compleja, debido a que el tren de ondas invalida la hipótesis de presión hidrostática usada en modelos de flujo gradualmente variado, y a otros fenómenos como las ondas de choque del flujo supercrítico. El objetivo de este trabajo es presentar un modelo para el resalto hidráulico ondulatorio obtenido de las ecuaciones de Reynolds para flujo turbulento, asumiendo que el número de Reynolds  $R$  es elevado. Se presentan soluciones analíticas sencillas para mostrar las características físicas de la teoría, así como un modelo numérico para la integración de las ecuaciones completas. El límite de aplicación de la teoría se discute en relación a la rotura de onda y formación de vórtices. La validez del modelo matemático es revisada de forma crítica usando datos en modelo físico, para resaltar aspectos en los que es necesaria más investigación..

**Palabras clave** | Flujo ondulatorio; Ondas de choque; Resalto hidráulico; Vórtice.

---

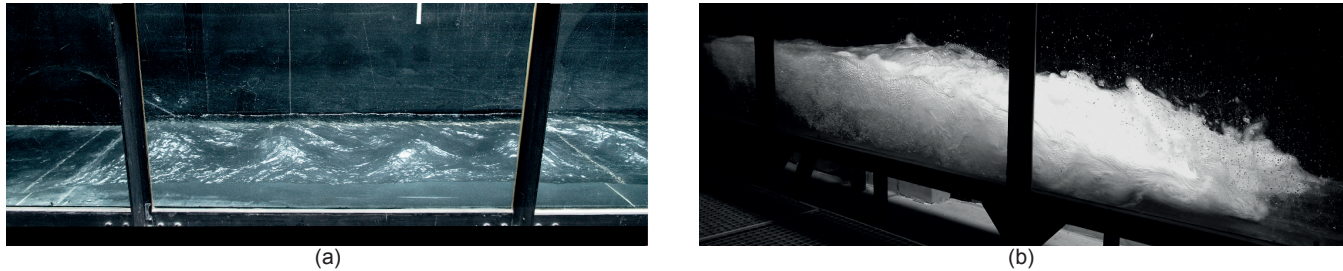
## ABSTRACT

*The transition from subcritical to supercritical flow when the inflow Froude number  $F_o$  is close to unity appears in the form of steady state waves called undular hydraulic jump. The characterization of the undular hydraulic jump is complex due to the existence of a non-hydrostatic pressure distribution that invalidates the gradually-varied flow theory, and supercritical shock waves. The objective of this work is to present a mathematical model for the undular hydraulic jump obtained from an approximate integration of the Reynolds equations for turbulent flow assuming that the Reynolds number  $R$  is high. Simple analytical solutions are presented to reveal the physics of the theory, and a numerical model is used to integrate the complete equations. The limit of application of the theory is discussed using a wave breaking condition for the inception of a surface roller. The validity of the mathematical predictions is critically assessed using physical data, thereby revealing aspects on which more research is needed..*

**Key words** | Undular flow; Shock waves; Hydraulic jump; Vortex.

## INTRODUCCIÓN

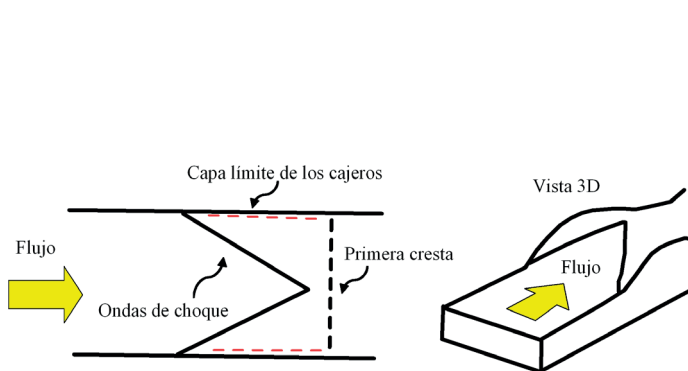
La transición de régimen supercrítico a régimen subcrítico cuando el número de Froude  $F_o = U_o / (gh_o)$  de la corriente aguas arriba esta cercano a la unidad ocurre en forma de tren de ondas estacionario, y recibe el nombre de resalto hidráulico ondulatorio (Figura 1a), donde  $U_o$  es la velocidad media y  $h_o$  el calado (Figura 1a). Este tren de ondas puede tener una extensión considerable, y reemplaza al vórtice del resalto hidráulico clásico (Figura 1b).



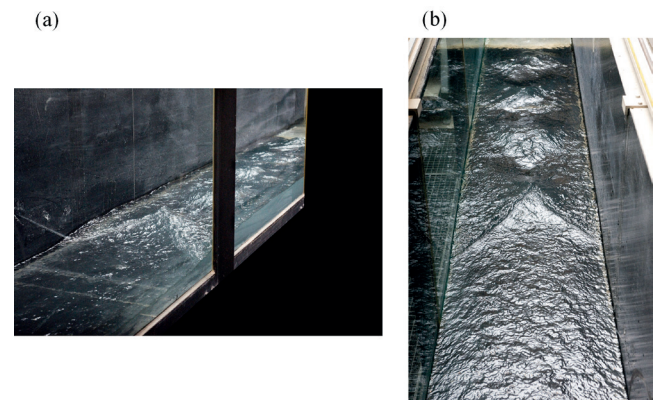
**Figura 1** | (a) Resalto hidráulico ondulatorio ( $F_o=1.6$ , VAW, ETH Zurich) (flujo de izquierda a derecha), (b) Resalto hidráulico con remolino ( $F_o=3.2$ , VAW, ETH Zurich)(flujo de derecha a izquierda).

El fenómeno del resalto hidráulico ondulatorio es complejo y ha recibido considerables esfuerzos para caracterizarlo mediante modelos físicos (Ryabenko, 1990; Chanson, 1993, 1995, 1996, 2000, 2009; Chanson y Montes, 1995; Reinauer y Hager, 1995; Ohtsu *et al.*, 2001, 2003; Gotoh, *et al.*, 2005). La estructura del resalto ondulatorio es bidimensional para valores  $F_o < 1.2$  (Reinauer y Hager, 1995). A partir de este valor se empiezan a generar unas ondas de choque laterales, consecuencia de la separación de la capa límite de los cajeros. Dicha capa límite está sometida a un gradiente de presión adverso dado por los calados crecientes en la dirección del movimiento. Una vez se separa la capa límite se produce una recirculación del fluido en la zona de separación, la cual actúa guiando la corriente exterior como si de un muro de cajero virtual se tratase. La consecuencia es que el ancho efectivo del flujo se reduce, y como es bien conocido, en un flujo supercrítico de anchura variable se generan ondas de choque. (Figura 2).

El fenómeno se vuelve tridimensional, compuesto de una primera cresta con marcada forma triangular (Figura 3a), a la cual prosigue un tren de ondas con valles y crestas 3D (Figura 3b).

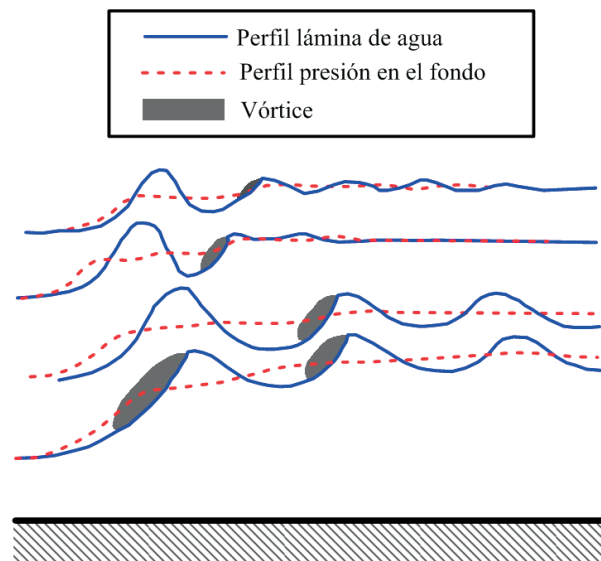


**Figura 2** | Ondas de choque y capa límite de los cajeros (adaptado de Montes, 1986).



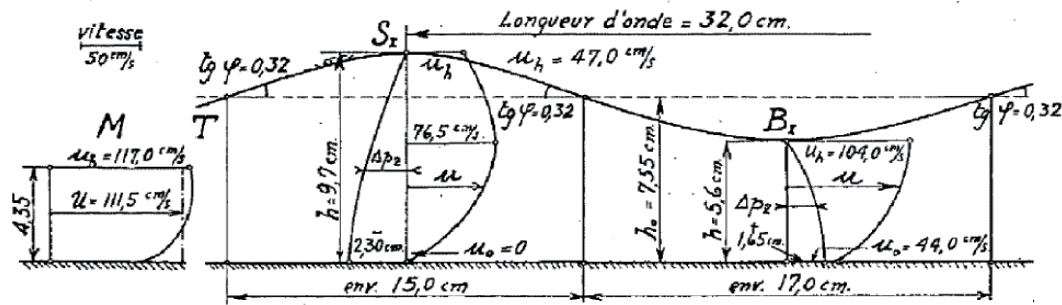
**Figura 3** | (a) Primera onda,  $F_o=1.6$  (flujo de izquierda a derecha), (b) vista general del tren de ondas,  $F_o=1.6$  (VAW, ETH Zurich) (flujo desde abajo hacia arriba).

Esta situación se mantiene si  $F_o < 1.7$ , aproximadamente. A partir de dicho valor se produce una rotura de la primera ondulación del resalto y aparece un pequeño vórtice superficial encima de la primera onda: es el precursor del remolino de un resalto hidráulico clásico. El vórtice de superficie aumentará de tamaño progresivamente a medida que aumenta  $F_o$ , hasta que las ondulaciones desaparecen y se forma un resalto hidráulico con un remolino que provoca una alta turbulencia, recirculación y entrada de aire (Figura 1b) a partir de  $F_o > 2.5$ . No obstante, Ryabenko (1990) encontró mediante medidas en modelo físico que el resalto ondulatorio es muy sensible a las condiciones del flujo de aproximación, en concreto, a la existencia de una distribución no hidrostática de la presión en el mismo. Reinauer y Hager (1995) determinaron la misma sensibilidad del resalto a las condiciones de aproximación si el calado de aproximación es pequeño y provoca efectos de escala, mientras que Ohtsu *et al.* (2001) encontraron que el desarrollo de la capa límite en la sección de aproximación es igualmente importante. La caracterización matemática del resalto ondulatorio es por tanto compleja, debido a la existencia de un tren de ondas que invalida la hipótesis de presión hidrostática usada en modelos de flujo gradualmente variado, además de a otros fenómenos como la existencia de ondas de choque y la gran dependencia de las condiciones de flujo de aproximación. La Figura 4 muestra de forma cualitativa algunos de los perfiles experimentales observados por Ryabenko (1990), donde se aprecian las diferencias entre el calado y la presión en el fondo. Además, se observa de forma progresiva la rotura de ondas conforme aumenta  $F_o$  (desde arriba hacia abajo)



**Figura 4** | Perfiles de superficie libre y de presión en el fondo para diversos resaltos ondulatorios (adaptado de Ryabenko, 1990) (El número de Froude aumenta conforme el calado disminuye, a caudal constante).

Una característica básica del resalto hidráulico ondulatorio es que se trata de un problema de flujo turbulento (Grillhofer y Schneider, 2003), a pesar de que diversos intentos de caracterizarlo han considerado soluciones de movimiento potencial plano (Iwasa, 1955; Marchi, 1963; Mandrup-Andersen, 1978; Ryabenko, 1990). Fawer (1937) fue el primero en medir experimentalmente las distribuciones de velocidad y presión en un resalto ondulatorio (Figura 5). En la Figura 5 se observa que la presión es superior a la hidrostática bajo los valles, e inferior bajo las crestas, con  $\Delta p_z$  la desviación de la presión respecto a la hidrostática. Estas presiones dinámicas están originadas por la fuerza centrípeta consecuencia de la curvatura de las líneas de corriente, la cual actúa en la misma dirección y sentido opuesto a la gravedad en las crestas (depresiones dinámicas,  $\Delta p_z < 0$  en la Figura 5), y en la misma dirección y sentido a la gravedad en los valles (sobrepresiones dinámicas,  $\Delta p_z > 0$  en la Figura 5). El perfil de velocidad es marcadamente no-uniforme, y no sigue el patrón de flujo que resultaría de resolver una red de corriente de flujo no viscoso e irrotacional (Chanson, 1993, 1995, 2000).



**Figura 5** | Distribuciones de velocidad y presión en un resalto hidráulico ondulatorio (Fawer, 1937).

Una adecuada caracterización del resalto ondulatorio es precisa para determinar correctamente los flujos transcíticos sobre lecho móvil, dado que la formación de ondas no-hidrostáticas en superficie condiciona los procesos morfodinámicos asociados a las formas de lecho (Chanson, 2000; Castro-Orgaz y Hager, 2011b) (Figura 6). Por tanto, el estudio del patrón básico de flujo en un resalto ondulatorio es relevante para comprender el desarrollo de formas de lecho y el consecuente incremento de rozamiento provocado por las mismas.



**Figura 6** | Formas del lecho en canal con fondo móvil sometido a resalto hidráulico ondulatorio (VAW, ETH Zurich).

Joseph Boussinesq desarrolló un procedimiento simplificado para incluir los efectos no-hidrostáticos en el balance de cantidad de movimiento del flujo en lámina libre (Boussinesq, 1877; Castro-Orgaz y Hager, 2011a). El procedimiento fue posteriormente generalizado por François Serre (Serre, 1953; Castro-Orgaz y Hager, 2011c). Este tipo de modelo se conoce como “ecuaciones tipo Boussinesq”, y ha sido aplicado al caso del resalto hidráulico ondulatorio por diversos autores (Iwasa, 1955; Marchi, 1963; Hager y Hutter, 1984; Montes, 1986; Montes y Chanson, 1998; Castro-Orgaz, 2010; Castro-Orgaz y Chanson, 2011; Bose *et al.*, 2012).

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo para el resalto hidráulico ondulatorio obtenido de las ecuaciones de Reynolds para flujo turbulento, contrariamente a modelos previos basados en soluciones de movimiento potencial plano. Primeramente se desarrollan las ecuaciones de gobierno, para ser posteriormente simplificadas asumiendo que el número de Reynolds  $R_o = (U_o h_o) / \nu$  del flujo supercrítico de aproximación es elevado, con  $\nu$  = viscosidad cinemática. Seguidamente, se presentan soluciones analíticas particulares para mostrar las características físicas de las soluciones, formulándose a continuación un modelo numérico para la integración de las ecuaciones completas. El límite de aplicación de la teoría se establece mediante un criterio de

rotura de onda. Los resultados del modelo numérico son entonces comparados con observaciones experimentales realizadas en modelo físico. La validez del modelo matemático es revisada de forma crítica para resaltar aspectos en los que es necesaria más investigación en modelo físico y matemático.

## ECUACIONES DE GOBIERNO

El perfil de velocidad turbulenta  $\bar{u}$  en la dirección  $x$  para flujo en lámina libre se puede aproximar mediante una función de semejanza como

$$\frac{\bar{u}(x,y)}{U(x)} = \psi(\eta) \quad (1),$$

donde  $U=q/h$ =velocidad media,  $q$ =caudal por unidad de ancho,  $h$ =calado,  $\eta=y/h$ ,  $x$ =distancia longitudinal medida a lo largo del fondo del canal,  $y$ =coordenada perpendicular a  $x$ ; barras indican variables promediadas temporalmente en la descomposición de Reynolds (Figura 7). La función  $\psi$  puede aproximarse mediante una función potencial (Montes 1986, Bose y Dey 2007) o mediante la ley logarítmica de la pared (White 1991). Si se usa una ley potencial  $\psi=(1+N)\eta^N$ , donde  $N$ =exponente del perfil de velocidad, el cual depende de  $R$ .

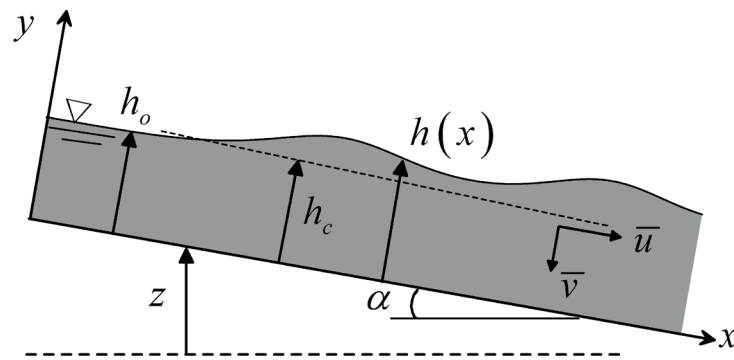


Figura 7 | Resalto hidráulico ondulatorio: definición de variables.

La ecuación de continuidad para flujo incompresible es

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (2),$$

donde  $\bar{v}$  es la componente del vector velocidad en la dirección  $y$ . Integrando la ecuación (2) parcialmente respecto a la variable  $y$ , mediante el uso de la ecuación (1) para caracterizar  $\bar{u}(x,y)=\psi(\eta)U(x)$ , resulta

$$\bar{v} = - \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy + F(x) = \bar{u} h' \eta + F(x) \quad (3)$$

donde  $h'=dh/dx$  y  $F(x)$ = función arbitraria de integración, la cual se deduce que es nula usando la condición cinemática en la solera del canal,  $\bar{v}=0$ . Las ecuaciones (1) y (3) definen el campo de velocidades para flujo turbulento. Si se asumen condiciones de turbulencia gradualmente variada (Bose y Dey 2007) los gradientes espaciales de las tensiones de Reynolds son pequeños, con lo que se puede escribir

$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} \approx 0, \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} \approx 0, \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} \approx 0 \quad (4),$$

donde las primas indican componente fluctuante en la descomposición de Reynolds. La ecuación de Reynolds en la dirección  $y$  es

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} \quad (5),$$

donde la subcapa laminar ha sido despreciada, con  $\overline{p}$ =presión media y  $\alpha$ =ángulo de inclinación de la solera con la horizontal. La ecuación de Reynolds en la dirección  $x$  es

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} \quad (6)$$

La aceleración convectiva en la ecuación (5) (balance de cantidad de movimiento en dirección  $y$ ) se puede expresar usando la ecuación (2) como

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \overline{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\overline{v}}{\overline{u}} \right) \quad (7)$$

Usando las ecuaciones (1), (3), (4) y (7), la ecuación (5) da, tras su integración, la distribución de la presión en la dirección  $y$

$$\frac{\overline{p}}{\gamma} = (h-y) \cos \alpha + \frac{U^2}{g} (hh'' - h'^2) \int_{\eta}^1 \eta \psi^2 d\eta - \frac{\overline{v'^2}}{g} \quad (8)$$

donde  $h''=d^2h/dx^2$ . Para obtener una ecuación que permita calcular el perfil de la lámina de agua  $h=h(x)$  es preciso integrar verticalmente el balance de cantidad de movimiento en la dirección  $x$ , dado por la ecuación (6). Para ello el gradiente  $\partial \overline{p}/\partial x$  se calcula usando la ecuación (8), teniendo en cuenta que el término  $\partial \overline{v'^2}/\partial x$  es despreciable usando las ecuaciones (4). La aceleración convectiva en dicha ecuación (balance de cantidad de movimiento en dirección  $x$ ) se puede transformar en

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u} \overline{v}}{\partial x} \quad (9),$$

lo cual facilita la integración. Usando la identidad (9) en la ecuación (6), y teniendo en cuenta las ecuaciones (1), (3), (4) y (8), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales tras integrar la ecuación (6) desde  $y=0$  hasta  $y=h$

$$\frac{dS}{dx} = h(\sin \alpha - S_f) \quad (10)$$

donde  $S_f$ =pendiente de fricción y  $S$ =fuerza específica o impulso, dado por (Montes, 1998; Chaudhry, 2008)

$$S = \int_0^h \left( \frac{\overline{u^2}}{g} + \frac{\overline{p}}{\gamma} \right) dy = \beta \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2} \cos \alpha + \frac{q^2}{gh} m (hh'' - h'^2) \quad (11)$$

En la ecuación (11)  $\beta$ =coeficiente de Boussinesq, dado por

$$\beta = \int_0^1 \psi^2 d\eta \quad (12)$$

y  $m$ =coeficiente de distribución de la presión

$$m = \int_0^1 d\eta \int_{\eta}^1 \eta \psi^2 d\eta \quad (13)$$

El sistemas de ecuaciones diferenciales dado por las ecuaciones (10) y (11) representa una solución de las ecuaciones de Reynolds basada en la semejanza del perfil turbulento de velocidad y en turbulencia gradualmente variada. Por tanto, dicha solución será adecuada para perfiles de flujo continuos, como en transiciones, flujos ondulatorios y depresiones hidráulicas, pero no en casos donde se produce una rotura de onda con formación de vórtices y flujo en recirculación, dado que en esos casos la turbulencia no puede suponerse que sucede de forma gradualmente variada, aún cuando la hipótesis de semejanza en el perfil de velocidades si podría ser válida mediante el uso de una normalización adecuada recurriendo al análisis dimensional (Montes, 1998). Para resolver las ecuaciones (10) y (11) es necesario introducir un perfil de velocidades normalizado  $\psi$ . Para números de Reynolds elevados ( $R \rightarrow \infty$ ) resulta que  $N \rightarrow 0$  (White, 1991), lo que da  $\psi=1$ . Usando este resultado en las ecuaciones (12) y (13) se obtiene  $\beta=1$  y  $m=1/3$ . Las ecuaciones (10) y (11) pueden entonces reescribirse en la siguiente forma con significado energético

$$\frac{dH}{dx} = S_o - S_f \quad (14)$$

donde  $S_o$ =pendiente del canal y  $H$ =energía específica, dada por

$$H = h + \frac{q^2}{2gh^2} \left( 1 + \frac{2hh'' - h'^2}{3} \right) \quad (15)$$

En condiciones de flujo gradualmente variado los términos de orden superior en la ecuación (15) pueden ser despreciados, resultando la clásica ecuación de energía específica debida a Bakhmeteff  $H=h+U^2/(2g)$  (Montes, 1998). Las ecuaciones (14) y (15) pueden obtenerse usando el principio de la energía mediante la primera ley de la termodinámica, aunque el desarrollo matemático es más complejo.

## SOLUCIONES ANALÍTICAS

Para estudiar el tipo de soluciones que pueden obtenerse del sistema dado por las ecuaciones (14) y (15) es interesante considerar casos simplificados en los que pueden encontrarse soluciones analíticas. En el caso de flujo en un canal horizontal en el que la fricción puede ser despreciada se tiene  $H$ =constante. Entonces, la ecuación diferencial de gobierno es

$$h + \frac{q^2}{2gh^2} \left( 1 + \frac{2hh'' - h'^2}{3} \right) = \text{const} \quad (16)$$

La ecuación (16) puede ser integrada de forma sencilla dado que  $d(h_x/h)/dx=(h''/h)-(h'^2/h^2)$ . Usando esta relación sencilla la primera integral de la ecuación (16) es

$$\frac{q^2}{6g} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 = -Sh - \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{2g} + Ch^2 \quad (17),$$

donde  $C$  es una constante de integración y  $S=h_o^2/2+q^2/(gh_o)$  la fuerza específica o impulso de la corriente uniforme, esto es, una versión simplificada de la ecuación (11). Considérese una corriente supercrítica de calado  $h_o$  en los límites del dominio de integración, en el interior del cual existe una perturbación en forma de flujo no uniforme. La ecuación (17) permite analizar qué tipo de perfiles de lámina de agua pueden existir en estas circunstancias. Considérese que para  $x \rightarrow \pm\infty$  tenemos  $h_x(h \rightarrow h_o) \rightarrow 0$ , con lo que la constante  $C$  puede ser determinada y la integración de la ecuación (17) da

$$\frac{Y-1}{(F_o^2-1)} = \sec h^2 \left[ \frac{(3F_o^2-3)^{1/2}}{F_o} \frac{x}{2h_o} \right] \quad (18)$$

donde  $Y=h(x)/h_o$  y  $F_o=q/(gh_o^3)^{1/2}$ =número de Froude de la corriente supercrítica no perturbada. La ecuación (18) representa el perfil de una onda solitaria y es el único perfil de flujo no uniforme posible a partir de una corriente supercrítica (Benjamin y Lighthill, 1954; Hager y Hutter, 1984). El calado máximo  $h_m$  de la onda solitaria resulta ser por tanto,  $h_m=h_o F_o^2$ . Las ecuaciones de flujo gradualmente variado, p.ej. el diagrama de energía específica dado por  $H=h+U^2/(2g)$ , no permiten explicar la existencia de ondas

solitarias. Si la corriente no perturbada es subcrítica,  $F_o < 1$ , no existe cambio de régimen y se puede demostrar que la integración de la ecuación (17) se expresa en función de integrales elípticas Jacobianas. Dicha solución es conocida como “onda cnoidal”, y es un tren de ondas de amplitud y longitud constantes, en el que las crestas corresponden a un régimen subcrítico, y los valles pueden corresponder a cualquier régimen. La ecuación (17) puede por tanto representar ondas de translación no-lineales.

## LÍMITE DE VALIDEZ DE LA TEORÍA

Es preciso establecer un límite de validez a la teoría de segundo orden anteriormente presentada, debido que la solución propuesta, dada por un perfil de velocidad uniforme y tensiones de Reynolds gradualmente variadas, es válida solo si las ondas generadas por el modelo no rompen y generan vórtices. Por ello, el criterio de validez de los desarrollos se basa en determinar bajo qué condiciones se inicia la generación de un vórtice en la superficie libre del flujo. Para un flujo sin fricción y en canal horizontal, se puede demostrar que la ecuación (15) es la relación de Bernoulli para la línea de corriente superficial, con lo que el segundo término de la misma es el sumando cinético en la superficie libre. Si este se anula  $H=h$ , lo que significa que la generación de un flujo de retroceso (velocidad negativa) es incipiente, con la aparición del correspondiente vórtice y la recirculación del fluido. Por tanto, el criterio de rotura está dado por la identidad

$$1 + \frac{2hh'' - h'^2}{3} = 0 \quad (19)$$

Con propósitos ilustrativos, considérese de nuevo el caso de la onda solitaria. La ecuación (15) aplicada entre la corriente no perturbada y la cresta de la onda solitaria, en condiciones de rotura incipiente, da  $h_o + q^2/(2gh_o^2) = h_m$ . Como  $h_m = h_o F_o^2$  se obtiene una ecuación para condiciones de rotura, resultando la solución  $F_o = (2)^{1/2} = 1.41$ . Este valor está en concordancia, como media, con los valores experimentales de Reinauer y Hager (1995), quienes determinaron que la rotura de la primera onda del resalto hidráulico sucede en el intervalo  $1.36 < F_o < 1.6$  siempre que el flujo de aproximación no esté sometido a efectos de escala debidos a la viscosidad y la energía superficial.

## SOLUCIONES NUMÉRICAS

La solución general de las ecuaciones (14) y (15) requiere el uso de métodos numéricos. Este sistema es equivalente a una ecuación diferencial ordinaria de 3<sup>er</sup> orden, con lo que se precisan tres condiciones de borde en la sección donde comienza la integración numérica. En este estudio se ha tomado como sección de inicio de los cálculos la corriente supercrítica uniforme aguas arriba del resalto ondulatorio, con lo que las condiciones de borde son  $h_o = h(x=0)$ ,  $h'_o = h'(x=0) = 0$  y  $h''_o = h''(x=0) = 0$ . Nótese que  $H_o = h_o + q^2/(2gh_o^2)$ . El sistema de ecuaciones diferenciales ha sido resuelto mediante el método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden (Chaudhry, 2008). La pendiente de fricción se ha definido usando la ecuación de Darcy-Weisbach

$$S_f = \frac{f}{4R_h} \frac{U^2}{2g} \quad (20)$$

donde  $f$ =factor de fricción y  $R_h$ =radio hidráulico, el cual se ha aproximado al calado. Para estimar  $f$  evitando soluciones iterativas del diagrama de Moody se ha usado la aproximación al mismo de Haaland para régimen hidráulicamente liso (White, 1991)

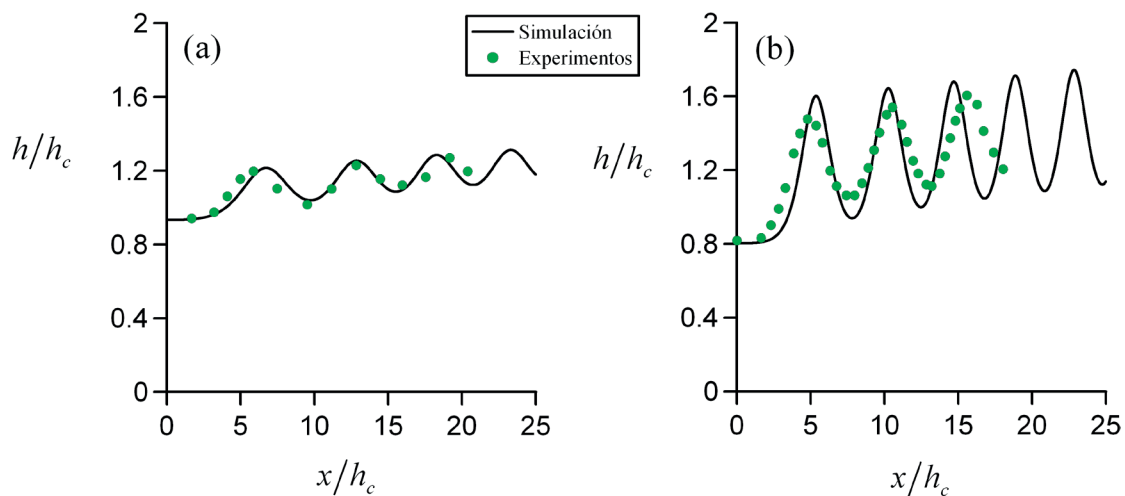
$$f = \left[ -1.8 \log_{10} \left( \frac{6.9}{4R_o} \right) \right]^2 \quad (21)$$

donde  $R_o = q/\nu$ = número de Reynolds del flujo supercrítico de aproximación y  $\nu$ =viscosidad cinemática.



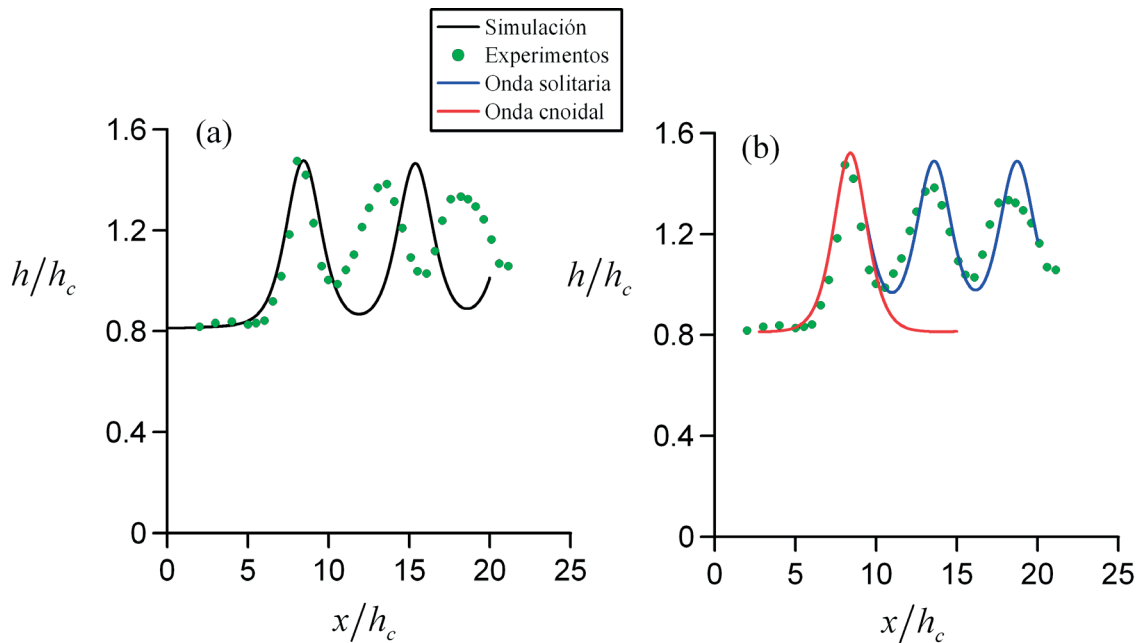
## RESULTADOS

Los resultados numéricos obtenidos para un resalto ondulatorio de  $F_o=1.11$  y  $R_o=93,000$  en un canal de pendiente  $S_o=1/282$  se muestran en la Figura 8a, normalizados usando el calado crítico  $h_c=(q^2/g)^{1/3}$ . Dicha simulación se compara en la misma figura con los datos experimentales de Gotoh *et al.* (2005). Se observa que los resultados del modelo están en buena concordancia con las medidas en modelo físico para este caso, en que el flujo es perfectamente 2D, sin presencia de ondas de choque. Las simulaciones para un resalto de  $F_o=1.39$  y  $R_o=93,000$  en un canal con pendiente  $S_o=1/170$  se muestran en la Figura 8b. La comparación de la simulación con los datos experimentales medidos a lo largo del eje del canal es razonable para la primera onda, pero va degenerando en ondas sucesivas del tren. Ello es debido a la presencia de ondas de choque para  $F_o=1.39$ , por lo que una simulación unidimensional no puede representar de forma rigurosa el patrón espacial del flujo. No obstante, el modelo usado da una estimación razonable de las características globales del movimiento en la dirección  $x$ , esto es, la amplitud y longitud de onda del resalto ondulatorio.



**Figura 8** | Simulaciones del perfil de la lámina de agua para resalto ondulatorio de (a)  $F_o=1.11$  y  $R_o=93,000$  (b)  $F_o=1.39$  y  $R_o=93,000$ . Comparación con medidas experimentales de Gotoh *et al.* (2005).

Los dos resaltos ondulatorios presentados en la Figura 8 corresponden a una capa límite totalmente desarrollada. Para mostrar el efecto de unas condiciones de aproximación diferentes, un resalto de  $F_o=1.366$ ,  $R_o=90,000$  y  $S_o=0.0014$  medido por Hager y Hutter (1984) se presenta en la Figura 9a. En este caso el resalto ondulatorio tiene una sección de aproximación donde la capa límite estaba desarrollada solo un 36% del calado. La simulaciones numéricas usando el presente modelo se incluyen en la misma figura. Se puede observar que la primera onda está bien aproximada por las simulaciones. Sin embargo, la comparación con el resto del tren de ondas no es aceptable. La discrepancia entre el modelo numérico y el físico parece estar dada por las condiciones del flujo de aproximación y por una caracterización inadecuada de la pérdida de carga. Esta pérdida puede estar asociada en este caso a las ondas de choque y a la capa límite de los cajeros, por lo que la ecuación (20) no es completamente satisfactoria en este problema. Para probar de forma indirecta esta hipótesis se ha simulado la primera onda mediante la ecuación (18) para la onda solitaria (pérdida de carga nula), y, en la sección de inflexión de la rama descendente de la misma, se ha conectado una onda cnoidal determinada mediante la integración de la ecuación (17). La pendiente en la sección inicial de la onda cnoidal ha sido determinada de forma que la solución numérica pase cerca del punto experimental correspondiente al primer valle. Se puede observar en la Figura 9b que el perfil híbrido compuesto por dos soluciones de flujo potencial es sensiblemente más realista que la integración numérica completa. Este resultado es contradictorio dado que el resalto ondulatorio es un flujo claramente turbulento, y, a pesar de que la red de corriente no da distribuciones realistas de velocidad y presión, la predicción del perfil de la superficie libre es en este caso precisa, si se separa el problema en una onda solitaria y otra cnoidal. Este resultado indica que el conocimiento sobre el cálculo de pérdidas de carga en un resalto ondulatorio es aún insatisfactorio, dado el delicado y sensible balance energético a lo largo del mismo, en el cual influyen notablemente las condiciones del flujo de aproximación, que determinan el valor real de  $H_o$ , así la función usada para determinar  $S_f$ .



**Figura 9** | Simulaciones del perfil de la lámina de agua para resalto ondulatorio de  $F_o=1.366$  y  $R_o=90,000$  (a) Solución numérica, (b) Soluciones analíticas de flujo potencial. Comparación con medidas experimentales de Hager y Hutter (1984).

## CONCLUSIONES

El resalto hidráulico ondulatorio es un fenómeno complejo, en el que las ondas de choque laterales, pérdidas de carga, condiciones del flujo de aproximación y la distribución no hidrostática de la presión, condicionan las características del mismo. Clasificar un resalto ondulatorio en función exclusivamente de  $F_o$  es cuestionable, dado que variaciones en las condiciones de aproximación, para ese mismo  $F_o$ , hacen que varíe  $H_o$ , y por tanto el patrón de las ondas, de forma considerable. Resulta deseable ampliar el conocimiento actual del patrón de flujo del resalto ondulatorio variando de forma sistemática todas las variables que condicionan el flujo de aproximación ( $R_o$ ,  $F_o$ , capa límite, distribución de la velocidad y de la presión, turbulencia, etc...) mediante ensayos en modelo físico.

La integración aproximada de la ecuaciones del Reynolds da un modelo de segundo orden que es capaz de predecir de forma global el efecto de la distribución de la presión no hidrostática en el resalto hidráulico ondulatorio. Sin embargo, los resultados no son siempre satisfactorios, lo que sugiere que las condiciones del flujo de aproximación, ondas de choque y una estimación más rigurosa de la pérdida de carga son necesarias en un modelo matemático predictivo.

## REFERENCIAS

- Benjamin, T.B., Lighthill, M.J. (1954). On cnoidal waves and bores. *Proceedings of the Royal Society of London A* 224, 448-460. doi:10.1098/rspa.1954.0172
- Bose, S.K., Dey, S. (2007). Curvilinear flow profiles based on Reynolds averaging. *Journal of Hydraulic Engineering*. 133(9): 1074-1079. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2007)133:9(1074)
- Boussinesq, J. (1877). Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, Paris 23, 1-680 [in French].

- Bose, S.K., Castro-Orgaz, O., Dey, S. (2012). Free surface profiles of undular hydraulic jumps. *Journal of Hydraulic Engineering*, 138(4), 362-366. doi:10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000510
- Castro-Orgaz, O., Chanson, H. (2011). Near-critical free-surface flows: Real fluid flow analysis. *Environmental Fluid Mechanics*, 11(5): 499-516. doi:10.1007/s10652-010-9192-x
- Castro-Orgaz, O., Hager, W.H. (2011a). Joseph Boussinesq and his theory of water flow in open channels. *Journal of Hydraulic Research*, 49(5): 569-577. doi:10.1080/00221686.2011.588784
- Castro-Orgaz, O., Hager, W.H. (2011b). Observations on undular hydraulic jump in movable bed. *Journal of Hydraulic Research*, 49(5): 689-692. doi:10.1080/00221686.2011.593879
- Castro-Orgaz, O., Hager, W.H. (2011c). Turbulent near-critical open channel flow: Serre's similarity theory. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137(5): 497-503. doi:10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000354
- Castro-Orgaz, O. (2010). Weakly undular hydraulic jump: Effects of friction. *Journal of Hydraulic Research*, 48(4): 453-465. doi:10.1080/00221686.2010.491646
- Chanson, H. (1993). Characteristics of undular hydraulic jumps. Res. Rep. CE146. Dept. Civ. Engng., University of Queensland, Brisbane Australia.
- Chanson, H. (1995). Flow characteristics of undular hydraulic jumps: Comparison with near-critical flows. Res. Rep. CH45/95. Dept. Civ. Engng., University of Queensland, Brisbane Australia.
- Chanson, H. (1996). Free surface flows with near critical flow conditions. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 23(6): 1272-1284. doi:10.1139/196-936
- Chanson, H. (2000). Boundary shear stress measurements in undular flows: Application to standing wave bed forms. *Water Resources Research*, 36(10): 3063-3076. doi:10.1029/2000WR900154
- Chanson, H. (2009). Current knowledge in hydraulic jumps and related phenomena: A survey of experimental results. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 28(2): 191-210. doi:10.1016/j.euromechflu.2008.06.004
- Chanson, H., Montes, J.S. (1995). Characteristics of undular hydraulic jumps: Experimental apparatus and flow patterns. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(2): 129-144. Discussion: 1997, 123(2): 161-164. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1995)121:2(129)
- Chaudhry, M.H. (2008). *Open-channel flow*, 2nd ed. Springer, New York. doi:10.1007/978-0-387-68648-6
- Fawer, C. (1937). Etude de quelques écoulements permanents à filets courbes. Thesis. Université de Lausanne. La Concorde, Lausanne, Switzerland [in French].
- Gotoh, H., Yasuda, Y., Ohtsu, I. (2005). Effect of channel slope on flow characteristics of undular hydraulic jumps. *Transactions Ecology and Environment*, 83: 33-42.
- Grillhofer, W., Schneider, W. (2003). The undular hydraulic jump in turbulent open channel flow at large Reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 15(3): 730-735. doi:10.1063/1.1538249
- Hager, W.H., Hutter, K. (1984). On pseudo-uniform flow in open channel hydraulics. *Acta Mechanica*, 53(3-4): 183-200. doi:10.1007/BF01177950
- Iwasa, Y. (1955). Undular jump and its limiting conditions for existence. *Proc. 5<sup>th</sup> Japan Natl. Congress Applied Mech.* II-14, 315-319.
- Mandrup-Andersen, V. (1978). Undular hydraulic jump. *Journal of the Hydraulics Division*. ASCE 104(HY8): 1185-1188; Discussion: 105(HY9): 1208-1211.
- Marchi, E. (1963). Contributo allo studio del risalto ondulato. *Giornale del Genio Civile* 101(9): 466-476.
- Montes, J.S. (1986). A study of the undular jump profile. *9<sup>th</sup> Australasian Fluid Mech. Conf.* Auckland, 148-151.

- Montes, J.S. (1998). *Hydraulics of open channel flow*. ASCE Press, Reston VA.
- Montes, J.S., Chanson, H. (1998). Characteristics of undular hydraulic jumps: Experiments and Analysis. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(2): 192-205. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1998)124:2(192)
- Ohtsu, I., Yasuda, Y., Gotoh, H. (2001). Hydraulic condition for undular jump formations. *Journal of Hydraulic Research*, 39(2): 203-209; Discussion 40(3): 379-384. doi:10.1080/00221680109499821
- Ohtsu, I., Yasuda, Y., Gotoh, H. (2003). Flow conditions of undular hydraulic jumps in horizontal rectangular channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(12): 948-955. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2003)129:12(948)
- Reinauer, R., Hager, W.H. (1995). Non-breaking undular hydraulic jump. *Journal of Hydraulic Research*, 33(5): 683-698; Discussion 34(2): 279-287; 34(4): 567-573. doi:10.1080/00221689509498564
- Ryabenko, A.A. (1990). Conditions for the favourable existence of an undulating jump. *Hydrotechnical Construction*, 24(12): 762-770. doi:10.1007/BF01434602
- Serre, F. (1953). Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*, 8(6-7): 830-872; 8(12): 830-887 [in French]. doi:10.1051/lhb/1953058
- White, F.M. (1991). *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, New York.