



Particularización de la teoría de la cinemática del sólido rígido al estudio del movimiento plano. Aplicación a un caso práctico

Apellidos, nombre	Llopis Cosín, Juan Vicente (jvllopis@fis.upv.es) Gasque Albalate, María (mgasque@fis.upv.es)
Departamento	Física Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica y del Medio Natural Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

La teoría de la Cinemática del Sólido Rígido (CSR) proporciona una herramienta esencial para el estudio de las asignaturas técnicas relacionadas con la cinemática y dinámica de máquinas, de especial interés en muchas ramas de la Ingeniería.

Los conceptos fundamentales empleados en la resolución de casos prácticos son: el campo de velocidades y su distribución geométrica, así como el eje instantáneo de rotación y sobre todo su estudio en un instante determinado.

Especial interés tiene su aplicación al estudio del movimiento plano donde son básicos el campo instantáneo de velocidades, su distribución triangular y su simetría circular respecto del Centro Instantáneo de Rotación (CIR), además del campo instantáneo de aceleraciones.

El estudio del movimiento plano permite el análisis gráfico con mayor facilidad que en tres dimensiones. Prácticamente la mayoría de modelos mecánicos en Ingeniería se pueden asimilar a modelos en dos dimensiones. El estudio de la cinemática del movimiento plano se realiza a partir de los elementos del torsor cinemático para el campo de velocidades, la aceleración angular y la aceleración de un punto. Tanto el campo de velocidades como el campo de aceleraciones son planos.

2 Objetivos

En el presente trabajo se propone el enunciado y la resolución detallada de un caso práctico de cinemática del sólido rígido.

Después de leer detenidamente este documento, el alumno será capaz de:

- Plantear la expresión del campo instantáneo de velocidades para poder determinar:
La velocidad de un punto y/o el vector rotación de un sistema indeformable en un instante determinado.

Las coordenadas del centro instantáneo de rotación CIR (I) como punto de velocidad nula en el instante del movimiento plano considerado, y la distribución de las velocidades de los puntos del sólido rígido respecto del CIR en dicho instante.
- Utilizar su capacidad de abstracción para su aplicación a un caso real.
- Plantear un problema con valores alfanuméricos, lo cual le permite el análisis posterior de distintas hipótesis relativas a la posición de sistema para el modelo propuesto.

3 Introducción

Aunque la teoría de la CSR proporciona una herramienta fundamental en diversas ramas de la Ingeniería, su estudio requiere capacidad de abstracción para, partiendo de modelos generales, saber las hipótesis admisibles para su aplicación a modelos concretos más sencillos.

En este artículo se aborda un caso práctico en el que se estudia un modelo de mecanismo cuya resolución implica la particularización para un sistema con movimiento plano. Esto permite la representación gráfica de los resultados, lo que contribuye a la mejor comprensión del funcionamiento del mecanismo.

4 Desarrollo

Para abordar la lectura de este artículo, se precisan conocimientos básicos de cinemática del sólido rígido. Algunos conceptos se irán revisando a lo largo del texto en recuadros de ayuda. Además, se han incluido referencias bibliográficas complementarias de carácter general en el apartado de Bibliografía.

El contenido presentado en este documento puede ser de gran utilidad dado que la resolución de un problema concreto proporciona la metodología general para la resolución de otros problemas con planteamientos similares.

4.1 Enunciado del problema

Un rodillo de centro C y radio R rueda sin deslizar entre dos cilindros concéntricos en el punto fijo O , uno de radio $4R$ que gira con rotación $\vec{\omega}_1 = -3\omega\vec{k}$ y otro de radio $6R$ que gira con rotación $\vec{\omega}_2 = -\omega\vec{k}$.

Para el movimiento del rodillo y en la posición representada en la Imagen 1, en la que la recta que une los centros O y C forma un ángulo φ con la horizontal, se pide:

- Velocidades de sus puntos de contacto con los dos cilindros.
- Rotación $\vec{\omega}_3$ y velocidad de su centro \vec{v}_C
- Coordenadas del CIR, $I(X_I, Y_I)$
- Particularizar los resultados para la posición del rodillo en la que $\varphi=90^\circ$.

Nota. Expresar los resultados en el sistema de referencia dado en función de los datos R , ω y φ .

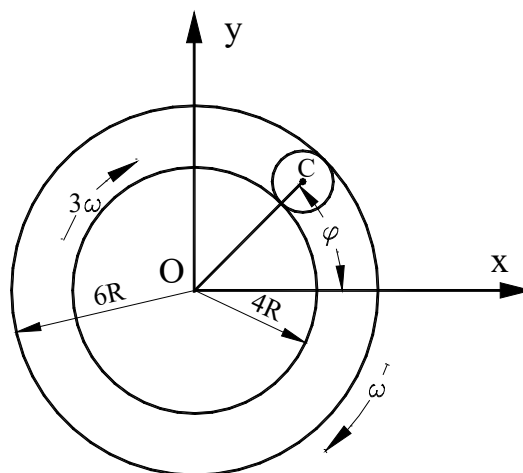


Imagen 1. Rodillo y cilindros en la posición en que se estudia su movimiento

4.2 Cálculo de las velocidades de los puntos del rodillo en contacto con los dos cilindros

En la Imagen 2 se han representado los puntos A y B del rodillo, siendo el punto A, el punto de contacto con el cilindro de menor radio ($4R$), y B el punto de contacto con el cilindro de mayor radio ($6R$).

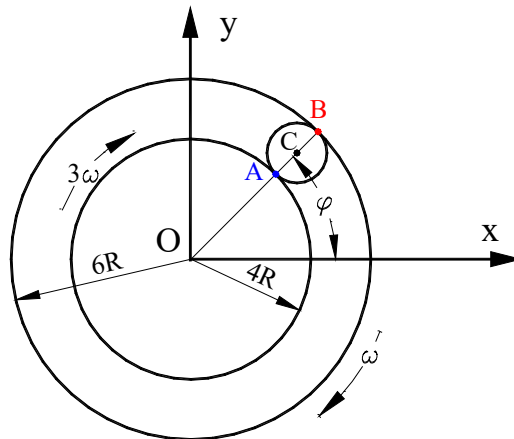



Imagen 2. Puntos A y B del rodillo en contacto con los cilindros de radio $4R$ y $6R$ respectivamente

El cálculo de las velocidades de A y B se hará a partir del campo de velocidades.

 El campo de velocidades establece la relación entre las velocidades de dos puntos pertenecientes a un sistema. Si los puntos son A y B, la expresión será: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \overline{AB} \wedge \vec{\omega}_{AB}$

En el ejemplo del mecanismo representado en la Imagen 3, la longitud de la barra AB es L y los puntos A y B deslizan sobre unas guías. La velocidad del punto B es conocida, siendo $\vec{v}_B = \vec{v}$ en el instante representado.

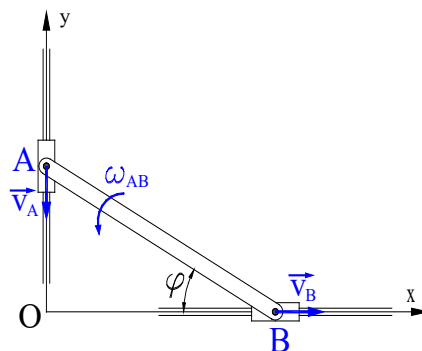


Imagen 3. Ejemplo para la aplicación del campo de velocidades

El punto A, cuya velocidad se pretende determinar, desliza sobre la vertical: $\vec{v}_A = v_A \vec{j}$.



En la ecuación del campo de velocidades, $\vec{\omega}$ es el vector rotación, representa la rotación que caracteriza al movimiento, tiene dimensiones de velocidad angular y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A y B (plano director), con lo que $\vec{\omega} = \omega_{AB} \vec{k}$

Al ser $\vec{AB} = L \cos\varphi \vec{i} - L \sin\varphi \vec{j}$, sustituyendo en la expresión del campo de velocidades se pueden determinar, tanto la velocidad del extremo A, como la rotación de la barra en función de los datos: L , v , y φ .

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{AB} \wedge \vec{\omega}_{AB} = v \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L \cos\varphi & -L \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \end{vmatrix}$$

Operando, resulta la expresión vectorial: $v_A \vec{j} = v \vec{i} - \omega_{AB} L \sin\varphi \vec{i} - \omega_{AB} L \cos\varphi \vec{j}$

Que da lugar a dos ecuaciones escalares, que nos permiten determinar dos incógnitas, en este caso v_A y ω_{AB}

$$0 = v - \omega_{AB} L \sin\varphi \quad [1]$$

$$v_A = -\omega_{AB} L \cos\varphi \quad [2]$$

De la ecuación [1] se obtiene: $\omega_{AB} = \frac{v}{L \sin\varphi}$

y al sustituir este valor en [2], resulta: $v_A = -v \operatorname{tg}\varphi$

Por tanto, la velocidad del punto A es: $\vec{v}_A = v_A \vec{j} = -v \operatorname{tg}\varphi \vec{j}$

y el vector rotación: $\vec{\omega}_{AB} = \omega_{AB} \vec{k} = \frac{v}{L \sin\varphi} \vec{k}$

- Determinación de la velocidad del punto A de contacto del rodillo con el cilindro de menor radio $4R$.

Campo de velocidades en el cilindro de radio $4R$: $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{AO} \wedge \vec{\omega}_1$

Teniendo en cuenta que: $\vec{v}_O = 0$, $\vec{\omega}_1 = -3\omega \vec{k}$, y $\vec{AO} = -4R \cos\varphi \vec{i} - 4R \sin\varphi \vec{j}$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{AO} \wedge \vec{\omega}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4R \cos\varphi & -4R \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -3\omega \end{vmatrix}$$

Operando, se obtiene la velocidad del punto A: $\vec{v}_A = 12R\omega \sin\varphi \vec{i} - 12R\omega \cos\varphi \vec{j}$

- Determinación de la velocidad del punto B de contacto del rodillo con el cilindro de mayor radio $6R$.

Campo de velocidades en el cilindro de radio $6R$: $\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{BO} \wedge \vec{\omega}_2$


Teniendo en cuenta que: $\vec{v}_O = 0$, $\vec{\omega}_2 = -\omega \vec{k}$, y $\vec{BO} = -6R \cos\varphi \vec{i} - 6R \sin\varphi \vec{j}$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\omega}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6R\cos\varphi & -6R\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \end{vmatrix}$$

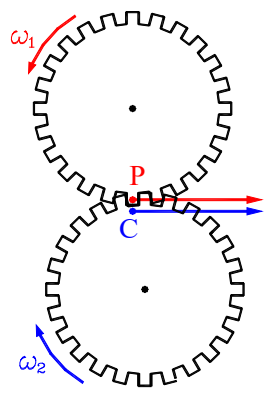
Operando, se obtiene la velocidad del punto B: $\vec{v}_B = 6R\omega\sin\varphi\vec{i} - 6R\omega\cos\varphi\vec{j}$

4.3 Cálculo de la rotación del rodillo $\vec{\omega}_3$ y de la velocidad de su centro \vec{v}_C

Al haber contacto puntual permanente con rodadura (el rodillo rueda sin deslizar entre los dos cilindros), las velocidades en los puntos A y B para el rodillo de radio R son las calculadas previamente.

 Cuando hay contacto puntual con rodadura (sin deslizamiento), los puntos P y C en contacto, tienen la misma velocidad. En la Imagen 4 se incluyen dos ejemplos.

(a)



(b)

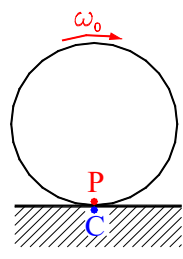


Imagen 4. Contacto puntual con rodadura: los puntos P y C en contacto, tienen la misma velocidad.
 (a) $\vec{v}_P = \vec{v}_C \neq 0$; (b) $\vec{v}_P = \vec{v}_C = 0$.

A partir del campo de velocidades entre los puntos A y B para el rodillo, se calcula $\vec{\omega}_3$:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\omega}_3$$

Sustituyendo los valores de \vec{v}_A , \vec{v}_B , y $\overrightarrow{AB} = 2R \cos\varphi \vec{i} + 2R \sin\varphi \vec{j}$:


$$12R\omega\sin\varphi\vec{i} - 12R\omega\cos\varphi\vec{j} = 6R\omega\sin\varphi\vec{i} - 6R\omega\cos\varphi\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2R\cos\varphi & 2R\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{vmatrix}$$

Operando y descomponiendo en componentes escalares, se llega a la misma ecuación:

$$12R\omega\sin\varphi = 6R\omega\sin\varphi + 2R\sin\varphi\omega_3$$

$$-12R\omega\cos\varphi = -6R\omega\cos\varphi - 2R\cos\varphi\omega_3$$

Simplificando se obtiene: $6R\omega = 2R\omega_3$, de donde $\omega_3 = 3\omega$, y vectorialmente $\vec{\omega}_3 = 3\omega\vec{k}$

 El campo de velocidades de un sólido rígido tiene la misma expresión que el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes y presenta la propiedad equiproyectiva.

Por analogía, el campo de velocidades de un sólido rígido se considera como el campo de momentos asociado a un torsor. Al conjunto de $\vec{\omega}$ y \vec{v}_A se le llama torsor cinemático del sistema indeformable en el punto A, $T_{CA}(\vec{\omega}, \vec{v}_A)$.

Un sólido rígido tiene un movimiento plano (en un instante) si $\vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0$ siendo $\vec{\omega}$ la rotación que caracteriza el movimiento y \vec{v} la velocidad de un punto cualquiera (elementos del torsor cinemático). Una traslación es un movimiento plano pues $\vec{\omega} = 0$ y una rotación también lo es pues $\vec{\omega}$ y \vec{v} son perpendiculares.

Conocido el torsor cinemático del rodillo en A:

$$T_{CA} = [\vec{\omega}_3 = 3\omega\vec{k}, \vec{v}_A = 12R\omega\text{sen}\varphi\vec{i} - 12R\omega\text{cos}\varphi\vec{j}]$$


Se puede calcular \vec{v}_C a partir del campo de velocidades entre C y A: $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{CA} \wedge \vec{\omega}_3$

Sustituyendo los valores de \vec{v}_A , $\vec{\omega}_3$, y $\vec{CA} = -R\text{cos}\varphi\vec{i} - R\text{sen}\varphi\vec{j}$:

$$\vec{v}_C = 12R\omega\text{sen}\varphi\vec{i} - 12R\omega\text{cos}\varphi\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\text{cos}\varphi & -R\text{sen}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega \end{vmatrix}$$

Operando por componentes queda: $\vec{v}_C = 9R\omega\text{sen}\varphi\vec{i} - 9R\omega\text{cos}\varphi\vec{j}$

4.4 Cálculo de las coordenadas del Centro Instantáneo de Rotación (CIR) del rodillo, $I(X_I, Y_I)$

 El punto intersección del eje instantáneo de rotación con el plano director del movimiento es el centro instantáneo de rotación (CIR ó I), siendo el único punto del plano director que en ese instante tiene velocidad nula ($\vec{v}_I = 0$), reduciéndose el movimiento a una rotación $\vec{\omega}$ alrededor del CIR

En el mecanismo del ejemplo (Imagen 5), en el que el torsor cinemático en el punto B es $T_{CB} = [\vec{\omega}_{AB} = \frac{v}{L\text{sen}\varphi}\vec{k}, \vec{v}_B = v\vec{i}]$, al ser $\vec{v}_I = 0$, aplicando el campo de velocidades entre B($L\text{cos}\varphi, 0$) e $I(X_I, Y_I)$: $\vec{v}_B = \vec{v}_I + \vec{BI} \wedge \vec{\omega}_{AB}$

Sustituyendo valores:

$$v\vec{i} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_I - L\text{cos}\varphi & Y_I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v}{L\text{sen}\varphi} \end{vmatrix}$$

Al operar e igual a cero por componentes resulta:

$$v = Y_I \cdot \frac{v}{L \operatorname{sen} \varphi}$$

$$0 = -(X_I - L \operatorname{cos} \varphi) \cdot \frac{v}{L \operatorname{sen} \varphi}$$

Resolviendo, se obtienen las coordenadas del CIR:

$$X_I = L \operatorname{cos} \varphi$$

$$Y_I = L \operatorname{sen} \varphi$$

El CIR es el punto de coordenadas: $I(X_I, Y_I) = (L \operatorname{cos} \varphi, L \operatorname{sen} \varphi)$

En el ejemplo de la Imagen 5 se ha representado gráficamente el CIR obtenido analíticamente

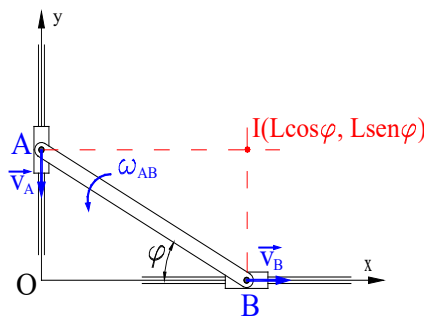


Imagen 5. Representación gráfica del CIR

Para el cálculo del CIR (I) se considera el torsor cinemático en un punto, en este caso se propone el punto C: $T_{CC} = [\vec{\omega}_3 = 3\omega \vec{k}, \vec{v}_C = 9R\omega \operatorname{sen} \varphi \vec{i} - 9R\omega \operatorname{cos} \varphi \vec{j}]$

Aplicando el campo de velocidades entre I y C imponiendo la condición de que $I(X_I, Y_I)$ tiene velocidad $\vec{v}_I = 0$

$$\vec{v}_I = \vec{v}_C + \vec{IC} \wedge \vec{\omega}_3 = 9R\omega \operatorname{sen} \varphi \vec{i} - 9R\omega \operatorname{cos} \varphi \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (5R \operatorname{cos} \varphi - X_I) & (5R \operatorname{sen} \varphi - Y_I) & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega \end{vmatrix}$$

Siendo $C(5R \operatorname{cos} \varphi, 5R \operatorname{sen} \varphi)$, con lo que $\vec{IC} = (5R \operatorname{cos} \varphi - X_I) \vec{i} + (5R \operatorname{sen} \varphi - Y_I) \vec{j}$

Operando e igualando a cero por componentes:

$$9R\omega \operatorname{sen} \varphi + (5R \operatorname{sen} \varphi - Y_I) \cdot 3\omega = 0$$

$$-9R\omega \operatorname{cos} \varphi - (5R \operatorname{cos} \varphi - X_I) \cdot 3\omega = 0$$

Resolviendo, se obtienen las coordenadas del CIR:

$$9R\omega \operatorname{sen} \varphi + 15R\omega \operatorname{sen} \varphi - Y_I 3\omega = 0$$

$$24R\omega \operatorname{sen} \varphi - Y_I 3\omega = 0 \rightarrow Y_I = 8R \operatorname{sen} \varphi$$

$$-9R\omega \operatorname{cos} \varphi - 15R\omega \operatorname{cos} \varphi + X_I 3\omega = 0$$

$$-24R\omega \operatorname{cos} \varphi + X_I 3\omega = 0 \rightarrow X_I = 8R \operatorname{cos} \varphi$$

Estando $I(8R\cos\varphi, 8R\sin\varphi)$ situado en la recta que une O y C a una distancia de O de valor $8R$.

4.5 Particularización de los resultados a la posición del rodillo en la que $\varphi=90^\circ$

Para particularizar la posición $\varphi=90^\circ$ es la más elevada del rodillo

Se sustituye $\sin\varphi=\sin 90^\circ=1$ y $\cos\varphi=\cos 90^\circ=0$

Sustituyendo estos valores y operando resulta:

Apartado	Resultado
4.2	$\vec{v}_A = 12R\omega\vec{i}$ y $\vec{v}_B = 6R\omega\vec{i}$
4.3	$\vec{\omega}_3 = 3\omega\vec{k}$ y $\vec{v}_C = 9R\omega\vec{i}$
4.4	$I(X_I = 0, Y_I = 8R)$

Como resumen, se ha representado esta posición en la Imagen 6

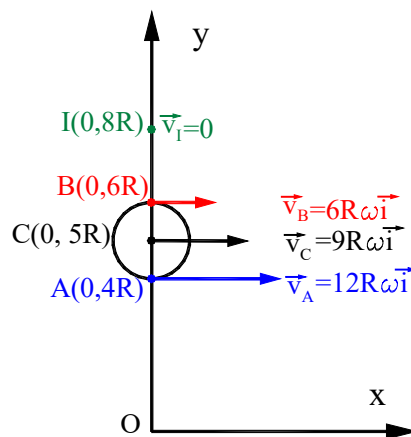


Imagen 6. Particularización de los resultados obtenidos a la posición más elevada del rodillo

5 Cierre

A lo largo de este objeto de aprendizaje se ha planteado y resuelto un problema de cinemática del sólido rígido aplicado a un mecanismo real. Se ha trabajado analíticamente con las fórmulas básicas de la cinemática como el campo de velocidades y utilizando los conceptos fundamentales como Torsor Cinemático y Centro Instantáneo de Rotación. Con ello se pretende proporcionar una metodología general que permita el análisis y la resolución de otros casos con planteamientos similares. En este problema con valores literales de las magnitudes, se ha cuidado mucho la resolución desde el punto de vista de las dimensiones de los resultados obtenidos. Por todo ello este trabajo puede ser de interés para el estudio de las asignaturas relacionadas con la cinemática y la dinámica pertenecientes a los primeros cursos de Física de las titulaciones técnicas.



6 Bibliografía

6.1 Libros:

J. M. Bastero y J. Casellas. "Curso de mecánica", EUNSA,1976, pág 29-30.

L. Ortiz Berrocal. "Curso de Mecánica Teórica. Cinemática", Litoprint, 1973, 264 pp.

R. Annequin y J. Boutigny. "Curso de ciencias físicas. Mecánica 2", Editorial Revertè, 1978, pág 63-83.

F. Belmar, A. Garmendia y J. LLinares. "Curso de física aplicada. Estática", SPUPV-87-330, 1987, pág 99-136.

6.2 Artículos:

J. V. Llopis Cosin, C. Rubio Michavila, M. Gasque Albalate, S. Quiles Casado. "Study of the kinematics of rigid body using the sliding vectors' theory", 6th International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI 2013), IATED Publications, 2013, pág 1136-1143. ISSN 978-84-616-3847-5.